

2017 矩阵考试参考答案, 聂才, 如有错误请于本人联系

一、

(1)若有正整数以及线性空间 $V$ 中的向量组 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 使得

1.  $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性无关;

2. 任取向量 $a \in V$ 均可由 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 线性表示,

则向量组 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 称为 $V$ 的一个基。

(2)设

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + k_3 f_3(x) + k_4 f_4(x) = 0$$

可得 $k_3 = k_4 = 0$ , 又由 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 线性无关可得 $k_1 = k_2 = 0$ , 进而得知向量组线性无关。

$P[x]_4$ 中的任一向量 $a$ 可以示为 $b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ , 则该向量可以由这组向量组这样表示:

$$a = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad f_3(x) \quad f_4(x)] \begin{bmatrix} \frac{b_0 + b_1 - b_3}{2} \\ \frac{b_1 + b_3 - b_0}{2} \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

可见向量组 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 是 $P[x]_4$ 的一个基。

(3)设 $V_1, V_2$ 是 $F$ 上的两个线性空间, 如果映射 $A: V_1 \rightarrow V_2$ 满足:

1. 对任意 $a_1, a_2 \in V_1$ 有 $A(a_1 + a_2) = A(a_1) + A(a_2)$ ;

2. 对任意 $a \in V_1, k \in F$ 有 $A(a \cdot k) = A(a) \cdot k$ ,

则其成为 $V_1$ 到 $V_2$ 的线性映射。

(4)证明:

由:

$$\begin{aligned} A(f_1(x) + f_2(x)) &= \frac{d}{dx}(f_1(x) + f_2(x)) - 2 \int_0^x (f_1(t) + f_2(t)) dt \\ &= \frac{d}{dx} f_1(x) + \frac{d}{dx} f_2(x) - 2 \int_0^x f_1(t) dt - 2 \int_0^x f_2(t) dt \\ &= A(f_1(x)) + A(f_2(x)) \end{aligned}$$

和

$$A(f(x) \cdot k) = \frac{d}{dx}(f(x) \cdot k) - 2 \int_0^x f(t) \cdot k dt = A(f(x)) \cdot k$$

得 $A$ 是线性映射

(5) 给定 $F$ 上的线性空间 $V_1, V_2$ , 及线性映射 $A: V_1 \rightarrow V_2$ , 设 $\dim V_1 = n, \dim V_2 = m$ , 并设

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$$

为 $V_1$ 的一个基 (称为入口基);

$$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$$

为 $V_2$ 的一个基 (称为出口基)。记第 $j$ 个入口基向量 $\varepsilon_j \in V_1$ 在 $A$ 下的像 $A(\varepsilon_j) \in V_2$ 在出口基

$\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 下的坐标为

$$a_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} \in F^m$$

即

$$A(\varepsilon_j) = [\eta_1 \quad \eta_2 \quad \cdots \quad \eta_m] \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}, j = 1, 2, \dots, n$$

则由 $F^m$ 中的向量组 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 拼成的矩阵

$$A = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] = [a_{ij}]_{m \times n}$$

称为A在相应的入口基和出口基下的表示。

(6)

$$\begin{aligned} A(f_1(x)) &= \frac{d}{dx}(x+1) - 2 \int_0^x t + 1 dt \\ &= 1 - x^2 - 2x \end{aligned}$$

$$= [f_1(x) \quad f_2(x) \quad f_3(x) \quad f_4(x)] \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

同理

$$A(f_2(x)) = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad f_3(x) \quad f_4(x)] \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A(f_3(x)) = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad f_3(x) \quad f_4(x)] \begin{bmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

因为 $A(f_4(x)) = 3x^2 - \frac{x^4}{2} - 2x$ 无法用 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 的线性组合表示出来, 所以出口基选择 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 时, 这个线性映射无法进行矩阵表示。

二、

(1)两个矩阵 $A, B \in F^{m \times n}$ , 如果存在 $n$ 阶非奇异矩阵 $P \in F^{n \times n}$ 和 $m$ 阶非奇异矩阵 $Q \in F^{m \times m}$ 使得 $AP = QB$ , 则称这两个矩阵等价。

(2)把 $x = P\tilde{x}, y = Q\tilde{y}$ 带入 $y = Ax$ 得 $\tilde{y} = Q^{-1}AP\tilde{x}$ , 即 $AP = QB$ , 要求B为等价标准型。

$\ker A$ 的补子空间的基为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ,  $\ker A$ 为 0 空间,  $\operatorname{im} A$ 的补子空间的基为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

故设P为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q为

$$\begin{bmatrix} A \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} & A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & A \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} AP &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

易得P可逆, 由矩阵核的补子空间与像同构, 可得Q可逆, 即为所求。

(3)设矩阵 $A \in F^{n \times n}$ , 如果子空间 $W \subseteq F^n$ 满足 $A(W) \subseteq W$ , 则 $W$ 称为 $A$ 的不变子空间。

(4)求特征多项式:

$$|A - \lambda E| = \left(\lambda - \frac{3}{2}\right) \left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$$

得到 $A$ 的特征向量 $\lambda_1 = \frac{3}{2}, \lambda_2 = \frac{1}{2}$ , 再根据 $(A - \lambda_1 E)x = 0, (A - \lambda_2 E)x = 0$ 分别求得对应

的一个特征向量为 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ , 则 $A$ 的所有一维不变子空间为 $\operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, \operatorname{span}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ 。

三、

(1)设 $A(\lambda) \in F^{m \times n}[\lambda]$ , 正整数 $k \leq \operatorname{rank}(A(\lambda))$ ,  $A(\lambda)$ 的 $k$ 阶行列式因子是指 $A(\lambda)$ 的所有 $k$ 阶子式的最高公因式。 $A(\lambda)$ 的Smith标准型上对角线的非0元素称为 $A(\lambda)$ 的不变因子。

(2)设多项式矩阵为 $U(\lambda) \in F^{n \times n}[\lambda]$ , 若存在 $V(\lambda) \in F^{n \times n}[\lambda]$ 使

$$U(\lambda)V(\lambda) = V(\lambda)U(\lambda) = I_n$$

则称 $U(\lambda)$ 为单位模阵。

(3)不为 0 的一阶子式有

$$\lambda, \lambda(\lambda + 1), (\lambda + 1)^2$$

则 $D_1(\lambda)$ 为公因子1。

不为 0 的二阶子式有

$$\begin{vmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+1), \begin{vmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 \\ 0 & (\lambda+1)^2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)^3,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & (\lambda+1)^2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda+1)^2$$

则  $D_2(\lambda)$  为公因子  $\lambda(\lambda+1)$ 。

$$\text{而 } D_3(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda(\lambda+1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda+1)^3$$

于是

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = 1,$$

$$d_2(\lambda) = D_2(\lambda)/D_1(\lambda) = \lambda(\lambda+1),$$

$$d_3(\lambda) = D_3(\lambda)/D_2(\lambda) = \lambda(\lambda+1)^2$$

所以 Smith 标准型为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(\lambda+1) & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda+1)^2 \end{bmatrix}$$

四、

(1) 设两个矩阵  $A, B \in F^{n \times n}$ , 如果存在  $n$  阶非奇异矩阵  $P \in F^{n \times n}$  使得  $AP = PB$ , 则称这两个矩阵相似。

(2) 矩阵  $A, B \in F^{n \times n}$  相似与以下命题等价:

1.  $\lambda I - A, \lambda I - B \in F^{n \times n}[\lambda]$  作为多项式矩阵等价;
2.  $\lambda I - A, \lambda I - B \in F^{n \times n}[\lambda]$  具有相同的行列式因子;
3.  $\lambda I - A, \lambda I - B \in F^{n \times n}[\lambda]$  具有相同的不变因子;
4.  $\lambda I - A, \lambda I - B \in F^{n \times n}[\lambda]$  具有相同的 Smith 标准型;
5.  $\lambda I - A, \lambda I - B \in F^{n \times n}[\lambda]$  具有相同的第二规范型;
6.  $\lambda I - A, \lambda I - B \in F^{n \times n}[\lambda]$  具有相同的第三规范型;
7.  $\lambda I - A, \lambda I - B \in F^{n \times n}[\lambda]$  具有相同的初等因子组。

(3) 设该矩阵为  $A$ , 由  $\lambda I - A$  的不变因子

$$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = 1, d_3(\lambda) = (\lambda - 1)^3$$

可得  $\lambda I - A$  的 Smith 标准型为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^3 \end{bmatrix}$$

同时该矩阵也为  $\lambda I - A$  的第二和第三规范型, 则  $A$  的 Jordan 标准型为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

五、

(1) 如果一个映射  $\tau: V \times V \rightarrow R$ , 记  $\tau(v_1, v_2) = \langle v_1, v_2 \rangle$ , 满足:

1. 对称性: 对任意  $v_1, v_2 \in V, \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2, v_1 \rangle$ ;
2. 对第二个变元的线性性: 对任意  $v_1, v_2, v_3 \in V, k, l \in R$ ,  

$$\langle v_1, v_2k + v_3l \rangle = \langle v_1, v_2 \rangle k + \langle v_1, v_3 \rangle l$$
3. 正定性: 对任意  $v \in V, v \neq 0, \langle v, v \rangle > 0$ ,

则称其为  $V$  上的一个内积。

(2)

$$G(a_1, a_2, \dots, a_s) := [\langle a_i, a_j \rangle]_{s \times s} \in P^{s \times s}$$

称为该向量组的Gram矩阵。

(3)Cauchy – Schwartz不等式: 对任意向量  $\alpha, \beta, |\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\|$ 。

证明: 若  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$ , 显然成立。故证明当  $\langle \alpha, \beta \rangle \neq 0$  时:

$$|\langle \alpha, \beta \rangle| \leq \|\alpha\| \cdot \|\beta\| \Leftrightarrow (2\langle \alpha, \beta \rangle)^2 \leq 4\|\alpha\|^2 \cdot \|\beta\|^2$$

即

$$(2\langle \alpha, \beta \rangle)^2 \leq 4\langle \alpha, \alpha \rangle \cdot \langle \beta, \beta \rangle$$

等价于满足构造的二次函数

$$f(t) = \langle \alpha, \alpha \rangle t^2 + 2\langle \alpha, \beta \rangle t + \langle \beta, \beta \rangle \geq 0$$

又因

$$\begin{aligned} f(t) &= \langle \alpha, \alpha \rangle t^2 + 2\langle \alpha, \beta \rangle t + \langle \beta, \beta \rangle \\ &= \langle \alpha t, \alpha t \rangle + 2\langle \alpha t, \beta \rangle + \langle \beta, \beta \rangle \\ &= \langle \alpha t, \alpha t \rangle + \langle \alpha t, \beta \rangle + \langle \beta, \alpha t \rangle + \langle \beta, \beta \rangle \\ &= \langle \alpha t, \alpha t + \beta \rangle + \langle \beta, \alpha t + \beta \rangle \\ &= \langle \alpha t + \beta, \alpha t + \beta \rangle \end{aligned}$$

所以  $f(t) \geq 0$ , 得证。

六、

(1)设  $A \in C^{n \times r}$  列满秩, 则存在唯一的一对矩阵  $Q \in C^{n \times r}$  和  $R \in C^{r \times r}$  满足:

1.  $A = QR$ ;
2.  $Q^H Q = I_r$ ;
3.  $R$  是对角线为正实数的上三角矩阵。

(2)首先将  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$  Gram – Schmidt正交化:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

将  $\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$  单位化的结果:

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ 3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$$

则

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{10} & \frac{\sqrt{10}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

即

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \\ \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} \sqrt{10} & \frac{\sqrt{10}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{bmatrix}$$

七、

(1)若一个复方阵与它的共轭转置矩阵可以交换, 则称为正规矩阵。即 $A \in C^{n \times n}$ , 若 $AA^H = A^HA$ , 则 $A$ 为正规矩阵。

(2)任一复方阵均可以酉相似于上三角矩阵。

$$P^{-1}AP = J$$

$J$ 为对角阵, 先将 $P$ 做正交三角分解:

$$P = UT$$

则

$$U^{-1}AU = TJT^{-1}$$

其 $U$ 为酉矩阵,  $TJT^{-1}$ 为上三角矩阵。

(3)设 $A$ 为Hermite矩阵,  $\lambda$ 为其中一个特征值,  $\alpha$ 为对应的特征向量, 则:

$$\alpha^H A \alpha = \alpha^H \lambda \alpha = \lambda \alpha^H \alpha$$

同时

$$\alpha^H A \alpha = \alpha^H A^H \alpha = (A\alpha)^H \alpha = (\lambda\alpha)^H \alpha = \bar{\lambda} \alpha^H \alpha$$

即

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} \alpha^H \alpha &= \lambda \alpha^H \alpha \\ (\bar{\lambda} - \lambda) \alpha^H \alpha &= 0 \end{aligned}$$

又因 $\alpha^H \alpha \neq 0$ , 所以 $\bar{\lambda} = \lambda$ , 即 $\lambda$ 为实数。

八、

(1)设 $A \in C^{m \times n}$ , 则存在 $m$ 阶酉矩阵 $U$ 和 $n$ 阶酉矩阵 $V$ , 使得:

$$U^H A V = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}$$

其中 $r = \text{rank}(A)$ ,  $r$ 阶对角矩阵:

$$\Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}, \sigma_i > 0, i = 1, \dots, r$$

(2) 设矩阵  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ , 则存在酉矩阵  $V$  使以下式子成立:

$$V^H A^H A V = V^H \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

设矩阵  $U$  为  $AV \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} \end{bmatrix}$ , 易得  $U$  为酉矩阵。则可得奇异值分解:

$$U^H A V = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{bmatrix} = B$$

由  $y = Ax$  可得:

$$\begin{aligned} \|x\|^2 &= \|A^{-1}y\|^2 = \|(UBV^H)^{-1}y\|^2 = \|VB^{-1}(U^H y)\|^2 = \|B^{-1}\tilde{y}\|^2 \\ &= \frac{|\tilde{y}_1|^2}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \frac{|\tilde{y}_2|^2}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = 1 \end{aligned}$$

其中  $\tilde{y} = Uy$ , 即在新的标准正交基  $U$  下, 像  $A(S)$  是标准椭圆方程, 其长半轴为  $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ ,

短半轴为  $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$ 。