Metody numeryczne
Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych nr 8

Interpolacja funkcjami sklejanymi poprzez wyznaczenie wartości drugich pochodnych w węzłach

Jan Zajda
Informatyka Stosowana
WFiIS
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
1 maja 2020

1. Wstęp teoretyczny

Mamy dane $n+1$ węzłów w przedziale $< a, b >$ takich, że: $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$, które tworzą n przedziałów $[x_{i-1}, x_i]$. W każdym z tych przedziałów tworzymy wielomian interpolacyjny $S_{i-1}(x)$. Po połączeniu wielomiany te tworzą funkcję sklejaną $S(x)$.

Wielomiany S_{i-1} (dla $i = 1, 2, ..., n$) trzeciego stopnia muszą spełniać warunki:

a) $S_{i-1}(x_i) = S_i(x_i) = f(x_i)$ - zapewnia to funkcji $S(x)$ ciągłość i równość z wartością w węźle

b) $S'_{i-1}(x_i) = S'_i(x_i)$ - pierwsze pochodne są równe w każdym węźle,

c) $S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ - drugie pochodne także są równe w każdym węźle.

Jeśli $S_{i-1}(x)$ jest wielomianem trzeciego stopnia to jego druga pochodna ma postać liniową, którą obliczamy ze wzoru:

$$S''_{i-1}(x) = m_{i-1}\frac{x_i - x}{h_i} + m_i\frac{x - x_{i-1}}{h_i},$$
(1)

gdzie $m_i = S''_{i-1}(x_i) = S''_i(x_i)$ oraz $h_i = x_i - x_{i-1}$. Aby obliczyć wartości m_i całkujemy równanie (1) i dla $i = 1, 2..., n-1$ wykorzystujemy warunek b) do utworzenia układu $n-1$ równań. Układ ten możemy rozwiązać np. metodą LU lub Gaussa.
W przypadku granicznych wartości m_0 i m_n ustalamy z góry $m_0 = \alpha, m_n = \beta$.

Po dwukrotnym całkowaniu równania (1) otrzymujemy wzór na wielomian $S_{i-1}(x)$:

$$S_{i-1}(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i(x - x_{i-1}) + B_i,$$

gdzie A_i, B_i to stałe całkowania, które możemy uzyskać korzystając z warunku a):

$$A_i = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{h_i} - \frac{h_i}{6}(m_i - m_{i-1}),$$

$$B_i = f(x_{i-1}) - m_{i-1}\frac{h_i^2}{6}.$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Naszym zadaniem jest napisanie programu do interpolacji przy użyciu fukcji sklejanych.
Dla zadanego przedziału $< a, b >$ wybieramy n równoodległych węzłów, a wartości w węzłach ustalamy korzystając z dwóch funkcji:

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$f_2(x) = cos(2x).$$

Wybieramy wartości:

$a = -5, \qquad b = 5, \qquad \alpha = \beta = 0.$

Dla każdego wykresu wypisujemy wartości funkcji $S(x)$ dla $x \in< a, b >$, z krokiem 0.01 dla kolejnych wartości $n = 5, 8, 21.$

Dodatkowo dla pierwszej funkcji w przedziale $< a, b >$ wypisujemy wartości drugich pochodnych dla $n = 10$ równoodległych węzłów oraz porównujemy z pochodnymi liczonymi ze wzoru:

$$\frac{d^2 f_1(x_i)}{dx^2} = \frac{f_1(x_i - \Delta x) - 2f_1(x_i) + f_1(x_i + \Delta x)}{(\Delta x)^2},$$

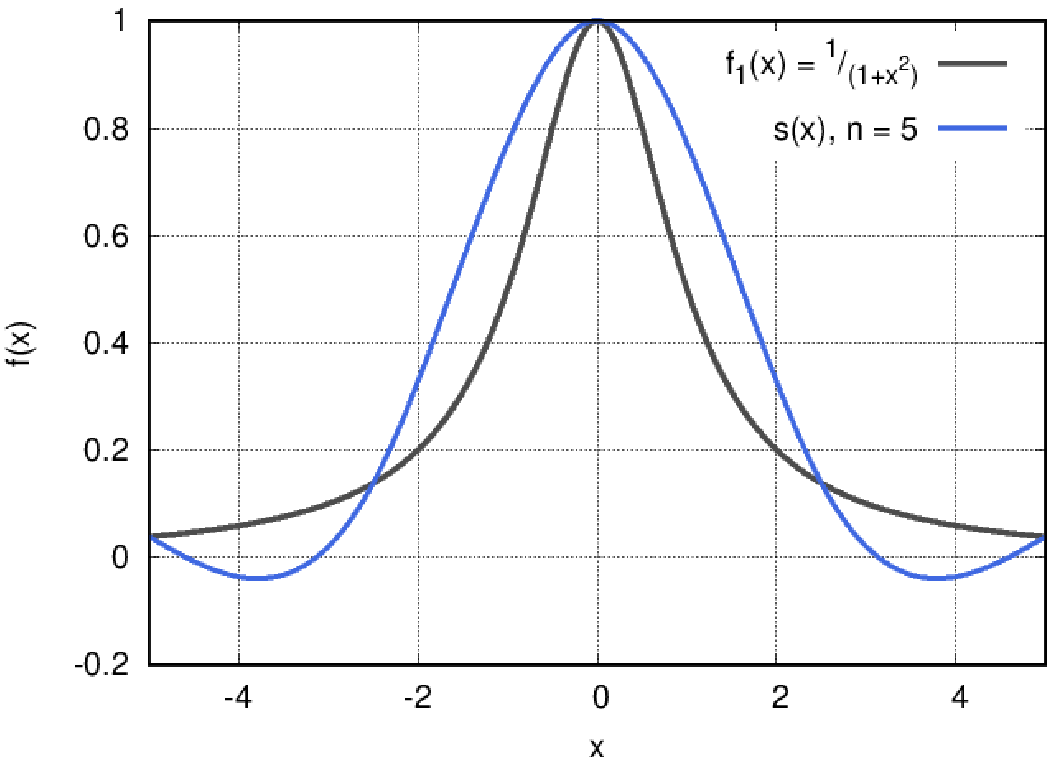
gdzie $\Delta x = 0.01.$

W programie wykorzystano pliki $nrutil.h,$ $nrutil.c,$ $gaussj.c$ z biblioteki $numerical\_recipes.c.$

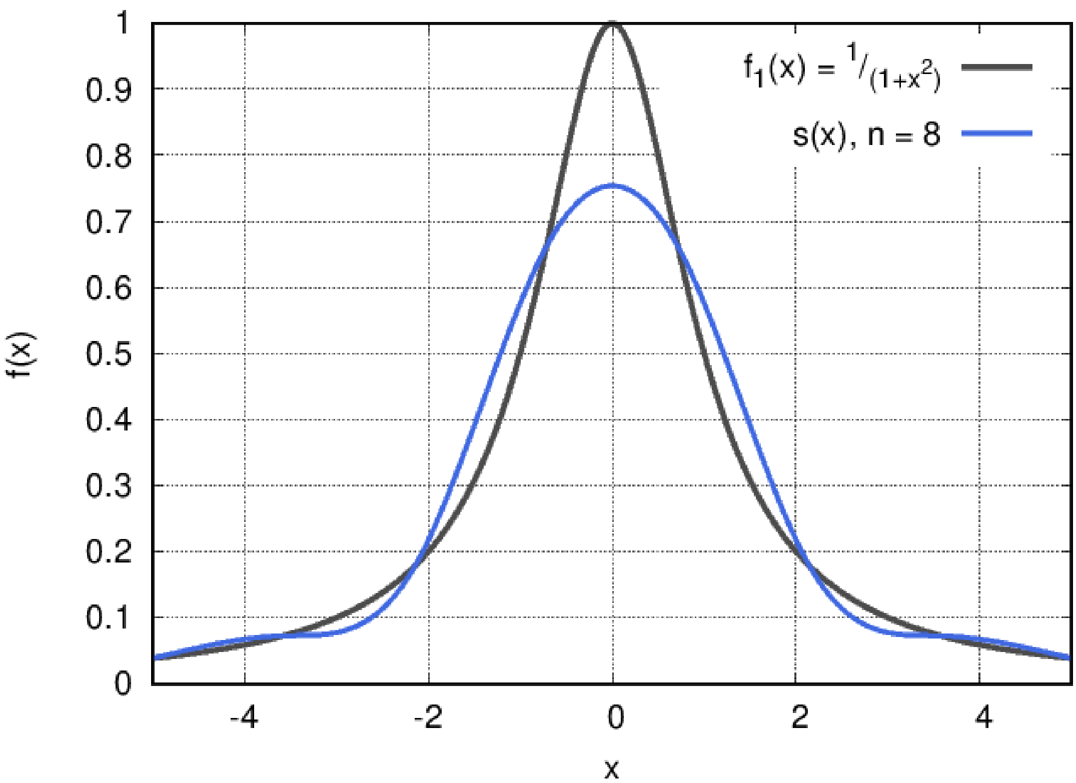
Do rozwiązania układu równań zastosowano metodę Gaussa, przy wykorzystaniu funkcji $gaussj.$

2.2. Wyniki

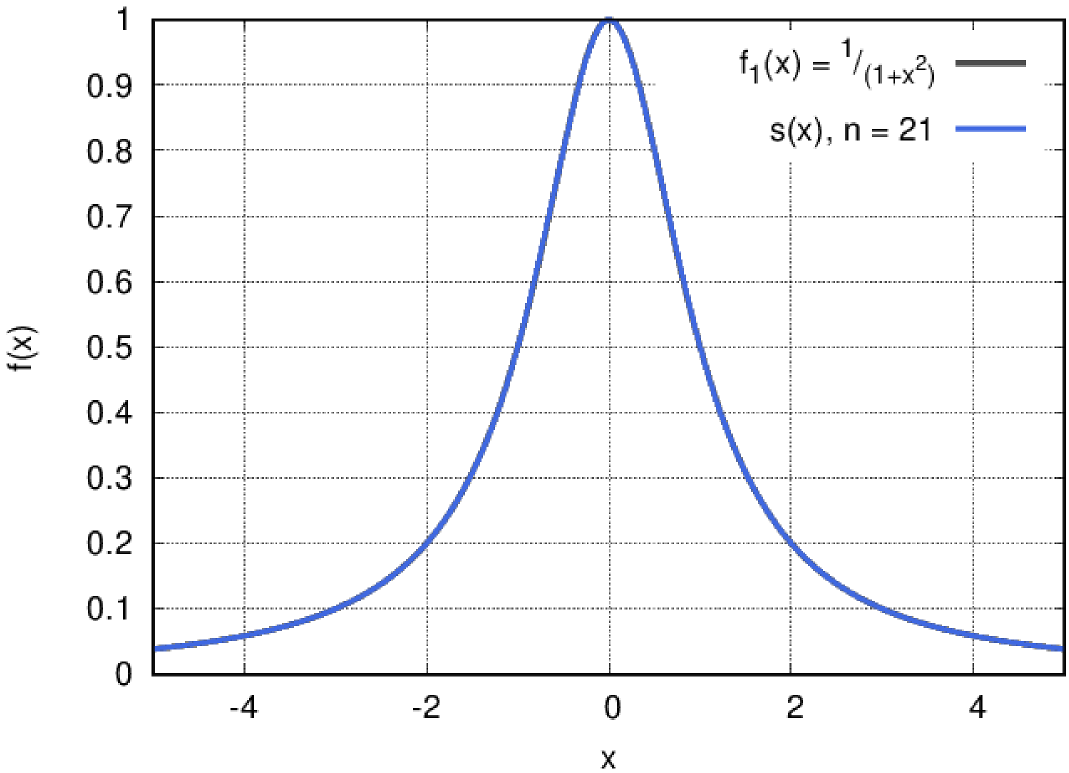
Wyniki przedstawiono za pomocą wykresów na tle odpowiednio funkcji $f_1, f_2.$



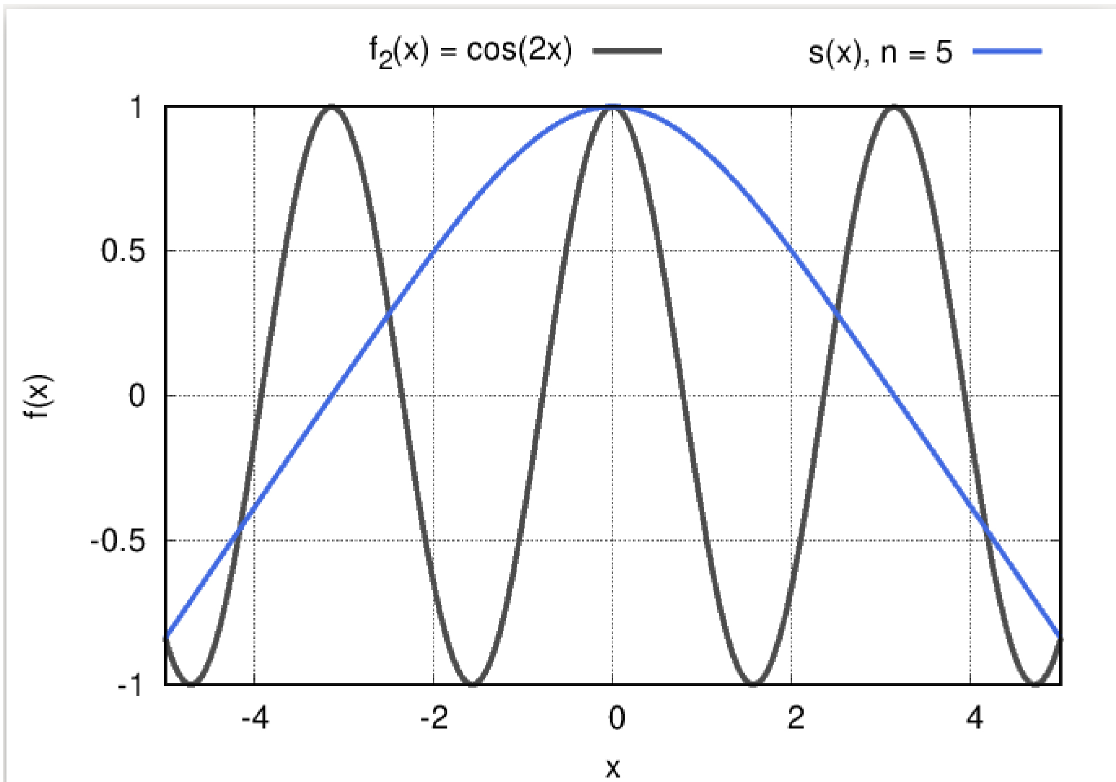
Wykres 1: Funkcja $S(x)$ na tle $f_1(x)$ dla liczby węzłów $n = 5$.



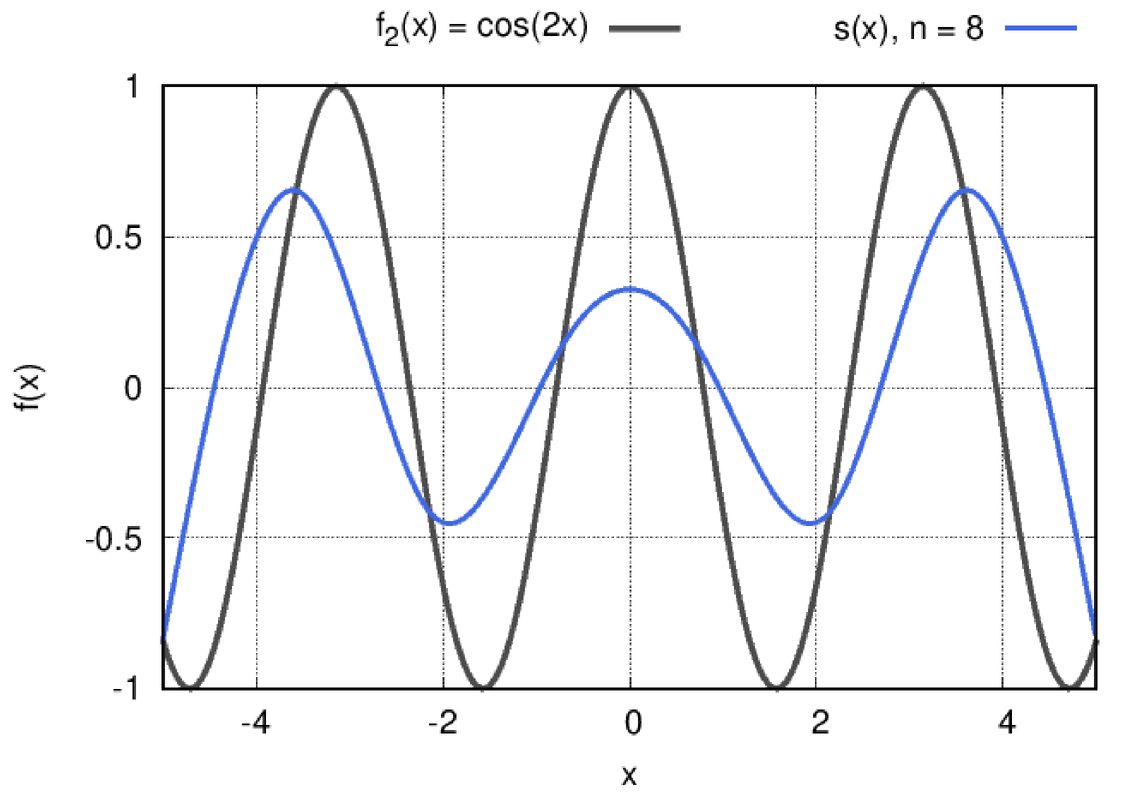
Wykres 2: Funkcja $S(x)$ na tle $f_1(x)$ dla liczby węzłów $n = 8$.



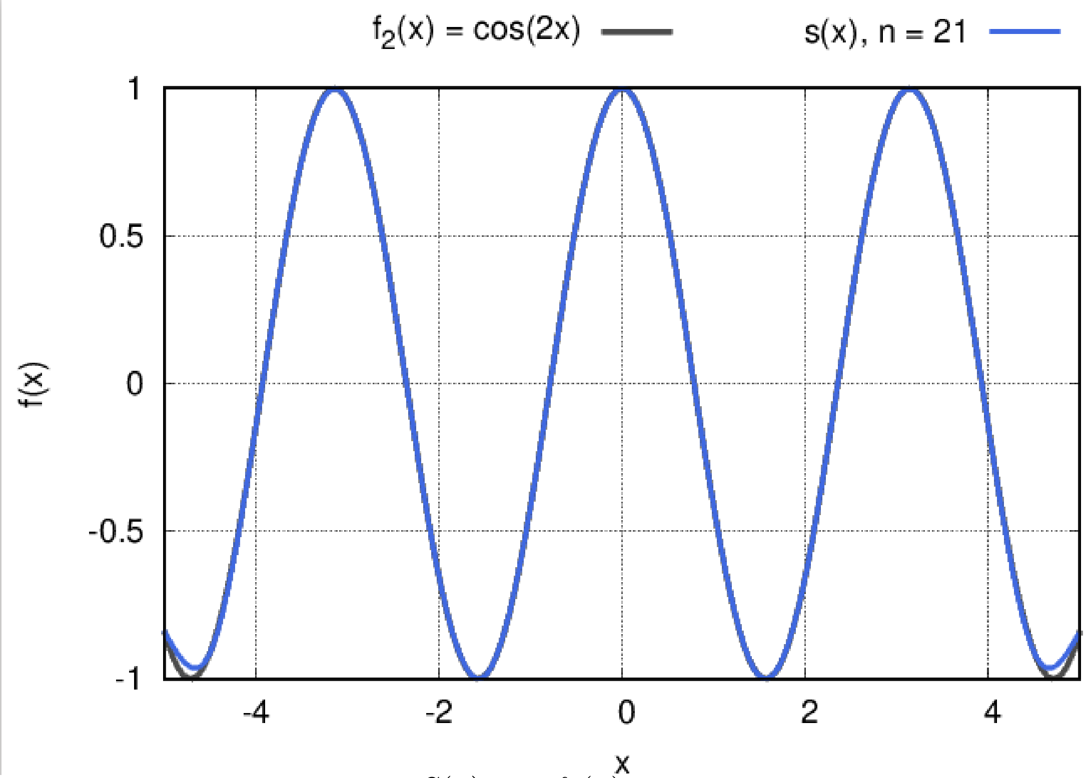
Wykres 3: Funkcja $S(x)$ na tle $f_1(x)$ dla liczby węzłów $n = 21$.



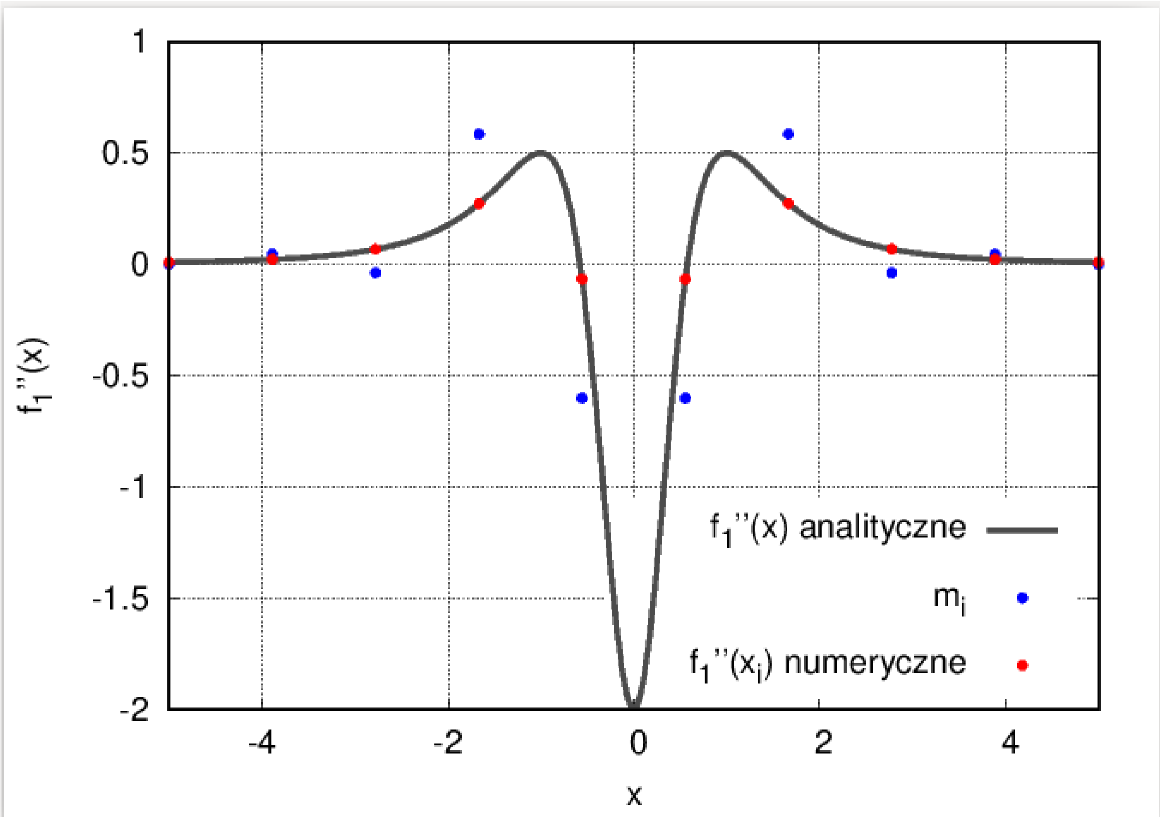
Wykres 4: Funkcja $S(x)$ na tle $f_2(x)$ dla liczby węzłów $n = 5$.



Wykres 5: Funkcja $S(x)$ na tle $f_2(x)$ dla liczby węzłów $n = 8$.



Wykres 6: Funkcja $S(x)$ na tle $f_2(x)$ dla liczby węzłów $n = 21$.



Wykres 7: Porównanie drugiej pochodnej obliczonej w $n = 10$ węzłach sposobem numerycznym (czerwony) i przy interpolacji funkcjami sklejanymi (niebieski). W tle druga pochodna $f_1''(x)$ obliczona analitycznie.

3. Wnioski

Na podstawie wyrysowanych wykresów możemy zaobserwować, że interpolacja za pomocą funkcji sklejanych pozwala wiernie odwzorowywać funkcję już dla niewielkiej liczby węzłów.
Dla $n = 21$ wykresy już bardzo dokładnie się pokrywają.

Dodatkowo nie obserwujemy błędu Rungego na końcach przedziału przy równoodległych węzłach jak to miało miejsce przy interpolacji Newtona, więc nie zaszła potrzeba specjalnego wybierania węzłów dla zwiększenia jakości interpolacji.