第十三章　微分方程建模

微分方程建模是数学建模的重要方法，因为许多实际问题的数学描述将导致求解微分方程的定解问题。把形形色色的实际问题化成微分方程的定解问题，大体上可以按以下几步：

1. 根据实际要求确定要研究的量(自变量、未知函数、必要的参数等)并确定坐标系。
2. 找出这些量所满足的基本规律(物理的、几何的、化学的或生物学的等等)。
3. 运用这些规律列出方程和定解条件。

列方程常见的方法有：

（i）按规律直接列方程

在数学、力学、物理、化学等学科中许多自然现象所满足的规律已为人们所熟悉，并直接由微分方程所描述。如牛顿第二定律、放射性物质的放射性规律等。我们常利用这些规律对某些实际问题列出微分方程。

（ii）微元分析法与任意区域上取积分的方法

自然界中也有许多现象所满足的规律是通过变量的微元之间的关系式来表达的。对于这类问题，我们不能直接列出自变量和未知函数及其变化率之间的关系式，而是通过微元分析法，利用已知的规律建立一些变量（自变量与未知函数）的微元之间的关系式，然后再通过取极限的方法得到微分方程，或等价地通过任意区域上取积分的方法来建立微分方程。

（iii）模拟近似法

在生物、经济等学科中，许多现象所满足的规律并不很清楚而且相当复杂，因而需要根据实际资料或大量的实验数据，提出各种假设。在一定的假设下，给出实际现象所满足的规律，然后利用适当的数学方法列出微分方程。

在实际的微分方程建模过程中，也往往是上述方法的综合应用。不论应用哪种方法，通常要根据实际情况，作出一定的假设与简化，并要把模型的理论或计算结果与实际情况进行对照验证，以修改模型使之更准确地描述实际问题并进而达到预测预报的目的。

本章将利用上述方法讨论具体的微分方程的建模问题。

§1　发射卫星为什么用三级火箭

采用运载火箭把人造卫星发射到高空轨道上运行，为什么不能用一级火箭而必须用多级火箭系统？

下面通过建立运载火箭有关的数学模型来回答上述问题。

火箭是一个复杂的系统，为了使问题简单明了，我们只从动力系统和整体结构上分析，并且假设引擎是足够强大的。

1.1　为什么不能用一级火箭发射人造卫星

下面用三个数学模型回答这个问题

1.1.1　卫星进入 600km 高空轨道时，火箭必须的最低速度

首先将问题理想化，假设：

（i）卫星轨道是以地球中心为圆心的某个平面上的圆周，卫星在此轨道上以地球引力作为向心力绕地球作平面匀速圆周运动；

（ii）地球是固定于空间中的一个均匀球体，其质量集中于球心；

（iii）其它星球对卫星的引力忽略不计。

建模与求解：设地球半径为 R，质量为 M；卫星轨道半径为 r，卫星质量为 m。

根据假设（ii）和（iii），卫星只受到地球的引力，由牛顿万有引力定律可知其引力

大小为

$$F=\frac{GMm}{r^2} \tag{1}$$

其中G为引力常数。

为消去常数G，把卫星放在地球表面，则由（1）式得

$$mg=\frac{GMm}{R^2} \quad 或 \quad GM=R^2g$$

再代入（1）式，得

$$F=mg\left(\frac{R}{r}\right)^2 \tag{2}$$

其中$g=9.81(\mathrm{m/s^2})$为重力加速度。

根据假设（i），若卫星围绕地球作匀速圆周运动的速度为v，则其向心力为mv^2/r，因为卫星所受的地球引力就是它作匀速运动的向心力，故有

$$mg\left(\frac{R}{r}\right)^2=\frac{mv^2}{r}$$

由此便推得卫星距地面为$(r-R)\mathrm{km}$，必须的最低速度的数学模型为

$$v=R\sqrt{\frac{g}{r}} \tag{3}$$

取$R=6400\mathrm{km}$，$r-R=600\mathrm{km}$，代入上式，得

$$v\approx 7.6\mathrm{km/s}$$

即要把卫星送入离地面 600km 高的轨道，火箭的末速度最低应为 7.6km/s。

1.1.2　火箭推进力及升空速度

火箭的简单模型是由一台发动机和一个燃料仓组成。燃料燃烧产生大量气体从火箭末端喷出，给火箭一个向前的推力。火箭飞行要受地球引力、空气阻力、地球自转与公转等的影响，使火箭升空后作曲线运动。为使问题简化，**假设**：

（i）火箭在喷气推动下作直线运动，火箭所受的重力和空气阻力忽略不计。

（ii）在t时刻火箭质量为$m(t)$，速度为$v(t)$，且均为时间t的连续可微函数；

（iii）从火箭末端喷出气体的速度（相对火箭本身）为常数u。

建模与分析：由于火箭在运动过程中不断喷出气体，使其质量不断减少，在$(t,t+\Delta t)$内的减少量可由台劳展式表示为

$$m(t+\Delta t)-m(t)=\frac{dm}{dt}\Delta t+o(\Delta t) \tag{4}$$

因为喷出的气体相对于地球的速度为$v(t)-u$，则由动量守恒定律有

$$m(t)v(t)=m(t+\Delta t)v(t+\Delta t)-\left[\frac{dm}{dt}\Delta t+o(\Delta t)\right](v(t)-u) \tag{5}$$

从（4）式和（5）式可得火箭推进力的数学模型为

$$m\frac{dv}{dt}=-u\frac{dm}{dt} \tag{6}$$

令$t=0$时，$v(0)=v_0$，$m(0)=m_0$，求解上式，得火箭升空速度模型

$$v(t)=v_0+u\ln\frac{m_0}{m(t)} \tag{7}$$

（6）式表明火箭所受推力等于燃料消耗速度与喷气速度（相对火箭）的乘积。（7）式表明，在 v_0, m_0 一定的条件下，升空速度 $v(t)$ 由喷气速度（相对火箭）u 及质量比 $m_0/m(t)$ 决定。这为提高火箭速度找到了正确途径：从燃料上设法提高 u 值；从结构上设法减少 $m(t)$。

1.1.3　一级火箭末速度上限

火箭—卫星系统的质量可分为三部分：m_p（有效负载，如卫星），m_F（燃料质量），m_s（结构质量，如外壳、燃料容器及推进器）。一级火箭末速度上限主要是受目前技术条件的限制，**假设：**

（i）目前技术条件为：相对火箭的喷气速度 $u=3$ km/s 及

$$\frac{m_s}{m_F+m_s}\ge\frac{1}{9}$$

（ii）初速度 v_0 忽略不计，即 $v_0=0$。

建模与求解：因为升空火箭的最终（燃料耗尽）质量为 m_p+m_s，由（7）式及假设（ii）得到末速度为

$$v=u\ln\frac{m_0}{m_p+m_s} \tag{8}$$

令 $m_s=\lambda(m_F+m_s)=\lambda(m_0-m_p)$，代入上式，得

$$v=u\ln\frac{m_0}{\lambda m_0+(1-\lambda)m_p} \tag{9}$$

于是，当卫星脱离火箭，即 $m_p=0$ 时，便得火箭末速度上限的数学模型为

$$v^0=u\ln\frac{1}{\lambda}$$

由假设（i），取 $u=3$ km，$\lambda=\frac{1}{9}$，便得火箭速度上限

$$v^0=3\ln 9\approx 6.6 \text{ km/s}$$

因此，用一级火箭发射卫星，在目前技术条件下无法达到相应高度所需的速度。

1.2　理想火箭模型

从前面对问题的假设和分析可以看出：火箭推进力自始至终在加速着整个火箭，然而随着燃料的不断消耗，所出现的无用结构质量也在随之不断加速，作了无用功，故效益低，浪费大。

所谓理想火箭，就是能够随着燃料的燃烧不断抛弃火箭的无用结构。下面建立它的数学模型。

假设：在 $(t,t+\Delta t)$ 时段丢弃的结构质量与烧掉的燃料质量以 α 与 $1-\alpha$ 的比例同时进行。

建模与分析：由动量守恒定律，有

$$m(t)v(t)=m(t+\Delta t)v(t+\Delta t)-\alpha\frac{dm}{dt}\Delta t\cdot v(t)$$
$$-(1-\alpha)\frac{dm}{dt}\Delta t\cdot(v(t)-u)+o(\Delta t)$$

由上式可得理想火箭的数学模型为

$$-m(t)\frac{dv(t)}{dt}=(1-\alpha)\frac{dm}{dt}\cdot u \tag{10}$$

及

$$v(0)=0\text{，}\ m(0)=m_0$$

解之得

$$v(t)=(1-\alpha)u\ln\frac{m_0}{m(t)} \tag{11}$$

由上式可知，当燃料耗尽，结构质量抛弃完时，便只剩卫星质量 m_p，从而最终速度的数学模型为

$$v(t)=(1-\alpha)u\ln\frac{m_0}{m_p} \tag{12}$$

（12）式表明，当 m_0 足够大时，便可使卫星达到我们所希望它具有的任意速度。例如，考虑到空气阻力和重力等因素，估计要使 $v=10.5$ km/s 才行，如果取 $u=3$ km/s，$\alpha=0.1$，则可推出 $m_0/m_p=50$，即发射 1 吨重的卫星大约需 50 吨重的理想火箭。

1.3　多级火箭卫星系统

理想火箭是设想把无用结构质量连续抛弃以达到最佳的升空速度，虽然这在目前的技术条件下办不到，但它确为发展火箭技术指明了奋斗目标。目前已商业化的多级火箭卫星系统便是朝着这种目标迈进的第一步。多级火箭是从末级开始，逐级燃烧，当第 i 级燃料烧尽时，第 $i+1$ 级火箭立即自动点火，并抛弃已经无用的第 i 级。我们用 m_i 表示第 i 级火箭质量，m_p 表示有效负载。为了简单起见，先作如下假设：

（i）设各级火箭具有相同的 λ，λm_i 表示第 i 级结构质量，$(1-\lambda)m_i$ 表示第 i 级的燃料质量。

（ii）喷气相对火箭的速度 u 相同，燃烧级的初始质量与其负载质量之比保持不变，记该比值为 k。

先考虑二级火箭。由（7）式，当第一级火箭燃烧完时，其速度为

$$v_1=u\ln\frac{m_1+m_2+m_p}{\lambda m_1+m_2+m_p}=u\ln\frac{k+1}{\lambda k+1}$$

在第二级火箭燃烧完时，其速度为

$$v_2=v_1+u\ln\frac{m_2+m_p}{\lambda m_2+m_p}=2u\ln\frac{k+1}{\lambda k+1} \tag{13}$$

仍取 $u=3$ km/s，$\lambda=0.1$，考虑到阻力等因素，为了达到第一宇宙速度，对于二级火箭，欲使 $v_2=10.5$ km/s，由（13）式得

$$6\ln\frac{k+1}{0.1k+1}=10.5$$

解之得

$$k=11.2,$$

这时

$$\frac{m_0}{m_p}=\frac{m_1+m_2+m_p}{m_p}=(k+1)^2\approx 149$$

同理，可推出三级火箭

$$v_3=3u\ln\frac{k+1}{\lambda k+1}$$

欲使$v_3=10.5\,\mathrm{km/s}$，应该$k\approx 3.25$，从而$m_0/m_p\approx 77$。

与二级火箭相比，在达到相同效果的情况下，三级火箭的质量几乎节省了一半。

现记n级火箭的总质量（包括有效负载m_p）为m_0，在相同假设下（$u=3\,\mathrm{km/s}$，$v_{末}=10.5\,\mathrm{km/s}$，$\lambda=0.1$），可以算出相应的$m_0/m_p$值，现将计算结果列于下表中：

n（级数）	1	2	3	4	5	$\cdots$	∞
m_0/m_p	×	149	77	65	60	$\cdots$	50

实际上，由于受技术条件的限制，采用四级或四级以上的火箭，经济效益是不合算的，因此采用三级火箭是最好的方案。

1.4 最佳结构设计

下面我们将考虑当用n级火箭发射卫星时的最佳结构，即使m_0/m_p最小的结构。

记

$$w_1=m_0=m_1+m_2+\cdots+m_n+m_p$$
$$w_2=m_2+\cdots+m_n+m_p$$
$$\cdots$$
$$w_{n+1}=m_p$$

记

$$k_1=\frac{w_1}{w_2},\ \cdots,\ k_n=\frac{w_n}{w_{n+1}}$$

$$v_{末}=u\ln\left(\frac{w_1}{\lambda m_1+w_2}\cdots\frac{w_n}{\lambda m_n+w_{n+1}}\right)$$

由于$m_1=w_1-w_2$，$m_2=w_2-w_3$，$\cdots$，$m_n=w_n-w_{n+1}$，可以推出

$$v_{末}=u\ln\left(\frac{k_1}{\lambda(k_1-1)+1}\cdots\frac{k_n}{\lambda(k_n-1)+1}\right)$$

易知

$$\frac{m_0}{m_p}=k_1k_2\cdots k_n$$

则最佳结构问题转化为

$$\begin{aligned} \min \quad & k_1 k_2 \cdots k_n \\ \text{s.t.} \quad & \frac{k_1 k_2 \cdots k_n}{[\lambda(k_1-1)+1]\cdots[\lambda(k_n-1)+1]} = c \end{aligned}$$

可以推出当 $k_1 = k_2 = \cdots = k_n$ 时，$\dfrac{m_0}{m_p}$ 最小。

§2　人口模型

2.1　问题提出

据考古学家论证，地球上出现生命距今已有 20 亿年，而人类的出现距今却不足 200 万年。纵观人类人口总数的增长情况，我们发现：1000 年前人口总数为 2.75 亿。经过漫长的过程到 1830 年，人口总数达 10 亿，又经过 100 年，在 1930 年，人口总数达 20 亿；30 年之后，在 1960 年，人口总数为 30 亿；又经过 15 年，1975 年的人口总数是 40 亿，12 年之后即 1987 年，人口已达 50 亿。

我们自然会产生这样一个问题：人类人口增长的规律是什么？如何在数学上描述这一规律。

2.2　Malthus 模型

1789 年，英国神父 Malthus 在分析了一百多年人口统计资料之后，提出了 Malthus 模型。

模型假设

（i）设 $x(t)$ 表示 t 时刻的人口数，且 $x(t)$ 连续可微。

（ii）人口的增长率 r 是常数（增长率=出生率—死亡率）。

（iii）人口数量的变化是封闭的，即人口数量的增加与减少只取决于人口中个体的生育和死亡，且每一个体都具有同样的生育能力与死亡率。

建模与求解

由假设，t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻人口的增量为

$$x(t+\Delta t) - x(t) = rx(t)\Delta t$$

于是得

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = rx \\ x(0) = x_0 \end{cases} \tag{14}$$

其解为

$$x(t) = x_0 e^{rt} \tag{15}$$

模型评价

考虑二百多年来人口增长的实际情况，1961 年世界人口总数为 3.06×10^9，在 1961～1970 年这段时间内，每年平均的人口自然增长率为 2%，则（15）式可写为

$$x(t) = 3.06\times10^9 \cdot e^{0.02(t-1961)} \tag{16}$$

根据 1700～1961 年间世界人口统计数据，我们发现这些数据与（16）式的计算结果相当符合。因为在这期间地球上人口大约每 35 年增加 1 倍，而（16）式算出每 34.6 年增加 1 倍。

但是，当人们用（15）式对 1790 年以来的美国人口进行检验，发现有很大差异。

利用（16）式对世界人口进行预测，也会得出惊异的结论：当 $t = 2670$ 年时，

$x(t)=4.4\times10^{15}$，即 4400 万亿，这相当于地球上每平方米要容纳至少 20 人。

显然，用这一模型进行预测的结果远高于实际人口增长，误差的原因是对增长率 r 的估计过高。由此，可以对 r 是常数的假设提出疑问。

2.3 阻滞增长模型（Logistic 模型）

如何对增长率 r 进行修正呢？我们知道，地球上的资源是有限的，它只能提供一定数量的生命生存所需的条件。随着人口数量的增加，自然资源、环境条件等对人口再增长的限制作用将越来越显著。如果在人口较少时，我们可以把增长率 r 看成常数，那么当人口增加到一定数量之后，就应当视 r 为一个随着人口的增加而减小的量，即将增长率 r 表示为人口 $x(t)$ 的函数 $r(x)$，且 $r(x)$ 为 x 的减函数。

模型假设

（i）设 $r(x)$ 为 x 的线性函数，$r(x)=r-sx$。（工程师原则，首先用线性）

（ii）自然资源与环境条件所能容纳的最大人口数为 x_m，即当 $x=x_m$ 时，增长率 $r(x_m)=0$。

建模与求解

由假设（i），（ii）可得 $r(x)=r(1-\frac{x}{x_m})$，则有

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=r(1-\dfrac{x}{x_m})x,\\ x(t_0)=x_0\end{cases}\tag{17}$$

（17）式是一个可分离变量的方程，其解为

$$x(t)=\frac{x_m}{1+(\frac{x_m}{x_0}-1)e^{-r(t-t_0)}}\tag{18}$$

模型检验 由（17）式，计算可得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=r^2(1-\frac{x}{x_m})(1-\frac{2x}{x_m})x\tag{19}$$

人口总数 $x(t)$ 有如下规律：

（i）$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=x_m$，即无论人口初值 x_m 如何，人口总数以 x_m 为极限。

（ii）当 $0<x_0<x_m$ 时，$\frac{dx}{dt}=r(1-\frac{x}{x_m})x>0$，这说明 $x(t)$ 是单调增加的，又由（19）式知：当 $x<\frac{x_m}{2}$ 时，$\frac{d^2x}{dt^2}>0$，$x=x(t)$ 为凹，当 $x>\frac{x_m}{2}$ 时，$\frac{d^2x}{dt^2}<0$，$x=x(t)$ 为凸。

（iii）人口变化率 $\frac{dx}{dt}$ 在 $x=\frac{x_m}{2}$ 时取到最大值，即人口总数达到极限值一半以前是加速生长时期，经过这一点之后，生长速率会逐渐变小，最终达到零。

与 Malthus 模型一样，代入一些实际数据进行验算，若取 1790 年为 $t=t_0=0$，$x_0=3.9\times10^6$，$x_m=197\times10^6$，$r=0.3134$ 可以看出，直到 1930 年，计算结果与

实际数据都能较好地吻合，在 1930 年之后，计算与实际偏差较大。原因之一是 60 年代的实际人口已经突破了假设的极限人口 x_m ，由此可知，本模型的缺点之一就是不易确定 x_m 。

2.4　模型推广

可以从另一个角度导出阻滞增长模型，在 Malthus 模型上增加一个竞争项 $-bx^2(b>0)$，它的作用是使纯增长率减少。如果一个国家工业化程度较高，食品供应较充足，能够提供更多的人生存，此时 b 较小；反之 b 较大，故建立方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x(a-bx) \qquad (a,b>0), \\ x(t_0)=x_0, \end{cases} \tag{20}$$

其解为

$$x(t)=\frac{ax_0}{bx_0+(a-bx_0)e^{-a(t-t_0)}} \tag{21}$$

由（21）式，得

$$\frac{d^2x}{dt^2}=(a-2bx)(a-bx)x \tag{22}$$

对(20)~(22)式进行分析，有

（i）对任意 $t>t_0$，有 $x(t)>0$，且 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\dfrac{a}{b}$

（ii）当 $0<x<\dfrac{a}{b}$ 时，$x'(t)>0$，$x(t)$ 递增；当 $x=\dfrac{a}{b}$ 时，$x'(t)=0$；当 $x(t)>\dfrac{a}{b}$ 时，$x'(t)<0$，$x(t)$ 递减。

（iii）当 $0<x<\dfrac{a}{2b}$ 时，$x''(t)>0$，$x(t)$ 为凹，当 $\dfrac{a}{2b}<x<\dfrac{a}{b}$ 时，$x''(t)<0$，$x(t)$ 为凸。

令（20）式第一个方程的右边为 0，得 $x_1=0$，$x_2=\dfrac{a}{b}$，称它们是微分方程（20）的平衡解。易知 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\dfrac{a}{b}$，故又称 $\dfrac{a}{b}$ 是（20）式的稳定平衡解。可预测：不论人口开始的数量 x_0 为多少，经过相当长的时间后，人口总数将稳定在 $\dfrac{a}{b}$。

参数 a 和 b 可以通过已知数据利用 Matlab 中的非线性回归命令 nlinfit 求得。

§3　战争模型

早在第一次世界大战期间，F. W. Lanchester 就提出了几个预测战争结局的数学模型，其中包括作战双方均为正规部队；作战双方均为游击队；作战的一方为正规部队，另一方为游击队。后来人们对这些模型作了改进和进一步的解释，用以分析历史上一些著名的战争，如二次世界大战中的美日硫黄岛之战和 1975 年的越南战争。

影响战争胜负的因素有很多，兵力的多少和战斗力的强弱是两个主要的因素。士兵的数量会随着战争的进行而减少，这种减少可能是因为阵亡、负伤与被俘，也可能是因

为疾病与开小差。分别称之为战斗减员与非战斗减员。士兵的数量也可随着增援部队的到来而增加。从某种意义上来说，当战争结束时，如果一方的士兵人数为零，那么另一方就取得了胜利。如何定量地描述战争中相关因素之间的关系呢？比如如何描述增加士兵数量与提高士兵素质之间的关系。

3.1 模型一 正规战模型

模型假设

（i）双方士兵公开活动。x 方士兵的战斗减员仅与 y 方士兵人数有关。记双方士兵人数分别为 $x(t), y(t)$，则 x 方士兵战斗减员率为 $ay(t)$，a 表示 y 方每个士兵的杀伤率。可知 $a = r_y p_y$，r_y 为 y 方士兵的射击率（每个士兵单位时间的射击次数），p_y 每次射击的命中率。同理，用 b 表示 x 方士兵对 y 方士兵的杀伤率，即 $b = r_x p_x$。

（ii）双方的非战斗减员率仅与本方兵力成正比。减员率系数分别为 α, β。

（iii）设双方的兵力增援率为 $u(t), v(t)$。

模型与求解

由假设可知

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay - \alpha x + u(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx - \beta y + v(t) \end{cases} \tag{23}$$

我们对（23）式中的一种理想的情况进行求解，即双方均没有增援与非战斗减员。则（23）式化为

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -ay \\ \dfrac{dy}{dt} = -bx \\ x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0 \end{cases} \tag{24}$$

其中 x_0, y_0 为双方战前的兵力。

由（24）式的前两式相除，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{bx}{ay}$$

分离变量并积分得

$$a(y^2 - y_0^2) = b(x^2 - x_0^2),$$

整理得

$$ay^2 - bx^2 = ay_0^2 - by_0^2$$

若令 $k = ay_0^2 - bx_0^2$，则有

$$ay^2 - bx^2 = k$$

当 $k = 0$，双方打成平局。当 $k > 0$ 时，y 方获胜。当 $k < 0$ 时，x 方获胜。这样，y 方要想取得战斗胜利，就要使 $k > 0$，即

$$ay_0^2 - bx_0^2 > 0$$

考虑到假设（i），上式可写为

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \left(\frac{r_x}{r_y}\right)\left(\frac{p_x}{p_y}\right) \tag{25}$$

(25)式是 y 方占优势的条件。若交战双方都训练有素，且都处于良好的作战状态。则 r_x 与 r_y， p_z 与 p_y 相差不大，（25）式右边近似为 1。（25）式左边表明，初始兵力比例被平方地放大了。即双方初始兵力之比 $\frac{y_0}{x_0}$ ，以平方的关系影响着战争的结局。比如说，如果 y 方的兵力增加到原来的 2 倍，x 方兵力不变，则影响着战争的结局的能力将增加 4 倍。此时，x 方要想与 y 方抗衡，须把其士兵的射击率 r_x 增加到原来的 4 倍（ p_x, r_y, p_y 均不变）。

以上是研究双方之间兵力的变化关系。下面将讨论每一方的兵力随时间的变化关系。

对(24)式两边对 t 求导，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -a\frac{dy}{dt} = abx \text{ ,}$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2} - abx = 0 \tag{27}$$

初始条件为

$$x(0) = x_0, \quad \frac{dx}{dt}\Big|_{t=0} = -ay_0$$

解之，得

$$x(t) = x_0\mathrm{ch}(\sqrt{ab}\,t) - \sqrt{\frac{a}{b}}\,y_0\mathrm{sh}(\sqrt{ab}\,t)$$

同理可求得 $y(t)$ 的表达式为

$$y(t) = y_0\mathrm{ch}(\sqrt{ab}\,t) - \sqrt{\frac{b}{a}}\,x_0\mathrm{sh}(\sqrt{ab}\,t) \text{。}$$

3.2　模型二　游击战模型

模型假设

（i） y 方士兵看不见 x 方士兵， x 方士兵在某个面积为 S_x 的区域内活动。 y 方士兵不是向 x 方士兵射击，而是向该区域射击。此时，x 方士兵的战斗减员不仅与 y 方兵力有关，而且随着 x 方兵力增加而增加。因为在一个有限区域内，士兵人数越多，被杀伤的可能性越大。可设， x 方的战斗减员率为 cxy ，其中 c 为 y 方战斗效果系数， $c = r_y p_y = r_y \frac{S_{ry}}{S_x}$ ，其中 r_y 仍为射击率，命中率 p_y 为 y 方一次射击的有效面积（ S_{ry} ）与 x 方活动面积（ S_x ）之比。

假设（ii），（iii）同模型一的假设（ii），（iii）。

模型与求解

由假设，可得方程

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -cxy - \alpha x + u(t) \\ \dfrac{dy}{dt} = -dxy - \beta y + v(t) \end{cases} \tag{28}$$

其中$d = r_x p_x = r_x \dfrac{S_{rx}}{S_y}$是$x$方战斗效果系数。

为了使（28）式容易求解，可以做一些简化：设交战双方在作战中均无非战斗减员和增援。此时，有

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -cxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -dxy \end{cases} \tag{29}$$

两式相除，得

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{c},$$

其解为

$$c(y - y_0) = d(x - x_0)$$

令$l = cy_0 - dx_0$，上式可化为

$$cy - dx = l \tag{30}$$

当$l = 0$，双方打成平局。当$l > 0$时，y方获胜。当$l < 0$时，x方获胜。

y方获胜的条件可以表示为

$$\frac{y_0}{x_0} > \frac{d}{c} = \frac{r_x S_{rx} S_x}{r_y S_{ry} S_y}$$

即初始兵力之比$\dfrac{y_0}{x_0}$以线性关系影响战斗的结局。当双方的射击率r_x, r_y与有效射击面积S_{rx}, S_{ry}一定时，增加活动面积S_y与增加初始兵力y_0起着同样的作用。

3.3　模型三　混合战模型

模型假设

（i）x方为游击队，y方为正规部队。

（ii）交战双方均无战斗减员与增援。

模型与求解

借鉴模型一与二的思想，可得

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-cxy\\ \dfrac{dy}{dt}=-bx\\ x(0)=x_0,\quad y(0)=y_0\end{cases} \tag{31}$$

其解为

$$cy^2-2bx=m \tag{32}$$

其中 $m=cy_0^2-2bx_0$。

经验表明，只有当兵力 $\dfrac{y_0}{x_0}$ 远远大于 1 时，正规部队 y 才能战胜游击队。当 $m>0$ 时，y 方胜，此时

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2>\frac{2b}{cx_0}=\frac{2r_x p_x S_x}{r_y S_{ry} x_0} \tag{33}$$

一般来说，正规部队以火力强而见长，游击队以活动灵活，活动范围大而见长。这可以通过一些具体数据进行计算。

不妨设 $x_0=100$，命中率 $p_x=0.1$，$\dfrac{r_x}{r_y}=\dfrac{1}{2}$，活动区域的面积 $S_x=10^6\,\mathrm{m}^2$，y 方有效射击面积 $S_{ry}=1\,\mathrm{m}^2$，则由（33），y 方取胜的条件为

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2>\frac{2\times 0.1\times 0.1\times 10^6}{2\times 1\times 100}=100$$

$y_0>10x_0$，y 方的兵力是 x 方的 10 倍。

美国人曾用这个模型分析越南战争。根据类似于上面的计算以及四五十年代发生在马来亚、菲律宾、印尼、老挝等地的混合战争的实际情况估计出，正规部队一方要想取胜必须至少投入 8 倍于游击部队一方的兵力，而美国至多只能派出 6 倍于越南的兵力。越南战争的结局是美国不得不接受和谈并撤军，越南人民取得最后的胜利。

3.4　模型四　一个战争实例

J. H. Engel 用二次大战末期美日硫黄岛战役中的美军战地记录，对正规战争模型进行了验证，发现模型结果与实际数据吻合得很好。

硫黄岛位于东京以南 660 英里的海面上，是日军的重要空军基地。美军在 1945 年 2 月开始进攻，激烈的战斗持续了一个月，双方伤亡惨重，日方守军 21500 人全部阵亡或被俘，美方投入兵力 73000 人，伤亡 20265 人，战争进行到 28 天时美军宣布占领该岛，实际战斗到 36 天才停止。美军的战地记录有按天统计的战斗减员和增援情况。日军没有后援，战地记录则全部遗失。

用 $A(t)$ 和 $J(t)$ 表示美军和日军第 t 天的人数，忽略双方的非战斗减员，则

$$\begin{cases} \dfrac{dA}{dt} = -aJ + u(t) \\ \dfrac{dJ}{dt} = -bA \\ A(0) = 0, \quad J(0) = 21500 \end{cases} \tag{34}$$

美军战地记录给出增援率 $u(t)$ 为

$$u(t) = \begin{cases} 54000, & 0 \le t < 1 \\ 6000, & 2 \le t < 3 \\ 13000, & 5 \le t < 6 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

并可由每天伤亡人数算出 $A(t)$，$t = 1,2,\cdots,36$。下面要利用这些实际数据代入（34）式，算出 $A(t)$ 的理论值，并与实际值比较。

利用给出的数据，对参数 a,b 进行估计。对（34）式两边积分，并用求和来近似代替积分，有

$$A(t) - A(0) = -a\sum_{\tau=1}^{t} J(\tau) + \sum_{\tau=1}^{t} u(\tau) \tag{35}$$

$$J(t) - J(0) = -b\sum_{\tau=1}^{t} A(\tau) \tag{36}$$

为估计 b 在（36）式中取 $t = 36$，因为 $J(36) = 0$，且由 $A(t)$ 的实际数据可得 $\sum_{t=1}^{36} A(t) = 2037000$，于是从（36）式估计出 $b = 0.0106$。再把这个值代入(36)式即可算出 $J(t)$，$t = 1,2,\cdots,36$。

然后从(35)式估计 a。令 $t = 36$，得

$$a = \frac{\sum_{\tau=1}^{36} u(\tau) - A(36)}{\sum_{\tau=1}^{36} J(\tau)} \tag{37}$$

其中分子是美军的总伤亡人数，为 20265 人，分母可由已经算出的 $J(t)$ 得到，为 372500 人，于是从（37）式有 $a = 0.0544$。把这个值代入（35）式得

$$A(t) = -0.0544\sum_{\tau=1}^{t} J(\tau) + \sum_{\tau=1}^{t} u(\tau) \tag{38}$$

由（38）式就能够算出美军人数 $A(t)$ 的理论值，与实际数据吻合得很好。

习 题 十 三

1. 设位于坐标原点的甲舰向位于 x 轴上点 $A(1,0)$ 处的乙舰发射导弹，导弹始终对准乙舰。如果乙舰以最大的速度 v_0（v_0 是常数）沿平行于 y 轴的直线行驶，导弹的速

度是$5v_0$，求导弹运行的曲线。又乙舰行驶多远时，导弹将它击中？

2. 有高为 1m 的半球形容器，水从它的底部小孔流出。小孔横截面积为 $1cm^2$。开始时容器内盛满了水，求水从小孔流出过程中容器里水面的高度h（水面与孔口中心的距离）随时间t变化的规律。

3. 在交通十字路口，都会设置红绿灯。为了让那些正行驶在交叉路口或离交叉路口太近而无法停下的车辆通过路口，红绿灯转换中间还要亮起一段时间的黄灯。对于一位驶近交叉路口的驾驶员来说，万万不可处于这样的进退两难的境地：要安全停车则离路口太近；要想在红灯亮之前通过路口又觉太远。

那么，黄灯应亮多长时间才最为合理呢？

4. 我们知道现在的香烟都有过滤嘴，而且有的过滤嘴还很长，据说过滤嘴可以起到减少毒物进入体内。你认为呢？过滤嘴的作用到底有多大，与使用的材料和过滤嘴的长度有无关系？请你建立一个描述吸烟过程的数学模型，分析人体吸入的毒量与哪些因素有关，以及它们之间的数量表达式。

5. 根据经验当一种新商品投入市场后，随着人们对它的拥有量的增加，其销售量$s(t)$下降的速度与$s(t)$成正比。广告宣传可给销量添加一个增长速度，它与广告费$a(t)$成正比，但广告只能影响这种商品在市场上尚未饱和的部分（设饱和量为M）。建立一个销售$s(t)$的模型。若广告宣传只进行有限时间τ，且广告费为常数a，问$s(t)$如何变化？