Rozwiązywanie równań nieliniowych

Zadanie 1. Dla poniższych funkcji i punktów początkowych metoda Newtona zawodzi. Wyjaśnij dlaczego. Następnie znajdź pierwiastki, modyfikując wywołanie funkcji `scipy.optimize.newton` lub używając innej metody.

(a) $f(x) = x^3 - 5x$, $x_0 = 1$

(b) $f(x) = x^3 - 3x + 1$, $x_0 = 1$

(c) $f(x) = 2 - x^5$, $x_0 = 0.01$

(d) $f(x) = x^4 - 4.29x^2 - 5.29$, $x_0 = 0.8$

Zadanie 2. Dane jest równanie:

$$f(x) = x^2 - 3x + 2 = 0 \tag{1}$$

Każda z następujących funkcji definiuje równoważny schemat iteracyjny:

$$g_1(x) = (x^2 + 2)/3, \tag{2}$$
$$g_2(x) = \sqrt{3x - 2}, \tag{3}$$
$$g_3(x) = 3 - 2/x, \tag{4}$$
$$g_4(x) = (x^2 - 2)/(2x - 3). \tag{5}$$

(a) Przeanalizuj zbieżność oraz rząd zbieżności schematów iteracyjnych odpowiadających funkcjom $g_i(x)$ dla pierwiastka $x = 2$ badając wartość $|g_i'(2)|$.

(b) Potwierdź analizę teoretyczną implementując powyższe schematy iteracyjne i weryfikując ich zbieżność (lub brak). Każdy schemat iteracyjny wykonaj przez 10 iteracji.

Wyznacz eksprymentalnie rząd zbieżności każdej metody iteracyjnej ze wzoru

$$r = \frac{\ln \frac{\varepsilon_k}{\varepsilon_{k+1}}}{\ln \frac{\varepsilon_{k-1}}{\varepsilon_k}} \tag{6}$$

gdzie błąd bezwzględny ε_k definiujemy jako $\varepsilon_k = |x_k - x_*|$, x_k jest przybliżeniem pierwiastka w k-tej iteracji, a x_* dokładnym położeniem pierwiastka równania.

(c) Na wspólnym rysynku przedstaw wykresy błędu względnego każdej metody w zależności od numeru iteracji. Użyj skali logarytmicznej na osi y (pomocna będzie funkcja `semilogy`).

Stwórz drugi rysunek, przedstawiający wykresy błędu względnego tylko dla metod zbieżnych.

Zadanie 3. Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla każdego z następujących równań nieliniowych:

(a) $x^3 - 2x - 5 = 0$

(b) $e^{-x} = x$

(c) $x \sin(x) = 1$.

Jeśli x_0 jest przybliżeniem pierwiastka z dokładnością 4 bitów, ile iteracji należy wykonać aby osiągnąć:

- 24-bitową dokładność
- 53-bitową dokładność?

Zadanie 4. Napisz schemat iteracji wg metody Newtona dla następującego układu równań nieliniowych:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1$$
$$x_1^2 - x_2 = 0.$$

Korzystając z faktu, że dokładne rozwiązanie powyższego układu równań to:

$$x_1 = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}} \tag{7a}$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2} \tag{7b}$$

oblicz błąd względny rozwiązania znalezionego metodą Newtona.