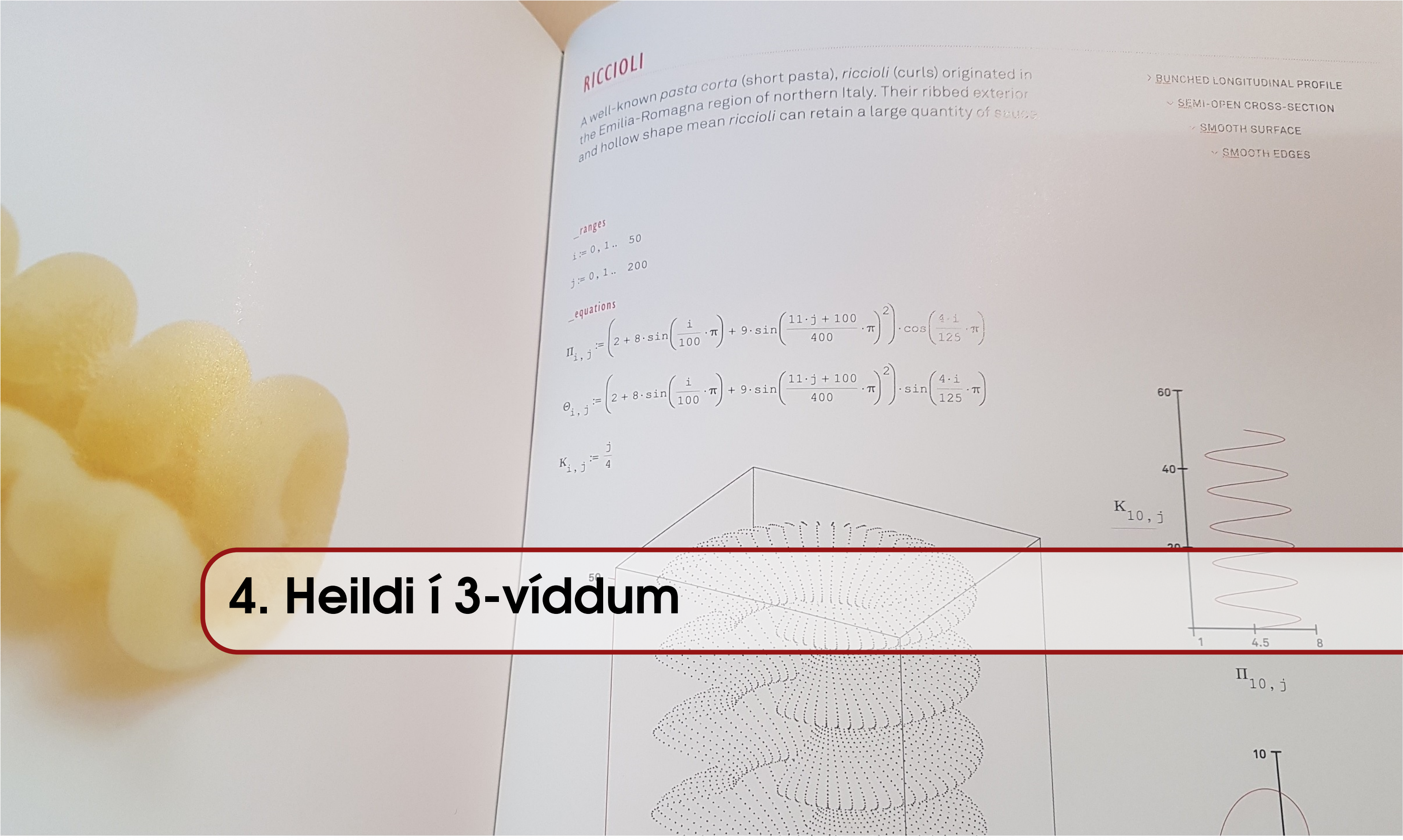


4. Heildi í 3-víddum

Í þessum hluta skoðum við heildi í þremur víddum. Þau er hægt að setja upp í kartesískum hnitum (xyz-hnitum), í sívalnings hnitum ($r\theta z$-hnitum) og í kúluhnitum ($\rho\phi\theta$-hnitum). Að auki skoðum við svo stikun yfirborða og heildi yfir yfirborð.

4.1 Kartesísk hnit

Heildi í þremur (og hærri) víddum er skilgreint nákvæmlega eins og heildi í tveimur víddum. Ef $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ er fall og $\mathcal{D} = [x_0, x_1] \times [y_0, y_1] \times [z_0, z_1]$ er kassi í $\mathbb{R}^3$, þá er heildið af f yfir $\mathcal{D}$ skilgreint sem

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dV = \iiint_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dV = \int_{z_0}^{z_1} \left(\int_{y_0}^{y_1} \left(\int_{x_0}^{x_1} f(x,y,z)dx \right) dy \right) dz.$$

Hér erum við að heilda yfir rúmmál $dV = dx\, dy\, dz$. Ef svæðið $\mathcal{D}$ er flóknara þá getum við reynt að skrifa mörkin á innri heildunum sem föll af þeim breytum sem síðar er heildað m.t.t.

■ **Dæmi 4.1** Viljum heilda fallið $f(x,y,z) = x^3y^2z$ yfir kúluna $\mathcal{R} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$. Við afmörkum svæðið í x, y og z stefnu og fáum heildið

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{R}} f(x,y,z)dV &= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left(\int_{-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{\sqrt{1-y^2-z^2}} x^3y^2z\,dx \right) dy \right) dz \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left(\left[y^2\frac{x^4}{4}z \right]_{x=-\sqrt{1-y^2-z^2}}^{x=\sqrt{1-y^2-z^2}} \right) dy \right) dz \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\int_{-\sqrt{1-z^2}}^{\sqrt{1-z^2}} \left(y^2\frac{(1-y^2-z^2)^2}{4}z \right) dy \right) dz \\
&= \ldots = 0
\end{aligned}$$

Við sjáum að heildið verður fljótt töluvert flókið. Í þessu dæmi væri mun einfaldara að notfæra sér það að fallið $f(x, y, z) = x^3y^2z$ er oddstætt um $z = 0$ því $f(x, y, -z) = -f(x, y, z)$ og kúlan sem við erum að heilda yfir er samhverf um $z = 0$, svo heildið verður 0. ■

■ **Dæmi 4.2** Reiknum

$$\iiint_{\mathcal{R}} (1 + 2x - 3y)dV$$

þar sem $\mathcal{R}$ er kassinn $-a \le x \le a$, $-b \le y \le b$ og $-c \le z \le c$. Við getum nú sett upp heildið

$$\int_{-c}^{c} \int_{-b}^{b} \int_{-a}^{a} (1 + 2x - 3y)dx\ dy\ dz$$

og reiknað beint af augum, en við getum líka nýtt okkur að

$$\iiint_{\mathcal{R}} 2x\ dV = 0$$

því $f(x, y, z) = 2x$ er oddstætt um $x = 0$ og kassinn sem heildað er yfir er samhverfur um $x = 0$. Og við getum nýtt okkur að

$$\iiint_{\mathcal{R}} 3y\ dV = 0$$

því $g(x, y, z) = 3y$ er oddstætt um $y = 0$ og kassinn er samhverfur um $y = 0$. Þá stendur eftir

$$\iiint_{\mathcal{R}} 1\ dV = 2a \cdot 2b \cdot 2c = 8abc$$

sem er einmitt rúmmál kassans $\mathcal{R}$ sem heildað er yfir. ■

■ **Dæmi 4.3** Heildum fallið $g(x, y, z) = x^2y + z$ yfir pýramídan $\mathcal{R}$ sem er gefin með $0 \le z \le 1 - |x| - |y|$. Við sjáum fyrst að

$$\iiint_{\mathcal{R}} x^2y\ dV = 0$$

því x^2y er oddstætt um $y = 0$ og pýramídinn er samhverfur um $y = 0$. Við skoðum nú

$$\iiint_{\mathcal{R}} z\ dV$$

og þó að z sé sannarlega oddstætt um $z = 0$ þá hjálpar það okkur lítið hér þar sem pýramídinn er ekki samhverfur um $z = 0$ (hann er allur fyrir ofan xy-planið). Við verðum því að afmarka svæðið í heildinu. Við tökum fyrst fallið z er eins í öllum fjórðungum fyrir ofan xy-planið, svo við getum látið nægja að heilda yfir þann hluta sem er í fyrsta áttungi (þá $z = 1 - x - y$) og margfaldað með 4. Við fáum því heildið

$$\begin{aligned}
\iiint_{\mathcal{R}} z\ dV =& 4\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x-y} z\ dz\ dy\ dx \\
=& 4\int_0^1 \int_0^{1-x} \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-x-y} dy\ dx \\
=& 4\int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{(1-x-y)^2}{2} dy\ dx \\
=& 4\int_0^1 \frac{(1-x)^3}{6} dx = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

■

Við skoðum nú 2 algeng breytuskipti í heildum í 3-víddum, nefnilega sívalningshnit og kúluhnit.

Æfingar 4.1

Æfing 4.1.1 Við viljum nú finna rúmmál rúmskikanns $\mathcal{R}$ sem afmarkast af $x = y^2$ og plönunum $z = 0$ og $x + z = 1$. Við notum til þess þrefalt heildi, þar sem við heildum 1 yfir $\mathcal{R}$. Setjið rétt mörk á heildin hér fyrir neðan (athugið að röð heildanna er ekki sú sama).

$$\int_{\mathcal{R}} dV = \iiint dz\ dx\ dy = \iiint dy\ dz\ dx = \frac{8}{15}$$

■

Æfing 4.1.2 Finnið massa hlutarins $\mathcal{T}$ ef þéttifall (e. density function) hans er gefið sem $\delta(x, y, z) = z$. $\mathcal{T}$ er sá hluti í 1. áttungi (1. octant; $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$) sem er undir planinu $z = 6 - 3x - 2y$. Reiknið

$$\int_{\mathcal{T}} \delta(x, y, z) dV$$

■

4.2 Sívalningshnit (e. cylindrical coordinates)

Sívalningshnit eru bein útvíkkun pólhnita á 3-víddir. Maður lýsir staðsetningu punkts P í $\mathbb{R}^3$ sem hefur hnitin (x, y, z) í kartesísku hnitakerfi, með hnitunum r, θ og z, þar sem:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}$$

Til þess að reikna $dV = dx\,dy\,dz$ í sívalningshnitum notar maður nákvæmlega sömu aðferð og í 2-víddum:

1. Skilgreinum fallið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} x(r, \theta, z) \\ y(r, \theta, z) \\ z(r, \theta, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

2. Reiknum heildarafleiðu $\mathbf{F}$,

$$D\mathbf{F}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial r} r\cos\theta & \frac{\partial}{\partial \theta} r\cos\theta & \frac{\partial}{\partial z} r\cos\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} r\sin\theta & \frac{\partial}{\partial \theta} r\sin\theta & \frac{\partial}{\partial z} r\sin\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} z & \frac{\partial}{\partial \theta} z & \frac{\partial}{\partial z} z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Reiknum ákveðu Jacobi-fylkisins

$$\begin{aligned}\det(D\mathbf{F}(r,\theta,z)) &= \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= \cos\theta \begin{vmatrix} r\cos\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - (-r\sin\theta)\cdot \begin{vmatrix} \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} \sin\theta & r\cos\theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r\end{aligned}$$

4. Nú er

$$dx\,dy\,dz = |\det(D\mathbf{F}(r,\theta,z))|\,dr\,d\theta\,dz = r\,dr\,d\theta\,dz.$$

Þegar við skiptum úr kartesískum (x,y,z) hnitum í (r,θ,z) sívalningshnit er

$$dV = dx\ dy\ dz = r\ dr\ d\theta\ dz$$

■ **Dæmi 4.4** Fall er gefið með formúlunni $f(x,y,z) = xy + z^2$ (í kartesískum hnitum). Heildum f yfir svæðið

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 \leq 4 \ \text{ og } \ 0 \leq x \ \text{ og } \ 0 \leq z \leq 1\}.$$

Skiptum yfir í sívalningshnit r, θ, z. Þar er

$$f(x,y,z) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) = r^2\cos\theta\sin\theta + z^2$$

og svæðinu $\mathcal{D}$ má lýsa með

$$0 \leq r \leq 2 \ \text{ og } \ -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \ \text{ og } \ 0 \leq z \leq 1$$

og heildið er þá

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dV = \int_0^1 \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 (r^2\cos\theta\sin\theta + z^2) r dr \right) d\theta \right) dz = \ldots = \frac{2\pi}{3}$$

■

■ **Dæmi 4.5** Reiknum

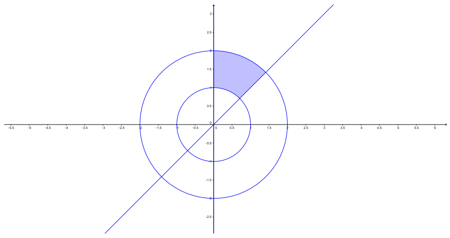
$$\iiint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2) dV$$

þar sem $\mathcal{D}$ er svæðið milli sívalninganna $x^2 + y^2 = 1$ og $x^2 + y^2 = 4$ og sem afmarkast að auki af $0 \leq z \leq 1$, $0 \leq x \leq y$.

Við sjáum að auðvelt er að lýsa þessu svæði í xy-planinu með pólhnitum, og rúmskikinn er einfaldlega afmarkaður í z stefnuna, svo við skiptum yfir í sívalningshnit.

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathcal{D}} (x^2+y^2)dV &= \int_0^1 \int_{\pi/4}^{\pi/2} \int_1^2 r^2 \cdot r\ dr d\theta dz \\ &= \int_0^1 dz \cdot \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \ \cdot \int_1^2 r^3 dr \\ &= 1 \cdot (\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}) \cdot \left[\frac{r^4}{4}\right]_1^2 = \frac{15}{4}\pi\end{aligned}$$

■



Mynd 4.1: Rúmskikinn $\mathcal{D}$ afmarkast af þessu svæði í xy-planinu og $0 \leq z \leq 1$.

Æfingar 4.2

Æfing 4.2.1 Heildið fallið $f(x, y, z) = x$ yfir rúmskikann sem er bæði inní kúlunni $x^2 + y^2 + z^2 = 4a^2$ **og** inní sívalningnum $x^2 + y^2 = 2ay$.

■

Æfing 4.2.2 Reiknið

$$\int_{\mathcal{T}} (x^2 + y^2) dV$$

þar sem $\mathcal{T}$ er sá hluti innan sívalningsins $x^2 + y^2 = 4$ sem er yfir xy-planinu ($z = 0$) og undir planinu $z = x$.

■

4.3 Kúluhnit (e. spherical coordinates)

Við skoðum nú hvernig má tákna punkt í rúminu með kúluhnitum. Til þess að lýsa staðsetningu punkts P í $\mathbb{R}^3$ með kartesísku hnitin (x, y, z) notar maður fjarlægð punktisins frá núlli ρ og 2 horn til þess að staðsetja punktinn, θ alveg eins og í pólhnitum og ϕ er horn stöðuvektors punktsins við pósitíva z ásinn. Formúlurnar eru:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos\theta \sin\phi \\ y &= \rho \sin\theta \sin\phi \\ z &= \rho \cos\phi \end{aligned}$$

Ath. við getum lýst staðsetningu hvaða punkts í $\mathbb{R}^3$ sem er með því að taka

$$0 \leq \rho < +\infty \;\text{ og }\; 0 \leq \theta < 2\pi \;\text{ og }\; 0 \leq \phi \leq \pi.$$

Til þess að reikna $dV = dx\,dy\,dz$ í kúluhnitum notar maður sömu aðferð og áður:

1. Skilgreinum fallið $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{F}(\rho, \theta, \phi) = \begin{pmatrix} x(\rho, \theta, \phi) \\ y(\rho, \theta, \phi) \\ z(\rho, \theta, \phi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \cos\theta \sin\phi \\ \rho \sin\theta \sin\phi \\ \rho \cos\phi \end{pmatrix}$$

2. Reiknum heildarafleiðu $\mathbf{F}$,

$$\mathbf{F}(\rho,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}\rho\cos\theta\sin\phi & \frac{\partial}{\partial\theta}\rho\cos\theta\sin\phi & \frac{\partial}{\partial\phi}\rho\cos\theta\sin\phi \\ \frac{\partial}{\partial\rho}\rho\sin\theta\sin\phi & \frac{\partial}{\partial\theta}\rho\sin\theta\sin\phi & \frac{\partial}{\partial\phi}\rho\sin\theta\sin\phi \\ \frac{\partial}{\partial\rho}\rho\cos\phi & \frac{\partial}{\partial\theta}\rho\cos\phi & \frac{\partial}{\partial\phi}\rho\cos\phi \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{pmatrix}.$$

3. Reiknum ákveðu Jacobi-fylkisins

$$\begin{aligned}
&\det(D\mathbf{F}(\rho,\theta,\phi)) \\
&= \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} \\
&= \cos\theta\sin\phi \begin{vmatrix} \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} \\
&\qquad - (-\rho\sin\theta\sin\phi)\cdot \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} \\
&\qquad + \rho\cos\theta\cos\phi\cdot \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\sin\phi \\ \cos\phi & 0 \end{vmatrix} \\
&= -\rho^2\cos^2\theta\sin^3\phi - \rho^2\sin^2\theta\sin^3\phi - \rho^2\sin^2\theta\cos^2\phi\sin\phi - \rho^2\cos^2\theta\cos^2\phi\sin\phi \\
&= -\rho^2\left(\sin^3\phi\cdot(\cos^2\theta+\sin^2\theta) + \cos^2\phi\sin\phi\cdot(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\right) \\
&= -\rho^2(\sin^3\phi + \cos^2\phi\sin\phi) \\
&= -\rho^2\sin\phi\cdot(\sin^2\phi+\cos^2\phi) \\
&= -\rho^2\sin\phi
\end{aligned}$$

4. Nú er

$$dx\,dy\,dz = |\det(D\mathbf{F}(\rho,\theta,\phi))|\,d\rho\,d\theta\,d\phi = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi.$$

Þegar við skiptum úr kartesískum (x,y,z) hnitum í $(\rho\,\theta\,\phi)$ kúluhnit er

$$dV = dx\ dy\ dz = \rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi$$

■ **Dæmi 4.6** Reiknum rúmmál kúlu $x^2+y^2+z^2=a^2$ með því að heilda 1 yfir kúluna.

$$\begin{aligned}
\iint_{\text{kúla}} dV &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta \\
&= \int_0^{2\pi} d\theta\cdot\int_0^{\pi}\sin\phi\ d\phi\cdot\int_0^{a}\rho^2 d\rho \\
&= 2\pi\cdot[-\cos(\theta)]_0^{\pi}\cdot\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^a \\
&= \frac{4\pi a^3}{3}
\end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 4.7** Fall er gefið með formúlunni $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ (í kartesískum hnitum). Heildum f yfir svæðið

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2+y^2+z^2 \leq 4 \ \text{ og } \ 0 \leq y \ \text{ og } \ 0 \leq z\}.$$

Skiptum yfir í kúluhnit ρ, θ, ϕ. Þar er

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= f(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi) = \sqrt{\rho^2\cos^2\theta\sin^2\phi + \rho^2\sin^2\theta\sin^2\phi + \rho^2\cos^2\phi} \\ &= \sqrt{\rho^2\sin^2\phi\cdot(\cos^2\theta+\sin^2\theta)+\rho^2\cos^2\phi} = \sqrt{\rho^2(\sin^2\phi+\cos^2\phi)} = \rho \end{aligned}$$

og svæðinu $\mathcal{D}$ má lýsa með

$$0 \leq \rho \leq 2 \ \text{ og } \ 0 \leq \theta \leq \pi \ \text{ og } \ 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}$$

og heildið er þá

$$\int_{\mathcal{D}} f(x,y,z)dV = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\pi} \left(\int_0^2 \rho\cdot\rho^2\sin\phi\, d\rho\right) d\theta\right) d\phi = \ldots = 4\pi$$

■

■ **Dæmi 4.8** Reiknum massa hálfa boltans H, $z = \sqrt{a^2-x^2-y^2}$, með hefur radíus a, sem hefur mismunandi eðlismassa (háð ρ), gefin með þéttleikafallinu $k(2a-\rho)$, þar sem k er fasti.

$$\begin{aligned} \iiint_H k(2a-\rho)dV & \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2}\int_0^a k(2a-\rho)\rho^2\sin\phi\ d\rho\ d\phi\ d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \cdot \int_0^{\pi/2} \sin\phi\ d\phi \cdot k\int_0^a (2a\rho^2-\rho^3)d\rho \\ &= 2\pi\left[-\cos\phi\right]_0^{\pi/2}\cdot k\left[\frac{2}{3}a\rho^3 - \frac{\rho^4}{4}\right]_0^a \\ &= \frac{5}{6}ka^4\pi \end{aligned}$$

■

■ **Dæmi 4.9** Finnum rúmmálið sem er inní kúlunni $x^2+y^2+z^2 = a^2$ og inní keilunni $z = \sqrt{x^2+y^2}$.

$$\iiint_{\mathcal{D}} dV = \int_0^{2\pi}\ d\theta \cdot \int_0^{\pi/4} \sin(\phi)\ d\phi \cdot \int_0^a \rho^2\ d\rho = 2\pi(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{a^3}{3}$$

Við gætum leyst sama dæmi með tvöföldu heildi, með því að reikna fyrst rúmmálið undir kúlunni á réttu svæði og draga frá rúmmálið sem er undir keilunni á réttu svæði. Við finnum þá fyrst hvar kúlan og keilan skerast til að finna hvaða svæði á að heilda yfir. Við fáum $x^2+y^2+x^2+y^2 = a^2$ sem við umskrifum í $x^2+y^2 = a^2/2$. Keilan og kúlan skerast því í hring með radíus $a/\sqrt{2}$. Í pólhnitum er kúlan

$$x^2+y^2+z^2 = a^2 \Leftrightarrow r^2+z^2 = a^2 \Leftrightarrow z = \sqrt{a^2-r^2}, \ \text{þ.s. } z \geq 0$$

og í pólhnitum er keilan

$$z = \sqrt{x^2+y^2} \Leftrightarrow z = r$$

Við finnum nú rúmmálið

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{a/\sqrt{2}} \sqrt{a^2-r^2}\; r\, dr d\theta - \int_0^{2\pi}\int_0^{a/\sqrt{2}} r\cdot r\, dr d\theta = \ldots = 2\pi(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\frac{a^3}{3}$$

■

Æfingar 4.3

Æfing 4.3.1 Reiknið

$$\int_{\mathcal{R}} \frac{\sin(\sqrt{x^2+y^2+z^2})}{x^2+y^2+z^2} dV$$

þar sem

$$\mathcal{R} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;:\; x^2+y^2+z^2 \le 4 \text{ og } z\ge 0 \text{ og } x\le 0\}$$

■

Æfing 4.3.2 Heildum fallið $f(x,y,z) = x+y+z$ yfir svæðið $\mathcal{R}$ sem er inní keilunni $z = 2\sqrt{x^2+y^2}$ og einnig inní kúlunni $x^2+y^2+z^2 = a^2$. ■

4.4 Kynning á stikuðum flötum í $\mathbb{R}^3$

Við skoðum nú hvernig stika má fleti í $\mathbb{R}^3$, sem hægt er að lýsa sem myndmengi diffranlegs falls $\mathbf{r}(u,v)$, skilgreint á svæði $\mathcal{D}$ og sem tekur gildi í $\mathbb{R}^3$. Að auki er ætlast til þess að $\mathbf{r}$ sé eintækt á $\mathcal{D}$, þ.e. ef $\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}(u^*,v^*)$ þá er $u=u^*$ og $v=v^*$, og þ.a. vektorarnir

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) \quad \text{og} \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$$

eru ekki samsíða fyrir sérhvert $(u,v)\in\mathcal{D}$. Við segjum að $\mathbf{r}$ stiki flötinn

$$\mathcal{S} := \{\mathbf{r}(u,v) \;:\; (u,v)\in\mathcal{D}\}.$$

Regla 4.4.1 Ef $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ er diffranlegt fall, er $\mathbf{r}:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v)\end{pmatrix}$$

stikun á fletinum $z = f(u,v)$ í $\mathbb{R}^3$.

■ **Dæmi 4.10** Stikum planið $z = 1-x-y$ með því að setja

$$\mathbf{r}(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1-x-y\end{pmatrix}, \quad \text{þ.s. } (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

■

Stundum viljum við bara stika einhvern ákveðin hluta af fletinum, þá getum við takmarkað formengi fallsins.

■ **Dæmi 4.11** Stikum þann hluta plansins $z = 1 - x - y$ sem er í 1. áttungi, s.s. þar sem $x \geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$ með því að setja

$$\mathbf{r}(x, y) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 - x - y \end{pmatrix}, \quad \text{þ.s. } (x, y) \in \mathcal{D}$$

Hér er formengi fallins

$$\mathcal{D} = \Big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 1 - x \text{ og } 0 \leq x \leq 1\Big\}$$

■

■ **Dæmi 4.12** Með því að halda einu hniti í öðru hnitakerfi fyrir $\mathbb{R}^3$ föstu fæst flötur í $\mathbb{R}^3$. Skoðum t.d. kúluhnit ρ, θ og ϕ:

$$\begin{aligned} x &= \rho \sin\phi \cos\theta, \\ y &= \rho \sin\phi \sin\theta, \\ z &= \rho \cos\phi. \end{aligned}$$

Höldum $\rho = R$ föstu. Þá er $\mathbf{r} : [0, \pi/2] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} R\sin\phi\cos\theta \\ R\sin\phi\sin\theta \\ R\cos\phi \end{pmatrix},$$

stikun á hálfkúluskelinni $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ og $z \geq 0$. ■

Kúluskelin $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ er stikuð með $\mathbf{r} : [0, \pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(\phi, \theta) = \begin{pmatrix} R\sin\phi\cos\theta \\ R\sin\phi\sin\theta \\ R\cos\phi \end{pmatrix},$$

þar sem $R > 0$ er radíus (fasti).

■ **Dæmi 4.13** Stikum þann hluta plansins $z = 1+x$ sem er inní sívalningnum $x^2+y^2 \leq 4$. Látum $\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, þar sem

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (1 + x)\mathbf{k}$$

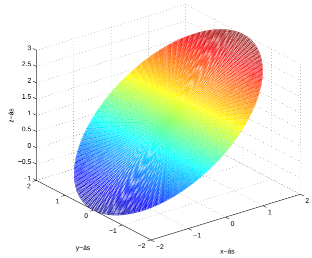
Þar sem formengi fallins $\mathbf{r}$ er svæðið $\mathcal{D}$ sem afmarkast af $x^2 + y^2 \leq 4$.

■

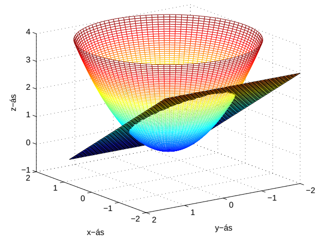
■ **Dæmi 4.14** Stikum þann hluta skálarinnar $z = x^2+y^2$ sem er undir planinu $z = 1-x$. Látum $\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, þar sem

$$\mathbf{r}(x, y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k}$$

þar sem formengi fallins $\mathbf{r}$ er svæðið $\mathcal{D}$ sem afmarkast af $(x + 1/2)^2 + y^2 \leq 5/4$ (inní hringnum $x^2 + y^2 = 1 - x$). ■



Mynd 4.2: Í dæmi 4.13 stikum við hluta af plani.



Mynd 4.3: Í dæmi 4.14 stikum við þann hluta af skálinni sem er undir planinu.

4.5 Heildi yfir stikað yfirborð

Hvernig skildi maður heilda yfir stikaða fleti?

$$\int_S f(x,y,z)dS := \int_{(u,v)\in[a,b]\times[c,d]} f(\mathbf{r}(u,v))\|\mathbf{n}(u,v)\|du\,dv$$

Hér stendur S í dS fyrir surface og við þurfum einmitt að skoða þessa stærð nánar. Við rifjum upp að fyrir hnitaskipti á $\mathbb{R}^2$, gefin með falli $\mathbf{F}(u,v) = (x(u,v)\ y(u,v))^T$, varð $dA = dx\,dy$ að $dA = |\det(D\mathbf{F}(u,v))|\,du\,dv$. Ástæðan er sú að

$$|\det(D\mathbf{F}(u,v))| = |\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{vmatrix}|$$

er flatamál samsíðungsins sem vektorarnir

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}$$

mynda.

Látum nú $\mathbf{r}$ vera stikun á fletinum S og skilgreinum vektorinn $\mathbf{n}(u,v)$ fyrir sérhvert (u,v) sem

$$\mathbf{n}(u,v) := \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v).$$

Þá er vektorinn $\mathbf{n}(u,v)$ hornréttur bæði á $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$ og hefur lengd sem er jöfn flatarmáli samsíðungsins sem $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v)$ og $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v)$ mynda.

Regla 4.5.1 Þegar fall $f(x,y,z)$ er heildað yfir flötinn $\mathcal{S}$, stikaðann af $\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}^2$, er

$$\int_{\mathcal{S}} f(x,y,z) dS := \int_{(u,v)\in\mathcal{D}} f(\mathbf{r}(u,v)) \|\mathbf{n}(u,v)\| du\, dv$$

Við skulum nú reikna út almennt hvernig lengdin af $\mathbf{n}$ er fyrir þær stikanir sem við þekkjum. Flötur $\mathcal{S}$ sem er stikaður með $\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{pmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{pmatrix}$$

hefur normalvigur

$$\mathbf{n}(u,v) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}(u,v) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial u} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial v} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial u}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial v}\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

og lengd þessa vigurs er

$$\|\mathbf{n}\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}$$

■ **Dæmi 4.15** Heildum fall $g(x,y,z) = z$ yfir þann hluta keilunnar $z = \sqrt{x^2+y^2}$ sem er á milli $z = 0$ og $z = 1$. Við byrjum á að stika yfirborðið $\mathcal{S}$ með $\mathbf{r} : \mathcal{D} \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(x,y) = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j}\; + \sqrt{x^2+y^2}\;\mathbf{k}$$

þar sem $x^2 + y^2 \leq 1$. Við reiknum nú lengdina af normalvigrinum

$$\|\mathbf{n}(x,y)| = \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)^2 + 1} = \sqrt{2}$$

og $g(\mathbf{r}) = \sqrt{x^2+y^2}$ svo við getum reiknað

$$\int_{\mathcal{S}} g(x,y,z) dS = \iint_{x^2+y^2\leq 1} \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{2} dx dy = \sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\; r\; dr\; d\theta = \frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$$

■

Skoðum nú kúluskel, sem er stikuð með $\mathbf{r} : [0,\pi] \times [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} R\sin\phi\cos\theta \\ R\sin\phi\sin\theta \\ R\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(\phi,\theta) \\ y(\phi,\theta) \\ z(\phi,\theta) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{n}(\phi,\theta) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}(\phi,\theta) \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}(\phi,\theta) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \ldots = \begin{pmatrix} R^2\sin^2\phi\cos\theta \\ R^2\sin^2\phi\sin\theta \\ R^2\sin\phi\cos\phi \end{pmatrix}$$

og þá

$$\|\mathbf{n}(\phi,\theta)\| = \ldots = R^2\sin\phi.$$

Dæmi 4.16 Heildum fallið $f(x,y,z) = x^2+y^2$ yfir hálfkúluskelina $x^2+y^2+z^2 = R^2$ og $z \geq 0$, þar sem $R > 0$ er fasti. Nú er $\mathbf{r} : [0,\pi/2]\times[0,2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} R\sin\phi\cos\theta \\ R\sin\phi\sin\theta \\ R\cos\phi \end{pmatrix}$$

stikun á hálfkúluskelinni $x^2+y^2+z^2 = R^2$ og $z \geq 0$. Þá er

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{S}} f(x,y,z)dS &= \int_{(\phi,\theta)\in[0,\pi/2]\times[0,2\pi]} f(\mathbf{r}(\phi,\theta))\|\mathbf{n}(\phi,\theta)\|d\phi\,d\theta \\
&= \int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}(R^2\sin^2\phi\cos^2\theta + R^2\sin^2\phi\sin^2\theta)R^2\sin\phi\,d\theta\right)d\phi \\
&= R^4\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^{2\pi}\sin^3\phi\,d\theta\right)d\phi = 2\pi R^4\int_0^{\pi/2}\sin^3\phi\,d\phi \\
&= \frac{4}{3}\pi R^4
\end{aligned}$$

■

Samantekið: Þegar við heildum yfir yfirborð $\mathcal{S}$ er

$$dS = \|\mathbf{n}(u,v)\|du\,dv$$

- Yfirborð stikað með $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + f(u,v)\mathbf{k}$ hefur normal með lengd

$$\|\mathbf{n}(u,v)\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2 + 1}$$

- Kúluskel stikuð í kúluhnitum með

$$\mathbf{r}(\phi,\theta) = \begin{pmatrix} R\sin\phi\cos\theta \\ R\sin\phi\sin\theta \\ R\cos\phi \end{pmatrix}$$

hefur normal með lengd

$$\|\mathbf{n}(\phi,\theta)\| = R^2\sin\phi$$

Æfingar 4.5

Æfing 4.5.1 Látum $\mathcal{S}$ vera þann hluta plansins $x+y+z=1$ sem er í fyrsta áttung ($x\geq 0$, $y \geq 0$ og $z \geq 0$). Reiknið

$$\iint_{\mathcal{S}} xyz\;dS$$

■

Æfing 4.5.2 Látum $\mathcal{S}$ vera yfirborð þess svæðis $\mathcal{T}$ sem er inní keilunni $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ og sem er líka inní kúlunni $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Heildið fallið $f(x, y, z) = x + 1$ yfir yfirborðið $\mathcal{S}$. ■