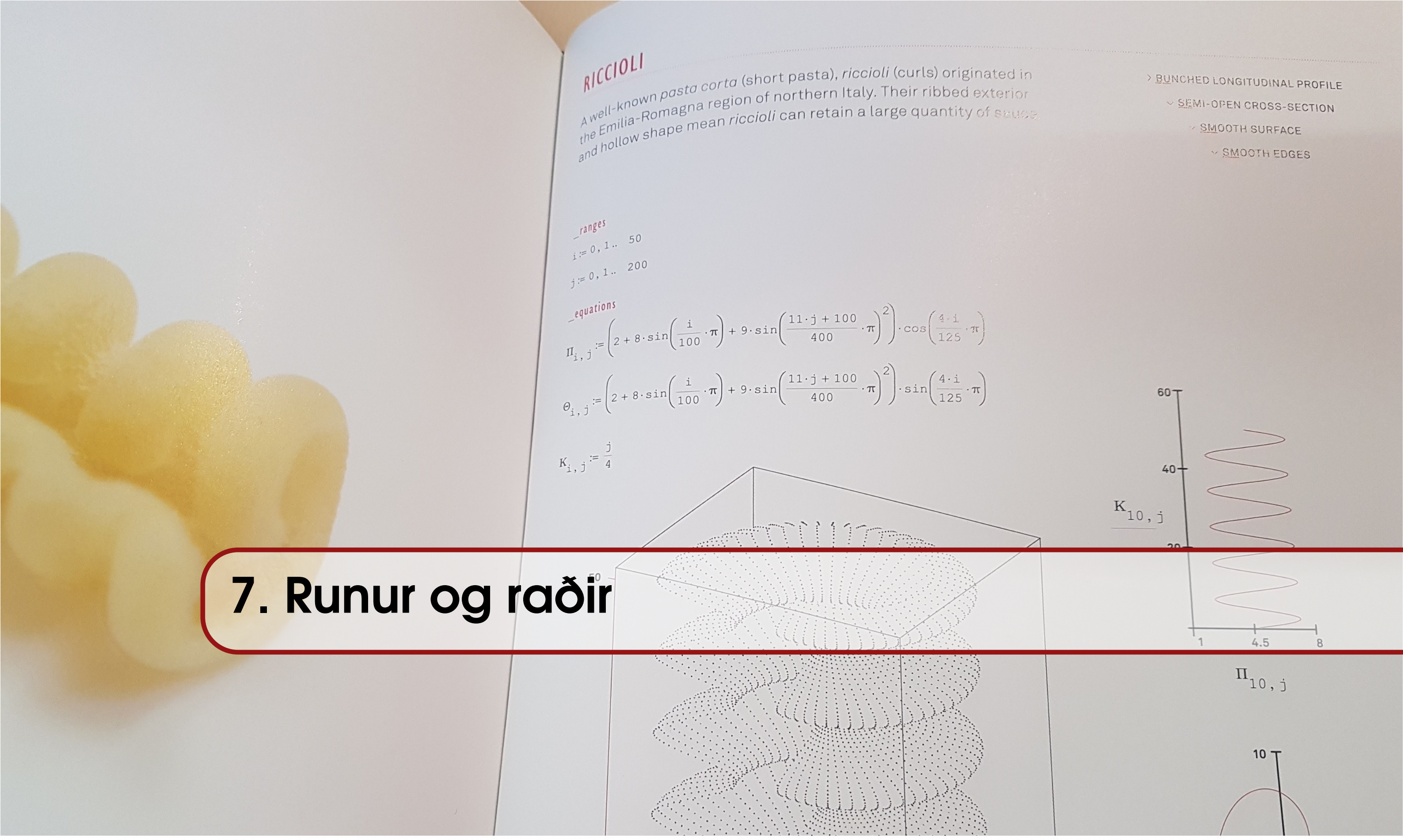


7. Runur og raðir

Í þessun hluta ætlum við að fjallað er um runur og raðir (e. sequences and series).

Er eitthvert vit í óendanlegri summu eins og

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots \ ?$$

Við getum hugsað okkur að við höfum ferhyrning með flatamál 1. Fyrst tökum við hálfan ferhyrninginn, svo helminginn af því sem eftir er og þannig áfram koll af kolli. Nokkuð ljóst ætti að vera að ef við höldum þannig óendanlega lengi áfram, að þá er ekkert eftir af flatarmálinu sem við höfum ekki tekið. Með öðrum orðum: Eftir því sem við tökum fleiri liði með í summunni, því nær er summan því að vera talan 1 og fyrir hvaða tölu $\varepsilon > 0$ sem er getum við, með því að láta $N \in \mathbb{N}$ vera nógu stóra tölu, tryggt að

$$\left| 1 - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2^n} \right| < \varepsilon.$$

Maður segir að *markgildi* summunnar sé 1 þegar N stefnir á $+\infty$.

Flest mikilvæg föll er hægt að setja fram sem (óendanlega) summu einfaldra falla, t.d.

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \dots.$$

Oft er hægt að diffra og heilda slík föll með því að diffra eða heilda slíkar óendanlegar summur lið fyrir lið. Í þessum hluta tökum við saman mikilvægustu eiginleika runa og raða. Við sönnum einnig flestar helstu niðurstöður.

7.1 Runur

Runa af rauntölum, táknuð með $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, er raðað safn af rauntölum þar sem sérhverri náttúrulegri tölu $n \in \mathbb{N}$ er úthlutað nákvæmlega einni rauntölu $a_n \in \mathbb{R}$. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eru runur, þá segjum við að $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ séu sama runan þþaa.

$$a_n = b_n \quad \text{fyrir sérhvert } n \in \mathbb{N}.$$

Athugasemdir.

1. Runa er í raun ekkert annað en vektor með jafn (óendanlega) marga liði og náttúrulegu tölurnar eru margar.
2. Fall $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ úthlutar sérhverju $n \in \mathbb{N}$ nákvæmlega eina rauntölu $f(n)$. Slíkt fall skilgreinir því á augljósan hátt runu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ með $a_n := f(n)$.
3. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er runa, þá getum við skilgreint fall $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ með því að setja $f(n) := a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Það er því lítil ástæða til þess að gera mun á runum og föllum $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$.
4. Í stað þess að nota $\mathbb{R}$ sem varpmengi getur maður notað $\mathbb{C}$.
5. Í sumum kennslubókum er runa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ táknuð með $\{a_n\}$, sem er afar óheppilegt því svona er mengi yfirleitt táknað. Í runu skiptir röðin á stökunum máli, í mengi aftur á móti ekki.

■ **Dæmi 7.1** Nokkur dæmi um runur.

1. $(n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 2, 3, \ldots)$, þ.e. runan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ þar sem $a_n = n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.
2. $((-2)^{-n})_{n\in\mathbb{N}} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots\right)$, þ.e. runan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ þar sem $a_n = (-2)^{-n}$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.
3. Skoðum runurnar $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, þar sem $a_n := (-1)^{n-1}$ og $b_n := \cos((n-1)\pi)$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Þetta er sama runan því
$$b_n = \cos((n-1)\pi) = (-1)^{n-1} = a_n \quad \text{fyrir öll } n \in \mathbb{N}.$$
4. Við skilgreinum rununa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ með $a_1 := 1$ og $a_n := \sqrt{6 + a_{n-1}}$ fyrir öll $n \geq 2$. Þetta skilgreinir runu því við getum reiknað út a_n fyrir hvaða $n \in \mathbb{N}$ sem er. T.d. er
$$a_3 = \sqrt{6 + a_2} = \sqrt{6 + \sqrt{6 + a_1}} = \sqrt{6 + \sqrt{6 + 1}} = \sqrt{6 + \sqrt{7}}.$$
5. Við skilgreinum rununa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ með $a_1 := 1$, $a_2 := 1$ og $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ sem eru stærri en 2. T.d. er $a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$, $a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$ og $a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$. Þessi runa gengur undir nafninu Fibonacci-tölurnar.

■

Skilgreining 7.1.1 Nokkur hugtök notuð til þess að lýsa runum.

Látum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vera runu af rauntölum.

a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er sögð vera *takmörkuð að neðan* ef til er $L \in \mathbb{R}$ þ.a. $L \leq a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Talan L er sögð vera *neðra mat* fyrir rununa.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er sögð vera *takmörkuð að ofan* ef til er $M \in \mathbb{R}$ þ.a. $M \geq a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Talan M er sögð vera *efra mat* fyrir rununa.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er sögð vera *takmörkuð* ef til er $K \in \mathbb{R}$ þ.a. $K \geq |a_n|$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.
Ath. runan er takmörkuð þþaa. hún sé takmörkuð að ofan og að neðan.

b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er sögð vera *jákvæð* ef talan 0 er neðra mat rununnar ($a_n \geq 0$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$).

$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er sögð vera *neikvæð* ef talan 0 er efra mat rununnar ($a_n \le 0$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$).

c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er sögð vera *vaxandi* ef $a_{n+1} \ge a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ og er sögð vera *minnkandi* (eða fallandi) ef $a_{n+1} \le a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Hún er sögð vera *einhalla* ef hún er vaxandi eða minnkandi.

Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er runa af tvinntölum, þá heitir hún *takmörkuð* ef til er $K \in \mathbb{R}$ þ.a. $|a_n| \le K$.

■ **Dæmi 7.2** Runan $(2^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ er takmörkuð og minnkandi runa. T.d. er $1/2$ efra mat og 0 neðra mat. Hún er einnig einhalla. ■

■ **Dæmi 7.3** Tvinntölurunan $(e^{in})_{n\in\mathbb{N}}$ er takmörkuð því

$$|e^{in}| = \sqrt{\cos^2(n) + \sin^2(n)} = 1 \text{ fyrir öll } n \in \mathbb{N}.$$

■

Yfirleitt hefur maður bara áhuga á því hvernig runa hegðar sér fyrir stór $n \in \mathbb{N}$, þ.e. fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ stærri en einhver ákveðin tala. T.d. er runan $(-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots)$ jákvæð, nema fyrir fimm fyrstu liðina. Maður segir að runan sé *jákvæð að lokum* (e. ultimately positive). Almennt notar maður *að lokum* til þess að tjá að frá og með einhverjum lið hafi runan einhverja tiltekna eiginleika.

Yfirleitt hefur maður lítinn áhuga á öðru en markgildi runu:

Skilgreining 7.1.2 Látum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vera runu af rauntölum. Við segjum að runan sé *samleitin* ef til er tala $L \in \mathbb{R}$ þ.a. $|a_n - L|$ verður eins lítið og vera vill fyrir nógu stór $n \in \mathbb{N}$. L heitir þá *markgildi* rununnar og við ritum $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. Runa sem ekki er samleitin heitir *ósamleitin*. Nákvæm skilgreining er:

Runan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heitir samleitin með markgildið $L \in \mathbb{R}$, ef fyrir sérhvert $\varepsilon > 0$ er til $N \in \mathbb{N}$ þ.a.

$$\text{ef } n \ge N, \text{ þá er } |a_n - L| < \varepsilon.$$

ATH Í skilgreiningunni á markgildi má allt eins gera ráð fyrir því að $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sé runa af tvinntölum og að $L \in \mathbb{C}$.

■ **Dæmi 7.4** Skoðum rununa $(1/n)_{n\in\mathbb{N}}$. Þessi runa er samleitin og hefur markgildið 0. Af hverju? Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið. Með því að láta $N \in \mathbb{N}$ vera tölu $> 1/\varepsilon$, þá er $\varepsilon > 1/N$ og tryggt er að

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} \le \frac{1}{N} < \varepsilon \text{ fyrir öll } n \ge N.$$

■

Oft er þægilegt að nota að við kunnum að finna markgildi falla, svo við skoðum tilsvarandi fall fyrir rununa sem við erum að skoða. Ef $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er fall og $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er runa og $a_n = f(n)$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$, þá gildir: Ef $f(x)$ hefur markgildið $L \in \mathbb{R}$ þegar $x \to +\infty$, þá er runan samleitin og

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = L.$$

■ **Dæmi 7.5** Þar sem fallið $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x$, hefur markgildið 0 þegar x stefnir á óendanlegt og $f(n) = a_n = 1/n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$, þá er runan $a_n = 1/n$ samleitin og hefur markgildið 0. ■

■ **Dæmi 7.6** Athugið vel að fullyrðingar eins og í síðasta dæmi gilda ekki í hina áttina. Látum t.d. $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\pi x)$, og $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vera runu þar sem $a_n = 0$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Þá er $a_n = f(n)$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$ og augljóslega er $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$. Engu að síður hefur $f(x)$ ekki markgildi þegar x stefnir á óendanlegt. ■

ATH Runa sem stefnir á $+\infty$ eða $-\infty$ eða hefur ekkert markgildi er sögð vera ósamleitin.

Ef rauntöluruna $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er ekki samleitin, þá er hún sögð vera ósamleitin. Ef fyrir sérhvert $M \in \mathbb{R}$ er til $N_M \in \mathbb{N}$ þ.a. fullyrðingin „ef $n \geq N_M$, þá er $a_n \geq M$“ er sönn, þá segjum við að runan stefni á $+\infty$ þegar n stefnir á óendanlegt og ritum

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty.$$

Samsvarandi ritum við

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty$$

ef fyrir sérhvert $L \in \mathbb{R}$ er til $N_L \in \mathbb{N}$ þ.a. fullyrðingin „ ef $n \geq N_L$, þá er $a_n \leq L$“ er sönn.

■ **Dæmi 7.7** Runan $((n-1)/n)_{n\in\mathbb{N}}$ er samleitin með markgildið 1. Runan $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ er ósamleitin og $\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$. Runurnar $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $((-1)^n n)_{n\in\mathbb{N}}$ eru ósamleitnar. ■

Af reglum um reiknireglur fyrir markgildi falla leiðir eftirfarandi beint.

Látum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vera samleitnar runur af rauntölum og $c \in \mathbb{R}$. Þá er

$$\lim_{n\to+\infty} ca_n = c \lim_{n\to+\infty} a_n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n + \lim_{n\to+\infty} b_n,$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n b_n = \left(\lim_{n\to+\infty} a_n\right)\left(\lim_{n\to+\infty} b_n\right)$$

og

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim_{n\to+\infty} a_n} \quad \text{ef} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0.$$

ATH Reiknireglurnar hér að ofan eru líka réttar fyrir tvinntalnarunur $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $c \in \mathbb{C}$.

Að auki leiðir af Klemmureglunni: Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ og $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eru runur þ.a. $a_n \leq b_n \leq c_n$ fyrir öll n frá og með einhverjum lið (að lokum) og

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = L,$$

þá er $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ samleitin og $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = L$.

■ **Dæmi 7.8** Runan $(\sqrt{n^2+2n}-n)_{n\in\mathbb{N}}$ er samleitin með markgildið 1 því

$$\sqrt{n^2+2n}-n=\frac{(\sqrt{n^2+2n}-n)(\sqrt{n^2+2n}+n)}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}=\frac{2}{\sqrt{1+2/n}+1}$$

svo

$$\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n^2+2n}-n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{1+2/n}+1}=\frac{2}{\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{1+2/n}+1\right)}=\frac{2}{1+1}=1.$$

■

■ **Dæmi 7.9** Sýnið að runan $(\cos(n)/n)_{n\in\mathbb{N}}$ sé samleitin með markgildið 0.
Lausn: Athugum að

$$\frac{-1}{n}\leq\frac{\cos(n)}{n}\leq\frac{1}{n}$$

og

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{-1}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0.$$

Klemmureglan segir þá að

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cos(n)}{n}=0.$$

■

Nokkrar mikilvægar staðreyndir um runur eru:

Regla 7.1.1 Látum $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vera rauntalnarunu. Þá gildir:

1. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er samleitin, þá er hún takmörkuð.
2. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er takmörkuð að ofan og vaxandi að lokum, þá er hún samleitin.
3. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er takmörkuð að neðan og minnkandi að lokum, þá er hún samleitin.
4. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er vaxandi að lokum, þá gildir nákvæmlega eitt af tvennu:
   a) Hún er samleitin. b) Hún er ósamleitin og $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.
5. Ef $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er minnkandi að lokum, þá gildir nákvæmlega eitt af tvennu:
   a) Hún er samleitin. b) Hún er ósamleitin og $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=-\infty$.

Sönnun.

1. Gerum ráð fyrir að $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sé samleitin með markgildið L. Þá er fyrir $\varepsilon=1$ til $N_\varepsilon\in\mathbb{N}$ þ.a. ef $n\geq N_\varepsilon$ þá er $|a_n-L|<\varepsilon=1$. En þá er $|a_n|<|L|+1$ fyrir öll $n\geq N_\varepsilon$ og þá

$$|a_n|\leq\max\{|a_1|,|a_2|,|a_3|,\ldots,|a_{N_\varepsilon}|,|L|+1\}$$

   fyrir öll $n\in\mathbb{N}$.
2. Leiðir af fullkomleika rauntalnakerfisins (rauntöluásinn hefur engin göt). Rauntölurnar eru skilgreindar þannig að þetta verður að gilda. Áhugasamir geta googlað *Dedekind cut*.
3. Leiðir af fullkomleika rauntalnakerfisins (rauntöluásinn hefur engin göt).
4. Gerum ráð fyrir að $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sé vaxandi að lokum. Ef hún er takmörkuð að ofan, þá er hún samleitin skv. lið 2. Ef hún er ekki takmörkuð að ofan, þá hlýtur $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$.
5. Svipað og 4.

■

■ **Dæmi 7.10** Sýnið að runan $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, þar sem

$$a_n = \frac{n^2-3}{n^3+4} \text{ fyrir öll } n \in \mathbb{N},$$

sé minnkandi að lokum.
Lausn: Skilgreinum fallið $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{x^2-3}{x^3+4}.$$

Þá er

$$f'(x) = -\frac{x(x^3-9x-8)}{(x^3+4)^2}$$

og ef $x > 4$ þá er $f'(x) < 0$. Því er f minnkandi fall á bilinu $[4, +\infty[$ og þar með $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ minnkandi að lokum, því ef $n \geq 4$ þá er

$$a_n = f(n) > f(n+1) = a_{n+1}.$$

■

Regla 7.1.2 Tvö afar mikilvæg markgildi eru:

1. Ef $x \in \mathbb{R}$ og $|x| < 1$, þá gildir

$$\lim_{n\to+\infty} x^n = 0.$$

2. Fyrir hvaða $x \in \mathbb{R}$ sem er gildir

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

ATH Regla 7.1.2 er líka rétt fyrir $x \in \mathbb{C}$.

Sönnun. 1. Fullyrðingin er augljóslega rétt ef $x = 0$. Við gerum því ráð fyrir að $0 < |x| < 1$. Auðséð er að

$$-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$$

svo það nægir vegna Klemmureglu að sýna að $\lim_{n\to+\infty} |x|^n = 0$. Látum $\varepsilon > 0$ vera gefið. Við veljum $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ þ.a.

$$N_\varepsilon > \frac{\ln(\varepsilon)}{\ln(|x|)}$$

því þá gildir skv. reglum fyrir lograföll og af því að $\ln(|x|) < 0$ því $0 < |x| < 1$, að

$$\ln(|x|^{N_\varepsilon}) < \ln(\varepsilon),$$

sem er jafngilt

$$|x|^{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

því $\ln$ er stranglega vaxandi fall. En þá gildir fyrir sérhvert $n \geq N_\varepsilon$ að

$$||x|^n - 0| = |x|^n \leq |x|^{N_\varepsilon} < \varepsilon$$

svo $(|x|^n)_{n\in\mathbb{N}}$ er samleitin með markgildið 0.

2. Veljum $N \in \mathbb{N}$ þ.a. $N > |x|$. Þá gildir fyrir sérhvert $n > N$ að

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| = \frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdot\frac{|x|}{3}\cdots\frac{|x|}{N-1}\cdot\frac{|x|}{N}\cdot\frac{|x|}{N+1}\cdots\frac{|x|}{n} < \frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdot\frac{|x|}{3}\cdots\frac{|x|}{N-1}\cdot\frac{|x|}{N}\cdot\frac{|x|}{N}\cdots\frac{|x|}{N}$$

svo með $y := |x|/N < 1$ og

$$K := \frac{|x|}{1}\cdot\frac{|x|}{2}\cdot\frac{|x|}{3}\cdots\frac{|x|}{N-1}\cdot y^{1-N}$$

gildir

$$\left|\frac{x^n}{n!}\right| < Ky^n.$$

Af því $|y| < 1$ þá fæst með Klemmureglunni og því sem ofan var sýnt að

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^n}{n!}\right| = 0.$$

■

ATH Sönnunin á lið 2. hér að ofan er dæmigerð fyrir sönnun fyrir runur og hugmyndin er einföld. Við festum x og getum þá alltaf fundið heila tölu N þ.a. $N > |x|$. Við getum lítið sagt um liðina

$$\frac{|x|}{k} \quad \text{með} \quad k\in\mathbb{N} \quad \text{og} \quad 1\le k\le N-1,$$

en þeir eru bara endanlega margir svo margfeldi þeirra er bara einhver rauntala; hugsanlega mjög stór en samt endanleg. Fyrir liðina

$$\frac{|x|}{k} \quad \text{með} \quad k\in\mathbb{N} \quad \text{og} \quad N\le k,$$

vitum við að þeir eru ekki stærri en $|x|/N$ því $k \ge N$ og $|x|/N < 1$ því $N > |x|$. Frá lið 1. í reglunni vitum við svo að ef við margföldum tölu sem er minni en einn óendanlega oft við sjálfa sig er niðurstaðan núll. Að lokum notfærum við okkur að núll sinnum hvaða endanlega tala sem er gefur núll. Sönnunin er bara stærðfræðilegri framsetning á þessari hugmynd.

■ Dæmi 7.11

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{3^n+4^n+5^n}{5^n} = \lim_{n\to+\infty}\left[\left(\frac{3}{5}\right)^n+\left(\frac{4}{5}\right)^n+1\right] = 0+0+1 = 1.$$

■

Æfingar 7.1

Æfing 7.1.1 Skoðum hina frægu Fibonacci runu, sem er skilgreind með $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ og $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

a) Sýnið að runan er vaxandi.

b) Sýnið að runan er ósamleitin.

Ábending: Í lið b) er t.d. hægt að gera ráð fyrir að runan sé samleitin að $L \in \mathbb{R}$ og sýna svo að það leiðir til mótsagnar.

■

Æfing 7.1.2 Skoðum rununa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sem er skilgreind með $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ og $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n - 2$ fyrir öll $n \geq 1$.

a) Reiknið a_3, a_4 og a_5 og dragið ályktun um halla rununnar.

b) Sannið með þrepun að runan sé minnkandi.

Ábending. Í b)-lið hentar betur að sanna að $a_{n+1} - a_n \leq 0$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. ■

Æfing 7.1.3 Skoðum rununa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ þar sem $a_n = \dfrac{n-4}{n+1}$.

a) Finnið efra mat ef runan er takmörkuð að ofan og neðra mat ef runan er takmörkuð að neðan.

b) Er runan jákvæð eða neikvæð að lokum?

c) Er runan vaxandi eða minnkandi? Munið að rökstyðja.

d) Er runan samleitin eða ósamleitin?

■

7.2 Raðir

Við snúm okkur að röðum, þ.e. óendanlegum summum. Látum a_k, $k \in \mathbb{N}$, vera rauntölur. Við höfum áhuga á því hvort við getum skilgreint óendanlegu summuna

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

Þ.e. við viljum geta sagt hvort röðin er samleitin eða ósamleitin; með öðrum orðum, hvort summan sé að stefna á eitthvert tiltekið gildi eða ekki þegar við bætum við liðum. Til þess að ákvarða þetta getum við skoðað hlutsummurunu raðarinnar.

7.2.1 Hlutsummurunur

Við byrjum á því að búa til runu $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, þar sem

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Runan $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er kölluð *hlutsummuruna* raðarinnar $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Við segjum að röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sé *samleitin* ef hlutsummurunan $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er samleitin og við skilgreinum þá

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

Ef hlutsummurunan $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ er ósamleitin, þá segjum við að röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sé *ósamleitin*. Ef $\lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty$ þá skilgreinum við

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := +\infty$$

og ef $\lim_{n\to+\infty} s_n = -\infty$ þá skilgreinum við

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k := -\infty.$$

■ **Dæmi 7.12** Skoðum röðina

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

Við byrjum á því að mynda hlutsummurununa $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ þar sem

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}.$$

T.d. er

$$s_1 = \frac{1}{2}, \quad s_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{og} \quad s_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Síðar munum við reikna út formúluna

$$s_n = 1 - \frac{1}{2^n},$$

en af þessari formúlu leiðir að $\lim_{n\to+\infty} s_n = 1$ svo skv. skilgreiningu er

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1.$$

■

ATH Auðvitað er ekki nauðsynlegt að byrja að telja frá 1 í summunni. T.d. er

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k}.$$

7.2.2 Kvótaraðir

Afar heppilegt er að (lang) mikilvægasta röðin er einnig ein af þeim einfaldari, hin svokallaða kvótaröð (e. geometric series):

Skilgreining 7.2.1 Röð af gerðinni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$$

er kölluð kvótaröð með kvótann r.

Við höfum áður sannað í Reglu 7.1.2 að ef $|r| < 1$, þá er $\lim_{k\to+\infty} r^k = 0$. Skoðum nú hlutsummurunu kvótaraðar,

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} r^k = r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^n,$$

fyrir öll $n = 0, 1, 2, \ldots, n$. Athugum að

$$\begin{aligned}
(1-r)s_n &= r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^n - r(r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^n) \\
&= r^0 + r^1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^n - (r^1 + r^2 + r^3 + \ldots + r^{n+1}) \\
&= 1 - r^{n+1}
\end{aligned}$$

svo ef $r \neq 1$, þá er

$$s_n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

og þar með, ef $|r| < 1$, er

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}.$$

Athugið: Við höfum

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = +\infty \quad \text{ef } r \geq 1$$

og $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$ er einfaldlega ósamleitin ef $r \leq -1$.

ATH Kvótaröðin er stundum skrifuð $\sum_{n=1}^{+\infty} ar^{n-1} = a\sum_{n=0}^{+\infty} r^n$, þar sem a er fasti.

ATH Raðir með tvinntölustuðlum er hægt að fjalla um á mjög svipaðan hátt með því að skoða hlutsummurunur. Sér í lagi gildir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} r^k = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r}$$

ef $r \in \mathbb{C}$ þ.a. $|r| < 1$ og $\sum_{k=0}^{+\infty} r^k$ er ósamleitin ef $|r| \geq 1$.

7.2.3 Kíkisraðir

Dæmi um aðrar raðir þar sem auðvelt er að reikna summuna eru svokallaðar kíkisraðir (e. telescoping series). Í þeim styttast nær allir liðir út eftir stofnbrotaliðun. Skoðum t.d.

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)}.$$

Með umritununni

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

sér maður að

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

svo hlutsummurunan er mjög einföld því allir liðir nema sá fyrsti og síðasti styttast út,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

og þar með gildir

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.$$

7.2.4 Nokkrar gagnlegar staðreyndir um raðir

Regla 7.2.1 Ef röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

er samleitin, þá gildir $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$.

Sönnun. Myndum fyrst hlutsummurununa

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Þá gildir, því röðin er samleitin, að til er $a \in \mathbb{R}$ þ.a.

$$a = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n.$$

En þá gildir, vegna $a_k = s_k - s_{k-1}$, að

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = \lim_{k\to+\infty} (s_k - s_{k-1}) = \lim_{k\to+\infty} s_k - \lim_{k\to+\infty} s_{k-1} = a - a = 0$$

skv. reiknireglum fyrir runur. ■

Athuga ber að $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$ er nauðsynlegt skilyrði, en ekki nægjanlegt. T.d. gildir $\lim_{k\to+\infty} 1/k = 0$ en eins og við munum sýna síðar er

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Nokkuð augljóst ætti að vera að næsta regla gildir, því það munar bara tölunni $\sum_{k=1}^{N-1} a_k \in \mathbb{R}$ á röðunum.

Regla 7.2.2 Fyrir öll $N \in \mathbb{N}$ gildir: Röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$$

er samleitin, þþaa. röðin

$$\sum_{k=N}^{+\infty} a_k$$

er samleitin.

Regla 7.2.3 Ef runan $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er jákvæð (að lokum), þá gildir nákvæmlega eitt af tvennu:

$$a)\ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \text{ er samleitin} \quad \textit{eða} \quad b)\ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty.$$

Sönnun. Hlutsummurunan $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,$$

er vaxandi (að lokum), því fyrir öll nógu stór k er $a_k \geq 0$. Við notum Reglu 7.1.1 lið 4) til að sjá: Ef runan $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hefur efra mat $M \in \mathbb{R}$, þ.e. $s_n \leq M$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$, þá er hún samleitin, og þar með er $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ samleitin. Ef $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hefur ekki efra mat, þá gildir

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = +\infty.$$

■

Næsta regla leiðir beint af samsvarandi eiginleikum fyrir runur.

Regla 7.2.4 Ef $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ og $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ eru samleitnar raðir og $c \in \mathbb{R}$, þá gildir:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} ca_k = c\sum_{k=1}^{+\infty} a_k.$$

$$\sum_{k=1}^{+\infty}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k+\sum_{k=1}^{+\infty}b_k.$$

Ef $a_k \leq b_k$ fyrir öll $k \in \mathbb{N}$, þá gildir

$$\sum_{k=1}^{+\infty}a_k \leq \sum_{k=1}^{+\infty}b_k.$$

■ **Dæmi 7.13** Reiknum

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1+2^{k+1}}{3^k}.$$

Lausn: Byrjum á því að reikna

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^{k+1}}=\frac{1}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{3^k}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-1/3}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}=\frac{1}{2}.$$

Svo reiknum við

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{k+1}}{3^k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{2^{k+2}}{3^{k+1}}=\frac{4}{3}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{1-2/3}=4.$$

En þar með er sýnt að

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1+2^{k+1}}{3^k}=\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{3^k}+\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{2^{k+1}}{3^k}=\frac{1}{2}+4=\frac{9}{2}.$$

■

7.2.5 Skilyrt samleitni og alsamleitni

Alsamleitnar raðir eru sérstaklega áhugaverðar samleitnar raðir.

Skilgreining 7.2.2 Röðin $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ er sögð vera *alsamleitin* ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k|$ er samleitin.

Eftirfarandi staðreynd er mikilvæg.

Regla 7.2.5 Ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ er alsamleitin, þá er hún samleitin.

Sönnun. Við setjum $b_k = a_k + |a_k|$ fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Þá er

$$0 \leq b_k = a_k + |a_k| \leq 2|a_k| \quad \text{fyrir öll } k \in \mathbb{N}$$

svo runan $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ er jákvæð og af því að $\sum_{k=1}^{+\infty}a_k$ er alsamleitin gildir

$$\sum_{k=1}^{+\infty}|a_k| = A < +\infty.$$

En þá er skv. síðasta lið í Reglu 7.2.4

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \leq 2 \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| = 2A < +\infty$$

og þá skv. Reglu 7.2.3 röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ samleitin. En nú er $a_k = b_k - |a_k|$ fyrir öll $k \in \mathbb{N}$ svo skv. miðliðnum í Reglu 7.2.4 er

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = \sum_{k=1}^{+\infty} (b_k - |a_k|) = \sum_{k=1}^{+\infty} b_k - \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|,$$

þ.e. röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er samleitin. ■

ATH Nákvæmlega það sama gildir fyrir tvinntalnaraðir $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$. Ef rauntalnarunan $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|$ er samleitin, sem er jafngilt því að $\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty$, er tvinntalnaröðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ samleitin.

Skilgreining 7.2.3 Röð sem er samleitin, en ekki alsamleitin er sögð vera *skilyrt samleitin*.

Ekki augljós staðreynd er, að það eru til skilyrt samleitnar raðir. T.d. er hægt að sýna að

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \ln 2 \quad \text{en} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \left| \frac{(-1)^{k-1}}{k} \right| = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

ATH Til þess að sýna að röð $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ sé alsamleitin er nóg, skv. Reglu 7.2.3 að sýna að

$$\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| < +\infty.$$

Þetta er yfirleitt gert með því að sýna að til sé einhvert $M \in \mathbb{R}$ þ.a. fyrir hvaða $N \in \mathbb{N}$ sem er gildi

$$\sum_{k=1}^{N} |a_k| \leq M.$$

Augljóslega eru hugtökin samleitni og alsamleitni jafngild hugtök fyrir röð með jákvæðum tölum.

Miklvægi alsamleitni ræðst að mestu af eftirfarandi setningu.

Regla 7.2.6 a) Ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er alsamleitin, þá er sama í hvaða röð við leggjum liðina saman, við fáum alltaf sömu útkomu.

b) Ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er skilyrt samleitin, þá getum við fyrir hvaða $L \in \mathbb{R}$ sem er raðað liðunum a_k upp á nýtt þ.a. óendanlega summan sé L. Að auki er mögulegt að raða liðunum a_k þ.a. óendanlega summan sé $+\infty$ eða $-\infty$. Við getum líka raðað liðunum þ.a. röðin hafi ekki markgildi.

Ekki verður farið nákvæmlega í sönnunina hér, en megin ástæðan er sú að ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er skilyrt samleitin, þá er óendanlega summa negatívu liðanna $-\infty$ og óendanlega summa jákvæðu liðanna $+\infty$. b)-liðurinn er því ein útgáfa þess að ekki er hægt að skilgreina $+\infty - \infty$ svo eitthvert vit sé í.
Athugið að skilyrt samleitni raðar er skrítin samleitni og útkoman úr summunni er einungis háð röð liðanna. Ef við hefðum t.d. ekki skilgreint

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \quad \text{sem} \quad \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} a_k = \lim_{N\to+\infty} (a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_N)$$

heldur sem

$$\lim_{N\to+\infty} (a_1 + a_3 + a_5 + \ldots + a_{2N+1} + a_2 + a_4 + a_6 + \ldots + a_{4N}),$$

þá væri útkoman almennt önnur hjá skilyrt samleitnum röðum. Það má því færa sterk rök fyrir því að skilyrt samleitni sé ekki góð samleitni.

Alsamleitni er mikilvægara hugtak en skilyrt samleitni því þar er summan óháð því í hvaða röð við leggjum liðina saman!

Æfingar 7.2

Æfing 7.2.1 Reiknið summu raðarinnar

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n + 4}{5^n}.$$

■

Æfing 7.2.2 Reiknið summuna

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{e^{n+2}}{3^{n-3}}.$$

■

Æfing 7.2.3 Reiknið summuna ef röðin er samleitin, eða rökstyðjið að hún sé ekki samleitin.

$$\text{a)}\ \sum_{n=3}^{+\infty} 1, \quad \text{b)}\ \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{e^{n+3}}{3^{n-2}}, \quad \text{c)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{2n}}{5^n}, \quad \text{d)}\ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{n},$$

■

Æfing 7.2.4 Finnið hlutsummurunu kíkisraðarinnar

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

og notið hana til að reikna summu raðarinnar.

■

Æfing 7.2.5 Finnið hlutsummurunu kíkisraðarinnar

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)}$$

og notið hana til að reikna summu raðarinnar.

■

Æfing 7.2.6 Reiknið hlutsummurunu raðarinnar

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Er röðin samleitin?

■

Æfing 7.2.7 Eru eftirfarandi fullyrðingar réttar eða rangar? Rökstyðjið svarið vandlega.

a) Ef runan $(a_n)_{n\in N}$ er samleitin, þá er röðin $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ samleitin.

b) Ef röðin $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n$ er samleitin, þá er runan $(b_n)_{n\in N}$ samleitin.

■

7.3 Samleitnipróf

Almennt er erfitt að reikna summur raða og oft nægir líka að vita hvort einhver tiltekin röð sé alsamleitin eða ekki. Megin ástæðan fyrir þessu er að við viljum skilgreina föll af gerðinni

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

og þurfum þá að vera viss um að þau séu vel skilgreind, þ.e. að $f(x)$ hafi einhverja merkingu fyrir tiltekin $x \in \mathbb{R}$. Ef við getum verið viss um það, þá má nálgast rétta gildið eins mikið og þörf er á með því að leggja saman nógu marga liði raðarinnar. Til þess að skera úr um það hvort röð sé alsamleitin eru til ýmsar aðferðir. Hér á eftir fylgja nokkrar þær mikilvægustu.

Regla 7.3.1 — Heildispróf. Látum $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera runu, $N \in \mathbb{N}$ og $f : [N, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ vera samfellt fallandi (minnkandi) fall þ.a. $f(x) \geq 0$ fyrir öll $x \in [N, +\infty[$ og $f(n) = a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$, $n \geq N$. Þá gildir:

a) Ef
$$\int_N^{+\infty} f(t)dt = +\infty, \quad \text{þá er} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k = +\infty.$$

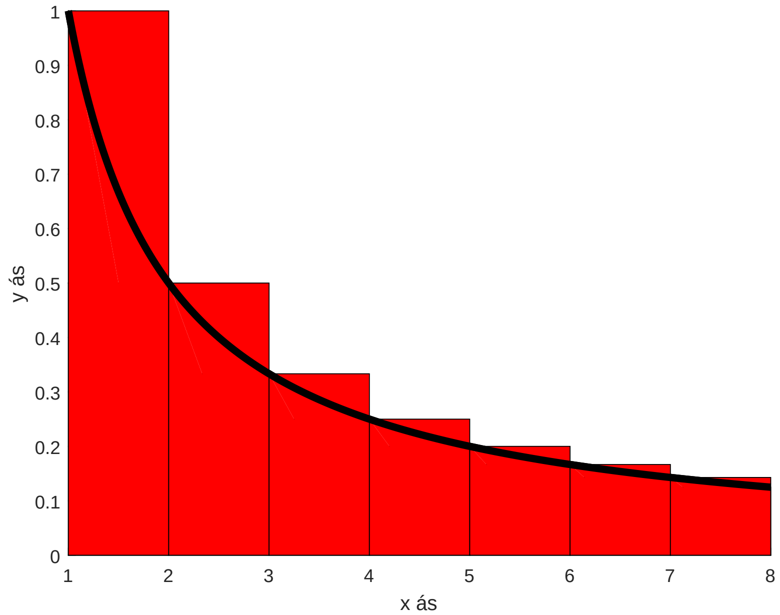
b) Ef
$$\int_N^{+\infty} f(t)dt < +\infty, \quad \text{þá er röðin} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} a_k < +\infty \quad \text{alsamleitin.}$$

Sönnun. Sést best með því átta sig á því að
$$\sum_{k=N}^{+\infty} a_k \leq \int_N^{+\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{k=N-1}^{+\infty} a_k.$$

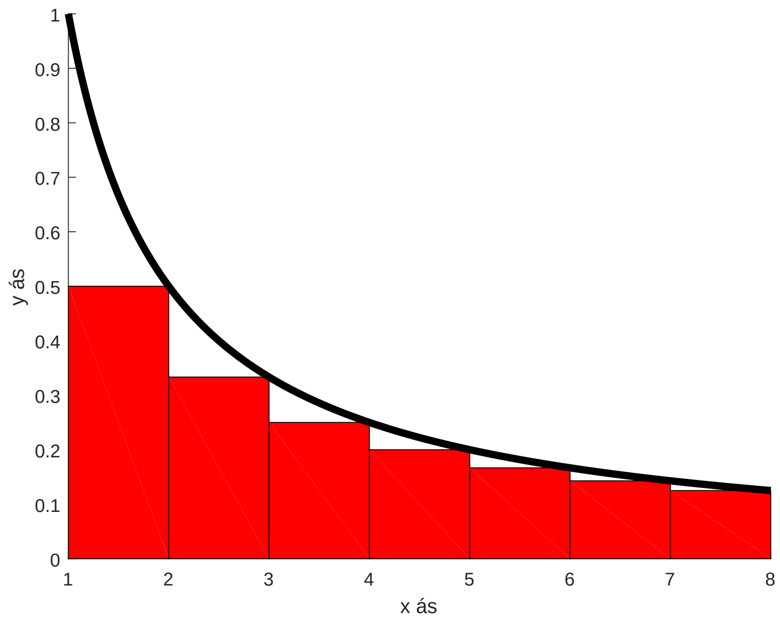
Skoðum til þess fyrst Mynd 7.1. Á henni hefur súlan lengst til vinstri hæðina a_1 og breiddina 1 og þar með flatarmálið a_1, næsta hefur hæðina a_2 og breiddina 1 og þar með flatarmálið a_2 og svo framvegis. Við sjáum að flatarmálið undir súlunum er stærra en flatarmálið undir grafi fallsins $y = f(x)$, táknað með feitu svörtu línunni. Ef við ímyndum okkur að myndin nái upp í óendanlega stór x, þá sést að flatarmálið undir súlunum $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er stærra en flatarmálið $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$ undir grafinu $y = f(x)$. Ef við hliðrum súlunum um einn til vinstri eins og á Mynd 7.2, þá eru súlurnar undir grafi fallsins og á svipaðan hátt sjáum við að $\sum_{k=2}^{+\infty} a_k$ er minna en $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$. Á þessum myndum er $N = 1$, en það skiptir klárlega engu máli fyrir niðurstöðuna. ■

■ **Dæmi 7.14** Sýnið að röðin
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$$
er samleitin ef $p > 1$ og ósamleitin ef $0 < p \leq 1$.

Lausn: Við skilgreinum $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1/x^p$. Þá er
$$f'(x) = -px^{-p-1} < 0$$
fyrir öll $x > 0$, svo f er samfellt og fallandi fall og augljóslega er $f(k) = 1/k^p$ fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Nú er, ef $p \neq 1$,
$$\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_{x=1}^{x=+\infty} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{-p+1}}{-p+1} - \frac{1}{-p+1}$$
og þar sem
$$\lim_{y\to+\infty} x^{-p+1} = 0 \quad \text{ef } p > 1 \text{ og þá } -p+1 < 0$$



Mynd 7.1: Graf minnkandi falls $y = f(x)$ og súlur með hæð $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(2)$, o.s.frv.



Mynd 7.2: Graf minnkandi falls $y = f(x)$ og súlur með hæð $a_2 = f(2)$, $a_3 = f(3)$, o.s.frv.

og

$$\lim_{y \to +\infty} x^{-p+1} = +\infty \quad \text{ef } 0 < p < 1 \text{ og þá } -p+1 > 0$$

gefur Regla 7.3.1 að

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}$$

er samleitin ef $p > 1$ og ósamleitin ef $0 < p < 1$.

Fyrir $p = 1$ er

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} = \Big[\ln(x)\Big]_{x=1}^{x=+\infty} = +\infty,$$

svo skv. Reglu 7.3.1 er

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^p}\bigg|_{p=1}$$

ósamleitin. ■

Regla 7.3.2 — Samanburðarpróf. Látum $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ og $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera runur af jákvæðum rauntölum og $K > 0$ vera fasta og gerum ráð fyrir að $a_k \leq K b_k$ að lokum, þ.e. til er $N \in \mathbb{N}$ þ.a. ef $k \geq N$, þá er $a_k \leq K b_k$. Þá gildir

$$0 \leq \sum_{k=N}^{+\infty} a_k \leq K \sum_{k=N}^{+\infty} b_k$$

svo:

(a) Ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er samleitin, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ samleitin.

(b) Ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er ósamleitin, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ ósamleitin.

Sönnun. Ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er samleitin, þá er

$$0 \leq \sum_{k=N}^{+\infty} a_k \leq K \sum_{k=N}^{+\infty} b_k < +\infty$$

svo röðin $\sum_{k=N}^{+\infty} a_k$ er samleitin og þar með $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$.

Ef röðin $\sum_{k=N}^{+\infty} a_k$ er ósamleitin, þá er

$$+\infty = \sum_{k=N}^{+\infty} a_k \leq K \sum_{k=N}^{+\infty} b_k$$

svo við höfum

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = +\infty,$$

sem þýðir að röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er ósamleitin. ■

ATH Samanburðarprófið í Reglu 7.3.2 gefur enga niðurstöðu ef $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er samleitin eða ef röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er ósamleitin.

■ **Dæmi 7.15** Er röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k+1}$$

samleitin?
Lausn: Við sjáum að

$$\left|\frac{(-1)^k}{2^k+1}\right| = \frac{1}{2^k+1} \leq \frac{1}{2^k}$$

fyrir öll $k = 1, 2, \ldots$ og þar sem

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 < +\infty$$

segir Regla 7.3.2 okkur að röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2^k+1}$ sé alsamleitin og þar með samleitin. ■

■ **Dæmi 7.16** Er röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k+1}{k^3+1}$$

samleitin?
Lausn: Við sjáum að

$$0 < \frac{3k+1}{k^3+1} = \frac{3k}{k^3+1} + \frac{1}{k^3+1} < \frac{3k}{k^3} + \frac{1}{k^3} \leq 3\frac{1}{k^2} + \frac{1}{k^2} = 4\frac{1}{k^2}$$

fyrir öll $k = 1, 2, \ldots$ og þar sem

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty$$

er röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k+1}{k^3+1}$$

alsamleitin og þar með samleitin. Reyndar eru allir liðir raðarinnar jákvæðir svo enginn munur er á hugtakinu samleitni og alsamleitni. ■

■ **Dæmi 7.17** Er röðin

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(k)}$$

samleitin?
Lausn: Við sjáum að fyrir öll $k = 2, 3, \ldots$ er

$$0 < \frac{1}{k} < \frac{1}{\ln(k)}$$

og við vitum að
$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$
Þar með er röðin
$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{\ln(k)}$$
ekki alsamleitin og þar með heldur ekki samleitin, því allir liðir hennar eru jákvæðir. Hún er sem sagt ósamleitin. ■

Regla 7.3.3 — Markgildispróf. Ef $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ og $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eru runur af jákvæðum rauntölum þ.a.
$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_k}{b_k} = L,$$
þar sem $L \in \mathbb{R}$ eða $L = +\infty$. Þá gildir:

(a) Ef $L < +\infty$ og röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er samleitin, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ samleitin.

(b) Ef $L > 0$ og röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er ósamleitin, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ósamleitin.

Sönnun. Ef $L < +\infty$, þá er til $N \in \mathbb{N}$ þ.a. fyrir öll $k \geq N$ er $b_k > 0$ og
$$0 \leq \frac{a_k}{b_k} \leq L + 1.$$
En þá er
$$0 \leq a_k \leq (L+1)b_k$$
fyrir öll $k = N, N+1, N+2, \ldots$, svo skv. Reglu 7.3.2 er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ samleitin.

Ef $L > 0$, þá er til $M \in \mathbb{N}$ þ.a. fyrir öll $k \geq M$ er
$$\frac{a_k}{b_k} \geq \min\{1, \frac{L}{2}\}, \quad \text{þ.e.} \quad a_k \geq \min\{1, \frac{L}{2}\} b_k.$$
Ef nú
$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k = +\infty, \quad \text{þá er} \quad \sum_{k=M}^{+\infty} a_k \geq \min\{1, \frac{L}{2}\} \sum_{k=M}^{+\infty} b_k = +\infty$$
svo röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er ósamleitin. ■

ATH Regla 7.3.3 gefur enga niðurstöðu ef

- $L = +\infty$ og röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er ósamleitin.
- $L = 0$ og röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ er samleitin.

■ **Dæmi 7.18** Er röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{100}+\sqrt{k}}$$

samleitin?
Lausn: Við höfum

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1/(10^{100}+\sqrt{k})}{1/\sqrt{k}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\sqrt{k})}{10^{100}+\sqrt{k}} = 1$$

og

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{2}}} = +\infty.$$

Því er skv. Reglu 7.3.3 röðin ósamleitin. ■

■ **Dæmi 7.19** Er röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k+5}{k^3-2k+3}$$

samleitin?
Lausn: Við höfum

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{(k+5)/(k^3-2k+3)}{1/k^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^3+5k^2}{k^3-2k+3} = 1$$

og

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} < +\infty.$$

Því er skv. Reglu 7.3.3 röðin alsamleitin og þar með samleitin. ■

■ **Dæmi 7.20** Er röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{1000}k+10^{100}}$$

samleitin?
Lausn: Nú er

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1/(10^{1000}k+10^{100})}{1/k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k}{10^{1000}k+10^{100}} = 10^{-1000} > 0$$

og

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k} = +\infty.$$

Því er skv. Reglu 7.3.3 röðin ósamleitin. ■

Ábending: Af síðustu dæmum ætti að vera ljóst að frekar auðvelt er að átta sig á alsamleitni raða af gerðinni

$$\sum_{k=N}^{+\infty} \frac{P(k)}{Q(k)}, \tag{7.1}$$

þar sem

$$P(k) = a_0 + a_1k + a_2k^2 + \ldots + a_rk^r \quad \text{og} \quad Q(k) = b_0 + b_1k + b_2k^2 + \ldots + b_sk^s$$

eru margliður af stigi r og s. Svo framarlega að $Q(k)$ sé ekki núll fyrir eitthvert $k = N, N+1, \dots$ er nóg að athuga mismuninn $s - r$. Þá fæst með Reglu 7.3.3 og samanburði við röðina

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{s-r}} = \begin{cases} R < +\infty & \text{ef } s - r > 1 \\ +\infty & \text{ef } s - r < 1 \end{cases}$$

að:

$$\begin{cases} \text{ef } s - r > 1, & \text{þá er röðin (7.1) er alsamleitin,} \\ \text{ef } s - r \leq 1, & \text{þá er röðin (7.1) er ekki alsamleitin.} \end{cases}$$

Athugið að ef $r - s = 1$ gæti röðin (7.1) verið skilyrt samleitin. Einnig er auðvelt að sjá að $P(k)$ og $Q(k)$ þurfa ekkert endilega að vera margliður, nóg er að þeir liðir í þeim sem vaxa hraðast vaxi eins og k í veldinu r og s, þ.e. $P(k) \sim k^r$ og $Q(k) \sim k^s$, og r og s þurfa ekkert endilega að vera heilar tölur

Regla 7.3.4 — Kvótapróf. Látum $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera runu. Ef til er $N \in \mathbb{N}$ þ.a. $a_k > 0$ fyrir öll $k \geq N$ og markgildið

$$\rho := \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

er til eða

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = +\infty \quad \text{(í þessu tilfelli setjum við } \rho := +\infty\text{),}$$

þá gildir:

(a) Ef $0 \leq \rho < 1$, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ alsamleitin.

(b) Ef $1 < \rho \leq +\infty$, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ósamleitin.

(c) Ef $\rho = 1$, þá getur gefur prófið enga niðurstöðu.

Sönnun. Við sýnum þetta lið fyrir lið.

(a) Gerum ráð fyrir að $0 \leq \rho < 1$. Við setjum $r := \frac{1+\rho}{2}$. Þá er $\rho < r < 1$. Af því að

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \rho$$

og $\rho < r$, þá er til $M \in \mathbb{N}$ þ.a. fyrir öll $k \geq M$ er $a_k > 0$ og

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \leq r.$$

En þá er $a_{M+1} \leq r a_M$, $a_{M+2} \leq r a_{M+1} \leq r^2 a_M$, $a_{M+3} \leq r a_{M+2} \leq r^2 a_{M+1} \leq r^3 a_M$ og almennt, fyrir öll $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{M+n} \leq r^n a_M.$$

Frá því fæst

$$\sum_{k=M}^{+\infty} a_k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} r^n a_M = a_M \sum_{n=0}^{+\infty} r^n = a_M \frac{1}{1-r} < +\infty$$

svo röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er alsamleitin skv. Reglu 7.3.3.

(b) Gerum ráð fyrir að $1 < \rho \leq +\infty$. Við setjum $r := \min\{(\rho+1)/2, 2\}$. Þá er til $M \in \mathbb{N}$ þ.a. fyrir öll $k \geq M$ er $a_k > 0$ og

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \geq r.$$

En þá er, svipað og í (a)-lið, $a_{n+M} \geq r^n a_M$, og þar með er

$$\lim_{k\to+\infty} a_k = +\infty$$

svo röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ er ósamleitin (muna, ef röðin er samleitin, þá gildir nauðsynlega $\lim_{k\to+\infty} a_k = 0$).

(c) Ef $\rho = 1$, þá gefur prófið enga niðurstöðu. T.d. gildir fyrir alsamleitnu röðina $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ að

$$\rho := \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{(k+1)^2}{k^2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k^2+2k+1}{k^2} = 1$$

og fyrir ósamleitnu röðina $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$ að

$$\rho := \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k} = 1.$$

■

ATH Þegar liðir raðarinnar $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ eru k í einhverju veldi er yfirleitt best að nota Reglu 7.3.3, þ.e. Markgildisprófið, en ef liðirnir eru stærðir í veldi sem er háð k, t.d. $a_k = x^k$ fyrir einhverja tölu x, þá er yfirleitt best að nota Kvótaprófið í Reglu 7.3.4.

■ **Dæmi 7.21** Er röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k}{2^k}$$

samleitin?

Lausn: Nú er

$$a_k = \frac{k}{2^k} \quad \text{og} \quad \rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k} \cdot \frac{2^k}{2^{k+1}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{k} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1,$$

svo samkvæmt Kvótaprófinu í Reglu 7.3.4 er röðin því alsamleitin. ■

Við setjum fram eitt próf í viðbót, Rótarprófið, sem hægt er að sanna mjög svipað og Reglu 7.3.4. Það er sjaldnar gagnlegt en Markgildisprófið eða Kvótaprófið, en ágætt að vita af því þegar hin prófin gefa enga niðurstöðu.

Regla 7.3.5 — Rótarpróf. Látum $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vera runu. Ef til er $N \in \mathbb{N}$ þ.a. $a_k > 0$ fyrir öll $k \geq N$ og markgildið

$$\rho := \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k}$$

er til eða

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = +\infty \quad \text{(í þessu tilfelli setjum við } \rho := +\infty\text{),}$$

þá gildir:

(a) Ef $0 \leq \rho < 1$, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ alsamleitin.

(b) Ef $1 < \rho \leq +\infty$, þá er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ ósamleitin.

(c) Ef $\rho = 1$, þá getur gefur prófið enga niðurstöðu.

■ **Dæmi 7.22** Er röðin

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^{k+1}}{k^k}$$

alsamleitin?

Lausn: Hér er bæði hægt að nota Kvótaprófið og Rótarprófið. Við höfum $a_k = 2^{k+1}/k^k$ og Kvótaprófið gefur með

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2^{k+2}}{2^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} = 2 \lim_{k\to+\infty} \left[\left(\frac{k}{k+1} \right)^k \cdot \frac{1}{k+1} \right] = 0 < 1$$

að röðin er alsamleitin. Fyrir Rótarprófið reiknum við

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\frac{2^{k+1}}{k^k}} = \lim_{k\to+\infty} \left(\sqrt[k]{2} \cdot \frac{2}{k} \right) = 0 < 1$$

að röðin er alsamleitin skv. Reglu 7.3.5. ■

Í næsta kafla um veldaraðir munum við sjá fjölmörg dæmi um Kvótaprófið og látum því þessi dæmi nægja hér.

Æfingar 7.3

Æfing 7.3.1 Ákvarðið hvort eftirfarandi raðir eru samleitnar eða ósamleitnar. Rökstyðjið og vísið í viðeigandi reglur.

a) $\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{1}{n-2}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{(n+1)!}$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^\pi}{17.4+\sqrt{n}}$

■

Æfing 7.3.2 Ákvarðið hvort eftirfarandi raðir eru samleitnar eða ósamleitnar. Rökstyðjið með viðeigandi prófi.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^n}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n}$

d) $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!}$

■

Æfing 7.3.3 Notið viðeigandi próf til að kanna samleitni raðarinnar

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k^2+k+1}{k^2\sqrt{k}+1}.$$

■

Æfing 7.3.4 Ákvarðið hvort eftirfarandi raðir eru samleitnar eða ósamleitnar. Rökstyðjið með viðeigandi prófi.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} n^n$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2n^2-3n+1}{-3n^4+2}$

■

7.4 Veldaraðir

Skilgreining 7.4.1 — Veldaröð. Röð af gerðinni

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k = a_0 + a_1(x-c) + a_2(x-c)^2 + a_3(x-c)^3 + \dots$$

er kölluð *veldaröð* um c (e. power series about c). Ath. að hér er $(x-c)^0 := 1$, jafnvel þegar $x-c=0$. Fastarnir $a_0, a_1, a_2, \dots$ eru kallaðir *stuðlar* (e. coefficients) veldaraðarinnar.

Fyrir veldaraðir hefur maður helst áhuga á því fyrir hvaða x röðin er samleitin og fyrir hvaða x hún er ósamleitin.

Regla 7.4.1 Fyrir veldaröð

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$$

gildir nákvæmlega eitt af þrennu:

(i) Röðin er alsamleitin þegar $x = c$ og ósamleitin fyrir öll önnur $x \in \mathbb{R}$.

(ii) Röðin er alsamleitin fyrir hvaða $x \in \mathbb{R}$ sem er.
(iii) Það er til $R > 0$ þ.a. veldaröðin er alsamleitin fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ sem uppfylla $|x - c| < R$ og er ósamleitin fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ sem uppfylla $|x - c| > R$. Ef $|x - c| = R$, þ.e. $x = c + R$ eða $x = c - R$, þá getur veldaröðin verið alsamleitin, skilyrt samleitin eða ósamleitin.

ATH Fyrir tvinntalnaveldaraðir $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$ þar sem $a_k, x, c \in \mathbb{C}$ gildir samsvarandi. Eini munurinn er að fyrir öll $x \in \mathbb{C}$ þ.a. $|x - c| = R$ getur röðin verið alsamleitin, skilyrt samleitin eða ósamleitin.

Sönnun. Ef $x = c$ er augljóslega

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k(x-c)^k|\Big|_{x=c} = |a_0|(c-c)^0 = |a_0| < +\infty$$

svo veldaröðin er alsamleitin fyrir $x = c$.

Til þess að sanna restina sýnum við: Ef veldaröðin er samleitin fyrir einhverja rauntölu $x = r$, þá er hún alsamleitin fyrir öll $x = y$ sem uppfylla $|y - c| < |r - c|$ (þ.e. öll x sem eru nær c en r).

Látum nú $r \neq c$ vera einhverja rauntölu og gerum ráð fyrir að veldaröðin sé samleitin fyrir $x = r$, þ.e. að röðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(r-c)^k$$

sé samleitin. Þá er

$$\lim_{k\to+\infty} a_k(r-c)^k = 0$$

og þar með er runan $\left(a_k(r-c)^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ takmörkuð, þ.e. til er $K \in \mathbb{R}$ þ.a.

$$|a_k(r-c)^k| \leq K$$

fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Látum núna y vera rauntölu þ.a. $|y - c| < |r - c|$ og setjum $s := |y - c|/|r - c|$. Þá gildir $0 \leq s < 1$ og þá

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k(y-c)^k| = \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k(r-c)^k| \left|\frac{y-c}{r-c}\right|^k \leq K \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} s^k = K \cdot \frac{1}{1-s} < +\infty.$$

Skv. Reglu 7.3.2 er þá veldaröðin er alsamleitin fyrir $x = y$. Nú skilgreinir maður

$$R := \sup\{r \,:\, \sum_{k=0}^{+\infty} a_k(r-c)^k \quad \text{er alsamleitin}\}.$$

Ef $R = 0$ höfum við tilfelli (i), ef $R = +\infty$ tilfelli (ii) og ef $0 < R < +\infty$ tilfelli (iii). ■

Ef veldaröðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$$

er alsamleitin fyrir öll $x \in]c-R, c+R[$, þar sem $R > 0$, og ósamleitin fyrir öll x þ.a. $|x-c| > R$, þá segjum við að R sé *samleitnigeisli* (e. radius of convergence) veldaraðarinnar. Ef veldaröðin er einungis samleitin fyrir $x = c$, þá segjum við að hún hafi samleitnigeislann $R = 0$, og ef hún er samleitin, og þar með alsamleitin, fyrir öll $x \in \mathbb{R}$, þá segjum við að hún hafi samleitnigeislann $R = +\infty$. Rauntalan c er sögð vera *samleitnimiðja* veldaraðarinnar.
Oft er hægt að reikna samleitnigeisla veldaraðar með því að nota Kvótaprófið í Reglu 7.3.4. Látum

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$$

vera veldaröð. Við reiknum, ef hægt er,

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L \quad \text{(við leyfum líka að } L = +\infty\text{)}.$$

Þá er

$$\rho = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}(x-c)^{k+1}}{a_k(x-c)^k}\right| = \lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| \cdot |x-c| = |x-c| \cdot L,$$

og við vitum að ef $0 \le \rho < 1$, þá er röðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$$

alsamleitin. Með öðrum orðum, veldaröðin er alsamleitin fyrir öll x sem uppfylla

$$1 > \rho = |x-c| \cdot L,$$

þ.e.

$$|x-c| < \frac{1}{L}.$$

Af því að við vitum líka að ef $\rho > 1$, þ.e.

$$|x-c| > \frac{1}{L},$$

að þá er veldaröðin ósamleitin, höfum við fundið einfalda aðferð til þess að reikna samleitnigeislann R:

Fyrir veldaröðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k$$

gildir, ef markgildið

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = L$$

er til eða

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = +\infty \quad \text{(í þessu tilfelli setjum við } L = +\infty\text{)},$$

þá er samleitnigeisli veldaraðarinnar

$$R := \begin{cases} \frac{1}{L}, & \text{ef } 0 < L < +\infty, \\ 0, & \text{ef } L = +\infty, \\ +\infty, & \text{ef } L = 0. \end{cases}$$

■ **Dæmi 7.23** Skoðum röðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x+5)^k}{(k^2+1)3^k}.$$

Við getum umritað hana sem veldaröð

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x+5)^k}{(k^2+1)3^k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{k^2+1} \left(x + \frac{5}{2}\right)^k,$$

þ.e. sem veldaröðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-c)^k$$

með $c = -5/2$ og

$$a_k = \left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{k^2+1}$$

fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Við reiknum núna

$$L = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{k+1} \frac{1}{(k+1)^2+1}}{\left(\frac{2}{3}\right)^k \frac{1}{k^2+1}} \right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{2}{3} \cdot \frac{k^2+1}{k^2+2k+2} = \frac{2}{3}.$$

Nú vitum við, $R = 1/L = 3/2$ er samleitnigeisli veldaraðarinnar og $c = -5/2$ er samleitnimiðjan. Það þýðir, fyrir öll $x \in]c-R, c+R[=]-4,-1[$ er veldaröðin alsamleitin og fyrir öll $x \in]-\infty,-4[$ og öll $x \in]-1,+\infty[$ er veldaröðin ósamleitin. ■

ATH Í raun sýndum við í lausn síðasta dæmis að veldaröðin $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(2x+5)^k}{(k^2+1)3^k}$ er samleitin fyrir allar tvinntölur x þ.a. $|x+5/2| < 3/2$ og ósamleitin fyrir allar tvinntölur x þ.a. $|x+5/2| > 3/2$. Með $x = a + ib$ höfum við sem sagt skilyrðin

$$\sqrt{\left(a+\frac{5}{2}\right)^2 + b^2} < \frac{3}{2} \quad \text{og} \quad \sqrt{\left(a+\frac{5}{2}\right)^2 + b^2} > \frac{3}{2}$$

fyrir samleitni og ósamleitni. Með $b = 0$ gefur þetta svo nákvæmlega niðurstöðuna sem við fengum fyrir rauntölur $x = a + i0$. Samkonar gildir í öllum öðrum dæmum.

■ **Dæmi 7.24** Skoðum veldaröðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Þetta er veldaröðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-c)^k,$$

með $c = 0$ og

$$a_k = \frac{1}{k!}$$

fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Við reiknum núna

$$L = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}\right| = \lim_{k\to+\infty} \frac{k!}{(k+1)!} = \lim_{k\to+\infty} \frac{1}{k+1} = 0.$$

Nú vitum við að $R = +\infty$ er samleitnigeisli veldaraðarinnar og $c = 0$ er samleitnimiðjan. Það þýðir að fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ er veldaröðin alsamleitin. ■

■ **Dæmi 7.25** Skoðum veldaröðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k!x^k.$$

Þetta er veldaröðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x-c)^k,$$

með $c = 0$ og

$$a_k = k!$$

fyrir öll $k \in \mathbb{N}$. Við reiknum núna

$$L = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to+\infty} \left|\frac{(k+1)!}{k!}\right| = \lim_{k\to+\infty} (k+1) = +\infty.$$

Nú vitum við að $R = 0$ er samleitnigeisli veldaraðarinnar og $c = 0$ er samleitnimiðjan. Það þýðir að fyrir $x = 0$ er veldaröðin alsamleitin og fyrir öll önnur x er veldaröðin ósamleitin.

■

Til loka þessa hluta einbeitum við okkur að veldaröðum með samleitnimiðju í 0.

Regla 7.4.2 Látum

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

vera veldaröð með samleitnigeislann R_a,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

vera veldaröð með samleitnigeislann R_b og $C \in \mathbb{R}$, $C \neq 0$. Þá gildir:

(i) Veldaröðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (Ca_k)x^k$$

hefur samleitnigeislann R_a og fyrir öll $x \in]-R_a, R_a[$ gildir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (Ca_k)x^k = C\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

(ii) Fyrir öll $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ gildir

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k+b_k)x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$

Fyrir samleitnigeisla R veldaraðarinnar

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k+b_k)x^k$$

gildir $R \geq \min\{R_a, R_b\}$. (Af hverju getur hann verið stærri?).

(iii) Ef við margföldum saman veldaraðirnar

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{og} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

þá fáum við út veldaröðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k,$$

þar sem

$$c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n} \quad \text{fyrir öll } k \in \mathbb{N}.$$

Þessi veldaröð er kölluð *Cauchy-margfeldi* veldaraðanna

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{og} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k.$$

Fyrir samleitnigeisla R þessarar veldisraðar gildir $R \geq \min\{R_a, R_b\}$.

Fyrir öll $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ gildir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}\right)x^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right)\cdot\left(\sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k\right).$$

Til að átta sig á formúlinni

$$c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$$

fyrir stuðlum veldaraðarinnar, sem fæst þegar veldaraðirnar

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k \quad \text{og} \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

eru margfaldaðar saman, er gagnlegt að skoða eftirfarandi töflu.

	a_0	$a_1\,x$	$a_2\,x^2$	$a_3\,x^3$	$a_4\,x^4$	$a_5\,x^5$	$\cdots$
b_0	a_0b_0	$a_1b_0\,x$	$a_2b_0\,x^2$	$a_3b_0\,x^3$	$a_4b_0\,x^4$	$a_5b_0\,x^5$	$\cdots$
$b_1\,x$	$a_0b_0\,x$	$a_1b_1\,x^2$	$a_2b_1\,x^3$	$a_3b_1\,x^4$	$a_4b_1\,x^5$	$\cdots$	$\cdots$
$b_2\,x^2$	$a_0b_2\,x^2$	$a_1b_2\,x^3$	$a_2b_2\,x^4$	$a_3b_2\,x^5$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$b_3\,x^3$	$a_0b_3\,x^3$	$a_1b_3\,x^4$	$a_2b_3\,x^5$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$b_4\,x^4$	$a_0b_4\,x^4$	$a_1b_4\,x^5$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$b_5\,x^5$	$a_0b_5\,x^5$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$

Í henni höfum við skrifað liði veldaraðarinnar $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ í fyrstu línu og liði veldaraðarinnar $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ í fyrsta dálk. Inni í töflunni eru svo margfeldi fyrstu línu og fyrsta dálks og maður sér að stuðlana við mimunandi veldi af x fær maður með því að leggja saman yfir hornalínu. T.d. er stuðullinn við x^3 gefinn með

$$a_0b_3 + a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_0.$$

Formúlan fyrir c_k tekur þessa aðferð saman í formúlu.

■ **Dæmi 7.26** Reiknið Cauchy-margfeldi veldaraðarinnar

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k$$

við sjálfa sig.
Lausn: Athugum fyrst að

$$\sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$$

með $a_k = b_k = 1$ fyrir öll $k = 0, 1, 2, \dots$. Því eru stuðlar Cauchy-margfeldisins auðreiknaðir:

$$c_k = \sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n} = \sum_{n=0}^{k} 1 \cdot 1 = k + 1$$

fyrir öll $k = 0, 1, \dots$. Því er

$$\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)x^k.$$

Þessi veldisröð hefur samleitnigeisla R sem er ekki minni en samleitnigeisli upphaflegu veldaraðarinnar, sem er 1. Með Kvótaprófi er svo auðvelt að sjá að hann er nákvæmlega 1. ■

■ **Dæmi 7.27** Látum y vera rauntölu, $|y| < 1$. Finnið einfalda formúlu fyrir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)y^k.$$

Lausn: Skv. síðasta dæmi er

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)y^k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} y^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} y^k\right) = \left(\frac{1}{1-y}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-y}\right) = \frac{1}{(1-y)^2}.$$

■

Einstaklega auðvelt er að diffra og heilda veldaraðir, því það má gera lið fyrir lið.

Regla 7.4.3 — Diffrun og heildun veldaraða. Látum

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k$$

vera veldaröð með samleitnigeislann $R > 0$. Þá getum við skilgreint fall

$$f :]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Fallið f er diffranlegt á öllu skilgreiningarmengi sínu $]-R, R[$ og

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1},$$

þ.e. við getum diffrað fallið með því að diffra veldaröðina lið fyrir lið.
Fyrir sérhvert $x \in]-R, R[$ gildir líka

$$\int_0^x f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1},$$

þ.e. við getum heildað fallið f með því að heilda veldaröðina lið fyrir lið.

Sönnunin á Reglu 7.4.3 er svolítið snúnari en á þeim reglum sem við höfum sannað hingað til í kaflanum. Nokkuð ljóst virðist vera að ef $f(x)$ er diffranlegt, að þá hljóti $f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$. Aftur á móti er langt því frá augljóst að $f(x)$ sé diffranlegt og að röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$ sé samleitin.

Frekar stutt og þægileg sönnun notar tvíliðunarregluna

$$(x+y)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^{k-\ell} y^{\ell}, \quad \text{þar sem} \quad \binom{k}{\ell} := \frac{k!}{(k-\ell)!\ell!}.$$

Við þurfum að sýna að

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x+h)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}$$

fyrir sérhvert $x \in]-R, R[$. Festum eitt slíkt x og veljum $H > 0$ þ.a. $|x| + H < R$. Þar sem $|x| + H$ er innan samleitnigeislans er röðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k (|x| + H)^k$$

alsamleitin og við getum skilgreint

$$K := \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k|(|x| + H)^k < +\infty.$$

Nú gildir fyrir $k \geq 1$ formúlan

$$(x+h)^k = \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} x^{k-\ell} h^\ell = x^k + kx^{k-1} + \sum_{\ell=2}^{k} \binom{k}{\ell} x^{k-\ell} h^\ell$$

og við sjáum að fyrir öll h þ.a. $|h| \leq H$ er

$$\begin{aligned}
\left|(x+h)^k - x^k - kx^{k-1}h\right| &= \left|\sum_{\ell=2}^{k} \binom{k}{\ell} x^{k-\ell} h^\ell\right| \\
&= \sum_{\ell=2}^{k} \binom{k}{\ell} |x|^{k-\ell} \frac{|h|^\ell}{H^\ell} H^\ell \\
&\leq \frac{|h|^2}{H^2} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} |x|^{k-\ell} H^\ell \\
&= \frac{|h|^2}{H^2} (|x| + H)^k.
\end{aligned}$$

Einnig er ljóst að

$$\left|kx^{k-1}\right| \leq \frac{1}{H} \cdot k|x|^{k-1} H \leq \frac{1}{H} \sum_{\ell=0}^{k} \binom{k}{\ell} |x|^{k-\ell} H^\ell = \frac{1}{H} (|x| + H)^k$$

því $k|x|^{k-1}H$ er bara einn af liðunum í tvíliðunarformúlunni og liðirnir eru allir jákvæðir. Þetta gefur okkur nú að

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \left|ka_k x^{k-1}\right| = \frac{1}{H} \sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|(|x| + H)^k = \frac{K}{H} < +\infty$$

skv. skilgreiningunni á fastanum K. Sér í lagi er röðin $\sum_{k=1}^{+\infty} ka_k x^{k-1}$ alsamleitin.

Við getum því reiknað og metið upp á við með því sem við höfum áður sýnt:

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x+h)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k(x+h)^k - a_k x^k - k a_k x^{k-1} h}{h}\right| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \cdot |(x+h)^k - a_k x^k - k a_k x^{k-1}| \\
&\leq \frac{1}{|h|}\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k| \cdot \frac{|h|^2}{H^2}(|x|+H)^k \\
&= \frac{|h|}{H^2}\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|(|x|+H)^k \\
&= \frac{|h|}{H^2} \cdot K.
\end{aligned}$$

Nú er auðvelt að taka markgildið þegar $h \to 0$ og við sjáum

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{1}{h}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a_k(x+h)^k - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k\right) - \sum_{k=1}^{+\infty} k a_k x^{k-1}\right| = 0,$$

sem er nákvæmlega það sem við ætluðum að sýna. Þar sem x var bara einhver tala á bilinu $]-R,R[$ gildir þessi niðurstaða fyrir öll $x \in]-R,R[$.

Nú, þegar að við vitum að það megi diffra veldaröð lið fyrir lið er mjög auðvelt að sýna að

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1}.$$

Röðin hægra megin er klárlega alsamleitin á bilinu $]-R,R[$ því

$$\left|\frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\right| \leq |x| \cdot |a_k x^k| \quad \text{fyrir öll } k = 0, 1, \dots$$

og því

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\left|\frac{a_k}{k+1} x^{k+1}\right| \leq |x|\sum_{k=0}^{+\infty} |a_k x^k| < +\infty.$$

Þar sem við megum diffra veldaröð lið fyrir lið innan samleitnigeislans er

$$\frac{d}{dx}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k.$$

Af þessu leiðir að

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{a_k}{k+1} x^{k+1} + C$$

og þar sem vinstri hliðin er núll þegar $t = 0$ er $C = 0$.

Í næstu tveimur dæmum leiðum við út veldisraðarframsetningar á föllum sem við þekkjum með hjálp Reglu 7.4.3.

■ **Dæmi 7.28** Við vitum að fyrir $|x| < 1$ gildir

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Með $t = -x$ er þá

$$\frac{1}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k.$$

En þá er

$$\ln(x+1) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^k dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} x^{k+1} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \ldots$$

og þessi formúla gildir fyrir öll x með $|x| < 1$. ■

■ **Dæmi 7.29** Við vitum að fyrir $|x| < 1$ gildir

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Með $t^2 = -x$ er þá

$$\frac{1}{1+t^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k}.$$

En þá er

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k t^{2k} dt = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \ldots$$

og þessi formúla gildir fyrir öll x með $|x| < 1$. ■

Stundum er hægt að reikna summu raðar með því að nota Reglu 7.4.3.

■ **Dæmi 7.30** Reiknum

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k}.$$

Lausn: Við vitum að fyrir $|x| < 1$ gildir

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k.$$

Við höfum áður reiknað, með því að nota Cauchy-margfeldi raða, að

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right) \cdot \left(\frac{1}{1-x}\right) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) x^k.$$

Önnur aðferð til að reikna það sama er

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx} \frac{1}{1-x} = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1) x^k.$$

Fyrir x þ.a. $|x| < 1$ er þá

$$\frac{x}{(1-x)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^k.$$

Þessi veldaröð hefur líka samleitnigeislann 1 og með diffrun fáum við

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{(1-x)^2 - 2(1-x)(-x)}{(1-x)^4} = \frac{1+x}{(1-x)^3}$$

og með diffrun veldaraðinnar lið fyrir lið fáum við

$$\frac{d}{dx}\frac{x}{(1-x)^2} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=1}^{+\infty} kx^k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2x^{k-1},$$

þ.e.

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2x^{k-1}.$$

En þá er fyrir öll x þ.a. $|x| < 1$,

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{k=1}^{+\infty} k^2x^k$$

svo

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^2}{2^k} = \left.\frac{x(1+x)}{(1-x)^3}\right|_{x=\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{2})}{(1-\frac{1}{2})^3} = \frac{3/4}{1/8} = 6.$$

■

Æfingar 7.4

Æfing 7.4.1 Gefin er veldaröðin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4\pi}\right)^n x^{2n}.$$

1. Finnið samleitnimiðju (e. centre of convergence) og samleitnigeisla (e. radius of convergence) veldaraðarinnar
2. Reiknið summuna fyrir $x = \pi$.
3. Reiknið summuna fyrir $x = 2\pi$.

■

Æfing 7.4.2 Finnið samleitnimiðju (e. centre of convergence) og samleitnigeisla (e. radius of convergence) veldaraðarinnar

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{2n+1}(\pi x + 4)^n.$$

Æfing 7.4.3 Veldaröðin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^3(3x-2)^n$$

er alsamleitin fyrir $x \in]a,b[$ og ósamleitin fyrir öll önnur x. Finnið fastana $a,b \in \mathbb{R}$. Notið kvótaprófið.

Æfing 7.4.4 Ákvarðið stærsta bilið fyrir x þannig að veldaröðin

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(1-3x)^n$$

er alsamleitin (e. absolutely convergent). Athugið að bilið gæti verið lokað eða hálf lokað (s.s. skoðið líka endapunkta bilsins).

Æfing 7.4.5 Ákvarðið hvort röðin er alsamleitin (e. absolutely convergent) eða ósamleitin (e. diverges) fyrir **öll** möguleg $x \in \mathbb{R}$. Sýnið alla útreikninga og tilgreinið hvaða próf eru notuð.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2x-4)^n}{2^{2n}(1+n^2)}$$

Æfing 7.4.6 Skoðum veldaröðina

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n}\left(\frac{x}{2}-7\right)^n.$$

a) Finnið samleitnigeisla (e. radius of convergence) og samleitnimiðju (e. center of convergence) veldaraðarinnar.
b) Finnið summuna fyrir $x = 15$.
c) Finnið summuna fyrir $x = 5$.

Æfing 7.4.7 Skoðum veldaröðina

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\left(1-\frac{x}{3}\right)^n$$

a) Finnið samleitnimiðju (e. center of convergence) og samleitnigeisla (e. radius of convergence) veldaraðarinnar.
b) Finnið summuna ef $x = 6$.
c) Finnið summuna ef $x = 17.4$.

■

Æfing 7.4.8 Notið veldaröðina

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

til að finna veldaraðaframsetningu fyrir fallið

$$g(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$$

og gefið samleitnibil (e. interval of convergence) veldaraðarinnar.
■

Æfing 7.4.9 Vitað er að

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad \text{fyrir öll } x \in]-1,1[.$$

Reiknið summu raðarinnar

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \cdots$$

Ábending: Notið $f'(x)$.
■

7.5 Taylorraðir

Rita má mjög mörg nytsöm föll sem veldaraðir. Slík veldaröð kallast almennt Taylorröð fallsins og stundum Maclaurenröð ef samleitnimiðjan er í núlli. Fyrst ein gagnleg setning:

Regla 7.5.1 Látum

$$f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-c)^k$$

vera fall sem er skilgreint á bilinu $]c-R, c+R[$ (þá verður veldaröðin að vera alsamleitin á þessu bili). Þá er

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!}, \qquad \text{fyrir öll} \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Sönnun. Við sýnum fyrst með þrepun að

$$(*) \qquad f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-c)^{k-n}, \qquad \text{fyrir } n = 0,1,2,\ldots$$

Upprifjun á þrepun:
Þrepun virkar á eftirfarandi hátt: Önnur leið til þess að lýsa menginu $\mathcal{A} := \{0,1,2,\ldots\}$

er:
(i) $0 \in \mathcal{A}$.
(ii) Ef $n \in \mathcal{A}$, þá er $n+1 \in \mathcal{A}$.
Svo ef við ætlum að sýna að einhver formúla gildi fyrir öll $n \in \mathcal{A} = \{0, 1, 2, \ldots\}$, þá er nóg að sýna að $0 \in \mathcal{A}$ og að ef $n \in \mathcal{A}$, þá er $n+1 \in \mathcal{A}$.

(i) Jafnan $(*)$ er rétt fyrir $n = 0$ því

$$f^{(0)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-c)^{k-n} \Big|_{n=0} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k!}{k!} a_k (x-c)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-c)^k = f(x).$$

(ii) Gerum ráð fyrir að jafnan $(*)$ sé rétt fyrir eitthvert $n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$. Við sýnum að þá er jafnan líka rétt fyrir $n+1$.

Samkvæmt forsendu er

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-c)^{k-n}.$$

Þá er skv. Reglu 7.4.3

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x) &= \frac{d}{dx}\left(\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-c)^{k-n}\right) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} (k-n) a_k (x-c)^{k-n-1} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{k!}{(k-(n+1))!} a_k (x-c)^{k-(n+1)} \end{aligned}$$

svo jafnan $(*)$ er líka rétt fyrir $n+1$.
Þar með er sýnt að jafnan $(*)$ er rétt fyrir öll $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Nú er létt að sanna setninguna með því að nota jöfnuna $(*)$:

$$f^{(n)}(c) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (x-c)^{k-n} \Big|_{x=c} = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{k!}{(k-n)!} a_k (c-c)^{k-n} = \frac{n!}{(n-n)!} a_n = n! a_n,$$

svo

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!},$$

og þetta gildir fyrir öll $n = 0, 1, 2, \ldots$ ■

Athugasemd: Regla 7.5.1 segir að **ef** fallið f hefur *veldisraðarframsetningu* um c á bilinu $]c-R, c+R[$, þ.e.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-c)^k$$

fyrir öll $x \in]c-R, c+R[$, að þá er nauðsynlega

$$a_k = \frac{f^{(k)}(c)}{k!}, \quad \text{fyrir öll} \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

sem þýðir ekkert annað en að

$$f(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

fyrir öll $x\in\,]c-R,c+R[$.

Við skilgreinum:

Skilgreining 7.5.1 Ef f er raungilt fall, sem er skilgreint á einhverju bili um $c\in\mathbb{R}$ og er óendanlega oft diffranlegt í c, þá er veldaröðin

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k$$

kölluð *Taylorröð* fallsins f um punktinn c. Ef $c=0$ er stundum talað um Maclaurenröð fallsins í staðinn fyrir Taylorröð.

■ **Dæmi 7.31** Við höfum áður sagt að veldisvísisfallið $\exp$ hefur veldaraðarframsetningu um núll,

$$\exp(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Hér ætlum við að skoða þetta betur. Við vitum að

$$\frac{d}{dx}\exp(x)=\exp(x),$$

og þar með að

$$\frac{d^n}{dx^n}\exp(x)=\exp(x)\quad\text{fyrir öll } n=0,1,2,\ldots,$$

og að $\exp(0)=1$. Því er Taylorröð $\exp$ um núll

$$\exp(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}a_kx^k\quad\text{með}\quad a_k=\frac{\exp(0)}{k!}\quad\text{fyrir öll } k=0,1,2,\ldots,$$

þ.e.

$$\exp(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!}.$$

Samleitnigeisla veldaraðarinnar getum við nú reiknað út með Kvótaprófinu. Við reiknum

$$L:=\lim_{k\to+\infty}\frac{a_{k+1}}{a_k}=\lim_{k\to+\infty}\frac{k!}{(k+1)!}=\lim_{k\to+\infty}\frac{1}{k+1}=0,$$

svo samleitnigeisli veldaraðarinnar er $R=+\infty$.

Nú er freistandi að draga þá ályktun að nauðsynlega sé

$$\exp(x)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^k}{k!},$$

en, eins og við munum sjá síðar í öðru dæmi, er þessi ályktun á þessu stigi málsins ekki nauðsynlega rétt! Það sem við vitum er: **Ef** fallið $\exp$ hefur veldaraðarframsetningu, þá er þessi veldaröð

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

Vandamálið er þetta ef! ■

Við sýnum að

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x) \quad \text{fyrir öll } x \geq 0,$$

sem er jafngilt

$$\ln\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right) - x = 0 \quad \text{fyrir öll } x \geq 0.$$

Ath. að þessi formúla er líka rétt fyrir $x < 0$, en til þess að sýna það þyrftum við fyrst að sýna að

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} > 0 \quad \text{fyrir öll } x < 0,$$

en það viljum við spara okkur.

Oft er náttúrulegi lógariþminn, þ.e. fallið $\ln :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, innleitt með skilgreiningunni

$$\ln(x) := \int_1^x \frac{dt}{t},$$

og síðan veldisvísisfallið, þ.e. fallið $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$, sem andhverfa fallsins $\ln$, þ.e. $\ln(\exp(x)) = x$ fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.

Við diffrum núna, með hjálp Keðjureglunnar,

$$\frac{d}{dx}\left(\ln\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right) - x\right) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}} \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} k x^{k-1} - 1 = \frac{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}}{\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}} - 1 = 1 - 1 = 0,$$

þetta þýðir að fallið $f : [0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \ln\left(\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}\right) - x,$$

er fastafall. Með því að setja $x = 0$ sjáum við að

$$f(0) = \ln(1) - 0 = 0,$$

svo $f(x) = 0$ fyrir öll $x \geq 0$. En þá er

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \exp(x)$$

fyrir öll $x \geq 0$.

Vel þekkt staðreynd um Taylor-margliður er að ef fall $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ er $(n+1)$-sinni diffranlegt á opnu bili $\mathcal{I}$ og $c \in \mathcal{I}$, þá er fyrir sérhvert $x \in \mathcal{I}$ til s á milli c og x þ.a.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(c)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}.$$

Liðurinn

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(s)}{(n+1)!}(x-c)^{n+1}$$

er kallaður villuliðurinn. Til þess að sýna að fall hafi veldaraðarframsetningu, þá er stundum hægt að sýna að villuliðurinn $E_n(x)$ stefni á 0 þegar n stefnir á $+\infty$ óháð x.

■ **Dæmi 7.32** Önnur aðferð til þess að sýna að

$$e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

er að notfæra sér þetta. Sú röksemdafærsla gildir líka strax fyrir öll $x \in \mathbb{R}$.
Við vitum að

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + E_n(x),$$

þar sem

$$E_n(x) = \frac{e^s}{(n+1)!}x^{n+1}$$

fyrir eitthvert s á milli 0 og x. Þá er fyrir sérhvert $n \in \mathbb{N}$ til eitthvert s_n á milli 0 og x þ.a.

$$|E_n(x)| = \left|\frac{e^{s_n}}{(n+1)!}x^{n+1}\right| \leq \left|\frac{e^x}{(n+1)!}x^{n+1}\right| = e^{|x|}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|.$$

Þá gildir

$$\left|e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| = |E_n(x)| \leq e^{|x|}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\right|$$

og við sjáum auðveldlega að fyrir fast $x \in \mathbb{R}$ gildir

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = 0.$$

Þ.e.

$$e^x = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

■

Diffurjafnan

$$y''(t) + y(t) = 0$$

hefur almennu lausnina

$$y(t) = A\sin(t) + B\cos(t).$$

Sér í lagi gildir að lausn upphafsgildisverkefnissins

$$y''(t) + y(t) = 0, \qquad y(0) = 0 \text{ og } y'(0) = 1,$$

er $y(t) = \sin(t)$. Við ætlum að nota þetta til þess að sýna að föllin $\sin$ og $\cos$ hafa bæði veldisraðarframsetningu.

Við vitum frá Reglu 7.5.1 að ef $\sin$ hefur veldisraðarframsetningu, að þá er hún nauðsynlega Taylorröð $\sin$,

$$T_{\sin}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \dots$$

Þessa formúlu fyrir Taylorröðinni getur maður séð á eftirfarandi hátt. Með $f(x) = \sin(x)$ er

$$f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f'''(x) = -\cos(x), \quad f^{(4)}(x) = \sin(x).$$

Sem sagt er

$$f^{(k)}(x) = \sin(x), \quad f^{(k+1)}(x) = \cos(x), \quad f^{(k+2)}(x) = -\sin(x) \text{ og } f^{(k+3)}(x) = -\cos(x)$$

fyrir $k = 0, 4, 8, \dots$. Þar sem $\sin(0) = 0$ og $\cos(0) = 1$ fæst formúlan

$$f^{(2k)}(0) = 0 \quad \text{og} \quad f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k \quad \text{fyrir } k = 0, 1, \dots.$$

Því hefur $f(x) = \sin(x)$ Taylorröðina

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}$$

um núllpunkt. Þessi veldaröð er alsamleitin fyrir öll $t \in \mathbb{R}$, því samkvæmt kvótaprófinu er

$$\begin{aligned}
\rho &:= \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)+1)!} t^{2(k+1)+1}}{\frac{(-1)^k}{(2k+1)!} t^{2k+1}} \right| \\
&= \lim_{k\to+\infty} \left| \frac{(2k+1)! t^{2k+3}}{(2k+3)! t^{2k+1}} \right| \\
&= \lim_{k\to+\infty} \frac{t^2}{(2k+3)(2k+2)} \\
&= 0,
\end{aligned}$$

sama hvaða rauntala t er. Við getum því diffrað fallið $T_{\sin}$ með því að diffra veldaröð þess lið fyrir lið,

$$T'_{\sin}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1)t^{2k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}.$$

Þessi veldaröð er þá líka alsamleitin fyrir öll $t \in$ og við getum diffrað aftur með því að diffra lið fyrir lið

$$\begin{aligned}
T''_{\sin}(t) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}(2k+1)(2k)t^{2k-1} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)!}t^{2k-1} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2(k+1)-1)!}t^{2(k+1)-1} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)!}t^{2k+1} \\
&= -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}t^{2k+1},
\end{aligned}$$

svo

$$T''_{\sin}(t) + T_{\sin}(t) = 0, \quad T_{\sin}(0) = 0 \quad \text{og} \quad T'_{\sin}(0) = 1.$$

En þá uppfyllir fallið $T_{\sin}$ upphafsgildisverkefnið

$$y''(t) + y(t) = 0, \qquad y(0) = 0 \ \text{ og } \ y'(0) = 1,$$

svo $T_{\sin}(t) = \sin(t)$ fyrir öll $t \in \mathbb{R}$. Af því að $\sin'(t) = \cos(t)$ er þá líka

$$\cos(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}t^{2k}.$$

(Af hverju er þetta Taylorröð $\cos$?)

Við gefum hér dæmi um fall $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sem hefur Taylorröðina

$$T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

um núllpunkt. Taylorröðin hefur samleitnigeislann $R = +\infty$, en $f(x) \neq T(x)$ fyrir öll $x \neq 0$.

Við skilgreinum

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{-1}{x^2}\right), & \text{ef } x \neq 0, \\ 0, & \text{ef } x = 0. \end{cases}$$

Við höfum séð að fyrir hvaða $n \in \mathbb{N}$ sem er gildir (með breytuskiptunum $t = 1/x^2$)

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^{2n}} = \lim_{x\to 0}\frac{\exp\left(\frac{-1}{x^2}\right)}{x^{2n}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{\exp(-t)}{t^{-n}} = \lim_{t\to+\infty}\frac{t^n}{\exp(t)} = 0.$$

Út frá þessu má sýna að fallið f er óendanlega oft diffranlegt í núlli og að $f^{(k)}(0) = 0$ fyrir öll $k = 0, 1, 2, \ldots$. T.d. er

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(0+h)-f(0)}{h}\right| = \lim_{h\to 0}\left|\frac{f(h)}{h}\right| \leq \lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h^2} = 0,$$

svo $f'(0) = 0$ og fyrir $x \neq 0$ er

$$f'(x) = \exp(-x^{-2})2x^{-3} = \frac{2f(x)}{x^3}.$$

En þá er

$$f''(0) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(0+h)-f'(0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f'(h)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2f(h)}{h^4} = 0,$$

og með hliðstæðri röksemdarfærslu getur maður sýnt að $f^{(k)}(0) = 0$ fyrir öll $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Því er

$$T(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{0}{k!}x^k = 0$$

fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ og af því að $f(x) \neq 0$ fyrir öll $x \neq 0$ er ljóst að $f(x) \neq T(x)$ fyrir öll $x \neq 0$.

■ **Dæmi 7.33** Mjög miklvægt fall, meðal annars í tölfræði, er heildi Gauss-dreifingarinnar

$$E(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

Taylorröð þessa falls er

$$T_E(x) = \int_0^x \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k t^{2k}}{k!}dt = \left[\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k t^{2k+1}}{(2k+1)k!}\right]_{t=0}^{t=x} = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)k!}x^{2k+1}.$$

■

Veldisraðarframsetningar nokkurra miklvægra falla ásamt samleitnibili eru

$$
\begin{aligned}
\exp(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \dots & x &\in]-\infty, \infty[\\
\sin(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots & x &\in]-\infty, \infty[\\
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots & x &\in]-\infty, \infty[\\
\frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots & x &\in]-1, 1] \\
\ln(1+x) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{(k} x^k = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots & x &\in]-1, 1[\\
\arctan(x) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots & x &\in [-1, 1].
\end{aligned}
$$

Skoðum sambandið á milli veldisvísisfallsins og hornafallanna:

Við vitum að

$$\exp(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

fyrir öll $x \in \mathbb{R}$ og að veldaröðin er alsamleitin fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Athugum fyrst að

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Það er hægt að sýna fram á, þó að við gerum það ekki hér, að veldaraðir

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k z^k,$$

þar sem z og a_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, eru tvinntölur, eru nánast alveg eins og veldaraðir þar sem bara rauntölur koma fyrir. Útleiðslan er í raun alveg eins, nema hvað þá er $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ lengd tvinntölunnar $z = a + ib$ en ekki tölugildið, sem ekki er skilgreint fyrir tvinntölur.
Prófum nú að setja $x = iy$, þar sem $y \in \mathbb{R}$ og i er tvinntölu i-ið með $i^2 = -1$. Þá

fáum við

$$\begin{aligned}
\exp(iy) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iy)^k}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(iy)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k}y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i^{2k+1}y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k y^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{i(-1)^k y^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} y^{2k} + i \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} y^{2k+1} \\
&= \cos(y) + i\sin(y),
\end{aligned}$$

þ.e. raunhluti $\exp(iy)$ er $\cos(y)$ og þverhluti $\exp(iy)$ er $\sin(y)$.

Látum $c \in \mathbb{R}$ vera fasta og

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (x-c)^k$$

vera fall skilgreint á $]c-R, c+R[$, þar sem $R > 0$ er samleitnigeisli veldaraðarinnar. Við vitum frá Reglu 7.4.3 að við megum diffra veldaröðina lið fyrir lið á bilinu $]c-R, c+R[$, svo fallið f er diffranlegt á $]c-R, c+R[$. Af því að diffranleg föll eru samfelld, er fallið f samfellt á $]c-R, c+R[$. Það þýðir að fyrir sérhvert $y \in]c-R, c+R[$ gildir

$$\lim_{x \to y} f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (y-c)^k.$$

Þetta er oft hægt að nota til þess að reikna markgildi, sem annars væri erfitt að reikna.

■ **Dæmi 7.34** Reiknið

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3}.$$

Lausn: Við vitum að

$$\sin(x) = T_{\sin}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

svo

$$x - \sin(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \dots\ .$$

En þá er

$$\begin{aligned}
\frac{x-\sin(x)}{x^3} &= \frac{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1}}{x^3} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1-3} \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2(k-1)} \\
&= \frac{1}{3!} - \frac{x^2}{5!} + \ldots
\end{aligned}$$

og það er auðvelt að ganga úr skugga um að þessi síðasta veldaröð er alsamleitin fyrir öll $x \in \mathbb{R}$. Þar með er

$$\lim_{x\to 0} \frac{x-\sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2(k-1)} = \frac{1}{3!} - \frac{0^2}{5!} + \ldots = \frac{1}{6}.$$

■

■ **Dæmi 7.35** Reiknið

$$\lim_{x\to 0} \frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos(3x))^2}.$$

Laun: Með því að nota nokkra fyrstu liði Taylorraða, þar sem hærri liðir detta hvort hið er út þegar við látum x stefna á 0, sjáum við að

$$1-\cos(3x) = 1 - 1 + \frac{(3x)^2}{2} - \frac{(3x)^4}{4!} + \ldots = \frac{9}{2}x^2 - \frac{81}{24}x^4 + \ldots$$

og þá

$$(1-\cos(3x))^2 = \left(\frac{9}{2}\right)^2 x^4 - 2 \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{81}{24} x^6 + \ldots = x^4 \left[\frac{81}{4} - \frac{9 \cdot 81}{24} x^2 + \ldots\right].$$

Þessi röð hefur samleitnigeislann $R = +\infty$.

Við sjáum líka að

$$e^{2x} - 1 = -1 + e^{2x} = -1 + 1 + 2x + \frac{(2x)^2}{2} + \frac{(2x)^3}{6} + \ldots = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \ldots$$

og að

$$\ln(1+x^3) = x^3 - \frac{x^6}{2} + \ldots$$

svo

$$(e^{2x}-1)\ln(1+x^3) = 2x^4 + 2x^5 + \ldots = x^4\left[2 + 2x + \ldots\right].$$

Þessi röð hefur a.m.k. samleitnigeislann $R = 1$.

Því gildir

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(e^{2x}-1)\ln(1+x^3)}{(1-\cos(3x))^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{x^4\left[2+2x+\ldots\right]}{x^4\left[\left(\frac{9}{2}\right)^2-\frac{9\cdot 81}{24}x^2+\ldots\right]}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{2+2x+\ldots}{\frac{81}{4}-\frac{9\cdot 81}{24}x^2+\ldots}\\ &= \frac{2}{81/4}\\ &= \frac{8}{81}.\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 7.36** Við ætlum að sýna að fyrir $n = 1, 2, 3, \ldots$ gildi

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}x^k,$$

þar sem a og x eru einhverjar rauntölur og

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Við skilgreinum fallið $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = (a+x)^n.$$

Ljóst er að fallið f er n-ta stigs margliða í x. Þ.e.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k,$$

þar sem $a_0, a_1, \ldots, a_n$ eru einhverjir fastar (sem eru háðir tölunni a).

Við notum nú Taylorröð f um núll til þess að reikna út hér að neðan að

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{n}{k}a^{n-k} \quad \text{fyrir } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

Athugið að fyrir öll $k > n$ hljóta stuðlar Taylorraðarinnar a_k að vera 0, því $f(x)$ er n-ta stigs margliða í x.

Nú er

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= (a+x)^n = \frac{n!}{(n-0)!}(a+x)^{n-0},\\
f^{(1)}(x) &= n(a+x)^{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!}(a+x)^{n-1},\\
f^{(2)}(x) &= \frac{n!}{(n-1)!}(n-1)(a+x)^{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!}(a+x)^{n-2},\\
f^{(3)}(x) &= \frac{n!}{(n-2)!}(n-2)(a+x)^{n-3} = \frac{n!}{(n-3)!}(a+x)^{n-3},\\
&\vdots\\
f^{(n)}(x) &= \frac{n!}{(n-(n-1))!}(n-(n-1))(a+x)^{n-n} = \frac{n!}{(n-n)!}(a+x)^{n-n},
\end{aligned}$$

svo

$$f^{(k)}(0) = \frac{n!}{(n-k)!}a^{n-k} \quad \text{fyrir } k = 0, 1, 2, \ldots, n.$$

En þá er

$$a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}a^{n-k} = \binom{n}{k} a^{n-k} \quad \text{fyrir } k = 0, 1, 2, \ldots, n$$

og við höfum sýnt að

$$(a+x)^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k.$$

■

Þægileg aðferð til þess að reikna út

$$\binom{n}{k}$$

ef n og k eru ekki mjög stórar tölur er hinn svokallaði Pascal-þríhyrningur.

Fyrst athugar maður að

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{(n-0)!0!} = 1 = \frac{n!}{(n-n)!n!} = \binom{n}{n}$$

og að fyrir $0 < k \leq n$ er

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-(k-1))!(k-1)!} \\
&= \frac{(n-k+1)\cdot n!}{(n-k+1)\cdot(n-k)!k!} + \frac{k\cdot n!}{(n-(k-1))!\cdot k\cdot(k-1)!} \\
&= \frac{(n-k+1)\cdot n!}{(n-k+1)!k!} + \frac{k\cdot n!}{(n-(k-1))!k!} \\
&= \frac{(n-k+1+k)\cdot n!}{((n+1)-k)!k!} \\
&= \frac{(n+1)!}{((n+1)-k)!k!} \\
&= \binom{n+1}{k}.
\end{aligned}$$

Þetta notar maður til þess að reikna út stuðlana með svokölluðum Pascal-þríhyrning:

$$\begin{array}{lccccccccccccc}
n=0 & & & & & & & 1 & & & & & & \\
n=1 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
n=2 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
n=3 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
n=4 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
n=5 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
n=6 & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}$$

Í þríhyrninginum les maður k frá 0 til n frá vinstri til hægri, jafnan

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

svarar til þess að gildi tölu í n-tu línu fæst með því að leggja saman tölurnar á ská fyrir ofan til hægri og vinstri, nema þá fyrstu og síðustu sem báðar eru 1 og svarar til

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1.$$

Æfingar 7.5

Æfing 7.5.1 Finnið Taylorröð fallsins $\ln(1+2x)$ um 1. Notið að við þekkjum Taylorröð fallsins $\ln(1+x)$ um 0. ■

Æfing 7.5.2 Finnið fyrstu þrjá liði í Taylorröð fallsins $g(x) = 2 + x^2 \ln(x)$. ■

Æfing 7.5.3 Notið að $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ fyrir $|x| < 1$ til að finna Taylorröð fallins

$$f(x) = \frac{x}{(x-1)^2}$$

um 0. Tilgreinið samleitnigeisla raðarinnar sem þið reiknið og ákvarðið að lokum gildi hennar í $x = 1/2$. ■

7.6 Lausnir á völdum dæmum

Æfing 7.1.1 Skoðum hina frægu Fibonacci runu, sem er skilgreind með $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ og $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}, n \in \mathbb{N}$.

a) Sýnið að runan er vaxandi.

b) Sýnið að runan er ósamleitin.

Ábending: Í lið b) er t.d. hægt að gera ráð fyrir að runan sé samleitin að $L \in \mathbb{R}$ og sýna svo að það leiðir til mótsagnar.

■ **Lausn** Reiknum fyrst nokkra fyrstu liði í rununni

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, \ldots).$$

Runan er jákvæð og við sjáum að $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ og að almennt er $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \geq a_{n+1}$ því $a_n > 0$, svo runan er vaxandi fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

Sýnum nú að runan sé ósamleitin. Gerum ráð fyrir að runan sé samleitin að rauntölunni L, þ.e. að $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = L$. Þá gildir að

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} a_{n+2} = L$$

svo við fáum

$$L = \lim_{n\to+\infty} a_{n+2} = \lim_{n\to+\infty} (a_{n+1} + a_n) = \lim_{n\to+\infty} a_{n+1} + \lim_{n\to+\infty} a_n = L + L = 2L.$$

Sem sagt höfum við að $L = 2L$ sem er aðeins uppfyllt ef $L = 0$. Markgildi rununnar getur ekki verið 0 þar sem hún byrjar í 1 og er vaxandi, svo þetta er mótsögn. Forsendan sem við byrjuðum með hlýtur því að vera röng. Því getur markgildið ekki verið til og runan er því ósamleitin.

Regla 7.1.1 liður 4 segir okkur nú að þar sem runan er vaxandi að lokum og ósamleitin, þá er nauðsynlega $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Athugið að þetta er ekki í mótsögn við það sem við sýndum því $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$.

Æfing 7.1.2 Skoðum rununa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sem er skilgreind með $a_1 = 2$, $a_2 = 1$ og $a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n - 2$ fyrir öll $n \geq 1$.

a) Reiknið a_3, a_4 og a_5 og dragið ályktun um halla rununnar.

b) Sannið með þrepun að runan sé minnkandi.

Ábending. Í b)-lið hentar betur að sanna að $a_{n+1} - a_n \leq 0$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

■ **Lausn** Sjáum fyrst að

$$a_3 = 2a_2 - a_1 - 2 = -2, \quad a_4 = 2a_3 - a_2 - 2 = -7, \quad a_5 = 2a_4 - a_3 - 2 = -14$$

og runan virðist vera minnkandi. Nú skulum við sanna það.

Sanna skal að $a_{n+1} \leq a_n$, sem er jafngilt $a_{n+1} - a_n \leq 0$ fyrir öll gildi á $n \in \mathbb{N}$.

- Þegar $n = 1$ fæst $a_2 - a_1 = -1 \leq 0$ þannig að ójafnan er sönn þegar $n = 1$.

- Gerum ráð fyrir að $a_{n+1} - a_n \leq 0$ (þrepunarforsenda) og sýnum fram á að $a_{n+2} - a_{n+1} \leq 0$. Fáum:
$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= 2a_{n+1} - a_n - 2 - a_{n+1} \quad \text{(skv. skilgreiningu á rununni)} \\ &= a_{n+1} - a_n - 2 \\ &\leq -2 \quad \text{(skv. þrepunarforsendunni)} \end{aligned}$$
Af því fæst $a_{n+2} - a_{n+1} \leq -2 \leq 0$.
- Skv. grundvallarsetningu um þrepun er $a_{n+1} \leq a_n$ fyrir öll n og runan er minnkandi.

Æfing 7.1.3 Skoðum rununa $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ þar sem $a_n = \dfrac{n-4}{n+1}$.

a) Finnið efra mat ef runan er takmörkuð að ofan og neðra mat ef runan er takmörkuð að neðan.
b) Er runan jákvæð eða neikvæð að lokum?
c) Er runan vaxandi eða minnkandi? Munið að rökstyðja.
d) Er runan samleitin eða ósamleitin?

■ **Lausn** a) Prófum fyrst að gera ráð fyrir því að runan sé takmökuð að ofan með efra mat 5. Þá fæst
$$a_n \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-4}{n+1} \leq 5 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{9}{6},$$
sem er rétt því $n \in \mathbb{N}$ og við höfum sýnt að runan er takmörkuð að ofan. Prófum næst að gera ráð fyrir því að runun sé takmörkuð að neðan með neðra mat -5. Þá fæst
$$a_n \geq -5 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n-4}{n+1} \leq -5 \quad \Leftrightarrow \quad n \geq -\frac{1}{6},$$
sem er líka rétt því $n \in \mathbb{N}$. Runan er því takmörkuð að ofan og að neðan og þar með takmörkuð.

b) Allir liðir í rununni eru augljóslega jákvæðir fyrir $n > 4$ skv. formúlunni svo runan er jákvæð að lokum.
c) Búum til tilsvarandi fall $f(x) = \dfrac{x-4}{x+1}$; þá er $f(n) = a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Fallið er stranglega vaxandi því
$$f'(x) = \frac{5}{(x+1)^2} > 0$$
og þá vitum við að runan er einnig stranglega vaxandi.
d) Runan er samleitin því
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-4}{n+1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-4/n}{1+1/n} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

Æfing 7.3.1 Ákvarðið hvort eftirfarandi raðir eru samleitnar eða ósamleitnar. Rökstyðjið og vísið í viðeigandi reglur.

a) $\displaystyle\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{1}{n-2}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{(n+1)!}$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^\pi}{17.4+\sqrt{n}}$

■ **Lausn** a) $\displaystyle\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{1}{n-2}$

(i) Við höfum að $\displaystyle\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{1}{n-2} = \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n}$ sem er p-röð með $p = 1$ svo hún er ósamleitin.

(ii) Einnig getum við notað að $\displaystyle\frac{1}{n-2} > \frac{1}{n}$ fyrir öll $n > 2$ og við vitum að $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ er ósamleitin (p-röð með $p = 1$), svo skv. Samanburðarprófi er röðin $\displaystyle\sum_{n=7}^{+\infty} \frac{1}{n-2}$ ósamleitin.

b) Látum $a_n = \dfrac{e^n}{(n+1)!}$ og reiknum

$$\rho = \lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{n+1}}{(n+2)!} \frac{(n+1)!}{e^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{e}{n+2} = 0$$

svo skv. Kvótaprófi er $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{(n+1)!}$ samleitin.

c) Við vitum að röðin $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ er ósamleitin (p-röð með $p = 1/2$). Látum $a_n = \dfrac{\pi^\pi}{17.4+\sqrt{n}}$ og $b_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ og reiknum

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^\pi\sqrt{n}}{17.4+\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\pi^\pi}{17.4/\sqrt{n}+1} = \pi^\pi > 0$$

svo skv. Markgildisprófinu er röðin $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\pi^\pi}{17.4+\sqrt{n}}$ ósamleitin.

Æfing 7.3.2 Ákvarðið hvort eftirfarandi raðir eru samleitnar eða ósamleitnar. Rökstyðjið með viðeigandi prófi.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right)$

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{1+n}$

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2^k}{(2k+1)!}$

■ **Lausn** a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi^n} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\pi}\right)^n$. Þetta er kvótaröð með kvóta $0 < r = \dfrac{1}{\pi} < 1$ svo röðin er samleitin.

b) Athugum að $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 \neq 0$, svo röðin er ósamleitin.

c) Röðin er ósamletin skv. Markgildisprófi því $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ er ósamleitin og

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\dfrac{\sqrt{n}}{1+n}}{\dfrac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{1+n} = 1 > 0.$$

d) Röðin er samleitin skv. Kvótaprófi því

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2^{k+1}}{(2(k+1)+1)!} \cdot \frac{(2k+1)!}{2^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{(2k+3)(2k+2)} = 0.$$

Æfing 7.3.3 Notið viðeigandi próf til að kanna samleitni raðarinnar

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{3k^2+k+1}{k^2\sqrt{k}+1}.$$

■ **Lausn** Við notum Markgildispróf. Látum $a_k = \dfrac{3k^2+k+1}{k^2\sqrt{k}+1}$ og $b_k = \dfrac{1}{\sqrt{k}}$. Fáum

$$\frac{a_k}{b_k} = \frac{(3k^2+k+1)/(k^2\sqrt{k}+1)}{1/\sqrt{k}} = \frac{3k^2\sqrt{k}+k\sqrt{k}+\sqrt{k}}{k^2\sqrt{k}+1} = \frac{3+\dfrac{1}{k}+\dfrac{1}{k^2}}{1+\dfrac{1}{k^2\sqrt{k}}}$$

sem stefnir á 3 þegar $k \to +\infty$. Nú er röðin $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} b_k$ ósamleitin. Skv. Markgildisprófinu er þá $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} a_k$ líka ósamleitin.

Æfing 7.4.3 Veldaröðin

$$\sum_{n=0}^{+\infty} n^3(3x-2)^n$$

er alsamleitin fyrir $x \in]a,b[$ og ósamleitin fyrir öll önnur x. Finnið fastana $a, b \in \mathbb{R}$. Notið kvótaprófið.

■ **Lausn** Við látum $a_n = n^3(3x-2)^n$ og reiknum

$$\rho = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(n+1)^3(3x-2)^{n+1}}{n^3(3x-2)^n}\right| = |3x-2|\,.$$

Nú segir Kvótaprófið okkur að röðin sé alsamleitin ef

$$\rho < 1 \quad\Leftrightarrow\quad |3x-2| < 1 \quad\Leftrightarrow\quad -1 < 3x-2 < 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{3} < x < 1.$$

Nú er gefið í dæminu að röðin er alsamleitin á opnu bili $]a,b[$ en ósamleitin þar fyrir utan. Kvótaprófið gaf okkur að röðin er alsamleitin á bilinu $\frac{1}{3} < x < 1$ svo $a = \frac{1}{3}$ og $b = 1$.

Æfing 7.4.4 Ákvarðið stærsta bilið fyrir x þannig að veldaröðin

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}(1-3x)^n$$

er alsamleitin (e. absolutely convergent). Athugið að bilið gæti verið lokað eða hálf lokað (s.s. skoðið líka endapunkta bilsins).

■ **Lausn** Byrjum á að umrita:

$$\frac{1}{n^2}(1-3x)^n = \frac{1}{n^2}\left(-3\left(x-\frac{1}{3}\right)\right)^n = \frac{(-3)^n}{n^2}\left(x-\frac{1}{3}\right)^n.$$

Nú sést að þetta er veldaröð um $c = 1/3$ með $a_n = \dfrac{(-3)^n}{n^2}$. Reiknum svo

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(-3)^{n+1}/(n+1)^2}{(-3)^n/n^2}\right| = \left|-3\frac{n^2}{(n+1)^2}\right|$$

Þar sem $\dfrac{n^2}{(n+1)^2}$ stefnir á 1 þegar n stefnið á óendanlegt fæst

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 3,$$

þannig að samleitnigeisli raðarinnar er $R = 1/3$. Samleitnisbilið er þá á milli $1/3 - 1/3 = 0$ og $1/3 + 1/3 = 2/3$.
Við skoðum endapunktana sérstaklega. Ef $x = 0$ er $1 - 3x = 1$ og við fáum röðina

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$$

sem er alsamleitin. Sömuleiðis, ef $x = 2/3$ er $1 - 3x = -1$ og við fáum röðina

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

sem er einnig alsamleitin því tölugildi $(-1)^n/n^2$ er $1/n^2$.
Samantekið fæst að veldaröðin er alsamleitin á bilinu $[0, 2/3]$.

Æfing 7.4.6 Skoðum veldaröðina

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n}\left(\frac{x}{2}-7\right)^n.$$

a) Finnið samleitnigeisla (e. radius of convergence) og samleitnimiðju (e. center of convergence) veldaraðarinnar.
b) Finnið summuna fyrir $x = 15$.
c) Finnið summuna fyrir $x = 5$.

■ **Lausn** (a) Við byrjum á að umrita

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n}\left(\frac{x}{2}-7\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n}\left(\frac{1}{2}(x-14)\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n 2^n}(x-14)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{4^n}(x-14)^n$$

og sjáum nú að samleitnimiðjan er $c = 14$. Reiknum nú L til að finna geislann:

$$L = \lim_{n\to+\infty} \frac{3^{n+2}\,4^n}{4^{n+1}\,3^{n+1}} = \frac{3}{4}$$

svo samleitnigeilsinn er $R = \dfrac{1}{L} = \dfrac{4}{3}$. Við vitum þá að röðin okkar er alsamleitin fyrir $x \in]14 - \frac{4}{3}, 14 + \frac{4}{3}[=]\frac{38}{3}, \frac{46}{3}[$ og að röðin er ósamleitin þegar $x < \frac{38}{3}$ og þegar $x > \frac{46}{3}$.

(b) Látum nú $x = 15$ og fáum kvótaröð svo við getum reiknað summuna

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{n+1}}{4^n}(15-14)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3\cdot 3^n}{4^n} = 3\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 3\cdot\frac{1}{1-3/4} = 12.$$

(c) Við sjáum að $x = 5$ er fyrir utan samleitnibilið og röðin er því ekki samleitin fyrir þetta gildi og ekki hægt að reikna summuna sem rauntölu. Þar sem liðirnir eru plús og mínus á víxl og vaxandi að tölugildi er summan heldur ekki $-\infty$ eða $+\infty$.

Æfing 7.4.7 Skoðum veldaröðina

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\left(1-\frac{x}{3}\right)^n$$

a) Finnið samleitnimiðju (e. center of convergence) og samleitnigeisla (e. radius of convergence) veldaraðarinnar.
b) Finnið summuna ef $x = 6$.
c) Finnið summuna ef $x = 17.4$.

■ **Lausn** a) Byrjum á að umskrifa,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n}\left(1-\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{6^n}(3-x)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n}(x-3)^n,$$

og þá sjáum við að samleitnimiðjan er $c = 3$. Svo finnum við geislann með Kvótaprófi; við reiknum

$$L = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{6^n}{6^{n+1}}\right| = \frac{1}{6}$$

og sjáum að geislinn er $R = 1/L = 6$. Röðin er s.s. (al)samleitin á bilinu $x \in]3-6, 3+6[=]-3, 9[$.

b) $x = 6$ er innan samleitnibilsins og hægt er að reikna summuna með kvótaröð.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n}(6-3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n}(3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2.$$

c) $x = 17.4$ er fyrir utan samleitnibilið, svo röðin er ekki samleitin fyrir $x = 17.4$ og ekki hægt að reikna summuna sem rauntölu því hún er ekki skilgreind. Aftur á móti er ljóst að

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{6^n}(17.4-3)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{14.4}{6}\right)^n = +\infty.$$

Æfing 7.4.8 Notið veldaröðina

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

til að finna veldaraðarframsetningu fyrir fallið

$$g(x) = \frac{1}{(1-2x)^2}$$

og gefið samleitnibil (e. interval of convergence) veldaraðarinnar.

■ **Lausn** Við þekkjum veldaröðina

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n, \quad -1 < x < 1,$$

og við byrjum á að diffra báðum megin við jafnaðarmerkið og fáum

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n.$$

Athugið að samleitinibilið breytist ekki þegar við diffrum. Nú gerum við breytuskiptin $x = 2t$ og fáum

$$\frac{1}{(1-2t)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)(2t)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)2^n t^n.$$

Samleitnibilið fyrir þessa röð er $-1 < 2t < 1$ þ.e.a.s. $-1/2 < t < 1/2$.

Æfing 7.4.9 Vitað er að

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k \quad \text{fyrir öll } x \in]-1, 1[.$$

Reiknið summu raðarinnar

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 1 + 2\cdot\frac{1}{2} + 3\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\frac{1}{8} + \cdots$$

Ábending: Notið $f'(x)$.

■ **Lausn 7.1** Veldaröðina má diffra lið fyrir lið á samleitnabilinu $]-1, 1[$ og þá er

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} kx^{k-1}$$

og ef við setjum $x = 1/2$ fæst

$$f'(1/2) = \sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

Einnig gildir

$$f'(x) = \frac{d}{dx}\frac{1}{1-x} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

þannig að

$$f'(1/2) = \frac{1}{(1-1/2)^2} = \frac{1}{1/4} = 4.$$

Tekið saman fæst

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = 4.$$

Æfing 7.5.1 Finnið Taylorröð fallsins $\ln(1+2x)$ um 1. Notið að við þekkjum Taylorröð fallsins $\ln(1+x)$ um 0.

■ **Lausn** Við vitum að

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n, \quad -1 < x \leq 1$$

Þetta er Taylorröðin um 0 en við viljum finna Taylorröð um 1. Við byrjum á því á að umskrifa fallið sem

$$\begin{aligned}
\ln(1+2x) &= \ln(1+2(x-1)+2) \\
&= \ln(3+2(x-1)) \\
&= \ln(3\left(1+\frac{2(x-1)}{3}\right)) \\
&= \ln(3) + \ln\left(1+\frac{2(x-1)}{3}\right)
\end{aligned}$$

svo nú getum við gert breytuskipti í röðinni fyrir $\ln(1+x)$ og fáum

$$\ln(1+2x) = \ln(3) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \left(\frac{2(x-1)}{3}\right)^n = \ln(3) + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}2^n}{3^n n} (x-1)^n .$$

Þetta er Taylorröð fallsins fyrir $-1 < \dfrac{2(x-1)}{3} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; -1/2 < x \leq 5/2$ (s.s. er þetta samleitnibil Taylorraðarinnar).