Stærðfræði II

Tímadæmi 5 - Lausnir

Þema vikunnar eru tvöföld heildi.

Myndrænar pælingar - Samhverfa.

Glósur 3.1.1. Sjá skjalið *Lausnir við völdum dæmum úr kafla 3* á Canvas.

Adams 14.1.14. Látum D vera efri helmingur skifu með geisla 2 og miðju í $(0,0)$. Reiknið

$$\int\int_D (x+3)\,dA$$

með því að athuga samhverfu.

Lausn. Með mynd sést að D er samhverft um $x = 0$. Auk þess er fallið x oddstætt. Allt saman gefur þetta að

$$\int\int_D x\,dx = 0$$

því hægri helmingur og vinstri helmingur núllast út. Eftir stendur

$$\int\int_D 3\,dA = 3 \cdot \text{ Flatarmál } D = 3\frac{1}{2}\pi 2^2 = 6\pi$$

Adams 14.1.17. Reiknið tvöfalda heildið

$$\int\int_{x^2+y^2\leq 1} \big(4x^2y^3 - x + 5\big)\,dA$$

með því að athuga samhverfu.

Lausn. Skifan $x^2 + y^2 \leq 1$ er bæði samhverf um $x = 0$ og $y = 0$. Þar sem y^3 og x eru odd-stæð föll eru heildi af $4x^2y^3$ og x bæði 0. Eftir er

$$\int\int_{x^2+y^2} \leq 15\,dA = 5 \cdot \text{ Flatarmál skifunnar} = 5\pi$$

Tvöföld heildi í kartesískum hnitum.

Adams 14.2.7. Látum F vera svæði innan fernings $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$. Reiknið

$$\int\int_F (\sin(x) + \cos(y))\, dA$$

Lausn. Engin samhverfa er hér til staðar enda svæðið innan fyrsta fjórðungi. Þar sem svæðið er ferningur eru mörkin auðfundin.

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} (\sin(x) + \cos(y))\, dx\, dy$$

Röð $dxdy$ endurspeglar að fyrst er heildað m.t.t. x og síðan y. Reiknum innra heildið:

$$\int_0^{\pi/2} \Big[-\cos(x) + \cos(y)x \Big]_{x=0}^{x=\pi/2} = \int_0^{\pi/2} (\frac{\pi}{2}\cos(y) + 1)\, dy$$

Reiknum svo ytra heildið:

$$\Big[\frac{\pi}{2}\sin(y) + y \Big]_{y=0}^{y=\pi/2} = \pi$$

Adams 14.2.9. Látum D vera svæði í fyrsta fjórðungi sem afmarkast af ferlunum $y = x^2$ og $y^2 = x$. Reiknið

$$\int\int_D xy^2\, dA$$

Lausn. Ferlarnir skerast í $(0,0)$ og í $(1,1)$. Ef við afmörkum x á bilinu $[0,1]$ þá er y á milli ferlanna x^2 og $\sqrt{x}$ þ.s. $y^2 = x \Rightarrow y = \sqrt{x}$. Athugum að $\sqrt{x}$ er stærra en x^2 á því bili. Þetta gefur þessa uppsetningu:

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} xy^2 dy dx$$

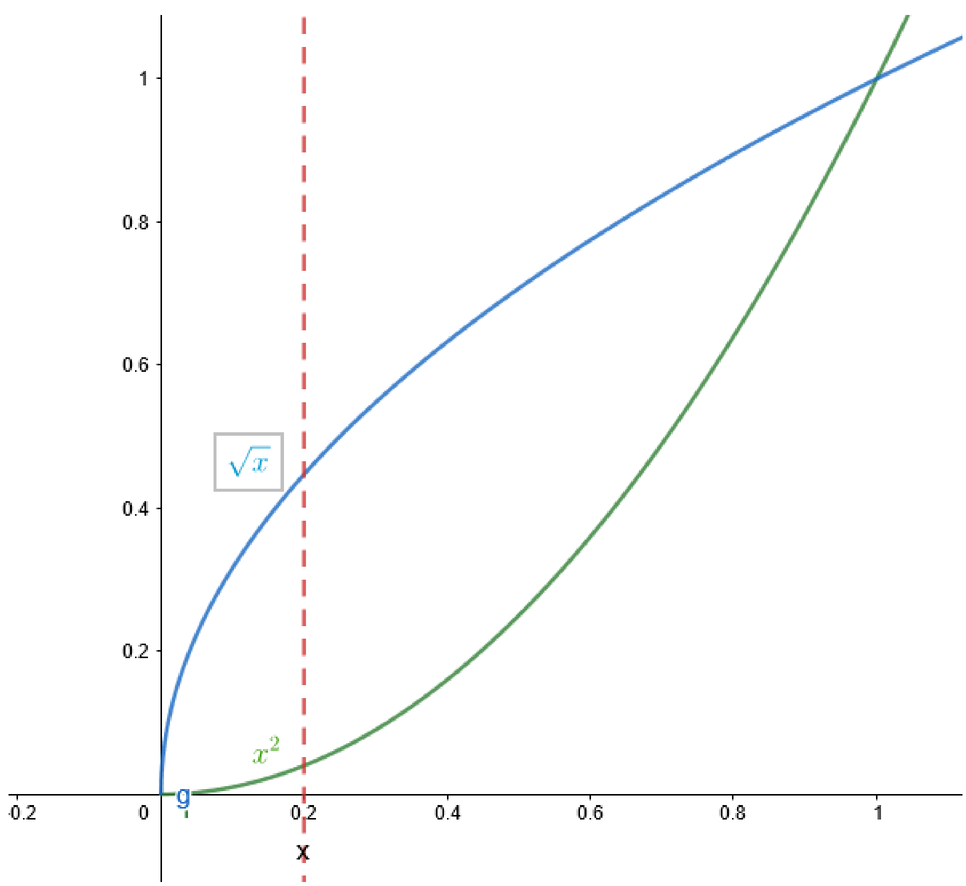
Reiknum innra heildið

$$\int_0^1 \left[\frac{xy^3}{3}\right]_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}} dx = \frac{1}{3}\int_0^1 (x^{5/2} - x^7)\, dx$$

Reiknum ytra heildið

$$\frac{1}{3}\left[\frac{x^{7/2}}{7/2} - \frac{x^8}{8}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{3}{56}$$

Skýringarmynd:



Það er líka hægt að leysa dæmið með því að heilda fyrst m.t.t. x. Þá er y á bilinu $[0,1]$ en x á milli y^2 og $\sqrt{y}$, s.s.

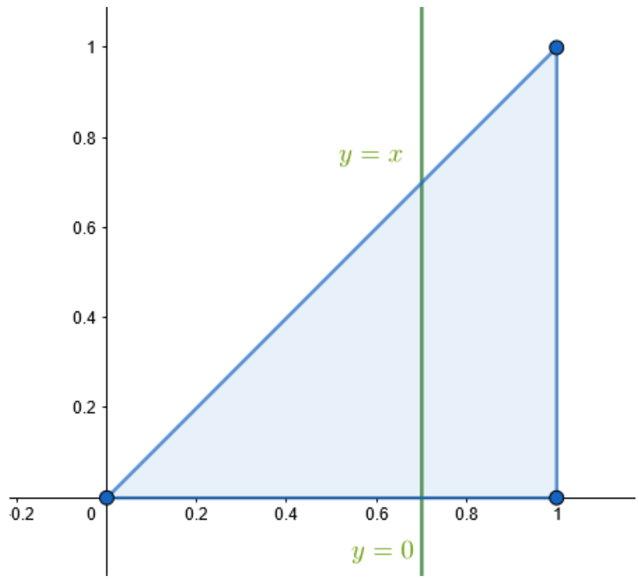
$$\int_0^1 \int_{y^2}^{\sqrt{y}} xy^2\, dx\, dy$$

Skýringarmynd er svipuð nema rauða línan er dregin lóðrétt.

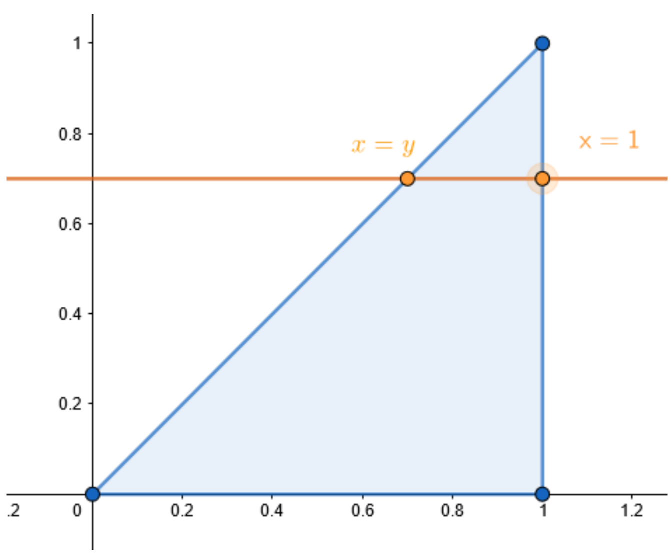
Adams 14.2.14. Látum T vera þríhyrning með hornpunkta $(0,0)$, $(1,1)$ og $(1,0)$. Reiknið

$$\int\int_T \frac{xy}{1+x^4}$$

Teiknum skýringarmynd:



Þarna sjáum við að við getum afmarkað x á bilinu $[0,1]$ en þár er y á milli 0 og x. Önnur leið væri að afmarka y á bilinu $[0,1]$ en þá er x á milli y og 1, eins og þessi mynd sýnir:



Getum því sett upp heildi á tvo vegu:

$$\int_0^1 \int_0^x \frac{xy}{1+x^4}\,dy\,dx = \int_0^1 \int_y^1 \frac{xy}{1+x^4}\,dx\,dy$$

Hvort heildi er betra fyrir okkur? Seinna heildið er ekki mjög auðvelt því við getum ekki fundið stofnfall af $\dfrac{x}{1+x^4}$ einfaldlega. Prófum þá fyrra heildi, og heildum fyrst m.t.t. y:

$$\int_0^1 \left[\frac{xy^2/2}{1+x^4}\right]_{y=0}^{y=x} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^3}{1+x^4}\,dx$$

Nú má nota innsetningu $u = 1 + x^4$ þ.a. $du = 4x^3\,dx$. Mörkin fyrir u reiknast þannig:

$$x = 0 \Rightarrow u = 1 \qquad\qquad x = 1 \Rightarrow u = 1 + 1^4 = 2$$

og þá fæst

$$\frac{1}{2}\int_1^2 \frac{1}{u}\frac{1}{4}\,du = \frac{1}{8}\ln(2)$$

Tvöföld heildi í pólhnitum.

Adams 14.4.2. Látum S vera skifu með geisla a og miðju í $(0,0)$. Reiknið

$$\int\int_S \sqrt{x^2+y^2}\,dA$$

Lausn. Við notum pólhnit. Þá er

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

Auk þess er $\sqrt{x^2+y^2}$ einfaldlega r skv. skilgreiningu. Þar sem svæðið er heil skifa með geisla a eru mörkin

$$0 \leq r \leq a \qquad\qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Fáum þá

$$\int_0^{2\pi}\int_0^a r^2 dr\,d\theta$$

Reiknum innra heildið:

$$\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\right]_{r=0}^{r=a} d\theta = \int_0^{2\pi}\frac{a^3}{3}d\theta$$

Þarna er verið að heilda fasta á bilinu $[0,2\pi]$ og svarið því

$$\frac{2\pi a^3}{3}$$

Adams 14.2.9. Látum Q vera þann fjórðung af skifunni $x^2+y^2 \leq a^2$ þ.s. $x \geq 0$ og $y \geq 0$. Reiknið

$$\int\int_Q e^{x^2+y^2}\,dA$$

Lausn. Notum pólhnit. Aftur er

$$dA = r\,dr\,d\theta$$

Fallið verður

$$e^{x^2+y^2} = e^{r^2}$$

Þar sem svæðið er sá hluti skifu sem er í 1. fjórðungi eru mörkin

$$0 \leq r \leq a \qquad\qquad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Allt saman fæst

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^a re^{r^2}\,dr\,d\theta$$

Við reiknum innra heildi með innsetningu $u = r^2$. Þá er $du = 2r\,dr$. Mörkin verða nú frá 0 upp í a^2. Fáum:

$$\int_0^{\pi/2}\int_0^{a^2}\frac{1}{2}e^u\,du\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\Big[e^u\Big]_{u=0}^{u=a^2}d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\big(e^{a^2}-1\big)d\theta$$

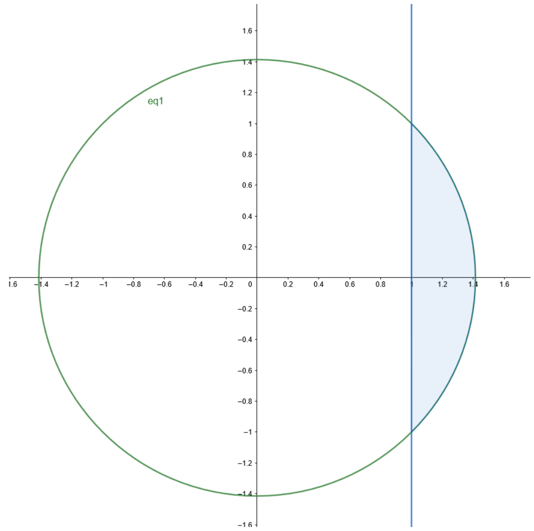
Aftur er verið að heilda fasta og svarið er þá

$$\frac{\pi}{2}\frac{1}{2}\big(e^{a^2}-1\big) = \frac{\pi(e^{a^2}-1)}{4}$$

Adams 14.2.12. Látum S vera þann hluta skifunnar $x^2 + y^2 \leq 2$ þar sem $x \geq 1$. Reiknið

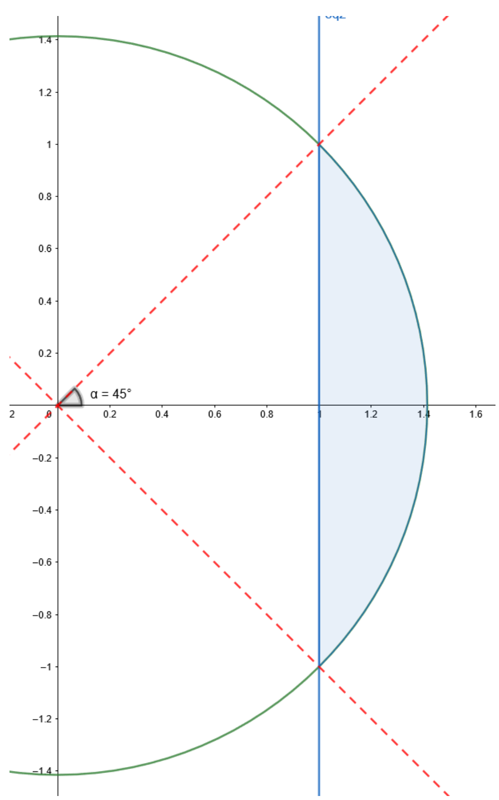
$$\int\int (x+y)\, dA$$

Um er að ræða þetta svæði. Ath. að geisli skifunnar er $\sqrt{2}$.

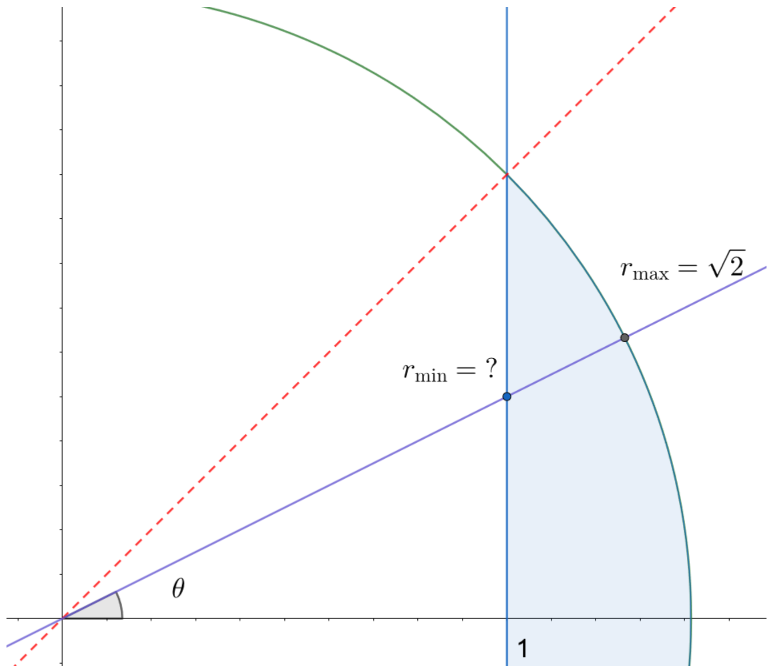


Í fyrsta lagi athugum við að svæðið er samhverft um $y = 0$ og þar sem y er oddstætt fall er heildið af því 0. Eftir stendur $\displaystyle\int\int x\, dA$ sem ég ætla að reikna á tvo vegu.

Pólhnitalausn. Við viljum endilega nota pólhnit. Línan $x = 1$ sker hringinn í $(1,1)$ og $(-1,1)$ eins og sést með því að plögga $x = 1$ inn í jöfnu hringsins. Þá sést að θ sé á milli $-\dfrac{\pi}{4}$ og $\dfrac{\pi}{4}$.



En það sem r má vera fer eftir gildi á θ. Teiknum aðra mynd til að sjá hvernig mörkin á r fara eftir θ. Skoðum bara fyrsta fjórðunginn.



Þarna er búið að festa eitthvert θ. Við sjaúm að r að mestu lagi geisli hringsins þ.e. $\sqrt{2}$. Til að finna minnsta gildi á r notum við hornafallaalgebru í rétthyrndum þríhyrningi sem myndast. Fyrir hornið θ er skammhlið 1 en langhlið er einmitt $r_{\min}$. Fáum því

$$\cos(\theta) = \frac{1}{r_{\min}} \Rightarrow r_{\min} = \frac{1}{\cos(\theta)}$$

Einnig að hægt að finna þá tölu með því að nota að $x = r\cos(\theta)$ í pólhnitum og leysa úr $x = 1$. Mörkin á svæðinu eru því

$$-\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \qquad\qquad \frac{1}{\cos(\theta)} \leq r \leq \sqrt{2}$$

Loksins getur við sett upp heildið en gleymum ekki að $dA = rdrd\theta$. Í pólhnitum er $x = r\cos(\theta)$.

$$\int\int_S x dA = \int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_{1/\cos(\theta)}^{\sqrt{2}} r\cos(\theta) r\, dr\, d\theta$$

Reiknum innra heildi:

$$\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\left[\frac{r^3}{3}\cos(\theta)\right]_{r=1/\cos(\theta)}^{r=\sqrt{2}} d\theta = \frac{1}{3}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2\sqrt{2}\cos(\theta) - \frac{1}{\cos^2(\theta)}\, d\theta$$

Bæði stofnföll eru þekkt og við fáum:

$$\frac{1}{3}\left[2\sqrt{2}\sin(\theta) - \tan(\theta)\right]_{\theta=-\pi/4}^{\theta=\pi/4} = \frac{2}{3}$$

Lausn í kartesískum hnitum. Við getum líka sleppt pólhnitum. Þá fæst töluvert meiri algebra en minna vesen með mörkunum. Skifan okkur er $x^2 + y^2 \leq 2$ þ.a. efri hálfhringur er $y = \sqrt{2 - x^2}$ á meðan neðri hálfhringur er $y = -\sqrt{2 - x^2}$. Myndin sýnir svo að x sé á bilinu $[1, \sqrt{2}]$. Fáum þá

$$\int\int x\, dA = \int_1^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{2-x^2}}^{\sqrt{2-x^2}} x\, dy\, dx$$

Reiknum innra heildið

$$\int_1^{\sqrt{2}} \Big[xy\Big]_{y=-\sqrt{2-x^2}}^{y=\sqrt{2-x^2}} dx = \int_1^{\sqrt{2}} 2x\sqrt{2 - x^2} dx$$

Notum svo innsetningu $u = 2 - x^2$ þ.a. $du = -2xdx$. Mörkin vera

$$x = 1 \Rightarrow u = 1 \qquad x = \sqrt{2} \Rightarrow u = 0$$

Fáum.

$$\int_1^0 -\sqrt{u}\, du = \int_0^1 \sqrt{u}\, du = \left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Töluvert ljótari lausn en hún er hraðvirk.

Glósur 3.3.3. Lausn er í skjalinu *Lausnir við völdum dæmum úr kafla 3* á Canvas.