Stærðfræði II
Tímadæmi 7

Vektorsvið

Glósur 5.1.1. Teiknið mynd af vektorsviðinu

$$\mathbf{F}(x,y) = (y+2)\mathbf{i} + x\mathbf{j}$$

og finnið sviðslínur þess. Hægt er að nota skipun **quiver** í Matlab til að teikna vektorsvið.

Lausn. Okkar vektorsvið er

$$\mathbf{F}(x,y) = \nabla(xy+2x) = \begin{pmatrix} y+2 \\ x \end{pmatrix}$$

Finnum sviðslínur með því að leysa

$$\frac{dy}{dx} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{x}{y+2}$$

það er

$$\int (y+2)dy = \int x dx$$

sem gefur

$$\frac{y^2}{2} + 2y = \frac{x^2}{2} + C$$

eða

$$y^2 + 4y = x^2 + C'$$

þ.s. $C' = 2C$. Sviðslínur fást með því að láta C' (eða C) taka hvaða gildi sem er. Hægt að er sjá mynd af vektorsviðinu (grænu örvanir) og sviðslínurnar hér í Geogebru, þær eru breiðbogar.

Varðveitin vektorsvið

Adams 15.2.3. Gefið er vektorsvið

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{i} - \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{j}$$

Kannið hvort $\mathbf{F}$ sé varðveitið og finnið mætti þess ef svo er.

Lausn. Mættisprófið það:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

Mættisprófið er neikvætt og því er $\mathbf{F}$ ekki varðveitið.

Adams 15.2.5. Sama dæmi en

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (2xy - z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} + (y^2 - 2xz)\mathbf{k}$$

Lausn. Mættisprófum:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = -2z = \frac{\partial F_1}{\partial z}$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = 2y = \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

svo mætti er líklega til. Reiknum það:

$$\phi(x,y,z) = \int (2xy - z^2)\,dx = x^2y - xz^2 + f(y,z)$$

$$\phi(x,y,z) = \int (2yz + x^2)\,dy = y^2z + x^2y + g(x,z)$$

$$\phi(x,y,z) = \int (y^2 - 2xz)\,dz = y^2z - xz^2 + h(x,y)$$

Þetta gengur ef $f(y,z) = y^2z$, $g(x,z) = -xz^2$, $h(x,y) = x^2y$ og mætti er þá td

$$\phi(x,y,z) = x^2y - xz^2 + y^2z$$

Ferilheildi vektorsviða

Adams 15.4.1. Heildið vektorsviðið

$$\mathbf{F}(x,y) = xy\mathbf{i} - x^2\mathbf{j}$$

eftir þeim hluta fleygbogans $y = x^2$ frá $(0,0)$ til $(1,1)$.

Lausn. yrjum á að mættisprófa $\mathbf{F}$:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = -2x \qquad \frac{\partial F_1}{\partial y} = x$$

sem sýnir að $\mathbf{F}$ er ekki varðveitið og þá reiknum við með höndunum.

Við stikum fleygbogann $y = x^2$ með því að nota $x = t$ sem frjálsa breytu sem gefur

$$\mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}, t \in [0,1]$$

Bilið er valið svo ferillinn byrjar í $(0,0)$ og endar í $(1,1)$ sbr. forsendur. Stefnuhraði er þá

$$\mathbf{r}'(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}$$

Setjum stikunina inn í $\mathbf{F}$ þ.e. $x = t$ og $y = t^2$:

$$\begin{pmatrix} xy \\ -x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^2 \end{pmatrix}$$

og heildum svo

$$\int_0^1 \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} dt = \int_0^1 -t^3\, dt = -\frac{1}{4}$$

Adams 15.4.5. Gefið er vektorsviðið

$$\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$$

Látum svo $\mathcal{C}$ vera helming skurðferils sívalningsins $x^2 + y^2 = 1$ og plansins $y = z$ frá $(-1, 0, 0)$ til $(1, 0, 0)$. Hann er áttaður rangsælis. Reiknið ferilheildið

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

Lausn. Byrjum á að mættisprófa $\mathbf{F}$:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = z = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = y = \frac{\partial F_1}{\partial z}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = x = \frac{\partial F_2}{\partial z}$$

sem sýnir að líklega er til mætti. Finnum það með heildun:

$$\phi(x, y, z) = \int (yz)\, dx = xyz + f(y, z)$$

$$\phi(x, y, z) = \int (xz)\, dy = xyz + g(x, z)$$

$$\phi(x, y, z) = \int (xy)\, dz = xyz + h(x, y)$$

og greinilega virkar að taka $f = g = h = 0$ þannig að $\phi(x, y, z) = xyz$ er mætti. Þegar við heildum varðveitið vektorsvið á ferli skiptir einungis máli hvar ferillinn byrjar og endar. Upphafspunktur er $A = (-1, 0, 0)$ og endapunktur er $B = (1, 0, 0)$ og skv. setningu er

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \phi(B) - \phi(A) = 1 \cdot 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 0 \cdot 0 = 0$$

Adams 15.4.10 Finnið gildi á a og b svo vektorsviðið

$$\mathbf{F}(x,y,z) = (axy+z)\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + (bx+2z)\mathbf{k}$$

verði varðveitið, og reiknið mætti fyrir þau gildi á a og b. Reiknið síðan ferilheildið

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

þar sem $\mathcal{C}$ er stikaður með

$$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\mathbf{i} + \cos(t)\mathbf{j} + 3\sin(t)\mathbf{k}, \qquad 0 \le t \le \frac{\pi}{2}$$

Lausn. Byrjum á að skoða mættispróf:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = 2x \stackrel{?}{=} ax = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

$$\frac{\partial F_3}{\partial x} = b \stackrel{?}{=} 1 = \frac{\partial F_1}{\partial z}$$
$$\frac{\partial F_3}{\partial y} = 0 \stackrel{?}{=} 0 = \frac{\partial F_2}{\partial y}$$

Þriðja jafnan er alltaf sönn og hinar ganga upp þegar $a = 2$ og $b = 1$ sem eru einustu gildi sem koma til greina. Fyrir þau gildi reiknum við mætti

$$\phi(x,y,z) = \int (2xy+z)\,dx = x^2y + xz + f(y,z)$$

$$\phi(x,y,z) = \int x^2\,dy = x^2y + g(x,z)$$

$$\phi(x,y,z) = \int (x+2z)\,dz = x^2z + z^2 + h(x,y)$$

Þetta gengur ef $f(y,z) = z^2$, $g(x,z) = xz + z^2$, $h(x,y) = x^2y$ og mætti er þá td

$$\phi(x,y,z) = x^2y + xz + z^2$$

Til að reikna ferilheildi þarf sem betur fer ekki að nota stikun og þar sem $\mathbf{F}$ hefur mætti er nóg að finna endapunkta ferilsins og stinga inn. Þegar $t = 0$ er $\mathbf{r}(0) = (1,1,0)$ en $\mathbf{r}(\pi/2) = (0,0,3)$ þ.a.

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \phi(0,0,3) - \phi(1,1,0) = 9 - 1 = 8$$

Glósur 5.3.5. Skoðum tvö tengd vektorsvið:

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 2xyz^2\mathbf{i} + \big(x^2z^2 + z\cos(yz)\big)\mathbf{j} + \big(2x^2yz + y\cos(yz)\big)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{G}(x,y,z) = 2xyz^2\mathbf{i} + \big(x^2z^2 + z\cos(yz) - 2yz\big)\mathbf{j} + \big(2x^2yz + y\cos(yz)\big)\mathbf{k}$$

Athugið að $\mathbf{G}$ er aðeins smá viðbót við $\mathbf{F}$.

a) Sýnið að $\mathbf{F}$ er varðveitið og finnið mætti þess.

b) Stikið þann feril $\mathcal{C}$ sem fæst þegar $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sker planið $z = 2$.

c) Reiknið ferilheildin

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{og} \quad \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

Hint. $\mathbf{G}$ er örugglega ekki varðveitið en stór hluti þess er það.

Lausn er á Canvas, sjá "Valdir lausnir úr kafla 5"