## 3.5 Lausnir á völdum dæmum

**Æfing 3.1.1**

Teiknið upp mynd af svæðunum:

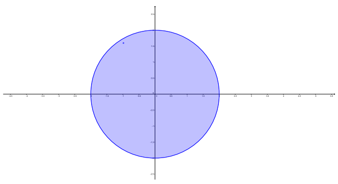
a) $\mathcal{D}_1 := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; x^2+y^2 \leq 4 \;\text{ og } x \geq 0 \;\text{ og }\; y \leq 0\}$

b) $\mathcal{D}_2 := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; 2 \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq 5\}$

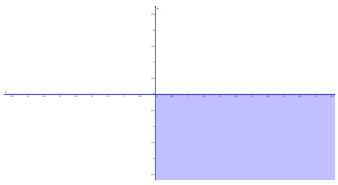
c) $\mathcal{D}_3 := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; \frac{x^2}{4} \leq y \leq x^2 \;\text{ og } 0 \leq x \leq 1\}$

d) $\mathcal{D}_4 := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;:\; f(x) \leq y \leq g(x) \;\text{ og } a \leq x \leq b\}$. Finnið föll $f(x)$ og $g(x)$ og fasta $a$ og $b$ þannig að $\mathcal{D}_4$ lýsi svæðinu innan þríhyrnings með hornpunkta $(0,0)$, $(1,1)$ og $(1,3)$.

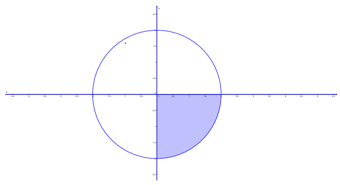
■ **Lausn** Hér fyrir neðan má sjá svæðin teiknuð upp, hver lína er einn liður. Athugið að sum svæðin eru ótakmörkuð, t.d. svæðið $x \geq 0$ og $y \leq 0$ sem er allur fjórði fjórðungur.



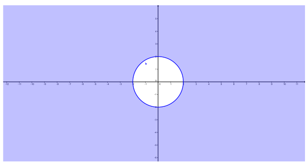
$x^2+y^2 \leq 4$



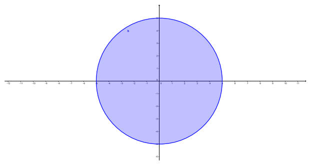
$x \geq 0$ og $y \leq 0$



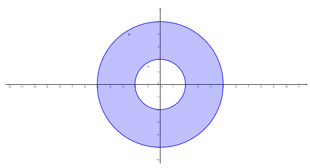
Svæðið $\mathcal{D}_1$



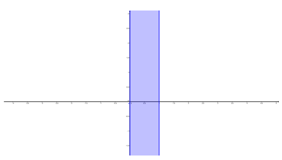
$2 \leq \sqrt{x^2+y^2}$



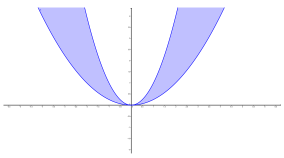
$5 \geq \sqrt{x^2+y^2}$



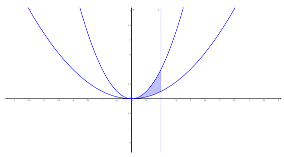
Svæðið $\mathcal{D}_2$



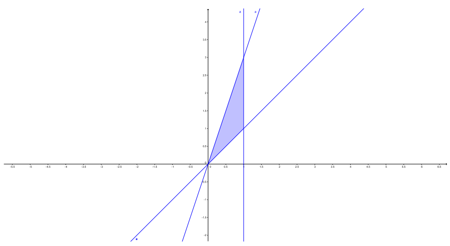
$0 \leq x \leq 1$



$\frac{x^2}{4} \leq y \leq x^2$



Svæðið $\mathcal{D}_3$.



Mynd 3.12: Svæðið $\mathcal{D}_4$ sem afmarkast af $x \leq y \leq 3x$ og $0 \leq x \leq 1$.

**Æfing 3.1.2** Reiknið

$$\iint_{\mathcal{D}} 4x^3 e^{y^3} dA$$

Þar sem $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \ x^2 \leq y \leq 1 \ \text{ og } \ -1 \leq x \leq 0\}$$

Athugið að heildin sem upp koma hér á að reikna án þess að nota reiknivél.

■ **Lausn** Ómögulegt er að heilda fallið $4x^3 e^{y^3}$ m.t.t. $y$, svo við byrjum á að breyta mörkunum á svæðinu okkar í

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \ -\sqrt{y} \leq x \leq 0 \ \text{ og } 0 \leq y \leq 1\}$$

Við getum núna sett upp heildið og reiknað

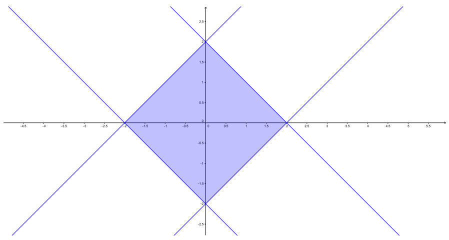
$$\int_0^1 \int_{-\sqrt{y}}^0 4x^3 e^{y^3} dx\, dy = \int_0^1 \left[x^4 e^{y^3}\right]_{-\sqrt{y}}^0 dy = \int_0^1 -y^2 e^{y^3} dy = \left[-\frac{1}{3} e^{y^3}\right]_0^1 = -\frac{1}{3}(e-1)$$

---

**Æfing 3.1.3** Reiknið

$$\int_{\mathcal{D}} 3 - \pi \sin(x) + y^2 dA$$

þar sem $\mathcal{D}$ er ferningslaga svæðið sem hefur hornpunktana $(-2, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ og $(0, -2)$.



Mynd 3.13: Ferningslaga svæðið afmarkast af línunum $y = 2 - x$, $y = 2 + x$, $y = -2 - x$ og $y = -2 + x$. Ferhyrningurinn hefur flatarmálið $8$.

■ **Lausn** Við heildum lið fyrir lið. Fyrsta heildið er einfaldlega $3$ sinnum flatarmál svæðisins sem heildað er yfir.

$$\int_{\mathcal{D}} 3 dA = 3 \cdot 8 = 24$$

Annað heildið er

$$\int_{\mathcal{D}} \pi \sin(x) dA = 0$$

því $\sin(x)$ er oddstætt um $x = 0$ og svæðið $\mathcal{D}$ er samhverft um $x = 0$.

Í þriðja heildinu látum við nægja að heilda yfir $E$, sem er sá hluti ferhyrningsins $\mathcal{D}$ sem er í fyrsta fjórðungi, vegna þess að fallið $f(x,y,z) = y^2$ er jafnstætt um $x = 0$ og $y = 0$. Við fáum s.s.

$$\int_{\mathcal{D}} y^2 dA = 4\int_E y^2 dA = 4\int_0^2 \int_0^{2-x} y^2 dy dx = \frac{16}{3}$$

Samantekið höfum við

$$\int_{\mathcal{D}} 3 - \pi\sin(x) + y^2 dA = 24 + 0 + \frac{16}{3} = \frac{88}{3} \approx 29.3$$

Sama niðurstaða hefði fengist með því að setja upp heildið

$$\int_0^2 \int_{x-2}^{2-x} 3 - \pi\sin(x) + y^2 dy dx + \int_{-2}^0 \int_{-x-2}^{2+x} 3 - \pi\sin(x) + y^2 dy dx$$

en hver væri gleðin í því...?

---

**Æfing 3.1.4** Gefið er mengið $\mathcal{D}$

$$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le x^2 \text{ og } 0 \le x \le 2\}$$

Setjið rétt mörk á seinni tvö heildin hér fyrir neðan, þar sem heildunarröðinni hefur verið breytt.

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dA = \int\int f(x,y)dydx = \int\int f(x,y)dxdy.$$

■ **Lausn**

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dA = \int_0^2 \int_0^{x^2} f(x,y)dydx = \int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dxdy$$

---

**Æfing 3.1.5** Flatartregðuvægi (e. moment of inertia) yfir svæði $\mathcal{D}$ m.t.t. $y$ er gefið sem

$$I_y = \int_{\mathcal{D}} x^2 dA,$$

Finnið $I_y$ fyrir svæðið $\mathcal{D}$ er sá hluti svæðisins $y \le 2(1 - \frac{x^2}{4})$ sem liggur í 1. fjórðungi.

■ **Lausn** Við setjum upp heildið

$$I_y = \int_0^2 \int_0^{2(1-\frac{x^2}{4})} x^2 dy\, dx = \ldots = \frac{32}{15}$$

---

**Æfing 3.1.6** Reiknið meðalfallgildi fallsins $f(x,y) = x^2 + y^2$ yfir svæðið $\mathcal{D}$, sem er þríhyrningur með hornpunkta í $(0,0)$, $(0,a)$ og $(a,0)$ þar sem $a > 0$ er fasti.

■ **Lausn** Svæðið $\mathcal{D}$ er þríhyrningur með flatarmál $a^2/2$. Þríhyrningurinn $\mathcal{D}$ afmarkast af $0 \leq x \leq a$ og $0 \leq y \leq a-x$, þ.s. $a > 0$. Við setjum upp heildið

$$\begin{aligned}
\frac{2}{a^2}\int_0^a\int_0^{a-x} x^2+y^2\;dy\;dx =& \frac{2}{a^2}\int_0^a \left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{a-x} dx \\
=& \frac{2}{a^2}\int_0^a x^2(a-x)+\frac{(a-x)^3}{3}\;dx \\
=& \frac{2}{a^2}\left[\frac{ax^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{(a-x)^4}{12}\right]_0^a dx \\
=& \frac{2}{a^2}\left[\frac{a^4}{3}-\frac{a^4}{4}+\frac{(a)^4}{12}\right]_0^a dx \\
=& \frac{a^2}{3}
\end{aligned}$$

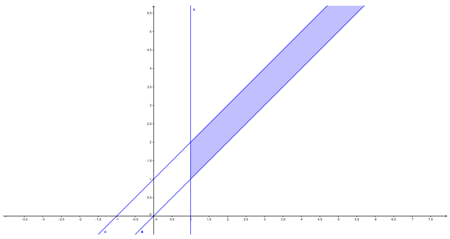
---

**Æfing 3.2.1** Reiknið

$$\int_{\mathcal{T}} \frac{1}{x^2} dA,$$

þar sem $\mathcal{T}$ er (ótakmarkaða) svæðið $x \leq y \leq x+1$ og $x \geq 1$ (teiknið mynd af svæðinu).

■ **Lausn** Svæðið sem við heildum yfir sést á myndinni hér fyrir neðan



Mynd 3.14: Ótakmarkaða svæðið $x \leq y \leq x+1$ og $x \geq 1$.

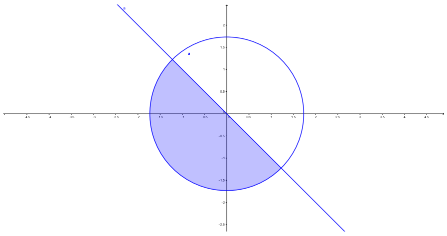
$$\begin{aligned}
\int_1^\infty\int_x^{x+1}\frac{1}{x^2}dy\;dx &= \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\int_x^{x+1} dy\;dx \\
&= \int_1^\infty \frac{1}{x^2}(x+1-x)dx \\
&= \left[-\frac{1}{x}\right]_1^\infty \\
&= \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x}-(-1) = 1
\end{aligned}$$

---

**Æfing 3.3.1** Reiknið meðalfallgildi fallsins $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ yfir svæðið

$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 \leq 3 \ og \ \ x+y \leq 0\}$$

■ **Lausn** Svæðið sem við heildum yfir sést á myndinni hér fyrir neðan



Mynd 3.15: Við heildum yfir hálfan hring með radíus $\sqrt{3}$, flatarmál svæðisins er $3\pi/2$.

Flatarmál svæðisins $\mathcal{D}$ er $A = 3\pi/2$, svo meðlfallgildið er

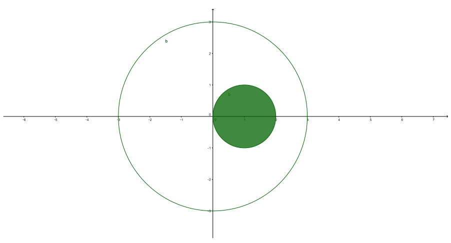
$$\frac{1}{A}\int_{\mathcal{D}} e^{-(x^2+y^2)}dA = \frac{2}{3\pi}\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{7\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{3}} e^{-r^2} r dr d\theta = \frac{2}{3\pi}(\frac{7\pi}{4} - \frac{3\pi}{4})\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{1-e^{-3}}{3}$$

---

**Æfing 3.3.3** Finnið rúmmál þess hlutar sem er bæði inní kúlunni $x^2+y^2+z^2 = 9a^2$ og inní sívalningnum $x^2+y^2 = 2ax$, þ.s. $a > 0$. Notið pólhnit.

■ **Lausn** Við skiptum í pólhnit, þá verður kúlan okkar $z = \sqrt{9a^2 - r^2}$ og sívalningurinn er $r^2 = 2ar\cos(\theta)$, svo við höfum $r = 2a\cos(\theta)$. Við nýtum okkur að svæðið er samhverft um $y = 0$, og um $z = 0$ og getum því látið nægja að finna rúmmál þess hluta sem er í $z \geq 0$, $x \geq 0$ og $y \geq 0$ og margfalda með 4.

$$\iint_{\mathcal{D}} \sqrt{9a^2 - r^2} dA = 4\int_0^{\pi/2}\int_0^{2a\cos(\theta)} \sqrt{9a^2 - r^2} r \ dr \ d\theta = 17.164a^3$$



Mynd 3.16: Skoðum mynd af kúlunni og sívalningun þegar $z = 0$, s.s. í $xy$-planinu.

---

**Æfing 3.3.4** Skoðum eftirfarandi svæði í $\mathbb{R}^2$

$$\mathcal{D} := \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad : \quad x^2 + y^2 \leq 5 \quad \text{og } x \geq 0\}$$

a) Teiknið mynd af svæðinu $\mathcal{D}$ og stikið feril sem umlykur svæðið, annað hvort réttsælis eða rangsælis (tilgreinið áttunina á myndinni).
b) Heildið fallið
$$f(x, y) = x + yx^2$$
yfir svæðið $\mathcal{D}$ (án þess að nota reiknivél).

■ **Lausn** Stika fyrst hálfhringinn með

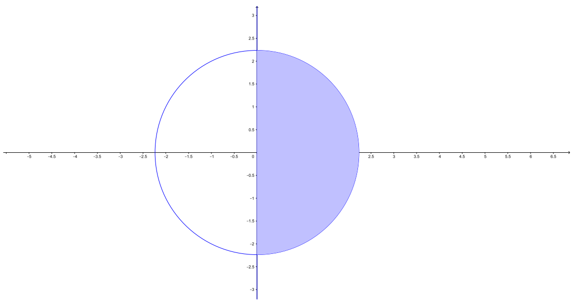
$$\mathbf{r}_1 : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2, \mathbf{r}_1(t) = \begin{pmatrix} \sqrt{5}\cos(t) \\ \sqrt{5}\sin(t) \end{pmatrix}$$

og lína frá $\mathbf{x}$ til $\mathbf{y}$ er almennt stikuð með $\mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{x})t$ svo línan frá $(0, \sqrt{5})$ til $(0, -\sqrt{5})$ er stikuð með

$$\mathbf{r}_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}^2, \mathbf{r}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{5} - 2\sqrt{5}t \end{pmatrix}$$

Við setjum þetta nú saman í einn feril sem er stikaður rangsælis með

$$\mathbf{r} : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1] \to \mathbb{R}^2, \mathbf{r}(t) = \begin{cases} \mathbf{r}_1(t), & \text{fyrir } t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \mathbf{r}_2(t - \pi/2), & \text{fyrir } t \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1]. \end{cases}$$



Mynd 3.17: Svæðið $\mathcal{D}$.

Nú er svæðið sem við heildum yfir samhverft um $y = 0$ og fallið $g(x, y) = yx^2$ er oddstætt um $y = 0$, svo heildið af þeim hluta verður $0$. Við skiptum í pólhnit og fáum heildið

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{D}} x dA &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{5}} r\cos(\theta)\, r dr d\theta \\ &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(\theta) d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{5}} r^2 dr \\ &= [\sin(\theta)]_{-\pi/2}^{\pi/2} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2 \cdot 5^{3/2}}{3} \end{aligned}$$