Nafn ____

Hlutapróf 1 - Stærðfræði II

Á prófinu eru 3 dæmi með jafnt vægi. Skilið lausnum bæði skriflega og í Gradescope. Munið að sýna útreikninga og rökstyðja svörin vandlega.

Dæmi 1: Ögn ferðast eftir ferli þar sem $y = x - 1$ og $z = -2x^2$ með föstum hraða $v = 2$. Finnið stefnuhraða agnarinnar í $(3, 2, -18)$. Athugið að ögnin ferðast þannig að $x'(t) > 0$.

Lausn:
Staðsetningu agnarinnar stikum við með

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t) - 1 \\ -2(x(t))^2 \end{bmatrix}$$

Þá er stefnuhraðinn

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ x'(t) \\ -4x(t)x'(t) \end{bmatrix}$$

Við þurfum að finna $x'(t)$ svo við finnum hraðann

$$v = \sqrt{(x'(t))^2 + (x'(t))^2 + 16(x(t))^2(x'(t))^2} = |x'(t)|\sqrt{2 + 16(x(t))^2}$$

og þar sem $x'(t) > 0$ er $x'(t)$ í punktinum $(3, 2, -18)$

$$x'(t^*) = \frac{2}{\sqrt{146}}$$

og stefnuhraðinn í punktinum er því

$$\mathbf{v}(t^*) = \frac{2}{\sqrt{146}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -12 \end{bmatrix}$$

Dæmi 2: Við skoðum skurðferilinn sem myndast þegar $z = x^2 + y^2$ sker $y = x - 1$. Látum ferilinn $\mathcal{C}$ vera þann hluta skurðferilsins sem fer frá $(0, -1, 1)$ til $(2, 1, 5)$.

a) Stikið ferilinn $\mathcal{C}$ þannig að $x = t$.

b) Heildið nú fallið $f(x, y, z) = x + y$ yfir ferilinn, s.s. reiknið $\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\ ds$.

Athugið að þið þurfið bara að stilla upp réttu heildi, það þarf ekki að reikna upp úr heildinu.

Lausn: a) Látum $x = t$, þá er $y = t - 1$ og $z = t^2 + (t-1)^2 = 2t^2 - 2t + 1$ Við stikum því ferilinn með

$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t-1 \\ 2t^2 - 2t + 1 \end{bmatrix}, \quad t \in [0, 2]$$

b) Til að setja upp heildið reiknum við

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4t - 2 \end{bmatrix}$$

svo

$$||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{1 + 1 + (4t-2)^2} = \sqrt{16t^2 - 16t + 6}$$

Heildið verður því

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z)\ ds = \int_0^2 (2t - 1)\sqrt{16t^2 - 16t + 6}\ dt$$

Dæmi 3: Skoðum fallið $f(x, y) = (y-2)x^2 - y^2$.

a) Finnið alla mögulega útgildispunkta fallsins.

b) Notið Hesse-fylki til að ákveða hvort útgildispunkturinn $(2, 2)$ er staðbundið hágildi, staðbundið lággildi eða söðulpunktur.

Lausn: a) Við diffrum og fáum

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x(y-2), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 2y$$

fáum því tvær jöfnur $2x(y-2) = 0$ og $x^2 - 2y = 0$. Fyrri jafnan hefur tvær lausnir, $x = 0$ og þá gefur seinni jafnan líka að $y = 0$, svo $(0, 0)$ er útgildispunktur. Hin lausnin er $y = 2$ þá gefur hin jafnan að $x = \pm 2$, svo $(2, 2)$ og $(-2, 2)$ eru líka útgildispunktar.

b) Finnum Hesse-fylkið

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} 2(y-2) & 2x \\ 2x & -2 \end{pmatrix}$$

svo í punktinum höfum við

$$H(2, 2) = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$$

sem hefur kennimargliðu $-\lambda(-2-\lambda) - 16 = \lambda^2 + 2\lambda - 16$, svo eigingildin eru $\lambda_1 = -1 - \sqrt{17} < 0$ og $\lambda_2 = -1 + \sqrt{17} > 0$ svo $(2, 2)$ er söðulpunktur.

Hér má líka reikna

$$\det(H(2, 2)) = -16 < 0$$

sem segir okkur að eigingildi A hafi sitthvort formerkið því $\det(A) = \lambda_1 \lambda_2$.