Skiladæmi 10 - Stærðfræði 2

Munið að rökstyðja öll svör og sýna alla útreikninga.

Dæmi 1. Við skoðum runu $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sem er skilgreind með

$$a_1 = \frac{3}{2} \qquad\qquad a_{n+1} = 3 - \frac{2}{a_n}$$

Sýnið að runan sé samleitin og finnið markgildi hennar.

Lausn: Sýnum að runan sé samleitin með því að sýna með þrepun að hún sé (1) takmörkuð að ofan og (2) vaxandi.

(1) Sýnum að $a_n \leq 3$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Sjáum fyrst að $a_1 < 3$. Ef við gerum ráð fyrir að $a_k < 3$ fáum við

$$a_{k+1} = 3 - \frac{2}{a_k} \leq 3 - \frac{2}{3} \leq 4$$

þar sem við nýttum okkur þrepunarforsendu í skrefi 2. Svo $a_n \leq 3$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$.

(2) Sýnum að runan sé vaxandi, þ.e. að $a_{n+1} \geq a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$. Í fyrsta lagi sjáum við að $a_2 = 3 - 4/3 = 5/3 > a_1$. G.r.f. að $a_{n+1} \geq a_n$ og sýnum að þá er $a_{n+2} \geq a_{n+1}$. Reiknum

$$a_{n+2} = 3 - \frac{2}{a_{n+1}} \geq 3 - \frac{2}{a_n} = a_{n+1}$$

svo við höfum að $a_{n+1} \geq a_n$ fyrir öll $n \in \mathbb{N}$, þ.e. runan er vaxandi.

Nú vitum við að markgildið er til og skulum finna það. Gerum ráð fyrir að $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ (hér gerum við ráð fyrir að markgildið sé til, sem við erum enda búin að sýna). Þá gildir að

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{2}{a_{n-1}}\right) = 3 - \frac{2}{L}$$

Við fáum því jöfnuna $L = 3 - \dfrac{2}{L}$ sem hefur lausnir $L = 1$ og $L = 2$. Runan byrjar í $3/2$ og vex eftir það, svo eina mögulega markgildið er $L = 2$.

Dæmi 2. Eru eftirfarandi raðir samleitnar eða ósamleitnar:

a)

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4n^2 - n^3}{10 + 2n^3}$$

b)

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1}$$

Lausn: a) Reiknum

$$\lim_{n\to\infty} \frac{4n^2 - n^3}{10 + 2n^3} = -\frac{1}{2}$$

Þar sem liðir rununnar stefna á $-\frac{1}{2} \neq 0$ er röðin ósamleitin.

b) Með stofnbrotaliðun

$$\frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1/2}{n - 1} - \frac{1/2}{n + 1}$$

fáum við að hlutsummuruna $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ raðarinnar hefur liðina

$$s_n = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

Svo við fáum að

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{3}{4}$$

og röðin er þá samleitin.

Dæmi 3. Röksyðjið að röðin

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2+4n+3}+9^{2-n}4^{n+1}\right)$$

sé samleitin og finnið summuna.

Lausn: Skoðum fyrst fyrri lið summunnar og stofnbrotaliðum

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2+4n+3}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}$$

Hlutsummuruna $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ raðarinnar er því

$$s_n=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+3}\right)$$

þar sem flestir liðir styttast út fáum við

$$s_n=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\frac{5}{3}$$

Seinnið liðurinn er kvótaröð með kvóta $r=\frac{4}{9}$ sem uppfyllir að $-1<r<1$ svo röðin er samleitin. Summan er

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n+1}}{9^{n-2}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^{n+2}}{9^{n-1}}=\sum_{n=0}^{\infty}9\cdot 4^2\left(\frac{4}{9}\right)^n=\frac{144}{1-4/9}=\frac{1296}{5}$$

Svarið er

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{n^2+4n+3}+9^{2-n}4^{n+1}\right)=\frac{5}{3}+\frac{1296}{5}=\frac{3913}{15}$$