Metody numeryczne
Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych nr 9

Aproksymacja w bazie wielomianów Grama

Jan Zajda
Informatyka Stosowana
WFiIS
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
9 maja 2020

1. Wstęp teoretyczny

W przypadku aproksymacji znamy wartości $y_0, y_1, ..., y_n$ w danych węzłach $x_0, x_1, ..., x_n$,
ale w przeciwieństwie do interpolacji, szukana funkcja aproksymacyjna nie musi przyjmować wartości określonych w tych węzłach. Jest to przydatne szczególnie, gdy wartości te są obciążone niedokładnością. Szukana funkcja ma postać:

$$F(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + ... + a_m\varphi_m(x),$$

a naszym celem jest minimalizacja wartości:

$$||f(x) - F(x)|| = min,$$

gdzie $f(x)$ jest funkcją, którą aproksymujemy.

Jednym ze sposobów aproksymacji jest wykorzystanie wielomianów Grama. Tworzymy je rekurencyjnie korzystając ze wzoru:

$$\varphi_{j+1} = (x - \alpha_{j+1})\varphi_j(x) - \beta_j\varphi_{j-1}(x),\ j = 0, 1, 2..., m-1,$$

gdzie:

$$\alpha_{j+1} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i\varphi_j^2(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} \varphi_j^2(x_i)},$$

$$\beta_j = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i\varphi_{j-1}(x_i)\varphi_j(x_i)}{\sum_{i=0}^{n} \varphi_{j-1}^2(x_i)},$$

przy warunkach początkowych $\varphi_{-1}(x) = 0,\ \varphi_0(x) = 1$.

Funkcję aproksymacyjną tworzymy wg wzoru:

$$F(x) = \sum_{j=0}^{m} \frac{C_j}{S_j}\varphi_j(x),$$

gdzie współczynniki:

$$C_j = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_j(x_i),\ S_j = \sum_{i=0}^{n} \varphi_j^2(x_i).$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Będziemy wykonywać aproksymację funkcji $f_{szum}(x) = f(x) + C_{rand}(x)$, przy użyciu wielomianów Grama, gdzie:

$$f(x) = sin(\frac{14\pi x}{x_{max} - x_{min}})(exp(\frac{-(x-x_0)^2}{2\sigma^2}))(exp(\frac{-(x+x_0)^2}{2\sigma^2})),$$

$$C_{rand}(x) = \frac{Y - 0.5}{5},\ Y \in [0, 1].$$

Tworzymy $n+1$ równoodległych węzłów w przedziale $[x_{min}, x_{max}]$,
którym przydzielamy wartości $y_i = f_{szum}(x_i)$.

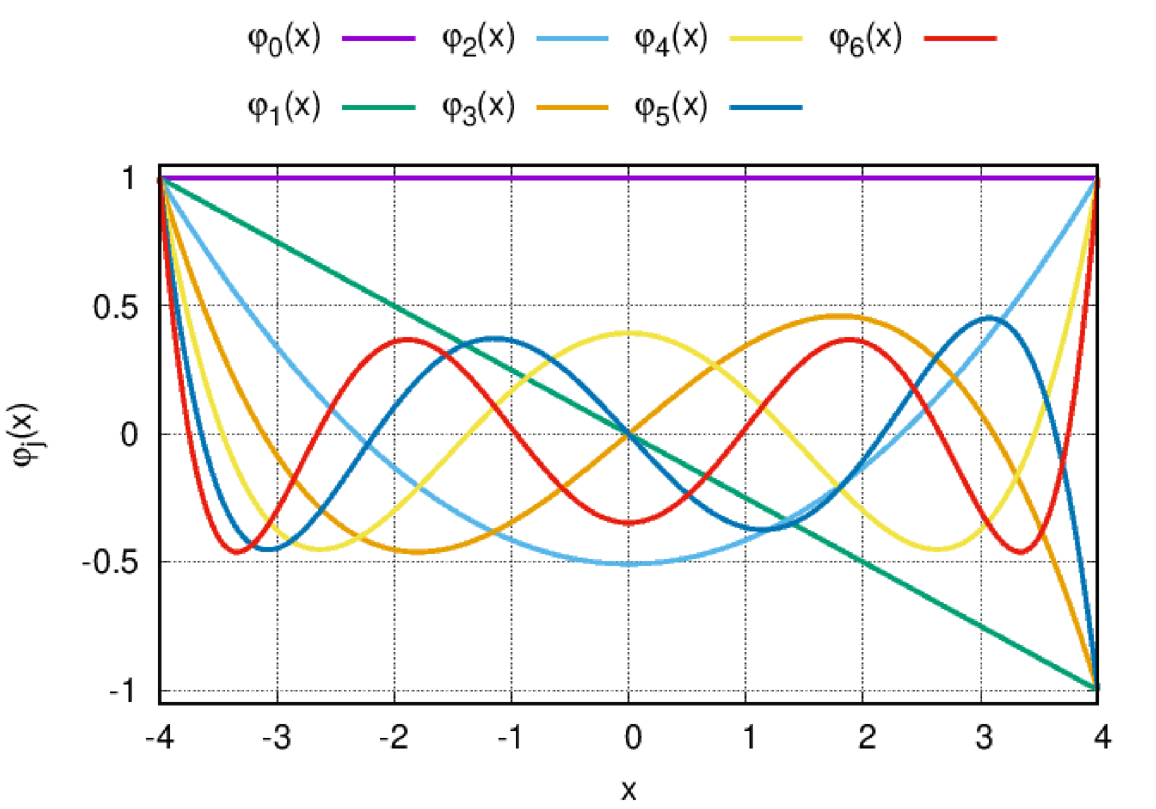
Przyjmujemy dane:

$n = 200$ - więc otrzymujemy 201 węzłów,

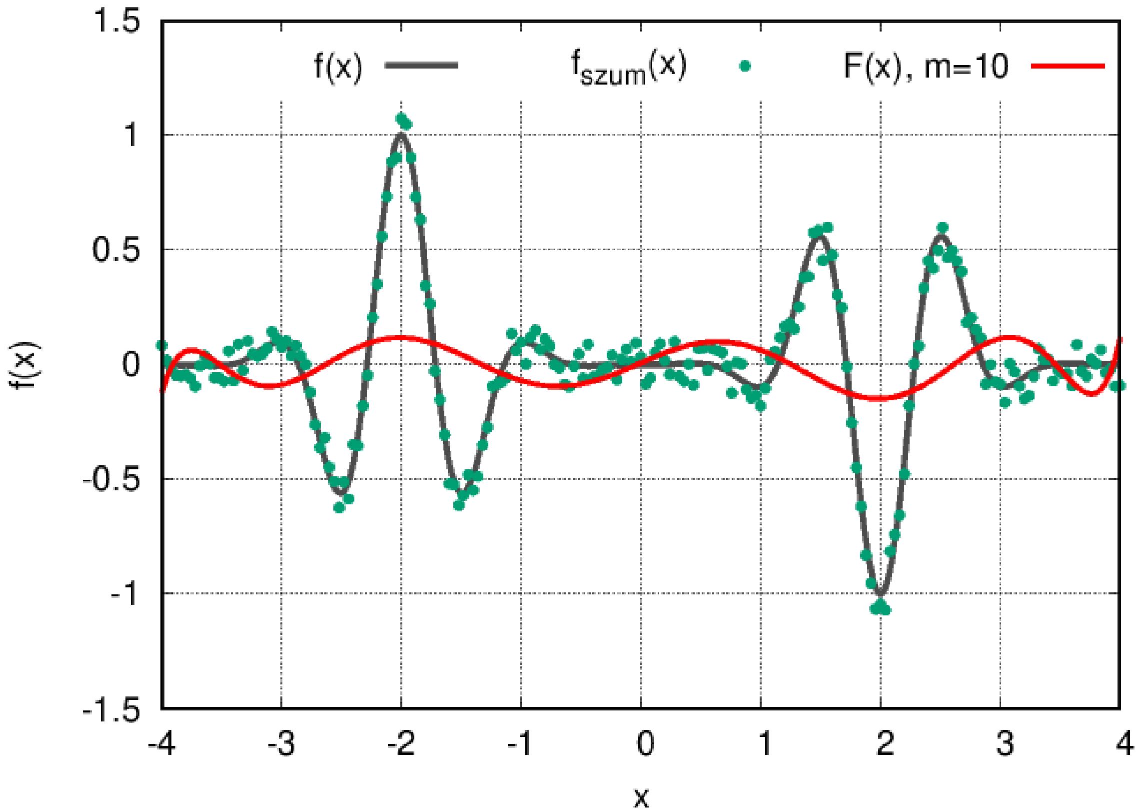
$$x_{min} = -4, \qquad x_{max} = 4, \qquad x_0 = 2, \qquad \sigma = \frac{x_{max} - x_{min}}{16}.$$

Rysujemy pierwsze 7 otrzymanych wielomianów Grama, wcześniej unormowaych.
Następnie rysujemy funkcję aproksymacyjną przy użyciu $m = 10, 30, 50$ wielomianów Grama.
Na końcu dokonujemy tych samych aproksymacji dla funkcji $f(x)$ pozbawionej szumu.

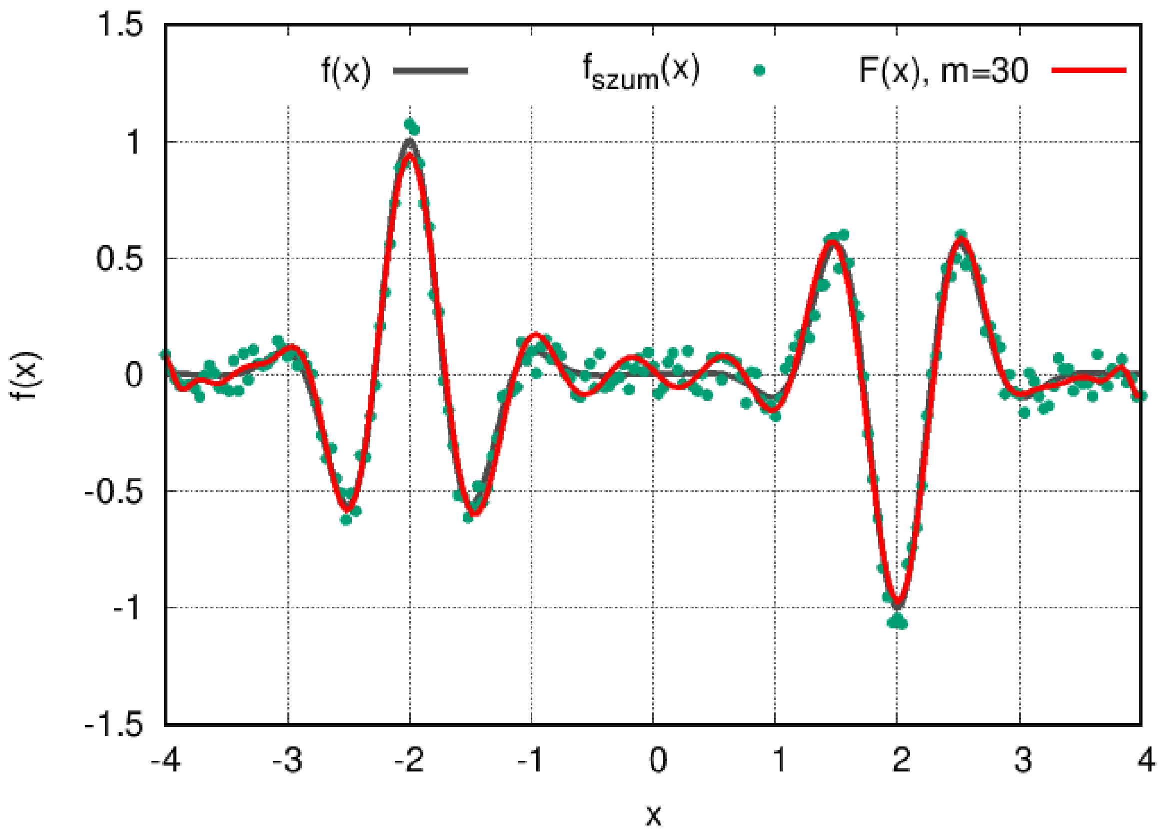
2.2. Wyniki



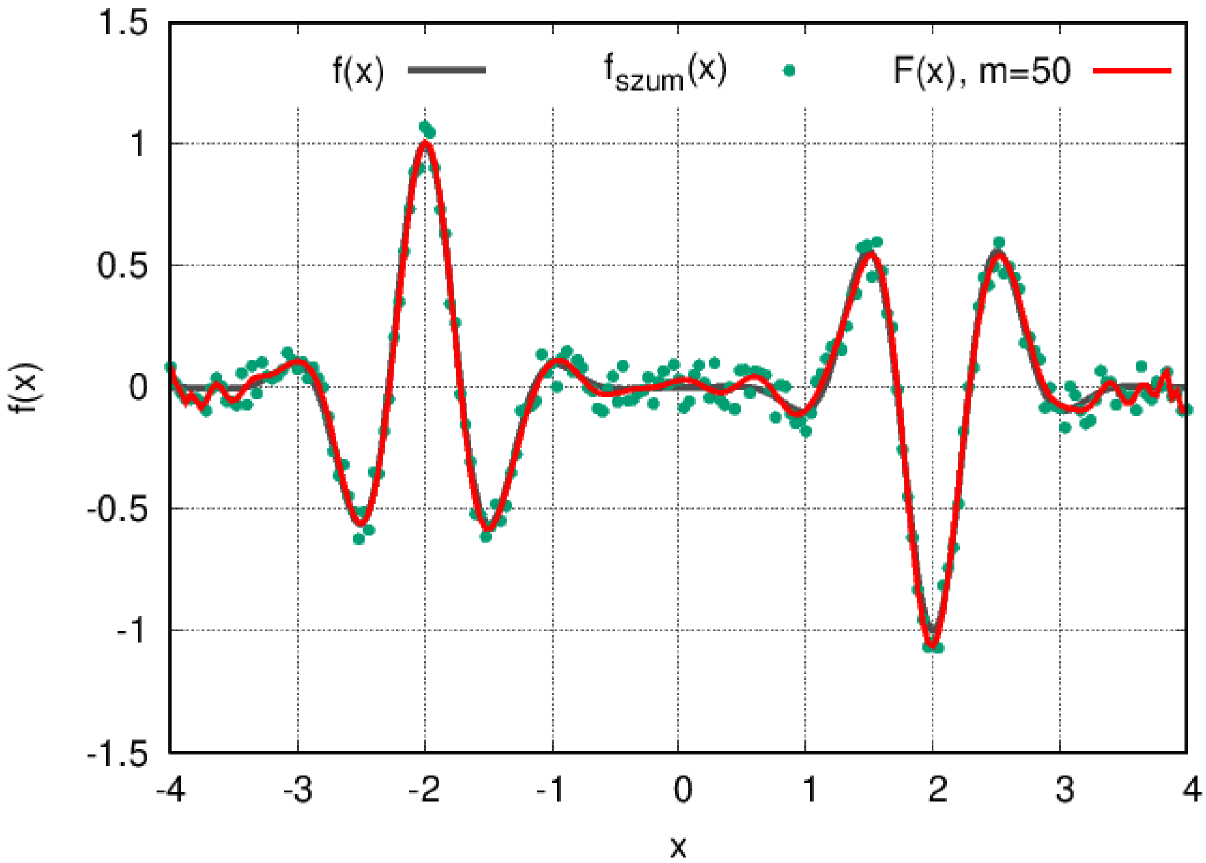
Wykres 1: Pierwsze 7 wielomianów Grama, unormowanych, w przedziale wartości $[-1, 1]$.



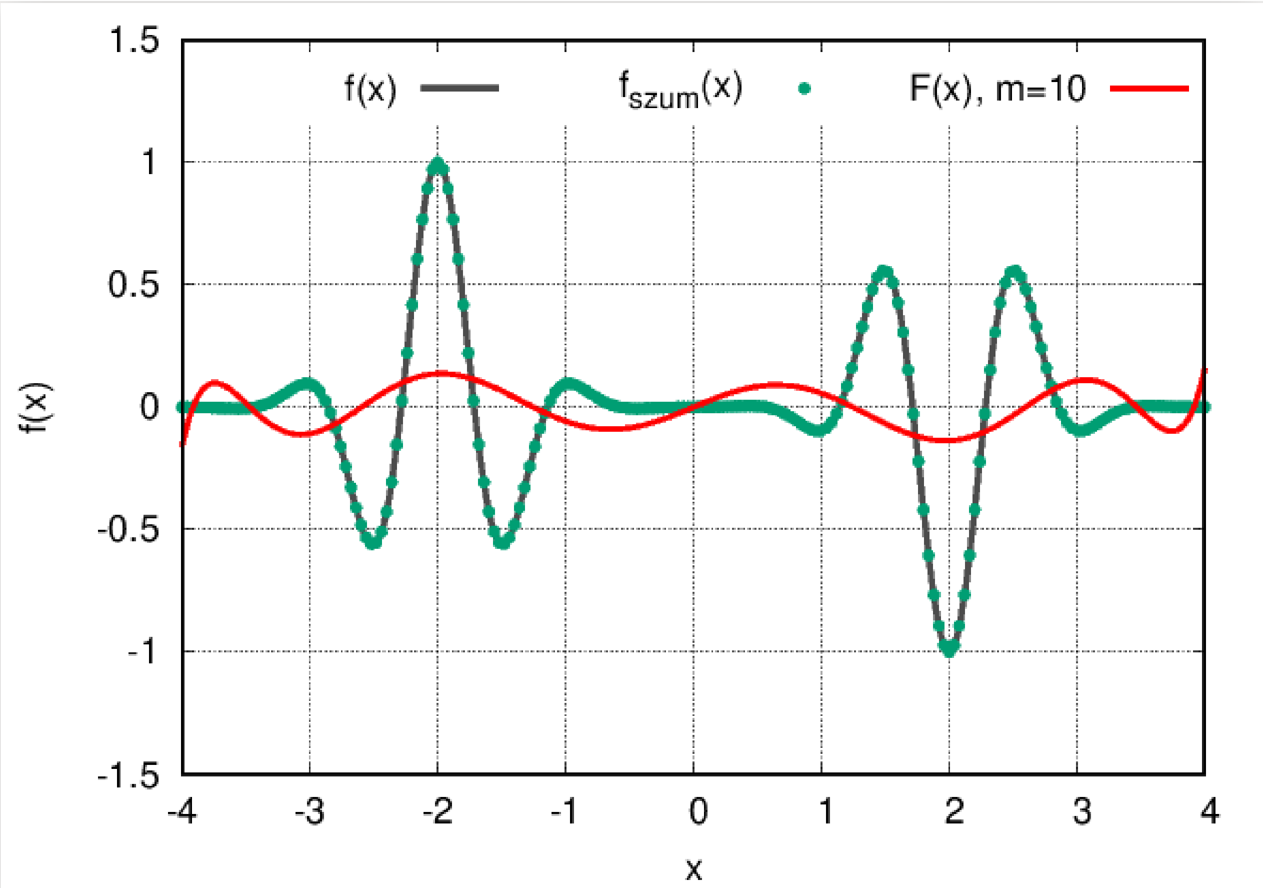
Wykres 2: Funkcja aproksymacyjna stworzona przy użyciu 11 wielomianów Grama,
na tle funkcji $f(x)$ i węzłów $f_{szum}(x)$.



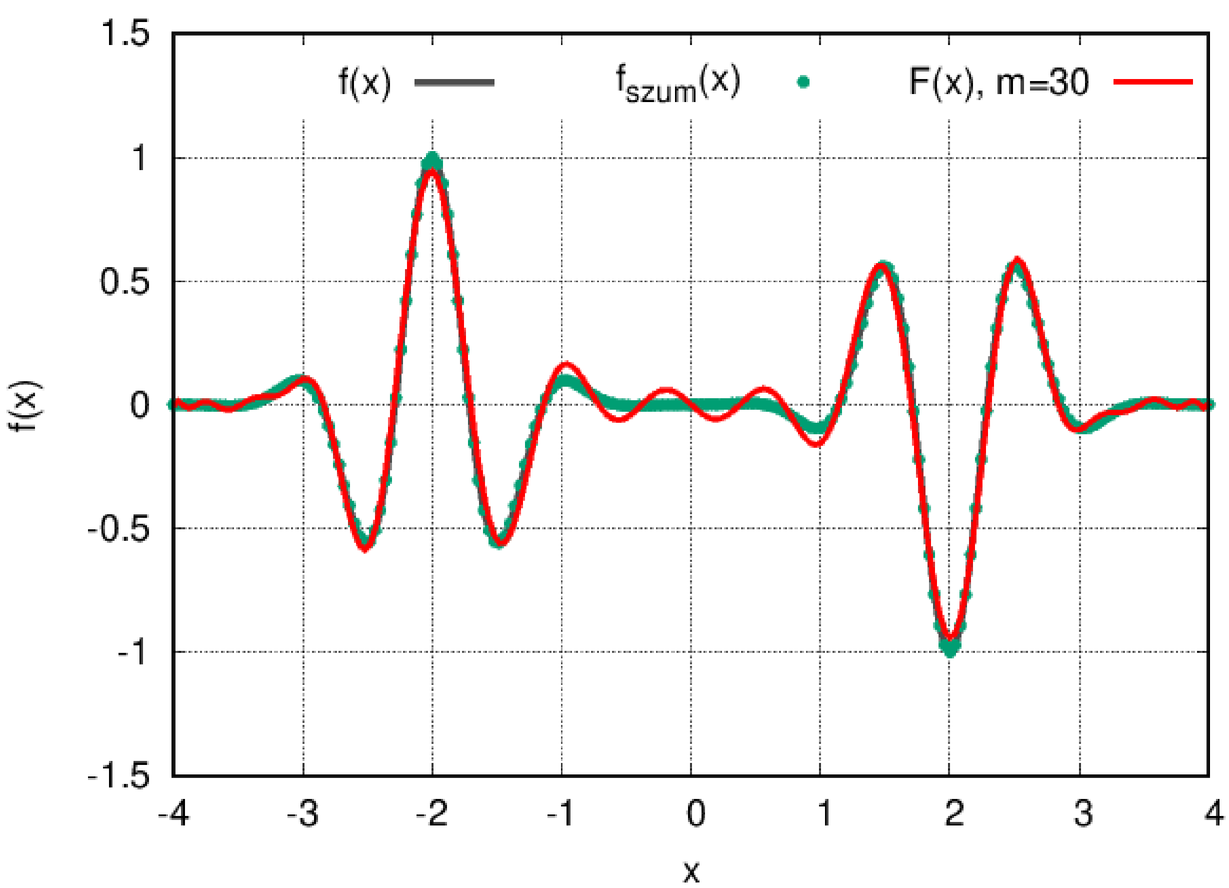
Wykres 3: Funkcja aproksymacyjna stworzona przy użyciu 31 wielomianów Grama,
na tle funkcji $f(x)$ i węzłów $f_{szum}(x)$.



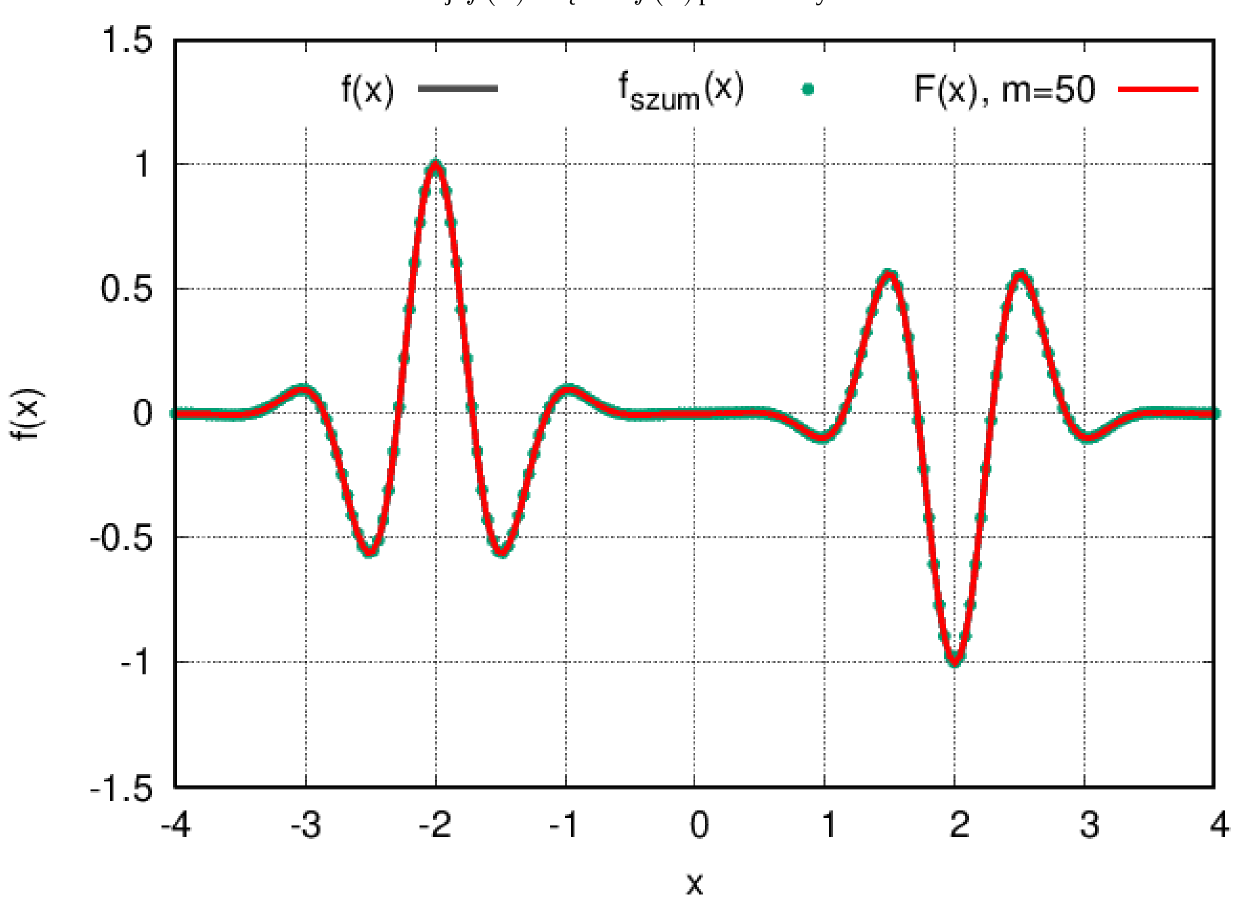
Wykres 4: Funkcja aproksymacyjna stworzona przy użyciu 51 wielomianów Grama, na tle funkcji $f(x)$ i węzłów $f_{szum}(x)$.



Wykres 5: Funkcja aproksymacyjna stworzona przy użyciu 11 wielomianów Grama, na tle funkcji $f(x)$ i węzłów $f(x)$ pozbawionych szumu.



Wykres 6: Funkcja aproksymacyjna stworzona przy użyciu 31 wielomianów Grama, na tle funkcji $f(x)$ i węzłów $f(x)$ pozbawionych szumu.



Wykres 7: Funkcja aproksymacyjna stworzona przy użyciu 51 wielomianów Grama, na tle funkcji $f(x)$ i węzłów $f(x)$ pozbawionych szumu.

3. Wnioski

Jak widać po powyższych wynikach udało nam się utworzyć wielomiany Grama oraz dokonać aproksymacji funkcji $f(x)$, $f_{szum}(x)$.

Możemy zaobserwować, że dla $m = 10$, aproksymacja jest bardzo niedokładna i uzyskana funkcja kompletnie nie pokrywa się z rzeczywistą. Przy braku szumu uzyskany efekt jest podobny. Liczba oscylacji jest niewielka, a ich wielkość nie koresponduje nawet wyraźnie ze wzrostem lub maleniem funkcji $f(x)$.

Dla $m = 30$ efekt jest już dużo lepszy i w obu przypadkach $F(x)$ jest już bardzo zbliżona do $f(x)$. Liczba oscylacji znacząco wzrosła, a miejsca bardziej wyraźnego wzrostu $f(x)$ zostały dobrze wychwycone. Największe niedokładności występują w miejscach gdzie wykres $f(x)$ jest najbardziej wypłaszczony, co szczególnie widać w środkowej części przedziału.

Dla $m = 50$ nie widać już dużego progresu – w środkowej części przedziału $F(x)$ uległa wypłaszczeniu, ale na końcach przedziału możemy zaobserwować, że funkcja jest mniej wygładzona niż w przypadku $m = 30$. Może to oznaczać, że $m = 50$ jest już zbyt dużą liczbą wielomianów - funkcja aproksymacyjna jest za bardzo dokładna i zbliża się do wyniku, który moglibyśmy uzyskać w wyniku interpolacji, co nie jest pożądane w sytuacji gdy mamy dodatkowy szum. Przy braku szumu uzyskana funkcja $F(x)$ niemal dokładnie pokrywa się z $f(x)$ na całym przedziale, przechodząc przez wszystkie węzły.