Politechnika
Wrocławska

Teoria i metody optymalizacji
Opis projektu – algorytm dualny simpleks

Autorzy:

Igor Chaszczewicz	235939
Grzegorz Sęk	241778

Prowadzący zajęcia:
dr inż. Ewa Szlachcic

Termin zajęć:
Środa, 11:15 TP
Semestr letni 2020/2021

1 lutego 2023

Spis treści

Rozdział 1

Rozdział

1.1 Sformułowanie zadania optymalizacji dla zmiennych ciągłych

Zadanie programowania liniowego zostało ograniczone do wymiaru:

$$n \leq 5 \quad m \leq 5,$$

gdzie:
n – liczba zmiennych
m – liczba ograniczeń

Funkcja celu przedstawia się w następujący sposób:

$$min\, x_0 = c^T x \tag{1.1}$$

Ograniczenia tylko większościowe:

$$A_2 x \geq b_2 \tag{1.2}$$

oraz wektor x:

$$x \geq 0 \tag{1.3}$$

Dla tego typu zadania został wykorzystany algorytm dualnej metody simpleks, a sposób jego implementacji został wykonany zgodnie z materiałem przedstawionym na wykładzie [1].

1.2 Omówienie algorytmu

1. Warunek dualnej dopuszczalności [1]:

$$y_{0j} \geq 0 \quad dla \quad j \in \{1, \ldots, n\}, \tag{1.4}$$

   gdzie n to liczba zmiennych

2. Warunek optymalności [1] [2] [3]:

$$y_{i0} \geq 0 \quad dla \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \tag{1.5}$$

   gdzie m to liczba ograniczeń

3. Definicja przyjętych tablic simpleksowych (na przykładzie zadania dla 2 zmiennych i 3 ograniczeń)[1].

		x_1	x_2
x_0	y_{00}	y_{01}	y_{02}
x_3	y_{10}	y_{11}	y_{12}
x_4	y_{20}	y_{21}	y_{22}
x_5	y_{30}	y_{31}	y_{32}

Początkowa tablica simpleksowa jest tworzona na podstawie funkcji celu oraz ograniczeń. W wierszu x_0 zawsze element y_{00} jest równy 0, natomiast kolejne dwa (y_{12} i y_{13}) są wartościami współczynników przy zmiennych x_1, x_2 w funkcji celu. Kolejne wiersze (x_3, x_4 oraz x_5) posiadają kolejno: wartość wyrazu wolnego, wartość współczynnika przy x_1 i x_2. Ważne jest, że podczas wpisywania wierszy dla ograniczeń należy pomnożyć wartości przez -1 [1].
Dokładne działanie algorytmu zostało przedstawione w punkcie 1.5 na konkretnych przykładach.

1.3 Informacje ogólne o programie

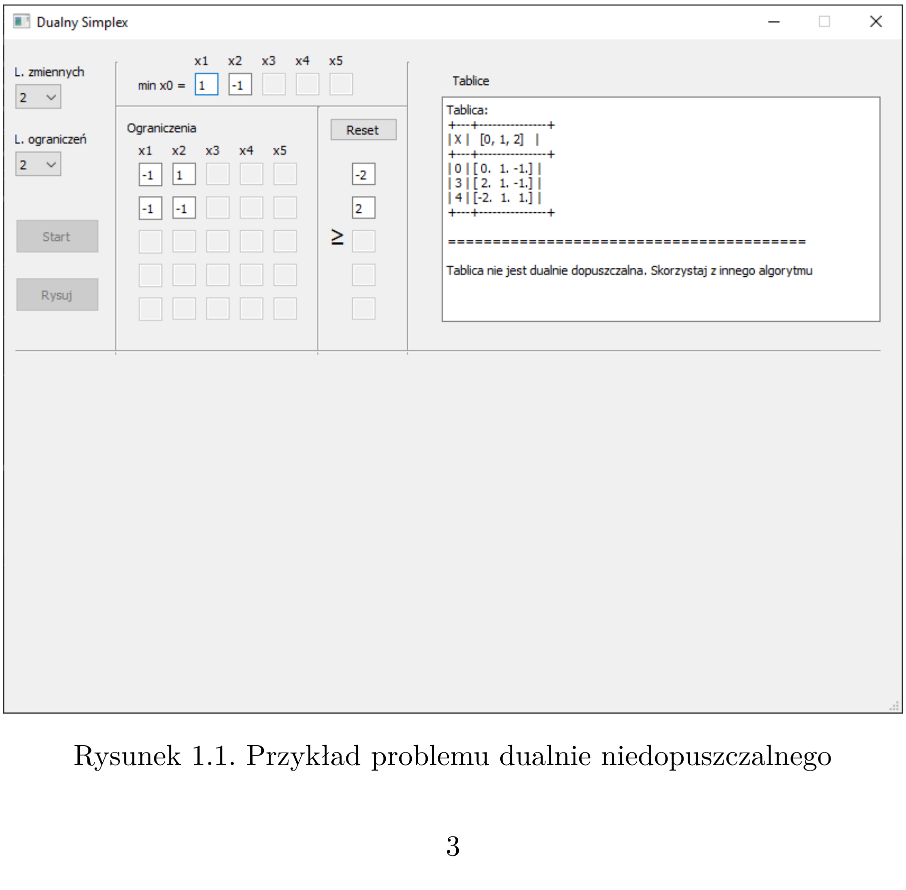
Projekt został wykonany przy pomocy języka *Python* oraz zintegrowanego środowiska programistycznego – PyCharm. Dodatkowo, aby ułatwić zdalną pracę grupową wykorzystano system kontroli wersji Git.

Zastosowane biblioteki:

- *NumPy* – dodaje obsługę macierzy
- *PyQt5* – nakładka na bibliotekę Qt umożliwiająca tworzenie interfejsu graficznego
- *PrettyTable* – biblioteka umożliwiająca wyświetlanie danych w tabelach utworzonych z symboli ASCII
- *Matplotlib* – biblioteka do tworzenia wykresów
- *math* – ułatwia matematyczne operacje

1.4 Zasady wprowadzania danych początkowych

Zaczynając pracę z naszym programem należy zadeklarować liczbę zmiennych oraz ograniczeń używając rozwijanych list po lewej stronie. Gdy już zostaną wybrane, odpowiednia ilość pól funkcji celu oraz ograniczeń zostanie odblokowana. Następnie należy wprowadzić badany problem, który spełnia założenia przedstawione w punkcie 1.1 oraz warunek dualnej dopuszczalności – wszystkie współczynniki w funkcji celu muszą być nieujemne. W przypadku niespełnienia kryterium dualnej dopuszczalności program wyświetli odpowiedni komunikat.



Rysunek 1.1. Przykład problemu dualnie niedopuszczalnego

1.5 Przykłady testowe

1.5.1 Zbiór rozwiązań dopuszczalnych X nie jest zbiorem pustym i istnieje jedno rozwiązanie optymalne PL

Zadanie PL posiada tylko jedno rozwiązanie w momencie, gdy tablica jest dualnie dopuszczalna, optymalna oraz gdy nie spełnia warunków na: zadanie nieograniczone, nieskończenie wiele rozwiązań na zbiorze ograniczonym, nieskończenie wiele rozwiązań na zbiorze nieograniczonym (opisane dokładnie w kolejnych punktach)

1. Przykładowe zadanie spełniające powyższe kryteria:

$$min\, x_0 = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 7 \\ x_1 + 2x_2 \geq 7 \end{cases}$$

Rozwiązanie zadania:

Zadanie zapisane do postaci tablicy simpleksowej:

		x_1	x_2
x_0	0	1	1
x_3	-7	-2	-1
x_4	-7	-1	-2

Na początku sprawdzana jest dualna dopuszczalność tablicy. Jak widać pierwsze elementy kolumny x_1 oraz x_2 są większe lub równe zero. Zatem tablica jest dualnie dopuszczalna.

Dalej należy sprawdzić optymalność tablicy. Wiersz x_3 oraz x_4 nie jest większy bądź równy 0, czyli tablica nie jest optymalna – należy wybrać zmienną usuwaną z bazy.

Zmienna usuwana z bazy jest wybierana według wzoru [1] [2] [3]:

$$y_{r0} = \underset{j \in R_N}{min} \{y_{i0},\, y_{i0} < 0,\, i = 1,\, \ldots,\, m\} \tag{1.6}$$

Dla tego przykładu zarówno wartość w wierszu x_3 oraz x_4 jest taka sama, zatem zmienna usuwana z bazy zostanie arbitralnie wybrana – w tym przypadku x_3.

Kolejnym krokiem jest wybór zmiennej wchodzącej do bazy. Decyduje się o tym na podstawie wzoru [1] [3]:

$$\frac{y_{0k}}{y_{rk}} = max \left(\frac{y_{0j}}{y_{rj}},\, y_{rj} < 0,\, j = 1,\, \ldots,\, n \right) \tag{1.7}$$

Jak widać, większa liczba została uzyskana dla kolumny x_1, zatem zmienna x_1 zostanie wprowadzona do bazy.

Dalej zostanie dokonana dualna iteracja simpleksowa metodą eliminacji Gauss'a poprzez wprowadzenie do bazy zmiennej x_1 oraz usunięcie zmiennej x_3.

Czyli:

$$y_{00} = y_{00} - \frac{y_{10} \cdot y_{01}}{y_{11}} = 0 - \frac{-7 \cdot 1}{-2} = \mathbf{-3.5}$$
$$y_{01} = \frac{-y_{01}}{y_{11}} = \frac{-1}{-2} = \mathbf{0.5}$$
$$y_{02} = y_{02} - \frac{y_{12} \cdot y_{01}}{y_{11}} = 1 - \frac{-1 \cdot 1}{-2} = \mathbf{0.5}$$
$$y_{10} = \frac{y_{10}}{y_{11}} = \frac{7}{-2} = \mathbf{3.5}$$
$$y_{11} = \frac{1}{y_{11}} = \frac{1}{-2} = \mathbf{-0.5}$$
$$y_{12} = \frac{y_{12}}{y_{11}} = \frac{-1}{-2} = \mathbf{0.5}$$
$$y_{20} = y_{20} - \frac{y_{21} \cdot y_{10}}{y_{11}} = -7 - \frac{-1 \cdot (-7)}{-2} = \mathbf{-3.5}$$
$$y_{21} = \frac{-y_{21}}{y_{11}} = \frac{-(-1)}{-2} = \mathbf{-0.5}$$
$$y_{22} = y_{22} - \frac{y_{21} \cdot y_{12}}{y_{11}} = -2 - \frac{-1 \cdot (-1)}{-2} = \mathbf{-1.5}$$

Krok 1: W wyniku poprzedniej operacji uzyskano taką tablicę:

		x_3	x_2
x_0	-3.5	0.5	0.5
x_1	3.5	-0.5	0.5
x_4	-3.5	-0.5	-1.5

Należy ponownie teraz sprawdzić optymalność tablicy. Jak widać w kolumnie zerowej i wierszu x_4 znajduje się liczba ujemna zatem rozwiązanie nie jest jeszcze optymalne.

Trzeba ponownie wybrać zmienną usuwaną z bazy. Tym razem w tablicy znajduje się tylko jedna liczba spełniająca kryterium 1.6, mianowicie -3.5. Zatem zostanie usunięta z bazy zmienna x_4.

Dalej należy wybrać zmienną wprowadzaną do bazy. Tym razem kryterium spełnia wartość znajdująca się w kolumnie x_2 zatem to właśnie ta zmienna zostanie wprowadzona do bazy.

Następnie ponownie dokonuje się dualnej iteracji simpleksowej metodą eliminacji Gauss'a poprzez wprowadzenie do bazy zmiennej x_2 oraz usunięcie zmiennej x_4.

Czyli:

$$y_{00} = y_{00} - \frac{y_{20} \cdot y_{01}}{y_{22}} = -3.5 - \frac{-3.5 \cdot 0.5}{-1.5} = \textbf{-4.67}$$
$$y_{01} = y_{01} - \frac{y_{12} \cdot y_{02}}{y_{22}} = -0.5 - \frac{-0.5 \cdot 0.5}{-1.5} = \textbf{0.33}$$
$$y_{02} = \frac{-y_{02}}{y_{22}} = \frac{-0.5}{-1.5} = \textbf{0.33}$$
$$y_{10} = y_{10} - \frac{y_{20} \cdot y_{12}}{y_{22}} = 3.5 - \frac{-3.5 \cdot 0.5}{-1.5} = \textbf{2.33}$$
$$y_{11} = y_{11} - \frac{y_{21} \cdot y_{12}}{y_{22}} = -0.5 - \frac{-0.5 \cdot 0.5}{-1.5} = \textbf{-0.67}$$
$$y_{12} = \frac{-y_{12}}{y_{22}} = \frac{-0.5}{-1.5} = \textbf{0.33}$$
$$y_{20} = \frac{y_{20}}{y_{22}} = \frac{-3.5}{-1.5} = \textbf{2.33}$$
$$y_{21} = \frac{y_{21}}{y_{22}} = \frac{-0.5}{-1.5} = \textbf{0.33}$$
$$y_{22} = \frac{1}{y_{22}} = \frac{1}{-1.5} = \textbf{-0.67}$$

Krok 2:

		x_3	x_4
x_0	-4.67	0.33	0.33
x_1	2.33	-0.67	0.33
x_2	2.33	0.33	-0.67

Tablica już jest optymalna, ponieważ posiada pierwsze elementy dla wiersza x_1 oraz x_2 większe bądź równe zero. Zadanie posiada tylko jedno rozwiązanie.
Rozwiązanie optymalne:
$\hat{x} = [\hat{x^1}\ \hat{x^2}\ \hat{x^3}\ \hat{x^4}]^T = [2.33333\ 2.33333\ 0\ 0]^T$

$\hat{x_0} = 4.666666666666667$

2. **Przykładowe zadanie z treścią:**
Dieta pewnej osoby składa się z dwóch rodzajów żywności, których ceny i zawartości składników odżywczych przedstawia tabela. W tabeli podano też minimalne zapotrzebowanie dzienne na poszczególne składniki zawarte w żywności. Jaka kombinacja obu tych rodzajów żywności zaspokaja dzienne zapotrzebowanie na substancje odżywcze najmniejszym kosztem[4]?

	wapń	proteiny	witamina A	Cena
żywność I	10	5	2	0.60
żywność II	4	5	6	1.00
Zapotrzebowanie	20	20	12	

Zadanie zapisane w formie tablicy simpleksowej:

		x_1	x_2
x_0	0	0.6	1
x_3	-20	-10	-4
x_4	-20	-5	-5
x_5	-12	-2	-6

Jak widać tablica spełnia kryterium dualnej dopuszczalności (1.4), natomiast nie jest jeszcze optymalna – zgodnie z kryterium (1.5). W związku z tym została wybrana zmienna usuwana z bazy x_3 na podstawie warunku (1.6). Następnie została wybrana zmienna x_1 do wprowadzenia do bazy – zgodnie z (1.7). Dalej wykonana została eliminacja Gauss'a względem usuwanej i wprowadzanej zmiennej (analogicznie do poprzedniego zadania).

W wyniku tego uzyskano tablicę:

		x_3	x_2
x_0	-12	0.06	0.76
x_1	2	-0.1	0.4
x_4	-10	-0.5	-3
x_5	-8	-0.2	-5.2

Uzyskana tablica nadal nie jest optymalna, zatem, jako zmienna usuwana z bazy zostaje wybrana x_4, natomiast jako zmienna wprowadzana do bazy – zmienna x_3. Dalej względem x_4 oraz x_3 zostaje wykonana ponownie eliminacja Gauss'a.

W wyniku tego uzyskano tablicę:

		x_4	x_2
x_0	-2.4	0.12	0.4
x_1	4	-0.2	1
x_3	20	-2	6
x_5	-4	-0.4	-4

Tablica nadal nie jest optymalna zatem zostaje wybrana nowa zmienna do usunięcia z bazy – x_5. Natomiast jako zmienna wprowadzana do bazy zostaje wybrana zmienna x_2. Ponownie zostaje dokonana dualna iteracja simpleksowa metodą eliminacji Gauss'a poprzez wprowadzenie do bazy zmiennej x_2 oraz usunięcie zmiennej x_5.

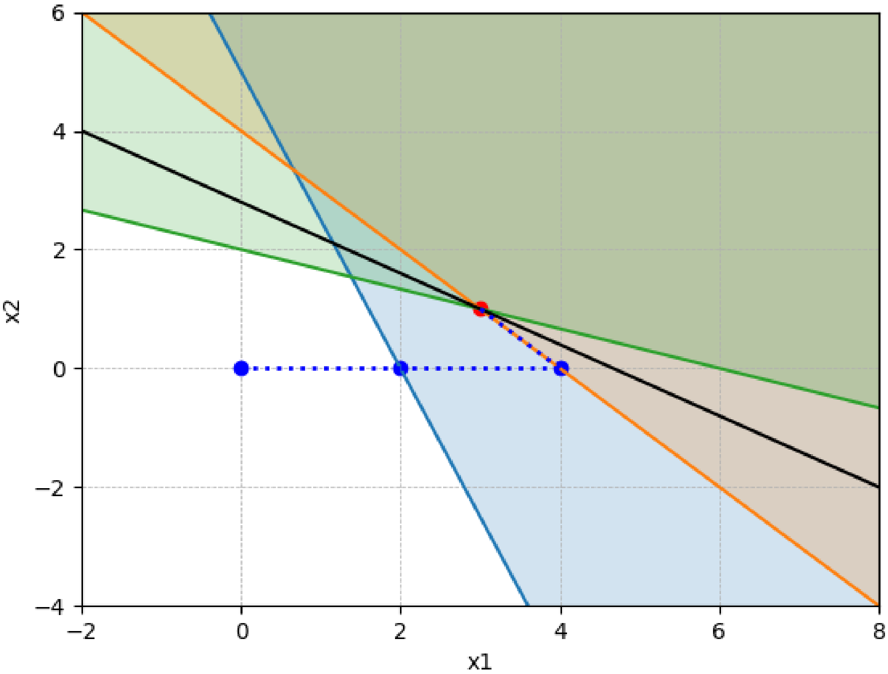
		x_4	x_5
x_0	-2.8	0.08	0.1
x_1	3	-0.3	0.25
x_3	14	-2.6	1.5
x_2	1	0.1	-0.25

Po tej operacji udaje się uzyskać tablicę optymalną. Zadanie posiada tylko jedno rozwiązanie.

Rozwiązanie optymalne:
$\hat{x} = [\hat{x^1}\ \hat{x^2}\ \hat{x^3}\ \hat{x^4}\ \hat{x^5}]^T = [3\ 1\ 14\ 0\ 0]^T$

$\hat{x_0} = 2.8$

Aby dostarczyć wymaganych ilości składników przy jednoczesnej minimalizacji kosztów, dieta powinna składać się z 3 jednostek żywności I oraz 1 jednostki żywności II. Wtedy minimalny koszt wyniesie 2.8[4].



Rysunek 1.2. Zrzut z programu przedstawiający graficzne rozwiązanie zadania

1.5.2 Zbiór rozwiązań dopuszczalnych X nie jest zbiorem pustym i istnieje nieskończona liczba rozwiązań optymalnych

To rozwiązanie zadania PL musi spełniać warunek dualnej dopuszczalności i optymalności tablicy. Dalsze warunki zostały podane poniżej – w zależności od zbioru rozwiązań.

1. **Nieskończenie wiele rozwiązań na zbiorze nieograniczonym [5]:**

   Ten przypadek musi spełniać warunek taki, że:

$$y_{0j} \geq 0 \quad dla \quad j = 1, \ldots, n \tag{1.8}$$

   oraz istnieje j_0 takie, że

$$y_{0j_0} = 0 \tag{1.9}$$

   i dla wszystkich “i“ zachodzi degeneracja, czyli:

$$y_{i0} = 0, \tag{1.10}$$

   bądź:

$$y_{ij_0} \leq 0 \tag{1.11}$$

   Przykładowe zadanie spełniające powyższe kryteria:

$$min\, x_0 = x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ x_2 \geq 2 \end{cases}$$

Zadanie zapisane w postaci tablicy simpleksowej:

		x_1	x_2
x_0	0	0	1
x_3	-5	-1	-2
x_4	-2	0	-1

Tablica jest dualnie dopuszczalna, lecz nieoptymalna. Zatem zostaje wybrana zmienna x_3, jako najmniejsza ujemna liczba w pierwszej kolumnie z pominięciem pierwszego wiersza, do usunięcia z bazy. Jako zmienną wprowadzaną do bazy zostaje zmienna x_1 – zgodnie z (1.7). Dalej wykonuje się dualną iterację simpleksową metodą eliminacji Gauss'a względem zmiennej usuwanej (x_3) i wprowadzanej do bazy (x_1).

		x_3	x_2
x_0	0	0	1
x_1	5	-1	2
x_4	-2	0	-1

Tablica wciąż posiada ujemny pierwszy element w wierszu x_4, zatem nie jest optymalna. Ponownie zostaje wybrana zmienna usuwana z bazy. Tym razem jest to zmienna x_4, natomiast zmienną wprowadzaną do bazy zostaje x_2. Dalej analogicznie wykonuje się eliminację Gauss'a.

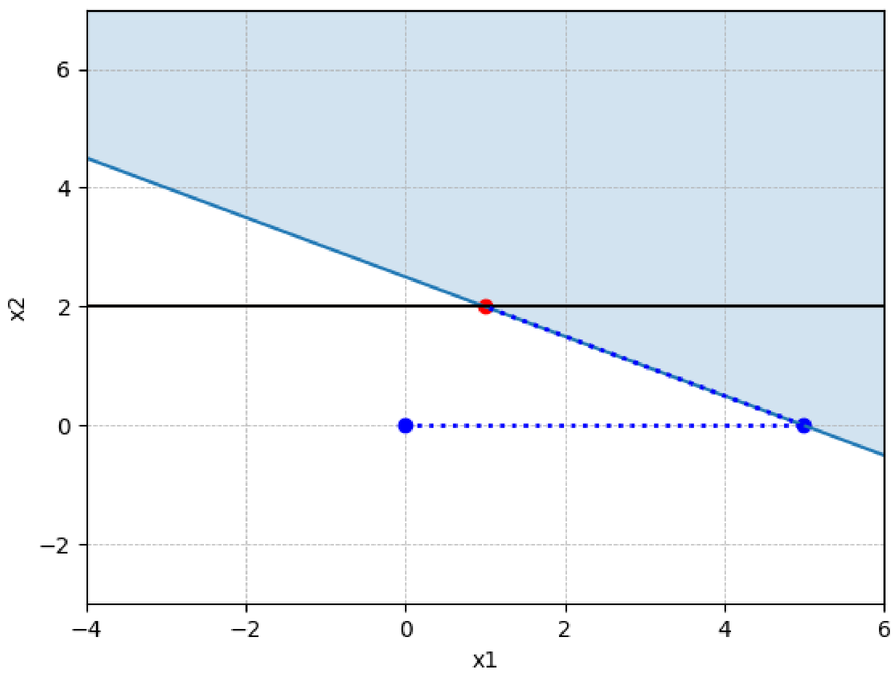
		x_3	x_4
x_0	-2	0	1
x_1	1	-1	2
x_2	2	0	-1

Tym razem tablica już jest optymalna. Jak widać w tabeli zachodzi warunek, że dla kolumny x_1 oraz x_2 pierwsze elementy są większe bądź równe 0 (1.8). Dalej można zauważyć, że pierwszy element w kolumnie x_1 jest równy zero (1.9) a kolejne wiersze tej kolumny są mniejsze bądź równe zero (1.11). Zatem istnieje nieskończona liczba rozwiązań optymalnych na zbiorze nieograniczonym – w tym przypadku będzie to półprosta.

Rozwiązanie optymalne:

$\hat{x} = [\hat{x^1}\ \hat{x^2}\ \hat{x^3}\ \hat{x^4}]^T = [1\ 2\ 0\ 0]^T$

$x_{opt} = x + [-1.0\ 0.0]^T t \qquad dla \quad t \geq 0,$



Rysunek 1.3. Zrzut z programu przedstawiający graficzne rozwiązanie zadania

2. **Nieskończenie wiele rozwiązań na zbiorze ograniczonym [5]:**
   Ten przypadek musi spełniać warunek taki, że:

$$y_{0j} \geq 0 \quad dla \quad j = 1, \ldots, n \tag{1.12}$$

   oraz istnieje para:

$$y_{0j_0} = 0, \quad y_{i_0 0} > 0 \quad i \quad y_{i_0 j_0} > 0 \tag{1.13}$$

   Przykładowe zadanie spełniające powyższe kryteria:

$$min\, x_0 = x_1 + x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ x_1 + 2x_2 \geq 5 \\ x_1 + x_2 \geq 4 \end{cases}$$

Zadanie zapisane w postaci tablicy simpleksowej:

		x_1	x_2
x_0	0	1	1
x_3	-5	-2	-1
x_4	-5	-1	-2
x_5	-4	-1	-1

Tablica jest dualnie dopuszczalna, lecz jeszcze nieoptymalna. W tym przypadku zmienną usuwaną może być zarówno x_3 jak i x_4, więc zostaje wybrana arbitralnie jedna z nich – w tym wypadku pierwsza napotkana, czyli x_3. Zmienną wprowadzaną do bazy zostaje zmienna x_1 – zgodnie z warunkiem (1.7). Dalej zostaje wykorzystana eliminacja Gaussa względem zmiennej x_3 oraz x_1.

		x_3	x_2
x_0	-2.5	0.5	0.5
x_1	2.5	-0.5	0.5
x_4	-2.5	-0.5	-1.5
x_5	-1.5	-0.5	-0.5

Jak widać tablica ponownie nie jest jeszcze optymalna. Zatem wybierana jest kolejna zmienna usuwana z bazy. Tym razem jest to x_4. Jako zmienna wprowadzana do bazy zostaje wybrana zmienna x_2. Po raz kolejny zostaje użyta metoda eliminacji Gaussa, jednak tym razem względem zmiennej x_4 i x_2.

		x_3	x_4
x_0	-3.33	0.33	0.33
x_1	1.67	-0.67	0.33
x_2	1.67	0.33	-0.67
x_5	-0.67	-0.33	-0.33

Ponownie tablica nie jest optymalna. Zmienną usuwaną z bazy zostaje zmienna x_4, natomiast zmienną wprowadzaną do bazy zostaje zmienna x_2. Dalej zostaje zastosowana metoda eliminacji Gauss'a.

		x_5	x_4
x_0	-4	1	0
x_1	3	-2	1
x_2	1	1	-1
x_3	2	-3	1

Udaje się w końcu uzyskać tablicę optymalną. Tablica spełnia warunek (1.12) (pierwsze elementy w kolumnach x_5 i x_4 są większe bądź równe 0) oraz warunek (1.13). Oznacza to, że zadanie posiada nieskończenie wiele rozwiązań na zbiorze ograniczonym – w tym przypadku jest to odcinek.

Rozwiązanie optymalne: $\hat{x} = [\hat{x^1}\ \hat{x^2}\ \hat{x^3}\ \hat{x^5}\ \hat{x^4}]^T = [3\ 1\ 2\ 0\ 0]^T$

W celu odnalezienia drugiego końca odcinka należy wykonać jeszcze jedną operację, lecz tym razem korzystając ze zwykłego simpleksu. Zatem jako zmienna wchodząca do bazy zostaje wybrana zmienna spełniająca warunek [5]:

$$y_{0k} = \min_{j \in R_N} \{y_{0j},\ y_{0j} \leq 0 \ \ dla\ j = 1,\ \ldots,\ n\} \tag{1.14}$$

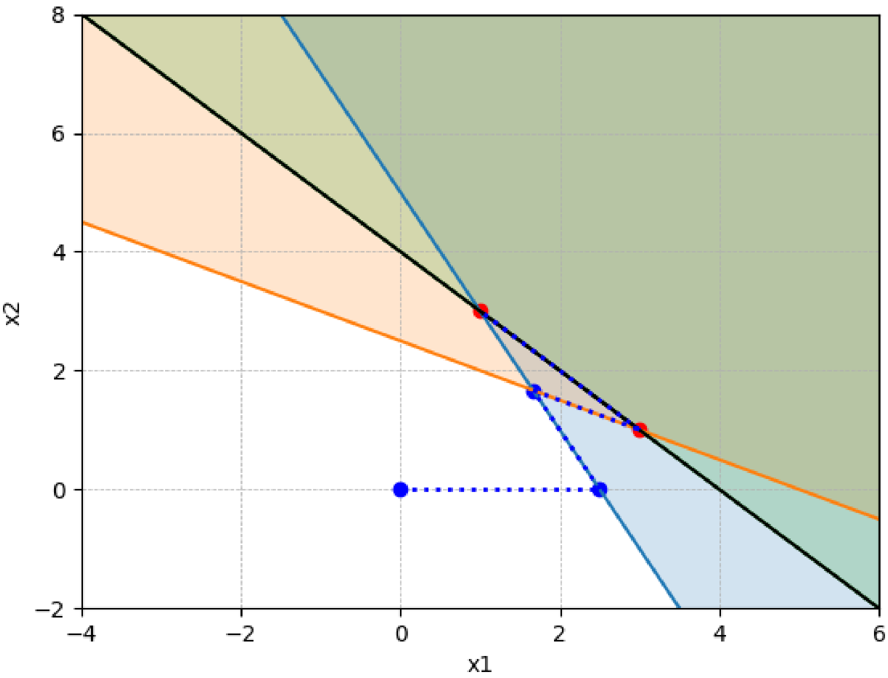
Czyli będzie to zmienna x_4. Dalej należy wybrać zmienną usuwaną z bazy zgodnie z warunkiem [5]:

$$\Theta_{rk} = \min_{i=1,\ \ldots,\ m} \left(\frac{y_{i0}}{y_{ik}},\ y_{ik} > 0 \right) \tag{1.15}$$

Czyli będzie to zmienna x_3. Wykonujemy eliminację Gauss'a względem zmiennej x_4 i x_3.
Dodatkowy krok:

		x_5	x_3
x_0	-4	1	0
x_1	1	1	-1
x_2	3	-2	1
x_4	2	-3	1

Rozwiązanie optymalne:
$\hat{x} = [\hat{x^1}\ \hat{x^2}\ \hat{x^3}\ \hat{x^4}\ \hat{x^5}]^T = [1\ 3\ 0\ 2\ 0]^T$
min x0 = 4.0
Równanie odcinka:
$x = [3\ 1]\lambda_1 + [1\ 3]\lambda_2 \qquad \lambda 1 + \lambda 2 = 1$



Rysunek 1.4. Zrzut z programu przedstawiający graficzne rozwiązanie zadania

1.5.3 Zbiór rozwiązań dopuszczalnych X jest zbiorem pustym

Jest to przypadek, w którym nasz algorytm nie może wygenerować nowych rozwiązań. Oznacza to, że nigdy nie osiągnie on wartości optymalnej, gdyż cały czas nie jest spełniony warunek optymalnej tablicy [5]:

$$y_{i0} \geq 0 \quad dla \quad i = 1, \ldots, m \tag{1.16}$$

Przykładowe zadanie spełniające powyższe kryteria:

$$min\, x_0 = x_1 + x_2$$
$$-x_1 \geq 2$$

Zadanie zapisane w postaci tablicy simpleksowej:

		x_1	x_2
x_0	0	1	1
x_3	-2	1	0

Tablica jest dualnie dopuszczalna, lecz jest jeszcze optymalna. Zatem zostaje wybrana zmienna usuwana z bazy – x_3 oraz zmienna wprowadzana do bazy – x_1. Dalej wykorzystana zostaje metoda eliminacji Gauss'a względem zmiennej x_3 i x_1.

		x_3	x_2
x_0	2	-1	1
x_1	-2	1	0

Jak widać tablica ponownie nie jest optymalna. Zostaje wybrana zmienna usuwana z bazy – x_1 oraz zmienna wprowadzana do bazy x_3. Dalej wykonana zostaje dualna iteracja simpleksowa przy użyciu metody eliminacji Gauss'a względem zmiennej x_1 i x_3.

		x_1	x_2
x_0	0	1	1
x_3	-2	1	0

Jak możemy zauważyć ostatnia tablica jest taka sama jak pierwsza. Algorytm "zapętla się" i nie generuje nowych rozwiązań przez co tablice cały czas nie spełniają warunku optymalności. Zadanie nie posiada rozwiązania.

1.5.4 Zadanie PL jest zadaniem nieograniczonym

Zadanie nieograniczone jest jednym ze szczególnych przypadków. Jeśli tablica spełnia warunek dualnej dopuszczalności i optymalności, a także posiada wektor y_k taki, że [5]:

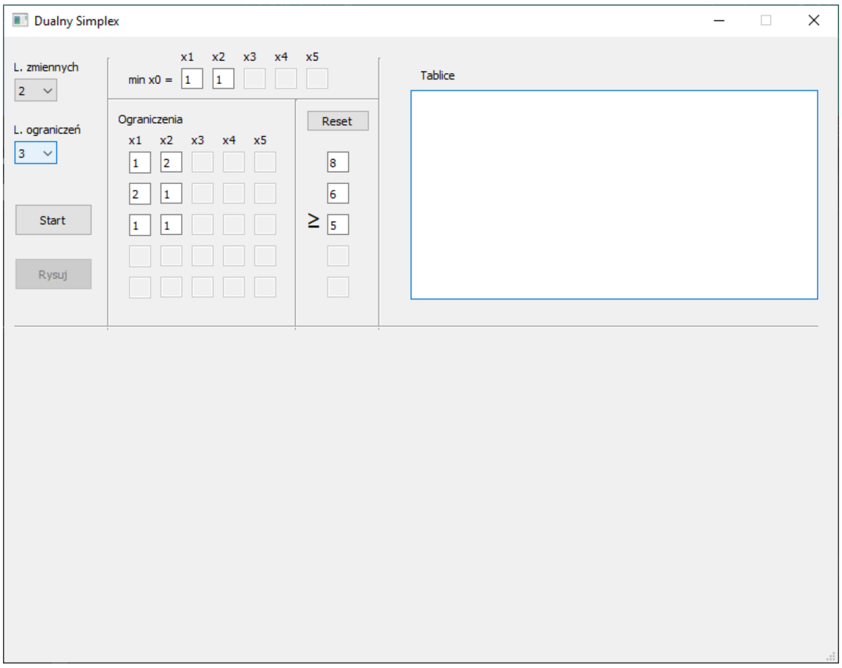
$$y_{0k} < 0 \quad i \quad y_{ik} \leq 0 \quad dla \quad i = 1, \ldots, m \tag{1.17}$$

To zbiór rozwiązań jest pusty.

W przypadku algorytmu dualnej metody simpleks i założeń przedstawionych w punkcie 1.1 taki przypadek nie zachodzi. Spowodowane jest to niespełnianiem, przez zadanie, dualnej dopuszczalności, gdyż współczynniki zmiennych funkcji celu musiałyby mieć wartości ujemne.

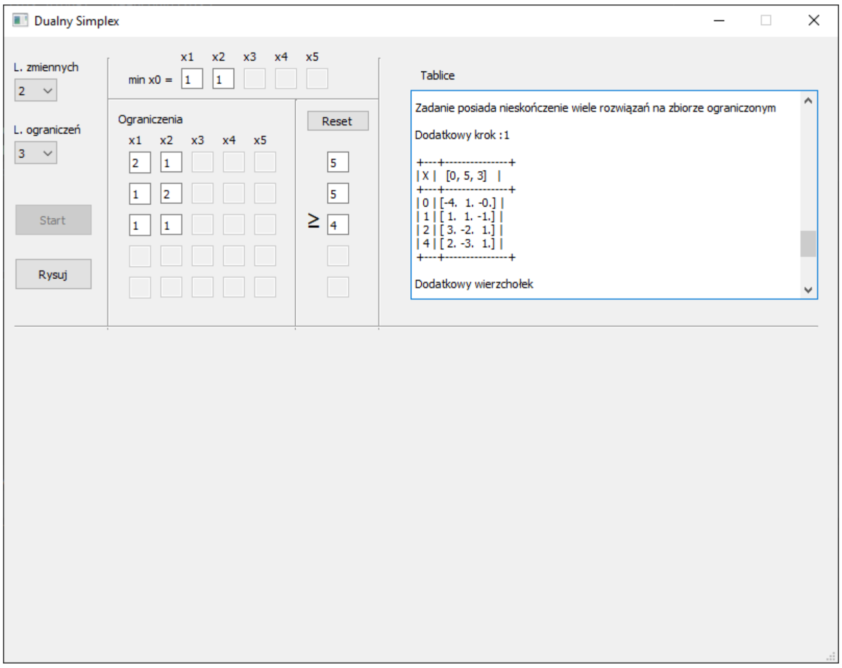
1.6 Ilustracja wyników pracy algorytmu optymalizacji

Do programu wprowadzony został następujący problem:



Rysunek 1.5. Program z przykładowym problemem z nieskończoną ilością rozwiązań na zbiorze ograniczonym

Po wpisaniu liczb w odpowiednie pola odpowiadające za wartości poszczególnych zmiennych funkcji celu oraz ograniczeń wciśnięto przycisk *Start*, co rozpoczęło działanie algorytmu.

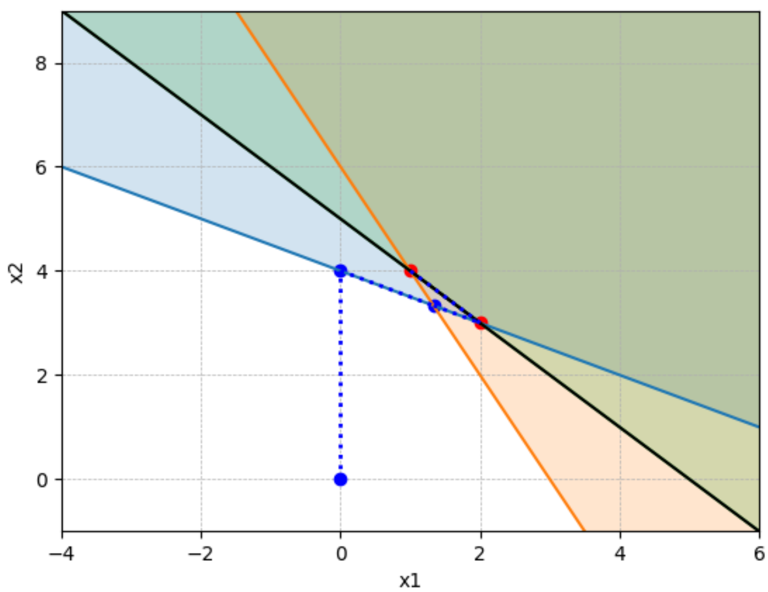


Rysunek 1.6. Program po wykonaniu obliczeń

Kolejne tablice, wierzchołki oraz wartość funkcji celu wyświetlają się w polu *Tablice*, które możemy przeglądać przesuwając suwak znajdujący się po prawej stronie. Cała zawartość pola dla powyższego problemu przedstawiona jest na kolejnej stronie:

```
Tablica:
+---+---------------+
| X |   [0, 1, 2]   |
+---+---------------+
| 0 |   [0. 1. 1.]  |
| 3 | [-8. -1. -2.] |
| 4 | [-6. -2. -1.] |
| 5 | [-5. -1. -1.] |
+---+---------------+

========================================

Tablica jest dualnie dopuszczalna

========================================

KROK: 1
+---+------------------+
| X |    [0, 1, 3]     |
+---+------------------+
| 0 | [-4.   0.5  0.5] |
| 2 | [ 4.   0.5 -0.5] |
| 4 | [-2.  -1.5 -0.5] |
| 5 | [-1.  -0.5 -0.5] |
+---+------------------+

========================================

KROK: 2
+---+---------------------+
| X |      [0, 4, 3]      |
+---+---------------------+
| 0 | [-4.67  0.33  0.33] |
| 2 | [ 3.33  0.33 -0.67] |
| 1 | [ 1.33 -0.67  0.33] |
| 5 | [-0.33 -0.33 -0.33] |
+---+---------------------+

========================================

KROK: 3

Rozwiązanie optymalne

+---+---------------+
| X |   [0, 5, 3]   |
+---+---------------+
| 0 | [-5.  1.  0.] |
| 2 | [ 3.  1. -1.] |
| 1 | [ 2. -2.  1.] |
| 4 | [ 1. -3.  1.] |
+---+---------------+

========================================

WYNIK ALGORYTMU:
+---+---------------+
| X |   [0, 5, 3]   |
+---+---------------+
| 0 | [-5.  1.  0.] |
| 2 | [ 3.  1. -1.] |
| 1 | [ 2. -2.  1.] |
| 4 | [ 1. -3.  1.] |
+---+---------------+

Struktura x: ['x2', 'x1', 'x4', 'x5', 'x3']
x = [3. 2. 1. 0. 0.]

========================================

Zadanie posiada nieskończenie wiele rozwiązań na zbiorze ograniczonym

Dodatkowy krok :1

+---+---------------+
| X |   [0, 5, 4]   |
+---+---------------+
| 0 | [-5.  1. -0.] |
| 2 | [ 4. -2.  1.] |
| 1 | [ 1.  1. -1.] |
| 3 | [ 1. -3.  1.] |
+---+---------------+

Dodatkowy wierzchołek

Struktura x: ['x2', 'x1', 'x3', 'x5', 'x4']
x = [4. 1. 1. 0. 0.]

========================================

x = [2. 3.]*λ1 + [1. 4.]*λ2
λ1 + λ2 = 1

min x0 = 5.0
```

Program tworzy z podanych danych pierwszą tablicę i sprawdza czy spełnia ona warunek dualnej dopuszczalności. Jeżeli tak, kolejne kroki wykonywane są zgodnie z algorytmem metody dualnej simpleks. Jeżeli tablica jest tablicą optymalną wypisywany jest wierzchołek rozwiązania oraz sprawdzane są warunki dla przypadków z nieskończoną ilością rozwiązań. W podanym powyżej przykładzie nasze zadanie spełnia warunek dla nieskończonej ilości rozwiązań na zbiorze ograniczonym, więc po dojściu do tablicy optymalnej kolejna tablica jest tworzona w oparciu o zwykły algorytm simpleks. Otrzymujemy wtedy dodatkowy wierzchołek, który z wierzchołkiem poprzednim tworzy odcinek, na którym znajdują się nasze rozwiązania. Na końcu podawany jest wzór odcinka oraz wartość funkcji celu. Po wykonaniu obliczeń możemy narysować przebieg naszego algorytmu klikając przycisk *Rysuj*.



Rysunek 1.7. Przebieg algorytmu

Punkty zaznaczone kolorem niebieskim oznaczają punkty, które nie są jeszcze optymalne, a czerwonym punkty optymalne. Przebieg między punktami zaznaczony jest niebieską, przerywaną linią. W tym przypadku naszym rozwiązaniem jest odcinek, więc na czerwono zaznaczony jest jego początek i koniec.

Bibliografia

[1] Ewa Szlachcic. Wykład 6 - kurs Teoria i Metody Optymalizacji.

[2] James B. Orlin Ravindra K. Ahuja. Equivalence of the primal and dual simplex algorithms for the maximum flow problem.

[3] Mohammad Equebal Hussain Mohammad Rashid Hussain. Simplex method to Optimize Mathematical manipulation.

[4] Zdzisław Dzedzej. *Programowanie liniowe, dostępne online: URL.*

[5] Ewa Szlachcic. Wykład 5 - kurs Teoria i Metody Optymalizacji.