Metody numeryczne
Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych nr 11

Odszumianie sygnału przy użyciu FFT - splot funkcji

Jan Zajda
Informatyka Stosowana
WFiIS
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie
25 maja 2020

1. Wstęp teoretyczny

Dobrym sposobem aproksymacji funkcji okresowej jest skorzystanie z rozwinięcia funkcji w trygonometryczny szereg Fouriera. Możemy tego efektywnie dokonać korzystając z algorytmu szybkiego obliczania dyskretnej transformaty Fouriera (FFT) oraz transformaty odwrotnej (FFT^{-1}), takiego jak algorytm Cooleya-Tukeya (radix-2). Będzie to od nas wymagało ustalenia liczby węzłów równej potędze dwójki ($N = 2^k$).

Korzystając ze splotu dwóch funkcji $f(t) * g(t)$ możemy przeprowadzić uśrednienie funkcji f przy pomocy funkcji wagowej g. Znając twierdzenie o splocie możemy, przy użyciu FFT stosunkowo łatwo wyznaczyć taki splot:

$$FFT\{f(t) * g(t)\} = FFT\{f(t)\} \cdot FFT\{g(t)\} = f(k) \cdot g(k).$$

A następnie wykorzystując transformatę odwrotną:

$$(f * g)(t) = FFT^{-1}\{f(k) \cdot g(k)\}.$$

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

W zadaniu jako funkcję sygnału f przyjmujemy $f(t) = f_0(t) + \Delta$, gdzie:

$f_0(t) = sin(\omega t) + sin(2\omega t) + sin(3\omega t)$ - sygnał niezaburzony dla $\omega = \frac{2\pi}{T}$, przy czym T - okres,
Δ - losowe zaburzenie z przedziału $[-0.5, 0.5]$.

Jako funkcję wagową g przyjmujemy funkcję Gaussa:

$$g(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} exp(\frac{-t^2}{2\sigma^2}).$$

Badamy przedział czasowy dla $t \in [0, t_{max}]$.
Krok czasowy między węzłami jest wtedy równy $dt = \frac{t_{max}}{N}$.

Podstawiamy następujące dane:

$T = 1.0,$

$\sigma = \frac{T}{20},$

$t_{max} = 3T.$

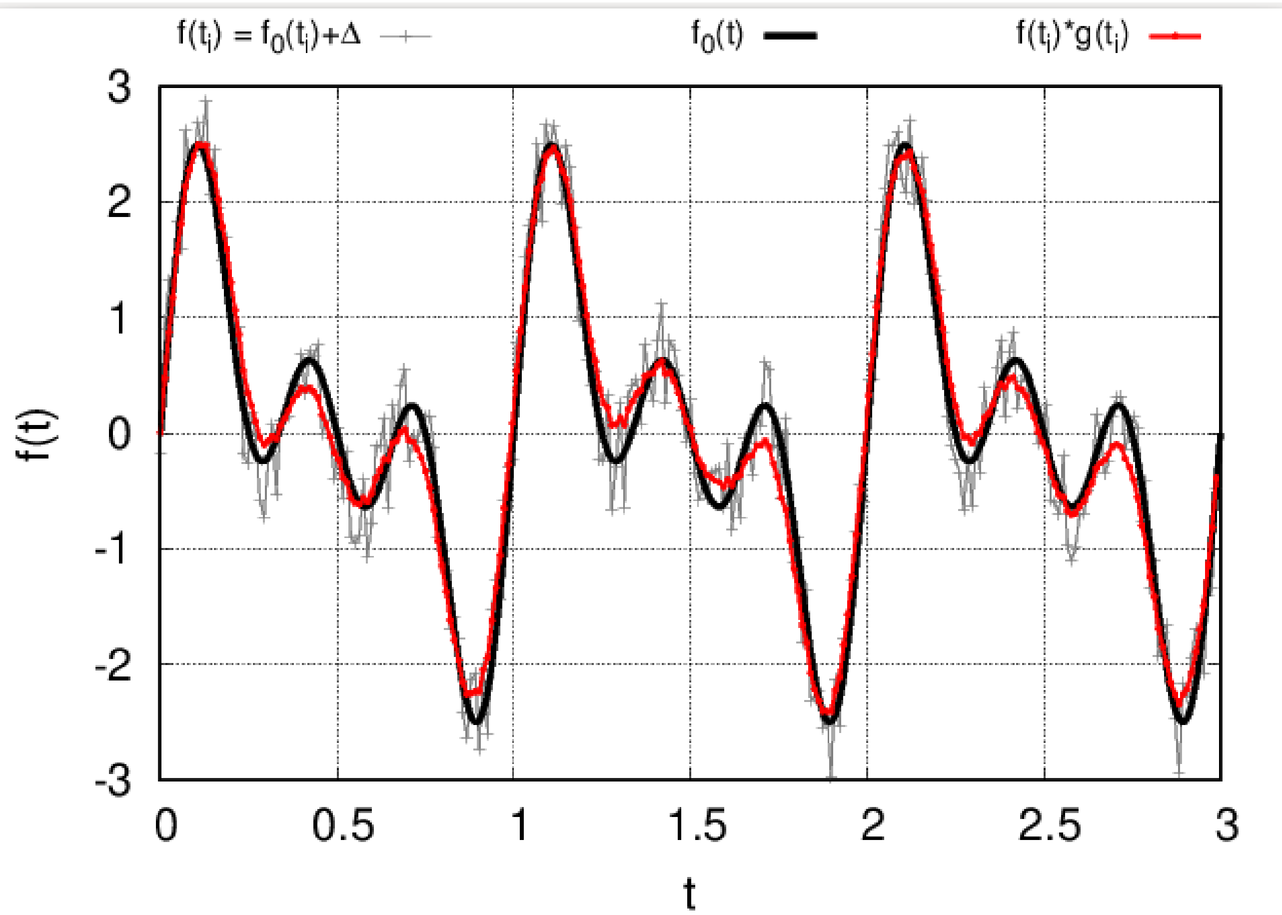
Za zadanie mamy znaleźć znormalizowany splot zaburzonego sygnału i funkcji wagowej dla różnej liczby węzłów, kolejno przy $k = 8, 10, 12 \implies N = 2^8, 2^{10}, 2^{12}$. Normalizację dokonujemy poprzez podzielenie wszystkich wartości splotu przez $\frac{|(f*g)_{max}|}{2.5}$.

W programie wykorzystano następujące funkcje z biblioteki gsl:

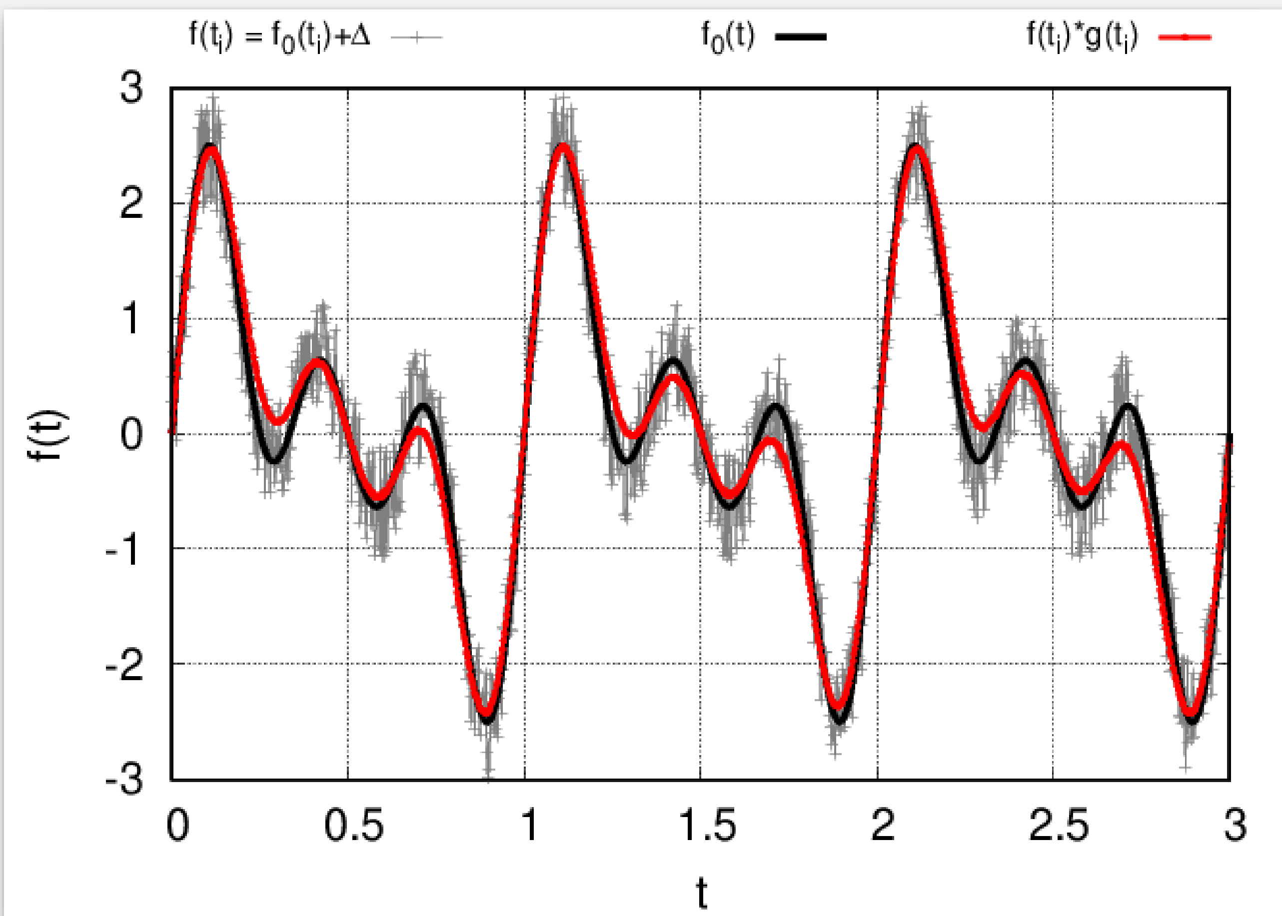
$$gsl\_fft\_complex\_radix2\_forward,$$
$$gsl\_fft\_complex\_radix2\_backward.$$

2.2. Wyniki

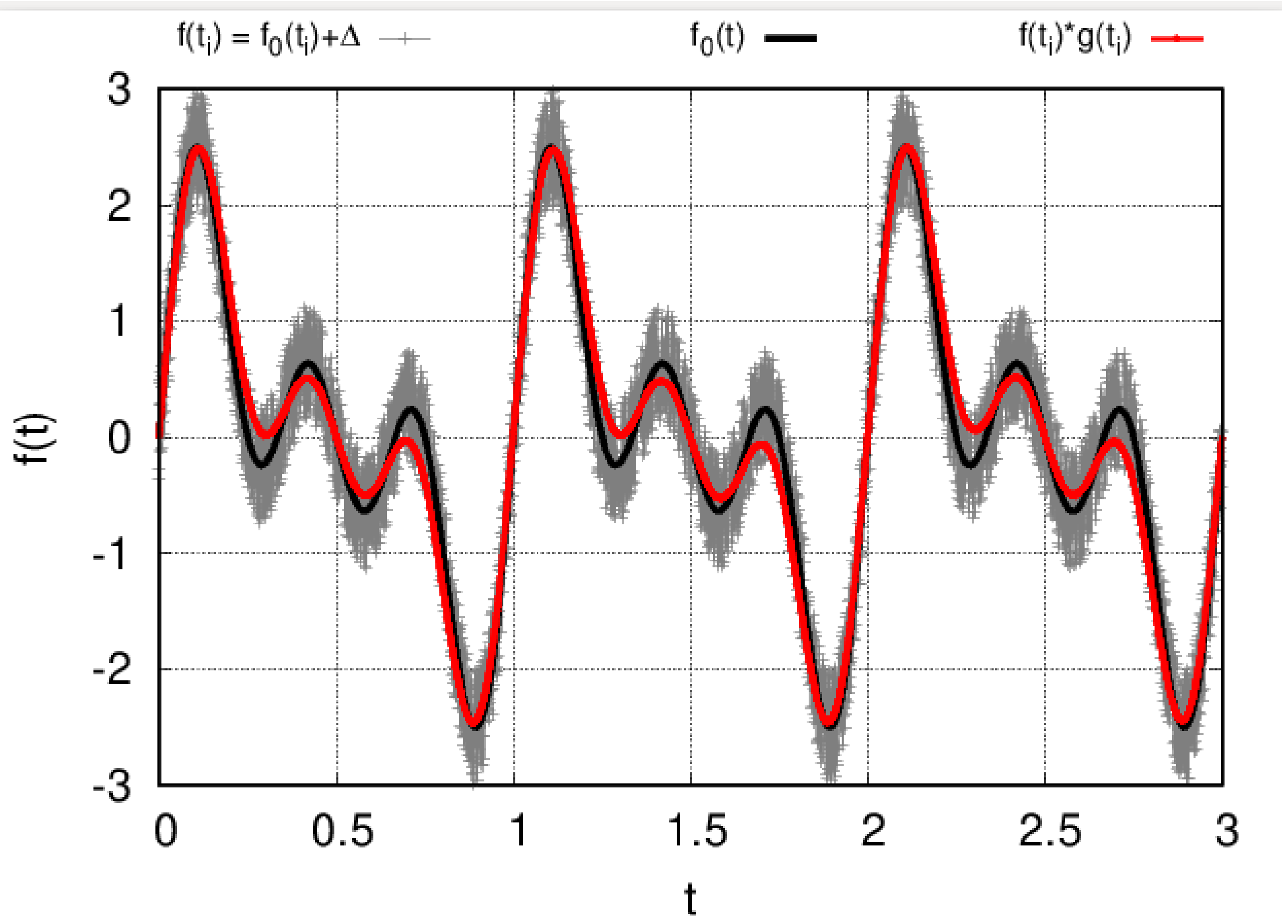
Jako wynik działania programu przedstawiono wykresy z nałożonym sygnałem zaburzonym, niezaburzonym oraz znormalizowanym splotem dla $k = 8, 10, 12$. Dodatkowo zamieszczono wykresy dla znacząco większego parametru k oraz zmniejszonego parametru σ w $g(t)$.



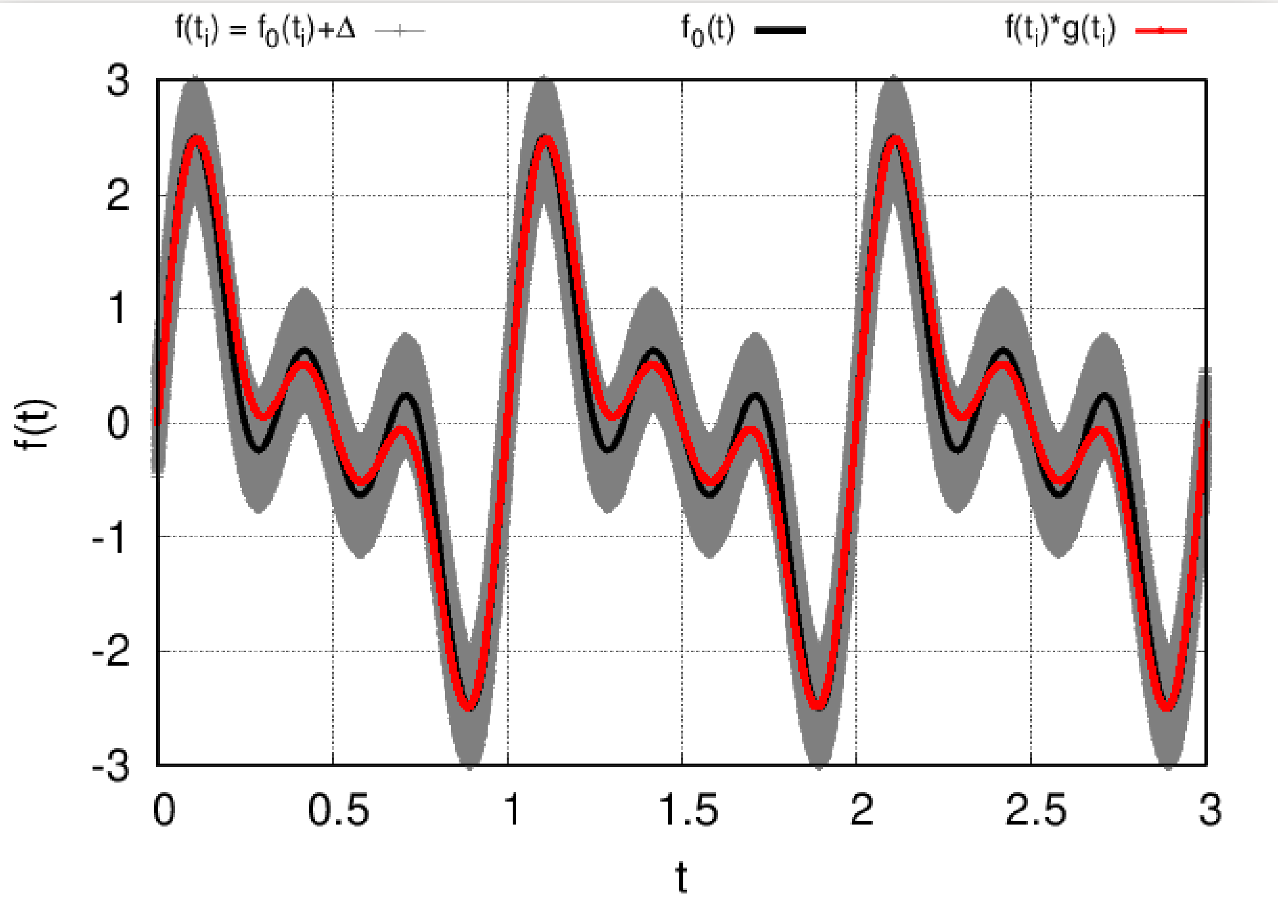
Wykres 1: Sygnał niezaburzony, zaburzony oraz splot dla $k = 8$.



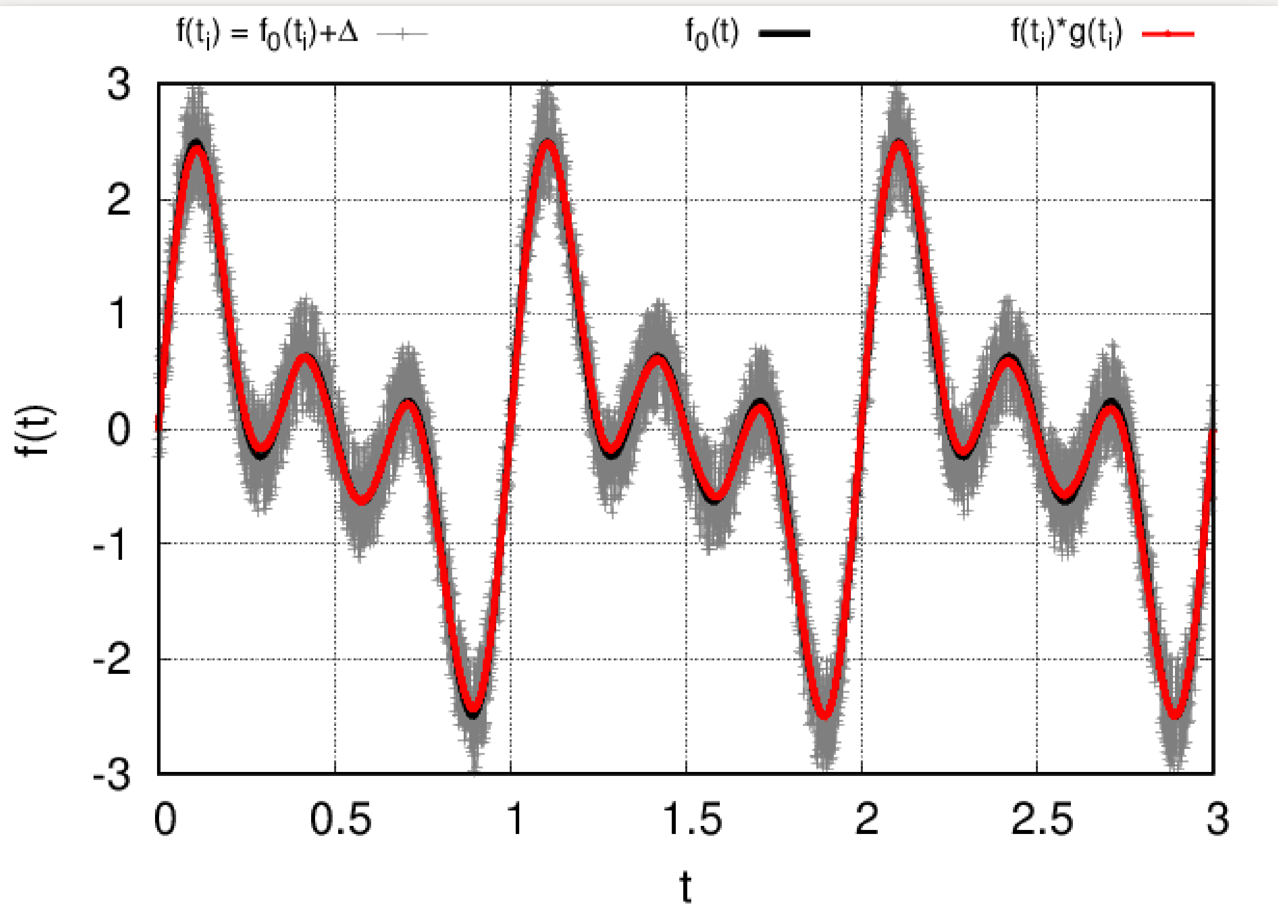
Wykres 2: Sygnał niezaburzony, zaburzony oraz splot dla $k = 10$.



Wykres 3: Sygnał niezaburzony, zaburzony oraz splot dla $k = 12$.



Wykres 4: Sygnał niezaburzony, zaburzony oraz splot dla $k = 18$.



Wykres 5: Sygnał niezaburzony, zaburzony oraz splot dla $k = 12, \sigma = T/40$.

3. Wnioski

Obserwując powyższe wykresy możemy zauważyć, że kształty znalezionych funkcji we wszystkich przypadkach przypominają pierwotną funkcję $f_0(t)$. Widzimy jednak, że dla mniejszych k jakość aproksymacji spada.

Dla $k = 8$, funkcja jest zaważalnie niegładka, co szczególnie widać w pobliżu ekstremów.
Dla $k = 10$ znaleziona funkcja jest gładka, ale nadal w niektórych punktach widoczne są znaczące odstępstwa od funkcji pozbawionej zaburzeń. Funkcja ta wygląda też nieco inaczej w każdym okresie, co nie powinno mieć miejsca.
Aproksymacja jest najlepsza dla $k = 12$, choć w lokalnych ekstremach widać nadal spore różnice w porównaniu do sygnału bez zaburzeń.

W celu znalezienia powodu tego zjawiska zamieściłem dwa kolejne wykresy.

Na wykresie nr 4 widzimy, że mimo wyboru znacząco większej liczby węzłów znaleziona funkcja nie różni się od tej z wykresu nr 3. Świadczy to o tym, że od pewnego punktu liczba węzłów, a zatem także krok czasowy dt nie wpływa na jakość aproksymacji.

Na wykresie nr 5 obserwujemy aproksymację niemal pokrywającą się z funkcją $f_0(t)$. Udało się to uzyskać poprzez znaczące zmniejszenie parametru σ funkcji $g(t)$, przy zachowaniu liczby węzłow. Pokazuje nam to, że w badanej metodzie bardzo duże znaczenie ma dobranie odpowiedniej funkcji wagowej.