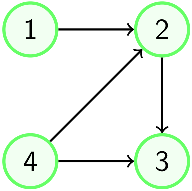
# PageRank és kiszámolása

Gáspár Tamás

2019 május 30.

# A PageRank definíciója

A PageRank egy Sergei Brin és Larry Page által alkotott módszer arra, hogy weboldalak egy halmazát a köztük lévű linkek alapján rangsoroljuk.
A weboldalak halmaza (röviden web) legyen egy irányított gráf, ahol az irányított élek fejezik ki az oldalak közti linkeket.




Egy 4 oldalból álló web

# A PageRank definíciója

**1. Definíció: Weboldal PageRankja.** Legyen adott egy web, ahol $V$ az oldalak halmaza. Legyen $v_i \in V$ oldal PageRankja $r(v_i)$, az oldalról kimenő linkek száma pedig $|v_i|$. Jelölje $B_i \subset V$ azon oldalak halmazát amelyen linkelnek $v_i$-re.
Ekkor $v_i$ oldal PageRank-ja definíció szerint:

$$r(v_i) = \sum_{v_j \in B_i} \frac{r(v_j)}{|v_j|}.$$

Egy oldal fontossága azon múlik, hogy mennyi oldal linkel rá, és hogy ezek milyen fontosak.
Megjegyzés: Rekurzív definíció.

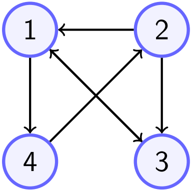
# A linkmátrix

Az oldalak között kapcsolatot mutatja.

**2. Definíció: Linkmátrix.**

$$a_{i,j} = \begin{cases} \frac{1}{|v_i|}, & \text{ha } v_i \text{ linkel } v_j\text{-re}, \\ 0, & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Egy példa: web és a hozzá tartozó linkmátrix.




$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

# Webhez rendelhető markov lánc

Megjegyzés: A linkmátrix sztochasztikus lesz (kivétel: ha van lógó oldal, de ez egyszerű helyettesítéssel megszüntethető).

Minden webhez rendelhetünk egy Markov-láncot, melynek állapotai az oldalak, átmenetvalószínűségei pedig a linkmátrix megfelelő elemei (ez lesz az átmenetmátrix).

A "*véletlen szörföző*" egyenletes eloszlás szerint halad az oldalon lévő linkeken.

# Definíció és a linkmátrix kapcsolata, PageRank vektor

Kapcsolat van a linkmátrix és a definícióból kapott egyenletrendszer között. Legyen $\mathbf{x}$ az oldalak PageRank-jaiból álló sorvektor, ekkor:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}A,$$

ami átalakítva

$$\mathbf{x}^T = A^T\mathbf{x}^T.$$

A fenti egyenlet mutatja, hogy a $\mathbf{x}$ a webhez rendelt markov lánc invariáns eloszlása lesz, a lenti pedig azt, hogy az 1-hez tartozó sajátvektor is (az $A^T$ mátrixban).

Megjegyzés: $\mathbf{x}$-et vegyük úgy, hogy a komponensek összege 1.

# A hatványiteráció

Hogyan számoljuk ki **x**-et? A pontos eredmény nem kivitelezhető, túl sok oldal. A megoldás a hatványiteráció:

$$x^{i+1} = A^T x^i$$

<u>Probléma:</u> A hatványiteráció a domináns sajátértékhez konvergál, ilyen nem biztos hogy van (például -1, vagy 1 többszörös multiplicitással). Különálló *"szubwebek"* esetén fordul elő.

A linkmátrixon (és a Markov-láncon) módosítani kell úgy, hogy a domináns sajátérték garantált legyen.

# A linkmátrix módosítása: Google mátrix

Megközelítés a Markov-láncok irányából: Ha a Markov-lánc irreducibilis és aperiodikus, akkor biztosan egyértelmű lesz az invariáns eloszlás.

**3. Definíció: Google mátrix.** Legyen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy web linkmátrixa, $S$ pedig egy egy olyan $n \times n$-es mátrix, melynek minden eleme $\frac{1}{n}$. Ekkor a Google mátrix definíció szerint

$$G := \alpha A + (1-\alpha)S, \qquad \alpha \in [0,1]$$

Példa: Egy linkmátrix és az $\alpha = 0,7$ paraméterrel kapott Google mátrix.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} 0{,}038 & 0{,}463 & 0{,}463 & 0{,}038 \\ 0{,}321 & 0{,}038 & 0{,}321 & 0{,}321 \\ 0{,}321 & 0{,}321 & 0{,}38 & 0{,}321 \\ 0{,}038 & 0{,}038 & 0{,}888 & 0{,}038 \end{pmatrix}$$

# A Google mátrix

A Google mátrix szintén sztochasztikus, és a szükséges tulajdonságokat is teljesíti. A hatványiteráció ($G$ transzponáltján végezve) tehát mindig PageRank vektorhoz fog konvergálni.

**Megjegyzés:** *(A helyettesítés mögötti heurisztika.)*
A véletlen szörföző most már nem csak a linkeken keresztül juthat el a következő oldalra, hanem $1-\alpha$ valószínűséggel egy egyenletes eloszlás szerint választott véletlen oldalra ugrik.