Hlutapróf 2 - Stærðfræði II

Munið að sýna útreikninga og rökstyðja svörin vandlega.

Dæmi 1: Látum $\mathcal{C}$ vera sá hluti hringsins $x^2 + (y-1)^2 = 4$ þar sem $y \geq 1$. Við fáum nú gefið vigursviðið

$$\mathbf{F}(x,y) = (x+y)\mathbf{i} + (x-1)\mathbf{j}$$

Heildið vigursviðið eftir ferlinum, þ.e. reiknið $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ þar sem $\mathcal{C}$ er áttaður rangsælis.

Lausn: Vigursviðið er varðveitið með mættið $\phi(x,y,z) = \dfrac{x^2}{2} + yx - y$ svo við getum reiknað

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(-2,1) - \phi(2,1) = -1 - 3 = -4$$

Dæmi 2: Finnið rúmmálið sem afmarkast af fleygbogaflötunum (eða skálunum) $z = 10 - x^2 - y^2$ og $z = 2(x^2 + y^2 - 1)$.

Lausn: Setjum upp heildið

$$\int_{\mathcal{V}} 1 \; dV$$

þar sem mörk heildisins afmarka svæðið. Notum sívalningshnit

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \int_{2(r^2-1)}^{10-r^2} r \, dz \, dr \, d\theta$$

Heildum og fáum

$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 r(10 - r^2) - 2r(r^2 - 1) \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^2 12r - 3r^3 \; dr = 24\pi$$

Dæmi 3: Látum $\mathcal{S}$ vera þann hluta plansins $4x+2y+z=8$ sem er inní keilunni $z=x^2+y^2$. Finnið flæði vigursviðsins

$$\mathbf{F}(x,y,z) = y\mathbf{i} + (1+4x)\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$$

upp í gegnum $\mathcal{S}$, þ.e. reiknið

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Lausn: Stikum planið með

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 8-4x-2y \end{pmatrix}, \quad (x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 13$$

sem hefur normalvigur $\mathbf{n} = 4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

Við reiknum nú

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} &= \int_{(x-1)^2+y^2 \leq 13} \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y)) \cdot \mathbf{n}\ dxdy \\ &= \int_{(x+2)^2+(y+1)^2 \leq 13} \begin{pmatrix} y \\ 1+4x \\ 16-8x-4y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\ dxdy \\ &= \int_{(x+2)^2+(y+1)^2 \leq 13} 18\ dxdy = 234\pi \end{aligned}$$

þar sem við nýttum okkur af flatarmál hringsins sem við erum að heilda yfir er $(\sqrt{13})^2\pi$.