Skiladæmi 1 - Stærðfræði 2

Munið að rökstyðja öll svör og sýna útreikninga.

Teiknið alla ferla og yfirborð í Geogebru til að sannreyna að ferlarnir séu réttir.

Dæmi 1. Látum $\mathcal{D}$ vera þann helming skífunnar $x^2 + y^2 \leq 18$ þar sem $y \leq x$. Stikið ferilinn sem umlykur svæðið $\mathcal{D}$ **rangsælis**. Látið upphafs- og endapunkt stikunarinnar vera í (-3,-3).

Ábending: Teiknið mynd af svæðinu til að sjá það betur fyrir ykkur.

Best er að teikna mynd af skífunni og línunni $y = x$ til finna svæðið $\mathcal{D}$. Ljóst er að ferillinn er tvískiptur: línustrik og hálfhringur. Við stikum þá í sitt hvoru lagi en byrjum á hringboganum. Athugum að skurðpunktar línunnar $y = x$ og hringsins fást með því að setja $y = x$ inní jöfnu hringins:

$$x^2 + x^2 = 18 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3$$

og eru því $(-3, -3)$ og $(3, 3)$.

- Stikum hringbogann rangsælis. Upphafspunktur er þá $(-3, -3)$ er endapunktur $(3, 3)$. Sjáum að stefnuhorn fer þá frá $-3\pi/4$ til $\pi/4$ milli þessa punkta þ.a. hringboginn er t.d. stikaður með

$$\mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{18}\cos(t) \\ \sqrt{18}\sin(t) \end{pmatrix}, t \in [-3\pi/4, \pi/4]$$

- Við ætlum að stika línustrikið í kjölfarið á þessu þ.e. í áttina niður og til vinstri. Þetta er vegna þess að hringboginn endar í $(3, 3)$ og seinni stikunin tekur þá við í þeim punkti. Strikið er þá frá $(3, 3)$ til $(-3, -3)$. Dæmi um stikun er þá

$$\mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 6t \\ 3 - 6t \end{pmatrix}, t \in [0, 1]$$

  Athugum einmitt að lokapunktur ferilsins þegar $t = 1$ er einmitt $(-3, -3)$.

Eftir stendur að líma þessar tvær stikanir saman svo þær séu skilgreindar á einu samfelldu tímabili. Til dæmis getur við hliðrað t í $\mathbf{r}_2$:

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t) & \text{ef} \quad t \in [-3\pi/4, \pi/4] \\ \mathbf{r}_2(t - \pi/4) & \text{ef} \quad t \in [\pi/4, \pi/4 + 1] \end{cases}$$

Athugið að þetta dæmi hefur mjög margar mismunandi lausnir. Til dæmis væri hægt að líma stikanirnar saman á annan hátt t.d.

$$\mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t + \pi/4) & \text{ef} \quad t \in [-\pi, 0] \\ \mathbf{r}_2(t) & \text{ef} \quad t \in [0, 1] \end{cases}$$

Einnig væri upplagt að stika línustrikið með

$$\mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, t \in [-3, 3]$$

Dæmi 2. Kúlan $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ og sívalningurinn $x^2 + z^2 = 2$ skerast í tveimur ótengdum ferlum. Stikið þann þeirra þar sem $y < 0$. Stikið aðeins þann hluta ferilsins þar sem $z \leq 0$.

Lausn: Látum $x = \sqrt{2}\cos(t)$, $z = \sqrt{2}\sin(t)$, þá er seinni jafnan uppfyllt. Setjum $x^2 + z^2 = 2$ inn í fyrri jöfnuna og fáum $y^2 + 2 = 5$ sem gefur okkur $y = \pm\sqrt{3}$. Veljum þannig að $y < 0$. Setjum saman stikunina

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \sqrt{2}\cos(t) \\ -\sqrt{3} \\ \sqrt{2}\sin(t) \end{bmatrix}, \quad t \in [\pi,\ 2\pi]$$

Þar sem t er valið til að fá bara þann hluta ferilsins þar sem $z \leq 0$.

Sjá í Geogebru.

Dæmi 3. Stikið skurðferil kúlunnar $x^2 + y^2 + z^2 = 10$ við planið $z = x - 4$.

Lausn: Setjum $z = x - 4$ inní fyrri jöfnuna og umskrifum í

$$(x-2)^2 + (\frac{y}{\sqrt{2}})^2 = 1$$

Sem við getum þá stikað með

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos(t) + 2 \\ \sqrt{2}\sin(t) \\ \cos(t) - 2 \end{bmatrix}, \quad t \in [0,\ 2\pi]$$

Sjá í Geogebru.