Skiladæmi 3 - Stærðfræði 2

Munið að rökstyðja öll svör og sýna útreikninga.

Dæmi 1. Finnið markgildið

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2}$$

Lausn: Byrjum á að umskrifa aðeins

$$\begin{aligned}\frac{x^2+y^2-x^3y^3}{x^2+y^2} &= 1-\frac{x^3y^3}{x^2+y^2} \\ &= 1-\frac{x^2}{x^2+y^2}xy^3 \\ &\underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 1-0=1\end{aligned}$$

Síðasta skrefið þarf að rökstyðja. Við getum notað að

$$0 \leq \left|\frac{x^2}{x^2+y^2}xy^3\right| \leq |xy^3|$$

og þar sem efri og neðri mörk fallsins stefna á 0 þegar (x,y) stefna á $(0,0)$, þá skv. klemmureglu er

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}xy^3 = 0$$

Hér væri líka hægt að nota pólhnit því

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^3}{x^2+y^2} = \lim_{r\to 0} \frac{r^6\cos^3(\theta)\sin^3(\theta)}{r^2} = \lim_{r\to 0} r^4\cos^3(\theta)\sin^3(\theta) = 0$$

þar sem við vitum að stærðin $\cos^3(\theta)\sin^3(\theta)$ er takmörkuð á milli -1 og 1.

Dæmi 2. Sýnið að markgildið

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 y}{x^6 + y^2}$$

er ekki til.

Lausn: Köllum fallið $f(x, y)$. Sjáum að þegar $x = 0$ (og $y \neq 0$) þá er fallið

$$f(0, y) = \frac{0}{y^2} = 0$$

svo markgildið er 0 þegar $(x, y) \to (0, 0)$. Og þegar $y = 0$ þá er fallið líka $f(x, 0) = 0$ svo markgildið úr þessarri stefnu er líka 0. Þegar $y = x$ er fallið

$$f(x, x) = \frac{x^4}{x^6 + x^2} = \frac{1}{x^2 + 1/x^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Ef við skoðum hins vegar $y = x^3$ er fallið

$$f(x, x^3) = \frac{x^6}{2x^6} = \frac{1}{2}$$

svo markgildið eftir $x = y^3$ er $1/2 \neq 0$ og þar sem markgildið er þá mismunandi þegar við nálgumst $(0, 0)$ á tvo mismunandi vegu þá er markgildið ekki til.

Dæmi 3. Skoðum fallið $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{y}{x} + \dfrac{8}{y} - x$.

a) Hvert er formengi fallsins?

b) Finnið stigul fallsins.

c) Finnið snertiplan við graf fallsins í $(5, -15, f(5, -15))$.

d) Finnið öll lárétt snertiplön við graf fallsins. M.ö.o. finnið öll k þannig að $z = k$ sé snertiplan.

e) Sýnið að markgildi fallsins þegar $(x, y) \to (0, 0)$ er ekki til.

Lausn:

a) Formengið er öll $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ þar sem $x \neq 0$ og $y \neq 0$.

b) Við diffrum og fáum hlutafleiðurnar

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2} - 1 = -\frac{y + x^2}{x^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x} - \frac{8}{y^2} = \frac{y^2 - 8x}{xy^2}$$

svo stigullinn er

$$\nabla f(x, y) = \left(-\frac{y + x^2}{x^2}, \quad \frac{y^2 - 8x}{xy^2}\right)$$

c) Til að finna snertiplanið í $(5, -15)$ reiknum við

$$\nabla f(5, -15) = \left(-\frac{10}{25}, \ \frac{37}{225}\right)$$

Jafna snertils er

$$z = -\frac{10}{25}(x - 5) + \frac{37}{225}(y + 15) - \frac{128}{15}$$

d) Til að finna lárétt snertiplan þurfa báðar afleiður að vera $= 0$. Við fáum tvær jöfnur $y + x^2 = 0$ og $y^2 - 8x = 0$. Nú fæst lausnin $(0, 0)$ sem gengur ekki, því fallið er ekki skilgreint þar. Hin lausnin er $(2, -4)$ sem gefur okkur snertiplanið $z = -6$.

e) Skoðum fallið þegar $y = x$ þá er $f(x, x) = 1 + \dfrac{8}{x} - x$, þetta fall hefur markgildið ∞ þegar $x \to 0^+$ en markgildið $-\infty$ þegar $x \to 0^-$. Þar sem við fáum mismunandi markgildi eftir mismunandi áttum að $(0, 0)$ ályktum við að markgildið er ekki til.