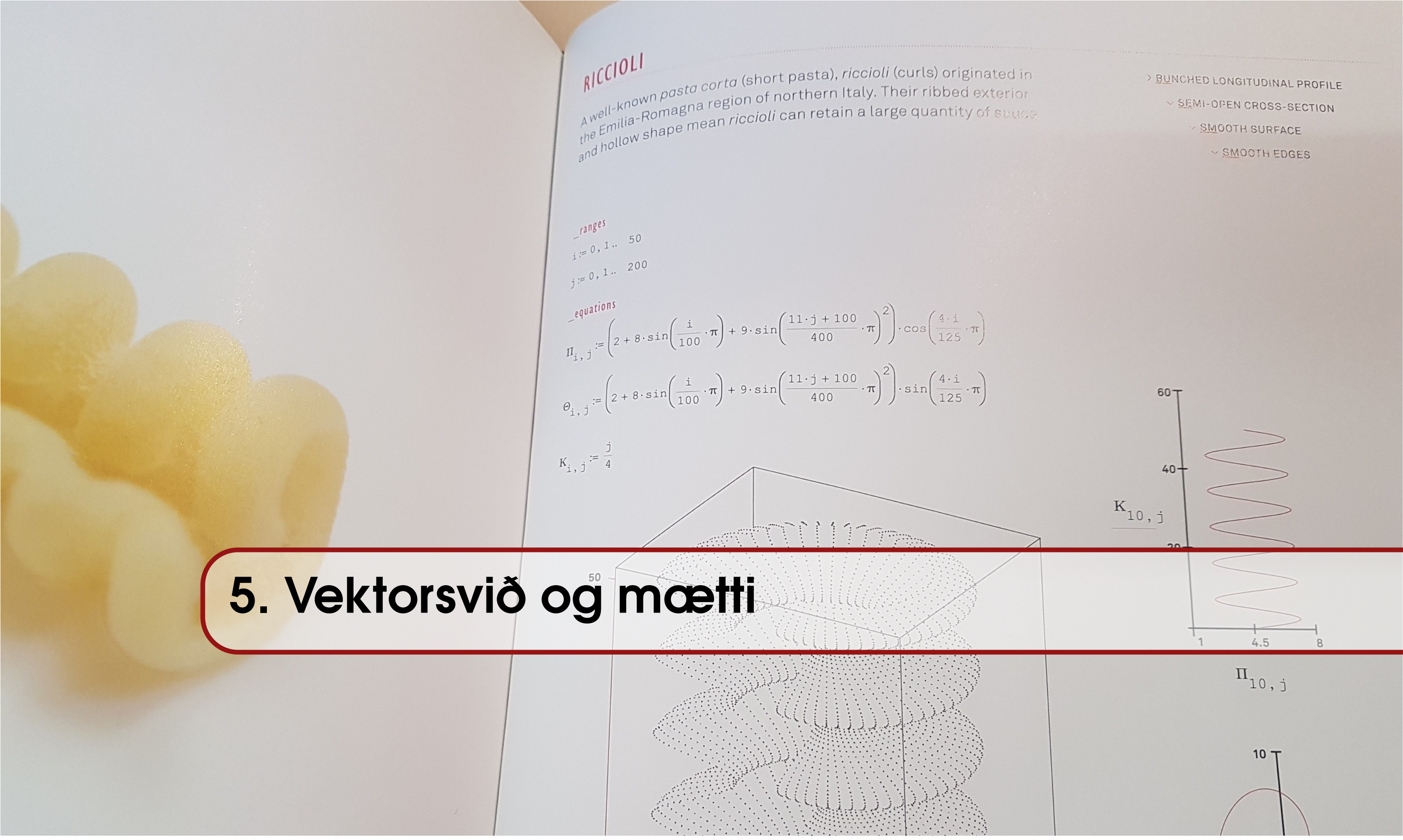


5. Vektorsvið og mætti

Í þessum hluta kynnumst við vektorsviðum og eiginleikum þeirra. Við fjöllum sérstaklega um varðveitin vektorsvið og mætti, sem eru afar mikilvæg í eðlisfræði. Auk þess lærum við að heilda vektorsvið eftir ferli.

5.1 Tölusvið og vektorsvið

Föll af gerðinni $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ kallast *tölusvið* (e. scalar field).

■ **Dæmi 5.1** Dæmi um tölusvið er fall $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, sem gefur hitastig sem fall af staðsetningu. ■

Föll af gerðinni $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ (stundum líka $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$), eða almennar $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ þar sem $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, eru kölluð *vektorsvið* (e. vector field).

Þegar við tölum um vektorsvið gerum við yfirleitt ráð fyrir að allir liðir fallsins $\mathbf{F}$ hafi samfelldar hlutafleiður af öllum stigum (annarsstigs nægir samt fyrir flest).

■ **Dæmi 5.2** Stigull falls $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ er vektorsvið. Ef $f(x, y, z)$ mælir t.d. hitastig, þá gefur vektorsviðið $\nabla f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ upplýsingar um í hvaða átt hitaaukningin er örust í punktinum (x, y, z). ■

■ **Dæmi 5.3** Dæmi um vektorsvið $\mathbf{E} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ er rafsvið sem myndast af hleðslu, $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E_1(\mathbf{r})\mathbf{i} + E_2(\mathbf{r})\mathbf{j} + E_3(\mathbf{r})\mathbf{k}$. Vigursviðið gefur þá stefnu og styrk straums. ■

5.1.1 Sviðslínur

Við getum séð t.d. rafsvið fyrir okkur sem sviðslínur sem ganga útfrá hleðslunum sem valda rafsviðinu. Við finnum sviðslínur með því að setja upp diffurjöfnu sem má leysa með aðskilnaði breytistærða. Fyrir vektorsvið

$$\mathbf{F}(x, y, z) = F_1(x, y, z)\mathbf{i} + F_2(x, y, z)\mathbf{j} + F_3(x, y, z)\mathbf{k}$$

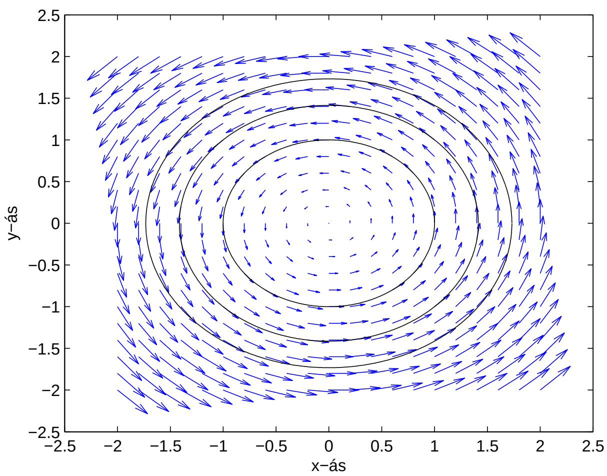
setjum við upp diffujöfnuna

$$\frac{dx}{F_1} = \frac{dy}{F_2} = \frac{dz}{F_3}$$

■ **Dæmi 5.4** Finnum sviðslínur fyrir vigursviðið $\mathbf{v} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{v}(x, y) = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$.

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} \quad \Leftrightarrow x^2 + y^2 = C, \quad C \in \mathbb{R}$$

■



Mynd 5.1: Hér sjáum við vigursviðið í dæmi 5.4 og sviðslínur þess fyrir $C = 1, 2, 3$.

Vigursviðið í dæmi 5.4 er hægt að teikna í Matlab með því að nota skipanirnar

```
x=-2:0.2:2;
[x,y] = meshgrid(x,x);
quiver(x,y,-y,x,1.5)
```

■ **Dæmi 5.5** Finnum sviðslínur fyrir vigursviðið $\mathbf{F}(x, y, x) = xz\mathbf{i} + 2x^2z\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$.

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{2x^2z} = \frac{dz}{x^2}$$

Leysum fyrstu tvo hluta saman og fáum $y = x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$ og leysum seinni tvo hlutana saman og fáum $y = z^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$. Sviðslínurnar eru skurðlínur þessara tveggja ferla.

■

Æfingar 5.1

Æfing 5.1.1 Teiknið mynd af vigursviðinu $\mathbf{F}(x, y) = \nabla(xy + 2x)$ og finnið sviðslínur þess. Hægt er að nota `quiver` í Matlab til að teikna vigursviðið. ■

5.2 Varðveitin vektorsvið hafa mætti

Látum nú $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$, þar sem $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, vera eitthvert fall. Þá er fallið $\mathbf{G} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = [\nabla\phi(\mathbf{x})]^T$$

vektorsvið. Fallið ϕ er sagt vera *mætti* vektorsviðsins $\mathbf{G}$.

Nú er eðlileg spurning: Hafa öll vektorsvið mætti? Með öðrum orðum: Ef $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, þar sem $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ er eitthvert fall, er þá til fall $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ þ.a. $[\nabla\phi(\mathbf{x})]^T = \mathbf{F}(\mathbf{x})$ fyrir öll $\mathbf{x} \in \mathcal{D}$?

Skoðum $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Þá er

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) = 0$$

og

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z) = 1.$$

Þess vegna getur $\mathbf{F}$ ekki haft mætti! Af hverju? Ef $\mathbf{F}$ hefði mætti $\phi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, þ.e.

$$[\nabla\phi(x, y, z)]^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial\phi}{\partial x}(x, y, z) \\ \\ \frac{\partial\phi}{\partial y}(x, y, z) \\ \\ \frac{\partial\phi}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x, y, z) \\ F_2(x, y, z) \\ F_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \mathbf{F}(x, y, z),$$

að þá mundi gilda

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2\phi}{\partial y \partial x}(x, y, z) = \frac{\partial^2\phi}{\partial x \partial y}(x, y, z) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x, y, z).$$

Svarið er því almennt nei, vektorsvið hefur ekki endilega mætti.

Skilgreining 5.2.1 Vektorsvið $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, þar sem $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, sem hefur mætti er sagt vera *varðveitið* (e. conservative).

ATH Athugið að nauðsynlegt (en ekki nægjanlegt) skilyrði fyrir því að vektorsvið $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ hafi mætti er að

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial z} \quad \text{og} \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \quad \text{og} \quad \frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

■ **Dæmi 5.6** Þyngdarsvið jarðar er vektorsvið $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sem úthlutar sérhverjum punkti með stöðuvektor $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$ vektor $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ þ.a. á massa m sem er staðsettur í $\mathbf{r}$ virkar krafturinn $m\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

Punktmassi m með staðsetningu í $\mathbf{r}_0 = (x_0\ y_0\ z_0)^T \in \mathbb{R}^3$ myndar þyngdarsvið

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -Gm\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}$$

í rúminu, sem er varðveitið í $\mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{r}_0\}$. Við sýnum að þetta vektorsvið sé varðveitið með því að sýna að $\mathbf{F}$ hafi mætti. Við sýnum að

$$\phi(\mathbf{r}) = Gm\frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|}$$

sé mætti fyrir $\mathbf{F}$.

Með $\mathbf{r} = (x\ y\ z)^T$ gildir

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\phi(\mathbf{r}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Gm}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{\frac{1}{2}}}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\frac{Gm}{((x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2)^{\frac{3}{2}}}2(x-x_0)\\ &= \frac{-Gm(x-x_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}\end{aligned}$$

og svipað gildir

$$\frac{\partial}{\partial y}\phi(\mathbf{r}) = \frac{-Gm(y-y_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3} \quad \text{og} \quad \frac{\partial}{\partial z}\phi(\mathbf{r}) = \frac{-Gm(z-z_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}.$$

En þá er

$$[\nabla\phi(\mathbf{r})]^T = \left(\frac{-Gm(x-x_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}\ \ \frac{-Gm(y-y_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}\ \ \frac{-Gm(z-z_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^3}\right)^T = \mathbf{F}(\mathbf{r})$$

■

■ **Dæmi 5.7** Er $\mathbf{F}(x,y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$ varðveitið? Ef svo er finnum mættið.

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = 0 = \frac{\partial F_2}{\partial x}$$

svo $\mathbf{F}$ er mögulega geymið. Athugum hvort við getum fundið mætti, leysum

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = x \Rightarrow \phi(x,y) = \frac{x^2}{2} + g(y)$$

og
$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = -y \Rightarrow \phi(x,y) = -\frac{y^2}{2} + f(x)$$
svo
$$\phi(x,y) = -\frac{y^2}{2} + \frac{x^2}{2}$$
■

Æfingar 5.2

Æfing 5.2.1 Ákvarðið hvort vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,
$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2+y^2}$$
sé varðveitið (geymið, e. *conservative*) og finnið mætti (e. *potential*) þess ef svo er. ■

Æfing 5.2.2 Ákvarðið hvort vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$$\mathbf{F}(x,y,z) = 2xy^3\sin(z)\mathbf{i} + 3x^2y^2\sin(z)\mathbf{j} + x^2y^3\cos(z)\mathbf{k}$$
sé varðveitið (geymið, e. *conservative*) og finnið mætti (e. *potential*) þess ef svo er. ■

5.3 Ferilheildi af vigursviðum

Látum $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vera vektorsvið og látum $\mathcal{C}$ vera feril í $\mathbb{R}^3$. Látum $\mathbf{r} : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vera einhverja stikun á ferlinum $\mathcal{C}$. Ferilheildi $\mathbf{F}$ yfir ferilinn $\mathcal{C}$ er nú skilgreint sem heildið
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt.$$
Sýna má að þetta heildi er óháð stikuninni $\mathbf{r}$, nema hvað að ef $\mathbf{a}$ er upphafspunktur $\mathcal{C}$ og $\mathbf{b}$ er endapunktur $\mathcal{C}$, að þá skiptir máli hvort maður stikar frá $\mathbf{a}$ til $\mathbf{b}$ eða frá $\mathbf{b}$ til $\mathbf{a}$. Maður þarf semsagt að taka það fram sérstaklega.

■ **Dæmi 5.8** Látum $\mathbf{F}(x,y) = y^2\,\mathbf{i} + 2xy\,\mathbf{j}$ vera vektorsvið og $\mathcal{C}$ vera línustykki með upphafspunkt í $(0\ 0)^T$ og endapunkt í $(1\ 1)^T$. Við reiknum ferilheildi $\mathbf{F}$ yfir $\mathcal{C}$. Við stikum $\mathcal{C}$ með $\mathbf{r} : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = (t\ t)^T$. Þá er
$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt = \int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ 2t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 3t^2 dt = 1.$$
Ef við stikum $\mathcal{C}$ með $\mathbf{r} : [0,\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\mathbf{r}(t) = 2^{-\frac{1}{2}}(t\ t)^T$. Þá er
$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\sqrt{2}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} t^2/2 \\ 2t^2/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2}} \frac{3}{2} t^2 dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} [t^3]_{t=0}^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} 2\sqrt{2} = 1.\end{aligned}$$

■

Fyrir verðveitin vektorsvið $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, þar sem $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, er ferilheildið yfir einhvern feril einungis háð upphafs- og endapunkti ferilsins, ef $\mathcal{D}$ er *samanhangandi svæði* í $\mathbb{R}^3$. Samanhangandi þýðir að hægt er að tengja saman sérhverja tvo punkta $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ í $\mathcal{D}$ með ferli sem er í $\mathcal{D}$. *Einfaldlega samanhangandi* svæði er líka mikilvægt hugtak, en er eitthvað flóknara. Við fjöllum stuttlega um einfaldlega samhangandi svæði í fyrirlestrunum.

Ef $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, er varðveitið vektorsvið með mættið $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$ og $\mathcal{C}$ er ferill í $\mathcal{D}$ með upphafspunkt $\mathbf{a}$ og endapunkt $\mathbf{b}$, þá er auðvelt að reikna heildið yfir vektorsviðið $\mathbf{F}$ yfir ferilinn $\mathcal{C}$, stikaðan frá $\mathbf{a}$ til $\mathbf{b}$, þá gildir nefnilega

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a})$$

vegna þess að fyrir hvaða stikun $\mathbf{r}$ sem er gildir skv. keðjureglunni

$$(\phi \circ \mathbf{r})'(t) = \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t)) = [\nabla\phi(\mathbf{r}(t))]\mathbf{r}'(t) = [\nabla\phi(\mathbf{r}(t))]^T \cdot \mathbf{r}'(t) = \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)$$

svo ef $\mathbf{r} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er einhver stikun á ferlinum $\mathcal{C}$ með $\mathbf{a} = \mathbf{r}(a)$ sem upphafspunkt og $\mathbf{b} = \mathbf{r}(b)$ sem endapunkt, þá er

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt = \int_a^b (\phi \circ \mathbf{r})'(t)\, dt \\ &= (\phi \circ \mathbf{r})(b) - (\phi \circ \mathbf{r})(a) = \phi(\mathbf{r}(b)) - \phi(\mathbf{r}(a)) = \phi(\mathbf{b}) - \phi(\mathbf{a}).\end{aligned}$$

Eftirfarandi staðreynd er mjög mikilvæg.

Regla 5.3.1 Látum $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vera vektorsvið, þar sem $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$ er samanhangandi svæði. Þá eru eftirfarandi fullyrðingar jafngildar:

(a) $\mathbf{F}$ er varðveitið vektorsvið.

(b)
$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$
fyrir alla lokaða ferla $\mathcal{C}$ sem liggja í $\mathcal{D}$.

(c) Ef $\mathbf{a}$ og $\mathbf{b}$ eru í $\mathcal{D}$ og $\mathcal{C}_1$ og $\mathcal{C}_2$ eru tveir ferlar sem liggja í $\mathcal{D}$ og hafa $\mathbf{a}$ sem upphafspunkt og $\mathbf{b}$ sem endapunkt, þá er
$$\int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

(d) Ef $\mathcal{D}$ er einfaldlega samanhangandi svæði þá er
$$\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$$
jafngilt skilyrðunum (a), (b) og (c).

Hvað er $\nabla \times \mathbf{F}$ og hvaðan kemur það?

Þegar við erum að fjalla um föll af 3-breytistærðum þá er *diffurvirkinn* ∇ skilgreindur sem

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Þegar maður reiknar $\nabla \times \mathbf{F}$, kallað rót $\mathbf{F}$, getur maður ímyndað sér að maður sé að reikna krossfeldið

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}.$$

Stundum er ritað $\mathbf{curl}\,\mathbf{F}$ eða $\mathbf{rot}\,\mathbf{F}$ fyrir $\nabla \times \mathbf{F}$.

■ **Dæmi 5.9** Látum $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, vera varðveitið vektorsvið með mætti $\phi : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}$. Þ.e.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y, z) \\ \\ \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y, z) \\ \\ \frac{\partial \phi}{\partial z}(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

Við reiknum út að $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. ■

Þetta dæmi sýnir að nauðsynlegt skilyrði til þess að $\mathbf{F} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, sé varðveitið vektorsvið, þ.e. að $\mathbf{F}$ hafi mætti, sé að

$$\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$$

fyrir öll $(x\ y\ z)^T \in \mathcal{D}$. Regla 5.3.1 segir okkur að þetta skilyrði sé líka nægjanlegt ef $\mathcal{D}$ er einfaldlega samanhangandi svæði.

Annar mikilvægur diffurvirki á vektorsvið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er uppspretta (e. divergence) þess, táknuð

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = \frac{\partial}{\partial x} F_1(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial y} F_2(x, y, z) + \frac{\partial}{\partial z} F_3(x, y, z).$$

Athugið að lítið mál er að skilgreina uppsprettu $\nabla \cdot \mathbf{F}$ falls $\mathbf{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fyrir hvaða n sem er, en einungis er mögulegt að skilgreina rótið $\nabla \times \mathbf{F}$ ef $n = 3$.

Við segjum að vektorsvið $\mathbf{F}$ sé uppsprettulaust (e. solonodial) ef $\nabla \cdot \mathbf{F}(x, y, z) = 0$ á svæði $\mathcal{D}$. Við segjum að vigursviðið sé hvirflalaust (e. irrotational) ef $\nabla \times \mathbf{F}(x, y, z) = \mathbf{0}$ á svæði $\mathcal{D}$.

■ **Dæmi 5.10** Dæmi úr eðlisfræðinni þar sem talað er um uppsprettu og rót eru jöfnur Maxwells, sem eru þungamiðjan í klassískri rafsegulfræði:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &= \frac{\rho(t, \mathbf{x})}{\epsilon_0}, \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}(t, \mathbf{x}), \\ \nabla \times \mathbf{B}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 5.11** Er vektorsviðið

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (xy - \sin z)\,\mathbf{i} + \left(x^2 - \frac{e^y}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)\mathbf{k}$$

varðveitið á $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > 0\}$? Heildið $\mathbf{F}$ yfir ferilinn $\mathcal{C}$ sem gefinn er með stikuninni

$$\mathbf{r} : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Athugum að

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial y}(xy - \sin z) = x$$

og

$$\frac{\partial}{\partial x} F_2(x,y,z) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 - \frac{e^y}{z}\right) = 2x$$

svo $\nabla \times \mathbf{F} \neq \mathbf{0}$ og því er $\mathbf{F}$ ekki varðveitið (hefur ekki mætti). Ferilheildið af $\mathbf{F}$ yfir $\mathcal{C}$ er:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)\, dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \begin{pmatrix} \cos t \sin t - \sin(\pi) \\ \cos^2 t - \frac{1}{\pi}\exp(\sin t) \\ \frac{1}{\pi^2}\exp(\sin t) - \cos t \cos(\pi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(-\cos t \sin^2 t + \cos^3 t - \frac{1}{\pi}\exp(\sin t)\cos t\right) dt = \frac{1}{3} + \frac{1-e}{\pi}.
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 5.12** Er vektorsviðið

$$\mathbf{G}(x,y,z) = (xy - \sin z)\,\mathbf{i} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right)\mathbf{k}$$

varðveitið á $\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z > 0\}$? Heildið að auki $\mathbf{G}$ yfir ferilinn $\mathcal{C}$ sem gefinn er með stikuninni

$$\mathbf{r} : [0, \pi/2] \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \pi \end{pmatrix}.$$

Nú er

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{G} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ G_1 & G_2 & G_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial G_3}{\partial y} - \frac{\partial G_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial G_3}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial G_2}{\partial x} - \frac{\partial G_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} \\
&= \left(\frac{e^y}{z^2} - \frac{e^y}{z^2}\right)\mathbf{i} - (-\cos z + \cos z)\,\mathbf{j} + (x - x)\,\mathbf{k} \\
&= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

og $\mathcal{D}$ er einfaldlega samanhangandi svæði svo $\mathbf{G}$ hefur mætti ϕ. Til þess að finna mættið skoðum við að

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = G_1 = xy - \sin z, \quad \text{svo} \quad \phi = \int (xy - \sin z)dx = \frac{1}{2}x^2 y - x\sin z + C_1(y,z),$$

og

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = G_2 = \frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}, \quad \text{svo} \quad \phi = \int \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{e^y}{z}\right) dy = \frac{1}{2}x^2 y - \frac{e^y}{z} + C_2(x,z),$$

og

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = G_3 = \frac{e^y}{z^2} - x\cos z, \quad \text{svo} \quad \phi = \int \left(\frac{e^y}{z^2} - x\cos z\right) dz = -\frac{e^y}{z} - x\sin z + C_3(x,y)$$

og því er

$$\phi(x,y,z) = \frac{1}{2}x^2 y - x\sin z - \frac{e^y}{z} + C,$$

þar sem C er einhver fasti.

Ferilheildið af $\mathbf{G}$ yfir $\mathcal{C}$ er:

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{G}\cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}(\pi/2)) - \phi(\mathbf{r}(0)) = \phi(0,1,\pi) - \phi(1,0,\pi) = \frac{-e}{\pi} + \frac{1}{\pi} = \frac{1-e}{\pi}.$$

■

■ **Dæmi 5.13** Ef við skoðum tvö síðustu dæmi þá sjáum við að

$$\mathbf{F}(x,y,z) = \mathbf{G}(x,y,z) + \frac{1}{2}x^2\mathbf{j} = \nabla\phi(x,y,z) + \frac{1}{2}x^2\mathbf{j}.$$

Reiknum

$$\int_{\mathcal{C}} \frac{1}{2}x^2 dy = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \cos^3 t dt = \frac{1}{3}$$

sem ætti ekki að koma á óvart! ■

Æfingar 5.3

Æfing 5.3.1 Tveir langir leiðarar liggja samsíða z-ás. Leiðararnir liggja í $(y,x) = (0,\pm 1)$, þar sem fjarlægð er mæld í einhverri hentugri einingu. Jafna segulsviðsins (mælt í hengtugum einingum) er gefin með

$$\mathbf{b}(x,y) = \frac{(x-1)\mathbf{j} - y\mathbf{i}}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{\eta((x+1)\mathbf{j} - y\mathbf{i})}{(x+1)^2 + y^2}$$

þar sem $\eta > 0$ lýsir ósamhverfu segulsviðsins. Athugið að vírarnir eru óendalega langir þannig að $\mathbf{b}$ er ekki háð breytunni z, og þar sem vírarnir liggja samsíða z-ás þá hefur sviðið engan z-þátt.

a) Sýnið að vektorsviðið $\mathbf{b}(x,y)$ er uppsprettulaust (e. *solenoidal*): $\nabla\cdot\mathbf{b}(x,y) = 0$.
b) Teiknið upp vektorsviðið fyrir $\eta = 1.5$.

■

Æfing 5.3.2 Reiknið ferilheildið af vigursviðinu $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$ eftir ferlinum $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ frá $(0,\ 0,\ 0)$ til $(2,\ 4,\ 8)$. ■

Æfing 5.3.3 Gefið er vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ og ferill $\mathcal{C}$, sem er stikaður með $\mathbf{r} : [0, 5\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$. Reiknið ferilheildið

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

■

Æfing 5.3.4 Gefið er vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - y - z)\mathbf{i} + (2y - x)\mathbf{j} + (2z - x)\mathbf{k}$$

og látum $\mathcal{C}$ vera skurðferil $z = x^2 + 4y^2$ við $z = 3x - 2y$. Reiknið

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

■

Æfing 5.3.5 Gefin eru vigursviðin

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{F}(x, y, z) = 2xyz^2\mathbf{i} + (x^2z^2 + z\cos(yz))\mathbf{j} + (2x^2yz + y\cos(yz))\mathbf{k} \quad \text{og}$$

$$\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{G}(x, y, z) = 2xyz^2\mathbf{i} + (x^2z^2 + z\cos(yz) - 2zy)\mathbf{j} + (2x^2yz + y\cos(yz))\mathbf{k}$$

a) Stikið ferilinn $\mathcal{C}$ sem fæst þegar $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sker planið $z = 2$.
b) Er vigursviðið $\mathbf{F}$ geymið (varðveitið, e. *conservative*)?
c) Finnið mætti vigursviðsins $\mathbf{F}$ ef það er til.
d) Reiknið ferilheildin

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{og} \quad \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

■

Æfing 5.3.6 Gefið er vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er varðveitið með mættið

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2}$$

þar sem $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)^T \in \mathbb{R}^3$ og $\mathbf{r}_0 = (a,\ b,\ c)^T$ er fastavigur. Finnið vigursviðið $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.
■

Æfing 5.3.7 Sýnið að öll varðveitin vektorsvið $\mathbf{G}$ eru hvirflalaus (irrotational), þ.e. er $\nabla \times \mathbf{G}(x, y, z) = \mathbf{0}$. ■

5.4 Flæði vektorsviðs í gegnum stikaðan flöt

Svipað og maður getur reiknað ferilheildi yfir vektorsvið $\mathbf{F}$ eftir ferli $\mathcal{C}$, ritað

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

getur maður reiknað flæði vektorsviðs $\mathbf{F}$ (flux of $\mathbf{F}$) í gegnum stikaðan flöt $\mathcal{S}$, ritað

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \;\; \text{eða} \quad \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} dS.$$

Þar sem

$$dS = \|\mathbf{n}(u,v)\| du\, dv$$

eins og við sáum í kafla 4.5 (sjá samantekt á bls 86) og

$$\hat{\mathbf{N}}(u,v) := \frac{\mathbf{n}(u,v)}{\|\mathbf{n}(u,v)\|},$$

er eininga normalvigur á yfirborðið S. Ef við stikum yfirborðið með $\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k}$ er normalvigur á yfirborðið gefið með formúlunni

$$\mathbf{n}(x,y) = -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Við höfum þá að

$$d\mathbf{S} = \hat{\mathbf{N}} dS = \pm \frac{\mathbf{n}(x,y)}{\|\mathbf{n}(x,y)\|} \|\mathbf{n}(x,y)\| dxdy = \pm \mathbf{n}(x,y) dxdy$$

þar sem formerkið ræðst af því í hvora áttina í gegnum yfirborðið við viljum finna flæðið. Fyrir flæði út úr yfirborðinu er formerkið plús, en fyrir flæði inn er formerkið mínus. Við getum þá reiknað flæðisheildið með

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}\, dS = \int_{\mathcal{D}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y)) \cdot \mathbf{n}(x,y)\, dx\, dy.$$

ef flæðið er pósitívt, en annars fáum við sama heildi með neikvæðu formerki.

■ **Dæmi 5.14** Finnum flæði (e. flux) vigursviðsins $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ upp í gegnum yfirborðið $\mathcal{S}$, sem er sá hluti $z = 1 - x^2 - y^2$ sem er yfir ofan xy-planið. M.ö.o. Reiknið

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}.$$

Stikum yfirborðið

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}, \quad \text{þ.s. } x^2 + y^2 \le 1$$

Nú er $\mathbf{n} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ og við heildum

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = & \iint_{x^2+y^2 \le 1} \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y)) \cdot \mathbf{n} dA \\
= & \iint_{x^2+y^2 \le 1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dA \\
= & \iint_{x^2+y^2 \le 1} 2x^2 + 2y^2 dA \\
= & \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \cdot r \, dr \, d\theta \\
= & 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{2} \right]_0^1 = \pi
\end{aligned}$$

■

Æfingar 5.4

Æfing 5.4.1 Finnum flæði (e. flux) vigursviðsins $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ upp í gegnum yfirborðið $\mathcal{S}$, sem er sá hluti $z = 1 - x^2 - y^2$ sem er yfir ofan xy-planið. M.ö.o. Reiknið

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

■