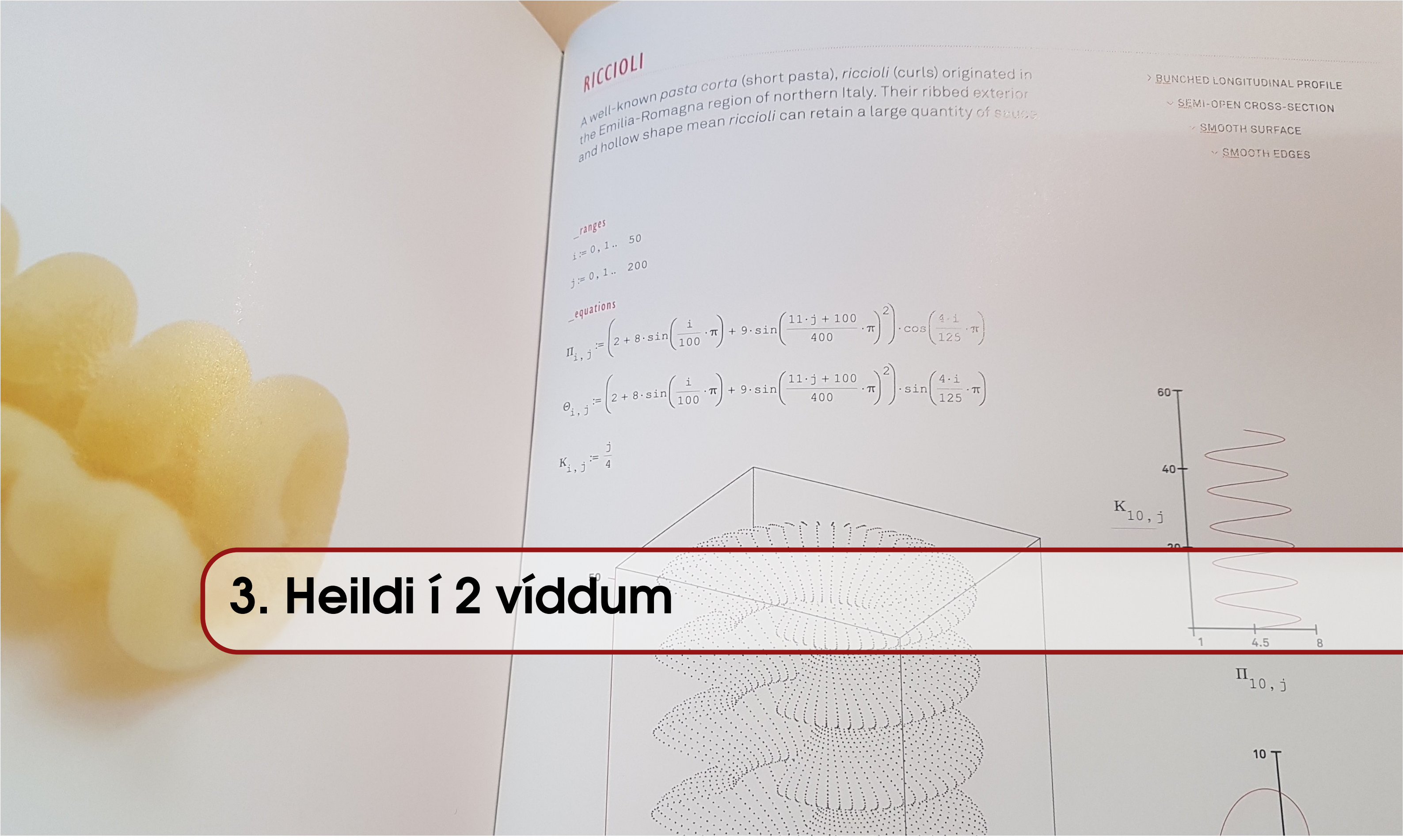


3. Heildi í 2 víddum

Í þessum hluta munum við skoða heildi í tveimur víddum, bæði í kartesískum hnitum (xy-hnitum) og í pólhnitum ($r\theta$-hnitum). Í næsta hluta skoðum við þreföld heildi. Þau er hægt að setja upp í kartesískum hnitum (xyz-hnitum), í sívalnings hnitum ($r\theta z$-hnitum) og í kúluhnitum ($\rho\phi\theta$-hnitum).

3.1 Heildi í 2-víddum

Látum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vera samfellt fall og látum $a < b$ og $c < d$ vera rauntölur og skilgreinum svæðið

$$\mathcal{D} := [a,b] \times [c,d] := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ a \leq x \leq b \ \text{ og } \ c \leq y \leq d \}.$$

Heildi f yfir $\mathcal{D}$, oft ritað

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dA \quad \text{eða} \quad \int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA,$$

er nú skilgreint á eftirfarandi hátt: Við byrjum á að skilgreina fallið $F : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(y) := \int_a^b f(x,y)dx \qquad (*)$$

fyrir sérhvert $y \in [c,d]$ (ath. í $(*)$ er y fasti). Heildið af f yfir $\mathcal{D}$ er síðan skilgreint sem rauntalan

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA = \int_c^d F(y)dy.$$

■ **Dæmi 3.1** Heildum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = x\sin(y)$, yfir $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,\pi]$. Nú er

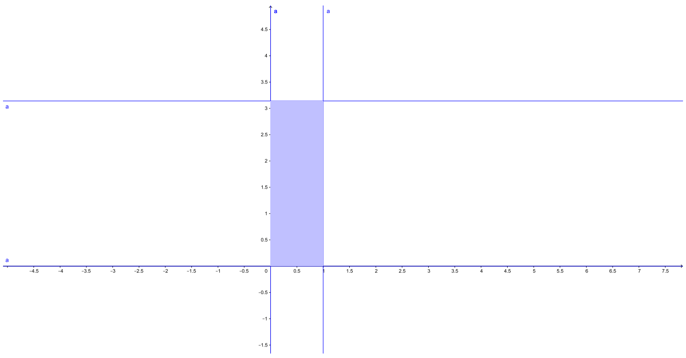
$$F(y) = \int_0^1 f(x,y)dx = \int_0^1 x\sin(y)dx = \left[\frac{1}{2}x^2\sin(y)\right]_{x=0}^1 = \frac{1}{2}\sin(y)$$

fyrir öll $y \in \mathbb{R}$ og þá
$$\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin(y)dy = \left[\frac{-1}{2}\cos(y)\right]_{y=0}^{\pi} = 1.$$

Prófum nú að skilgreina fallið $G : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$,
$$G(x) = \int_0^\pi x\sin(y)dy = [-x\cos(y)]_{y=0}^{\pi} = 2x.$$

Þá er
$$\int_0^1 G(x)dx = \int_0^1 2xdx = \left[x^2\right]_{x=0}^{1} = 1.$$

■



Mynd 3.1: Í dæmi 3.1 heildum við yfir svæðið $\mathcal{D} = [0,1] \times [0,\pi]$ sem er litaða svæðið á myndinni.

Það að röðin á heildunum í síðasta dæmi skipti ekki máli er ekki tilviljun.

Regla 3.1.1 Látum $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ vera samfellt fall og skilgreinum svæðið $\mathcal{D} = [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2$, þá er
$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)dx\right) dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dy\right) dx.$$

Reglan segir okkur með öðrum orðum, að það skiptir ekki máli í hvaða röð við heildum. Ekki alveg augljós ástæða fyrir þessu er að ef $H : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ er fall þ.a.
$$\frac{\partial^2 H}{\partial y \partial x}(x,y) = f(x,y),$$

að þá er líka
$$\frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}(x,y) = f(x,y).$$

Hvernig förum við að ef við viljum heilda fall $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ yfir hlutmengi $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ sem er ekki ferhyrningur? Almennt er það ekki auðvelt, en ef hægt er að lýsa rönd $\mathcal{D}$ með grafi falla $y = c(x)$ og $y = d(x)$ af x, eða falla $x = a(y)$ og $x = b(y)$, að þá er það oft ekki erfitt. Við sýnum þetta með dæmum.

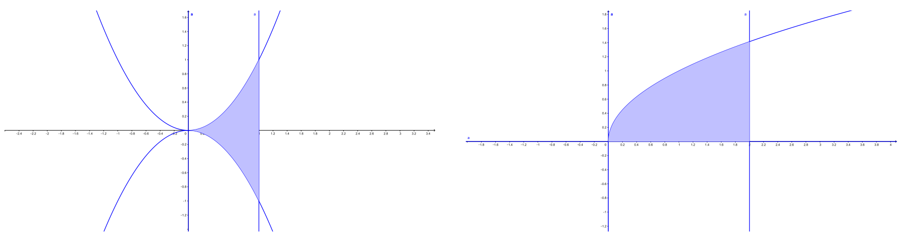
■ **Dæmi 3.2** Látum $c : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $c(x) = -x^2$ og $d : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $d(x) = x^2$ og skilgreinum

$$\mathcal{D} := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le 1 \;\text{ og }\; c(x) \le y \le d(x) \;\}.$$

Heildum fallið $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = xy^2$ yfir $\mathcal{D}$. Nú gildir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA &= \int_0^1 \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\int_{-x^2}^{x^2} xy^2 dy \right) dx = \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{3} xy^3 \right]_{y=-x^2}^{x^2} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} [x(x^2)^3 - x(-x^2)^3] \right) dx = \int_0^1 \frac{2}{3} x^7 dx \\
&= \left[\frac{2}{3 \cdot 8} x^8 \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{12}.
\end{aligned}$$

■



Mynd 3.2: Við sjáum hér svæðin $\mathcal{D}$ skilgreind í dæmum 3.2 og 3.3.

■ **Dæmi 3.3** Látum $c, d : [0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$, $c(x) = 0$ og $d(x) = \sqrt{x}$ og skilgreinum

$$\mathcal{D} := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; 0 \le x \le 2 \;\text{ og }\; c(x) \le y \le d(x) \;\}.$$

Heildum fallið $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^2$ yfir $\mathcal{D}$. Nú gildir

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA &= \int_0^2 \left(\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\int_0^{\sqrt{x}} y^2 dy \right) dx = \int_0^2 \left(\left[\frac{1}{3} y^3 \right]_{y=0}^{\sqrt{x}} \right) dx \\
&= \int_0^2 \left(\frac{1}{3} x^{\frac{3}{2}} \right) dx = \left[\frac{1}{3} \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} \right]_{x=0}^2 = \frac{2}{15} 2^{\frac{5}{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

Önnur leið til þess að lýsa menginu $\mathcal{D}$ er að setja $a(y) = y^2$ og $b(y) = 2$ og þá er

$$\mathcal{D} := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; a(y) \le x \le b(y) \quad \text{og} \quad 0 \le y \le \sqrt{2} \}$$

Við reiknum nú heildi f yfir $\mathcal{D}$ með því að heilda í annari röð en áðan:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA &= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{a(y)}^{b(y)} f(x,y)dx \right) dy \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{y^2}^{2} y^2 dx \right) dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left(\left[xy^2 \right]_{x=y^2}^{2} \right) dy \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \left(2y^2 - y^4 \right) dy = \left[\frac{2}{3}y^3 - \frac{1}{5}y^5 \right]_{y=0}^{\sqrt{2}} \\
&= \frac{2}{3} 2\sqrt{2} - \frac{1}{5} 4\sqrt{2} \\
&= \frac{8\sqrt{2}}{15}.
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 3.4** Reiknum ítrekaða heildið

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\int_0^x (xy + y^2) dy \right) dx &= \int_0^1 \left(\left[\frac{1}{2}xy^2 + \frac{1}{3}y^3 \right]_{y=0}^{x} \right) dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}xx^2 + \frac{1}{3}x^3 \right) dx = \int_0^1 \frac{5}{6}x^3 dx \\
&= \left[\frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4}x^4 \right]_{x=0}^{1} \\
&= \frac{5}{24}.
\end{aligned}$$

Hvað vorum við að reikna? Þ.e. hvaða fall vorum við að heilda yfir hvaða svæði? ■

■ **Dæmi 3.5** Reiknum ítrekaða heildið

$$I = \int_0^1 \left(\int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3} dy \right) dx.$$

Það er mjög erfitt (ómögulegt) að reikna I með formúlunni beint, en með því að athuga að við erum að heilda fallið $f(x,y) = e^{y^3}$ yfir svæðið

$$\mathcal{D} := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \le x \le 1 \;\; \text{og} \;\; \sqrt{x} \le y \le 1 \} = \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \le y \le 1 \;\; \text{og} \;\; 0 \le x \le y^2 \}$$

að þá sjáum við að

$$I = \int_{\mathcal{D}} e^{y^3} dA = \int_0^1 \left(\int_0^{y^2} e^{y^3} dx \right) dy = \int_0^1 \left[xe^{y^3} \right]_{x=0}^{x=y^2} dy = \int_0^1 y^2 e^{y^3} dy = \left[\frac{1}{3} e^{y^3} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{e-1}{3}.$$

■

3.1.1 Tvöföld heildi með smá kænsku

Skoðum nokkur dæmi þar sem við getum beytt smá kænsku til að sleppa við mikla útreikninga í tvöföldum heildum. Við getum nýtt okkur að við þekkjum rúmmál ákveðinna hluta og einnig getur verið mjög gagnlegt að nýta sér það að sum föll eru oddstæð eða jafnstæð. Við skulum skoða dæmi.

■ **Dæmi 3.6** Reiknum

$$\iint_{\mathcal{D}} 3dA$$

þar sem $\mathcal{D} = [4,6] \times [2,9]$.

$$\iint_{\mathcal{D}} 3dA = 3\iint_{\mathcal{D}} dA = 3 \cdot \text{ flatarmál } \mathcal{D} = 3(6-4)(9-2) = 42$$

Við erum s.s. hér að finna rúmmálið af kassa með hliðarlengdir 2 og 7 og hæð 3. ■

Eins og í þessu dæmi er heildið sem við erum að finna stundum jafngilt rúmmáli hlutar sem við þekkjum. Við notuðum að þegar við heildum 1 yfir svæði $\mathcal{D}$ fáum við flatarmál svæðisins.

ATH Þegar við heildum 1 yfir svæðið $\mathcal{D}$ fáum við flatarmál svæðisins $\mathcal{D}$, s.s. er

$$\iint_{\mathcal{D}} dA = \text{flatarmál svæðisins } \mathcal{D}$$

Í næsta dæmi sjáum við hvert heildið er með því að sjá hvernig hlut við erum að heilda.

■ **Dæmi 3.7**

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{1-x^2-y^2}\, dA = \text{ rúmmál hálfrar kúlu } = \frac{2\pi}{3}$$

■

Ef við erum með oddstæð eða jafnstæð föll og svæðið $\mathcal{D}$ er samhverft er oft hægt að einfalda heildið töluvert

■ **Dæmi 3.8**

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \sin(x) + y^3 + 4\, dA = \iint_{x^2+y^2\leq 1} 4\, dA = 4\pi$$

Hér nýttum við okkur að fallið $f(x,y) = \sin(x)$ er oddstætt um planið $x = 0$ því $f(-x,y) = -f(x,y)$ og svæðið $x^2+y^2 \leq 1$ er samhverft um $x = 0$ svo við fáum

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} \sin(x)\, dA = 0$$

og við nýttum að fallið $g(x,y) = y^3$ er oddstætt um $y = 0$ því $g(x,-y) = -g(x,y)$ og svæðið $x^2+y^2 \leq 1$ er samhverft um $y = 0$ svo við fáum að

$$\iint_{x^2+y^2\leq 1} y^3\, dA = 0$$

■

Til að sjá betur fyrir sér hvað er að gerast í dæmi 3.8 er gott að teikna föllin og svæðið sem heildað er yfir t.d. í Matlab. Til þess er hægt að nota eftirfarandi keyrsluskrá.

Keyrsluskrá 1

```
% heilda sin(x) yfir hring
hold on
t=0:0.01:2*pi;
plot(cos(t),sin(t),'b') % afmarka svæðið sem heilda á yfir
[x y]= meshgrid(-1:0.01:1);
h1=surf(x,y,sin(x)); % teikna fallið sem á að heilda
set(h1,'FaceColor','magenta','FaceAlpha',0.5,'EdgeColor','none')
xlabel('x-ás'), ylabel('y-ás'), zlabel('z-ás')
title('z=sin(x) yfir hring')

% heilda y^3 yfir hring
figure(2)
hold on
t=0:0.01:2*pi;
plot(cos(t),sin(t),'b') % afmarka svæðið sem heilda á yfir
xlabel('x-ás'), ylabel('y-ás'), zlabel('z-ás')
title('z=y^3 yfir hring')
h2=surf(x,y,y.^3); % teikna fallið sem á að heilda
set(h2,'FaceColor','red','FaceAlpha',0.5,'EdgeColor','none')

% heilda 4 yfir hring, sem gefur sívalning
figure(3)
z4=0:0.1:4;
[z4,t]=meshgrid(z4,t);
h3=surf(cos(t),sin(t),z4);
xlabel('x-ás'), ylabel('y-ás'), zlabel('z-ás')
title('Sívalingur')
set(h3,'FaceColor','blue','FaceAlpha',0.5,'EdgeColor','none')
```

3.1.2 Meðalfallgildi

Við skilgreinum töluna

$$\overline{f} = \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dA$$

þar sem $\overline{f}$ er meðalgildi fallsins $f(x,y)$ á svæðinu $\mathcal{D}$. Talan A er flatarmál svæðisins $\mathcal{D}$, sem má finna með $\iint_{\mathcal{D}} dA$.

Dæmi 3.9 Til að finna x-hnit massamiðju $\mathcal{D}$ reiknum við

$$\overline{x} = \frac{1}{A}\iint_{\mathcal{D}} x\, dA$$

Látum nú

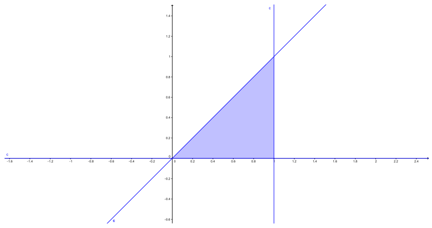
$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2 \le x \le 3 \text{ og } 1 \le y \le 4\}.$$

Við reiknum því

$$\overline{x} = \frac{1}{3}\int_1^4\int_2^3 x\, dx\, dy = \frac{1}{3}\int_1^4 \frac{5}{2}dy = \frac{5}{2}$$

■

Dæmi 3.10 Finnum meðalgildi fallsins $f(x,y) = x^2 + y^2$ yfir þríhyrning sem hefur hornpunktana $(0,0)$, $(1,0)$ og $(1,1)$.
Við reiknum nú



Mynd 3.3: Þríhyrningurinn afmarkast af línunum $y = x$, $y = 0$, $x = 0$ og $x = 1$. Við sjáum á myndinni að þríhyrningurinn hefur flatarmálið $1/2$.

$$
\begin{aligned}
\overline{f} =& \frac{1}{1/2} \iint_{\mathcal{D}} (x^2 + y^2)\, dA \\
=& 2 \int_0^1 \int_0^x (x^2 + y^2) dy\, dx \\
=& 2 \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^x dx \\
=& 2 \int_0^1 x^3 + \frac{x^3}{3}\, dx \\
=& 2 \int_0^1 \frac{4x^3}{3}\, dx = \frac{8}{3} \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

■

Æfingar 3.1

Æfing 3.1.1 Teiknið upp mynd af svæðunum:

a) $\mathcal{D}_1 := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4 \ \text{ og } x \geq 0 \ \text{ og } \ y \leq 0 \}$

b) $\mathcal{D}_2 := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ 2 \leq \sqrt{x^2 + y^2} \leq 5 \}$

c) $\mathcal{D}_3 := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \frac{x^2}{4} \leq y \leq x^2 \ \text{ og } 0 \leq x \leq 1 \}$

d) $\mathcal{D}_4 := \{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ f(x) \leq y \leq g(x) \ \text{ og } a \leq x \leq b \}$. Finnið föll $f(x)$ og $g(x)$ og fasta a og b þannig að $\mathcal{D}_4$ lýsi svæðinu innan þríhyrnings með hornpunkta $(0, 0)$, $(1, 1)$ og $(1, 3)$.

■

Æfing 3.1.2 Reiknið

$$\iint_{\mathcal{D}} 4x^3 e^{y^3}\, dA$$

Þar sem $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 \le y \le 1 \ \text{og} \ -1 \le x \le 0\}$$

Athugið að heildin sem upp koma hér á að reikna án þess að nota reiknivél. ■

Æfing 3.1.3 Reiknið

$$\int_{\mathcal{D}} 3 - \pi \sin(x) + y^2 dA$$

þar sem $\mathcal{D}$ er ferningslaga svæðið sem hefur hornpunktana $(-2,0)$, $(0,2)$, $(2,0)$ og $(0,-2)$. ■

Æfing 3.1.4 Gefið er mengið $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le x^2 \ \text{og} \ 0 \le x \le 2\}$$

Setjið rétt mörk á seinni tvö heildin hér fyrir neðan, þar sem heildunarröðinni hefur verið breytt.

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y) dA = \int \int f(x,y) dy dx = \int \int f(x,y) dx dy.$$

■

Æfing 3.1.5 Flatartregðuvægi (e. moment of inertia) yfir svæði $\mathcal{D}$ m.t.t. y er gefið sem

$$I_y = \int_{\mathcal{D}} x^2 dA,$$

Finnið I_y fyrir svæðið $\mathcal{D}$ er sá hluti svæðisins $y \le 2(1 - \frac{x^2}{4})$ sem liggur í 1. fjórðungi. ■

Æfing 3.1.6 Reiknið meðalfallgildi fallsins $f(x,y) = x^2 + y^2$ yfir svæðið $\mathcal{D}$, sem er þríhyrningur með hornpunkta í $(0,0)$, $(0,a)$ og $(a,0)$ þar sem $a > 0$ er fasti. ■

Æfing 3.1.7 Reiknið heildið

$$\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}(1+y^2) dx\, dy$$

Ábending: Hér getur verið góð hugmynd að breyta mörkunum þannig að heildað er fyrst m.t.t. y. ■

3.2 Óeiginleg heildi í 2-víddum

Rifjum upp hvernig við reiknum óeiginleg heildi í einni vídd eins og

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0+} [2\sqrt{x}]_c^1 = \lim_{c\to 0+} (2 - 2\sqrt{c}) = 2$$

eða

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to+\infty} \int_1^c \frac{dx}{x^2} = \lim_{c\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^c = \lim_{c\to+\infty} \left(-\frac{1}{c} - (-1)\right) = 1.$$

Við getum líka reiknað heildi

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA$$

með ítrekun, þar sem óeiginleg heildi koma fram í ítrekuðu heildunum, ef $f(x,y) \geq 0$ fyrir öll $(x\ y)^T$ á heildunarsvæðinu. Ef f tekur bæði pósitív og negatív gildi verður

$$\int_{\mathcal{D}} |f(x,y)|dA < +\infty$$

að gilda, ef við ætlum að nota ítrekun, og maður talar um *alsamleitin heildi*. Við skoðum nokkur dæmi.

■ **Dæmi 3.11** Heildum $f(x,y) = e^{-x^2}$ yfir svæðið

$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \ \text{ og } \ -x \leq y \leq x\}.$$

Nú er $f(x,y) \geq 0$ fyrir öll $(x\ y)^T \in \mathcal{D}$ svo við getum notað ítrekaða heildun:

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA &= \int_0^{+\infty} \left(\int_{-x}^{x} e^{-x^2} dy\right) dx = \int_0^{+\infty} \left[ye^{-x^2}\right]_{y=-x}^{x} dx = \int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx \\ &= \lim_{c\to+\infty} \int_0^c 2xe^{-x^2} dx = \lim_{c\to+\infty} \left[-e^{-x^2}\right]_{x=0}^{x=c} = \lim_{c\to+\infty} \left(-e^{-c^2} - (-1)\right) = 1\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 3.12** Heildum $f(x,y) = 1/(x\cdot y)$ yfir takmarkaða svæðið í planinu sem lokast á milli $y = x$ og $y = x^2$. Með

$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1 \ \text{ og } \ x^2 \leq y \leq x\}$$

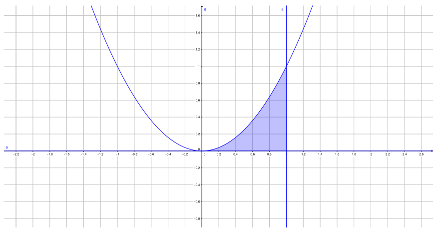
reiknum við (ath. $f(x,y) \geq 0$ á heildunarsvæðinu)

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} \frac{dA}{xy} &= \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\int_{x^2}^{x} \frac{1}{y}dy\right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x} [\ln(y)]_{y=x^2}^{y=x} dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\left(\ln(x) - \ln(x^2)\right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{-\ln(x)}{x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{-t}{e^{-t}}(-e^{-t})dt = \int_0^{+\infty} t dt = +\infty,\end{aligned}$$

þar sem við notuðum breytuskiptin $x = e^{-t} \Leftrightarrow t = -\ln(x)$ í lokin. ■

■ **Dæmi 3.13** Heildum $f(x,y) = \dfrac{1}{(x+y)^2}$ yfir svæðið

$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \leq x \leq 1 \ \text{ og } \ 0 \leq y \leq x^2\}$$



Mynd 3.4: Svæðið $\mathcal{D}$.

Nú er heildið

$$\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x+y)^2} dA$$

óeiginlegt því $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \infty$. Við reiknum nú

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} \frac{1}{(x+y)^2} dA &= \int_0^1 \left(\int_0^{x^2} \frac{1}{(x+y)^2} dy \right) dx \\ = \int_0^1 \left[-\frac{1}{x+y} \right]_0^{x^2} dx &= \int_0^1 -\frac{1}{x+x^2} + \frac{1}{x} dx \\ = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx &= [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2)\end{aligned}$$

■

Æfingar 3.2

Æfing 3.2.1 Reiknið

$$\int_{\mathcal{T}} \frac{1}{x^2} dA,$$

þar sem $\mathcal{T}$ er (ótakmarkaða) svæðið $x \leq y \leq x+1$ og $x \geq 1$ (teiknið mynd af svæðinu).

■

3.3 2-víð heildi í pólhnitum

Við viljum reikna rúmmál hálfkúlu (í $\mathbb{R}^3$) með geisla $R > 0$. Kúla í $\mathbb{R}^3$ með geisla $R > 0$ og miðju í $(0,0,0)$ er safn allra punkta $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sem uppfylla jöfnuna

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$$

og hálfkúlu má þá lýsa með því að krefjast að auki að $z \geq 0$.

Rúmmálið getum við reiknað með því að heilda fallið

$$f(x,y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \quad \text{yfir mengið} \quad \mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

og ítrekaða heildið sem kemur upp er

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA = \int_{-R}^{R} \left(\int_{-\sqrt{R^2-y^2}}^{\sqrt{R^2-y^2}} \sqrt{R^2-x^2-y^2}\, dx \right) dy$$

og við erum í vandræðum, því þetta heildi er illviðráðanlegt.

Stundum, sérstaklega ef vandamálið sem á að leysa hefur einhverja samhverfu, er betra að skipta um hnitakerfi, þ.e. lýsa staðsetningu punkta í planinu á annann hátt en að gefa upp x- og y-hnit þeirra.

Við vitum að þegar við vinnum með tvinntölur er stundum sniðugt að rita $w = x + iy$ á pólformi $w = re^{i\theta}$, t.d. af því að það er miklu auðveldara að leysa jöfnur af gerðinni $z^n = w$ ef w er á pólformi. Þegar við settum tvinntölu $w = x + iy$ á pólform þá notuðum við jöfnurnar

$$r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \text{og} \quad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \left(\text{eða} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}\right)$$

til þess að ákvarða r og θ. Í hnitakerfisskiptum fyrir heildun (og marga aðra hluti) er mun gagnlegra að nota formúlurnar $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$ (sem er líka yfirleitt þægilegra).

Ef við lýsum staðsetningu punkts P í planinu með því að gefa upp x- og y-hnit hans, þá erum við að nota **kartesísk hnit** (e. Cartesian coordinates).

Ef við lýsum staðsetningu punkts P í planinu með því að gefa upp fjarlægð hans r frá núllpunkti og hornið θ sem stöðuvektor hans myndar við pósitíva x-ásinn, þá erum við að nota **pólhnit**.

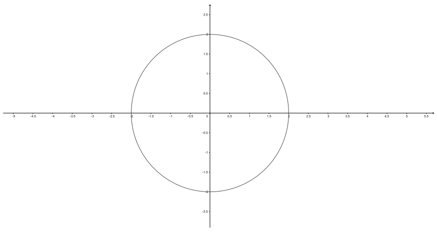
Sambandið á milli kartesískra hnita og pólhnita er

$$x = r\cos\theta \quad \text{og} \quad y = r\sin\theta$$

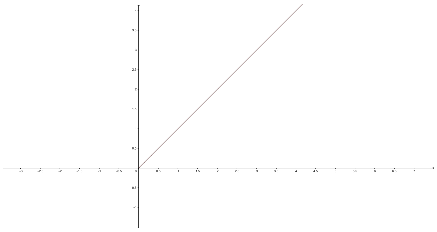
þar sem $\theta \in [0, 2\pi]$.

■ **Dæmi 3.14** Skoðum nokkra ferla og svæði í kartesískum hnitum og pólhnitum:

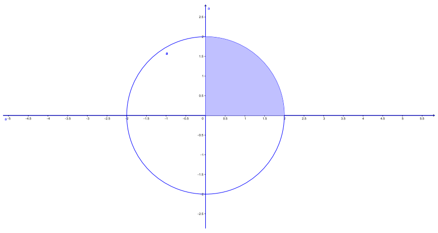
a) Hvernig lítur línan sem gefin er með $r = 2$ í pólhnitum út í kartesískum hnitum?
b) Hvernig lítur línan sem gefin er með $\theta = \pi/4$ í pólhnitum út í kartesískum hnitum?
c) Hvernig lítur svæðið sem gefið er með $r \leq 2$ og $0 \leq \theta \leq \pi/2$ í pólhnitum út í kartesískum hnitum?
d) Hvernig lítur svæðið sem gefið er með $x^2 + y^2 \leq 4$ í kartesískum hnitum út í pólhnitum?



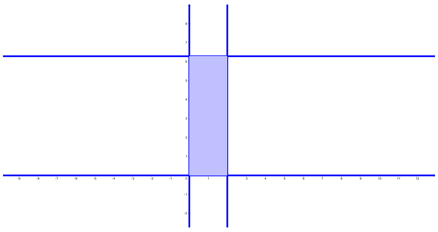
(a) Línan $r = 2$ í pólhnitum teiknuð í xy-planið.



(b) Línan $\theta = \pi/4$ í pólhnitum teiknuð í xy-planið.



(c) Svæðið $0 \leq \theta \leq \pi/2$ og $r \leq 2$ í pólhnitum teiknað í xy-planið.



(d) Svæðið $x^2 + y^2 \leq 4$ í kartesískum hnitum teiknað í $r\theta$-planið.

■

Snúum okkur aftur að því að reikna rúmmál hálfkúlu. Formúla fallsins $f(x, y) = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ í pólhnitum fæst á einfaldann hátt með því að athuga að $x = r\cos\theta$ og $y = r\sin\theta$:

$$f(x, y) = f(x(r, \theta), y(r, \theta)) = f(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sqrt{R^2 - [r\cos\theta]^2 - [r\sin\theta]^2} = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

Svæðið $\mathcal{D}$ sem heilda á yfir var gefið sem

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \; : \; x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

í kartesískum hnitum. Í pólhnitum er lýsing þessa svæðis

$$[x(r, \theta)]^2 + [y(r, \theta)]^2 = [r\cos\theta]^2 + [r\sin\theta]^2 = r^2 \leq R^2,$$

þ.e. $r \leq R$. Við erum þar með búin að sýna að

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y) dA = \int_{r \leq R} \sqrt{R^2 - r^2} dA.$$

Nú væri freistandi að setja $dA = dr d\theta$, alveg eins og við setjum $dA = dx dy$ í kartesískum hnitum, og nota ítrekaða heildun til þess að reikna rúmmálið. En hér vorum við að gera breytuskipti og því þarf að huga að því einnig í dA. Það kemur í ljós að $dA = dx dy = r dr d\theta$.

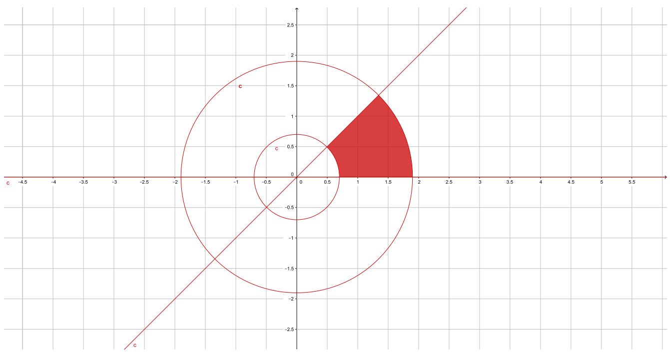
> Þegar við heildum yfir svæði $\mathcal{D}$ í kartesískum hnitum er $dA = dx dy$, en í pólhnitum er $dA = r dr d\theta$.

Nú verður heildið

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA &= \int_{r\leq R}\sqrt{R^2-r^2}dA = \int_{r\leq R}\sqrt{R^2-r^2}\,rdrd\theta\\ &= \int_0^{2\pi}\left(\int_0^R \sqrt{R^2-r^2}\,rdr\right)d\theta\\ &= 2\pi\left[\frac{-(R^2-r^2)^{\frac{3}{2}}}{3}\right]_{r=0}^{r=R}\\ &= \frac{2\pi}{3}R^3.\end{aligned}$$

■ **Dæmi 3.15** Skilgreinum $\mathcal{R}$ sem svæðið

$$\mathcal{R} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ a^2\leq x^2+y^2\leq b^2 \textbf{ og } y\leq x \textbf{ og } y\geq 0\}.$$



Mynd 3.6: Svæðið $\mathcal{R}$.

Reiknum nú heildið

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{R}}\frac{y^2}{x^2}dA &= \int_a^b\left(\int_0^{\pi/4}\tan^2\theta\ d\theta\right)rdr\\ &= \int_a^b\left([\tan\theta-\theta]_0^{\pi/4}\right)rdr\\ &= (1-\frac{\pi}{4})\int_a^b rdr = (1-\frac{\pi}{4})\left[\frac{r^2}{2}\right]_a^b\\ &= \frac{1}{2}(b^2-a^2)(1-\frac{\pi}{4}) = \frac{4-\pi}{8}(b^2-a^2)\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 3.16** Sýnum að

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}.$$

Við notfærum okkur nú að við höfum lært að reikna 2-víð heildi í pólhnitum.

$$\begin{aligned}
I^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dA \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr\right) \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{r\to\infty} = \pi
\end{aligned}$$

Og þar sem $I^2 = \pi$ höfum við að $I = \sqrt{\pi}$. ■

■ **Dæmi 3.17** Finnum nú rúmmál þess hluta sívalningsins $x^2 + y^2 = a^2$ sem er í 1. áttungi (þ.s. $x \geq 0, y \geq 0$ og $z \geq 0$) og undir planinu $z = y$. Við gerum þetta með því að heilda fallið $z = y$ yfir svæðið $\mathcal{D}$ sem er fjórðungur úr hringskífu. Þessu svæði er auðvelt að lýsa í pólhnitum, svo við skiptum um hnitakerfi. Við setjum $x = r\cos(\theta)$ og $y = r\sin(\theta)$. Þá er fallið okkar $f(r,\theta) = r\sin(\theta)$ og svæðið okkar afmarkast af $0 \leq r \leq a$ og $0 \leq \theta \leq \pi/2$.

$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} f(x,y) dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^a r\sin(\theta) r dr\, d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \int_0^a r^2 \sin(\theta) dr\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sin(\theta) \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^a d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2} \sin(\theta)\frac{a^3}{3} d\theta = \frac{a^3}{3}\left[-\cos(\theta)\right]_0^{\pi/2} = \frac{a^3}{3}
\end{aligned}$$

Sama heildi í kartesískum hnitum er

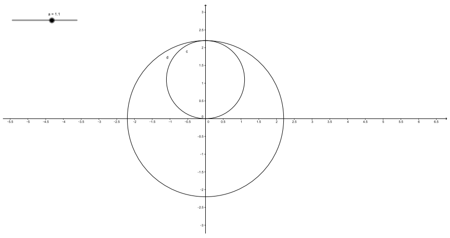
$$\begin{aligned}
\iint_{\mathcal{D}} f(x,y) dA &= \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} y\, dy dx \\
&= \int_0^a \frac{a^2-x^2}{2} dx = \frac{1}{2}\left[a^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{a^3} = \frac{a^3}{3}
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 3.18** Finnum rúmmál þess rúmskika sem er inní kúlunni $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ og inní sívalningnum $x^2 + y^2 = 2ay$, $a > 0$, s.s. rúmmálið sem er inní þeim báðum.

Við getum umskrifað jöfnu sívalningsins í $x^2 + (y-a)^2 = a^2$, og sjáum þá að hann hefur radíus a og miðju í $(0, a)$. Við erum með jafn mikið rúmmál beggja vegna við xy-planið og beggja vegna um yz-planið, svo við getum látið nægja að finna rúmmál þess hluta sem er í 1. áttungi (þar sem $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$) og margfaldað það með 4.

Við ætlum því að heilda jöfnu kúlunnar á þessu svæði, s.s. $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ yfir svæðið $\mathcal{D}$ sem sést á myndinni hér fyrir neðan. Við getum skipt í pólhnit, $x = r\cos(\theta)$ og $y = r\sin(\theta)$ og kúlan er þá $z = \sqrt{4a^2 - r^2}$. Svæðið sem við heildum yfir er



Mynd 3.7: Á myndinni sjáum við skurðferla kúlunnar og sívalningsins við xy planið.

$x^2 + y^2 = 2ay$ sem í pólhnitum verður $r^2 = 2ar\sin(\theta)$ svo $r = 2a\sin(\theta)$, sem gefur þá radíus sívalningsins í pólhnitum. Við heildum því

$$\begin{aligned}
&4 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{2a\sin(\theta)} \sqrt{4a^2 - r^2} \cdot r \; dr \; d\theta \\
&= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \left[\frac{-(4a^2 - r^2)^{3/2}}{3} \right]_{r=0}^{r=2a\sin(\theta)} \; d\theta \\
&= \frac{16}{9} a^3 (3\pi - 4)
\end{aligned}$$

■

Æfingar 3.3

Æfing 3.3.1 Reiknið meðalfallgildi fallsins $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ yfir svæðið

$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2 + y^2 \leq 3 \ og \ \ x + y \leq 0\}$$

■

Æfing 3.3.2 Flatartregðuvægi (e. moment of inertia) yfir svæði $\mathcal{D}$ m.t.t. y er gefið sem

$$I_y = \int_{\mathcal{D}} x^2 dA,$$

Finnið I_y fyrir svæðið

$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9 \ \text{ og } \ x \leq 0 \text{ og } \ y \geq 0\}.$$

■

Æfing 3.3.3 Finnið rúmmál þess hlutar sem er bæði inní kúlunni $x^2 + y^2 + z^2 = 9a^2$ og inní sívalningnum $x^2 + y^2 = 2ax$, þ.s. $a > 0$. Notið pólhnit. ■

Æfing 3.3.4 Skoðum eftirfarandi svæði í $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 \leq 5 \quad \text{og } x \geq 0\}$$

a) Teiknið mynd af svæðinu $\mathcal{D}$ og stikið feril sem umlykur svæðið, annað hvort réttsælis eða rangsælis (tilgreinið áttunina á myndinni).
b) Heildið fallið

$$f(x,y) = x + yx^2$$

yfir svæðið $\mathcal{D}$ (án þess að nota reiknivél).

■

3.4 Hnitakerfaskipti í 2-víðum heildum almennt

Almenna formúlan, þegar skipt er í heildi úr kartesískum hnitum x og y yfir í annað hnitakerfi u og v reiknast á eftirfarandi hátt (samskonar gildir fyrir hærri víddir):

1. Skilgreinum fallið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{F}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}.$$

2. Reiknum heildarafleiðu $\mathbf{F}$, þ.e. Jacobi-fylkið $D\mathbf{F}(u,v)$, og athugum að það er 2×2 fylki.

3. Reiknum ákveðu Jacobi-fylkisins

$$\det(D\mathbf{F}(u,v)) \quad \left(\text{oft táknað } \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \text{ og kallað Jacobi-ákveða hnitakerfaskiptanna.}\right)$$

4. Nú er

$$dxdy = |\det(D\mathbf{F}(u,v))|\, dudv = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| dudv$$

Prófum þessa aðferð á hnitakerfaskipti yfir í pólhnit:

1. Skilgreinum fallið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$\mathbf{F}(r,\theta) = \begin{pmatrix} x(r,\theta) \\ y(r,\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$

2. Reiknum heildarafleiðu $\mathbf{F}$,

$$D\mathbf{F}(r,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r\cos\theta & \frac{\partial}{\partial \theta} r\cos\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} r\sin\theta & \frac{\partial}{\partial \theta} r\sin\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}.$$

3. Reiknum ákveðu Jacobi-fylkisins

$$\det(D\mathbf{F}(r,\theta)) = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

4. Nú er

$$dxdy = |\det(D\mathbf{F}(r,\theta))|\, drd\theta = rdrd\theta.$$

Athugið að við erum nú komin með almenna formúlu fyrir hvaða hnitakerfaskipti sem er, jafnvel í hærri víddum.

> Fyrir hnitakerfaskipti úr xy-hnitum yfir í uv-hnit er almennt
>
> $$dA = dxdy = |\det(D\mathbf{F}(u,v))|\, dudv$$
>
> þar sem hnitakerfaskiptin eru gefin með fallinu $\mathbf{F}(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \end{pmatrix}$.

■ **Dæmi 3.19** Heildum fallið $f(x,y) = y$ yfir svæðið

$$\mathcal{D} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \geq 0 \text{ og } y \geq 0 \text{ og } x^2 + y^2 \leq a^2\},$$

þar sem $a > 0$ er einhver fasti, með því að nota pólhnit.

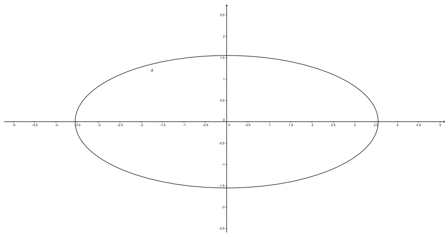
Fallið f hefur formúluna $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = r\sin\theta$ í pólhnitum og svæðinu $\mathcal{D}$ má lýsa með

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \text{ og } r \leq a.$$

Þá er

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y)dA = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^a r\sin\theta \cdot rdr\right) d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \left[\frac{1}{3}r^3\right]_{r=0}^{r=a} d\theta = \frac{1}{3}a^3 \left[-\cos\theta\right]_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}a^3.$$

■



Mynd 3.8: Svæðið E sem við viljum finna flatarmálið af.

■ **Dæmi 3.20** Við viljum finna flatarmál sporbaugslaga flatarins $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$. Við getum gert þetta með því að heilda 1 yfir flötinn, sem við skulum kalla E,

$$\text{Flatarmál E} = \iint_E dA$$

Við getum gert þetta í Kartesískum hnitum með því að umskrifa jöfnuna í $y = \pm\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}$ og reikna

$$\iint_E dA = \int_{-a}^{a} \int_{-\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}}^{\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}} dy\, dx = \int_{-a}^{a} 2\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}\, dx = ab\pi$$

Önnur leið væri að skipta um hnitakerfi og gera breytuskiptin $x = au$ og $y = bv$. Þá verður jafna sporbaugsins í nýja uv-hnitakerfinu $\frac{(au)^2}{a^2} + \frac{(bv)^2}{b^2} \leq 1$ sem er jafngilt $u^2 + v^2 \leq 1$. Við skoðum nú dA og fáum

$$dA = |\det(D\mathbf{F}(u,v))|\, dudv = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{vmatrix} = ab\, dudv$$

Við höfum s.s.

$$\iint_E dA = \iint_{u^2+v^2\leq 1} ab\, dudv = ab\pi$$

og athugið að þar sem við þekkjum flatarmál hrings með radíus 1, þá þurfum við ekki að heilda. ■