Skiladæmi 11 - Stærðfræði 2

Munið að rökstyðja öll svör og sýna alla útreikninga.

Dæmi 1. Gerið grein fyrir samleitni eftirfarandi raða:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{\sqrt{k^4+1}}$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!}$

Lausn. a) Við beitum markgildisprófinu. Athugum að

$$\frac{\frac{k}{\sqrt{k^4+1}}}{\frac{1}{k}} = \frac{k^2}{\sqrt{k^4+1}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/k^4}} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1$$

Við vitum að röðin $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ ósamleitin (p-röð með $p \leq 1$) sem sýnir að röðin í dæminu sé líka ósamleitin.

b) Beitum kvótaprófinu á $a_k = \dfrac{k!}{(2k)!}$. Fáum:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{(k+1)!}{(2k+2)!}}{\frac{k!}{(2k)!}} = \frac{\frac{(k+1)!}{k!}}{\frac{(2k+2)!}{(2k)!}} = \frac{k+1}{(2k+2)(2k+1)} = \frac{k+1}{4k^2+6k+2}$$

Nú er

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{1+1/k}{4k+6+2/k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

því teljarinn stefnir á 1 en nefnarinn á ∞. Þar sem jákvæð röð er samleitin þegar $\dfrac{a_{k+1}}{a_k}$ stefnir á tölu $k \in [0,1[$ sést að röðin í b-lið er samleitin.

Dæmi 2. Skoðum veldaröðina

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3-2}\left(\frac{x}{3}\right)^n$$

Fyrir hvaða gildi á x er röðin samleitin? Athugið að hér á að skoða endapunkta samleitnisbilsins líka.

Lausn: Við getum notað kvótaprófið á alla röðina:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{n+1}{(n+1)^3-2}(x/3)^{n+1}}{\frac{n}{n^3-2}(x/3)^n} = \frac{x}{3} \cdot \frac{(n+1)(n^3-2)}{n((n+1)^3-2))}$$

sem gefur

$$\frac{x}{3}\frac{n^4+n^3-2n-2}{n^4+3n^3+3n^2-n} = \frac{x}{3}\frac{1+1/n-2/n^3-2/n^4}{1+3/n+3/n^2-1/n^3} \to \frac{x}{3}$$

og skv. kvótaprófinu er röðin þá samleitin þegar $|x/3| < 1$

$$-1 < \frac{x}{3} < 1 \Rightarrow -3 < x < 3$$

Hér er líka hægt að umskrifa í

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3-2}\left(\frac{x}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{3^n(n^3-2)}x^n$$

þá er samleitnimiðjan greinilega $c = 0$ og við finnum samleitnigeislann R með

$$L = \frac{\frac{n+1}{3^{n+1}((n+1)^3-2)}}{\frac{n}{3^n(n^3-2)}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)(n^3-2)}{(n((n+1)^3-2))} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{3}$$

svo $R = 1/L = 3$.

Við eigum eftir að athuga endapunkta. Þegar $x = 3$ þ.e. $x/3 = 1$ fæst:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n^3-2}$$

Berum þessa röð saman við $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ sem er samleitin (p-röð með p=2). Hlutfallið er

$$\frac{\frac{n}{n^3-2}}{\frac{1}{n^2}} = \frac{n^3}{n^3-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

og röðin því samleitin í $x = 3$ skv. markgildisprófi. Sömuleiðis verður röðin samleitin í $x = -3$ (algildi hlutfallsins stefnir þá á 1). Lokasvar er því að samleitnisbil sé $[-3, 3]$.

Dæmi 3. Veldaraðaframsetning fallsins $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ um 0 er eins og hér segir

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \qquad (-1 < x < 1)$$

Notið röðina til að finna veldaraðaframsetningu fallsins $h(x) = \dfrac{x}{(1+3x)^2}$ um 0 og takið fram samleitnisbil raðarinnar.

Lausn. Notum að $g(x) = h(-3x)$ sem gefur

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-3x)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (-3)^k x^k$$

Röðin er samleitin ef $-1 < 3x < 1$ þ.e. ef $-1/3 < x < 1/3$.

Athugum að

$$g'(x) = \frac{d}{dx}(1+3x)^{-1} = -3(1+3x)^{-2}$$

þ.a. $h(x) = -\dfrac{x}{3} g'(x)$. Veldaraðaframsetning g' er fundin með því að diffra lið fyrir lið (sem má á $]-1,1[$):

$$g'(x) = \sum_{k=0}^{\infty} k(-3)^k x^{k-1}$$

þ.a.

$$h(x) = -\frac{x}{3} \sum_{k=0}^{\infty} k(-3)^k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} k(-3)^{k+1} x^k$$

einnig gilt ef $-1/3 < x < 1/3$.