Metody numeryczne
Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych nr 7

Interpolacja Newtona z optymalizacją położeń węzłów

Jan Zajda
Informatyka Stosowana
WFiIS
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
23 kwietnia 2020

1. Wstęp teoretyczny

Interpolacja to metoda pozwalająca na wyznaczanie w zadanym przedziale $< a, b >$ funkcji interpolacyjnej, na podstawie jej znanych wartości w podanych punktach $x_0, x_1, ..., x_n$, nazywanych węzłami. Zadanie to sprowadza się do znalezienia jak najlepszego oszacowania przybliżonych wartości tej funkcji w pozostałych punktach przedziału – tych które nie są węzłami.

Jedną z metod interpolacji jest interpolacja Newtona dla nierównoodległych węzłów. Szukamy w niej wielomianu interpolacyjnego $W_n(x)$, który zgodnie z wyżej podaną definicją, musi spełniać warunek:

$$W_n(x_i) = f(x_i), i = 0, 1, ..., n.$$

Przy szukaniu $W_n(x)$ będziemy wykorzystywać ilorazy różnicowe. Iloraz różnicowy stopnia $k,\ 0 \leq k \leq n$ możemy zdefiniować rekurencyjnie jako:

$$f(x_i; x_{i+1}; ...; x_{i+k}) = \frac{f(x_{i+1}; x_{i+2}; ...; x_{i+k}) - f(x_i; x_{i+1}; ...; x_{i+k-1})}{x_{i+k} - x_i},$$

gdzie w naszym przypadku $i + k \leq n$. Przykładowo dla $k = 1, i = 0$ otrzymujemy iloraz różnicowy:

$$f(x_0; x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}.$$

Dla ułatwienia będziemy zapisywać $f(x_i; x_{i+1}; ...; x_{i+k}) = f^{(k)}(x_i)$.
Dodatkowo dla ułatwienia zapisu zdefiniujmy wielomian:

$$\omega_n(x) = (x - x_0)(x - x_1)...(x - x_n).$$

Korzystając z tych informacji wzór interpolacyjny Newtona, na podstawie którego obliczamy wartość wielomianu W_n w punkcie $x \in < a, b >$ możemy zapisać jako:

$$W_n(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} f^{(k)}(x_0)\omega_{k-1}(x).$$

Aby zminimalizować oszacowanie błędu interpolacji możemy zwiększyć liczbę wezłów oraz wyznaczać ich optymalne położenia wykorzystując zera wielomianów Czebyszewa. Wykorzystamy do tego poniższy wzór ze skalowaniem do przedziału $< a, b >$:

$$x_m = \frac{1}{2}[(b - a)cos(\frac{2m + 1}{2n + 2}\pi) + (b + a)], m = 0, 1, 2..., n.$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Za zadanie mamy przeprowadzić interpolację wielomianową Newtona dla zadanej funkcji $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
Wykorzystujemy własnoręcznie napisany kod – nie korzystamy z biblitek zewnętrznych.
Interpolację przeprowadzamy dla węzłów $x_0, x_1, ..., x_n$ dla kolejno $n = 5, 10, 15, 20$.
Położenie węzłów wyznaczamy na dwa sposoby:

a) węzły równoodległe – dzielimy przedział na $n+1$ węzłów o równych odstępach,

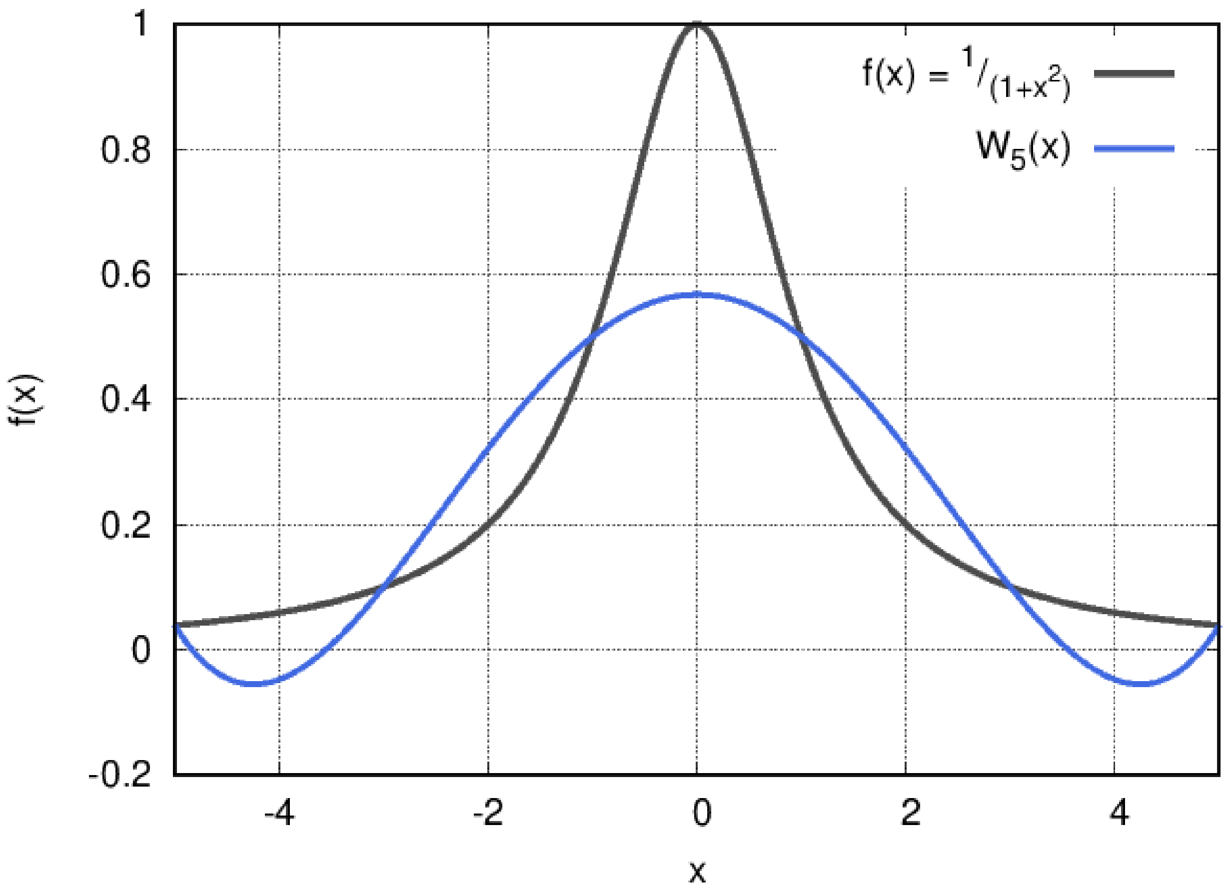
b) węzły o zoptymalizowanych położeniach – korzystamy z zer wielomianów Czebyszewa.

Do pliku wypisujemy przybliżenia $W_n(x)$ dla $x \in < a, b >$ z krokiem 0.01.

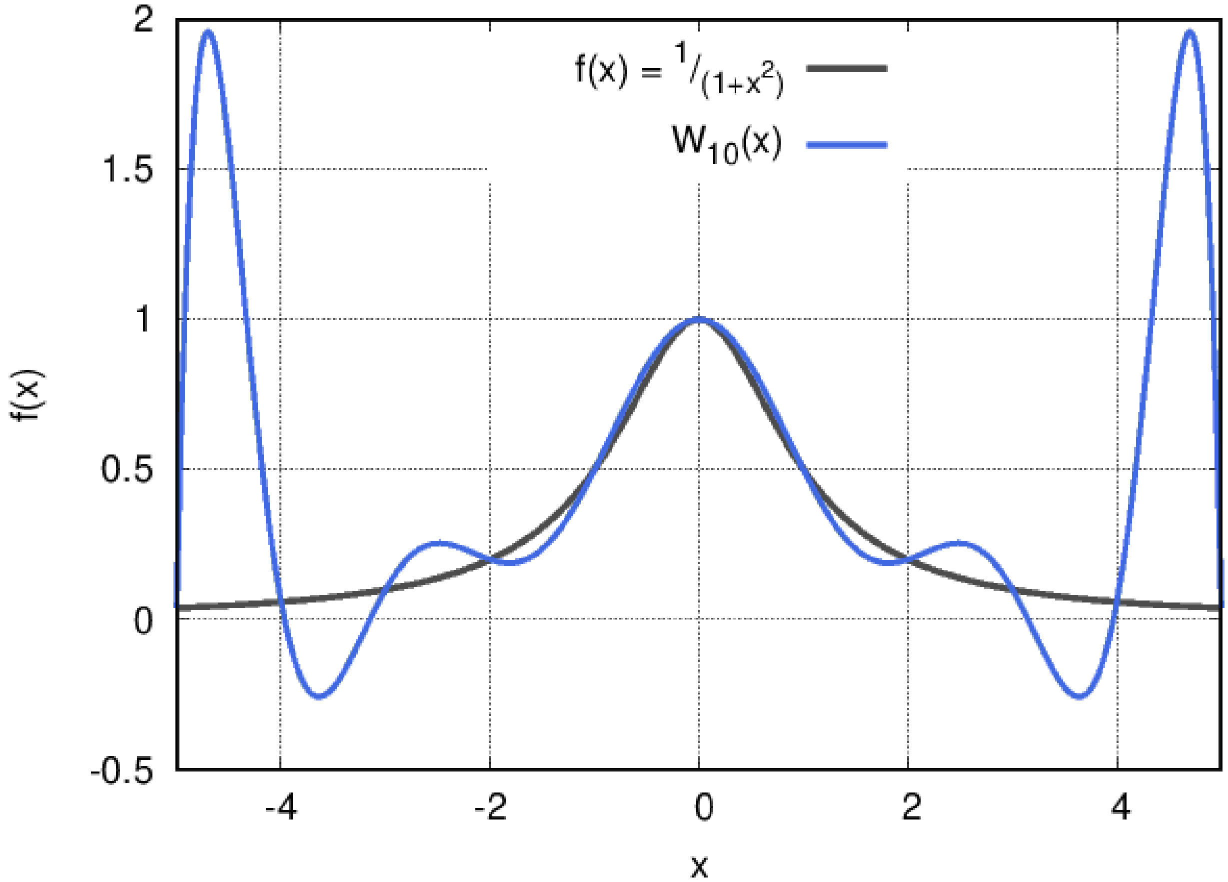
2.2. Wyniki

Wyniki przedstawiamy za pomocą wykresów, na tle zadanej funkcji $f(x)$.

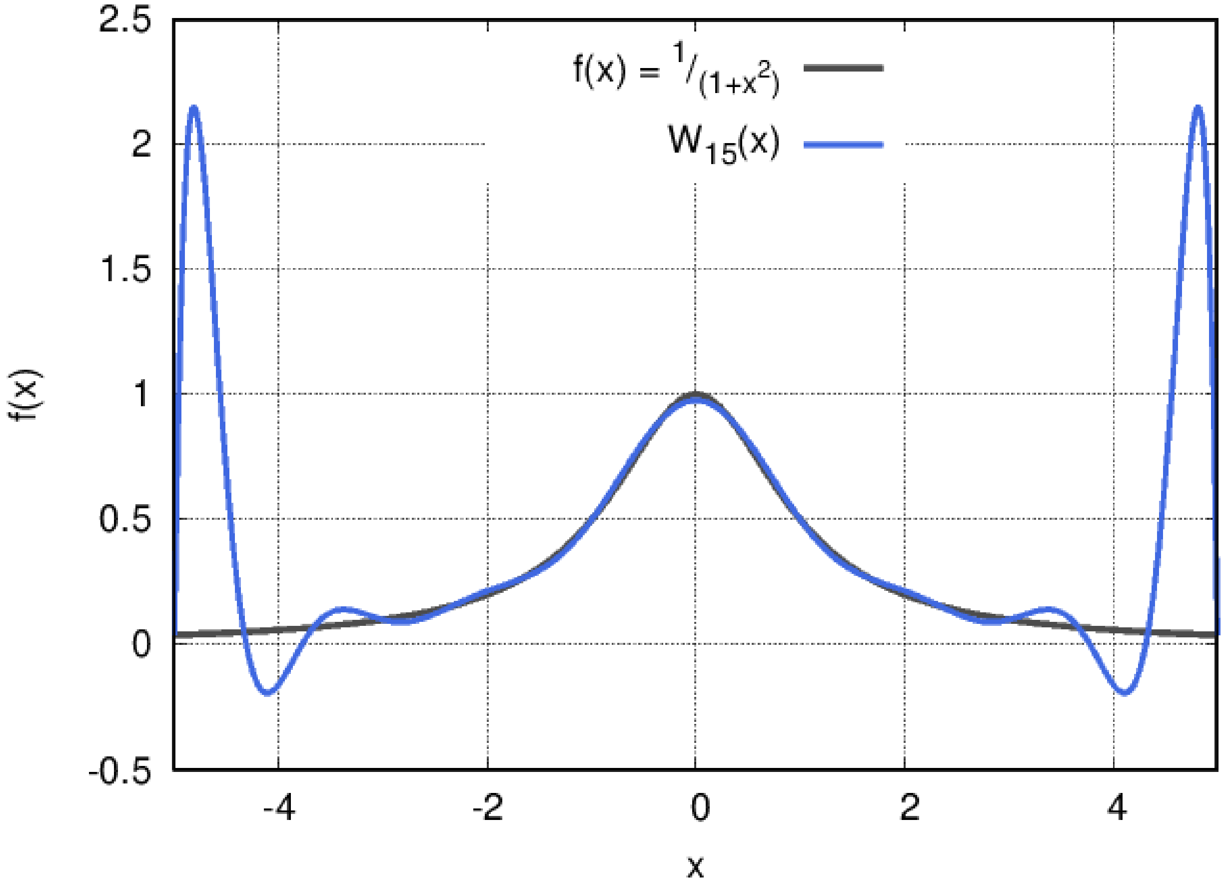
Dla węzłów równoodległych:



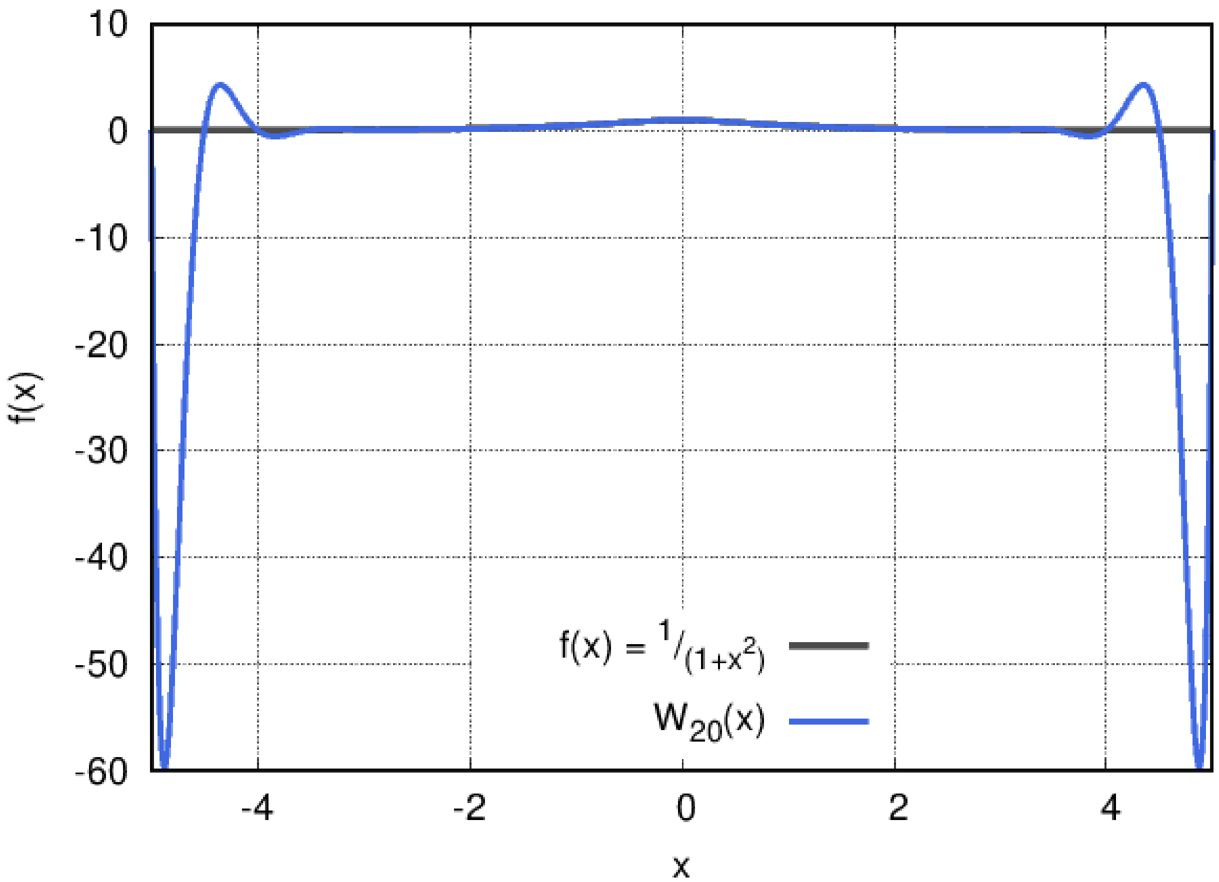
Wykres 1: Porównanie wykresów $f(x),\ W_n(x)$ dla $n = 5$ - węzły równoodległe.



Wykres 2: Porównanie wykresów $f(x),\ \ W_n(x)$ dla $n = 10$ - węzły równoodległe.

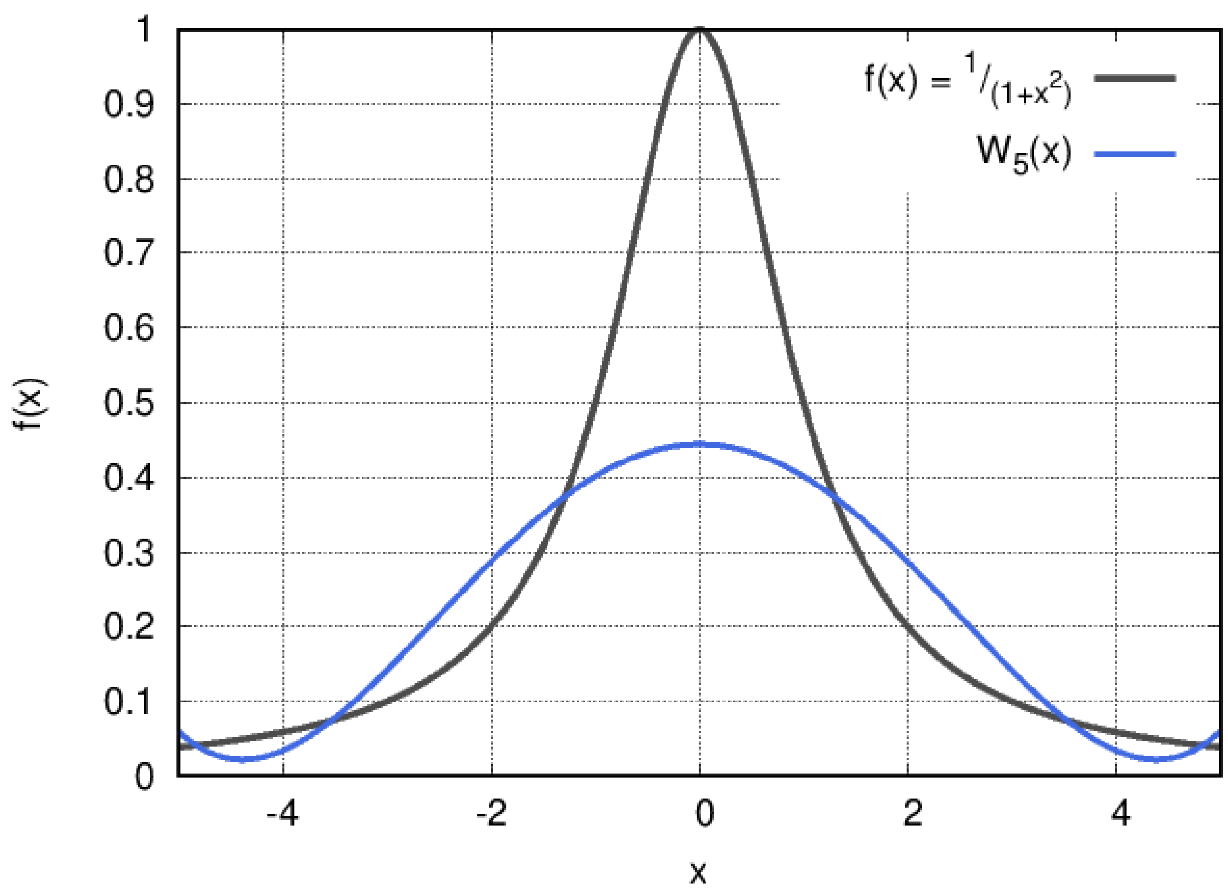


Wykres 3: Porównanie wykresów $f(x),\ \ W_n(x)$ dla $n = 15$ - węzły równoodległe.

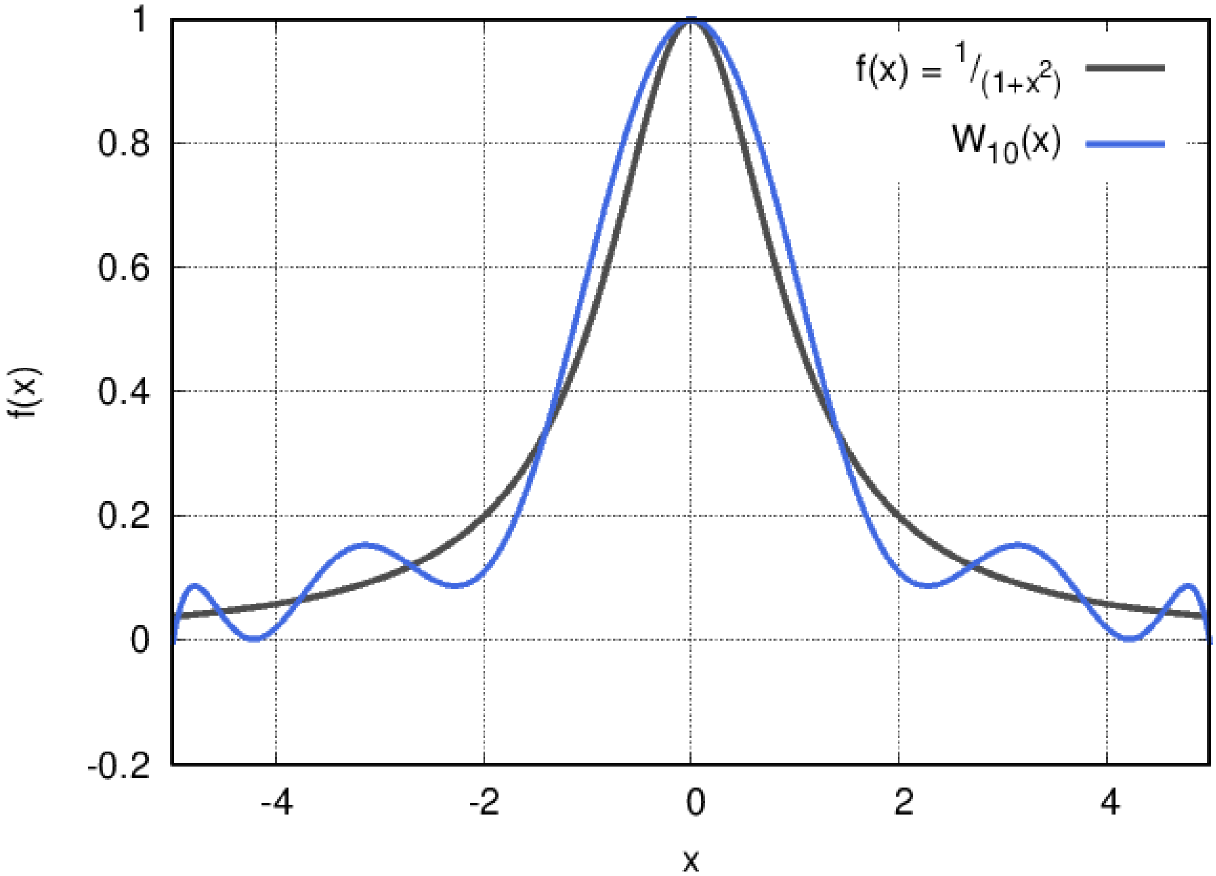


Wykres 4: Porównanie wykresów $f(x),\ W_n(x)$ dla $n = 20$ - węzły równoodległe.

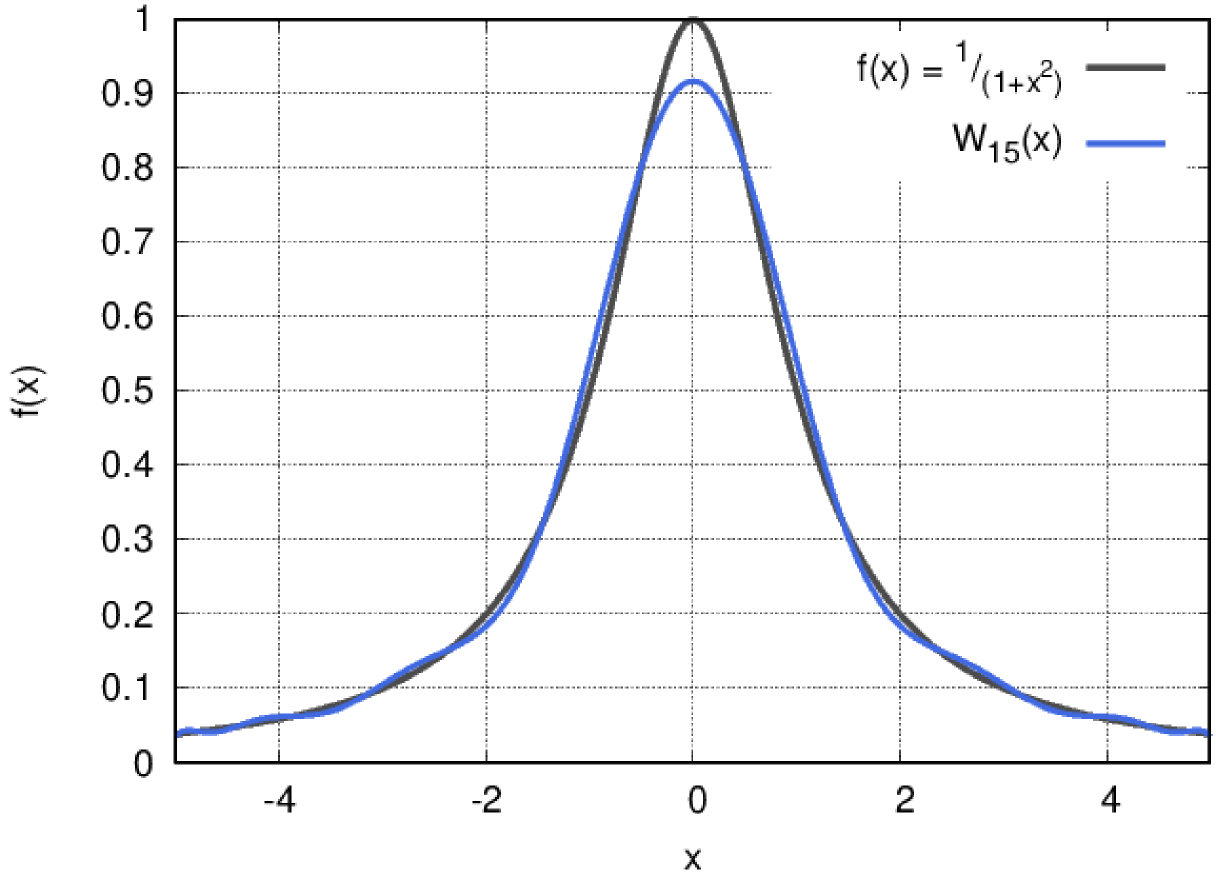
Dla węzłów o zoptymalizowanych położeniach:



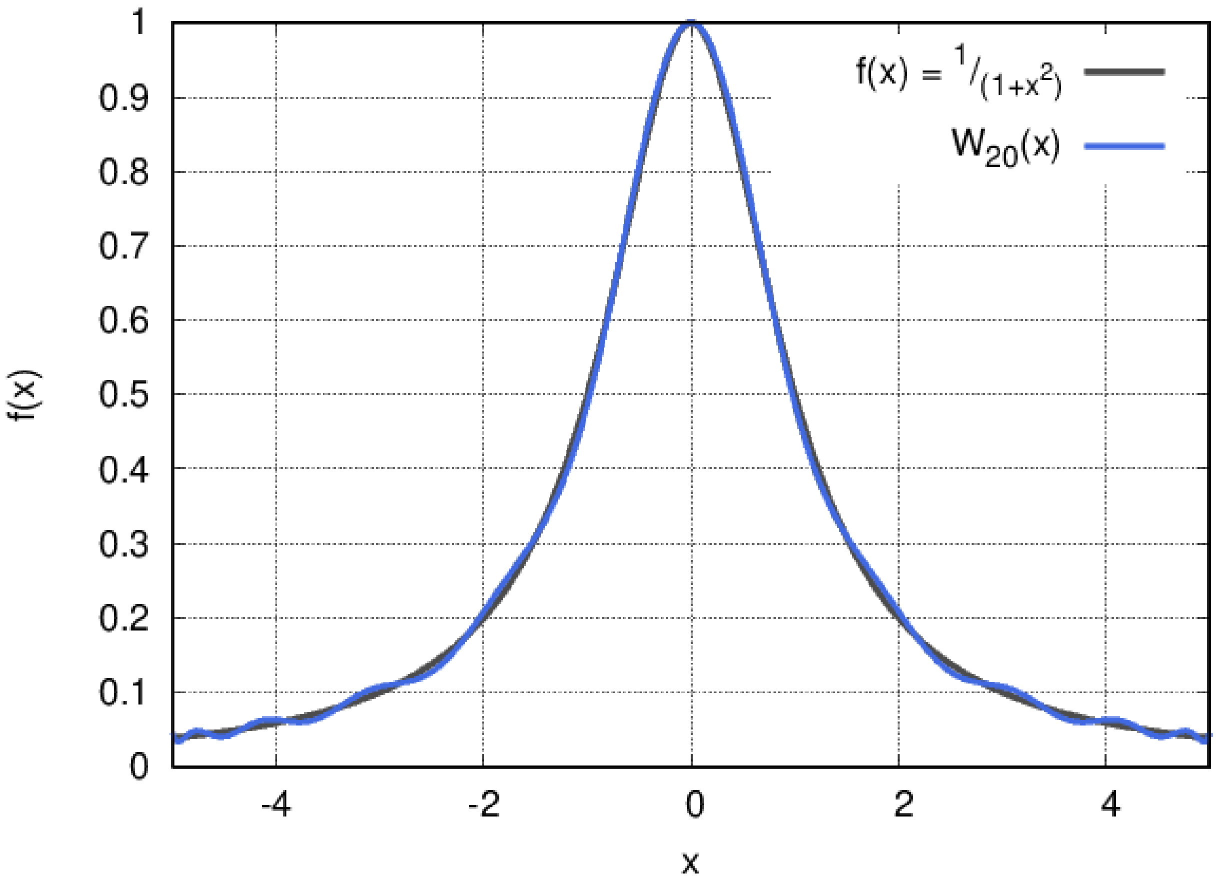
Wykres 5: Porównanie wykresów $f(x),\ W_n(x)$ dla $n = 5$ - węzły o zoptymalizowanych położeniach.



Wykres 6: Porównanie wykresów $f(x),\ W_n(x)$ dla $n = 10$ - węzły o zoptymalizowanych położeniach.



Wykres 7: Porównanie wykresów $f(x),\ W_n(x)$ dla $n = 15$ - węzły o zoptymalizowanych położeniach.



Wykres 8: Porównanie wykresów $f(x),\ W_n(x)$ dla $n = 20$ - węzły o zoptymalizowanych położeniach.

3. Wnioski

Jak widać po przedstawionych wynikach interpolacja Newtona pozwala znaleźć wielomian $W_n(x)$, którego wykres w zadanym przedziale stosunkowo dobrze odpowiada funkcji $f(x)$. Możemy zaobserwować, że przy obu sposobach wyboru węzłów wraz ze zwiększeniem liczby n wykresy coraz bardziej się do siebie upodabniają.

Jednakże, przy zwrastającej liczbie węzłów w przypadku węzłów równoodległych coraz bardziej uwidacznia nam się tzw. efekt Rungego, polegający na pogorszeniu jakości interpolacji, w szczególności na krańcach przedziału. Przykładowo dla $n = 20$ przybliżenia na krańcach przedziału odbiegają już drastycznie od rzeczywistego wykresu funkcji $f(x)$.

W przypadku węzłów o zoptymalizowanych położeniach nie obserwujemy takiego efektu. Jest to spowodowane tym, że zagęszczamy liczbę węzłów znajdujących się na krańcach przedziału.
Dzięki temu dla $n = 20$ wykres $W_n(x)$ już bardzo dobrze odzwierciedla rzeczywisty wykres funkcji $f(x)$.