Metody numeryczne
Sprawozdanie z ćwiczeń laboratoryjnych nr 12

Zastosowanie ekstrapolacji Richardsona do całkowania przy użyciu wzorów Simpsona i Milne

Jan Zajda
Informatyka Stosowana
WFiIS
Akademia Górniczo-Hutnicza w Krakowie

30 maja 2020

1. Wstęp teoretyczny

Jedną z rodzin metod numerycznego całkowania są kwadratury Newtona-Cotesa. Wykorzystujemy w niej interpolację funkcji podcałkowej dla równoodległych węzłów $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, w przedziale całkowania $[a, b]$ wielomianem interpolacyjnym rzędu co najwyżej n. W przypadku kwadratur zamkniętych, które będziemy wykorzystywać, używamy skrajnych węzłów $x_0 = a, x_n = b$.

W zbiorze kwadratur zamkniętych NC do interpolacji wykorzystujemy wielomiany dowolnego stopnia $N = 1, 2, 3, 4\ldots$, jednak w praktyce używamy tylko wielomianów niskiego stopnia.
Przykładowo dla $N = 2$ używamy funkcji kwadratowej, dlatego wzór który będziemy wykorzystywać nazywamy wzorem parabol lub Simpsona. Przedstawia on się następująco, jeśli n jest parzyste:

$$S_i(f) = \frac{h}{3}(f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})), \text{ dla } i = 0, 1, 2, \ldots, n/2 - 1,$$

gdzie:

$h = \dfrac{b-a}{n}$ - odległość między węzłami.

Sumując wszystkie wartości S_i otrzymujemy przybliżoną wartość całki oznaczonej:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n/2-1} S_i(f).$$

Interpolacji możemy także dokonać za pomocą wielomianu stopnia czwartego wykorzystując wzór Milne'a:

$$S_i(f) = \frac{4h}{90}(7f(x_{4i}) + 32f(x_{4i+1}) + 12f(x_{4i+2}) + 32f(x_{4i+3}) + 7f(x_{4i+4})),$$
$$\text{dla } i = 0, 1, 2, \ldots, n/4 - 1 \text{ oraz n – wielokrotność 4.}$$

Wartość całki ponownie obliczamy sumując wszystkie S_i.
Wyniki możemy dodatkowo poprawić korzystając z ekstrapolacji Richardsona. Najpierw za pomocą metody Simpsona lub Milne'a obliczamy wartość całki oznaczonej dla różnej liczby węzłów, odpowiednio wyliczając $n = 2^{w+1}$ lub $n = 2^{w+2}$, dla $w = 0, 1, 2, \ldots, w_{max}$. Następnie uzyskane wartości zapisujemy jako $D_{w,0}$. Ekstrapolację obliczamy korzystając ze wzoru:

$$D_{w,k} = \frac{4^k D_{w,k-1} - D_{w-1,k-1}}{4^k - 1},$$

przy czym $k <= w$.

W wyniku powyższej operacji uzyskujemy trójkątną tablicę, której elementy diagonalne stanowią najlepsze teoretyczne przybliżenie za pomocą ekstrapolacji Richardsona.

2. Zadanie do wykonania

2.1. Opis problemu

Zadaniem jest obliczyć wartość całki oznaczonej:

$$\int_0^1 f(x)dx,$$

gdzie $f(x) = ln(x^3 + 3x^2 + x + 0.1)sin(18x)$.

Przyjmujemy wartość $w_{max} = 8$. Do obliczeń wykorzystamy zarówno metodę Simpsona jak i Milne'a.
W obu przypadkach zastosujemy ekstrapolację Richardsona do poprawienia wyników.

2.2. Wyniki

Jako wynik działania programu przedstawiono pierwszą kolumnę tablicy D oraz jej elementy na diagonali, pokazując wyniki uzyskane zarówno metodą Simspona jak i Milne'a.

Wyniki uzyskane metodą Simpsona:

w	$D_{w,0}$	$D_{w,w}$
0	-0.09714104986	-0.09714104986
1	0.4083851989	0.5768939485
2	-0.2209681412	-0.4979290236
3	-0.1880063997	-0.1547412817
4	-0.1865747211	-0.1872519207
5	-0.1864922827	-0.1864826455
6	-0.1864872311	-0.1864869011
7	-0.1864869169	-0.186486896
8	-0.1864868973	-0.186486896

Wyniki uzyskane metodą Milne'a:

w	$D_{w,0}$	$D_{w,w}$
0	0.4420869488	0.4420869488
1	-0.2629250305	-0.4979290236
2	-0.1858089502	-0.1375818946
3	-0.1864792758	-0.1892838357
4	-0.1864867868	-0.1864321619
5	-0.1864868943	-0.1864871836
6	-0.186486896	-0.1864868957
7	-0.186486896	-0.186486896
8	-0.186486896	-0.186486896

Wartość całki podana w zadaniu: **−0.186486896**

3. Wnioski

Jak widać po powyższych wynikach przy pomocy obu metod uzyskaliśmy poprawne wyniki dla pewnych wartości w.

W przypadku samej metody Simpsona nie udało się uzyskać dokładnego wyniku, ale już dla $w = 5$ wynik zgadza się do czterech miejsc po przecinku. Ekstrapolacja początkowo niewiele poprawia nasz wynik.
Dla $w = 4$ wręcz go pogarsza. Jednak dla kolejnych wartości wynik jest już dużo lepszy i dla $w = 7$ otrzymujemy już dokładną wartość. Możemy uznać, że ekstrpolacja była dla nas przydatna, gdyż alternatywą mogłoby być dalsze zwiększanie liczby węzłów, co za każdym razem oznaczałoby dwukrotne zwiększenie liczby iteracji. W porównaniu z tym przeprowadzenie ekstrapolacji Richardsona jest operacją stosunkowo mało kosztowną.

W przypadku metody Milne'a dokładny wynik uzyskujemy już dla $w = 6$. Szybsze uzyskanie zbieżności nie powinno być zaskakujące, gdyż korzystamy z większej liczby węzłów obliczając każde S_i.
Co ciekawe ekstrapolacja pogarszała nasze wyniki i dała nam poprawny wynik później niż sama metoda Milne'a.

Moim zdaniem, w naszym przypadku lepiej sprawdziła się druga metoda. Poprawne wyniki uzyskaliśmy już dla $2^8 = 256$ węzłow, nawet bez korzystania z ekstrapolacji. W pierwszej metodzie natomiast, dla $2^9 = 512$ wynik dalej nie był poprawny bez korzystania z ekstrapolacji Richardsona.