



Politechnika
Wrocławska



MODELOWANIE I IDENTYFIKACJA
SPRAWOZDANIE 1

Autor:

GRZEGORZ SĘK

Prowadzący zajęcia:

DR HAB. INŻ. PAWEŁ WACHEL

Termin zajęć:

Poniedziałek, 15:15

Semestr letni 2020/2021

1 lutego 2023

Spis treści

1	Generatory liczb pseudolosowych	2
1.1	Generator oparty na przekształceniu pilokształtnym	2
1.1.1	Wpływ liczby "zębów" piły na własności generatora	2
1.1.2	Okres generatora	6
1.1.3	Wnioski i podsumowanie	6
1.2	Generator oparty na równaniu	6
1.2.1	Wpływ różnych parametrów na generowane liczby	6
1.2.2	Okresowość generatora	8
1.2.3	Wnioski i podsumowanie	8
2	Metoda odwracania dystrybuanty	9
2.1	Generacja liczb losowych – Metoda odwracania dystrybuanty	9
2.1.1	Wyznaczenie dystrybuanty odwrotnej oraz generacja liczb losowych z rozkładu o gęstości prawdopodobieństwa	9
2.1.2	Wyznaczenie dystrybuanty odwrotnej oraz generacja liczb losowych z rozkładu o gęstości prawdopodobieństwa	9
2.1.3	Wyznaczenie dystrybuanty odwrotnej oraz generacja liczb losowych z rozkładu wykładniczego	10
2.1.4	Wyznaczenie dystrybuanty odwrotnej oraz generacja liczb losowych z rozkładu Laplace'a	11
2.1.5	Wnioski i podsumowanie	12
3	Metoda odrzucania	13
3.1	Generacja liczb losowych – Metoda odrzucania	13
3.1.1	Generacja liczb z rozkładu o gęstości prawdopodobieństwa	13
3.1.2	Generacja liczb z rozkładu	14
3.1.3	Generacja liczb z rozkładu o gęstości w kształcie półokręgu i zerowej wartości oczekiwanej	15
3.1.4	Generacja liczb losowych o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$ z wykorzystaniem generatora zmiennych losowych o rozkładzie Laplace'a	16
3.1.5	Wnioski i podsumowanie	16
	Bibliografia	17

Rozdział 1

Generatory liczb pseudolosowych

1.1 Generator oparty na przekształceniu piłokształtnym

$$X_n + 1 = X_n \cdot z - \lfloor X_n \cdot z \rfloor \quad (1.1)$$

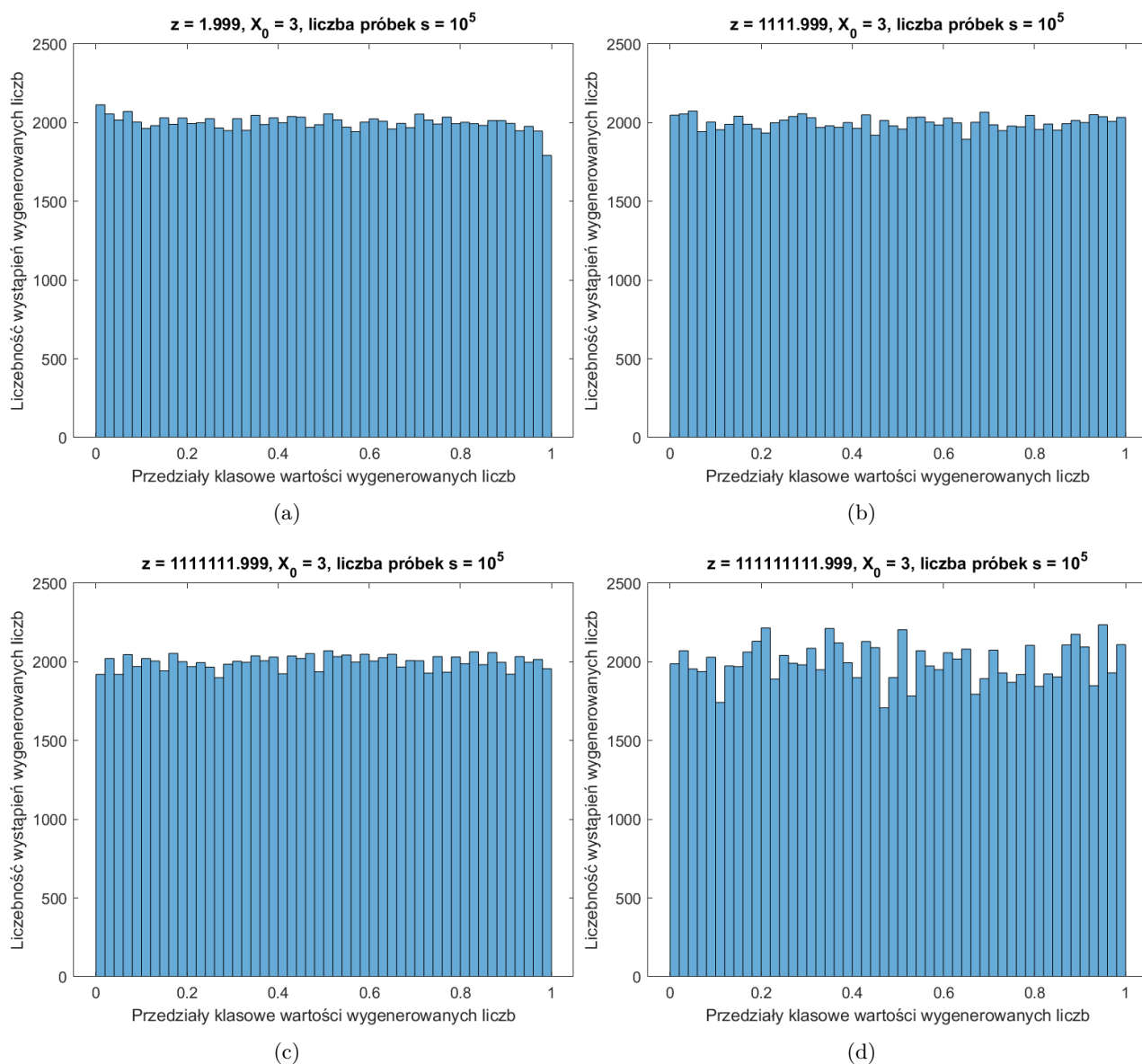
1.1.1 Wpływ liczby "zębów" piły na własności generatora

Jak widać na rysunku (Rysunek 1.1) wpływ liczby "zębów" piły na sam kształt histogramu nie jest duży. Dopiero przy dużych wartościach histogram przestaje przypominać rozkład jednostajny. Należy jednak pamiętać, że liczba "zębów" nie może być całkowita, ponieważ wtedy generator liczb nie będzie działał.

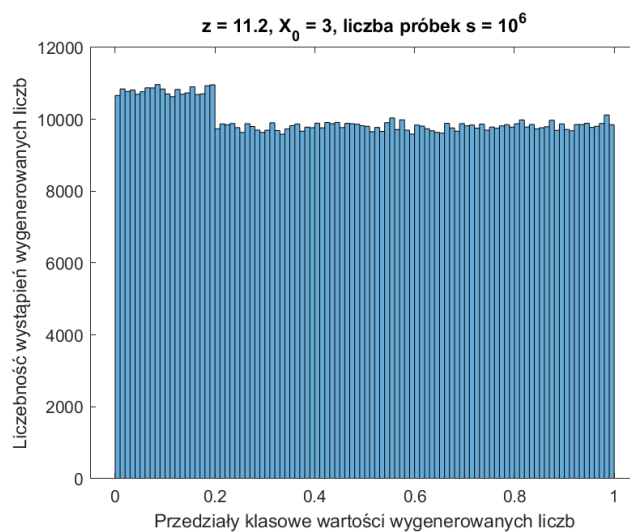
Przy niewielkiej liczbie "zębów", jej część po przecinku ma ogromny wpływ na rozkład histogramu, co można zaobserwować na rysunku (Rysunek: 1.2).

W przypadku testu par przedstawionego na rysunku (Rysunek: 1.3) można zauważyć, że przy małej liczbie "zębów" rozkład punktów przypomina funkcję piłozębną, z której te punkty zostały wygenerowane (zgadza się liczba "zębów"). Dla większych liczb "zębów" punkty wydają się być rozłożone w sposób równomierny na całej powierzchni - trudno dostrzec między nimi większą różnicę.

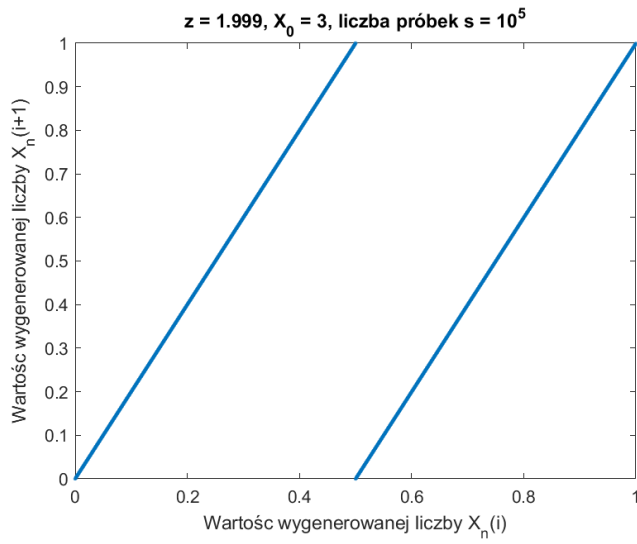
Porównując ze sobą histogramy (Rysunek: 1.4) oraz test par (Rysunek 1.5) generatora opierającego się na funkcji piłozębnej i generatora, który oferuje MATLAB (funkcja *rand*) można stwierdzić, że oba testy par są równomierne a histogramy są tak samo zbliżone do rozkładu jednostajnego. Niemniej jednak nie można uznać obu tych generatorów liczb losowych za równie dobre i efektywne.



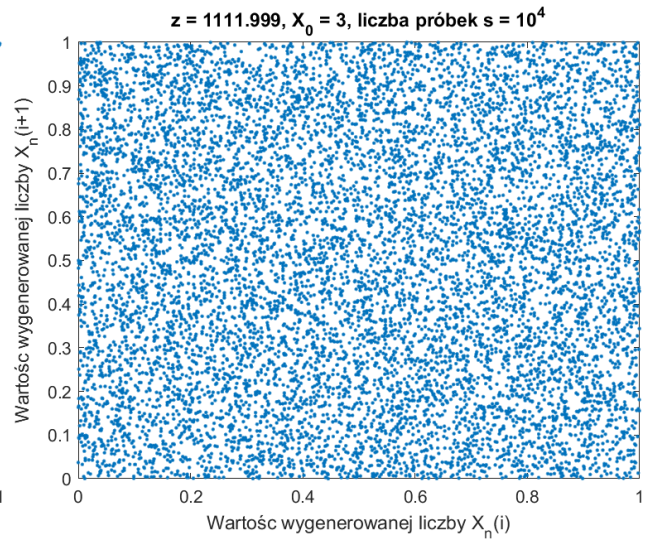
Rysunek 1.1. Histogramy dla różnych wartości z



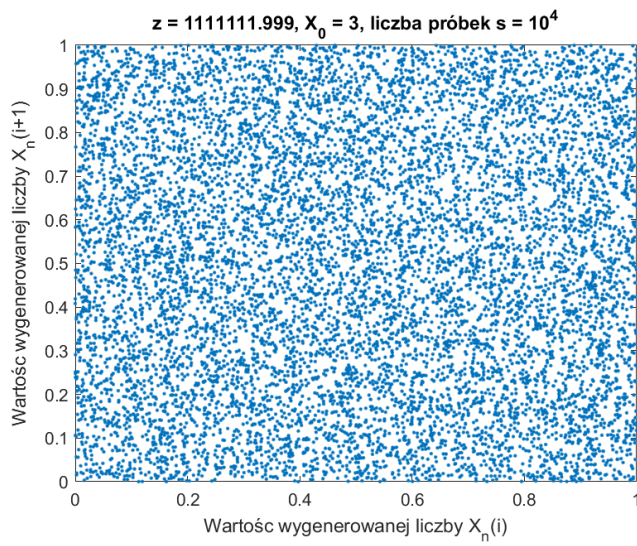
Rysunek 1.2. Histogram dla małej wartości z



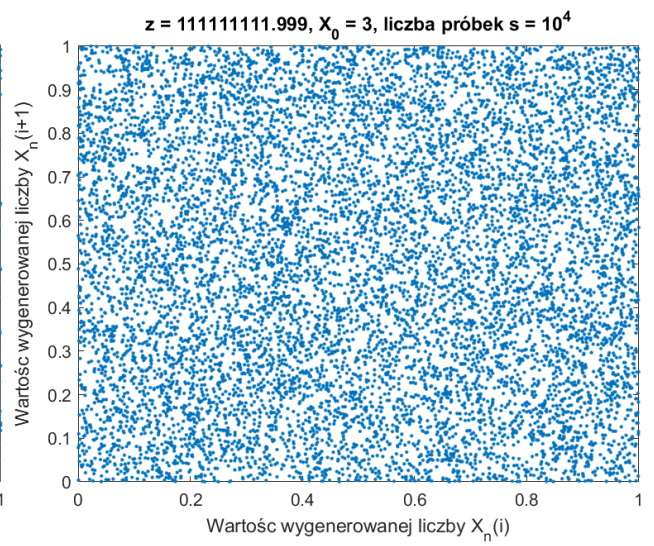
(a)



(b)

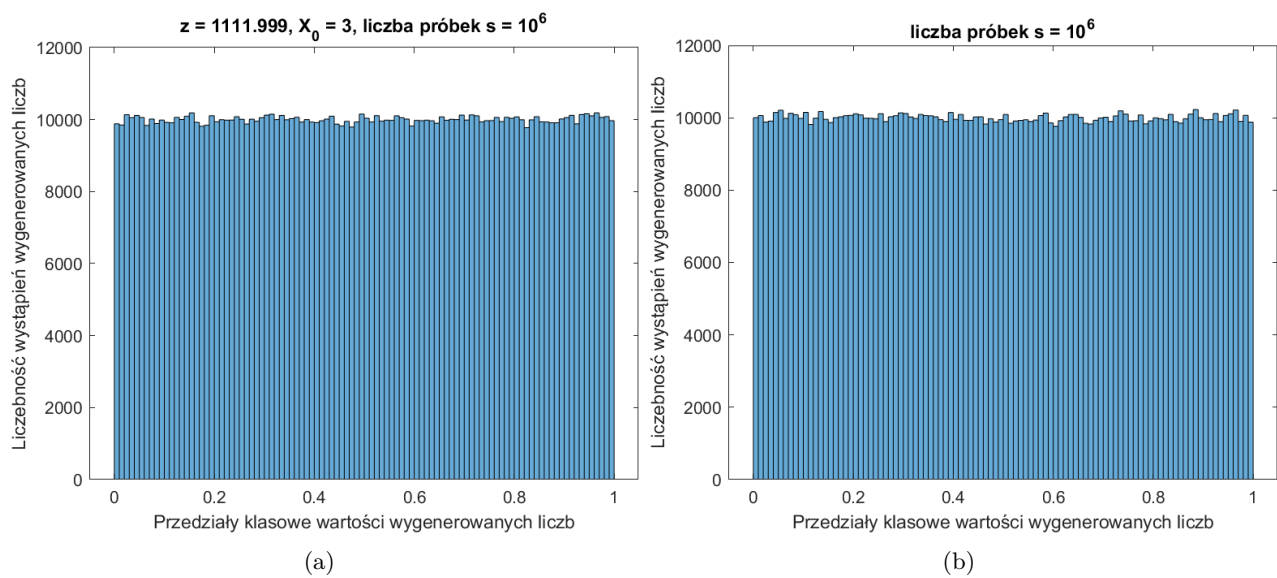


(c)

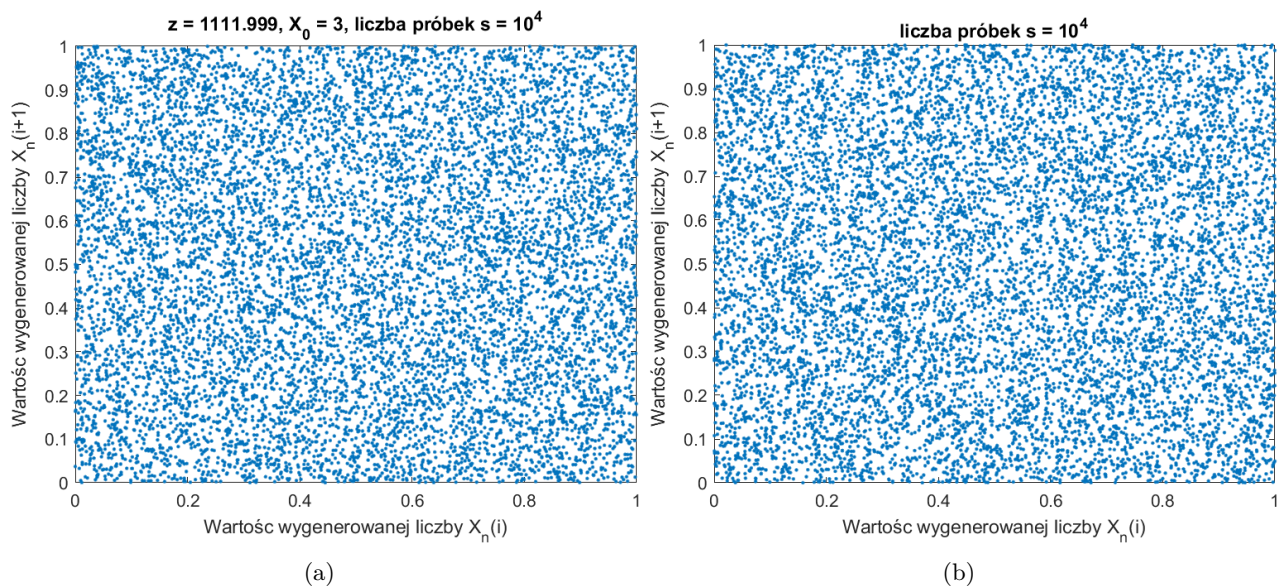


(d)

Rysunek 1.3. Test par dla różnych wartości z



Rysunek 1.4. Porównanie histogramów generatora z laboratorium 1 i funkcji MATLAB - rand



Rysunek 1.5. Porównanie testów par generatora z laboratorium 1 i funkcji MATLAB - rand

1.1.2 Okres generatora

Okres generatora został sprawdzony poprzez wyszukanie pierwszego powtórzenia któreś z wygenerowanych liczb (X_2, X_3, \dots, X_{10}) i wybranie najmniejszej z nich. Zadanie to zostało wykonane dla zaokrąglenia X_n do 4 miejsc po przecinku.

Tablica 1.1. Zestawienie liczby "zębów" i pozycji wystąpienia pierwszego powtórzenia elementu)

liczba "zębów"	pozycja pierwszego powtórzenia
1.999	63
11.999	591
111.999	923
1 111.999	1587
11 111.999	1456
111 111.999	4020
1 111 111.999	4622
11 111 111.999	3900
111 111 111.999	3111

Analizując tabelę (Tabela 1.1) można zaobserwować, że mimo iż liczba "zębów" z nie ma zbyt dużego wpływu na postaci histogramów to ma ona ogromny wpływ na okresowość generowanych liczb. Z tabeli wynika, że najlepszymi wartościami parametru z są liczby pięciocyfrowe i sześciocyfrowe.

1.1.3 Wnioski i podsumowanie

Generator liczb pseudolosowych opierający się na funkcji piłokształtnej jest bardzo prosty i w szybki sposób można go zaimplementować. Dla odpowiednich parametrów jego rozkład przypomina rozkład jednostajny, jednak jego największą wadą jest okresowość, która pojawia się stosunkowo szybko. Wpływ wartości początkowej X_0 na generowane liczby został również przeanalizowany i nie ma on żadnych zauważalnych efektów w histogramie czy teście par.

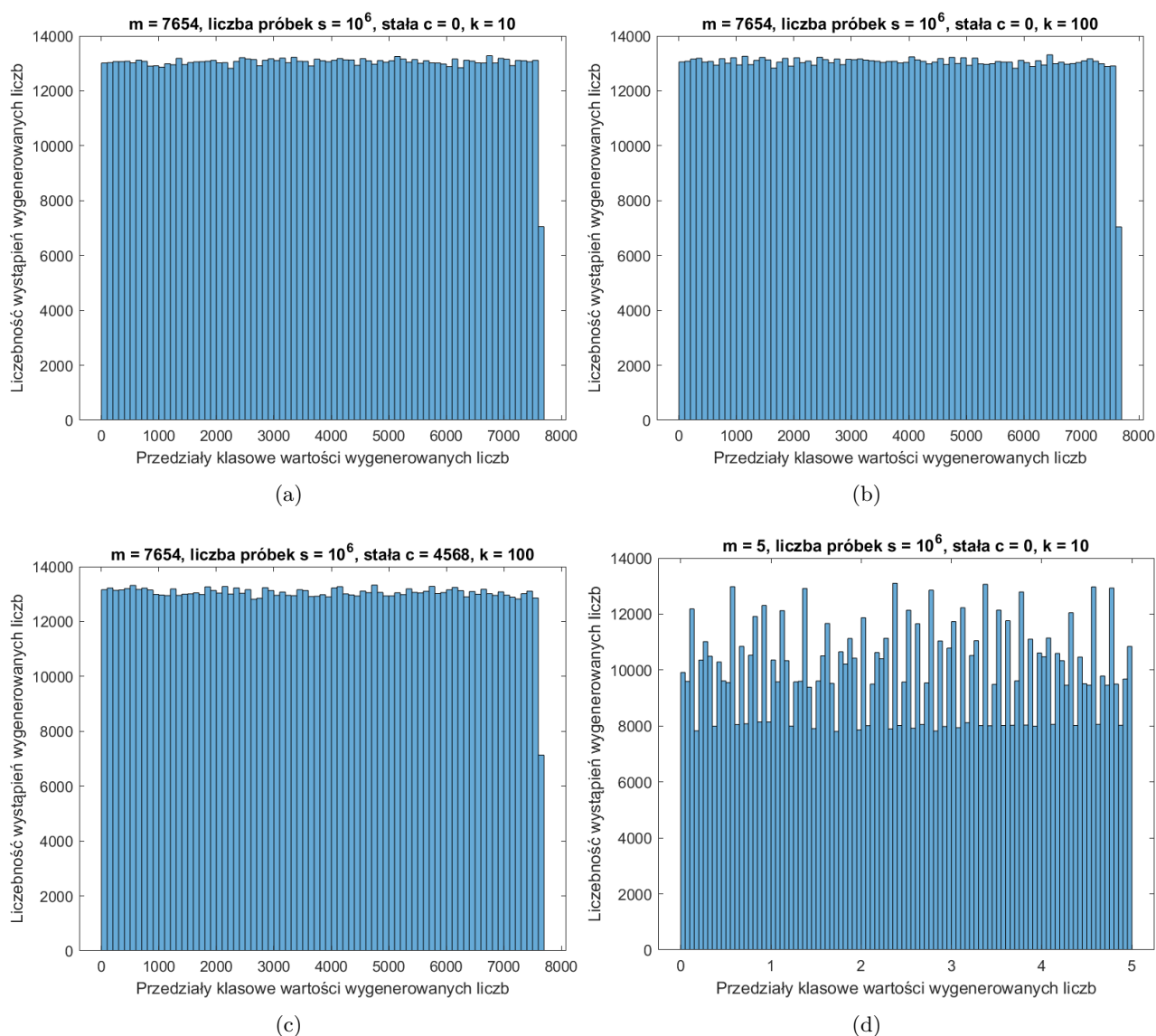
1.2 Generator oparty na równaniu

$$X_n + 1 = (aX_n + a_1X_{n-1} + \dots + a_kX_{n-k} + c) \bmod m \quad (1.2)$$

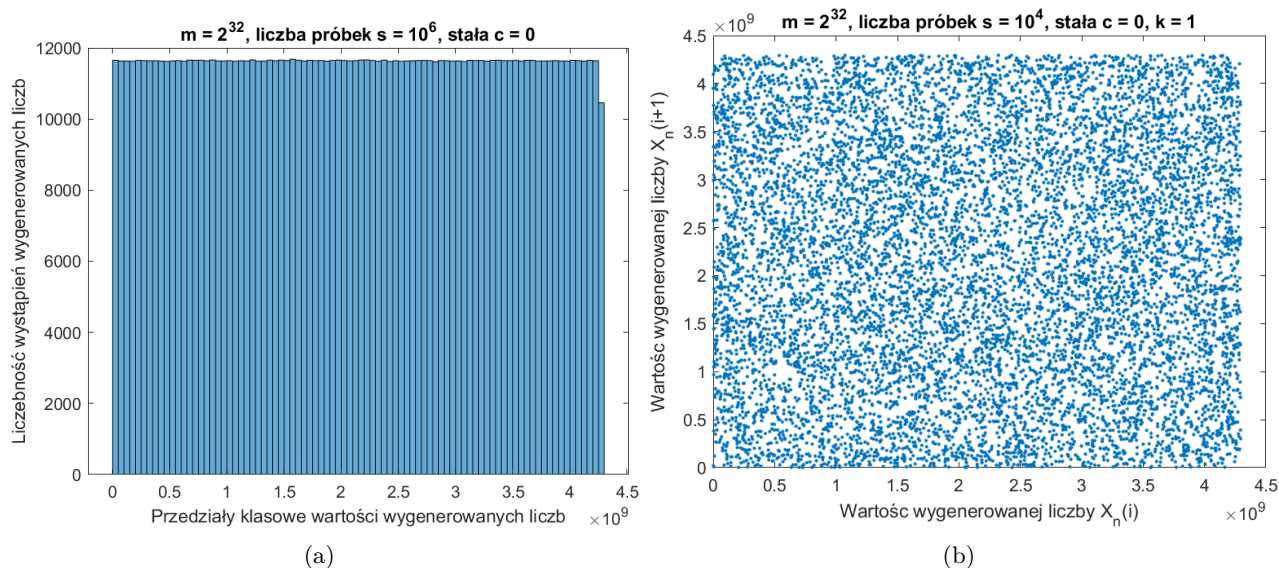
1.2.1 Wpływ różnych parametrów na generowane liczby

W przypadku tego generatora można zauważyć, analizując rysunek (Rysunek 1.6), że wpływ parametru m ma duże znaczenie na kształt histogramu. Najlepiej generator działa dla dużych wartości parametru m . Parametr k oraz stała c mają niewielki wpływ na postać histogramu.

Zdecydowanie najlepiej wypada generator oparty na parametrach Fisherman'a [1]. Jego histogram jest niemalże idealnie płaski poza ostatnim słupkiem.



Rysunek 1.6. Histogramy dla różnych wartości parametrów k , m i c



Rysunek 1.7. Histogram i test par dla parametrów według Fisherman'a [1]

1.2.2 Okresowość generatora

Okresowość tego generatora została zbadana w podobny sposób do poprzedniego z tą różnicą, że liczby zostały zaokrąglone do 2 miejsc po przecinku. W zależności od wartości parametrów \mathbf{a} oraz X_k generator stawał się okresowy po około 10^5 próbkach.

1.2.3 Wnioski i podsumowanie

Ten generator wydaje się być lepszy od pierwszego. Jest trochę bardziej skomplikowany, lecz jego okresowość wypada znacznie lepiej niż w przypadku generatora opartego na funkcji piłokształtnej. Dodatkowo, jeśli dobrze się dobierze wszystkie parametry (tak jak w przypadku parametrów Fisherman'a) to histogram staje się bardzo zbliżony do rozkładu jednostajnego.

Rozdział 2

Metoda odwracania dystrybuanty

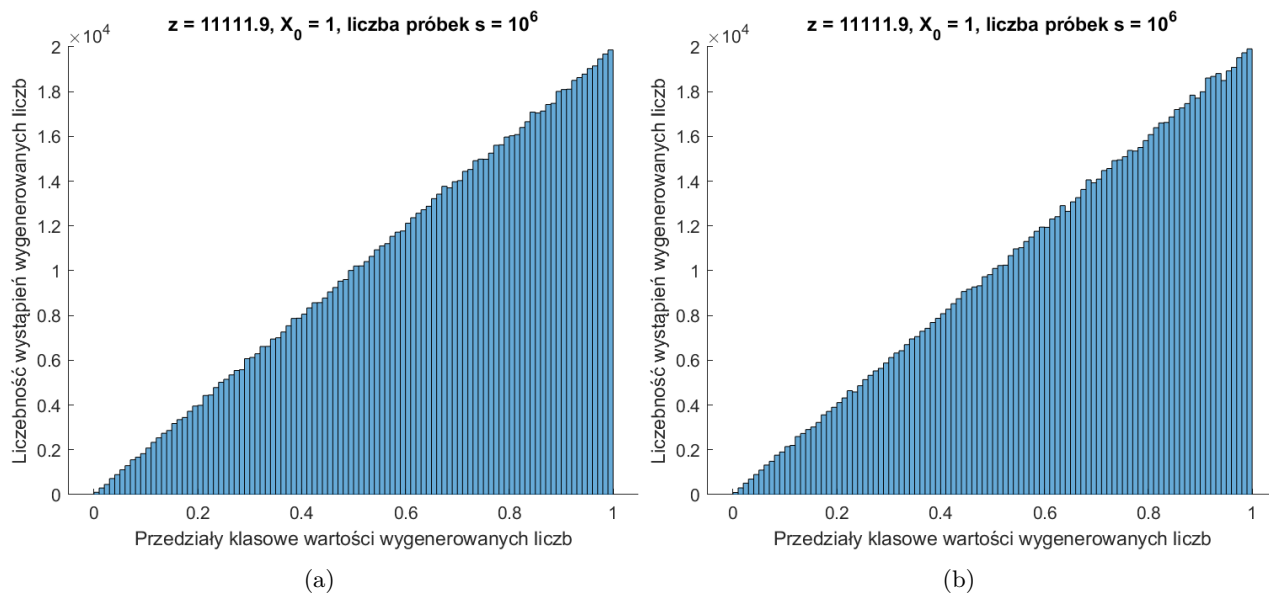
2.1 Generacja liczb losowych – Metoda odwracania dystrybuanty

2.1.1 Wyznaczenie dystrybuanty odwrotnej oraz generacja liczb losowych z rozkładu o gęstości prawdopodobieństwa

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{dla } x \in (-\infty, 0) \cup (1, \infty) \end{cases} \quad (2.1)$$

Odwrotna dystrybuanta:

$$F^{-1}(x) = \sqrt{x} \quad \text{dla } x \in [0, 1] \quad (2.2)$$



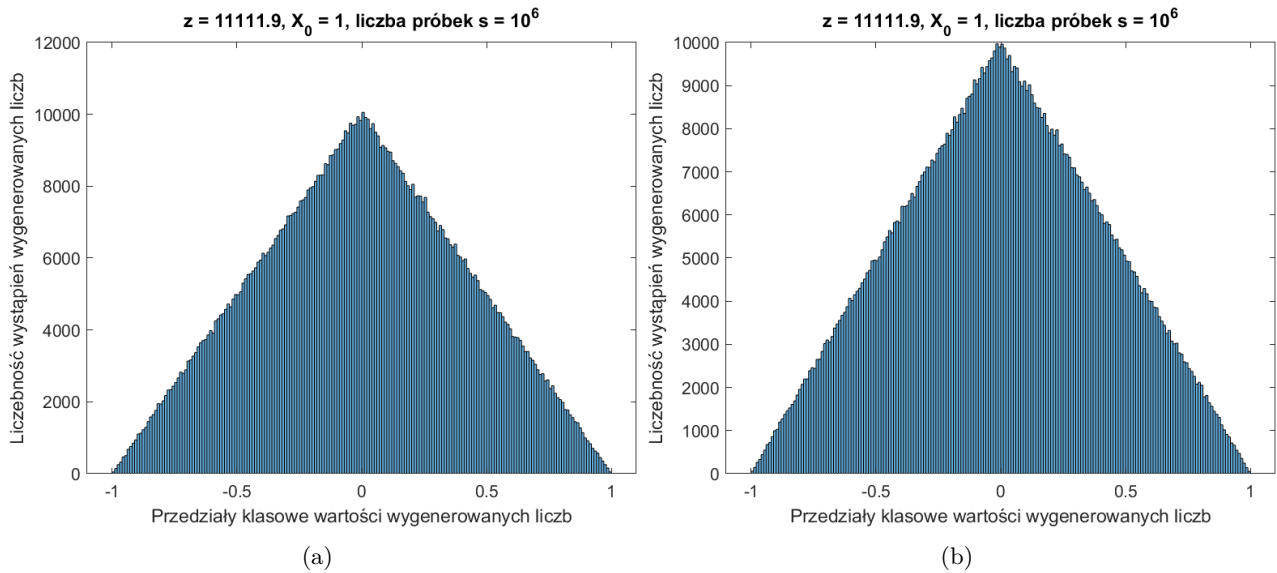
Rysunek 2.1. Histogramy a) – generator z laboratorium, b) – generator rand

2.1.2 Wyznaczenie dystrybuanty odwrotnej oraz generacja liczb losowych z rozkładu o gęstości prawdopodobieństwa

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{dla } x \in (-1, 0) \\ -x + 1 & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{dla } x \notin (-1, 1) \end{cases} \quad (2.3)$$

Odwrotna dystrybuanta:

$$F^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{2x} - 1 & \text{dla } x \in [0, \frac{1}{2}) \\ 1 - \sqrt{2x} & \text{dla } x \in (\frac{1}{2}, 1] \end{cases} \quad (2.4)$$



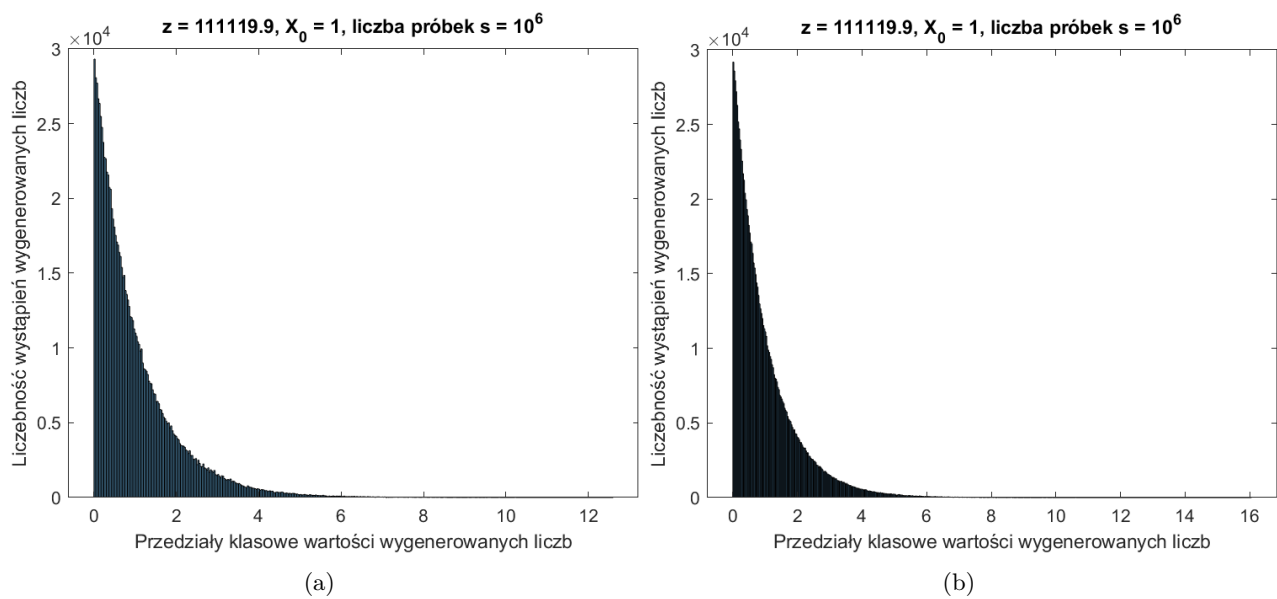
Rysunek 2.2. Histogramy a) – generator z laboratorium, b) – generator rand

2.1.3 Wyznaczenie dystrybuanty odwrotnej oraz generacja liczb losowych z rozkładu wykładniczego

$$f(x) = e^{-x}, x \geq 0 \quad (2.5)$$

Odwrotna dystrybuanta:

$$F^{-1}(x) = -\ln(1-x)\xi \quad \text{dla } x \in [0, \infty) \quad (2.6)$$



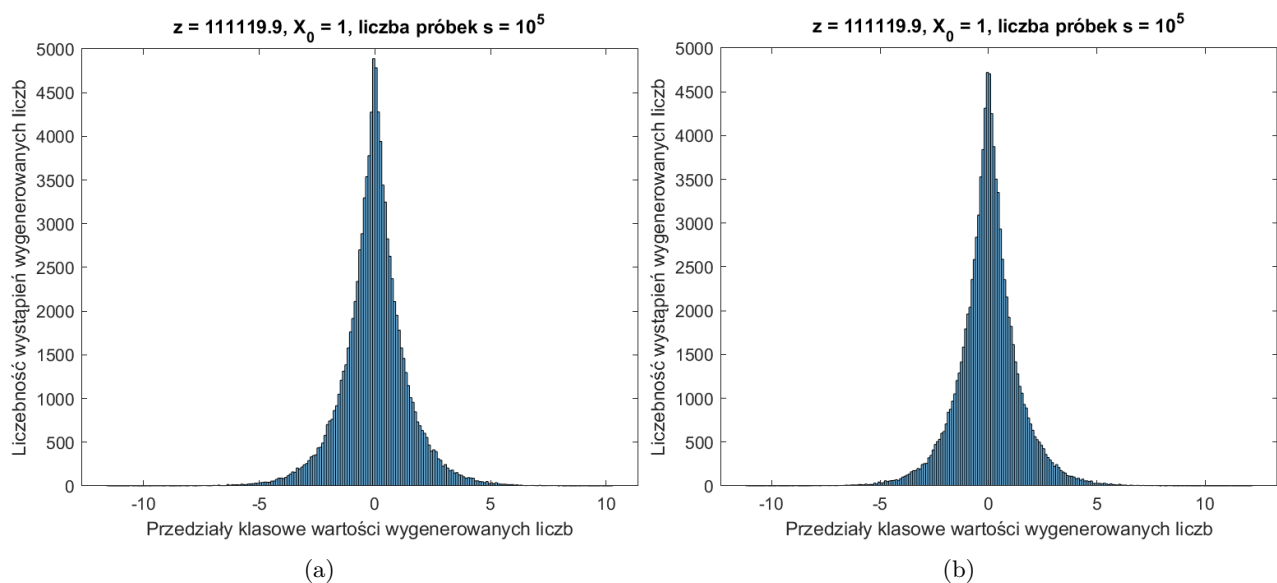
Rysunek 2.3. Histogramy a) – generator z laboratorium, b) – generator rand

2.1.4 Wyznaczenie dystrybuanty odwrotnej oraz generacja liczb losowych z rozkładu Laplace’a

$$f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, x \geq 0 \quad (2.7)$$

Odwrotna dystrybuanta:

$$F^{-1}(x) = [-\ln(x)]\xi \quad dla \quad x \in (-\infty, \infty) \quad (2.8)$$



Rysunek 2.4. Histogramy a) – generator z laboratorium, b) – generator rand

2.1.5 Wnioski i podsumowanie

Na rysunkach (2.1, 2.2, 2.3, 2.4) zostały porównane histogramy generatora z laboratorium 1 oraz generatora MATLAB – rand. Jak widać wszystkie histogramy są bardzo do siebie podobne, co potwierdza, że generator z laboratorium 1 jest generatorem o rozkładzie zbliżonym do jednostajnego (przy odpowiednich parametrach).

Do zalet metody odwracanej dystrybucyjności możemy zaliczyć to, że nie tracimy żadnych próbek, jak w przypadku metody odrzucania. Samo skomplikowanie kodu również nie zwiększa się znacząco. Jednak ta metoda posiada również sporo wad. Słabe strony generatora przenoszą się na wyniki tej metody (na przykład okresowość generatora). Mogą pojawić się trudności z obliczeniami, które nierzadko są dość skomplikowane. Dodatkowo dystrybucyjność musi być znana i odwracalna analitycznie.

Metoda ta jest najbardziej korzystna w momencie, kiedy dystrybucyjność można odwrócić w bardzo szybki i prosty sposób.

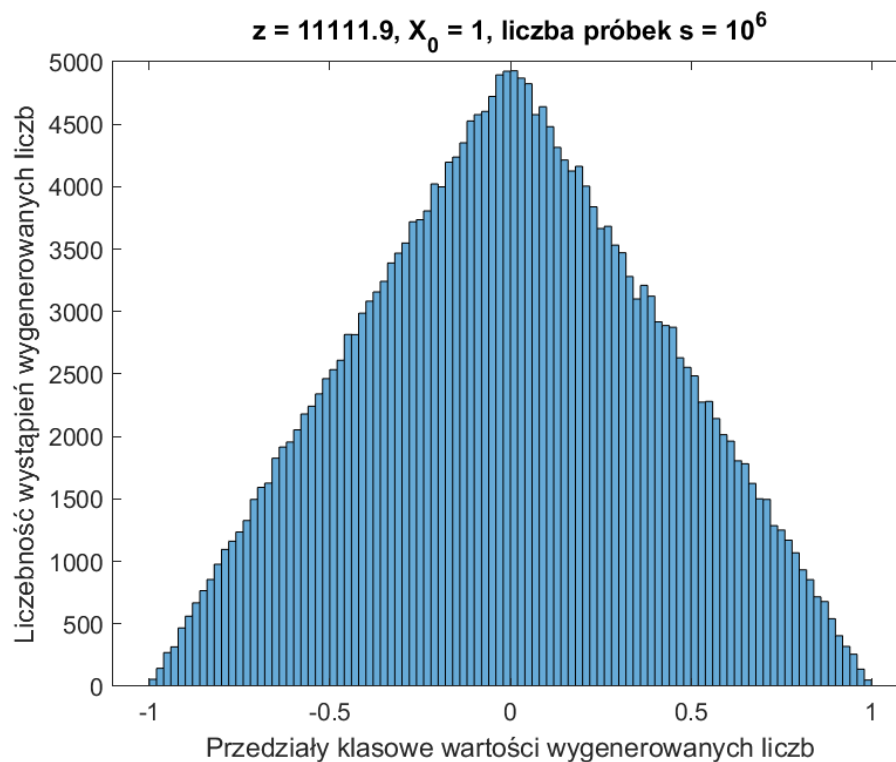
Rozdział 3

Metoda odrzucania

3.1 Generacja liczb losowych – Metoda odrzucania

3.1.1 Generacja liczb z rozkładu o gęstości prawdopodobieństwa

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \in (-1, 0] \\ -x+1 & \text{dla } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{dla } x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty) \end{cases} \quad (3.1)$$

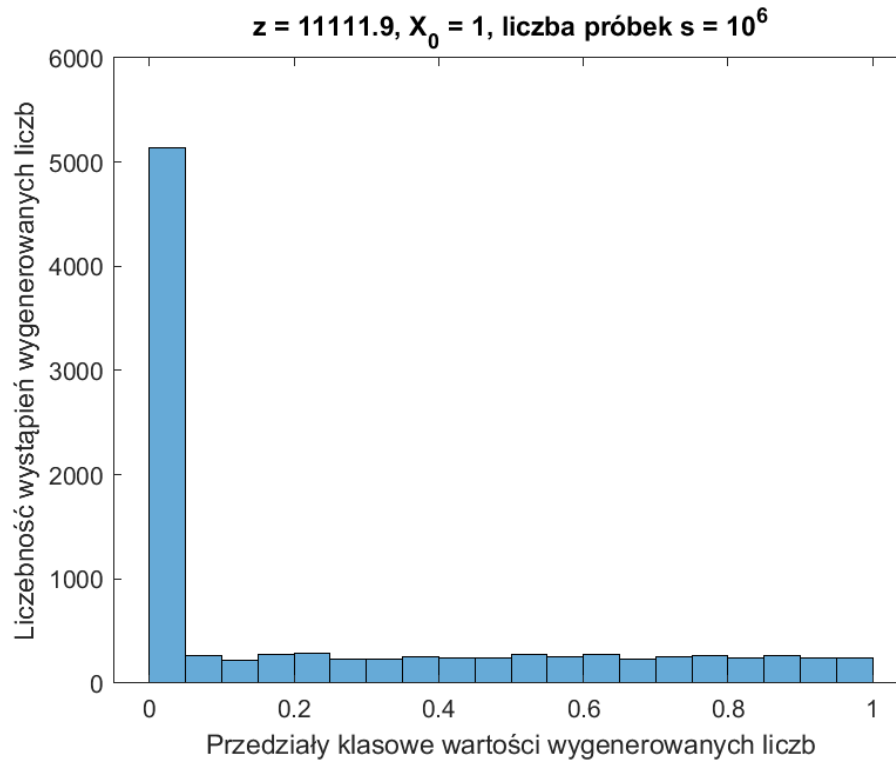


Rysunek 3.1. Histogram dla rozkładu 3.1

Zadanie zostało wykonane dla rozkładu o gęstości prawdopodobieństwa równej 3.1 i wykorzystaniu generatora liczb pseudolosowych opartego na funkcji piłokształtnej. Wygenerowanych zostało 10^6 próbek z czego, w wyniku skorzystania z metody eliminacji, odrzuconych zostało około $25 \cdot 10^4$ próbek.

3.1.2 Generacja liczb z rozkładu

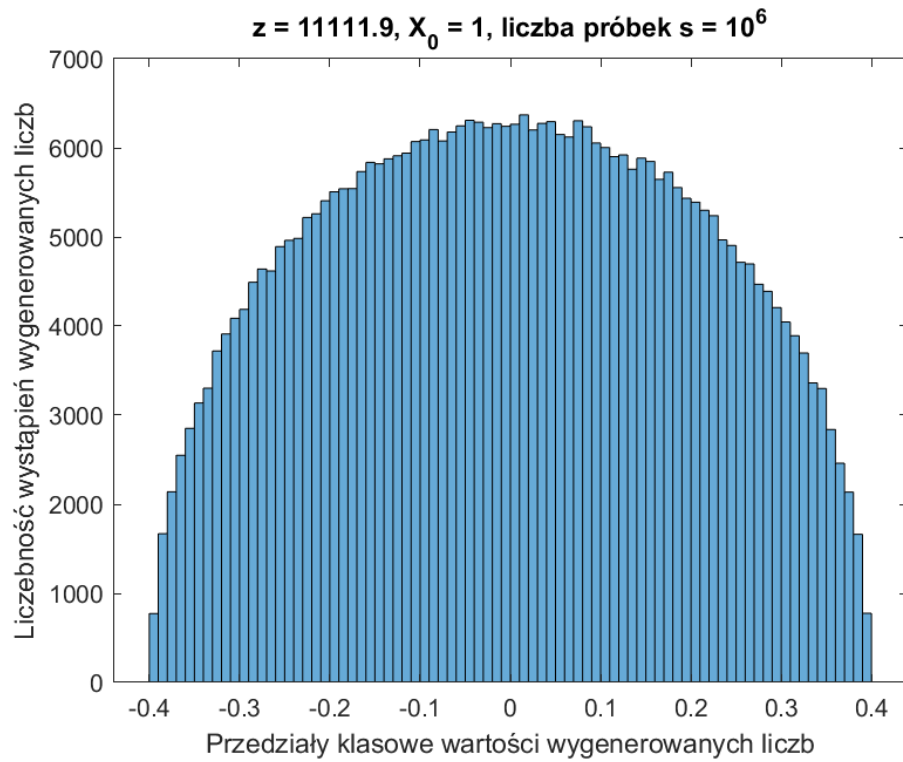
$$f(x) = \begin{cases} 50 & \text{dla } x \in (0, \frac{1}{100}] \\ c & \text{dla } x \in (\frac{1}{100}, 1] \end{cases} \quad (3.2)$$



Rysunek 3.2. Histogram dla rozkładu 3.2

Obliczone c wynosi $c = \frac{50}{99}$. W przypadku tego zadania również zostało wygenerowane 10^6 próbek. Do przedziału $(\frac{1}{100}, 1]$ wpadło około $990 \cdot 10^3$ liczb z czego aż połowa z nich została odrzucona.

3.1.3 Generacja liczb z rozkładu o gęstości w kształcie półokręgu i zerowej wartości oczekiwanej

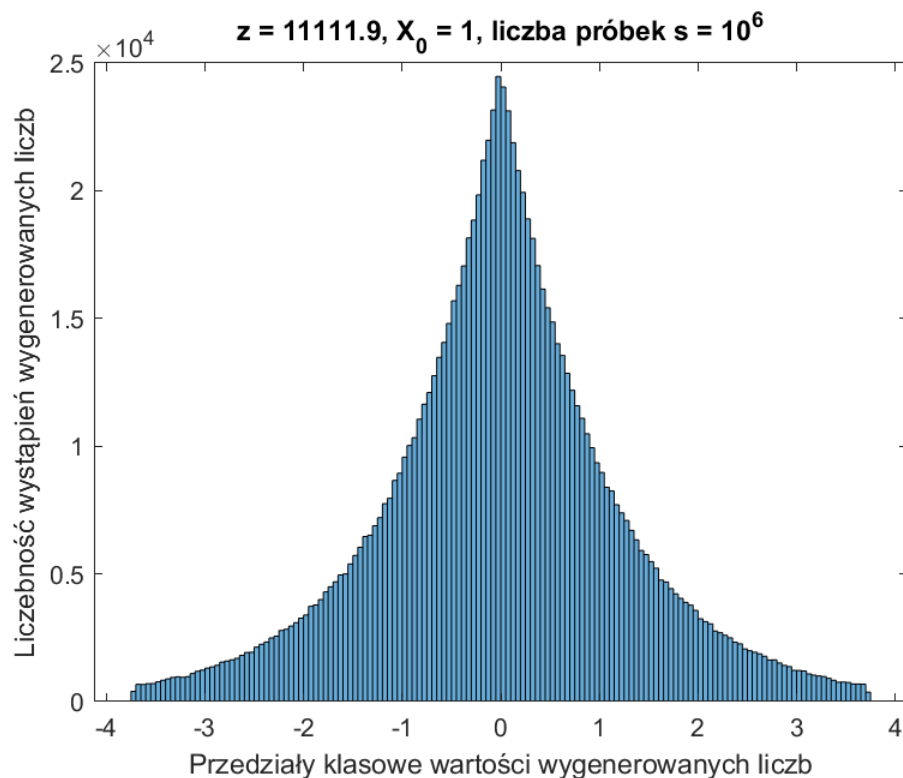


Rysunek 3.3. Histogram dla rozkładu o kształcie półokręgu

Aby pole tego półokręgu było równe 1 to promień tego okręgu musi być równy $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Podobnie jak poprzednio zostało wygenerowane 10^6 próbek. Około $106 \cdot 10^3$ liczb zostało odrzuconych przez metodę eliminacji.

3.1.4 Generacja liczb losowych o rozkładzie normalnym $N(0, 1)$ z wykorzystaniem generatora zmiennych losowych o rozkładzie Laplace'a



Rysunek 3.4. Histogram rozkładu normalnego z wykorzystaniem generatora o rozkładzie Laplace'a

Warunek akceptacji $|V| \leq \sqrt{-2 \ln U + 1}$. Dla liczby próbek równej 10^6 odrzuconych zostało około 23000 liczb. Tak niewiele, w porównaniu do liczby wszystkich próbek, zostało wyeliminowanych próbek z tego względu, że obszar odrzucania w tym zadaniu jest nieduży.

3.1.5 Wnioski i podsumowanie

Metoda eliminacji jest metodą stratną, co oznacza, że część próbek nie może zostać wykorzystana. Najgorzej ta metoda wypada kiedy obszar odrzucania jest dużo większy od obszaru akceptacji, jak na przykład w zadaniu o rozkładzie gęstości prawdopodobieństwa 3.2. W przypadku wariantu ogólnego ważne jest aby znać funkcję pomocniczą ograniczającą obszar odrzucania i akceptacji z góry.

Bibliografia

- [1] R. Zieliski R. Wieczorkowski. *komputerowe generatory liczb losowych*. 1997.