

## 系统建模问题背景

### 问题 4

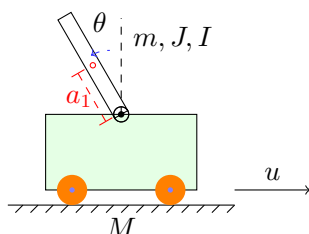
试用 Simulink 搭建如下倒立摆的 PID 和 LQR 控制器，假设倒立摆的状态空间模型为：

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}$$

$$\text{状态矩阵 } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 41.63 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0.6099 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.7584 \\ 0 \\ 0.6898 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ 状态}$$

$$\text{向量 } x(t) = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}, \text{ 控制输入 } u(t), \text{ 输出 } y(t)。$$



其中， $M$  为摆杆的质量， $m$  为小球的质量， $J$  为摆杆的转动惯量， $I$  为小球的质量矩（这里两种模型的  $J, I$  可以看为一种东西）， $u$  为输入力， $\theta$  为摆杆与水平线的夹角， $l$  为摆杆重心与水平线的距离。这里给出假设： $M = 1.42, m = 0.12, b = 0.1, l = 0.188, J = I = 0.0014$ ，均为国际单位制 (kg,m,s)。

## 数学推导与模型构建

如下图所示，我们拥有两种倒立摆系统的模型假设：

- 在杆模型中，我们假设杆的质量是均匀分布的，并且不考虑系统的摩擦。

- 在球模型中，我们忽略摆杆质量和地面摩擦，并且假设杆的质量集中在杆的末端。

这种假设影响的是重心位置，但是我们可以通过巧妙地让重心到连接点的长度为  $l$  来寻找统一的表达式。

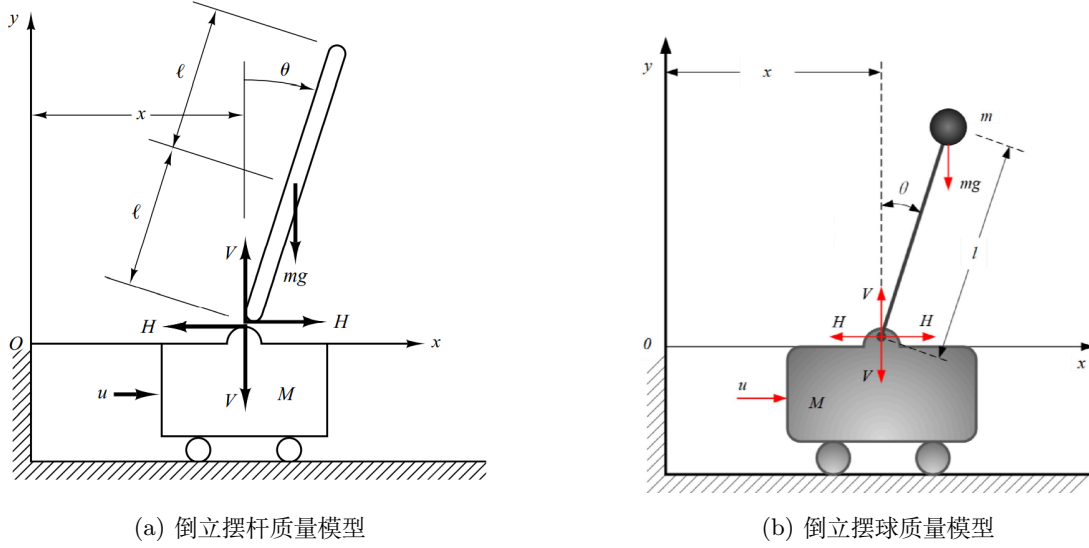


图 1: 两种倒立摆模型

### 倒立摆杆质量模型

严格来说：假设  $u$  为外部作用力， $M$  为小车质量， $m$  为摆杆质量，摆杆长度为  $2l$  且摆杆质量均匀分布。设  $x$  为小车位置， $\theta$  为摆杆与竖直方向的夹角。系统不考虑空气阻力的影响。那么我们根据牛顿第二定律，考虑摆杆重心的水平运动和垂直运动，然后在考虑小车的水平运动和摆杆的转动（绕重心的转动运动）。

$$\begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin(\theta)) = H \\ m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos(\theta)) = -mg + V \\ M \frac{d^2}{dt^2}(x) = u - H \\ I \frac{d^2}{dt^2}(\theta) = Vl \sin(\theta) - Hl \cos(\theta) \end{cases}$$

联立化简即可，我们为了方便后续设计，假设倒立摆角度很小，近似认为  $\sin \theta = \theta, \cos \theta = 1$ ；以及倒立摆绕重心的转动惯量很小，近似认为  $I = 0$ 。那么可以得到：

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + m\ddot{\theta} = u \\ ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x} = mgl\theta \end{cases}$$

定义状态变量  $X$ :

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

那么可以得到状态方程:

$$\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \\ \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ \frac{(M+m)g}{Ml}x_1 - \frac{1}{Ml}u \\ x_4 \\ -\frac{mg}{M}x_1 + \frac{1}{M}u \end{bmatrix}$$

可以写出以为倒立摆系统的状态空间方程表达式:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{(M+m)g}{Ml} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{mg}{M} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Ml} \\ 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = CX + D\hat{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{u} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}$$

## 倒立摆球质量模型

严格来说: 假设  $u$  为外部作用力,  $M$  为小车质量,  $m$  为摆杆末端球质量, 摆杆长度为  $l$  且摆杆质量集中在杆的末端。设  $x$  为小车位置,  $\theta$  为摆杆与竖直方向的夹角。系统不考虑空气阻力的影响。

同上述过程, 我们考虑倒立摆摆杆重心的水平-垂直运动与小车水平运动和摆杆转动:

$$\begin{cases} m \frac{d^2}{dt^2}(x + l \sin(\theta)) = H \\ m \frac{d^2}{dt^2}(l \cos(\theta)) = -mg + V \\ M \frac{d^2}{dt^2}(x) = u - H \\ I \frac{d^2}{dt^2}(\theta) = Vl \sin(\theta) - Hl \cos(\theta) \end{cases}$$

整理一下:

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = u \\ ml\ddot{x} \cos \theta + (I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \end{cases}$$

那么我们同样假设在系统平衡点附近，摆杆的角度、角速度可以忽略不计，即  $\cos \theta = 1, \sin \theta = \theta; \dot{\theta} = 0, \sin \theta \dot{\theta} = 0$ ，则：

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} = u \\ ml\ddot{x} + (I+ml^2)\ddot{\theta} = mgl\theta \end{cases}$$

定义状态变量  $X$ ：

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \\ x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

那么同理我们可以得到系统状态空间方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mgl(M+m)}{I(M+m)+Mml^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m^2gl^2}{I(M+m)+Mml^2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ml}{I(M+m)+Mml^2} \\ 0 \\ \frac{I+ml^2}{I(M+m)+Mml^2} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = CX + D\hat{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{u} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}$$

## 更一般的形式

我们这里还要考虑近来阻尼系数  $b$ ，那么我们现在的方程就变成了：

$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} = u \\ ml\ddot{x} + (I+ml^2)\ddot{\theta} = mgl\theta \end{cases}$$

那么在添加了阻尼系数之后，我们更一般的表达式应该是：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{mgl(M+m)}{p} & -\frac{(I+ml^2)b}{p} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{m^2gl^2}{p} & -\frac{mlb}{p} & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{ml}{p} \\ 0 \\ \frac{I+ml^2}{p} \end{bmatrix} \cdot u$$

$$y = CX + D\hat{u} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \hat{u} = \begin{bmatrix} \theta \\ x \end{bmatrix}$$

其中,  $p = I(M + m) + Mml^2$ , 当然还有  $q = (M + m)(I + ml^2) - (ml)^2$ , 在后面 pid 调节的时候可以使用。

## 控制环节

### LQR 控制

已知系统状态空间模型:

$$\dot{X} = AX + Bu$$

其中  $X$  为状态向量,  $u$  为控制输入,  $A$  为状态矩阵,  $B$  为输入矩阵。

LQR 控制考虑最佳控制向量的矩阵  $K$ :

$$u = -KX$$

其中  $K$  为增益矩阵,  $X$  为状态向量。

那么 LQR 控制的目标转换为确定下列最小化二次型函数:

$$J = \frac{1}{2} \int_0^T (X^T Q X + u^T R u) dt$$

此时不妨选择  $Q = I, R = I$ , 使用 matlab 代码求解得到增益矩阵  $K$ :

---

```
A = [0, 1, 0, 0;
      41.63, 0, 0, 0;
      0, 0, 0, 1;
      -0.6099, 0, 0, 0];
B = [0;
      -2.7584;
      0;
      0.6898];
Q=eye(4);
R=eye(1);
[K, S, E] = lqr(A, B, Q, R);
```

---

### PID 控制

进行 laplace 变换, 同时假设  $\theta, \dot{\theta}$  很小, 根据上述推导不难有如下式子:

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta + b\dot{x} = u \\ ml\ddot{x} \cos \theta + (I + ml^2)\ddot{\theta} - mgl \sin \theta = 0 \end{cases}$$

有初始状态为 0, 而且  $\sin \theta = \theta, \cos \theta = 1, \dot{\theta} = 0$ :

$$(I + ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) = mlX(s)s^2 - ml\Phi(s)s^2 + bX(s)s = U(s)$$

那么可以给出两种传递函数:

$$P_{\text{pend}}(s) = \frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{mls}{((M + m)(I + ml^2) - (ml)^2)s^3 + b(I + ml^2)s^2 - (M + m)mgl s - bmgl}$$

$$P_{\text{cart}}(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{(I + ml^2)s^2 - mgl}{((M + m)(I + ml^2) - (ml)^2)s^4 + b(I + ml^2)s^3 - (M + m)mgl s^2 - bmgl s}$$

这样关于角度和关于小车位移的传递函数就有了, 可以进行 pid 控制仿真了。