逆問題による意思決定: 確率的行動とその予測

01701466　福岡大学 経済学部　米田 清　YONEDA Kiyoshi　yoneda@fukuoka-u.ac.jp

1. はじめに

意思決定は解のない方程式 $\mathrm{f}(x) = y^\star$ を解こうとすることとみなせる。ここに

$$x := \text{決定変数} \quad y^\star := \text{望む帰結}$$

$$x \overset{\mathrm{f}}{\mapsto} y : \text{既知の因果関係}$$

これは逆問題で、その典型である最尤推定では

$$\hat{x} := \arg\max_x \mathrm{P}(y) \qquad \mathrm{P}(y) := \prod_i \mathrm{p}_i(y_i) \tag{1}$$

として近似解 $\hat{x}$ を求める。p_i に添字 i を付けたのは y_i 毎に異なる構造を許すためである。

これを意思決定に使いやすく改造する。

- (1) の各 p_i を数式よりやさしい**数表として記述する**。
- 最適化を広く普及しており頑健な**最小２乗法に帰着**する。
- P を確率密度でなく決定の**実行確率**として解釈し、わかりやすい意味を与える。

例

仕事からの帰宅前、ピーナツをつまみにビールを飲みたい。出費はある程度は良いけれど安い方が嬉しい。太るのは当然ながら、そこそこにしたい。飲食の量はどれだけが最適か？ そもそもこれは実行すべきか？

2. 入力

変数 x, y は

$$y_1 := x_1 := \text{ビールの量 [ml]}$$

$$y_2 := x_2 := \text{ピーナツの量 [g]}$$

$$y_3 := x_1/x_2 = \text{ビール対ピーナツ比 [ml/g]}$$

$$y_4 := \text{出費 [円]}$$

$$y_5 := \text{熱量 [kcal]}$$

因果関係は

$$x \overset{\mathrm{f}}{\mapsto} y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1/x_2 \\ 200 + 10\,x_1 + 20\,x_2 \\ 0.40\,x_1 + 5.92\,x_2 \end{bmatrix} \tag{2}$$

で、決定 x は結果 y の一部とみなす。

数表 $\{(y_i, p_i)\}$ は、最小確率を $\epsilon := 0.01$ として

ビール		ピーナツ		比		出費		熱量	
ml	p	g	p	ml/g	p	円	p	kcal	p
200	ϵ	3	ϵ	7	ϵ	0	ϵ	0	ϵ
300	.9	15	1	23	1	200	1	50	.9
350	1	50	ϵ	40	ϵ	800	.8	100	1
450	.8					900	.3	200	.5
500	.6					950	ϵ	250	.15
900	ϵ							300	ϵ

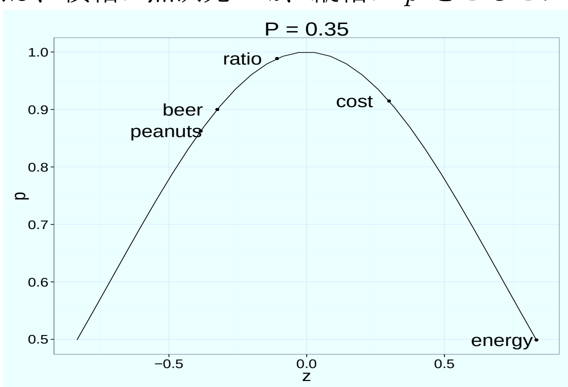
p_i は以下のように与える。i 以外の全ての項目 $j \neq i$ について $p_j = 1$ とする。そのとき項目 i の水準が y_i なら意思決定者は確率 p_i で決定を実行に移す。つまり $P = \prod_i p_i$ は帰結 $y = [\cdots y_i \cdots]$ をもたらす決定 x の実行確率である。ここでは決定と、その実行としての行動とは別物である。

3. 出力

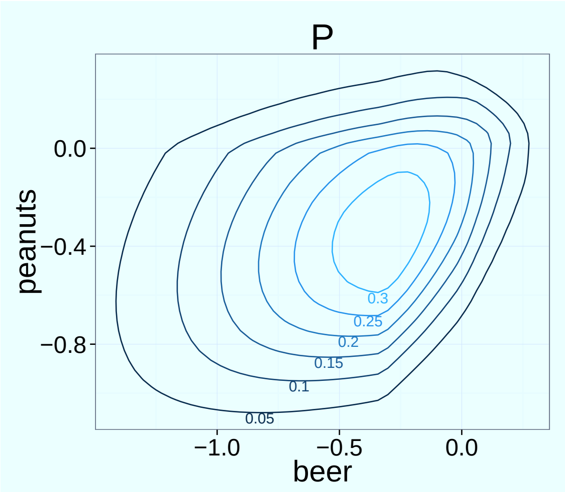
後述する計算の結果、最適な決定の結果として予想される帰結は

$$\hat{y} = [300\ \mathrm{ml}\ \ 13\ \mathrm{g}\ \ 23\ \mathrm{ml/g}\ \ 579\ \text{円}\ \ 200\ \mathrm{kcal}]$$

となる。この最適決定の実行確率は 0.35 でその内訳は、横軸に無次元の z、縦軸に p をとると:



横軸にビール、縦軸にピーナツの量を x でなく z の値でとると P の無差別曲線は:



4.　計算法

最小 2 乗法に帰着する [1]。x を正規化した変数 z を用いて

$$\ell_i(y_i) := -\log \mathrm{p}_i(y_i) =: z_i^2$$

とし、部分目的関数を 2 乗損失に変換する。節点間の区間 $[y_{i,k}, y_{i,k+1}]$ では y_i と z_i を

$$y_i := a_{i,k} + b_{i,k}\, z_i \qquad (3)$$

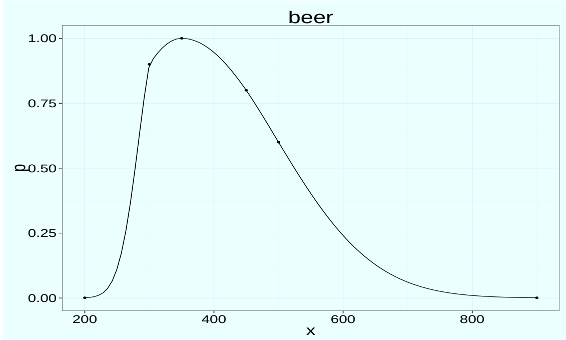
で対応させる。第 k 区間の左端と右端で $\ell_i(y_i) = z_i^2$ なので $a_{i,k}, b_{i,k}$ は一意に決まる。すると

$$(1) \Leftrightarrow \hat{x} := \arg\min_x \sum_i \ell_i(y_i)$$
$$\Leftrightarrow \hat{z} := \arg\min_z \sum_i z_i^2$$

により問題は非線形最小 2 乗法に帰着する。

因果関係 f は z でなく x を独立変数として与えているため z の更新には $z \mapsto x \overset{\mathrm{f}}{\mapsto} y \mapsto z$ なる操作が必要で、(3) を使う。

双射 (3) は数表 $\{(y_i, p_i)\}$ を最小 2 乗法の都合にあわせて補間している。その微分は節点で不連続である。たとえばビールの場合:

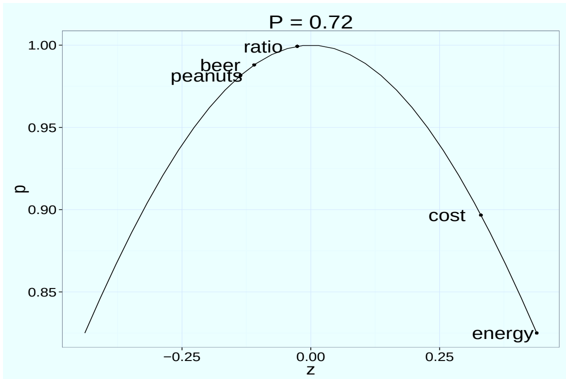


5.　実行確率

通常の意思決定は期待効用の最大化で行われるのに対し、ここでは実行確率を最大化している。これは報酬すなわち帰結の効用を決定の実行確率で評価することにあたる。以下の特徴がある。

- 行動が確率的に選ばれ、心理学の**対応法則** [2] に適合する。
- 帰結の生起確率と効用を別個に記述しないので決定に必要な情報が少ない。
- 不実行は現状維持を選択することなので、行動の確率予測ができる。

たとえば例題の計算結果では太ることに不満が大きいのでビールを熱量が半分 0.2 kcal/ml のものに替えてみる。するとビールの適量は 1 割増えるだけながら、ビールを飲むという行動を実行にうつす確率は 0.35 から 0.72 に上がる。



これは先の図とは縮尺が異なる。

参考文献

[1] K. Yoneda, A. Moretti, J. Poker Jr.; Stretching the Least Squares to Embed Loss Function Tables. Decision Making in Manufacturing and Services に掲載予定

[2] R. Herrnstein, et al.; The Matching Law; Harvard (1997).