Stærðfræði II

Tímadæmi 2 - Lausnir

Þema vikunnar er ferð agnar eftir ferli og ferilheildi.

Ferð agnar eftir ferli.

Adams 11.1.15. Ögn ferðast eftir hringnum $x^2 + y^2 = 25$ með föstum hraða (ferð) þ.a. heill snúningur taki 2 sek. Finnið hröðun agnarinnar í punktinum $(3, 4)$.

Lausn. Við stikum hringinn með

$$\mathbf{r}(t) = 5\cos(\omega t)\mathbf{i} + 5\sin(\omega t)\mathbf{j}$$

en við viljum stilla tiðni ω þ.a. heill snúningur taki 2 sek. Þar sem snúningshornið á að vera orðið 2π þegar $t = 2$ fæst jafnan

$$2\omega = 2\pi \Rightarrow \omega = \pi$$

og stikun er

$$\mathbf{r}(t) = 5\cos(\pi t)\mathbf{i} + 5\sin(\pi t)\mathbf{j}$$

Út fra því reiknum við stefnuhnraða

$$\mathbf{r}'(t) = -5\pi\sin(\pi t)\mathbf{i} + 5\pi\cos(\pi t)\mathbf{j}$$

og hröðun

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = -5\pi^2\cos(\pi t)\mathbf{i} - 5\pi^2\sin(\pi t)\mathbf{j}$$

Í punktinum $(3, 4)$ (sem samsvarar $t = t_0$) er $x = 5\cos(\pi t_0) = 3$ og $y = 5\sin(\pi t_0) = 4$ sem við setjum inn í jöfnuna fyrir hröðunina:

$$\mathbf{a}(t_0) = -3\pi^2\mathbf{i} - 4\pi^2\mathbf{j}$$

Athugið að hér er alveg óþarfi að finna gildi á t_0 þó það sé hægt.

Adams 11.1.16. Ögn ferðast til hægri eftir ferlinum $y = 3/x$. Gefið er að hraði (ferð) þess sé 10 í punktinum $(2, 3/2)$. Finnið stefnuhraðann í þeim punkti.

Lausn. Við stikum ferilinn $y = 3/x$ með

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = x(t)\mathbf{i} + \frac{3}{x(t)}\mathbf{j}$$

Þar sem ögnin ferðast til hægri er vitað að $x'(t) > 0$. Stefnuhraðinn er þá skv. reglu um diffrun brots

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} - \frac{3x'(t)}{x(t)^2}\mathbf{j}$$

og svo

$$v(t) = \|br'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + \left(-\frac{3x'(t)}{x(t)^2}\right)^2} = x'(t)\sqrt{1 + \frac{9}{x(t)^4}}$$

(notuðum að $x'(t) > 0$). Nú er gefið að þegar $x(t) = 2$ gildir að $v(t) = 10$ þ.a.

$$10 = x'(t)\sqrt{1 + \frac{9}{16}} \Rightarrow x'(t) = 8$$

Setjum þetta gildi inní formúlu fyrir stefnuhraðann og fáum

$$\mathbf{r}'(t) = 8\mathbf{i} - \frac{3 \cdot 8}{2^2}\mathbf{j} = 8\mathbf{i} - 6\mathbf{j}$$

(við notum aftur að $x(t) = 2$).

Glósur 1.2.1. Ogn ferðast eftir ferlinum $\mathbf{r} : [0, \infty[\to \mathbb{R}^3$ þar sem

$$\mathbf{r}(t) = t\cos(t)\mathbf{i} + t\sin(t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Finnið punktinn P í $\mathbb{R}^3$ þar sem hraði (ferð) agnarinnar er $v = 3$. Teikna mynd! **Lausn.** Við reiknum stefnuhraðann

$$br'(t) = \big(\cos(t) - t\sin(t)\big)\mathbf{i} + \big(\sin(t) + t\cos(t)\big)\mathbf{j}$$

(ath. liður í z-stefnu er fasti) og ferðin er þá

$$v(t) = \|br'(t)\| = \sqrt{\big(\cos(t) - t\sin(t)\big)^2 + \big(\sin(t) + t\cos(t)\big)^2}$$

Reiknum upp úr svigum og lögum til með því að nota $\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$:

$$\begin{aligned} v(t) &= \sqrt{\cos^2(t) - 2t\cos(t)\sin(t) + t^2\sin^2(t) + \sin^2(t) + 2t\cos(t)\sin(t) + t^2\cos^2(t)} \\ &= \sqrt{1 + t^2} \end{aligned}$$

Til að finna þann punkt þar sem $v = 3$ leysum við

$$\sqrt{1 + t^2} = 3 \Rightarrow 1 + t^2 = 9 \Rightarrow t = \sqrt{8}$$

(ath. $t > 0$ skv. formengi $\mathbf{r}$). Tilsvarandi punkt fáum við með því að stinga þetta gildi á t inní $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(\sqrt{8}) = \begin{pmatrix} 8\cos(\sqrt{8}) \\ 8\sin(\sqrt{8}) \\ 2 \end{pmatrix}$$

Bogalengd.

Adams 11.3.13. Finnið lengd ferilsins sem er stikaður með

$$\mathbf{r} : [0,1] \to \mathbb{R}^3 \qquad \mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$$

(leysa úr heildinu með viðeigandi innsetningu)

Lausn. Reiknum stefnuhraðann:

$$\mathbf{r}'(t) = 2t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} + 3t^2\mathbf{k}$$

Skv. skilgreiningu er þá bogalengdin

$$L = \int_0^1 \|br'(t)\|\, dt = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (2t)^2 + (3t^2)^2}\, dt = \int_0^1 \sqrt{8t^2 + 9t^4}\, dt$$

Við tökum t^2 út fyrir heildi:

$$L = \int_0^1 t\sqrt{8 + 9t^2}\, dt$$

og notum innsetningu $u = 8 + 9t^2$. Þá er $du = 18t\, dt \Rightarrow \dfrac{du}{18} = t\, dt$. Mörkin breytast skv.

$$t = 0 \Rightarrow u = 8 + 0 = 8 \qquad t = 1 \Rightarrow u = 8 + 9 \cdot 1^2 = 17$$

og heildið verður

$$L = \int_8^{17} \frac{1}{18}\sqrt{u}\, du = \left[\frac{1}{18}\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_8^{17} = \frac{17\sqrt{17} - 16\sqrt{2}}{27} = 1.7580$$

Adams 11.3.17. Finnið lengd ferilsins sem er stikaður með

$$\mathbf{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \qquad \mathbf{r}(t) = t\cos(t)\mathbf{i} + t\sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

Hér er nóg að stilla upp rétt heildi og finna svar með Wolfram Alpha, Matlab eða Geogebra.

Lausn. Stefnuhraðinn er hér

$$\mathbf{r}'(t) = (\cos(t) - t\sin(t))\mathbf{i} + (\sin(t) + t\cos(t))\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

og ferðin er

$$v(t) = \|br'(t)\| = \sqrt{\big(\cos(t) - t\sin(t)\big)^2 + \big(\sin(t) + t\cos(t)\big)^2 + 1}$$

Útreikningur er svipaður og í dæmi 1.2.1 (nema það er auka +1) og gefur

$$v(t) = \sqrt{2 + t^2}$$

Bogalengdin er þá

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 + t^2}\, dt = 22.430$$

skv. reiknivél.

Ferilheildi.

Adams 15.3.1. Heildið fallið $f(x, y, z) = x + y$ eftir ferlinum

$$\mathbf{r}(t) = at\mathbf{i} + bt\mathbf{j} + ct\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1$$

sem er línustrik frá $(0, 0, 0)$ til (a, b, c). Hér eru a, b, c fastar tölur.

Lausn. Reiknum stefnuhraðann

$$\mathbf{r}'(t) = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

og ferðina

$$\|br'(t)\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Ferilheildið er skv. skilgreiningu

$$I = \int_0^1 f(\mathbf{r}(t))\, \|\mathbf{r}'(t)\|\, dt$$

en þar sem $f(x, y, z) = x + y$ og $\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} at \\ bt \\ ct \end{pmatrix}$ fæst að $f(\mathbf{r}(t)) = at + bt$. Allt saman fæst

$$I = \int_0^1 (at + bt)\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\, dt = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \int_0^1 (at + bt)\, dt$$

sem gefur

$$I = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}(a + b) \int_0^1 t\, dt = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}(a + b)$$

Glósur 1.4.4. og 1.4.5. Sjá Lausnir á völdum dæmum úr kafla 1 á Canvas.