5.5 Lausnir á völdum dæmum

Æfing 5.2.1 Ákvarðið hvort vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{F}(x,y) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2+y^2}$$

sé varðveitið (geymið, e. *conservative*) og finnið mætti (e. *potential*) þess ef svo er.

■ **Lausn** Við reiknum

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right) = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)$$

og sjáum að vigursviðið er mögulega varðveitið. Við finnum mættið $\phi(x,y)$ með því að leysa jöfnurnar

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1 \Rightarrow \phi(x,y) = \int \frac{x}{x^2+y^2}dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C_1(y)$$

og

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2 \Rightarrow \phi(x,y) = \int \frac{y}{x^2+y^2}dy == \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2) + C_2(x)$$

Svo mætti er $\phi(x,y) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2+y^2)$, sem við getum sannreynt með því að gá hvort $[\nabla\phi(x,y)]^T = \mathbf{F}$.

(Athugið að $\mathbb{R}^2 \backslash\{(0,0)\}$ er ekki einfaldlega samhangandi svæði).

Æfing 5.2.2 Ákvarðið hvort vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x,y,z) = 2xy^3\sin(z)\mathbf{i} + 3x^2y^2\sin(z)\mathbf{j} + x^2y^3\cos(z)\mathbf{k}$$

sé varðveitið (geymið, e. *conservative*) og finnið mætti (e. *potential*) þess ef svo er.

■ **Lausn** Vigursviðið er varðveitið með mættið $\phi(x,y,z) = x^2y^3\sin(z) + C$. Útreikningar svipaðir og í dæminu hér á undan.

Æfing 5.3.1 Tveir langir leiðarar liggja samsíða z-ás. Leiðararnir liggja í $(y,x) = (0,\pm 1)$, þar sem fjarlægð er mæld í einhverri hentugri einingu. Jafna segulsviðsins (mælt í hengtugum einingum) er gefin með

$$\mathbf{b}(x,y) = \frac{(x-1)\mathbf{j} - y\mathbf{i}}{(x-1)^2+y^2} + \frac{\eta((x+1)\mathbf{j} - y\mathbf{i})}{(x+1)^2+y^2}$$

þar sem $\eta > 0$ lýsir ósamhverfu segulsviðsins. Athugið að vírarnir eru óendalega langir þannig að $\mathbf{b}$ er ekki háð breytunni z, og þar sem vírarnir liggja samsíða z-ás þá hefur sviðið engan z-þátt.

a) Sýnið að vektorsviðið $\mathbf{b}(x, y)$ er uppsprettulaust (e. *solenoidal*): $\nabla \cdot \mathbf{b}(x, y) = 0$.
b) Teiknið upp vektorsviðið fyrir $\eta = 1.5$.

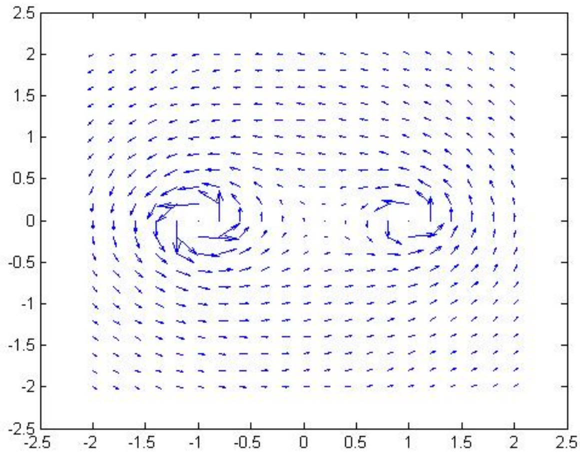
■ **Lausn** Umskrifum vektorsviðið á formið $\mathbf{b}(x, y) = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$

$$\begin{aligned}\mathbf{b}(x, y) =& \frac{(x-1)\mathbf{j} - y\mathbf{i}}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{\eta((x+1)\mathbf{j} - y\mathbf{i})}{(x+1)^2 + y^2} \\ =& \left(\frac{-y}{(x-1)^2 + y^2} - \frac{\eta y}{(x+1)^2 + y^2}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{\eta((x+1)}{(x+1)^2 + y^2}\right)\mathbf{j}\end{aligned}$$

Við getum nú reiknað uppsprettuna

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{b}(x, y) =& \left(\frac{\partial}{\partial x} \quad \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot (b_1 \;\; b_2) \\ =& \frac{\partial b_1}{\partial x} + \frac{\partial b_2}{\partial y} \\ =& \frac{2(x-1)y}{((x-1)^2 + y^2)^2} + \frac{2\eta y(x+1)}{((x+1)^2 + y^2)^2} - \frac{2y(x-1)}{((x-1)^2 + y^2)^2} - \frac{2\eta y(x+1)}{((x+1)^2 + y^2)^2} \\ =& 0\end{aligned}$$

```
eta=1.5;
x=-2:0.2:2;
[x,y] = meshgrid(x,x);
f2=(x-1)./((x-1).^2+y.^2)+eta*(x+1)./((x+1).^2+y.^2);
f1=-y./((x-1).^2+y.^2)-eta*y./((x+1).^2+y.^2);
quiver(x,y,f1,f2,1.5)
```



Mynd 5.2: Vigursviðið í dæmi 2, þegar $\eta = 1.5$.

Æfing 5.3.2 Reiknið ferilheildið af vigursviðinu $\mathbf{F}(x, y, z) = z\mathbf{i} - y\mathbf{j} + 2x\mathbf{k}$ eftir ferlinum $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ frá $(0,\ 0,\ 0)$ til $(2,\ 4,\ 8)$.

■ **Lausn** Sjáum að vigursviðið er ekki varðveitið því

$$1 = \frac{\partial F_1}{\partial z} \neq \frac{\partial F_3}{\partial x} = 2$$

Gefin er stikun á ferlinum, sem er $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ og við sjáum að $t \in [0, 2]$. Við reiknum

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^2 \begin{pmatrix} t^3 \\ -t^2 \\ 2t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt = \int_0^2 t^3 - 2t^3 + 6t^3 dt = \int_0^2 5t^3 dt = 20$$

Æfing 5.3.4 Gefið er vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (2x - y - z)\mathbf{i} + (2y - x)\mathbf{j} + (2z - x)\mathbf{k}$$

og látum C vera skurðferil $z = x^2 + 4y^2$ við $z = 3x - 2y$. Reiknið

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

■ **Lausn** Við getum reiknað út að $\mathbf{F}$ er varðveitið með mætti

$$\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz$$

Við sjáum að skurðferillin er lokaður ferill og því er

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Æfing 5.3.5 Gefin eru vigursviðin

$$\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \;\; \mathbf{F}(x, y, z) = 2xyz^2\mathbf{i} + (x^2z^2 + z\cos(yz))\mathbf{j} + (2x^2yz + y\cos(yz))\mathbf{k} \quad \text{og}$$

$$\mathbf{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \;\; \mathbf{G}(x, y, z) = 2xyz^2\mathbf{i} + (x^2z^2 + z\cos(yz) - 2zy)\mathbf{j} + (2x^2yz + y\cos(yz))\mathbf{k}$$

a) Stikið ferilinn C sem fæst þegar $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ sker planið $z = 2$.
b) Er vigursviðið $\mathbf{F}$ geymið (varðveitið, e. *conservative*)?
c) Finnið mætti vigursviðsins $\mathbf{F}$ ef það er til.
d) Reiknið ferilheildin

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{og} \quad \int_C \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r}$$

■ **Lausn** a) Við sjáum að við erum með ferilinn $\sqrt{x^2 + y^2} = 2$ s.s. erum við með hring með radíus 2 og miðju í $(0, 0, 2)$ sem liggur í planinu $z = 2$. Við stikum ferilinn með $\mathbf{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{r}(t) = 2\cos(t)\mathbf{i} + 2\sin(t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$.

b) $\mathbf{F}$ er skilgreint á einfaldlega samhangandi svæði $\mathbb{R}^3$ og

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_3}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial z} \quad \text{og} \quad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y}$$

svo við vitum að vigursviðið er varðveitið.

c) Vigursviðið hefur mættið $\phi(x, y, z) = x^2yz^2 + \sin(yz)$.

d) Ferillinn $\mathcal{C}$ er lokaður og vigursviðið $\mathbf{F}$ er varðveitið svo

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Nú getum við notfært okkur að $\mathbf{G} = \mathbf{F} - 2zy\mathbf{j}$ svo

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} (\mathbf{F} - 2zy\mathbf{j}) \cdot d\mathbf{r} = \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \oint_{\mathcal{C}} 2zy\mathbf{j} \cdot d\mathbf{r} = -\oint_{\mathcal{C}} 2zy\mathbf{j} \cdot d\mathbf{r}$$

Látum $\mathbf{H} = 2zy\mathbf{j}$ og reiknum

$$\begin{aligned} -\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{H}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t)dt &= -\int_{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 0 \\ 8\sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2\sin(t) \\ 2\cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= -\int_0^{2\pi} 16\sin(t)\cos(t)dt = 0 \end{aligned}$$

Æfing 5.3.6 Gefið er vigursviðið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ er varðveitið með mættið

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2}$$

þar sem $\mathbf{r} = (x,\ y,\ z)^T \in \mathbb{R}^3$ og $\mathbf{r}_0 = (a,\ b,\ c)^T$ er fastavigur. Finnið vigursviðið $\mathbf{F}(\mathbf{r})$.

■ **Lausn**

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^2} = \frac{1}{(x-1)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

við getum þá reiknað hlutafleiðuna

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{-2(x-a)}{((x-1)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2)^2} = \frac{-2(x-a)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^4}$$

og við sjáum þá að stigullinn verður

$$[\nabla\phi]^T = \left(\frac{-2(x-a)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^4} \ \ \frac{-2(y-b)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^4} \ \ \frac{-2(z-c)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^4} \right)^T = \frac{-2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)}{\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\|^4}$$

Æfing 5.3.7 Sýnið að öll varðveitin vektorsvið $\mathbf{G}$ eru hvirflalaus (irrotational), þ.e. er $\nabla \times \mathbf{G}(x, y, z) = \mathbf{0}$.

■ **Lausn** $\mathbf{G}$ er varðveitið svo til er mætti $\phi(x,y,z)$ þannig að $[\nabla\phi]^T = \mathbf{G}$. Við reiknum

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{G}(x,y,z) =& \nabla \times [\nabla\phi]^T \\
=& \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ \partial\phi/\partial x & \partial\phi/\partial y & \partial\phi/\partial z \end{vmatrix} \\
=& \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right)\mathbf{i} - \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right)\mathbf{k} \\
=& \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Æfing 5.4.1 Finnum flæði (e. flux) vigursviðsins $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\mathbf{F}(x,y,z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ upp í gegnum yfirborðið $\mathcal{S}$, sem er sá hluti $z = 1 - x^2 - y^2$ sem er yfir ofan xy-planið. M.ö.o. Reiknið

$$\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

■ **Lausn** Byrjum á að stika yfirborðið með

$$\mathbf{r} : D \to R^3,\ \mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x^2 - y^2 \end{pmatrix}, \quad \text{þ.s. } x^2 + y^2 \leq 1$$

Nú er $\mathbf{n} = 2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k}$ og við heildum

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} =& \iint_{\mathcal{S}} \mathbf{F}(\mathbf{r}(x,y)) \cdot \mathbf{n} dA \\
=& \iint_{x^2+y^2\leq 1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ o \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 1 \end{pmatrix} dA \\
=& \iint_{x^2+y^2\leq 1} 2x^2 + 2y^2 dA \\
=& \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r^2 \cdot r\ dr\ d\theta \\
=& 2\pi \cdot \left[\frac{r^4}{2}\right]_0^1 = \pi
\end{aligned}$$