Skiladæmi 2 - Stærðfræði 2

Munið að rökstyðja öll svör og sýna útreikninga.

Dæmi 1. Ögn ferðast á skurðferli plansins $z = 1 - y$ og fleygbogaflatarins $x = y^2$ þannig að y-hnit agnarinnar hækkar með tímanum og því $y'(t) > 0$. Gefin er að ferð agnarinnar sé föst, $v = 10$. Reiknið stefnuhraðann og hröðunina í punktinum $(4, 2, -1)$.

Lausn: Notum $y = y(t)$ þannig að $x = (y(t))^2$ og jafna plansins gefur $z = 1 - y(t)$. Hreyfing agnarinnar er þá gefin með

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} y(t)^2 \\ y(t) \\ 1 - y(t) \end{pmatrix}$$

Stefnuhraðinn er

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 2y'(t)y(t) \\ y'(t) \\ -y'(t) \end{pmatrix}$$

og hröðunin er

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \begin{pmatrix} 2y''(t)y(t) + 2(y'(t))^2 \\ y''(t) \\ -y''(t) \end{pmatrix}$$

Nú reiknum við ferðina

$$v = \sqrt{4y'(t)^2 y(t)^2 + y'(t)^2 + y'(t)^2} = y'(t)\sqrt{4y(t)^2 + 2}$$

því $y'(t) > 0$ skv. forsendunni. Einangrum $y'(t)$ í jöfnunni og fáum

$$y'(t) = \frac{v}{\sqrt{4y(t)^2 + 2}}$$

Þar sem $v = 10$ og við erum á tímapunkti t þar sem $y(t) = 2$ er þá

$$y'(t) = \frac{10}{\sqrt{18}}$$

og stefnuhraðinn í punktinum er þá

$$\mathbf{r}'(t) = 2y'(t)y(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} - y'(t)\mathbf{k} = \frac{40}{\sqrt{18}}\mathbf{i} + \frac{10}{\sqrt{18}}\mathbf{j} - \frac{10}{\sqrt{18}}\mathbf{k}$$

Til að finna hröðunina reiknum við

$$y''(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{v}{\sqrt{4y(t)^2 + 2}}\right) = -\frac{4vy(t)y'(t)}{(4y(t)^2 + 2)^{3/2}}$$

og í gefnum punkti fáum við því $y''(t) = -\dfrac{200}{81}$ og hröðunin í punktinum er því

$$\mathbf{a}(t) = \frac{100}{\sqrt{81}}\mathbf{i} - \frac{200}{81}\mathbf{j} + \frac{200}{81}\mathbf{k}$$

Dæmi 2. Látum $\mathcal{C}$ vera skurðferil sívalningsins $4x^2 + y^2 = 4$ og plansins $y + z = 1$.

a) Stikið þann hluta $\mathcal{C}$ þar sem $z \leq 0$.

b) Stillið upp heildi til að reikna bogalengd ferilsins $\mathcal{C}$ (ath. lengd alls skurðferilsins). Hér má nota reiknivél til að reikna uppúr heildinu sem kemur upp, en einfaldið fyrst eins og hægt er.

c) Heildið fallið $f(x, y, z) = y^2 + z^2$ eftir ferlinum $\mathcal{C}$, þ.e. reiknið

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds$$

Lausn. a) Út fra jöfnunni

$$4x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow x^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

má gefa sér $x = \cos(t)$, $\frac{y}{2} = \sin(t)$ þ.e. $y = 2\sin(t)$. Auk þess er $z = 1 - y = 1 - 2\sin(t)$. Stikun fyrir $\mathcal{C}$ í heild sinni er þá

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ 2\sin(t) \\ 1 - 2\sin(t) \end{pmatrix}, t \in [0, 2\pi]$$

Ef auk þess gildir $z \leq 0$ fæst

$$1 - 2\sin(t) \leq 0 \Rightarrow \sin(t) \geq \frac{1}{2}$$

sem gefur $t \in [\pi/6, 5\pi/6]$.

b) Athugum stefnuhraðann

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ -2\cos(t) \end{pmatrix}$$

sem hefur lengdina

$$\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{\sin^2(t) + 4\cos^2(t) + 4\cos^2(t)} = \sqrt{1 + 7\cos^2(t)}$$

og bogalengd $\mathcal{C}$ er þá fundið með heildinu

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + 7\cos^2(t)}\, dt$$

sem er ekki einfallt heildi, svo við notum reiknivél.

c) Nú þurfum við að reikna líka ferilheildið svo við finnum fyrst

$$f(\mathbf{r}(t)) = (2\sin(t))^2 + (1 - 2\sin(t))^2 = 8\sin^2(t) + 1 - 4\sin(t)$$

svo við setjum upp heildið

$$\int_{\mathcal{C}} f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\mathbf{r}(t))\mathbf{r}'(t)\ dt = \int_0^{2\pi} (8\sin^2(t) + 1 - 4\sin(t))\sqrt{1 + 7\cos^2(t)}\ dt$$

Dæmi 3. Ögn ferðast eftir skurðferli keilunnar $z^2 = x^2 + y^2$ við planið $z = x + 1$.

a) Stikið ferilinn með því að láta $y = t$.
b) Hver er hraði agnarinnar í punktinum $(0, -1, 1)$?

Lausn: Setjum saman í $(x + 1)^2 = x^2 + y^2$ sem við umskrifum $2x + 1 = y^2$. Set $y = t$ og einangra x, þá fæst

$$\mathbf{r}(t) = \frac{t^2 - 1}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j} + \frac{t^2 + 1}{2}\mathbf{k}, \quad t \in \mathbb{R}$$

svo

$$\mathbf{r}'(t) = t\mathbf{i} + \mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

og hraðinn er því

$$||\mathbf{r}'(t)|| = \sqrt{2t^2 + 1}$$

Erum í $(0, -1, 1)$ þegar $t = -1$, svo hraðinn í punktinum er $\sqrt{3}$.