Metody numeryczne
Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych nr 3

Iteracyjne rozwiązywanie układu równań liniowych metodą Jakobiego

Jan Zajda
Informatyka Stosowana
WFiIS
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
24 marca 2020

1.Wstęp teoretyczny

Często przy rozwiązywaniu układu równań liniowych nie musimy uzyskiwać dokładnego wyniku jak przy użyciu metod bezpośrednich, a wystaczającym będzie wynik przybliżony, za to obliczony w dużo krótszym czasie. Jest to szczególnie przydatne, gdy mamy daną dużą macierz z wieloma zerami - tzw. macierz rzadką. Wtedy do znalezienia wyniku mogą nam posłużyć metody iteracyjne takie jak metoda Jakobiego.
Mamy dany układ równań:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \iff \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & .. & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Zatem po prostym przekształceniu każdego z równań możemy zapisać:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{b_1 - (a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n)}{a_{11}} \\ x_2 = \frac{b_2 - (a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n)}{a_{22}} \\ \vdots \\ x_n = \frac{b_n - (a_{n1}x_1 + ... + a_{nn-1}x_{n-1})}{a_{nn}} \end{cases},$$

przy założeniu, że elementy na diagonali $a_{ii} \neq 0, i \in \{1...n\}$. Jeżeli ten warunek nie jest spełniony można zamienić kolejność równań. W metodzie Jakobiego będziemy wykorzystywać wcześniej obliczone wyniki x_i^{k-1}, gdzie k oznacza numer iteracji. Dla x_i^0 możemy przyjąć dowolne wartości. Korzystając z powyższych równań zapisujemy wzór iteracyjny jako:

$$x_i^k = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} a_{ij}x_j^{k-1}), \quad \forall i \in \{1...n\}$$
(1)

Obliczenia możemy kontynuować dla przyjętej liczby k iteracji albo do momentu, gdy różnice między elemetami wektorów x^k, x^{k-1} będą wystarczająco małe. Warto także dodać, że warunkiem zbieżności tej metody jest spełnienie nierówności:

$$|a_{ii}| > \sum_{i=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|, \quad \forall i \in \{1...n\}.$$

Możemy stosować tę metodę nawet gdy powyższy warunek nie jest spełniony, ale nie mamy gwarancji, że będzie zbieżna i uzyskamy wynik.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Mamy dane równanie różniczkowe, które opisuje ruch ciała poddanego sile sprężystej, sile zależnej od tarcia i sile wymuszającej ruch:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 x - \beta V + F_0 sin(\Omega t). \tag{2}$$

Drugą pochodną zamieniamy na trójpunktowy iloraz różnicowy:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{h^2}, \tag{3}$$

oraz prędkość na iloraz różnicowy, dwupunktowy niesymetryczny:

$$V_i = \frac{x_{i+1} - x_i}{h}. \tag{4}$$

Wzory (3) i (4) podstawiamy do (2) i po przekształceniach otrzymujemy równanie:

$$a_1 x_{i-1} + a_2 x_i + a_3 x_{i+1} = b_i,$$

gdzie:

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = \omega^2 h^2 - 2 - \beta h, \qquad a_3 = 1 + \beta h, \qquad b_i = F_0 sin(\Omega t_{i-1}) h^2 = F_0 sin(\Omega h(i-1)) h^2,$$

przy początkowych warunkach:

$$x_0 = 1, \qquad V_0 = \frac{x_1 - x_0}{h} = 0.$$

Dostajemy układ $n+1$ równań (liczba kroków czasowych), który umieszczamy w macierzy $(n+1) \times (n+1)$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_1 & a_2 & a_3 & ... & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Do obliczeń przyjmujemy dane:

$$n = 2000, \qquad h = 0.02, \qquad \omega = 1.$$

Rozważamy trzy przypadki:

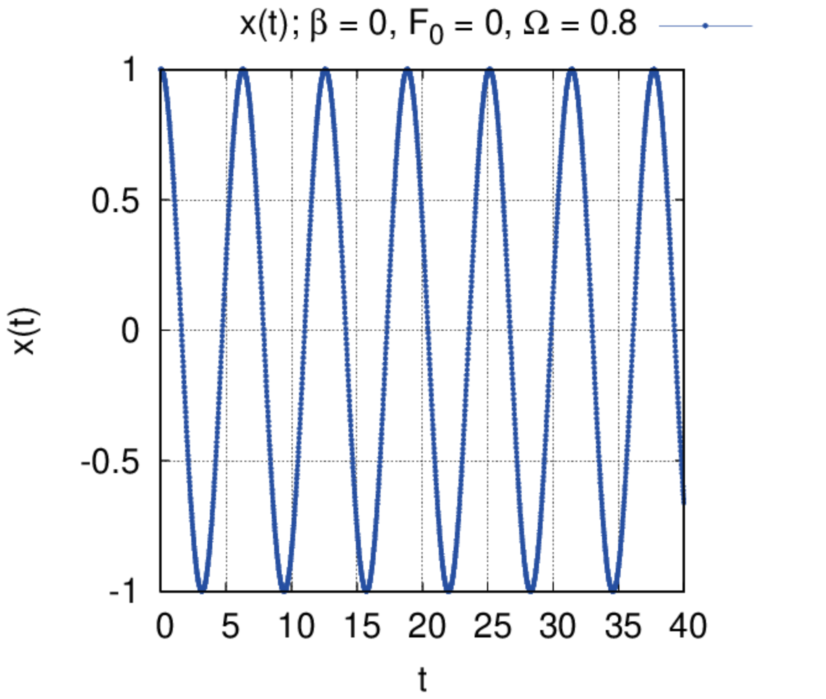
1) $\beta = 0.0, \qquad F_0 = 0.0, \qquad \Omega = 0.8,$

2) $\beta = 0.4, \qquad F_0 = 0.0, \qquad \Omega = 0.8,$

3) $\beta = 0.4, \qquad F_0 = 0.1, \qquad \Omega = 0.8.$

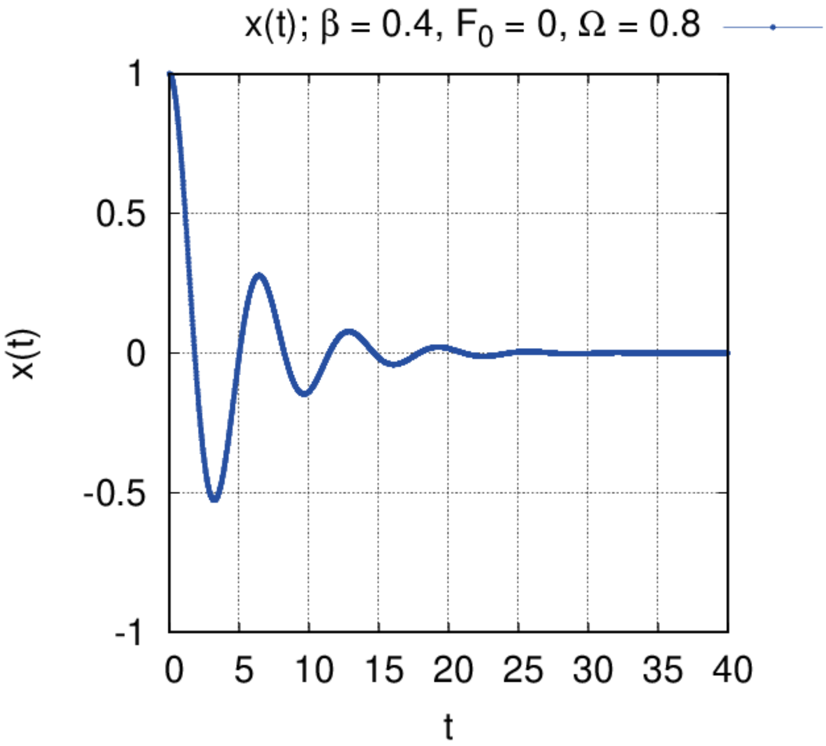
2.2. Wyniki

Do obliczeń wykorzystamy metodę Jakobiego, korzystając ze wzoru (1). Nie alokujemy całej macierzy w pamięci, gdyż zdecydowana większość jej elementów to zera. Wystaczające jest zapisanie trzech wektorów z liczbami znajdującymi się w okolicach przekątnej.
W przypadku 1) wyniki przedstawiają się następująco:



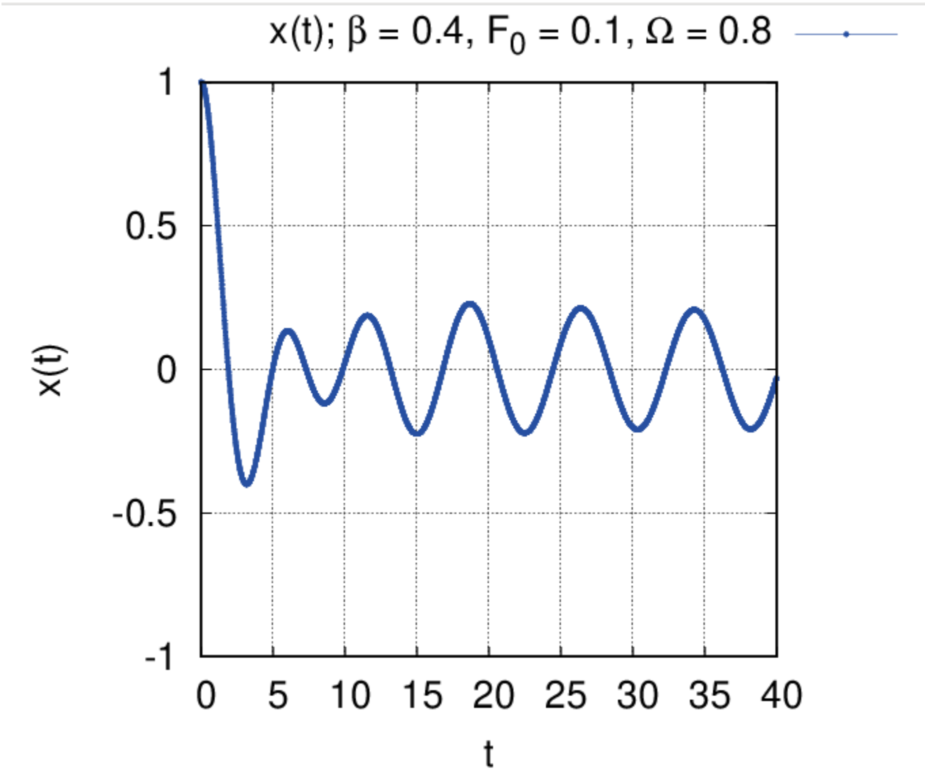
Rys. 1 Zależność położenia x od czasu t dla 2000 chwil czasowych (brak tłumienia i wymuszeń).

Dla przypadku 2):



Rys. 2 Zależność położenia x od czasu t dla 2000 chwil czasowych (tłumienie i brak wymuszeń).

Dla przypadku 3):



Rys. 3 Zależność położenia x od czasu t dla 2000 chwil czasowych (z tłumieniem i wymuszeniami).

Przy badaniu czy uzyskany wynik jest zbieżny wykorzystujemy nierówność:

$$|\sum_{i=0}^{n}(x_i^k)^2 - \sum_{i=0}^{n}(x_i^{k-1})^2| < 10^{-6}.$$

Zbieżność udało się uzyskać po:

2002 iteracjach – przypadek 1),
2000 iteracjach – przypadek 2),
2000 iteracjach – przypadek 3).

3. Wnioski

Jak widać na przedstawionych wykresach metoda Jakobiego pozwala nam z dużą dokładnością uzyskać przybliżone wyniki. Dodatkowo w przypadku dużych macierzy rzadkich – takich z jakimi mieliśmy do czynienia w powyższym zadaniu – wyniki można uzyskać szybko z niewielkim użyciem pamięci komputera. Możemy także zmodyfikować metodę Jakobiego do metody Gaussa-Seidla, która wykorzystuje już obliczone wartości wektora x_i^k, a nie polega tylko na wartościach x_i^{k-1}. W ten sposób dwukrotnie ograniczamy zużycie pamięci oraz korzystamy z bardziej aktualnych wyników, co zmniejsza liczbę potrzebnych iteracji.