Analiza błędów

Zadanie 1. Oblicz przybliżoną wartość pochodnej funkcji, używając wzoru

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad . \tag{1}$$

Sprawdź działanie programu dla funkcji $\tan(x)$ oraz $x = 1$. Wyznacz błąd, porównując otrzymaną wartość numerycznej pochodnej z prawdziwą wartością. Pomocna będzie tożsamość $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x)$.
Na wspólnym rysunku przedstaw wykresy wartości bezwzględnej błędu metody, błędu numerycznego oraz błędu obliczeniowego w zależności od h dla $h = 10^{-k}$, $k = 0, \ldots, 16$. Użyj skali logarytmicznej na obu osiach. Czy wykres wartości bezwzględnej błędu obliczeniowego posiada minimum?
Porównaj wyznaczoną wartość h_{min} z wartością otrzymaną ze wzoru

$$h_{\mathrm{min}} \approx 2\sqrt{\epsilon_{\mathrm{mach}}/M}, \text{ gdzie } M \approx |f''(x)| \quad . \tag{2}$$

Powtórz ćwiczenie używając wzoru różnic centralnych

$$f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad . \tag{3}$$

Porównaj wyznaczoną wartość h_{min} z wartością otrzymaną ze wzoru

$$h_{\mathrm{min}} \approx \sqrt[3]{3\epsilon_{\mathrm{mach}}/M}, \text{ gdzie } M \approx |f'''(x)| \quad . \tag{4}$$

Zadanie 2. Napisz program generujący pierwsze n wyrazów ciągu zdefiniowanego równaniem różnicowym:

$$x_{k+1} = 2.25x_k - 0.5x_{k-1}$$

z wyrazami początkowymi:

$$x_0 = \frac{1}{3} \qquad x_1 = \frac{1}{12} \quad .$$

Wykonaj obliczenia

- używając pojedynczej precyzji oraz przyjmując $n = 225$
- używając podwójnej precyzji oraz przyjmując $n = 60$
- używając reprezentacji z biblioteki `fractions` oraz przyjmując $n = 225$.

Narysuj wykres wartości ciągu w zależności od k. Użyj skali logarytmicznej na osi y (pomocna będzie funkcja `semilogy`). Następnie narysuj wykres przedstawiający wartość bezwględną błędu względnego w zależności od k.
Dokładne rozwiązanie równania różnicowego:

$$x_k = \frac{4^{-k}}{3}$$

maleje wraz ze wzrostem k. Czy otrzymany wykres zachowuje się w ten sposób? Wyjaśnij otrzymane wyniki.

Unikaj pętli `for` na rzecz kodu wektorowego oraz funkcji uniwersalnych (np. `np.tan` zamiast `math.tan`).