第二章　整数规划

一、　整数规划模型介绍

规划中的变量（部分或全部）限制为整数时，称为整数规划。若在线性规划模型中，变量限制为整数，则称为整数线性规划。对于整数线性规划模型大致可分为三类：

（1）变量全限制为整数时，称纯（完全）整数线性规划。

（2）变量部分限制为整数的，称混合整数线性规划。

（3）变量只能取 0 或 1 时，称之为 0-1 线性规划。

整数线性规划特点

（i）原线性规划有最优解，当自变量限制为整数后，其整数规划解会出现下述情况：

（1）原线性规划最优解全是整数，则整数线性规划最优解与线性规划最优解一致。

（2）整数线性规划无可行解。

（3）有可行解（当然就存在最优解），但最优解值一定不会优于原线性规划的最优值。

（ii）整数规划最优解不能按照实数最优解简单取整而获得。

二、整数规划的求解法之一（分枝定界法）

2.1 分枝定界法的思想

对有约束条件的最优化问题（其可行解为有限数）的可行解空间恰当地进行系统搜索，这就是分枝与定界内容。通常，把全部可行解空间反复地分割为越来越小的子集，称为分枝；并且对每个子集内的解集计算一个目标上(下)界（对于最大(小)值问题），这称为定界。在每次分枝后，凡是界限不优于已知可行解集目标值的那些子集不再进一步分枝，这样，许多子集可不予考虑，这称剪枝。这就是分枝定界法的主要思路。现用下例来说明：

例 1　求解下述整数规划

$$\text{Max}\quad z = 40x_1 + 90x_2$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} 9x_1 + 7x_2 \le 56 \\ 7x_1 + 20x_2 \ge 70 \\ x_1, x_2 \ge 0 \quad \text{且为整数} \end{cases} \tag{2.1}$$

解　（i）先不考虑整数限制，即作为一般线性规划问题求解，得最优解为：

$$x_1 = 4.8092, x_2 = 1.8168, z = 355.8779$$

可见它不符合整数条件。这时 z 是原问题 A 的最优目标函数值 z^* 的上界，记作 $\bar{z}$。而 $x_1=0, x_2=0$ 显然是原问题 A 的一个整数可行解，这时 $z=0$，是 z^* 的一个下界，记作 $\underline{z}$，即 $0 \le z^* \le 356$。

（ii）因为 x_1, x_2 当前均为非整数，故不满足整数要求，任选一个进行分枝。设选 x_1 进行分枝：$x_1 \le [4.8092]=4$，$x_1 \ge [4.8092]+1=5$，将原问题 A 分成两个子问题 B1 和 B2。

问题 B_1： Max $z=40x_1+90x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 9x_1+7x_2 \le 56 \\ 7x_1+20x_2 \ge 70 \\ 0 \le x_1 \le 4, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

最优解为：$x_1=4.0, x_2=2.1, z_1=349$。

问题 B_2： Max $z=40x_1+90x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 9x_1+7x_2 \le 56 \\ 7x_1+20x_2 \ge 70 \\ x_1 \ge 5, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

最优解为：$x_1=5.0, x_2=1.57, z_1=341.4$。

再定界：$0 \le z^* \le 349$。

（iii）对问题 B_1 对 x_2 再进行分枝：$x_2 \le 2$，$x_2 \ge 3$，得问题 B_{11} 和 B_{12}，它们的最优解为

B_{11}： $x_1=4, x_2=2, z_{11}=340$

B_{12}： $x_1=1.43, \mathrm{x}_2=3.00, z_{12}=327.14$

再定界：$340 \le z^* \le 341$，并将 B_{12} 剪枝。

（iv）对问题 B_2 对 x_2 再进行分枝：$x_2 \le 1$，$x_2 \ge 2$，得问题 B_{21} 和 B_{22}，它们的最优解为

B_{21}： $x_1=5.44, \mathrm{x}_2=1.00, z_{22}=308$

B_{22} 无可行解。

将 B_{21}, B_{22} 剪枝。

于是可以断定原问题的最优解为：

$$x_1 = 4, x_2 = 2, z^* = 340$$

从以上解题过程可得用分枝定界法求解整数规划（最大化）问题的步骤为：

开始，将要求解的整数规划问题称为问题 A，将与它相应的线性规划问题称为问题 B。

（i）解问题 B 可能得到以下情况之一：

（a） B 没有可行解，这时 A 也没有可行解，则停止.

（b） B 有最优解，并符合问题 A 的整数条件， B 的最优解即为 A 的最优解，则停止。

（c） B 有最优解，但不符合问题 A 的整数条件，记它的目标函数值为 $\bar{z}$。

（ii）用观察法找问题 A 的一个整数可行解，一般可取 $x_j = 0, j = 1, \cdots, n$，求得其目标函数值，并记作 $\underline{z}$。以 z^* 表示问题 A 的最优目标函数值；这时有

$$\underline{z} \le z^* \le \bar{z}$$

进行迭代。

第一步：分枝，在 B 的最优解中任选一个不符合整数条件的变量 x_j，其值为 b_j，以 $[b_j]$ 表示小于 b_j 的最大整数。构造两个约束条件

$$x_j \le [b_j] \quad 和 \quad x_j \ge [b_j] + 1$$

将这两个约束条件，分别加入问题 B，求两个后继规划问题 B_1 和 B_2。不考虑整数条件求解这两个后继问题。

定界，以每个后继问题为一分枝标明求解的结果，与其它问题的解的结果中，找出最优目标函数值最大者作为新的上界 $\bar{z}$。从已符合整数条件的各分支中，找出目标函数值为最大者作为新的下界 $\underline{z}$，若无作用 $\underline{z} = 0$。

第二步：比较与剪枝，各分枝的最优目标函数中若有小于 $\underline{z}$ 者，则剪掉这枝，即以后不再考虑了。若大于 $\underline{z}$，且不符合整数条件，则重复第一步骤。一直到最后得到 $z^* = \underline{z}$ 为止。得最优整数解 $x_j^*, j = 1, \cdots, n$。

2.2 整数规划的计算机解法

例 2 求解下列整数规划问题：

$$\min \quad z = x_1 + x_2 - 4x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 \le 9 \\ x_1 + x_2 - x_3 \le 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \tag{2.2}$$

在 LINGO 模型窗口中输入下列模型：

```
MIN=X1+X2-4*X3;
X1+X2+2*X3<=9;
X1+X2-X3<=2;
-X1+X2+X3<=4;
@GIN(X1); @GIN(X2); @GIN(X3);
```

选菜单 Lingo|Solve（或按 Ctrl-S），或用鼠标点击“solve”按钮，可得结果如下：

```
Global optimal solution found.
Objective value:                        -16.00000
Extended solver steps:                          0
Total solver iterations:                        0

                  Variable           Value        Reduced Cost
                        X1        0.000000            1.000000
                        X2        0.000000            1.000000
                        X3        4.000000           -4.000000

                       Row    Slack or Surplus      Dual Price
                         1       -16.00000           -1.000000
                         2        1.000000            0.000000
                         3        6.000000            0.000000
                         4        0.000000            0.000000
```

三、0-1 型整数规划

3.1 0-1 整数规划实际问题举例：

$0-1$ 型整数规划是整数规划中的特殊情形，它的变量 x_j 仅取值 0 或 1。我们先介绍几

个 0-1 整数规划实际问题，再研究其解法。

3.1.1 投资场所的选定

某公司拟在市东、西、南三区建立门市部。拟议中有 7 个位置（点）$A_i(i=1,2,\cdots,7)$ 可供选择。规定

在东区：由 A_1, A_2, A_3 三个点中至多选两个；

在西区：由 A_4, A_5 两个点中至少选一个；

在南区：由 A_6, A_7 两个点中至少选一个。

如选用 A_i 点，设备投资估计为 b_i 元，每年可获利润估计为 c_i 元，但投资总额不能超过 B 元。问应选择哪几个点可使年利润为最大？

解题时先引入 $0-1$ 变量 $x_i(i=1,2,\cdots,7)$

令

$$x_i=\begin{cases}1, & \text{当}A_i\text{点被选中，}\\ 0, & \text{当}A_i\text{点没被选中.}\end{cases} \quad i=1,2,\cdots,7\,.$$

于是问题可列写成：

$$\text{Max} \quad z=\sum_{i=1}^{7} c_i x_i$$

$$\text{s.t.} \begin{cases}\sum_{i=1}^{7} b_i x_i \le B \\ x_1+x_2+x_3 \le 2 \\ x_4+x_5 \ge 1 \\ x_6+x_7 \ge 1, \qquad x_i=0\text{或}1\end{cases} \tag{2.3}$$

3.1.2 背包问题

某人打算外出旅游并登山，需要带 n 件物品，重量分别为 a_i，受到个人体力所限，行李的总重量不能超过 b，若超过，则需要裁减。该旅行者为了决策带哪些物品，对这些物品的重要性进行了量化，用 c_i 表示，试建立该问题的数学模型。这个问题称为背包问题。

解题时先引入 $0-1$ 变量 $x_i\left(i=1,2,\cdots,n\right)$， $x_i=1$ 表示物品 i 放入背包中，否则不放，

于是背包问题可列写成：

$$\text{Max} \quad z=\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \le b \\ x_i = 0 \quad 1, i = 1,2 \cdots, n \end{cases} \tag{2.4}$$

3.1.3 指派问题

拟分配 n 人去干 n 项工作，每人干且仅干一项工作，若分配第 i 人去干第 j 项工作，需花费 c_{ij} 单位时间，问应如何分配工作才能使工人花费的总时间最少？

容易看出，要给出一个指派问题的实例，只需给出矩阵 $C=(c_{ij})$， C 被称为指派问题的系数矩阵。

解题时先引入变量 x_{ij}，若分配 i 干 j 工作，则取 $x_{ij}=1$，否则取 $x_{ij}=0$。上述指派问题的数学模型为

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1,2,\cdots,n \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, j = 1,2,\cdots,n \\ x_{ij} = 0 \text{ 或 } 1, \text{i, j} = 1,2, \cdots, \text{n} \end{cases} \tag{2.5}$$

(2.5)的变量只能取 0 或 1，从而是一个 0-1 规划问题。由于其约束方程组的系数矩阵十分特殊（被称为全单位模矩阵，其各阶非零子式均为 ± 1），其非负可行解的分量只能取 0 或 1，故约束 $x_{ij}=0或1$ 可改写为 $x_{ij} \ge 0$ 而不改变其解。此时，指派问题被转化为一个特殊的运输问题，其中 $m=n$， $a_i=b_j=1$。由于指派问题的特殊性，匈牙利数学家 Kuhn 于 1955 年提出了一种更为简便的算法—匈牙利算法。

四、0-1 型整数规划解法之一（过滤隐枚举法）

4.1 过滤隐枚举法介绍

解 $0-1$ 型整数规划最容易想到的方法，和一般整数规划的情形一样，就是穷举法，即检查变量取值为 0 或 1 的每一种组合，比较目标函数值以求得最优解，这就需要检查变量取值的 2^n 个组合。对于变量个数 n 较大（例如 $n>10$），这几乎是不可能的。因此常设计一些方法，只检查变量取值的组合的一部分，就能求到问题的最优解。这样的方法称为隐枚举法（Implicit Enumeration），分枝定界法也是一种隐枚举法。当然，对有些问题隐枚举法并不适用，所以有时穷举法还是必要的。

下面举例说明一种解 $0-1$ 型整数规划的隐枚举法。

例 3

$$\text{Max} \quad z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 4x_2 + x_3 \le 6 \\ x_1, x_2, x_3 = 0\text{或}1 \end{cases} \tag{2.6}$$

求解思路及改进措施：

（i） 先试探性求一个可行解，易看出 $(x_1, x_2, x_3) = (1,0,0)$ 满足约束条件，故为一个可行解，且相应的目标函数值为 $z = 3$。

（ii） 因为是求极大值问题，故求最优解时，凡是目标值 $z < 3$ 的解不必检验是否满足约束条件即可删除，因它肯定不是最优解，于是应增加一个约束条件（目标值下界）：$3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \ge 3$，称该条件为过滤条件。从而原问题等价于：

$$\text{Max} \quad z = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 \ge 3 & (a) \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \le 2 & (b) \\ x_1 + 4x_2 + x_3 \le 4 & (c) \\ x_1 + x_2 \le 3 & (d) \\ 4x_2 + x_3 \le 6 & (e) \\ x_1, x_2, x_3 = 0\text{或}1 & (f) \end{cases} \tag{2.7}$$

若用全部枚举法，3 个变量共有 8 种可能的组合，我们将这 8 种组合依次检验它是否满足条件(a)—(e)，对某个组合，若它不满足(a)，即不满足过滤条件，则(b)—(e)即可行性条件不必再检验；若它满足(a)—(e)且相应的目标值严格大于 3，则进行（iii）。

（iii） 改进过滤条件。

（iv） 由于对每个组合首先计算目标值以验证过滤条件，故应优先计算目标值较大的组合，这样可提前抬高过滤门槛，以减少计算量。

按上述思路与方法，例 6 的求解过程可由下表来表示：

(x_1, x_2, x_3)	目标值	约束条件	过滤条件
		a b c d e	
(0,0,0)	0	×	
(1,0,0)	3	√ √ √ √ √	$3x_1 - 2x_2 + 5_3 \geq 3$
(0,1,0)	-2	×	
(0,0,1)	5	√ √ √ √ √	$3x_1 - 2x_2 + 5_3 \geq 5$
(1,1,0)	1	×	
(1,0,1)	8	√ √ √ √ √	$3x_1 - 2x_2 + 5_3 \geq 8$
(1,1,1)	6	×	
(0,1,1)	3	×	

从而得最优解 $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1,0,1)$，最优值 $z^* = 8$。

4.2 求解 0-1 规划的 MATLAB 函数

对于 0-1 规划问题，MATLAB 提供命令 bintprog 求解。 MATLAB 中 0-1 规划的标准形式为：

$$\min \quad f'*X$$

$$\text{s.t. } A*X <= b,$$

$$Aeq*X = beq,$$

其中 X 的每个分量为 0 或者 1。

（1）**X = BINTPROG(f)** 求解问题 min f'*X

（2）**X = BINTPROG(f,A,b)** 求解 min f'*X s.t. A*X <= b

（3）**X = BINTPROG(f,A,b,Aeq,beq)** 求解 min f'*X s.t. Aeq*X = beq, A*X <= b

例 4　某公司有 5 个项目被列入投资计划，各项目的投资额和期望的投资收益见下表：

项目	投资额(百万)	投资收益(百万)
1	210	150
2	300	210
3	100	60
4	130	80
5	260	180

该公司只有 600 百万资金可用于投资，由于技术上的原因投资受到以下约束:

1. 在项目 1，2 和 3 中必须有一项被选中；
2. 项目 3 和 4 只能选中一项；
3. 项目 5 被选中的前提是项目 1 必须被选中；

问：如何在上述条件下选择一个最好的投资方案，使投资收益最大？

解：设 0-1 变量

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{选中项目i} \\ 0 & \text{不选项目i} \end{cases}$$

为使投资收益最大，故有目标函数：

$$\max S = 150x_1 + 210x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 180x_5$$

投资不超过公司的 600 百万资金，故有条件：

$$210x_1 + 300x_2 + 100x_3 + 130x_4 + 260x_5 \leq 600$$

在项目 1，2 和 3 中必须有一项被选中，故有条件：

$x_1 + x_2 + x_3 = 1$

项目 3 和 4 只能选中一项，故有条件：

$x_3 + x_4 \le 1$

项目 5 被选中的前提是项目 1 必须被选中，故有条件：

$x_5 \le x_1$

这样，我们就可得到这问题的数学模型如下：

$$
\begin{aligned}
&\max S = 150x_1 + 210x_2 + 60x_3 + 80x_4 + 180x_5 \\
&\quad \text{s.t.}\ \ 210x_1 + 300x_2 + 100x_3 + 130x_4 + 260x_5 \le 600 \\
&\qquad\quad x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\
&\qquad\quad x_3 + x_4 \le 1 \\
&\qquad\quad x_5 \le x_1 \\
&\qquad\quad x_i = 0 \text{或} 1,\ \ i = 1,2\cdots,5
\end{aligned}
\tag{2.8}
$$

用 MATLAB 求解可得：

```
c=-[150,210,60,80,180];  %转换求max为求min
a=[210,300,100,130,260;0,0,1,1,0;-1,0,0,0,1];
b=[600;1;0];
Aeq=[1,1,1,0,0];
beq=1;
[x,fval]=bintprog(c,a,b,Aeq,beq)
x =
     1
     0
     0
     1
     1
fval =
  -410
```

例 5 一架货机，有效载重量为 24（吨），可运输物品的重量及运费收入下表所示：其中各物品只有一件可供选择，问如何选运物品运费总收入最多？

物品	1	2	3	4	5	6
重量（吨）	8	13	6	9	5	7
收入（万元）	3	5	2	4	2	3

解 记 $x_i=\begin{cases}1 & 当选运第i种物品\\ 0 & 其他\end{cases}$

则可建立下述 0-1 规划模型：

$$\max f = 3x_1+5x_2+2x_3+4x_4+2x_5+3x_6$$

$$s.t.\begin{cases}8x_1+13x_2+6x_3+9x_4+5x_5+7x_6\le 24\\ x_i为0或1,\quad i=1,2\cdots 6\end{cases} \tag{2.9}$$

用 MATLAB 求解可得：

```
c=-[3,5,2,4,2,3];  %转换求max为求min
a=[8,13,6,9,5,7];
b=24;
[x,fval]=bintprog(c,a,b)
x =

     1
     0
     0
     1
     0
     1
fval =
   -10
```

习题二

1．某公司的营业时间是上午8 点到21 点，服务人员中途需要1个小时的吃饭和休息时间，每人工作时间为8小时，上午8点到下午17 点工作的人员工资为800元，中午12点到21点工作的人员月工资为900元，为保证营业时间内都有人值班，公司安排了四个班次，其班次与休息时间安排如表1，各时段的需求人数如表2，问应如何安排服务人员使公司所付工资总数最少，建立此问题的数学模型。

表一：

班次	工作时间	休息时间	月工资
1	8：00－17：00	12：00－13：00	800
2	8：00－17：00	13：00－14：00	800
3	12：00－21：00	16：00－17：00	900
4	12：00－21：00	17：00－18：00	900

表二：

时段	8:00－10:00	10:00－12:00	12:00－14:00	14:00－16:00	16:00－18:00	18:00－21:00
需求人数	20	25	10	30	20	10