Skiladæmi 4 - Stærðfræði 2

Munið að rökstyðja öll svör og sýna útreikninga.

Dæmi 1. Skoðum vektorgilda fallið

$$\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \sin(x/y) \\ y^2 - 1 \\ xy^3 \end{pmatrix}$$

a) Finnið línulega nálgun við $\mathbf{F}$ í grennd við $(\pi, -2)$.

b) Notið nálgunina til að meta $\mathbf{F}(3, -1.9)$ og berið saman við raungildi.

Lausn: Finnum Jacobi-fylki (heildarafleiðu) fallins

$$D\mathbf{F}(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{1}{y}\cos(x/y) & -\frac{x}{y^2}\cos(x/y) \\ 0 & 2y \\ y^3 & 3xy^2 \end{pmatrix}$$

og afleiðan í punktinum er því

$$D\mathbf{F}(\pi, -2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \\ -8 & 12\pi \end{pmatrix}$$

og línulega nálgunin er

$$\mathbf{L}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -4 \\ -8 & 12\pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - \pi \\ y + 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -8\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 - 4(y+2) \\ -8(x-\pi) + 12\pi(y+2) - 8\pi \end{pmatrix}$$

b) Metum fallgildið með línulegu nálguninni

$$\mathbf{F}(3, -1.9) \approx \mathbf{L}(3, -1.9) = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 - 4(-1.9+2) \\ -8(3-\pi) + 12\pi(-1.9+2) - 8\pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2.60 \\ -20.230 \end{pmatrix}$$

sem er ekki langt frá raungildinu

$$\mathbf{F}(3, -1.9) = \begin{pmatrix} \sin(-3/1.9) \\ (-1.9)^2 - 1 \\ 3^2(-1.9)^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2.61 \\ -20.577 \end{pmatrix}$$

Dæmi 2. Skoðum kúluhnitafallið af 3 breytum R, ϕ og θ:

$$\mathbf{K}(R,\phi,\theta) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R\sin(\phi)\cos(\theta) \\ R\sin(\phi)\sin(\theta) \\ R\cos(\phi) \end{pmatrix}$$

og látum $f(x,y,z)$ vera ótiltekið fall af x, y, z sem eru gefin hér fyrir ofan.

Notið keðjuregluna til að búa til formúlu fyrir hlutafleiðuna $\dfrac{\partial f}{\partial \phi}$.

Athugið að svarið mun innihalda $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial z}$ þar sem við þekkjum ekki fallið f.

E.s. Að sjálfsögðu reiknið þið til æfingar líka $\dfrac{\partial f}{\partial R}$ og $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$, en það þarf ekki að skila þeim.

Lausn:

- **R-afleiðan.** Af formúlunni fyrir kúluhnit sjáum við

$$\frac{\partial x}{\partial R} = \sin(\phi)\cos(\theta) \qquad \frac{\partial y}{\partial R} = \sin(\phi)\sin(\theta) \qquad \frac{\partial z}{\partial R} = \cos(\phi)$$

  og keðjureglan gefur svo

$$\frac{\partial f}{\partial R} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial R} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial R} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial R} = \sin(\phi)\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + \sin(\phi)\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} + \cos(\phi)\frac{\partial f}{\partial z}$$

- **Phi-afleiðan.** Af formúlunni fyrir kúluhnit sjáum við

$$\frac{\partial x}{\partial \phi} = R\cos(\phi)\cos(\theta) \qquad \frac{\partial y}{\partial \phi} = R\cos(\phi)\sin(\theta) \qquad \frac{\partial z}{\partial \phi} = -R\sin(\phi)$$

  og keðjureglan gefur svo

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \phi} = R\cos(\phi)\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + R\cos(\phi)\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y} - R\sin(\phi)\frac{\partial f}{\partial z}$$

- **Theta-afleiðan.** Af formúlunni fyrir kúluhnit sjáum við

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -R\sin(\phi)\sin(\theta) \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = R\sin(\phi)\cos(\theta) \qquad \frac{\partial z}{\partial \theta} = 0$$

  Keðjureglan gefur svo

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \theta} = -R\sin(\phi)\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x} + R\sin(\phi)\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}$$

Dæmi 3. Við skoðum fallið
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$
a) Sýnið að f hafi nákvæmlega þrjá sérstöðupunkta, þar á meðal $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$.

b) Gerið grein fyrir því hvort $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ sé staðbundið hágildi, lággildi eða söðulpunktur.

Lausn. a) Reiknum fyrstu hlutafleiður

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4(x-y) = 4x^3 - 4x + 4y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 + 4(x-y) = 4y^3 + 4x - 4y$$

Í sérstöðupunkti er báðar 0 sem gefur jöfnuhneppi (Deilt með 2):

$$\begin{cases} x^3 - x + y & = & 0 \\ y^3 + x - y & = & 0 \end{cases}$$

Leggjum saman jöfnurnar til að losna við $x - y$ og fáum

$$x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow x^3 = -y^3 \Rightarrow x = -y$$

Setjum þá jöfnu inní t.d. neðri jöfnu í jöfnuhneppinu og fáum

$$y^3 - 2y = 0 \Rightarrow y(y^2 - 2) = 0 \Rightarrow y = 0, y = \pm\sqrt{2}$$

Þar sem $x = -y$ fást 3 sérstöðupunktar

$$(0,0), (\sqrt{2}, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$

b) Einbeitum okkur að $(0,0)$. Reiknum aðrar afleiður:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 4 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 - 4$$

Í punktinum $(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ er Hesse fylki þá

$$H = \begin{pmatrix} 20 & 4 \\ 4 & 20 \end{pmatrix}$$

Eigingildin fáum við með að leysa

$$(20 - \lambda)(20 - \lambda) - 16 = 0$$

og fáum þá að bæði eigingildi H eru jákvæð og þá er staðbundið lággildi í punktinum.