Stærðfræði II

Tímadæmi 4 - Lausnir

Þema vikunnar eru atriði tengd diffrun, þar á meðal keðjureglu og útgildi.

Keðjureglan.

Adams 12.5.6. Skoðum fallið $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ og látum $x = e^{st}$ og $y = 1 + s^2\cos(t)$. Notið keðjuregluna til að reikna $\dfrac{\partial f}{\partial t}$.

Lausn. Skv. keðjureglunni gildir

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}$$

Reiknum þessar 4 tölur:

- $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ (skv. einvíddri keðjureglu)
- $\dfrac{\partial x}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(e^{st}\right) = se^{st}$
- $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\sqrt{x^2+y^2}$ (mjög líkt x-afleiðu)
- $\dfrac{\partial y}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}\left(1 + s^2\cos(t)\right) = -s^2\sin(t)$

Þar sem er diffrað m.t.t. t er æskilegt að svarið innihaldi bara nýju breyturnar s og t. Notum formúlurnar í dæminu til að umrita

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{e^{st}}{\sqrt{e^{2st} + (1+s^2\cos(t))^2}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{1+s^2\cos(t)}{\sqrt{e^{2st} + (1+s^2\cos(t))^2}}$$

og setjum saman:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{e^{st}}{\sqrt{e^{2st} + (1+s^2\cos(t))^2}} \cdot se^{st} + \frac{1+s^2\cos(t)}{\sqrt{e^{2st} + (1+s^2\cos(t))^2}} \cdot (-s^2\sin(t))$$

Adams 12.5.17. Látum f vera eitthvert fall af x og y. Við látum $x = r\cos(\theta)$ og $y = r\sin(\theta)$.

a) Reiknið fyrstu afleiðurnar $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$. Svörin eiga að innihalda $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

b) Reiknið aðra afleiðuna $\dfrac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta}$.

Lausn. a) Reiknum eins og í dæmi 12.5.6. Fyrst er

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

Við losnum ekki við $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sem eru óþekkt en skv. formúlunum í dæminu má finna:

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta) \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta)$$

þ.a.

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$$

Sömuleiðis er

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$$

b) Hér má ráða í hvaða röð er diffrað. Til dæmis má taka $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ og diffra það m.t.t. r. Í $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ eru tveir liðir sem diffrast bæði með margföldunarreglu. Til að diffra $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ m.t.t. r reiknum við alveg eins og í a-lið nema að $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ koma í staðinn fyrir f.

- Diffrum $-r\sin(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial x}$ m.t.t. r. Notum fyrst margföldunarreglu:

  $$-\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

  og keðjureglu eins og í a-lið til að halda áfram:

  $$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial x}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

  Tökum saman:

  $$\frac{\partial}{\partial r}\left(-r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}\right) = -\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$$

- Diffrum $r\cos(\theta)\dfrac{\partial f}{\partial y}$ m.t.t. r. Notum fyrst margföldunarreglu:

$$\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

  og keðjureglu eins og í a-lið til að halda áfram:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \frac{\partial f}{\partial y}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

  Tökum saman:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

Að lokum leggjum við þessi tvö saman:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r \partial \theta} = -\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin(\theta)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

Línuleg nálgun.

Adams 12.6.5. Gefið er fallið $f(x,y,z) = \sqrt{x+2y+3z}$. Finnið línulega nálgun f í grennd við $(2,2,1)$. Notið síðan nálgunina til að meta gildi á $f(1.9, 1.8, 1.1)$ og berið saman við raungildið.

Lausn. Byrjum á að finna allar hlutafleiður fallsins. Notum einvídda keðjureglu.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{x+2y+3z}} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2}{2\sqrt{x+2y+3z}} \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3}{2\sqrt{x+2y+3z}}$$

Í punktinum $(2,2,1)$ er stigull fallsins

$$\nabla f(2,2,1) = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 1/3 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Hins vegar er fallgildi í punktinum

$$f(2,2,1) = 3$$

Línulega nálgun í grennd við $(2,2,1)$ er því

$$L(x,y,z) = f(2,2,1) + \nabla f(2,2,1) \cdot (x-2, y-2, z-1)^T = 3 + \frac{1}{6}(x-2) + \frac{1}{3}(y-2) + \frac{1}{2}(z-1)$$

Til að meta gildi á $f(1.9, 1.8, 1.1)$, látum við $x = 1.9$, $y = 1.8$ og $z = 1.1$ sem gefur

$$f(1.9, 1.8, 1.1) \simeq L(1.9, 1.8, 1.1) = 3 - \frac{1}{6}0.1 - \frac{1}{3}0.2 + \frac{1}{2}0.1 = 2.9667$$

Raungildið hins vegar er

$$f(1.9, 1.8, 1.1) = \sqrt{1.9 + 2 \cdot 1.8 + 3 \cdot 1.1} = 2.9665$$

Jacobi fylki.

Adams 12.6.18. Skoðum vektorgilda fallið $\mathbf{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ skilgreint sem

$$\mathbf{f}(R,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} R\sin(\phi)\cos(\theta) \\ R\sin(\phi)\sin(\theta) \\ R\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

Reiknið Jacobi fylkisins $D\mathbf{f}$. Við eigum eftir að kynnast betur $\mathbf{f}$ þegar við fjöllum um kúluhnit.

Lausn. Ritum

$$\mathbf{f}(R,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} R\sin(\phi)\cos(\theta) \\ R\sin(\phi)\sin(\theta) \\ R\cos(\phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(R,\phi,\theta) \\ f_2(R,\phi,\theta) \\ f_3(R,\phi,\theta) \end{pmatrix}$$

Jacobi fylki $\mathbf{f}$ er fylkið

$$D\mathbf{f}(R,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial R} & \frac{\partial f_1}{\partial \phi} & \frac{\partial f_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_2}{\partial R} & \frac{\partial f_2}{\partial \phi} & \frac{\partial f_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f_3}{\partial R} & \frac{\partial f_3}{\partial \phi} & \frac{\partial f_3}{\partial \theta} \end{pmatrix}$$

og við eigum aðeins eftir að reikna þessar níu hlutafleiður:

$$D\mathbf{f}(R,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} \sin(\phi)\cos(\theta) & R\cos(\phi)\cos(\theta) & -R\sin(\phi)\sin(\theta) \\ \sin(\phi)\sin(\theta) & R\cos(\phi)\sin(\theta) & R\sin(\phi)\cos(\theta) \\ \cos(\phi) & -R\sin(\phi) & 0 \end{pmatrix}$$

Utgildi.

13.1.3. Látum $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$. Finnið alla sérstöðupunkta f og gerið grein fyrir því hvort um er að ræða staðbundið lággildi, stáðbundið hágildi eða söðulpunkt.

Lausn. Finnum báðar hlutafleiður fallsins

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y \qquad\qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

Sérstöðupunktar eru þannig að báðar hlutafleiður séu 0 þ.a.

$$\begin{cases} 0 = 3x^2 - 3y \\ 0 = 3y^2 - 3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = y \\ y^2 = x \end{cases}$$

Þetta mætti leysa með störun. En með því að láta $x = y^2$ í efri jöfnu fæst

$$(y^2)^2 = y \Rightarrow y^4 = y \Rightarrow y(y^3 - 1) = 0$$

sem hefur tvær lausnir nefnilega $y = 0$ og $y = 1$. Þar sem $x = y^2$ fáum við tvo sérstöðupunkta

$$(0,0) \quad (1,1)$$

Til að gera betur grein frá þeim þarf að reikna Hesse-fylki, þ.e. aðrar afleiður.

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{pmatrix}$$

Í punktinum $(0,0)$ fæst fylkið

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Finnum eigingildi þess með kennimargliðu:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & -3 \\ -3 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 9 = (\lambda - 3)(\lambda + 3)$$

þ.a. eigingildi þess hafa ólík formerki. $(0,0)$ er því söðulpunktur. Endurtökum þetta fyrir $x = y = 1$. Hesse fylkið er

$$H(1,1) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$$

Finnum eigingildin:

$$\begin{vmatrix} 6-\lambda & -3 \\ -3 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 12\lambda + 27$$

Rætur kennimargliðunnar eru -9 og -3 og eru bæði eigingildi neikvæð. Þar af leiðandi er $(1,1)$ staðbundið lággildi fallsins.

13.1.20. Finnið stærsta og minnsta gildi fallsins $f(x, y) = \dfrac{x}{1 + x^2 + y^2}$.

Lausn. Finnum báðar hlutafleiður fallsins

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1 + x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(1 + x^2 + y^2)^2} = \frac{1 - x^2 + y^2}{(1 + x^2 + y^2)^2} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

Sérstöðupunktar eru þannig að báðar hlutafleiður séu 0 og hér nægir að skoða teljarana.

$$\begin{cases} 0 = 1 - x^2 + y^2 \\ 0 = -2xy \end{cases}$$

Neðri jafna segir að annaðhvort $x = 0$ eða $y = 0$. Ef $x = 0$ segir efri jafnan að $0 = 1 + y^2$ sem gengur ekki upp þegar y er rauntala. Þetta er því ekki möguleiki. Hins vegar ef $y = 0$ fæst $0 = 1 - x^2$ sem hefur tvær lausnir $x = \pm 1$. Fallið hefur því tvo sérstöðupunkta: $(1, 0)$ og $(-1, 0)$.

Athugum gildin í punktunum:

$$f(1, 0) = \frac{1}{2} \qquad f(-1, 0) = -\frac{1}{2}$$

Auk þess getum við reiknað markgildi þegar $\|(x, y)^T\| \to \infty$. Smá tríx:

$$\frac{x}{1 + x^2 + y^2} = \frac{1}{x} \frac{x^2}{1 + x^2 + y^2}$$

Seinna brotið er greinilega minna en 1 því $x^2 < 1 + x^2 + y^2$. Svo stefnir $1/x$ á 0 þ.a. með klemmureglunni sjáum við að fallið stefnir á 0 í óendanlegu.

Þess vegna getum við sagt að stærsta gildi fallsins sé $1/2$ en minnsta gildi sé $-1/2$.

Samantekt - Diffrun.

Skoðum föllin $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ og $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gefin með

$$\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} xy \\ \sin(e^{xy}) \end{pmatrix} \qquad\qquad g(x,y) = xy$$

a) Finnið Jacobi fylki fallsins $\mathbf{f}$, táknað $D\mathbf{f}$.

b) Reiknið línulega nálgun við $\mathbf{f}$ í grennd við $(3,2)$.

c) Finnið Jacobi fylki (þ.e. stigul) fallsins g.

d) Finnið Jacobi fylki samsett fallsins $g \circ \mathbf{f}$ annaðhvort með keðjureglu eða með beinum útreikningi.

Lausn. a) Reiknum allar hlutafleiður $\mathbf{f}$. Hér er $f_1(x,y) = xy$ og $f_2(x,y) = \sin(e^{xy})$. Það er gott að skoða hvernig einföld keðjureglu er notuð til að diffra $\sin(e^{xy})$ m.t.t. x.

Innra fallið þar er xy sem diffrað er y. Ýtra fallið er $\sin(e^x)$ sem diffrast aftur með keðjureglu og gefur $e^x \cos(e^x)$. Diffrun m.t.t. y er mjög svipuð.

$$D\mathbf{f}(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & x \\ ye^{xy}\cos(e^{xy}) & xe^{xy}\cos(e^{xy}) \end{pmatrix}$$

b) Línuleg nálgun í grennd við $(3,2)$ er gefin með

$$L(x,y) = \mathbf{f}(3,2) + D\mathbf{f}(3,2)\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

Fallgildið er

$$\mathbf{f}(3,2) = \begin{pmatrix} 6 \\ \sin(e^6) \end{pmatrix}$$

Jacobi fylki í punktinum er

$$D\mathbf{f}(3,2) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2e^6\cos(e^6) & 3e^6\cos(e^6) \end{pmatrix}$$

sem gefur

$$L(x,y) = \begin{pmatrix} 6 \\ \sin(e^6) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2e^6\cos(e^6) & 3e^6\cos(e^6) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-2 \end{pmatrix}$$

Ef við reiknum upp úr fæst

$$L(x,y) = \begin{pmatrix} 6 + 2(x-3) + 3(y-2) \\ \sin(e^6) + 2e^6\cos(e^6)(x-3) + 3e^6\cos(e^6)(y-2) \end{pmatrix}$$

$$L(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + 3y - 6 \\ 2e^6\cos(e^6)x + 3e^6\sin(e^6)y + \sin(e^6) - 12e^6\cos(e^6) \end{pmatrix}$$

c) Jacobi fylki g er einfaldlega stigull þess byltan:

$$Dg(x,y) = \nabla g(x,y)^T = \begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$$

d) **Lausn 1. Keðjuregla.** Almenn keðjuregla gefur formúlu fyrir Jacobi fylki samsetta fallsins.

$$D(g \circ \mathbf{f})(x,y) = \nabla g(\mathbf{f}(x)) D\mathbf{f}(x)$$

Setjum þá f_1 og f_2 í staðinn fyrir x og y í stigulinn og fáum:

$$D(g \circ \mathbf{f})(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(e^{xy}) & xy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y & x \\ ye^{xy}\cos(e^{xy}) & xe^{xy}\cos(e^{xy}) \end{pmatrix}$$

Við reiknum upp úr:

$$D(g \circ \mathbf{f})(x,y) = \begin{pmatrix} y\sin(e^{xy}) + xy^2\cos(e^{xy})e^{xy} & , x\sin(e^{xy}) + x^2y\cos(e^{xy})e^{xy} \end{pmatrix}$$

Lausn 2. Beinn útreikningur. Byrjum á því að reikna samsetta fallið $g \circ \mathbf{f}$):

$$(g \circ \mathbf{f})(x,y) = g(f_1(x,y), f_2(x,y)) = xy\sin(e^{xy})$$

Síðan reiknum við Jacobi fylki þess (sem er þá bara stigull byltur) með því að reikna báðar hlutafleiður. Þetta er svipaður reikningur og í a-lið, en nota þarf margföldunarreglu að auki.

$$D(g \circ \mathbf{f})(x,y) = \begin{pmatrix} y\sin(e^{xy}) + xy^2\cos(e^{xy})e^{xy} & , x\sin(e^{xy}) + x^2y\cos(e^{xy})e^{xy} \end{pmatrix}$$