Efekt Rungego

Sprawozdanie z laboratorium 4

Jakub Grześ

05.04.2024

1 Treść zadań

Wyznacz wielomiany interpolujące funkcje

$$f_1(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}$$

na przedziale $[-1, 1]$ używając:

$$f_2(x) = \exp(\cos(x))$$

na przedziale $[0, 2\pi]$

- wielomianów Lagrange'a z równoodległymi węzłami $x_j = x_0 + jh, j = 0, 1, \ldots, n$, gdzie $h = \frac{x_n - x_0}{n}$
- kubicznych funkcji sklejanych z równoodległymi węzłami $x_j = x_0 + jh, j = 0, 1, \ldots, n$, gdzie $h = \frac{x_n - x_0}{n}$
- wielomianów Lagrange'a z węzłami Czebyszewa

$$x_j = \cos(\theta_j), \quad \theta_j = \frac{\pi(2j + 1)}{2(n + 1)}, \quad 0 \leq j \leq n.$$

(a) Dla funkcji Rungego $f_1(x)$ z $n = 12$ węzłami interpolacji przedstaw na wspólnym wykresie funkcję $f_1(x)$ oraz wyznaczone wielomiany interpolacyjne i funkcję sklejaną. W celu stworzenia wykresu wykonaj próbkowanie funkcji $f_1(x)$ i wielomianów interpolacyjnych na 10 razy gęstszym zbiorze (próbkowanie jednostajne w x dla węzłów równoodległych, jednostajne w θ dla węzłów Czebyszewa). Pamiętaj o podpisaniu wykresu i osi oraz o legendzie.

(b) Wykonaj interpolację funkcji $f_1(x)$ i $f_2(x)$ z $n = 4, 5, \ldots, 50$ węzłami interpolacji używając każdej z powyższych trzech metod interpolacji. Ewaluację funkcji wielomianów interpolacyjnych oraz funkcji sklejanych przeprowadź na zbiorze 500 losowo wybranych punktów z dziedziny funkcji. Stwórz dwa rysunki, jeden dla $f_1(x)$, drugi dla $f_2(x)$. Na każdym rysunku przedstaw razem wykresy normy wektora błędów (czyli długości wektora) na tym zbiorze punktów w zależności od liczby węzłów interpolacji n dla każdej z trzech metod interpolacji.

Która metoda interpolacji jest najbardziej dokładna, a która najmniej?

Uwaga 1. Transformacja węzłów Czebyszewa $r \in [-1, 1]$ na punkty $x \in [a, b]$ dana jest wzorem $x = a + (b - a) \cdot \frac{(r+1)}{2}$.
Uwaga 2. Interpolację funkcjami sklejanymi można zaimplementować funkcją `scipy.interpolate.interp1d`. Zaimplementuj własnoręcznie interpolację Lagrange'a. Interpolacja Lagrange'a w tym implementacja biblioteczna `scipy.interpolate.lagrange` jest niestabilna numerycznie.

2 Rozwiązanie

2.1 Obliczanie wielomianu Lagrange'a

Z uwagi na niestabilność numeryczną bibliotecznej funkcji służącej do interpolacji Lagrange'a, w obliczeniach wykorzystano następujący algorytm obliczania wartości wielomianu dla wartości x i zadanego zestawu punktów *points*.

```
def calculate_lagrange(x, points):
    result = 0
    n = len(points)
    for i, (x_i, y_i) in enumerate(points):
        l_i = 1

        for j in range(n):
            if j != i:
                x_j, _ = points[j]
                l_i *= (x - x_j) / (x_i - x_j)
        result += y_i * l_i
    return result
```

Dla tworzenia wszystkich wykresów podzielono dziedzinę na 120 równoodległych punktów, dla których obliczano wartość wielomianu, przyjmując to przybliżenie za wystarczające. Wartości te są przechowywane w x_dense.

2.2 Podpunkt a

2.2.1 Równoodległe węzły

Pierwszy wielomian znaleziono, wyznaczając 12 równoodległych punktów na przedziale $[-1, 1]$, obliczając następnie wartość funkcji f_1 i tworząc zestaw punktów podany funkcji z podpunktu 2.1.

```
x_equidistant = np.linspace(-1, 1, n + 1)
y_equidistant = f1(x_equidistant)
y_lagrange_equidistant = np.array([calculate_lagrange
(x, list(zip(x_equidistant, y_equidistant))) for x in x_dense])
```

2.2.2 Węzły Czebyszewa

Wygenerowano równomiernie także węzły Czebyszewa, przekształcając je następnie na przedział $[-1, 1]$ zgodnie z równaniami podanymi w treści zadania.

```
r = np.cos((2*np.arange(n+1) + 1) / (2*(n+1)) * np.pi)
x_chebyshev = -1 + (1 + 1) * (r + 1) / 2
y_chebyshev = f1(x_chebyshev)
y_lagrange_chebyshev = np.array([calculate_lagrange
(x, list(zip(x_chebyshev_transformed, y_chebyshev))) for x in x_dense])
```

2.2.3 Kubiczne funkcje sklejane

Interpolator kubiczny stworzono za pomocą funkcji *interp1d* z biblioteki *SciPy*. Następnie obliczono za jego pomocą wartości wielomiany dla gęstego zbioru punktów.

```
spline_cubic = sp.interpolate.interp1d(x_equidistant,
y_equidistant, kind='cubic')
y_spline_cubic = spline_cubic(x_dense)
```

2.2.4 Wykres

Otrzymane wyniki interpolacji dla zadanych punktów, przedstawiano na wspólnym wykresie.

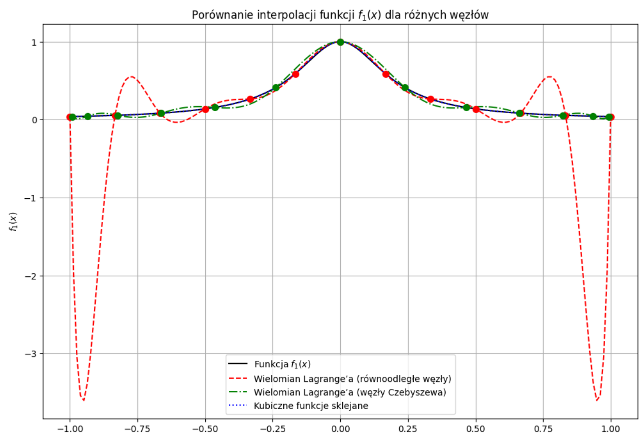

Figure 1: Porównanie interpolacji

Dla równoodległych punktów, na końcach dziedziny wielomian słabo przybliża interpolowaną funkcję. Zastosowanie węzłów Czebyszewa zapobiegło dużym błędom, bardzo dobre przybliżenie odnotowano dla funkcji sklejanych.

2.3 Podpunkt b

Zbadano rząd wielkości błędu w zależności od użytej metody, funkcji i liczby węzłów. Przez błąd rozumiemy normę wektora błędu obliczonego dla 500 losowo wybranych punktów z dziedziny. Otrzymane wyniki, w zależności od liczby węzłów n przedstawiono na poniższych wykresach.

2.3.1 Funkcja f_1

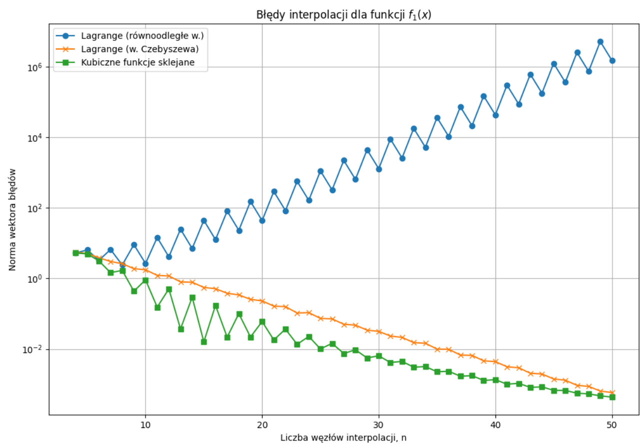

Figure 2: Porównanie błędów dla funkcji f_1

Średni błąd interpolacji dla funkcji $f_1(x)$
Równoodległe węzły: 280518.2218
Węzły Czebyszewa: 0.6615
Kubiczne funkcje sklejane: 0.4143

Zwiększanie liczby węzłów dla wysokich n wpływało negatywnie na poprawność interpolacji dla równoodległych węzłów w interpolacji Lagrange'a. Zastosowanie węzłów Czebyszewa pozwoliło znacząco obniżyć maksymalny błąd, przez lepsze rozłożenie punktów, ograniczając problemy wynikające z wysokiego stopnia wielomianu i efektu Rungego. Najlepszy wynik otrzymano, korzystając zastępując wielomian wysokiego stopnia, wieloma wielomianami niższego stopnia t.j. metody funkcji sklejanych na mniejszych przedziałach.

2.3.2 Funkcja f_2

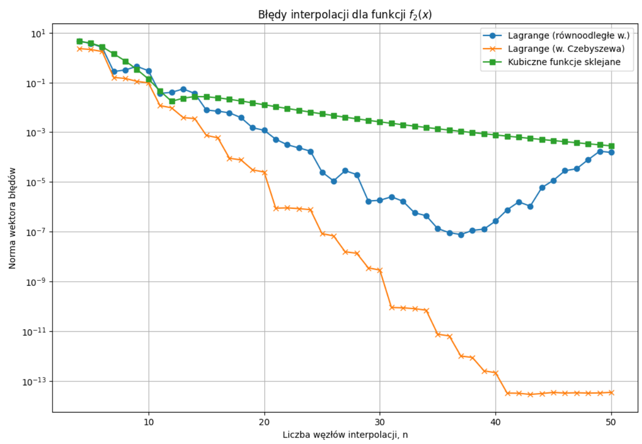

Figure 3: Porównanie błędów dla funkcji f_2

Średni błąd interpolacji dla funkcji f_2
Równoodległe węzły: 0.2637
Węzły Czebyszewa: 0.1430
Kubiczne funkcje sklejane: 0.2991

Dla funkcji f_2 funkcje kubiczne utrzymywały mniej więcej stały poziom błędu niezależnie od n. Użycie węzłów Czebyszewa dało najlepsze rezultaty a błąd zmniejszał się wraz ze zwiększeniem liczby punktów. Dla równoodległych węzłów nie stwierdzono żadnych jednoznacznych zależności błędu. Błędy były niższe dla f_2 niż dla f_1.

3 Wnioski

Przeprowadzone eksperymenty wykazały wysoką istotność doboru węzłów interpolacji dla danej funkcji. W niektórych przypadkach, gdy funkcja wykazuje dużą zmienność, naiwne równomierne rozłożenie wielu punktów może prowadzić do pogorszenia interpolacji, efekt ten nazywamy efektem, Rungego. Wysoki stopień wielomianu wpływa na jego duże oscylacje, więc warto korzystać z metod takich jak dodanie węzłów Czebyszewa obniżających maksymalny błąd interpolacji, lub unikania wysokiego stopnia wielomianu przez sklejanie wielu funkcji niższego stopnia, wykonując obliczenia na mniejszych przedziałach.

Bibliografia

[1] Marcin Kuta, *Runge phenomenon*

[2] Katarzyna Rycerz, *Wykład 2, Interpolacja*