Metody numeryczne
Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych nr 2

Odwracanie macierzy, obliczanie wyznacznika i wskaźnika uwarunkowania macierzy przy użyciu rozkładu LU

Jan Zajda
Informatyka Stosowana
WFiIS
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
11 marca 2020

1.Wstęp teoretyczny

Rozkład LU macierzy jest kolejną znaną metodą rozwiązywania układów równań liniowych. Jeżeli mamy dany układ równań zapisany macierzowo jako:

$$\mathbf{A}\vec{x} = \vec{b},$$
(1)

to macierz $\mathbf{A}$ możemy rozbić na iloczyn dwóch macierzy – dolnej i górnej macierzy trójkątnej:

$$\mathbf{A} = \mathbf{LU},$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ... & a_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & ... & a_{n,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{1,1} & 0 & ... & 0 \\ l_{2,1} & l_{2,2} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ l_{n,1} & l_{n,2} & ... & l_{n,n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} & ... & u_{1,n} \\ 0 & u_{2,2} & ... & u_{2,n} \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & u_{n,n} \end{bmatrix}.$$

Po przekształceniach równania (1) otrzymujemy dwa układy równań z dwoma macierzami trójkątnymi:

$$\mathbf{LU}\vec{x} = \vec{b},$$

$$\mathbf{L}^{-1}\mathbf{LU}\vec{x} = \mathbf{L}^{-1}\vec{b} = \vec{a},$$

$$\mathbf{IU}\vec{x} = \vec{a},$$

$$\mathbf{U}\vec{x} = \vec{a} \Leftrightarrow \mathbf{L}(\mathbf{U}\vec{x}) = \mathbf{L}\vec{a} = \vec{b}.$$

Ostatecznie do rozwiązania pozostaje:

$$\mathbf{L}\vec{a} = \vec{b},$$

$$\mathbf{U}\vec{x} = \vec{a}.$$

Możemy także łatwo obliczyć wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$, wiedząc że wyznacznik macierzy trójkątnej jest równy iloczynowi elementów diagonalnych:

$$det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{LU}) = det(\mathbf{L}) \cdot det(\mathbf{U}).$$
(2)

Dodatkowo jeżeli rozkład LU jest jednoznaczny to na przekątnej $\mathbf{L}$ lub $\mathbf{U}$ znajdują się jedynki więc:

$$det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{L}) \vee det(\mathbf{A}) = det(\mathbf{U})$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

W zadaniu do utworzenia macierzy $\mathbf{A}$ rozmiaru 4x4 posłużymy się następującym wzorem:

$$a_{i,j} = \frac{1}{i+j+\delta},$$

oraz przyjmujemy $\delta = 2$. Mając już przygotowaną macierz $\mathbf{A}$ wyznaczamy jej rozkład LU, a następnie:

a) wypisujemy elementy diagonalne macierzy $\mathbf{U}$,
b) obliczamy wyznacznik macierzy $\mathbf{A}$,
c) wyznaczamy macierz $\mathbf{A}^{-1}$, poprzez rozwiązanie $n = 4$ układów równań z następującymi wektorami wyrazów wolnych:

$$b_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} b_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} b_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} b_4 = \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},$$

d) obliczamy iloczyn $\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}$,
e) obliczamy wskaźnik uwarunkowania macierzy, korzystając z normy:

$$||A||_{1,inf} = max(|a_{i,j}|), \text{ dla } 1 \leq i,j \leq n.$$

2.2. Wyniki

Na początku otrzymano macierz $\mathbf{A}$:

$$\begin{bmatrix} 0.5 & 0.333333 & 0.25 & 0.2 \\ 0.333333 & 0.25 & 0.2 & 0.166667 \\ 0.25 & 0.2 & 0.166667 & 0.142857 \\ 0.2 & 0.166667 & 0.142857 & 0.125 \end{bmatrix}.$$

Do wykonania obliczeń skorzystano z funkcji zawartych w bibliotece GSL.
Rozkład LU macierzy wyznaczono funkcją $gsl\_linalg\_LU\_decomp$.

a) Na diagonali znalazły się następujące elementy:

$$0.5, \qquad 0.0333333, \qquad -0.00138889, \qquad 0.000102041.$$

b) Do obliczenia wyznacznika wykorzystano wzór (2), mnożąc przez siebie powyższe elemetny diagonalne. Dodatkowo przemnożono wynik przez parametr $signum$ zwrócony przez funkcję $gsl\_linalg\_LU\_decomp$:

$$det(\mathbf{U}) = 2.36206 \cdot 10^{-9}.$$

Możemy zauważyć, że wartość wyznacznika jest bardzo mała, co wynika z niewielkich wartości otrzymanych w punkcie a).

c) Macierz odwrotną wyliczono za pomocą funkcji $gsl\_linalg\_LU\_solve$:

$$\begin{bmatrix} 200 & -1200 & 2100 & -1120 \\ -1200 & 8100 & -15120 & 8400 \\ 2100 & -15120 & 29400 & -16800 \\ -1120 & 8400 & -16800 & 9800 \end{bmatrix}.$$

d) Iloczyn $\mathbf{AA}^{-1}$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2.27374 \cdot 10^{-13} & 0 & 0 \\ -2.84217 \cdot 10^{-14} & 1 & 4.54747 \cdot 10^{-13} & 0 \\ 0 & -2.27374 \cdot 10^{-13} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Możemy zaobserwować, że wbrew oczekiwaniom otrzymana macierz nie jest jednostkowa, a wynika to z niedokładności działań na liczbach zmiennoprzecinkowych. O skali błędu wynikającego z reprezentacji numerycznej informuje nas wskaźnik uwarunkowania obliczony w następnym punkcie.

e) Wskaźnik uwarunkowania macierzy:

$$\kappa(\mathbf{A}) = 14700.$$

Otrzymany wynik jest stosunkowo dużą liczbą, co wskazuje, że macierz jest źle uwarunkowana. Oznacza to, że błąd wynikający z reprezentacji numerycznej wprowadza istotne dysproporcje w wyniku końcowym.

3. Wnioski

Na podstawie otrzymanych wyników możemy wnioskować, że rozkład LU macierzy pozwala nam na łatwiejsze wykonanie wielu istotnych operacji na macierzach. Dzięki niemu możemy rozwiązywać układy równań liniowych, wyzanczać macierze odwrotne oraz w szczególności, w niezwykle prosty sposób obliczać wyznacznik macierzy.

Wskaźnik uwarunkowania macierzy informuje nas o skali błędu wynikającego z reprezentacji numerycznej. Przy wysokim wskaźniku który otrzymano, zaobserwowano odstępstwa od oczekiwanego wyniku. Objawiło się to tym, że iloczyn macierzy i jej macierzy odwrotnej nie był równy macierzy jednostkowej, gdyż w niektórych miejscach poza diagonalą znalazły się liczby bardzo bliskie, ale jednak różne od zera.