好的，我们来到第三篇。规划类问题就快要完结了。推荐与运筹学结合起来一起学习。

1 非线性规划-简介

如果目标函数或约束条件中包含非线性函数，就称这种规划问题为非线性规划问题。

八股文：根据约束条件的不同，我们将非线性规划分为无约束线性规划问题（以下记作：F）和有约束线性规划问题（以下记作：T），其中有约束问题就是至少有一个约束条件的非线性规划问题。由于现在没有一种算法保证可以找出任何的全局最优解，通常我们只能找到算法的局部最优解。

1.1 有限的条件下，最大的收益

求下列非线性规划 $\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8$

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1^2 - x_2 + x_3^2 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 20 \\ -x_1 - x_2^2 + 2 = 0 \\ x_2 + x_3^2 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

解：

目标函数 $\min f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 8$

同时给出约束条件

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1^2 - x_2 + x_3^2 \geqslant 0 \\ x_1 + x_2^2 + x_3^2 \leqslant 20 \\ -x_1 - x_2^2 + 2 = 0 \\ x_2 + x_3^2 = 3 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

给出matlab调用函数fmincon函数的解法的模型化：

matlab给出的数学模型如下：

$\min Z = f(x)$

$$\text{s.t.}\begin{cases} Ax \leq b \\ Aeqx = beq \\ C(x) \leq 0 \\ Ceq(x) = 0 \end{cases}$$

其中 $f(x)$是标量函数， A, B, Aeq, Beq是相应维数的矩阵和向量，$C(x), Ceq(x)$ 是非线性向量函数。

接下来给出我们最常用的matlab代码形式:

X=FMINCON(FUN,X0,A,B,Aeq,Beq,LB,UB,NONLCON,OPTIONS)

更加详细一点:
它的返回值是向量 x，
其中 FUN 是用 M 文件定义的函数 f (x)；X0 是 x 的初始值；
A,B,Aeq,Beq 定义了线性约束 A* X ≤ B, Aeq * X = Beq ，如果没有线性约束，则A=[],B=[],Aeq=[],Beq=[]；
LB 和 UB 是变量 x 的下界和上界，如果上界和下界没有约束，则 LB=[]，UB=[]，如果 x 无下界，则 LB 的各分量都为-inf，如果 x 无上界，则 UB 的各分量都为 inf；
NONLCON 是用 M 文件定义的非线性向量函数C(x),Ceq(x)；
OPTIONS定义了优化参数，可以使用 Matlab 缺省的参数设置。
特殊情况：求解二次规划的函数quadprog，目标函数是非线性的，但是约束条件是线性函数，这样的非线性规划我们叫做二次规划。

求解二次规划：

目标函数$\min f(x) = 2x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 3x_2$

$f(x) =$

同时给出约束条件

$$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3 \\ 4x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

给出matlab调用函数quadprog函数的解法的模型化

matlab给出的数学模型如下：

$\min Z = \frac{1}{2}x^T Hx + f^T x$

$$\text{s.t.}\begin{cases} Ax \le b \\ Aeq \cdot x = beq \end{cases}$$

其中H 是实对称矩阵， f ,b 是列向量， A 是相应维数的矩阵。

接下来给出我们最常用的matlab代码形式:

$[X,$ FVAL]= QUADPROG(H,f,A,b,Aeq,beq,LB,UB,X0,OPTIONS)

其中H是一个正定矩阵(如果要求有限最小值);f是化为二次型后剩余的函数;

A,b,Aeq,beq分别是线性约束，如没有，用’[]’代替。
LB,UB分别为上下界，若无则’[]’，若无穷则可设’-inf”inf’。
x0是x的初始值;OPTIONS定义了相关优化参数。

2　非线性规划-适用题目

2.1　非线性规划适用的赛题：

题目中提到”怎样安排/分配” ”尽量多(少)” “最多(少)” ”利润最大” “最合理” 等词;但变量非一次方

·生产安排 原材料、设备有限制，总利润最大(目标函数或约束条件非线性) 生产两种机床，利润分别为XXX, A机器和B机器加工，两种机器工作时间…;成本或利润与某变量的关系是非线性的

·选址问题 已知新建工厂位置，各工地需求量，当前工厂货物需求量，各种距离的单位运输量，新工厂建在何地是单位运输量最大。

·角度调整 飞行管理避免相撞; 影院最佳视角飞机位置，速度，进入区域后判定是否相撞，飞机飞行方向角调整的幅度尽量小电影院视角、仰角影响观影体验，什么位置观影最佳涉及三角函数，为非线性规划。

2.2　模型假设

无约束非线性规划问题:在 Matlab 中，用于求解无约束最值问题的函数有 fminunc 和 fminsearch，来求函数的极小值$\min\limits_{x} f(x)$。

1.matlab中无约束条件多变量求最小值fminunc用法为:

$$[x, fval]\text{=fminunc(FUN,}x_0\text{,OPTIONS,P1,P2, ...)}$$

更加详细一点:
它的返回值 x是极小值点， fval是求得的极小值，以及还有其他未列出的返回值。
其中 FUN 是用 M 文件定义的函数 f (x)；X0 是 x 的初始值；
当FUN文件只有一个返回值时，它返回的是函数$f(x)$；当它有两个返回值时，返回的是梯度向量；当它有三个返回值时，返回的

是二阶导Hessian矩阵。
这个时候，fminunc的写法是:

$$[x, fval, \text{exitflag}, \text{output}, \text{grad}, \text{hessian}] = \text{fminunc}(\_\_\_)$$

返回描述 fminunc 的退出条件的值 exitflag，以及提供优化过程信息的结构体 output。

OPTIONS定义了优化参数，可以使用 Matlab 缺省的参数设置。

例:

编写返回极小值点和极小值的目标函数。使用包括梯度和 Hessian 矩阵中所述的条件化形式。目标函数是 Rosenbrock 函数，

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1^2)^2$$

它有梯度$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} -400(x_2 - x_1^2)^2 x_1 - 2(1 - x_1) \\ 200(x_2 - x_1^2) \end{bmatrix}$

它有海森矩阵$H(x) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 400y + 2 & -400x \\ -400x & 20000 \end{bmatrix}$

可以给出梯度法的代码如下：

代码 **1.** Fminunc_1

```
% NonLinear Programming
          %This is  Obejctive1.m
function [f,g]=Objective1(x)
f=100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2;
g=[-400*x(1)*(x(2)-x(1)^2)-2*(1-x(1));200*(x(2)-x(1)^2)];
          %This is  Example1.m
options = optimset('GradObj','on');
[x,y] = fminunc('Objective1',rand(1,2),options)
%x =      1.0000      1.0000
%y =      3.6009e-15
```

可以给出**Hessan**矩阵法的代码如下：

代码 **2.** Fminunc_2

```
% NonLinear Programming
```

```
            %This is  Objective2.m
function [f,df,d2f]=Objective2(x)
f=100*(x(2)-x(1)^2)^2+(1-x(1))^2;
df=[-400*x(1)*(x(2)-x(1)^2)-2*(1-x(1));200*(x(2)-x (1)^2)];
d2f=[-400*x(2)+1200*x(1)^2+2,-400*x(1)
 -400*x(1),200];
            %This is  Example2.m
options = optimset('GradObj','on','Hessian','on');
[x,y]=fminunc('Objective2',rand(1,2),options)
%x =    1.0000      1.0000
%y =    8.4869e-24
```

2.matlab中无导数无约束条件多变量求最小值fminsearch用法为:

$$[x, fval]\text{=fminunc(fun,x0,options)}$$

更加详细一点：
它的返回值 x是极小值点，fval是求得的极小值，以及还有其他未列出的返回值。
其中 FUN 是用M文件定义的函数f(x);x0是x的初始值；
可以添加exitflag与output来分别输出退出条件的值与和优化过程有关的信息。
这个时候，fminunc的写法是:

$$[x, fval, exitflag, output]\text{= fminsearch(\_\_\_)}$$

例:

将起始点设置为 x0 = [-1.2,1] 并使用 fminsearch 计算 Rosenbrock 函数的最小值。目标函数是 Rosenbrock 函数，

$$f(x) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1^2)^2$$

该函数的最小值在 x = [1,1] 处，最小值为 0。

可以给出fminsearch代码如下：

代码 3. fminsearch

```
% NonLinear Programming
        %This is  Objective3.m
function result = Objective3(x)
    result = 100*(x(2) - x(1)^2)^2 + (1 - x(1))^2;
end
        %This is  Example3.m
options = optimset('PlotFcns',@optimplotfval);
x0 = [-1.2,1];
x = fminsearch(@Objective3,x0,options)
%x =    1x2    1.0000    1.0000
```

可以得到运行结果图如图1。
当然，这个时候可以看出Rosenbrock函数的最小值就是[1,1]处的0值。

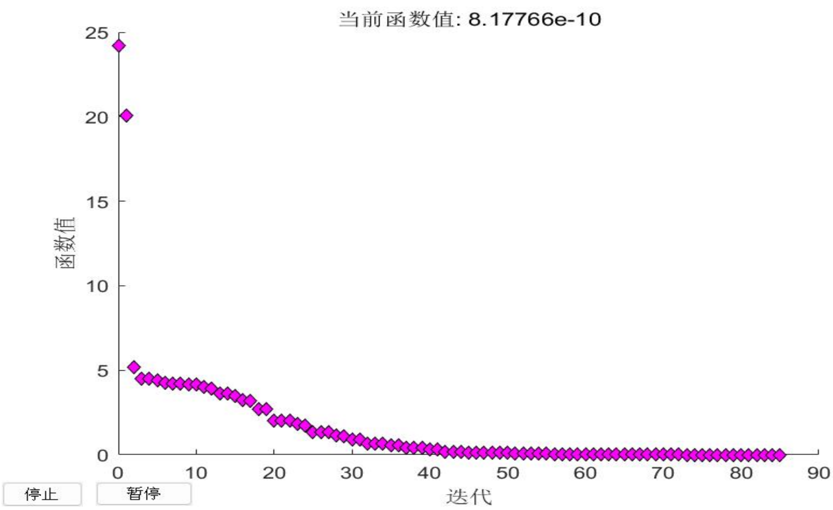

图 1. 运行结果

在 Matlab 优化工具箱中，用于求解约束最优化问题的函数有：fminbnd、fmincon、 quadprog、fseminf、fminimax。可以参考matlab算法大全第三章相关例题进行学习。

寻找单变量非线性函数在区间上的最小值fminbnd用法为:

$$[x, fval]\text{=fminbnd(fun,x1,x2,OPTIONS)}$$

更加详细一点：
它的返回值x是极小值点，fval是求得的极小值，以及还有其他未列出的返回值。
其中fun是用M文件定义的单变量科学函数f(x)
可以添加exitflag与output来分别输出退出条件的值与和优化过程有关的信息
这个时候，fminbnd的写法是:

[x,fval,exitflag,output]=fminbnd(___)

例:

求单变量非线性函数$f(x) = (x-3)^2 - 1, x \in [0,5]$的极小值。

可以给出fminbnd代码如下：

代码 **4.** Fminbnd

```
% NonLinear Programming
        %This is  Objective4.m
function f = Objective4(x)
    f=(x-3)^2-1;
end
        %This is  Example4.m
[x,y]=fminbnd('Objective4',0,5)
%x =    3       y =    -1
```

求解半无限约束多元函数的最小值fseminf用法为:

x = fseminf(fun,x0,ntheta,seminfcon,A,b,Aeq,beq,lb,ub,options)

更加详细一点：
它的返回值x是极小值点。
其中fun是用M文件定义的线性或非线性函数；x0是初始值点;
ntheta,seminfcon是无穷半约束条件。
A,b,Aeq,beq分别是$A*x \leq b, Aeq*x=beq$的约束条件;

可以添加exitflag与output来分别输出退出条件的值与和优化过程有关的信息，同时还有lamdba结构体包含在解 x 处的拉格朗日乘数。这个时候，fseminf的写法是

[x,fval,exitflag,output,lambda] = fseminf(___)

例:

求函数$f(x) = (x_1 - 0.5)^2 + (x_2 - 0.5)^2 + (x_3 - 0.5)^2$取最小值时的 x 值,约束是

$$K_1(x, w_1) = sin(w_1x_1)cos(w_1x_2) - \frac{1}{1000}(w_1 - 50)^2 - sin(w_1x_3) - x_3 \leq 1$$

$$K_2(x, w_2) = sin(w_2x_2)cos(w_2x_1) - \frac{1}{1000}(w_2 - 50)^2 - sin(w_1x_3) - x_3 \leq 1$$

$$1 \leq w_1 \leq 100, 1 \leq w_2 \leq 100$$

可以给出fseminf代码如下:

代码 **5.** Fseminf

```
% NonLinear Programming
          %This is  Objective5_1.m
function f=Objective5_1(x,s)
f=sum((x-0.5).^2);
end
          %This is  Objective5_2.m
function [c,ceq,k1,k2,s]=Objective5_2(x,s)
c=[];
ceq=[];
 if  isnan(s(1,1))
     s =[0.2,0;0.2,0];
end
w1=1:s(1,1):100;
w2=1:s(2,1):100;
k1=sin(w1*x(1)).*cos(w1*x(2))-...
1/1000*(w1-50).^2-sin(w1*x(3))-x(3)-1;
k2=sin(w2*x(2)).*cos(w2*x(1))-...
1/1000*(w2-50).^2-sin(w2*x(3))-x(3)-1;
```

```
plot(w1,k1,'-',w2,k2,'+');
plot(w1,k1,'-',w2,k2,'+');
        %This is  Example5.m
[x,y]=fseminf(@Objective5_1,rand(3,1),2,@Objective5_2)
%x =    0.9170      1.0123      0.1481
%y =     0.5602
```

寻找能够最小化一组目标函数最大值的点的fminimax用法为:

x=fminimax(FUN,x0,A,b,Aeq,beq,lb,ub,OPTIONS)

更加详细一点：
它的返回值x是一组使函数族最大的极小值点。
其中fun是用M文件定义的线性或非线性函数族；x0是初始值点;
ntheta,seminfcon是无穷半约束条件。
A,b,Aeq,beq分别是A*x≤b,Aeq*x=beq的约束条件;
可以添加exitflag与output来分别输出退出条件的值与和优化过程有关的信息，同时还有lamdba结构体包含在解 x 处的拉格朗日乘数。
这个时候，fseminf的写法是

[x,fval,maxfval,exitflag,output,lambda] = fminimax(___)

例:

求函数族$\{f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x), f_5(x)\}$取极大极小值时的x值。

其中：$\begin{cases} f_1(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 48x_1 - 40x_2 + 304 \\ f_2(x) = -x_1^2 - 3x_2^2 \\ f_3(x) = x_1 + 3x_2 - 18 \\ f_4(x) = -x_1 - x_2 \\ f_5(x) = x_1 + x_2 - 8 \end{cases}$

可以给出fminimax代码如下：

代码 **6.** fminimax

```
% NonLinear Programming
        %This is  Objective6.m
function f=Objective6(x)
f=[2*x(1)^2+x(2)^2-48*x(1)-40*x(2)+304
```

```
    -x(1)^2-3*x(2)^2
    x(1)+3*x(2)-18
    -x(1)-x(2)
    x(1)+x(2)-8];
end
        %This is Example6.m
[x,y]=fminimax(@Objective6,rand(2,1))
%x =     4.0000      4.0000
%y =     0.0000   -64.0000   -2.0000   -8.0000   -0.0000
```

3 非线性规划-代码实现

贴出matlab代码求解,请对应相应的函数。

代码 **7.** Fmincon

```
% NonLinear Programming
        %This is fun1.m
function f=fun1(x)
f=sum(x.^2)+8;
end
        %This is fun2.m
function [g,h]=fun2(x)
g=[-x(1)^2+x(2)-x(3)^2
x(1)+x(2)^2+x(3)^3-20]; %Nonlinear inequality  constraints
h=[-x(1)-x(2)^2+2
x(2)+2*x(3)^2-3]; %Nonlinear equality  constraints
        %This is example.m
options=optimset('largescale','off');
[x,y]=fmincon('fun1',rand (3,1),[],[],[],[], zeros (3,1),[],   ...
'fun2', options)
```

代码 **8.** Quadprog

```
% NonLinear Programming
        %This is  subexample.m
h=[4,-4;-4,8];
f=[-6;-3];
a=[1,1;4,1];
b=[3;9];
[x,value]=quadprog(h,f,a,b ,[],[], zeros(2,1))
%x =     1.9500      1.0500      value  =     -11.0250
```

4 非线性规划-实战演练

非线性规划可以说是国赛里面很容易考的问题，因为matlab也没有固定的算法能够很好地解决NLP问题。所以非线性规划目前还没有适于各种问题的一般算法，各个方法都有自己特定的适用范围。这样也让出题人有了一定的操作空间。这章讲了非线性规划，结束，收工。

References

[1] 谢中华. MATLAB与数学建模[A].北京航空航天大学出版社[M]:科学技术协会,2021-02-14.

[2] 数学建模BOOM.【数模美赛国赛】非线性规划(模型+适用赛题+MATLAB求解，数学建模零基础入门）)[M]:2021-08-30.

[3] mathworks. 非线性规划问题求解器[J]:https://ww2.mathworks.cn/help/optim/ug/linprog.html#description

[4] mathworks. 求无约束多变量函数的最小值–fminunc[J]:https://ww2.mathworks.cn/help/optim/ug/fminunc.html#d124e57611

[5] mathworks. 寻找约束非线性多变量函数的最小值–fmincon[J]:https://ww2.mathworks.cn/help/optim/ug/fmincon.html

[6] mathworks. 使用无导数法计算无约束的多变量函数的最小值–fminsearch[J]:https://ww2.mathworks.cn/help/matlab/ref/fminsearch.html

[7] VL_L_^_^ 数学建模-影院角度[M].https://www.cnblogs.com/Lovely-Boy/p/12828814.html,2020-05-04.

[8] 飘渺到放弃.[学习笔记]非线性规划实例——飞行管理问题[M].https://blog.csdn.net/weixin_46059493/article/details/106164593,2020-05-16

5 数学建模算法大全第三章习题答案

1. 给出梯度最速下降法的解,代码详见homework1.m与deltaf.m:
   $x =$ 0.3333 1.3333
   $Z =$ 4.6667
2. 编码请看Homework2.m与nwfun.m.（此时步长为1）
   极值点是$x = 0, y = 0$
   极值是$Z = -0.5$(共迭代408次)
   另一个编码请看c_gradientDescent.m（此时步长可变）
   极值点是$x = 10^{-4} * 0.1002, y = 0$(迭代100次左右)
   极值是$Z = -0.5$(迭代59次左右)
3. 数学模型为：
   $$\min f(x) = 0.2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 58x_1 + 54x_2 + 50x_3 - 560$$
   $$\text{s.t.}\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 180 \\ x_1 + x_2 \geq 100 \\ x_1 \geq 40 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$
   给出非线性规划的解: $x_1 = 50$ $x_2 = 60$ $x_3 = 70$
   $fval = 1.0160 * 10^4$
4. 给出解,代码详见homework4.m,Objfun41.m与Confun41.m
   $x =$ 0.0000 0.0000 2.7977 $-$ 0.0001 0.0000 0.9321
5. 解同4，留给读者。
6. 给出fmincon的解,代码详见homework6.m，Objfun61.m与Objfun62.m:
   $x =$ 2.3333 0.1667 $-$ 3.4444
   $fval =$ 18.0833
7. 给出matlab建模的解:
   代码详见homework7_1.m,homework7_2.m,homework7_3.m:
   (1) 距离屏幕大概6.211m处(第三或第四排)。
   (2) 20°时，观众满意度最大。
   (3) 可以改成y关于x的二次曲线($y = -0.0073 * x^2 + 0.1618x + 4.1940$)，然后取a,b,c使得$\alpha$最大