Skiladæmi 7 - Stærðfræði 2

Munið að rökstyðja öll svör og sýna alla útreikninga.

Dæmi 1. Látum $\mathcal{C}$ vera skurðferil sívalningsins $x^2 + y^2 = 4$ við planið $z = x + 2y$, en bara þann hluta þar sem $x \geq 0$. Við fáum nú gefið vigursvið

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 4xy(1 + x^2)\mathbf{i} + (1 + x^2)^2\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

Heildið vigursviðið eftir ferlinum, þ.e. reiknið $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ þar sem $\mathcal{C}$ er áttaður rangsælis þegar horft er á hann að ofan.

Lausn: Stikum ferilinn með

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 2\cos(t) + 4\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

fyrsti punktur ferilsins er því $(0, -2, -4)$ og endapunkturinn er $(0, 2, 4)$.

Mætti vigursviðsins er $\phi(x, y, z) = y(1 + x^2)^2 + z^2$ svo við getum reiknað

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(0, 2, -4) - \phi(0, -2, 4) = 2 + 16 - (-2 + 16) = 4$$

Væri líka hægt að stika með t.d.

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{4 - t^2} \\ t \\ \sqrt{4 - t^2} + 2t \end{pmatrix}, \quad t \in [-2, 2]$$

Dæmi 2. Reiknið $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ þar sem $\mathbf{F}$ er vigursviðið

$$\mathbf{F}(x, y) = (6x^2 - 2xy^2 + \frac{y}{\sqrt{x}})\mathbf{i} + (4 + 2\sqrt{x} - 2x^2 y)\mathbf{j}$$

og ferilinn $\mathcal{C}$ er sá hluti hringsins $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$ þar sem $x \geq 2$ áttaður réttsælis, þ.e. helmingur hrings með miðju í $(2, 1)$ og radíus 1.

Lausn: Vigursviðið er varðveitið með mættið $\phi(x, y) = -x^2y^2 + 4y + 2y\sqrt{x} + 2x^3 + C$ og ferillinn byrjar í $(2, 2)$ en endar í $(2, 0)$

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(2, 0) - \phi(2, 2) = 16 + 16 - 8 - 4\sqrt{2} - 16 = 4\sqrt{2} - 8$$

Athugið að það þarf ekki að stika ferilinn, hægt að finna byrjunar- og endapunkt með því að teikna upp mynd. En ein leið til að stika ferilinn réttsælis væri t.d.

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(-t) + 2 \\ \sin(-t) + 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi/2, \pi/2]$$

sem gefur sömu byrjunar- og endapunkta.

Dæmi 3. Reiknið $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ þar sem $\mathbf{F}$ er vigursviðið

$$\mathbf{F}(x, y) = (x + y)\mathbf{i} + (1 - x)\mathbf{j}$$

og ferilinn $\mathcal{C}$ er sá hluti ferilsins $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ sem er í 4. fjórðungi ($x \geq 0$ og $y \leq 0$) áttaður rangsælis.

Lausn: Vigursviðið er ekki varðveitið því

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -1 \neq \frac{\partial F_1}{\partial y} = 1$$

Stikum ferilinn með

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) \\ 3\sin(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [-\pi/2, 0]$$

(hér mætti líka velja $t \in [3\pi/2, 2\pi]$). Nú er

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{-\pi/2}^{0} \begin{pmatrix} 2\cos(t) + 3\sin(t) \\ 1 - 2\cos(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 3\cos(t) \end{pmatrix} \, dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{0} -4\sin(t)\cos(t) - 6\sin^2(t) + 3\cos(t) - 6\cos^2(t) \, dt \\
&= \int_{-\pi/2}^{0} -4\sin(t)\cos(t) + 3\cos(t) - 6 \, dt \\
&= \left[2\cos^2(t) + 3\sin(t) - 6t\right]_{-\pi/2}^{0} \\
&= 5 - 3\pi
\end{aligned}$$