Stærðfræði II
Tímadæmi 1

Þema vikunnar er stikun. Dæmin eru úr glósunum nema annað sé tekið fram.

Stikun ferla.

1.1.2. Myndbandslausn er á Canvas.

1.1.1. Lausn er í skjalinu "Lausnir á völdum dæmum úr kafla 1".

Ekki í bók 1. $\mathbf{r} : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ er spírall upp í kringum z-ásinn (alls 2 hringir). Endilega temjið ykkur að nota Geogebru/Matlab/annað frá byrjun til að teikna upp yfirborð og ferla.

Skurðferlar.

1.1.4. Stikið skurðferil kúlunnar $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ við planið $x + z = 2$.

Lausn. Látum t.d. $z = 2 - x$ inn í fyrri jöfnuna sem gefur

$$x^2 + y^2 + (2-x)^2 = 4 \Rightarrow x^2 + y^2 + 4 - 4x + x^2 = 4 \Rightarrow 2x^2 - 4x + 4 + y^2 = 0$$

Tökum saman x-liðina og fáum $2(x^2 - 2x + 2)$ sem við getum umskrifað í $2(x-1)^2 + 2$ (fyllum í ferninginn). Þá höfum við

$$2(x-1)^2 + 2 + y^2 = 4 \quad \Leftrightarrow 2(x-1)^2 + y^2 = 2 \quad \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y/\sqrt{2})^2 = 1$$

Nú getum við sett $x - 1 = \cos(t)$ og $y/\sqrt{2} = \sin(t)$ þá er þessi jafna uppfyllt sbr.

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$$

Úr þessu fæst

$$x = 1 + \cos(t) \qquad\qquad y = \sqrt{2}\sin(t)$$

Síðan setjum við $z = 2 - x$ til að finna stikun á z þ.a.

$$z = 2 - x = 2 - (1 + \cos(t)) = 1 - \cos(t)$$

Allt saman er stikun:

$$\mathbf{r}(t) = (\cos(t) + 1)\,\mathbf{i} + \sqrt{2}\sin(t)\mathbf{j} + (1 - \cos(t))\,\mathbf{k}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

1.1.3. Stikið þann hluta skurðferils $z = x^2 + y^2$ við $x^2 + y^2 = 1$ sem er í fyrsta áttungi s.s. þar sem $x, y, z \geq 0$. Er það einfaldur lokaður ferill?

Lausn. Viljum stika skurðferil skálarinnar $z = x^2 + y^2$ við sívalninginn $x^2 + y^2 = 1$. Byrjum á að láta $x(t) = \cos(t)$ og $y(t) = \sin(t)$ þá er jafnan $x^2 + y^2 = 1$ uppfyllt. Þá getum við látið $z = x^2 + y^2 = \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$ til að tryggja að fyrri jafnan sé uppfyllt. Stikunin er því

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \sin(t)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Við erum beðin um að stika bara þann hluta sem er í 1. áttungi (s.s. þar sem $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$. Við erum örugg með z stefnuna, því hún er fasti $= 1$. Við látum þá $t \in [0, \pi/2]$ og tryggjum þá að $\cos(t) \geq 0$ og $\sin(t) \geq 0$.

Kafli 11.3.5 í Adams: Breiðbogafletirnir $z = x^2$ og $z = 4y^2$ skerast í tveimur ferlum. Annar ferlanna fer í gegnum $(2, -1, 4)$. Stikaðu ferilinn, notaðu $t = y$ sem stika.

Byrjum á að setja jöfnurnar saman og fáum $x^2 = 4y^2$. Leysum: $x = \pm 2y$. Þar sem $y < 0$ í $(2, -1, 4)$ veljum við mínus hlutann. Ef við notum $t = y$ sem stika þá er

$$x = -2y = -2t \qquad z = 4y^2 = 4t^2$$

(mætti einnig nota $z = x^2$ en er pínu flóknara). Stikunin er

$$\mathbf{r}(t) = -2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 4t^2\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}$$