

Skiladæmi 5 - Stærðfræði 2

Munið að rökstyðja öll svör og sýna alla útreikninga.

Athugið að heildin sem koma upp á að reikna án þess að nota reiknivél.

Dæmi 1. Látum \mathcal{D} vera þríhyrningslaga svæði með hornpunktana $(0, 0)$, $(0, 6)$ og $(3, 6)$. Heildið fallið $f(x, y) = \sqrt{y^2 + 2}$ yfir svæðið, þ.e. reiknið

$$\iint_{\mathcal{D}} f(x, y) \, dA$$

Lausn: Ein afmörkun á svæðinu er $2x \leq y \leq 6$ og $0 \leq x \leq 3$, en það gefur ómögulegt heildi. Við viljum heilda fyrst m.t.t. x , svo við afmörkum

$$\int_0^6 \int_0^{y/2} \sqrt{y^2 + 2} \, dx \, dy = \frac{1}{2} \int_0^6 y \sqrt{y^2 + 2} \, dy = \frac{1}{6} \left[(y^2 + 2)^{3/2} \right]_0^6 = \frac{38^{3/2} - 2^{3/2}}{6} \approx 38.570$$

Dæmi 2. Reiknið (óeiginlega) heildið

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-10(x^2+y^2)} dA$$

Lausn: Skipta í pólhnit þá fáum við

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-10r^2} r d\theta dr = \frac{\pi}{10}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} e^{-10r^2} r d\theta dr &= 2\pi \int_0^\infty e^{-10r^2} r dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{e^{-10r^2}}{20} \right]_0^\infty \\ &= 2\pi \left(\lim_{r \rightarrow \infty} -\frac{e^{-10r^2}}{20} + \frac{1}{20} \right) \\ &= \frac{\pi}{10} \end{aligned}$$

Dæmi 3. Látum \mathcal{D} vera svæðið

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 10, y \leq x, y \leq 0\}$$

Reiknið

$$\iint_{\mathcal{D}} xy^2 \, dA$$

Lausn:

$$\int_0^{\sqrt{10}} \int_{-3\pi/4}^0 r \cos(\theta) \, r^2 \sin^2(\theta) \, r \, d\theta \, dr$$

Hér erum við búin að setja upp heildið í pólhnitum. Til að leysa úr því getum við skrifað

$$\int_0^{\sqrt{10}} r^4 \, dr \cdot \int_{-3\pi/4}^0 \cos(\theta) \sin^2(\theta) \, d\theta = \frac{10\sqrt{5}}{3}$$

Seinna heildið má t.d. leysa með innsetningu.