Skiladæmi 6 - Stærðfræði 2

Munið að rökstyðja öll svör og sýna alla útreikninga.

Dæmi 1. Skoðum heildið

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-y^2}} \int_{y^2+z^2}^1 f(x,y,z)\ dx\ dz\ dy = \int \int \int f(x,y,z)\ dz\ dy\ dx$$

Teiknið rúmskikann sem við erum að heilda yfir og setjið rétt mörk á seinna heildið.

Lausn: Mörkin í seinna heildinu eru

$$\int_0^1 \int_0^{\sqrt{x}} \int_0^{\sqrt{x-y^2}} f(x,y,z)\ dz\ dy\ dx$$

Dæmi 2. Reiknið

$$\int_{\mathcal{V}} f(x,y,z)\ dV$$

fyrir fallið $f(x,y,z) = y + z$ þar sem $\mathcal{V}$ er sá hluti af kúlunni $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2$ þar sem $z \geq 0$ og $x \leq 0$. Notið kúluhnit.

Lausn: Byrjum á að einfalda í

$$\int_{\mathcal{V}} y + z\ dV = \int_{\mathcal{V}} z\ dV$$

vegna þess að svæðið $\mathcal{V}$ er samhverft um $y = 0$ og fallið y er oddstætt um $y = 0$.

Við lýsum nú svæðinu í kúluhnitum og setjum upp heildið

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{V}} z\ dV &= \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{2}} \rho\cos(\phi)\ \rho^2 \sin(\phi)\ d\rho\ d\phi\ d\theta \\ &= \pi \left[-\frac{\cos^2(\phi)}{2}\right]_0^{\pi/2} \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

Dæmi 3. Látum $\mathcal{D}$ vera svæði sem liggur yfir ofan keiluna $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ en fyrir neðan kúluskel $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Við skoðum svo þrefalda heildið

$$\int\int\int_{\mathcal{D}} z\, dV$$

Stillið upp heildinu með mörkum, bæði í sívalningshnitum og í kúluhnitum.
Reiknið úr báðum heildum og sannreynið að niðurstan sé sú sama.

Lausn.

Sívalningshnit. Mörk á z eru gefin og eru

$$r \leq z \leq \sqrt{1 - r^2}$$

Auk þess gildir $0 \leq \theta \leq 2\pi$. Stærsta gildi á r finnst þegar yfirborðin skerast þ.e.

$$r = \sqrt{1 - r^2} \Rightarrow r^2 = 1 - r^2 \Rightarrow r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Heildið okkar er þá

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_r^{\sqrt{1-r^2}} zr\, dz\, dr\, d\theta$$

Kúluhnit. Keilan $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ myndar $\pi/4$ horn við z-ás þ.a.

$$0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$$

Auk þess er $0 \leq \theta \leq 2\pi$ og $0 \leq R \leq 1$ og heildið verður

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{1} \int_0^{\pi/4} (R\cos(\phi))R^2 \sin(\phi) d\phi dR d\theta$$

þar sem við notuðum $z = R\cos(\phi)$.

Bæði heildin gefa svarið $\frac{\pi}{8}$.