



Politechnika
Wrocławska



MODELOWANIE I IDENTYFIKACJA
SPRAWOZDANIE 3

Autor:
GRZEGORZ SĘK

Prowadzący zajęcia:
DR HAB. INŻ. PAWEŁ WACHEL

Termin zajęć:
Poniedziałek, 15:15
Semestr letni 2020/2021

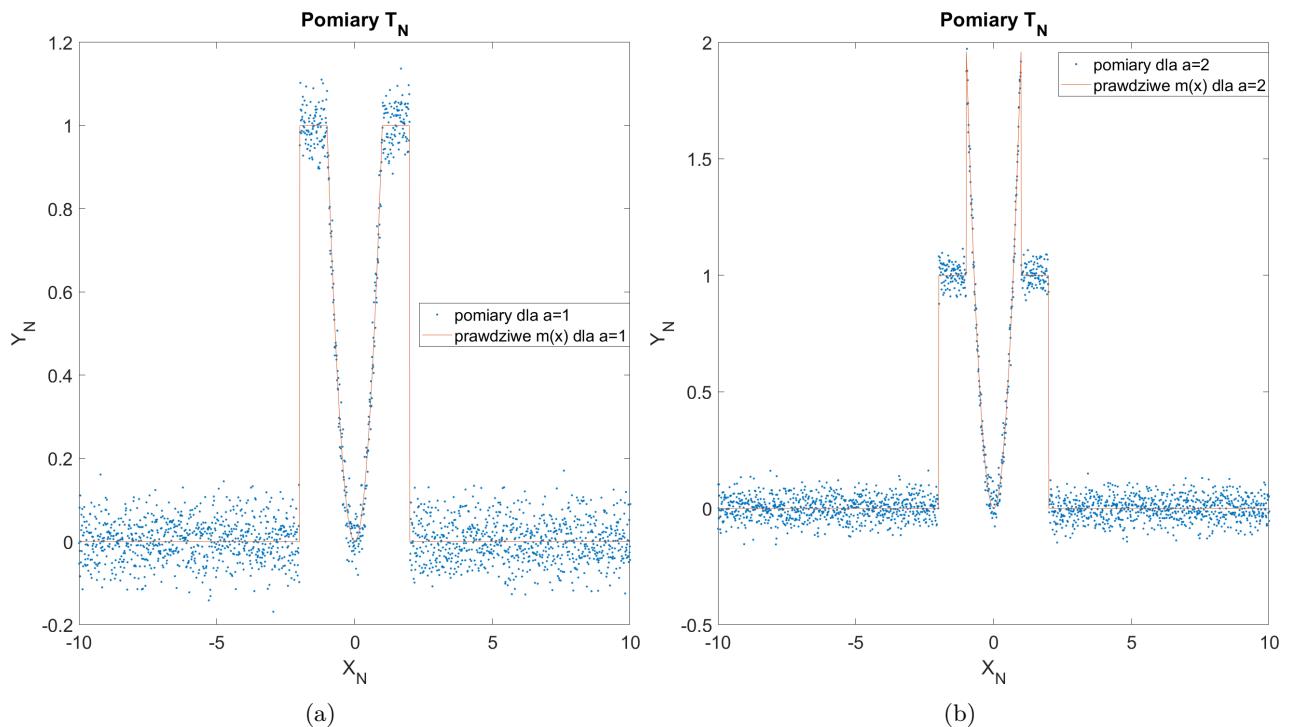
Spis treści

1 Laboratorium 7 – nieparametryczna identyfikacja statycznych systemów nielinowych	2
1.1 wykreślenie "chmury" pomiarów wraz z nieliniową charakterystyką systemu	2
1.2 Wykreślenie estymatora w funkcji x na tle prawdziwej charakterystyki $m(x)$ dla ustalonej wartości N i kilku wartości parametru L	3
1.3 Wyznaczenie wartości L , która minimalizuje błąd:	3
1.4 Powtórzone badania dla zakłócenia o rozkładzie Cauchy'ego	6
1.4.1 Chmura pomiarów dla zakłócenia o rozkładzie Cauchy'ego	6
1.4.2 Wykreślenie estymatora w funkcji x na tle prawdziwej charakterystyki $m(x)$ dla ustalonej wartości N i kilku wartości parametru L	7
1.4.3 Wyznaczenie wartości L , która minimalizuje błąd	8
1.4.4 Wpływ parametru γ na "chmurę" pomiarów	9
1.5 Zadanie dodatkowe – charakterystyka systemu, która nie jest funkcją parzystą	10
2 Laboratorium 8 – identyfikacja statycznych systemów liniowych typu MISO. Metoda najmniejszych kwadratów w ujęciu podstawowym	11
2.1 Macierz kowariancji estymatora \hat{a}_N	12
2.2 Wykreślenie błędu dla ustalonego sygnału wejściowego X_n	12
2.3 Zadanie dodatkowe 1 – eksperyment symulacyjny, w którym wymiar D wektora parametrów a^* jest związany z liczbą obserwacji wejścia/wyjścia systemu poprzez zależności: $D = \lfloor N^{\frac{1}{3}} \rfloor$, $D = \lceil N^{\frac{1}{2}} \rceil$ i $D = N$	14
3 laboratorium 9 – Identyfikacja statycznych systemów liniowych typu MISO.	15
3.1 Wyznaczenie macierzy kowariancji \mathbf{R} wektora Z_N	15
3.2 Przedstawienie graficzne macierzy kowariancji estymatora \hat{a}_N	15
3.3 Wpływ parametru b_1 na macierz kowariancji estymatora \hat{a}_N	17
3.4 Wpływ wariancji zakłócenia na macierz kowariancji estymatora \hat{a}_N	17
3.5 Wykreślenie błędu w zależności od liczby próbek	18
4 Dodatek	19
4.1 Obliczenia do wyznaczenia macierzy kowariancji R wektora Z_N	20

Rozdział 1

Laboratorium 7 – nieparametryczna identyfikacja statycznych systemów nieliniowych

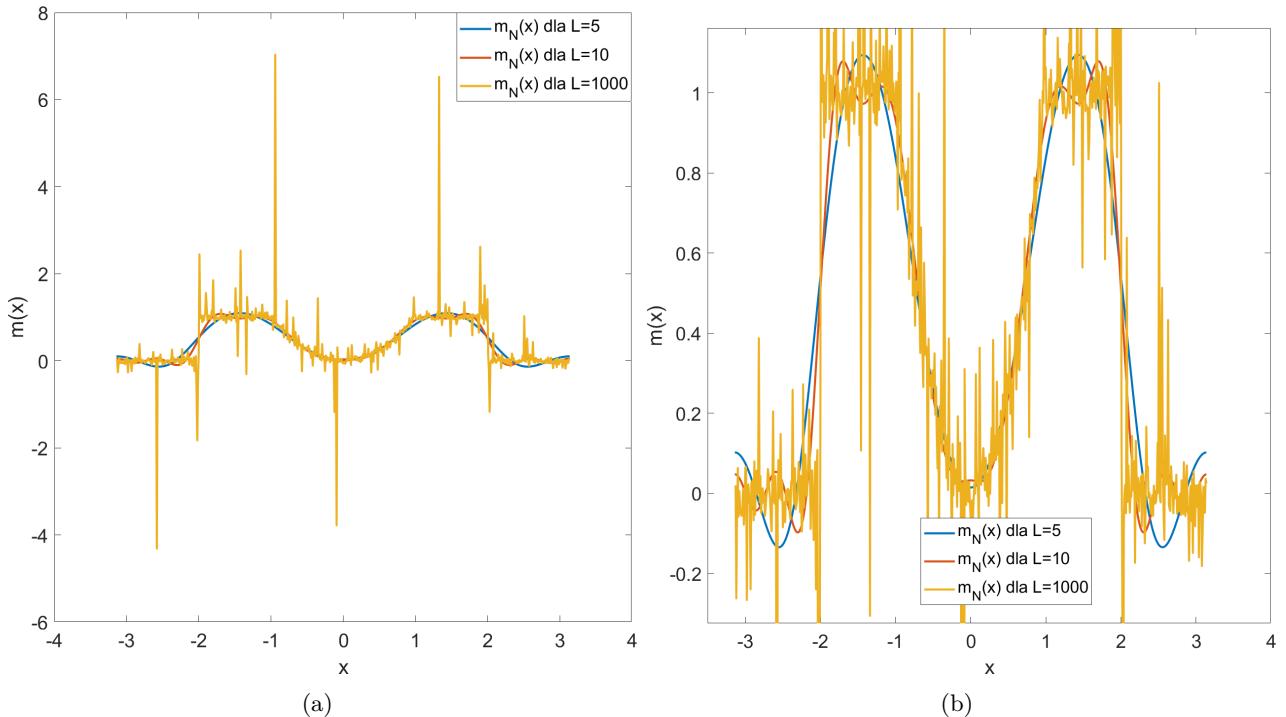
1.1 wykreslenie "chmury" pomiarów wraz z nieliniową charakterystyką systemu.



Rysunek 1.1. chmura pomiarów dla $N=1000$ i a) $a=1$ b) $a=2$

Na rysunku (Rysunek 1.1) została wykreślona "chmura" pomiarów wraz z nieliniową charakterystyką systemu. Przyjęty sygnał zakłócający jest generowany z rozkładu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, gdzie $\mu = 0$ a $\sigma^2 = 0.05$

1.2 Wykreślenie estymatora w funkcji x na tle prawdziwej charakterystyki $m(x)$ dla ustalonej wartości N i kilku wartości parametru L .

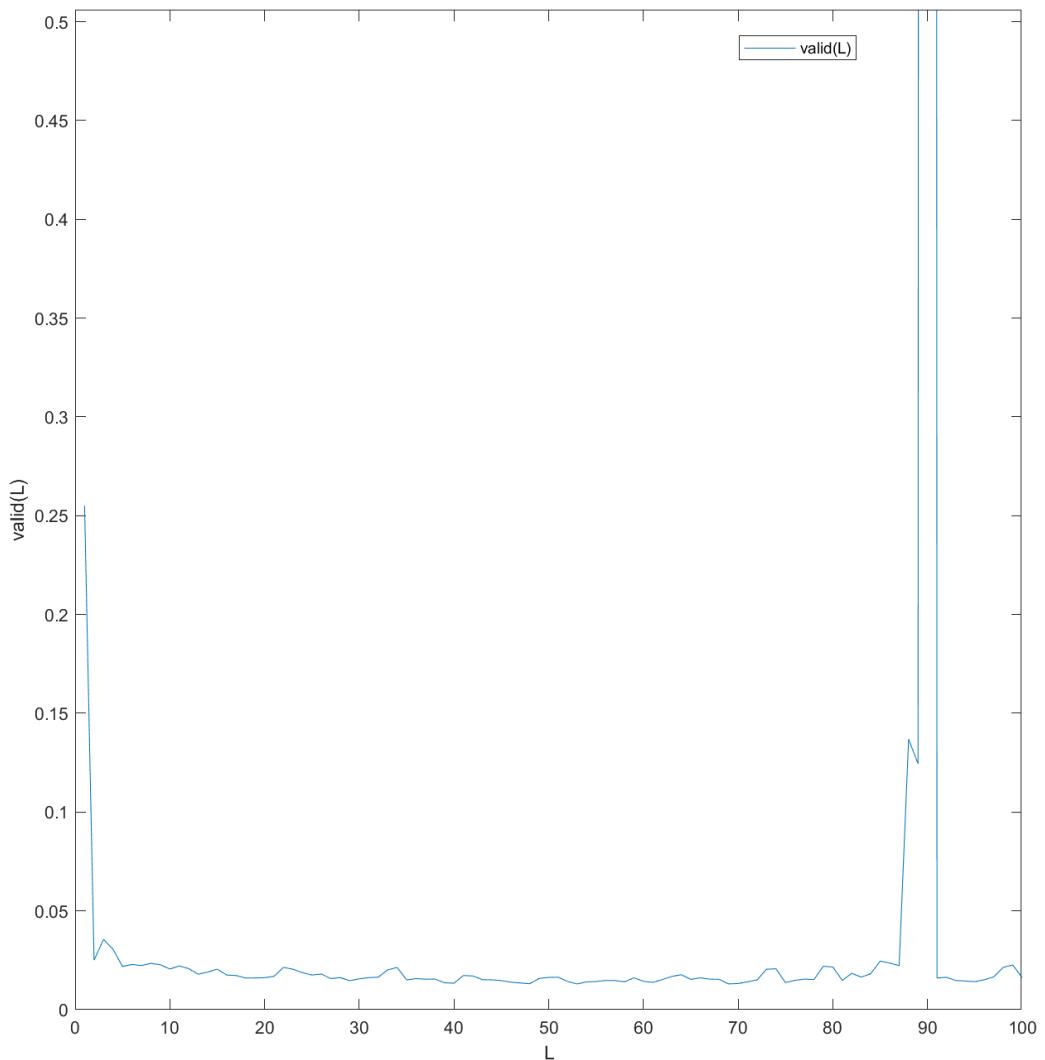


Rysunek 1.2. Estymator $\hat{m}_N(x)$ dla różnych wartości L a) bez przybliżenia b) z przybliżeniem

Jak można zauważyć parametr L ma duży wpływ na kształt funkcji. Zwiększanie wartości L powoduje, że wykres zbliża się kształtem do prawdziwej charakterystyki $m(x)$. Jednak zbyt duże L sprawia, że mogą pojawić się punkty w dużej odległości od prawdziwej charakterystyki $m(x)$, co widać na rysunku (Rysunek 1.2a). Zatem można znaleźć taką wartość L , dla której błąd będzie najmniejszy a wykres będzie najbardziej zbliżony do $m(x)$.

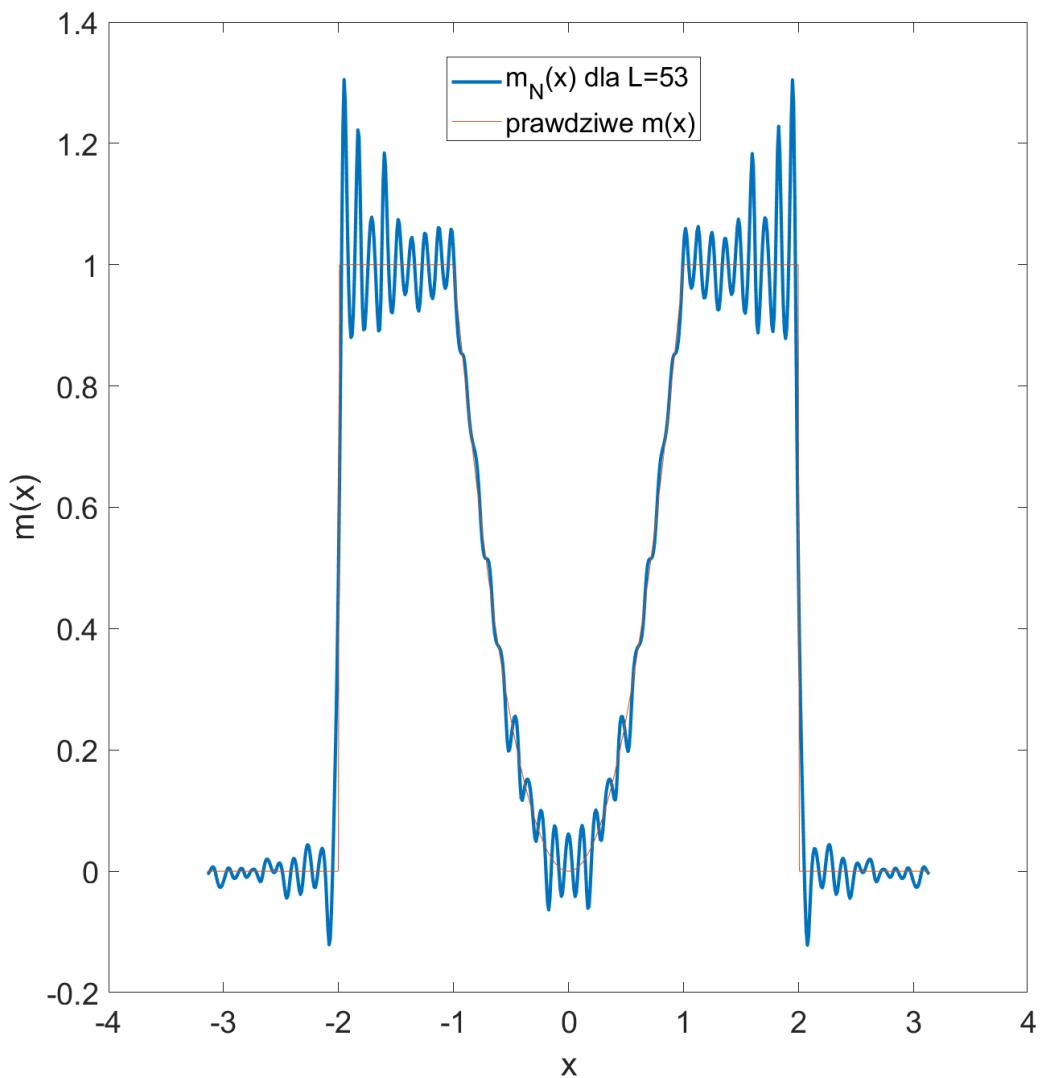
1.3 Wyznaczenie wartości L , która minimalizuje błąd:

$$valid(L) = \frac{1}{2Q} \sum_{q=-Q}^Q \left[\hat{m}_N \left(\frac{2q}{Q} \right) - m \left(\frac{2q}{Q} \right) \right]^2 \quad (1.1)$$



Rysunek 1.3. Zależność wartości błędu od wartości parametru L

Najmniejszy błąd udało się uzyskać dla około $L = 53$. Natomiast na wykresie można jeszcze zauważać nagły wzrost błędu w okolicach wartości $L = 90$. Prawdopodobnie jest to spowodowane tym, co było widoczne na rysunku (Rysunek 1.1) – czyli punktami w dużej odległości od prawdziwego $m(x)$.

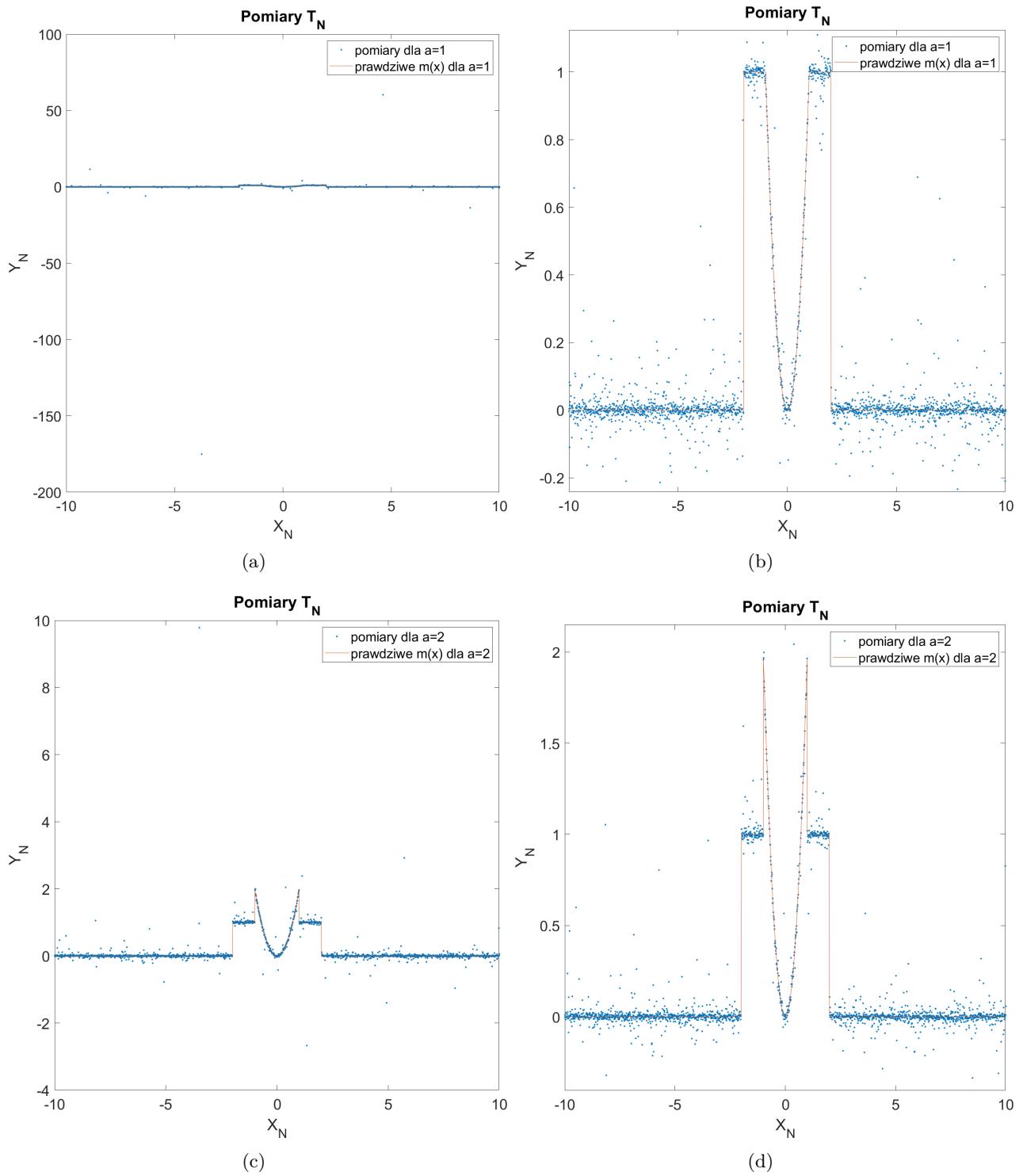


Rysunek 1.4. \hat{m}_N dla wartości $L = 53$, dla której uzyskano najmniejszy błąd

Jak widać na rysunku wyżej, mimo dobrania wartości parametru L , dla której uzyskano najmniejszy błąd, wciąż estymator ortogonalny nie działa idealnie.

1.4 Powtórzone badania dla zakłócenia o rozkładzie Cauchy'ego

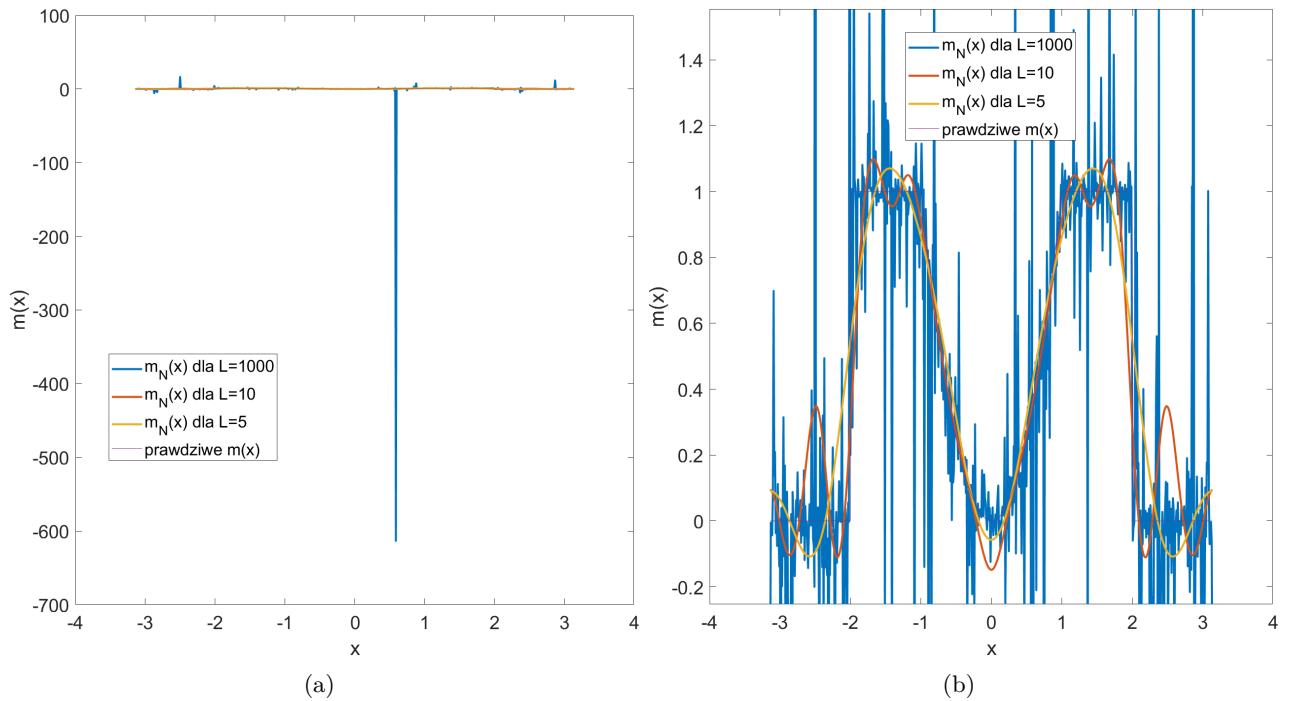
1.4.1 Chmura pomiarów dla zakłócenia o rozkładzie Cauchy'ego



Rysunek 1.5. chmura pomiarów dla N=1000 i a)b) a=1 c)d) a=2

Jak widać na rysunku wyżej, cechy rozkładu Cauchy'ego, czyli brak wartości oczekiwanej i wariancji, przenoszą się na "chmurę" pomiarów. Dzieje się to w wyniku wylosowania bardzo dużych lub bardzo małych liczb.

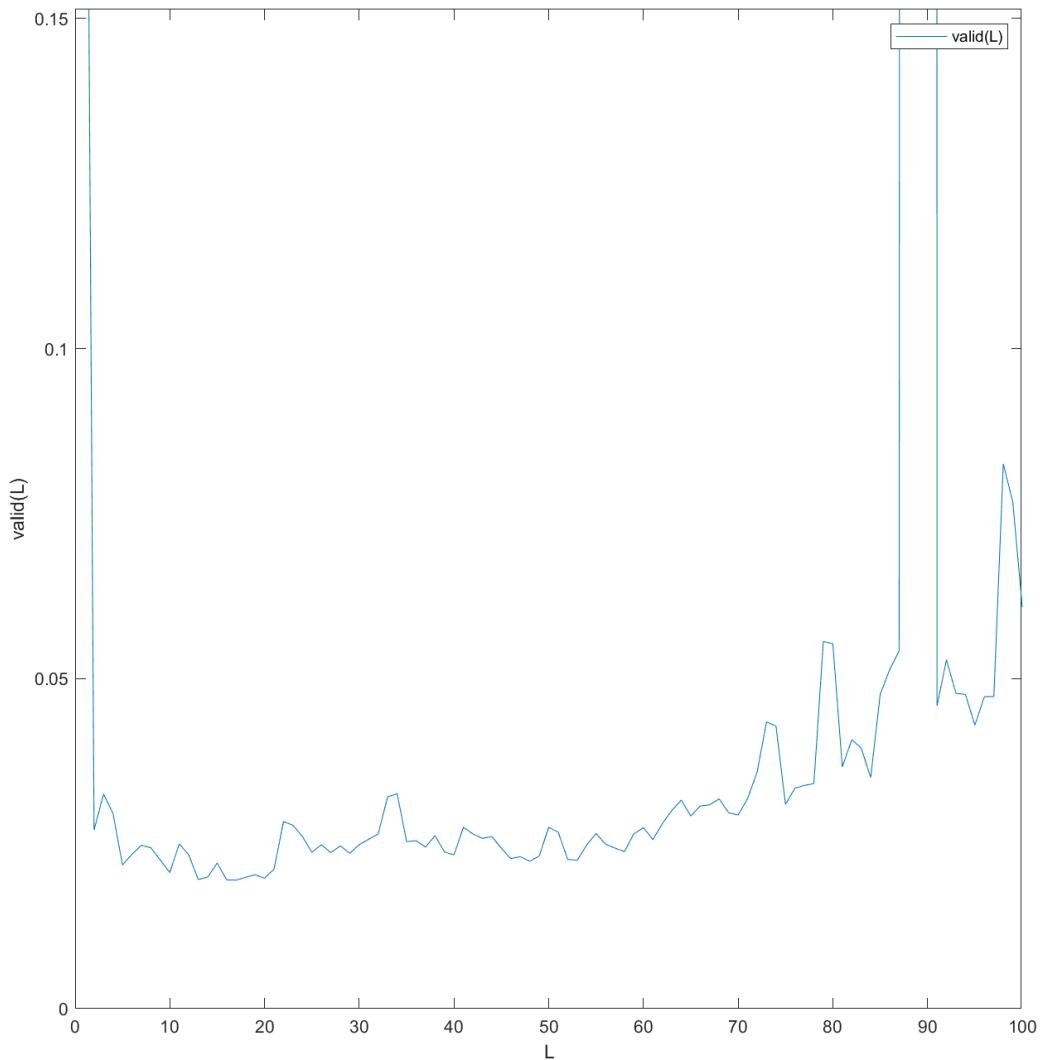
1.4.2 Wykreślenie estymatora w funkcji x na tle prawdziwej charakterystyki $m(x)$ dla ustalonej wartości N i kilku wartości parametru L



Rysunek 1.6. Różne wartości L

Tutaj ponownie można zauważyc negatywny wpływ rozkładu Cauchy'ego na kształt wykresu przy dużych wartościach parametru L . Dla małych wartości parametru L estymator ortogonalny radzi sobie całkiem dobrze.

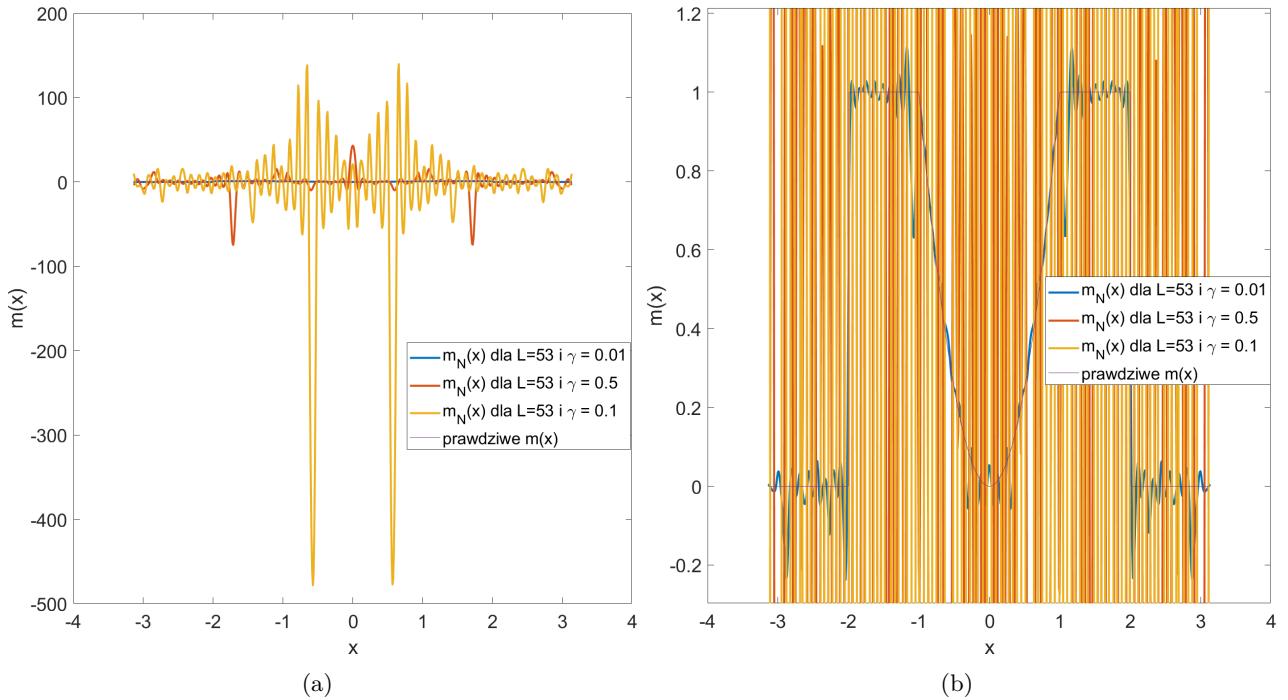
1.4.3 Wyznaczenie wartości L , która minimalizuje błąd



Rysunek 1.7. Błąd

W przypadku rozkładu Cauchy'ego nie da się wyznaczyć wartości L , dla której błąd jest najmniejszy. Z każdym kolejnym uruchomieniem programu uzyskana najlepsza wartość L jest inna i różni się od siebie znaczco. Jednak, co ciekawe, dokładnie w tym samym miejscu co dla zakłócenia z rozkładu normalnego, a mianowicie w okolicach $L = 90$, pojawia się nagły wzrost wartości błędu. Niestety nie udało się uzyskać odpowiedzi co powoduje taki wynik.

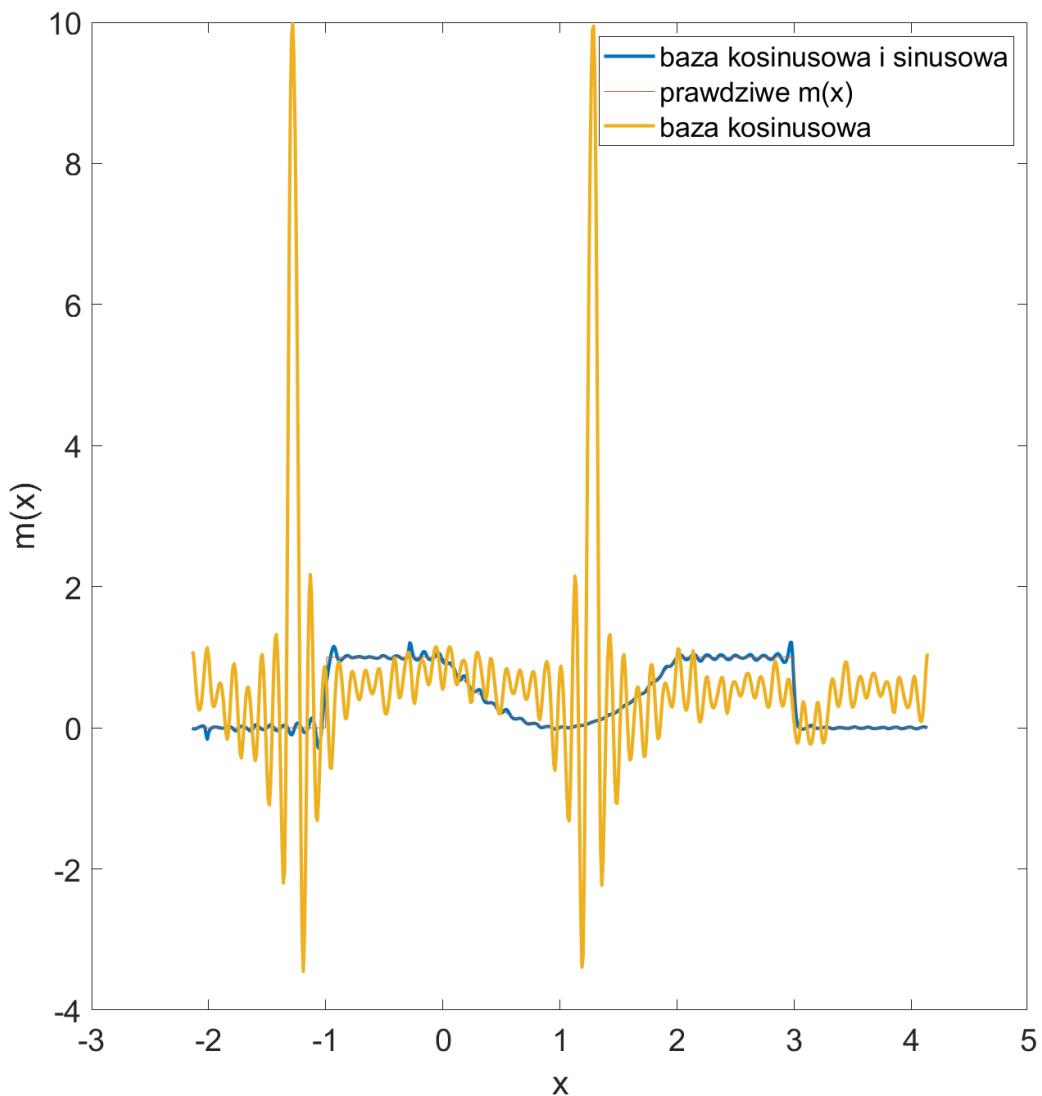
1.4.4 Wpływ parametru γ na "chmurę" pomiarów



Rysunek 1.8. Różne wartości L

Zwiększenie wartości parametru γ powoduje, że losowane liczby z rozkładu Cauchy'ego częściej przyjmują wartości dalsze od zera. W związku z tym zakłócenie wzrasta wraz ze wzrostem wartości γ , co widać na powyższym rysunku.

1.5 Zadanie dodatkowe – charakterystyka systemu, która nie jest funkcją parzystą



Rysunek 1.9. Porównanie bazy kosinusowej z bazą kosinusową i sinusoidalną

Jak można zauważyć na rysunku, baza która posiada elementy zarówno kosinusowe jak i sinusoidalne wpływa na estymację znacznie lepiej niż baza składająca się tylko z elementów kosinusowych.

Rozdział 2

Laboratorium 8 – identyfikacja statycznych systemów liniowych typu MISO. Metoda najmniejszych kwadratów w ujęciu podstawowym

Dany jest statyczny system liniowy typu MISO o $D = 10$ wejściach, opisany równaniem:

$$Y_n = X_n^T a^* + Z_n, \quad (2.1)$$

gdzie $X_n = [X_{n1}, X_{n2}, \dots, X_{nD}]^T$, $a^* = [a_1^*, a_2^*, \dots, a_D^*]^T$ oraz $Y_n, Z_n \in \mathcal{R}^1$.

Założono, że wektor a^* ma postać:

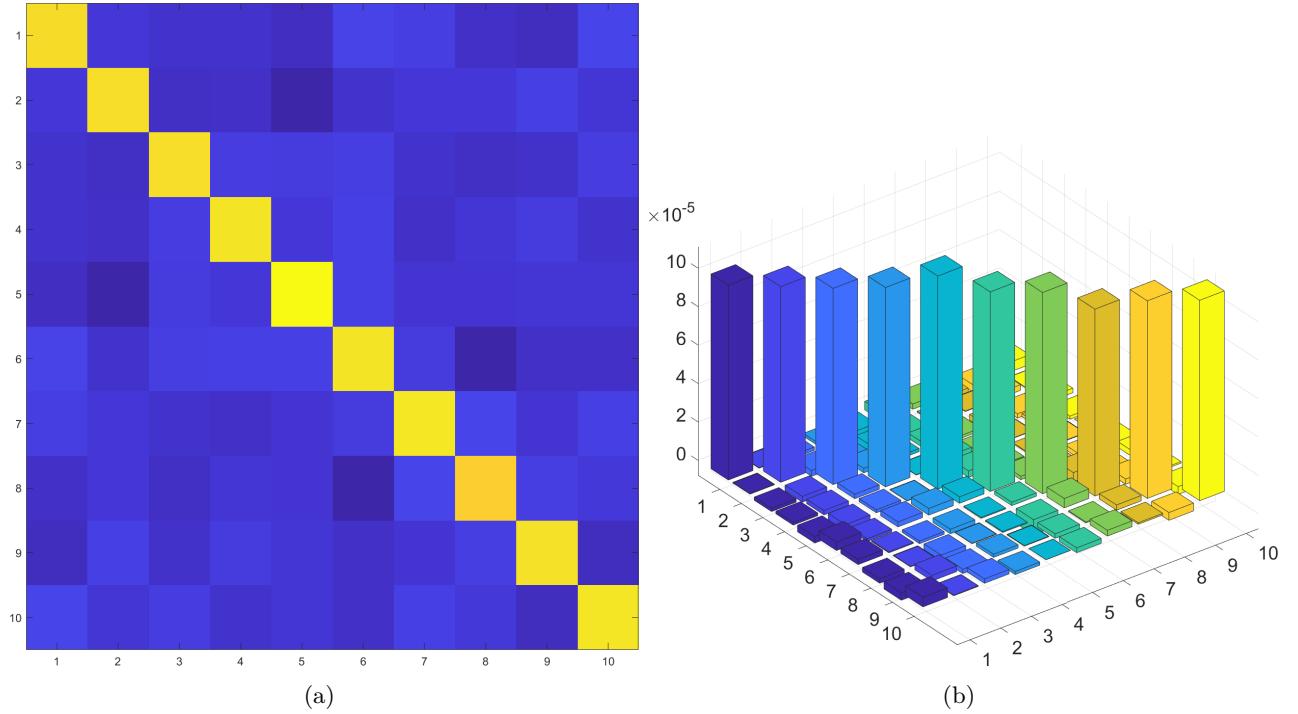
$$a^* = [2.5 \ 1 \ 0.5 \ 3.5 \ 2.1 \ 5.6 \ 7.2 \ 9.1 \ 4.6 \ 7.5]$$

Sygnał zakłócający generowany jest z rozkładu $\mathcal{N}(0, 0.1)$

Estymator MNK parametru a^* został skonstruowany zgodnie ze wzorem:

$$\hat{a}_N = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T Y_N \quad (2.2)$$

2.1 Macierz kowariancji estymatora \hat{a}_N

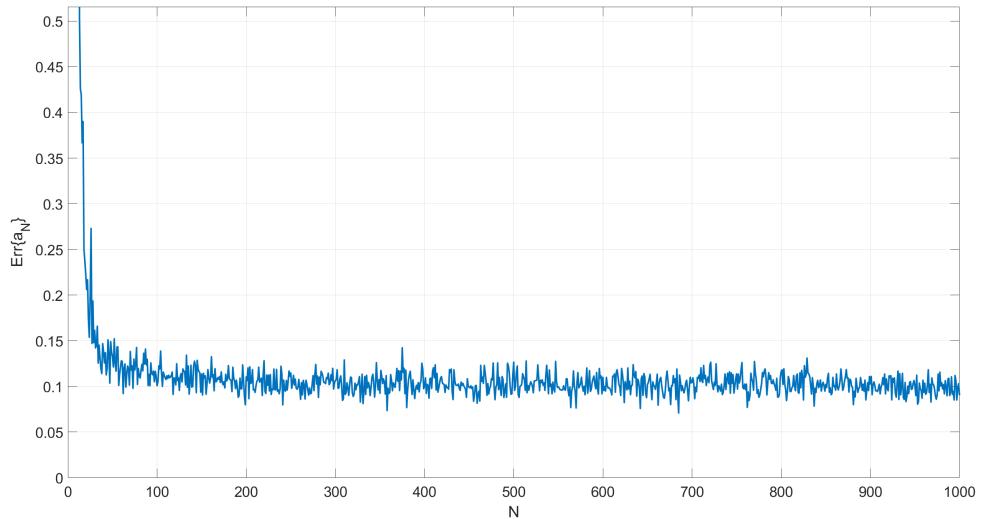


Rysunek 2.1. Macierz kowariancji estymatora \hat{a}_N

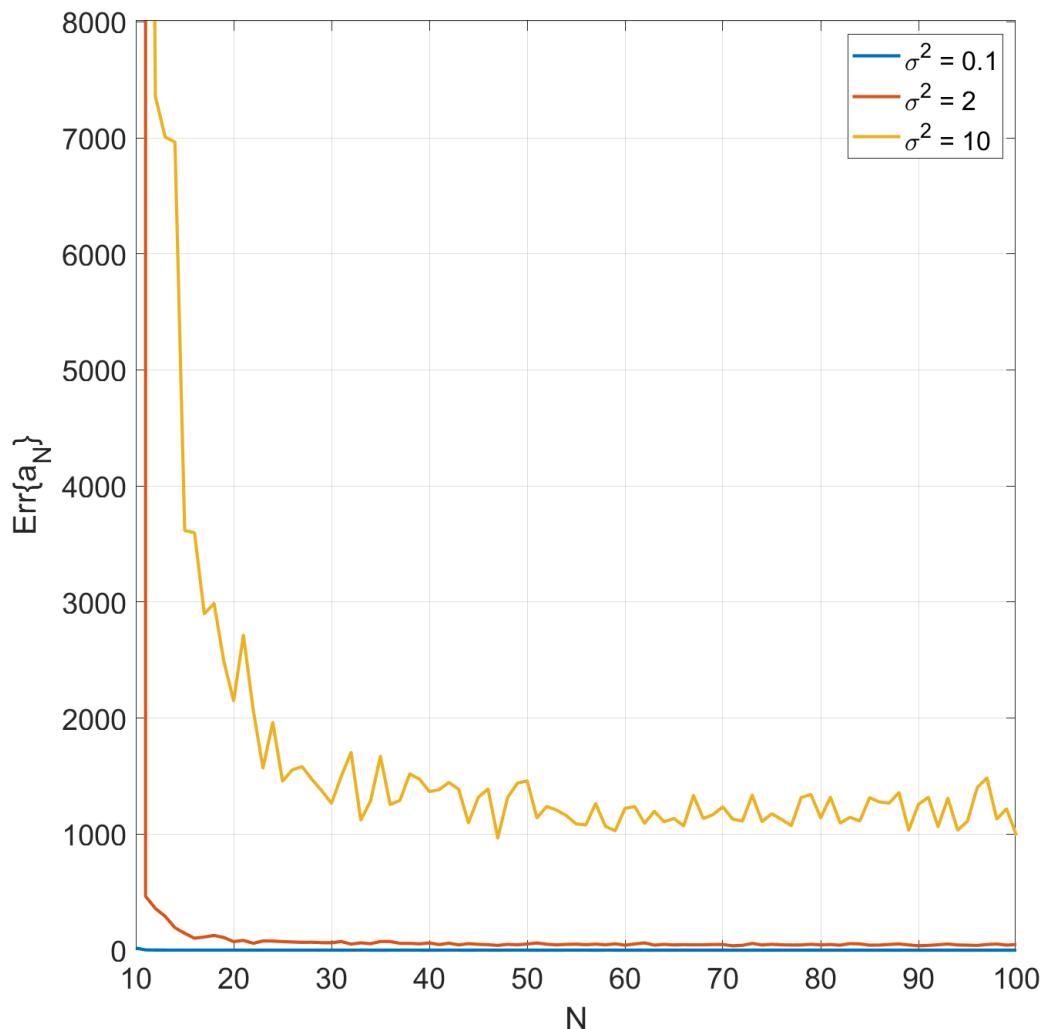
Na rysunku powyżej została przedstawiona macierz kowariancji przy wykorzystaniu funkcji *imagesc()* oraz *bar3()*. Z rysunku można odczytać, że poszczególne estymowane elementy wektora a^* posiadają prawie identyczną wariancję. Każdy element jest estymowany z podobnym błędem. Dodatkowo na rysunku a) widać, że kolor poza główną przekątną jest w miarę jednolity i niebieski, co oznacza, że nie występuje zależność pomiędzy poszczególnymi elementami wektora \hat{a}_N .

2.2 Wykreslenie błędu dla ustalonego sygnału wejściowego X_n

$$Err(\hat{a}_N) = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L \left\| \hat{a}_N^{[l]} - a^* \right\|^2 \quad (2.3)$$



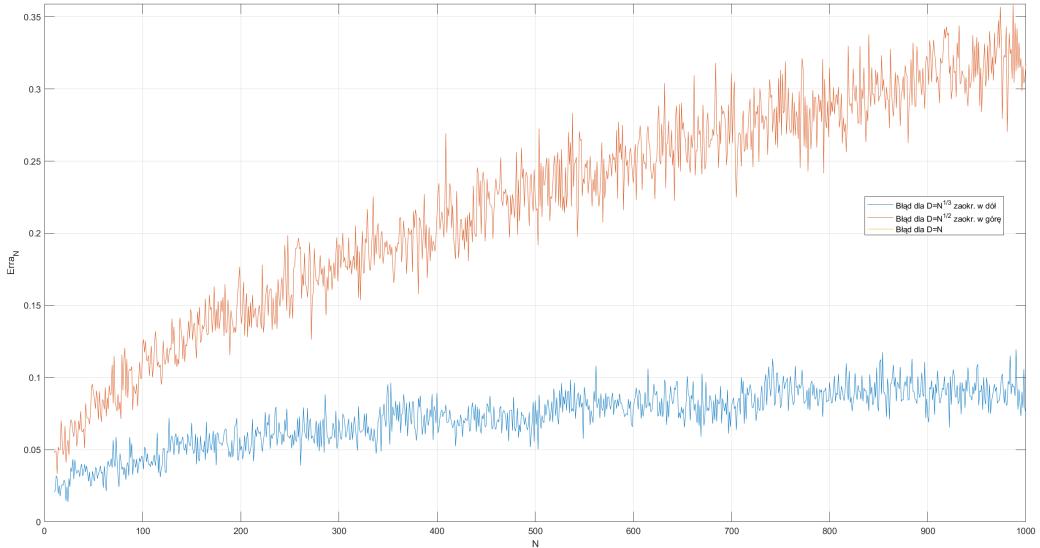
Rysunek 2.2. Błąd estymatora \hat{a}_N w funkcji N



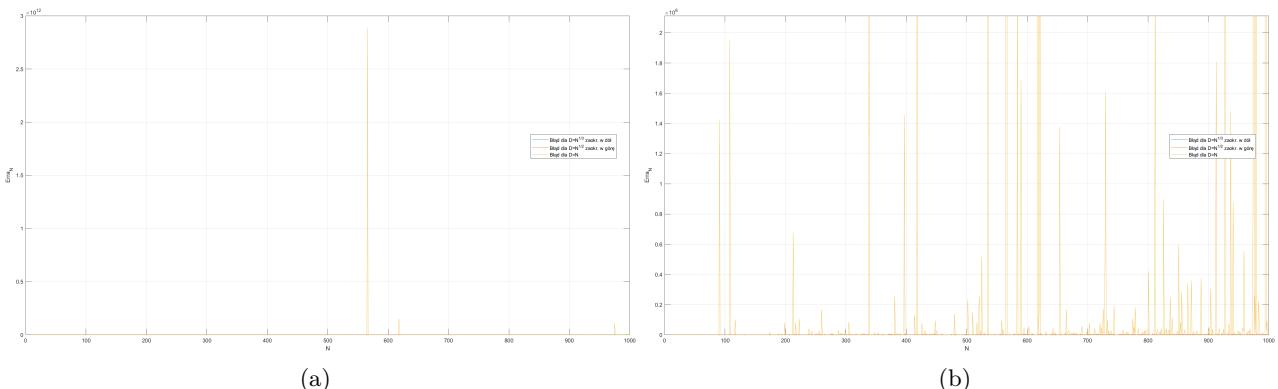
Rysunek 2.3. Błąd estymatora \hat{a}_N w funkcji N dla różnych wartości wariancji zakłócenia

Jak widać na rysunku powyżej, zwiększenie wartości wariancji zakłócenia powoduje, że błąd estymatora wektora a^* się zwiększa. Dodatkowo na rysunku 2.5 można zauważać, że wraz ze wzrostem liczby próbek błąd maleje, lecz bardzo wolno.

2.3 Zadanie dodatkowe 1 – eksperyment symulacyjny, w którym wymiar D wektora parametrów a^* jest związany z liczbą obserwacji wejścia/wyjścia systemu poprzez zależności: $D = \lfloor N^{\frac{1}{3}} \rfloor$, $D = \lceil N^{\frac{1}{2}} \rceil$ i $D = N$



Rysunek 2.4. Błąd estymatora \hat{a}_N dla różnych wymiarów wektora D



Rysunek 2.5. Błąd estymatora \hat{a}_N dla różnych wymiarów wektora D

Wszystkie powyższe rysunki należą do jednego wykresu. Zostały tak podzielone, ponieważ dla przypadku, gdy $D = N$ błąd jest tak ogromny (podobnie z jego wahaniami), że uniemożliwiłby porównanie pozostałych przypadków ze sobą. Dla $D = \lfloor N^{\frac{1}{3}} \rfloor$ i $D = \lceil N^{\frac{1}{2}} \rceil$ sytuacja wygląda już lepiej. Z wykresów wynika, że im bardziej wektor D swoim rozmiarem zbliża się do liczby próbek to błąd staje się coraz większy i pojawiają się jego większe oscylacje. W przypadku, gdy $D = \lceil N^{\frac{1}{2}} \rceil$ uzyskuje się najszybciej stabilizację błędu z tego względu, że wraz ze wzrostem próbek stosunek $\frac{N}{\text{size}(D)}$ rośnie.

Rozdział 3

laboratorium 9 – Identyfikacja statycznych systemów liniowych typu MISO.

Założenia takie same jak w przypadku laboratorium nr 8. Jedyna zmiana dotyczy zakłócenia, które tym razem będzie skorelowane:

$$Z_n = \epsilon_n + b_1 \epsilon_{n-1} \quad (3.1)$$

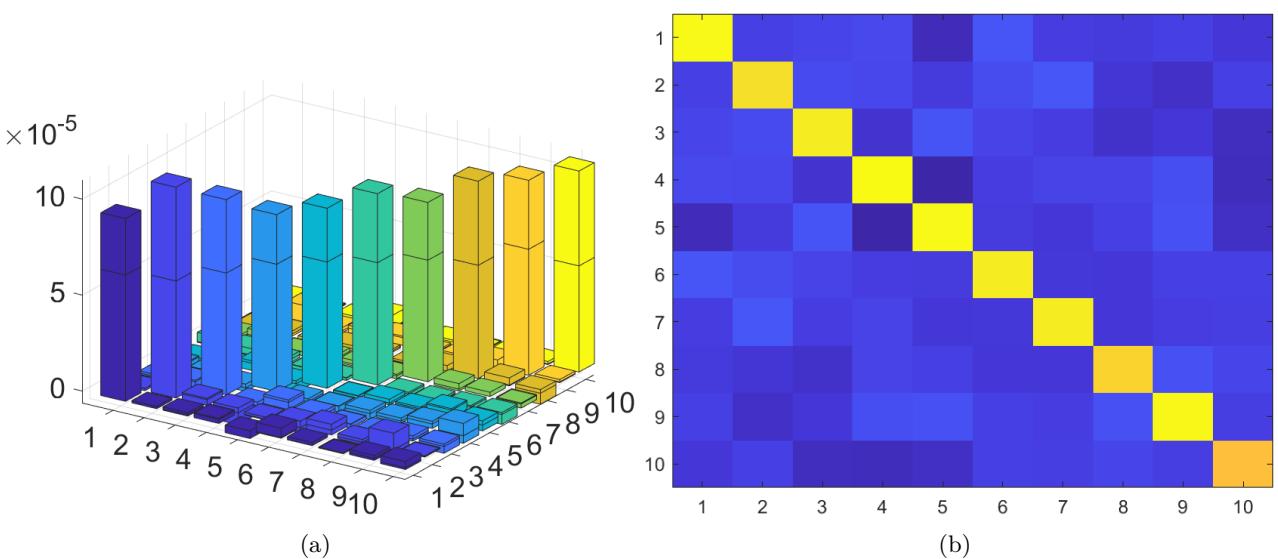
3.1 Wyznaczenie macierzy kowariancji \mathbf{R} wektora Z_N

$$\begin{bmatrix} 5/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1/2 & 5/4 & 1/2 & 0 & 0 & & \vdots \\ 0 & 1/2 & 5/4 & 1/2 & 0 & & \\ \vdots & & & & & \ddots & 1/2 \\ 0 & \dots & & & & 1/2 & 5/4 \end{bmatrix}$$

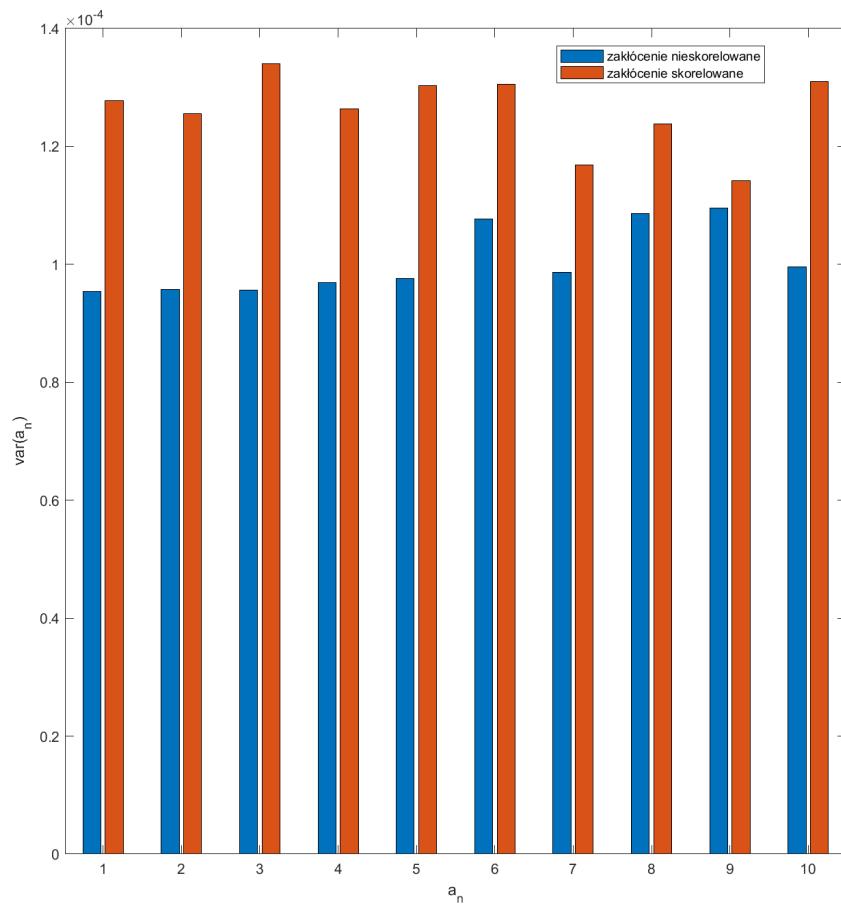
Macierz została wyznaczona na podstawie obliczeń załączonych w rozdziale 4.1. Posiada ona wartość $\frac{5}{4}$ na głównej przekątnej, wartość $\frac{1}{2}$ po obu stronach głównej przekątnej i wartości 0 w pozostałych miejscach.

3.2 Przedstawienie graficzne macierzy kowariancji estymatora \hat{a}_N

$$\text{cov}\{\hat{a}_N\} = (X_N^T X_N)^{-1} X_N^T R X_N (X_N^T X_N)^{-1} \quad (3.2)$$



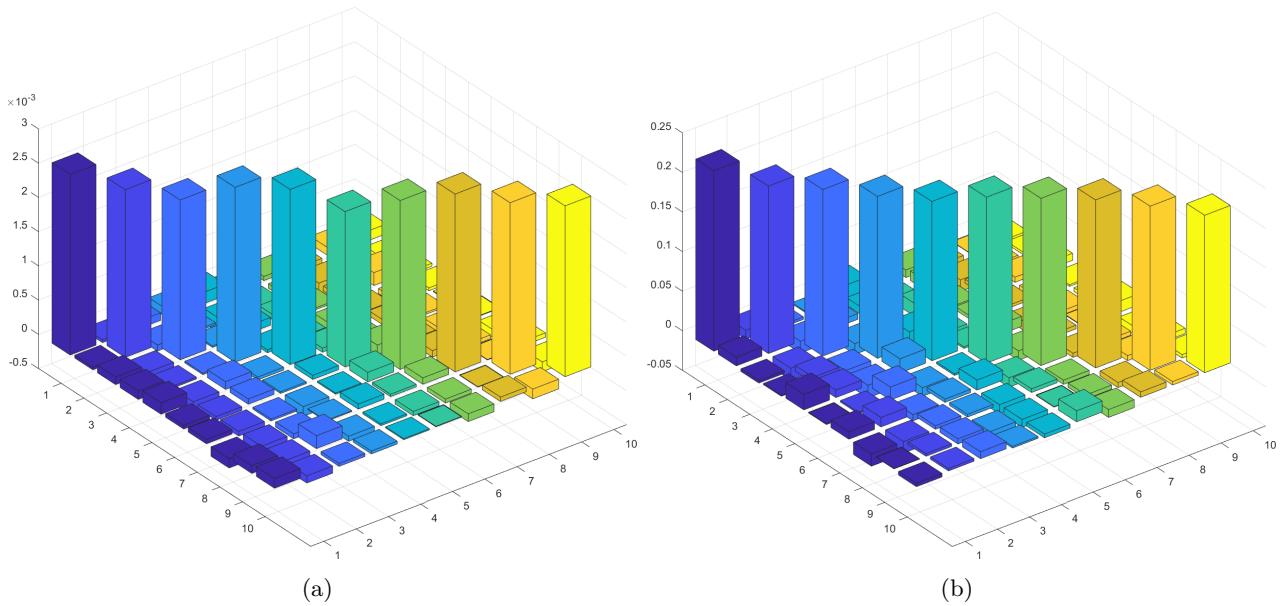
Rysunek 3.1. Macierz kowariancji estymatora \hat{a}_N a) nałożone na siebie wykresy z laboratorium 8 (niższe słupki) i 9



Rysunek 3.2. Porównanie wartości z głównej przekątnej z laboratorium 8 i 9

Jak widać na powyższym rysunku, tym razem wariancja jest większa niż w przypadku laboratorium 8 i zakłócenia nieskorelowanego. Dodatkowo widać, że słupki na głównej przekątnej posiadają większe różnice w wysokości między sobą, co oznacza, że niektóre elementy wektora a^* są estymowane lepiej a niektóre gorzej. Na rysunku b) również widać, że poza główną przekątną kolor niebieski już nie jest taki jednolity – występują zależności między poszczególnymi elementami wektora \hat{a}_N .

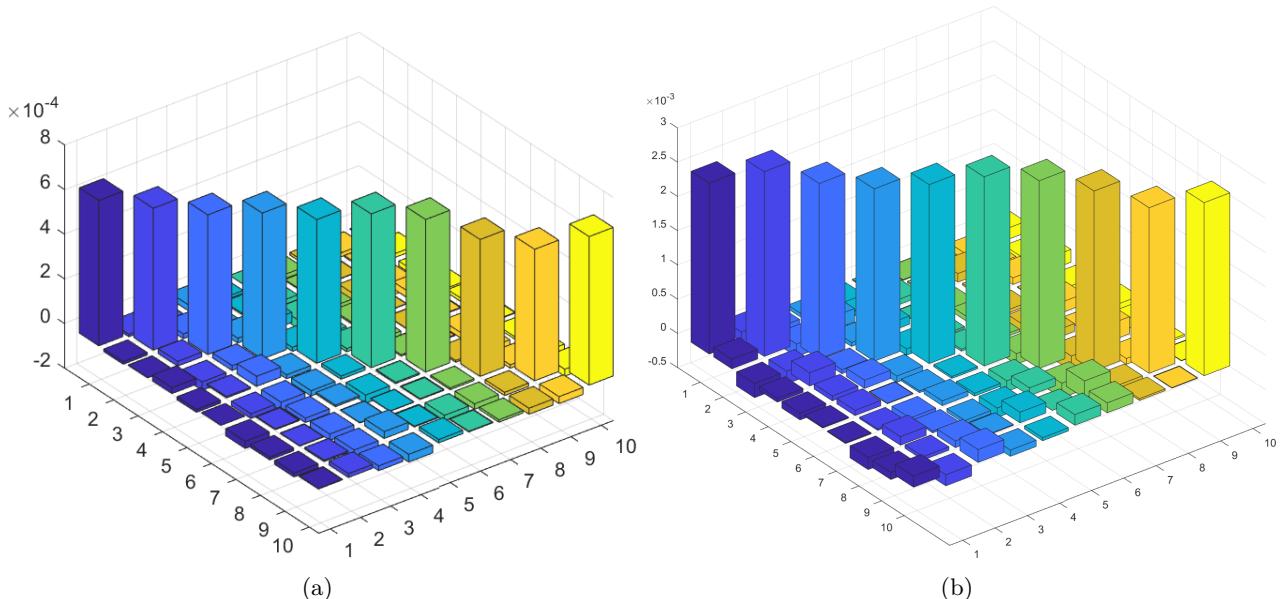
3.3 Wpływ parametru b_1 na macierz kowariancji estymatora \hat{a}_N



Rysunek 3.3. Porównanie wpływu wartości parametru b_1 na macierz kowariancji a) $b_1 = 0.5$ b) $b_1 = 10$

Jak widać, zwiększenie wartości parametru b_1 ma wpływ na wzrost zależności między poszczególnymi elementami wektora \hat{a}_N oraz na wartość wariancji estymowanego wektora a^* .

3.4 Wpływ wariancji zakłócenia na macierz kowariancji estymatora \hat{a}_N

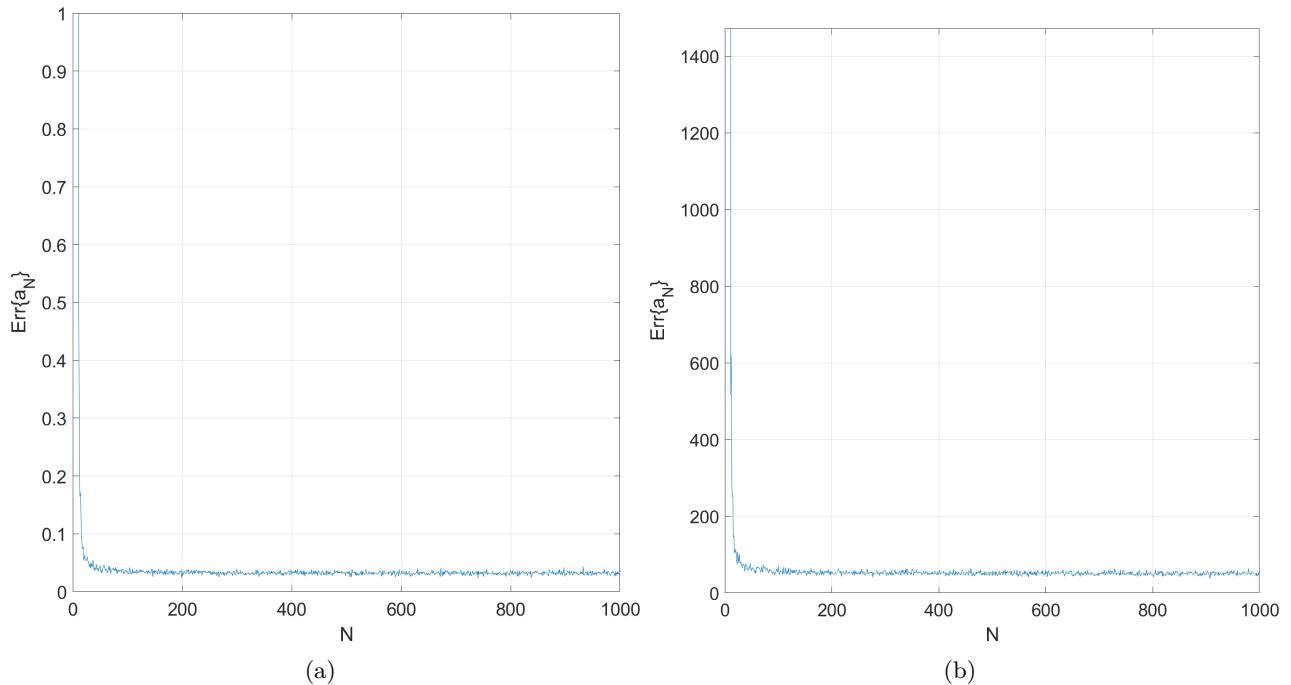


Rysunek 3.4. Porównanie wpływu wariancji zakłócenia na macierz kowariancji a) $\sigma^2 = 0.05$ b) $\sigma^2 = 2$

Zwiększenie wariancji zakłócenia ma bardzo podobny wpływ jak w przypadku parametru b_1 . Zmiana ta powoduje wzrost wariancji estymowanych wartości wektora a^* oraz zależności pomiędzy poszczególnymi elementami wektora \hat{a}_N .

głównymi elementami wektora \hat{a}_N .

3.5 Wykreslenie błędu w zależności od liczby próbek



Rysunek 3.5. Porównanie błędów estymatora dla a) $b_1 = 0.5$ b) $b_1 = 10$

W przypadku błędu estymatora \hat{a}_N wartość parametru b_1 ma jedynie wpływ na jego wartość.

Rozdział 4

Dodatek

4.1 Obliczenia do wyznaczenia macierzy kowariancji R wektora Z_N

$$\text{Var}\{x\} = E\{x - E\{x\}\}^2$$

$$\text{cov}\{x, y\} = E\{(x - E\{x\})(y - E\{y\})\}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\{\varepsilon_m(x)\} &= 1 & \text{Var}\{\varepsilon_n\} &= E\{\varepsilon_n^2\} - (E\{\varepsilon_n\})^2 = 1 \\ E\{\varepsilon_m(x)\} &= 0 \end{aligned}$$

$$Z_n = \varepsilon_n + 0,5\varepsilon_{n-1}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}\{Z_n(k)\} &= E\{Z_n - E\{Z_n\}\}^2 = \\ &= E\{\varepsilon_n + 0,5\varepsilon_{n-1} - E\{\varepsilon_n + 0,5\varepsilon_{n-1}\}\}^2 = \end{aligned}$$

$$= E\{(\varepsilon_n + 0,5\varepsilon_{n-1})^2\} - (E\{\varepsilon_n\} + E\{0,5\varepsilon_{n-1}\})^2 =$$

$$= E\{\varepsilon_n^2 + \varepsilon_n\varepsilon_{n-1} + \frac{1}{4}\varepsilon_{n-1}^2\} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}\{Z_n, Z_{n+1}\} &= E\{(Z_n - E\{Z_n\})(Z_{n+1} - E\{Z_{n+1}\})\} = \\ &= E\{(Z_n \cdot Z_{n+1})\} = E\{(\varepsilon_n + 0,5\varepsilon_{n-1})(\varepsilon_{n+1} + 0,5\varepsilon_n)\} = \end{aligned}$$

$$= E\{\varepsilon_n\varepsilon_{n+1} + 0,5\varepsilon_n^2 + 0,5\varepsilon_{n-1}^2 + \frac{1}{4}\varepsilon_{n-1}\varepsilon_n\} = 0,5$$

$$\begin{aligned}
 \text{cov}\{Z_n, Z_{n+2}\} &= E\left\{(Z_n - E\{Z_n\})(Z_{n+2} - E\{Z_{n+2}\})\right\} = \\
 &\quad \stackrel{\text{def}}{=} \stackrel{\text{def}}{=} \\
 &= E\{Z_n Z_{n+2}\} = E\{(E_n + 0.5E_{n+1})(E_{n+2} + 0.5E_{n+3})\} = \\
 &= E\{E_n E_{n+2} + E_n 0.5E_{n+1} + 0.5E_{n+1} E_{n+2} + \frac{1}{4}E_{n+1} E_{n+3}\}
 \end{aligned}$$