Skiladæmi 8 - Stærðfræði 2

Munið að rökstyðja öll svör og sýna alla útreikninga.

Dæmi 1. Látum $\mathcal{S}$ vera þann hluta plansins $z = 2x + 3$ sem er inní skálinni $z = x^2 + y^2$. Finnið flæði vigursviðsins

$$\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} + xyz^2\mathbf{j} + (4x + y)\mathbf{k}$$

upp í gegnum $\mathcal{S}$, þ.e. reiknið

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Lausn: Stikum planið með

$$\mathbf{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2x + 3 \end{pmatrix}, \quad (x-1)^2 + y^2 \leq 4$$

sem hefur normalvigur $\mathbf{n} = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

Við reiknum nú

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_{(x-1)^2+y^2 \leq 4} \mathbf{F}(\mathbf{r}(x, y)) \cdot \mathbf{n} \; dxdy \\
&= \int_{(x-1)^2+y^2 \leq 4} \begin{pmatrix} 2x + 3 \\ xy(2x + 3)^2 \\ 4x + y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \; dxdy \\
&= \int_{(x-1)^2+y^2 \leq 4} y - 6 \; dxdy \\
&= \int_{(x-1)^2+y^2 \leq 4} -6 \; dxdy = -24\pi
\end{aligned}$$

þar sem við nýttum okkur að y er oddstætt fall um $y = 0$ og svæðið sem heilda á yfir er samhverft um $y = 0$.

Dæmi 2. Látum S vera þríhyrningslaga flöt í $\mathbb{R}^3$ sem hefur hornpunkta $(0,0,4)$, $(0,2,0)$ og $(2,0,0)$. Reiknið yfirborðsheildið

$$\int_S 2x - z \; dS$$

Lausn: Byrjum á að sjá að S er sá hluti plansins $2x + 2y + z = 4$ þar sem $0 < y < 2 - x$ og $0 < x < 2$. Við stikum planið með

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 4 - 2x - 2y \end{bmatrix}$$

sem hefur normalvigurinn $\mathbf{n} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ sem hefur lengdina $||\mathbf{n}|| = 3$. og fáum því heildið

$$\int_0^2 \int_0^{2-x} 2x - (4 - 2x - 2y) \; dy \; dx = \int_0^2 \int_0^{2-x} 4x + 2y - 4 \; dy \; dx$$

við getum ekki stytt okkur leið (þríhyrningurinn er í 1. fjórðungi). Heildum fyrst m.t.t. y

$$\int_0^2 \left[4xy + y^2 - 4y\right]_0^{2-x} \; dx = \int_0^2 4x(2-x) + (2-x)^2 - 4(2-x) \; dx = \int_0^2 -x^3 + 8x - 4 \; dx$$

og loks m.t.t. x

$$\left[-x^3 + 4x^2 - 4x\right]_0^2 = -8 + 16 - 8 = 0$$

Dæmi 3. Skoðum vigursviðið
$$\mathbf{F}(x,y,z) = (x^2+y^2)\mathbf{j} - z\mathbf{k}$$
Látum $\mathcal{S}$ vera þann hluta yfirborðs sívalningsins $x^2+y^2=4$ sem liggur fyrir ofan planið $z=0$ en fyrir neðan planið $z=x+2$. Reiknið flæði $\mathbf{F}$ út í gegnum $\mathcal{S}$.

Lausn. Yfirborð sívalnings er stikað með
$$\mathbf{r}(\theta,z) = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta) \\ z \end{pmatrix}$$
En þar sem $0 \le z \le x+2$ gildir $0 \le z \le 2\cos(\theta)+2$. Þá er $0 \le \theta \le 2\pi$. Normalvigur við sívalning er að venju
$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$
sem einmitt stefnir út. Athugum að $x^2+y^2 = (2\cos(\theta))^2 + (2\sin(\theta))^2 = 4$ og þá er flæðið reiknað með
$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\cos(\theta)+2} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix} dz d\theta = 8\int_0^{2\pi}\int_0^{2\cos(\theta)+2} \sin(\theta) dz d\theta$$
sem gefur
$$8\int_0^{2\pi} (2\cos(\theta)+2)\sin(\theta) d\theta = 16\int_0^{2\pi} \cos(\theta)\sin(\theta) d\theta + 16\int_0^{2\pi} \sin(\theta) d\theta = 0$$