Kwadratury

Zadanie 1. Wiadomo, że

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \pi\,. \tag{1}$$

Powyższą równość można wykorzystać do obliczenia przybliżonej wartości π poprzez całkowanie numeryczne.

(a) Oblicz wartość powyższej całki, korzystając ze złożonych kwadratur otwartej prostokątów (ang. mid-point rule), trapezów i Simpsona. Można wykorzystać funkcje `integrate.trapz` i `integrate.simps` z biblioteki `scipy`. Na przedziale całkowania rozmieść $2^m + 1$ równoodległych węzłów. W kolejnych próbach m wzrasta o 1, tzn. między każde dwa sąsiednie węzły dodawany jest nowy węzeł, a ich zagęszczenie zwiększa się dwukrotnie. Przyjmij zakres wartości m od 1 do 25.

    Dla każdej metody narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej, $n + 1$ (gdzie $n = 1/h$, z krokiem h). Wyniki przedstaw na wspólnym wykresie, używając skali logarytmicznej na obu osiach.

(b) Czy istnieje pewna wartość, poniżej której zmniejszanie kroku h nie zmniejsza już błędu kwadratury? Porównaj wartość $h_{\min}$, odpowiadającą minimum wartości bezwzględnej błędu względnego, z wartością wyznaczoną w laboratorium 1.

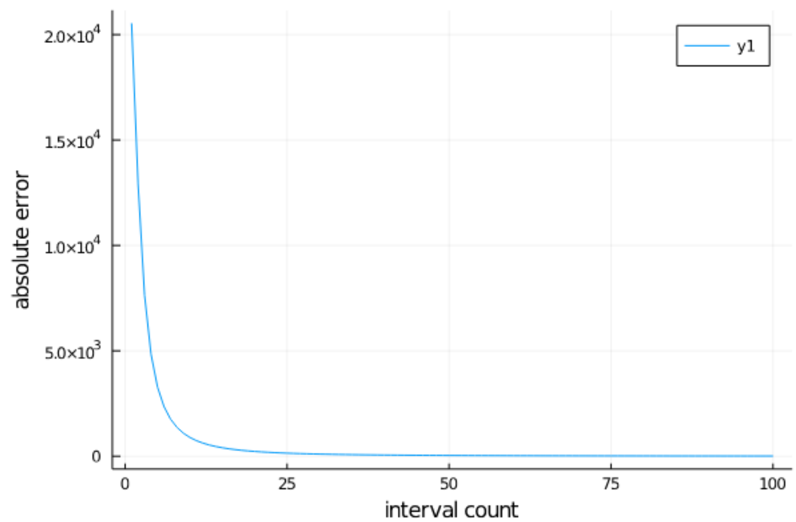
(c) Dla każdej z użytych metod porównaj empiryczny rząd zbieżności z rząd zbieżności przewidywanym przez teorię. Aby wyniki miały sens, do obliczenia rzędu empirycznego użyj wartości h z zakresu, w którym błąd metody przeważa nad błędem numerycznym.

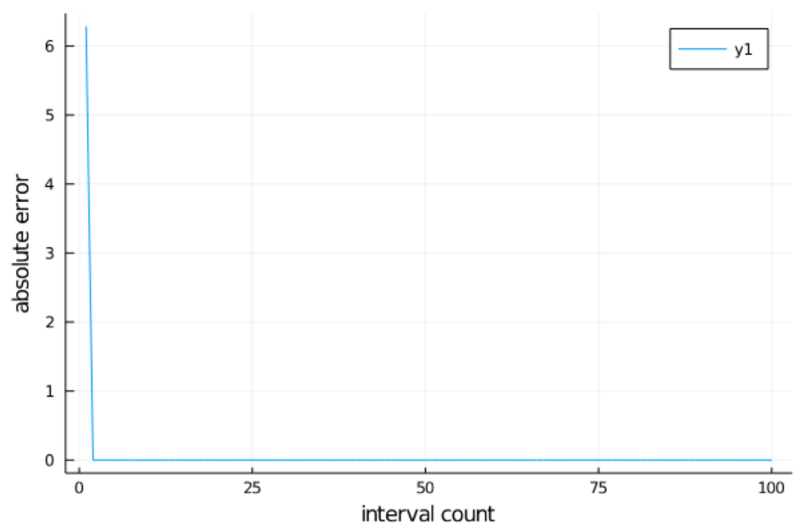
Zadanie 2. Oblicz wartość całki

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

metodą Gaussa-Legendre'a. Narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej, $n + 1$. Przyjmij na tyle duży zakres n, aby wykryć, kiedy błąd numeryczny zaczyna przeważać nad błędem metody. Postaraj się umiejscowić otrzymane wyniki na wykresie stworzonym w podpunkcie (a).

Uwaga. Poniższe wykresy (nie dotyczące obecnych zadań) są przykładem błędnego opracowania wyników. Popełniono następujące błędy:





- Użyto błędu bezwzględnego zamiast błędu względnego.
- Użyto skali liniowej zamiast logarytmicznej w sytuacji, gdy wartości błędu wykazują w pewnym zakresie znaczną zmienność, w innym zakresie prawie nie zmieniają się.
- Źle dobrano zakres zmiennej na osi x. Obecnie nie wiadomo, kiedy błąd całkowity osiąga minumum, a błąd numeryczny (ang. *rounding error*) za-

czyna dominować na błędem metody (ang. *truncation error*). Przypomnij sobie zadanie 1 z laboratorium 1.

- Różne metody lepiej porównywać na wspólnym wykresie.