Kwadratury adaptacyjne

Sprawozdanie z laboratorium 7

Jakub Grześ

26.04.2024

1 Treść zadań

1.1 Zadanie 1

Oblicz wartość całki z poprzedniego laboratorium:

$$\int_0^1 \frac{4}{1+x^2}\,dx, \tag{1}$$

korzystając z:

- kwadratur adaptacyjnych trapezów,
- kwadratur adaptacyjnych Gaussa-Kronroda.

Dla każdej metody narysuj wykres wartości bezwzględnej błędu względnego w zależności od liczby ewaluacji funkcji podcałkowej. Wyniki dodaj do wykresu uzyskanego w poprzednim laboratorium. Przydatna będzie funkcja `scipy.integrate.quad_vec`. Na liczbę ewaluacji funkcji podcałkowej można wpływać pośrednio, zmieniając wartość dopuszczalnego błędu (tolerancji). Przyjmij wartości tolerancji z zakresu od 10^0 do 10^{-14}. Liczba ewaluacji funkcji podcałkowej zwracana jest w zmiennej `info['neval']`.

1.2 Zadanie 2

Powtórz obliczenia z poprzedniego oraz dzisiejszego laboratorium dla całek:

- $$\int_0^1 \sqrt{x}\log(x)\,dx = -\frac{4}{9}, \tag{2}$$
- $$\int_0^1 \left(\frac{1}{(x-0.3)^2+a} + \frac{1}{(x-0.9)^2+b} - 6\right)dx, \tag{3}$$

We wzorze (3) przyjmij $a = 0.001$ oraz $b = 0.004$. Błąd kwadratury dla całki (3) oblicz, wykorzystując fakt, że:

$$\int_0^1 \frac{1}{(x-x_0)^2+a}\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\left(\arctan\left(\frac{1-x_0}{\sqrt{a}}\right) + \arctan\left(\frac{x_0}{\sqrt{a}}\right)\right). \tag{4}$$

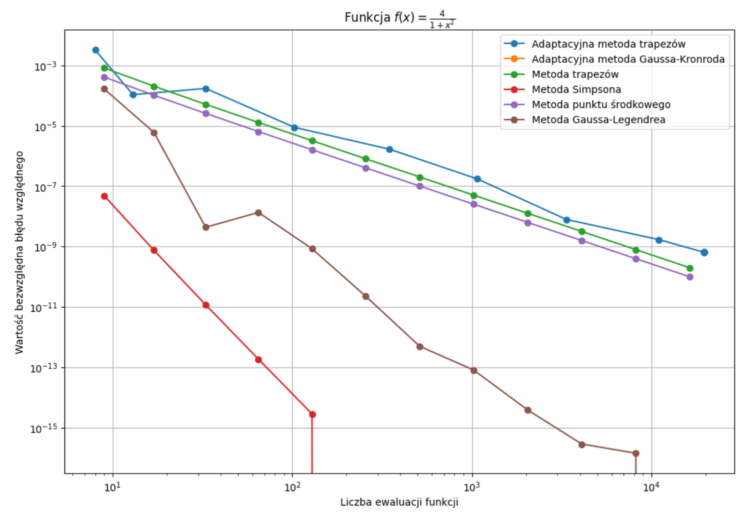
2 Rozwiązanie zadań

2.1 Zadanie 1

Stworzono funkcję *calculate_quad_errors_lab7*, która zwraca wartość błędu w zależności od liczby ewaluacji dla kwadratur adaptacyjnych trapezów i Gaussa-Kronroda. Wykorzystano do tego funkcję *quad_vec* z biblioteki *Scipy*. Oblicza ona błąd i liczbę ewaluacji dla zadanej tolerancji. Tolerancje przyjęto z zakresu zadanego w treści zadania.

```
tolerances = np.array(10 ** np.linspace(0, -14, 15))

def calculate_quad_errors_lab7(tolerances, f, real_value):
    results_trapezoidal = []
    results_gk = []
    evaluations_trapezoidal = []
    evaluations_gk = []

    for tolerance in tolerances:
        integral_trapezoidal, _, info_trapezoidal = quad_vec(
        f, 0, 1, epsabs=tolerance, quadrature='trapezoid', full_output=True)
        integral_gk, _, info_gk = quad_vec(
        f, 0, 1, epsabs=tolerance, quadrature='gk21', full_output=True)

        neval_trapezoidal = info_trapezoidal.neval
        neval_gk = info_gk.neval

        relative_error_trapz = abs((integral_trapezoidal - real_value) /
        real_value)
        relative_error_gk = abs((integral_gk - real_value) /
        real_value)

        results_trapezoidal.append(relative_error_trapz)
        results_gk.append(relative_error_gk)
        evaluations_trapezoidal.append(neval_trapezoidal)
        evaluations_gk.append(neval_gk)

    return results_trapezoidal, results_gk,
    evaluations_trapezoidal, evaluations_gk
```

Wyniki błędów w zależności od liczby ewaluacji funkcji, dla każdej z metod, przedstawiono na wykresie.



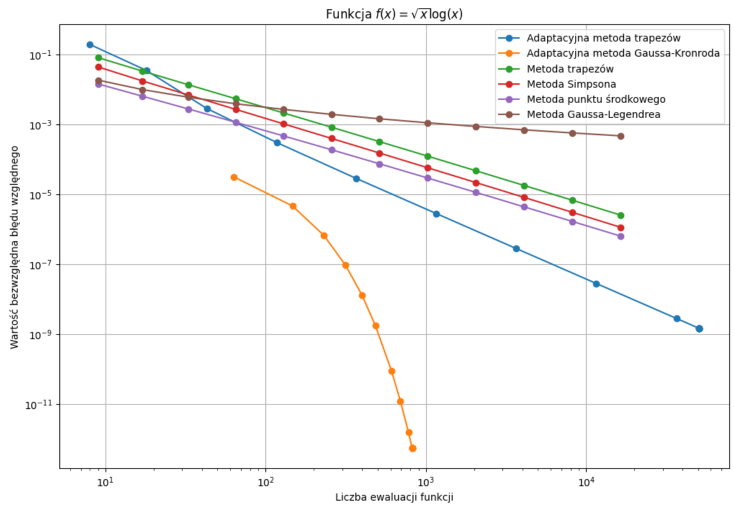
Wykres 1: Porównanie błędów względnych całkowania dla funkcji $\frac{4}{1+x^2}$

Adaptacyjna metoda trapezów okazała się podobnie skuteczna jak jej nieadaptacyjna odmiana czy metoda punktu środkowego i gorsza niż metoda Gaussa-Legendre'a i metoda Simpsona. Adaptacyjna metoda Gaussa-Kronroda okazała się tak dobra, że funkcja zwracała błąd równy 0 dla każdej tolerancji (nie jest więc reprezentowany na wykresie). Wynika to z tego, że błąd jest tak niewielki, że nie jest możliwy do zaprezentowania w komputerze, podobnie jak liczba π, z czego fałszywie wynika jej doskonała precyzja, niemożliwa do uzyskania metodą inną niż analityczna.

2.2 Zadanie 2

2.2.1 Podpunkt a

Identyczną procedurę powtórzono dla funkcji $f(x) = \sqrt{x}\log x$. Wyniki zaprezentowano na poniższym wykresie. Dokładną wartością całki z tej funkcji na przedziale $[0, 1]$ jest $-\frac{4}{9}$



Wykres 2: Porównanie błędów względnych całkowania dla funkcji $\sqrt{x}\log x$

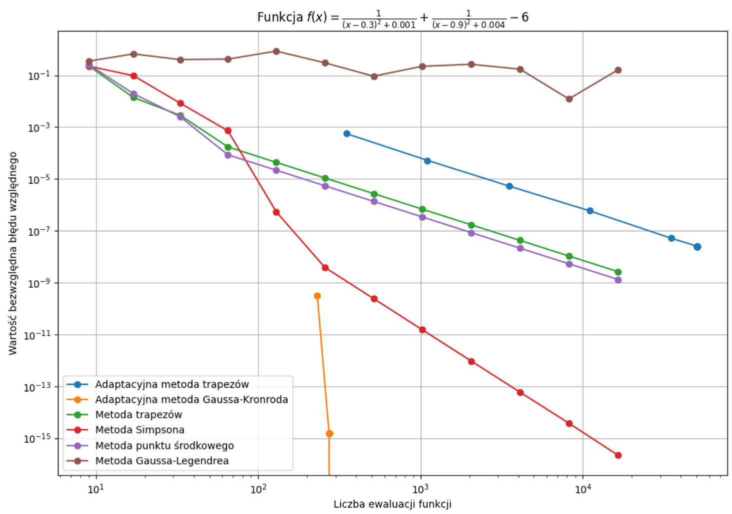
Dla tej funkcji stwierdzono istotnie lepsze wyniki dla adaptacyjnej metody trapezów niż dla wszystkich nieadaptacyjnych metod z laboratorium 6. Dla około 100 ewaluacji zaczyna ona osiągać lepsze wyniki. Wynika to z tego, że dzięki adaptacyjności metody, w obliczeniach uwzględniane są własności funkcji podcałkowej. Gdy standardowa metoda okazuje się niedostatecznie dokładna, metoda adaptacyjna stosuje ją na mniejszych przedziałach aż do osiągnięcia wyniki o zadanej precyzji. Jeszcze lepsza okazała się adaptacyjna metoda Gaussa-Kronroda, osiągająca dobrą precyzję przy niskiej liczbie ewaluacji. Dla około 800 ewaluacji błąd zanikał i był niemożliwy do zaprezentowania w środowisku komputera.

2.2.2 Podpunkt b

Podobny eksperyment przeprowadzono dla całki $\int_0^1 \left(\frac{1}{(x-0.3)^2+a} + \frac{1}{(x-0.9)^2+b} - 6\right) dx$, gdzie $a = 0.001, b = 0.004$. Korzystając z równości (4) z treści zadani oraz liniowości całki z treści zadania dokładną wartość obliczono jako:

$$
\begin{aligned}
&\int_0^1 \left(\frac{1}{(x-0.3)^2+a} + \frac{1}{(x-0.9)^2+b} - 6\right) dx = \\
&\quad = \int_0^1 \left(\frac{1}{(x-0.3)^2+a}\right) dx + \int_0^1 \left(\frac{1}{(x-0.9)^2+b}\right) dx - \int_0^1 6\, dx \\
&\quad = \frac{1}{\sqrt{a}} \left(\arctan\left(\frac{1-0.3}{\sqrt{a}}\right) + \arctan\left(\frac{0.3}{\sqrt{a}}\right)\right) \\
&\quad + \frac{1}{\sqrt{b}} \left(\arctan\left(\frac{1-0.9}{\sqrt{b}}\right) + \arctan\left(\frac{0.9}{\sqrt{b}}\right)\right) - 6
\end{aligned}
$$

Wyniki przedstawiono na poniższym wykresie.



Wykres 3: Porównanie błędów względnych całkowania dla funkcji $\frac{1}{(x-0.3)^2+a} + \frac{1}{(x-0.9)^2+b} - 6$

Dla tej funkcji adaptacyjna metoda radziła sobie lepiej niż metoda Gaussa-Legendre'a i gorzej od pozostałych. Najlepsza okazała się adaptacyjna metoda Gaussa-Kronroda. Widać tutaj, że metody adaptacyjne potrzebowały większej liczby ewaluacji, żeby osiągnąć zadane poziomy tolerancji. Można też zauważyć, że metoda adaptacyjna Gaussa Kronroda szybko poprawia swoją skuteczność wraz ze wzrostem liczby ewaluacji.

3 Wnioski

W niektórych przypadkach metody adaptacyjne pozwalają osiągać lepsze wyniki przy tej samej liczbie ewaluacji funkcji względem nieadaptacyjnych. Dzięki dzieleniu zadanego przedziału na fragmenty i stosowaniu do nich standardowych metod można znacznie poprawić dokładność wyniku. Istnieją różne metody numeryczne, których można używać w sposób adaptacyjny, np. metoda trapezów czy Gaussa-Kronroda. Można też być pewnym osiągnięcia zadanej tolerancji błędu, co pozwala elastycznie dostosować precyzję do potrzeb i możliwości obliczeniowych. Metody adaptacyjne nie gwarantują jednak lepszych wyników. Metody adaptacyjne ukazały niebezpieczeństwo związane z niedoskonałą arytmetyką komputera. Błędy były czasem tak niewielkie, że były błędnie interpretowane jako 0. Nie może być to prawdą, ponieważ osiągnięcie dokładnego wyniku metodami numerycznymi nie jest możliwe.

Bibliografia

[1] prof. dr hab. Leszek Plaskota, *Dydaktyka, Adaptacyjne Metody Całkowania*

[2] dr inż. Marian Bubak, dr inż. Katarzyna Rycerz, *Wykład 6 - Kwadratury - całkowanie numeryczne*