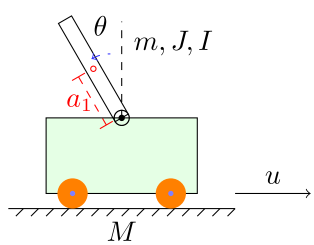
系统建模问题背景

问题 4

试用 Simulink 搭建如下倒立摆的 PID 和 LQR 控制器，假设倒立摆的状态空间模型为：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$
$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}$$

状态矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 41.63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6099 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,$B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.7584 \\ 0 \\ 0.6898 \end{bmatrix}$,$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$,$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$，状态向量 $x(t) = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$，控制输入 $u(t)$，输出 $y(t)$。



其中，M 为摆杆的质量，m 为小球的质量，J 为摆杆的转动惯量，I 为小球的质量矩 (这里两种模型的 J, I 可以看为一种东西)，u 为输入力，θ 为摆杆与水平线的夹角，l 为摆杆重心与水平线的距离。这里给出假设：$M = 1.42, m = 0.12, b = 0.1, l = 0.188, J = I = 0.0014$，均为国际单位制 (kg,m,s)。

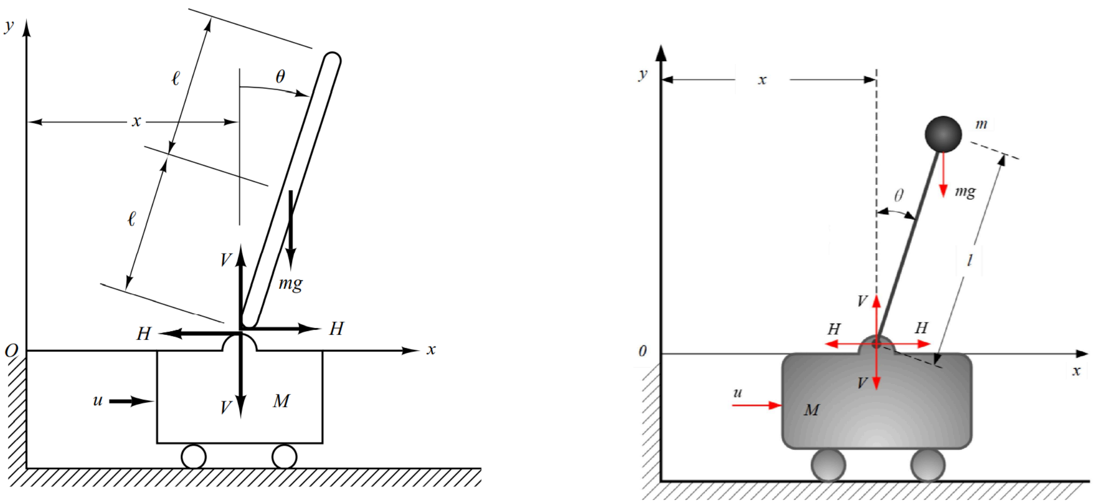
数学推导与模型构建

如下图所示，我们拥有两种倒立摆系统的模型假设：

- 在杆模型中，我们假设杆的质量是均匀分布的，并且不考虑系统的摩擦。

- 在球模型中，我们胡烈摆杆质量和地面摩擦，并且假设杆的质量集中在杆的末端。

这种假设影响的是重心位置，但是我们可以通过巧妙地让重心到连接点的长度为 l 来寻找统一的表达式。



(a) 倒立摆杆质量模型　　(b) 倒立摆球质量模型

图 1: 两种倒立摆模型

倒立摆杆质量模型

严格来说：假设 u 为外部作用力，M 为小车质量，m 为摆杆质量，摆杆长度为 $2l$ 且摆杆质量均匀分布。设 x 为小车位置，θ 为摆杆与竖直方向的夹角。系统不考虑空气阻力的影响。那么我们根据牛顿第二定律，考虑摆杆重心的水平运动和垂直运动，然后在考虑小车的水平运动和摆杆的转动 (绕重心的转动运动)。

$$\begin{cases} m\frac{d^2}{dt^2}(x + l\sin(\theta)) = H \\ m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos(\theta)) = -mg + V \\ M\frac{d^2}{dt^2}(x) = u - H \\ I\frac{d^2}{dt^2}(\theta) = Vl\sin(\theta) - Hl\cos(\theta) \end{cases}$$

联立化简即可，我们为了方便后续设计，假设倒立摆角度很小，近似认为 $\sin\theta = \theta, \cos\theta = 1$；以及倒立摆绕重心的转动惯量很小，近似认为 $I = 0$。那么可以得到：

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \end{cases}$$

定义状态变量 X:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\theta\\\dot{\theta}\\x\\\dot{x}\end{bmatrix}$$

那么可以得到状态方程:

$$\dot{X}=\begin{bmatrix}\dot{\theta}\\\dot{\dot{\theta}}\\\dot{x}\\\dot{\dot{x}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\\frac{(M+m)g}{Ml}x_1-\frac{1}{Ml}u\\x_4\\-\frac{mg}{M}x_1+\frac{1}{M}u\end{bmatrix}$$

可以写出以为倒立摆系统的状态空间方程表达式:

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\\dot{x_2}\\\dot{x_3}\\\dot{x_4}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0&0\\\frac{(M+m)g}{Ml}&0&0&0\\0&0&0&1\\-\frac{mg}{M}&0&0&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\-\frac{1}{Ml}\\0\\\frac{1}{M}\end{bmatrix}\cdot u$$

$$y=CX+D\hat{u}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\cdot\hat{u}=\begin{bmatrix}\theta\\x\end{bmatrix}$$

倒立摆球质量模型

严格来说：假设 u 为外部作用力，M 为小车质量，m 为摆杆末端球质量，摆杆长度为 l 且摆杆质量集中在杆的末端。设 x 为小车位置，θ 为摆杆与竖直方向的夹角。系统不考虑空气阻力的影响。

同上述过程，我们考虑倒立摆摆杆重心的水平-垂直运动与小车水平运动和摆杆转动:

$$\begin{cases}m\frac{d^2}{dt^2}(x+l\sin(\theta))=H\\m\frac{d^2}{dt^2}(l\cos(\theta))=-mg+V\\M\frac{d^2}{dt^2}(x)=u-H\\I\frac{d^2}{dt^2}(\theta)=Vl\sin(\theta)-Hl\cos(\theta)\end{cases}$$

整理一下:

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta=u\\ml\ddot{x}\cos\theta+(I+ml^2)\ddot{\theta}-mgl\sin\theta=0\end{cases}$$

那么我们同样假设在系统平衡点附近，摆杆的角度、角速度可以忽略不计，即 $\cos\theta = 1, \sin\theta = \theta; \dot{\theta} = 0$，$\sin\theta\dot{\theta} = 0$，则:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \\ ml\ddot{x} + (I+ml^2)\ddot{\theta} = mgl\theta \end{cases}$$

定义状态变量 X:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

那么同理我们可以得到系统状态空间方程:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = CX + D\hat{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{u} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}$$

更一般的形式

我们这里还要考虑近来阻尼系数 b, 那么我们现在的方程就变成了:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} = u \\ ml\ddot{x} + (I+ml^2)\ddot{\theta} = mgl\theta \end{cases}$$

那么在添加了阻尼系数之后，我们更一般的表达式应该是:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_3} \\ \dot{x_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mgl(M+m)}{p} & -\frac{(I+ml^2)b}{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m^2gl^2}{p} & -\frac{mlb}{p} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ml}{p} \\ 0 \\ \frac{I+ml^2}{p} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = CX + D\hat{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{u} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}$$

其中,$p=I(M+m)+Mml^2$，当然还有 $q=(M+m)(I+ml^2)-(ml)^2$，在后面 pid 调节的时候可以使用。

控制环节

LQR 控制

已知系统状态空间模型:

$$\dot{X}=AX+Bu$$

其中 X 为状态向量，u 为控制输入，A 为状态矩阵，B 为输入矩阵。

LQR 控制考虑最佳控制向量的矩阵 K:

$$u=-KX$$

其中 K 为增益矩阵，X 为状态向量。

那么 LQR 控制的目标转换为确定下列最小化二次型函数:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^T(X^TQX+u^TRu)dt$$

此时不妨选择 $Q=I,R=I$，使用 matlab 代码求解得到增益矩阵 K:

```
A = [0, 1, 0, 0;
   41.63, 0, 0, 0;
   0, 0, 0, 1;
   -0.6099, 0, 0, 0];
B = [0;
   -2.7584;
   0;
   0.6898];
Q=eye(4);
R=eye(1);
[K, S, E] = lqr(A, B, Q, R);
```

PID 控制

进行 laplace 变换, 同时假设 $\theta,\dot{\theta}$ 很小, 根据上述推导不难有如下式子:

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{x}+ml\ddot{\theta}\cos\theta-ml\dot{\theta}^2\sin\theta+b\dot{x}=u\\ ml\ddot{x}\cos\theta+(I+ml^2)\ddot{\theta}-mgl\sin\theta=0\end{cases}$$

有初始状态为 0，而且 $\sin\theta=\theta, \cos\theta=1, \dot{\theta}=0$:

$$(I+ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) = mlX(s)s^2 - ml\Phi(s)s^2 + bX(s)s = U(s)$$

那么可以给出两种传递函数:

$$P_{\text{pend}}(s) = \frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{mls}{((M+m)(I+ml^2)-(ml)^2)s^3 + b(I+ml^2)s^2 - (M+m)mgls - bmgl}$$

$$P_{\text{cart}}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{(I+ml^2)s^2 - mgl}{((M+m)(I+ml^2)-(ml^2))s^4 + b(I+ml^2)s^3 - (M+m)mgls^2 - bmgls}$$

这样关于角度和关于小车位移的传递函数就有了，可以进行 pid 控制仿真了。

Matlab 代码与 Simulink 仿真测试

根据上述操作，我们已经大概知道了怎么计算，现在我们进行 matlab 仿真测试。

```
% 倒立摆系统参数
M = 1.42;    % 小车质量
m = 0.12;    % 摆球质量
l = 0.188;  % 摆杆长度
I = 0.0014;   % 摆球转动惯量
g = 9.8;     % 重力加速度9.8m/s^2
q = (M+m)*(I+m*l^2)-(m*l)^2;
p = I*(M+m)+(M*m*l^2);
% 倒立摆系统状态空间矩阵定义
A = [0              1 0 0
   (M+m)*m*g*l/(I*(M+m)+(M*m*l^2)) 0 0 0
   0              0 0 1
   -m^2*g*l^2 /(I*(M+m)+(M*m*l^2))    0 0 0];
B = [0 -m*l/(I*(M+m)+(M*m*l^2)) 0 (I+m*l^2)/(I*(M+m)+(M*m*l^2))]';
C = [1 0 0 0
   0 0 1 0];
D = 0;
% 倒立摆系统状态空间模型
G = ss(A, B, C, D)
```

我们有输出如下，可以看出，尽管我们定义了阻尼系数 b，但是这道题这样给出来的状态矩阵就是没有计算阻尼系数的形式:

```
G =
  A =
            x1       x2       x3       x4
   x1        0        1        0        0
   x2    41.63        0        0        0
   x3        0        0        0        1
   x4  -0.6099        0        0        0
  B =
           u1
   x1       0
   x2  -2.758
   x3       0
   x4  0.6898
  C =
      x1  x2  x3  x4
   y1   1   0   0   0
   y2   0   0   1   0
  D =
       u1
   y1   0
   y2   0
```

连续时间状态空间模型。