Skiladæmi 9 - Stærðfræði 2

Munið að rökstyðja öll svör og sýna alla útreikninga.

Dæmi 1. Látum $\mathcal{D}$ vera þann hluta skifunnar $x^2 + y^2 \leq 1$ sem liggur á milli línanna $y = x$ og $y = -x$ og þar sem að auki gildir $x \leq 0$. Látum svo $\mathcal{C}$ vera ferilinn sem afmarkar $\mathcal{D}$, áttaður rangsælis. Ef $\mathbf{F}(x, y) = -y^2\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ reiknið ferilheildið

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Lausn: Með formúlu Green nægir að reikna tvöfalt heildi $\dfrac{\partial F_2}{\partial x} - \dfrac{\partial F_1}{\partial y} = 2x + 2y$ á $\mathcal{D}$, svo ferilheildið er jafnt

$$\int\int_{\mathcal{D}} (2x + 2y)\, dA$$

Athugum að $x^2 + y^2 = 1$ og $y = \pm x$ skerast í $(\pm\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ og pólhorn eru þar $3\pi/4$ og $5\pi/4$. Þar sem svæðið okkar er samhverft um $y = 0$ og $2y$ er oddstætt fall af y, má losna við þann hluta af heildinu og láta nægja að heildi $2x$. Nú verðum við að finna mörk $\mathcal{D}$. Pólhnitin henta ágætlega og mörkin eru þá

$$0 \leq r \leq 1, \;\; \frac{3\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{4}$$

Fáum þá (ath. auka r í dA):

$$\int_0^1 \int_{3\pi/4}^{5\pi/4} 2r\cos(\theta)(r\, d\theta\, dr) = 2\left(\int_0^1 r^2\, dr\right)\left(\int_{3\pi/4}^{5\pi/4} \cos(\theta)\, d\theta\right) = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [\sin(\theta)]_{3\pi/4}^{5\pi/4} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Dæmi 2. Látum $\mathcal{S}$ vera þann hluta skálar (á hvolfi) $z = 4 - x^2 - y^2$ sem liggur fyrir ofan planið $z = 0$. Reiknið flæði vektorsviðsins

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x^3\mathbf{i} - 3x^2y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

upp í gegnum $\mathcal{S}$.

Ábending: Hér er hægt að nota setningu Gauss til að einfalda útreikninga.

Lausn 1 - Gauss. Athugum að ef $\mathcal{D}$ er þrívídd svæði sem afmarkast af $z = 0$ og $z = 4 - x^2 - y^2$ er yfirborð þess í tveimur hlutum, annars vegar $\mathcal{S}$ og hins vegar skifan $x^2 + y^2 = 4$ í $z = 0$ planinu. Þá gildir

$$\text{Heildarflæði út } = \text{Flæði upp í gegnum } \mathcal{S} + \text{Flæði niður í gegnum skífuna}$$

Heildarflæði reiknast skv. setningu Gauss. Athugum að uppspretta $\mathbf{F}$ er einfaldlega 1 þ.a. við fáum

$$\text{Heildarflæði út } = \int\int\int_{\mathcal{D}} dV$$

Í sívalningshnitum eru mörk $\mathcal{S}$:

$$0 \leq z \leq 4 - r^2 \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi \qquad 0 \leq r \leq 2$$

og $dV = rdrd\theta dz$. Fáum þá

$$\text{Heildarflæði út } = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{4-r^2} rdzd\theta dr$$

sem gefur

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} r(4 - r^2)d\theta dr = 2\pi \int_0^2 (4r - r^3)\, dr = 2\pi \left[2r^2 - \frac{r^4}{4}\right]_0^2 = 8\pi$$

Finnum svo flæði níður í gegnum skifuna $x^2 + y^2 \leq 4$. Hún er stikuð með

$$\mathbf{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, x^2 + y^2 \leq 4$$

með normalvigri $\mathbf{n} = -\mathbf{k}$. En þar sem $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = 0$ þegar $z = 0$ er ljóst að það flæði sé jafnt og 0. Við endum með að umbeðna flæðið sé jafnt og 8π.

Lausn 2 - Beinn útreikningur. Við stikum $\mathcal{S}$ með

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 4 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}, x^2 + y^2 \leq 4$$

þ.s. $z \geq 0$. Normalvigur upp við $\mathcal{S}$ er þá

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} -\partial z/\partial x \\ -\partial z/\partial y \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Flæði er þá jafnt heildinu

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 4} \begin{pmatrix} x^3 \\ -3x^2y \\ 4 - x^2 - y^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dx\, dy$$

sem gefur

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 4} (2x^4 - 6x^2y^2 - x^2 - y^2 + 4)\, dx\, dy$$

Engin samhverfa nýtist og við notum pólhnit:

$$\int_0^2 \int_0^{2\pi} (2r^4\cos^4(\theta) - 6r^4\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) - r^2 + 4)r\, d\theta dr$$

Þetta óskemmtilegt heildi er jafnt og 8π.

Dæmi 3. Látum

$$\mathbf{F}(x,y,z) = z^2\mathbf{i} + \sin(y^2)\mathbf{j} + (z^2 - y^2)\mathbf{k}$$

og látum $\mathcal{C}$ vera þríhyrningslaga feril sem tengir punktana $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ og $(1,1,1)$, í þessari röð. Reiknið ferilheildið

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Lausn. Best að nota setningu Stokes. Gefna áttunin er réttsælis þegar er horft á ferilinn frá ofan þ.a. þá gildir

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_{\mathcal{S}} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS$$

þ.s. $\mathbf{n}$ er normalvigur við þríhyrningslaga yfirborð $\mathcal{S}$, áttaður **niður**.

Reiknum rót $\mathbf{F}$:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \\ \partial/\partial z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z^2 \\ \sin(y^2) \\ z^2 - y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2y \\ 2z \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jafna plansins þar sem þríhyrningurinn liggur er $x + y - z = 1 \Rightarrow z = x + y - 1$ og við stikum það plan með

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ x + y - 1 \end{pmatrix}$$

Mörkin á x og y eru fundin með því að nota $z \geq 0$ sem gefur

$$x + y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1 - x$$

Hámark á y er greinilega 1 og svo notum við $0 \leq x \leq 1$ fyrir x-ið. Normalvigur við planið sem stefnir niður er

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

og flæði rótar $\mathbf{F}$ er þá með $z = x + y - 1$

$$\int_0^1 \int_{1-x}^1 \begin{pmatrix} -2y \\ 2x + 2y - 2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} dy\, dx = \int_0^1 \int_{1-x}^1 (2x - 2)\, dy\, dx$$

sem gefur

$$\int_0^1 [2xy - 2y]_{1-x}^1\, dx = \int_0^1 (2x - 2 - 2x(1-x) + 2(1-x))\, dx = \int_0^1 (2x^2 - 2x)\, dx = \left[\frac{2x^3}{3} - x^2\right]_0^1 = -\frac{1}{3}$$

Lausn 2.

1. Línustrik $(1,0,0) \to (0,1,0)$ er stikaður með

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, t \in [0,1] \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

   Ferilheildi þar er þá

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(t^2) \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (\sin(t^2))\, dt$$

   sem er allt of erfitt heildi.

2. Línustrik $(0,1,0) \to (1,1,1)$ er stikaður með

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, t \in [0,1] \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Ferilheildi þar er þá

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ \sin(1) \\ t^2-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 (2t^2-1)\, dt = -\frac{1}{3}$$

3. Línustrik $(1,1,1) \to (1,0,0)$ er stikaður með

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \\ 1-t \end{pmatrix}, t \in [0,1] \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

   Ferilheildi þar er þá

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^2 \\ \sin((1-t)^2) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} dt = \int_0^1 -\sin((1-t)^2)\, dt$$

   Þetta er aftur erfitt heildi en með innsetningu $u = 1-t$ má sýna að heildin úr tilvikum 1 og 3 eru eins nema sitt hvort formerki.

Heildasvar er þá $-1/3$.