# 2014年秋季学期研究生课程考试试题

## （组合数学）

January 10, 2015

1. 从序列 $\{1,2,\cdots,n\}$ 个中选取 $r$ 个元素作不相邻的组合，证明其组合数为 $C(n-r+1,r)$。

Ans. 见 combinatorics_I.pdf 的第 51 页。

2. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 是由 1 和 2 组成的序列，已知从其中任意一个数开始的顺序 10 个数的和不超过 16，即对于 $1\leqslant i\leqslant 91$ 恒有 $a_i+a_{i+1}+\cdots+a_{i+9}\leqslant 16$。则至少存在 $h$ 和 $k$，$k>h\geqslant 1$，使得 $a_h+a_{h+1}+\cdots+a_k=39$。

Ans. 见 combinatorics_II.pdf 的第 9 页

3. 证明：若 $a,b\geqslant 2$，则 $R(a,b)$ 为一有限数，且 $R(a,b)\leqslant R(a-1,b)+R(a,b-1)$。

Ans. 见 combinatorics_II.pdf 的第 29 页

4. 求不超过 200 的素数个数。

Ans. $|A_2|=\left[\frac{200}{2}\right]=100, |A_3|=\left[\frac{200}{3}\right]=66, |A_5|=\left[\frac{200}{5}\right]=40, |A_7|=\left[\frac{200}{7}\right]=28,$
$|A_{11}|=\left[\frac{200}{11}\right]=18, |A_{13}|=\left[\frac{200}{13}\right]=15, |A_2\cap A_3|=\left[\frac{200}{6}\right]=33, |A_2\cap A_5|=\left[\frac{200}{10}\right]=20,$
$|A_2\cap A_7|=\left[\frac{200}{14}\right]=14, |A_2\cap A_{11}|=\left[\frac{200}{22}\right]=9, |A_2\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{26}\right]=7, |A_3\cap A_5|=\left[\frac{200}{15}\right]=13,$
$|A_3\cap A_7|=\left[\frac{200}{21}\right]=9, |A_3\cap A_{11}|=\left[\frac{200}{33}\right]=6, |A_3\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{39}\right]=5, |A_5\cap A_7|=\left[\frac{200}{35}\right]=5,$
$|A_5\cap A_{11}|=\left[\frac{200}{55}\right]=3, |A_5\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{65}\right]=3, |A_7\cap A_{11}|=\left[\frac{200}{77}\right]=2, |A_7\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{91}\right]=2,$
$|A_{11}\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{143}\right]=1, |A_2\cap A_3\cap A_5|=\left[\frac{200}{30}\right]=6, |A_2\cap A_3\cap A_7|=\left[\frac{200}{42}\right]=4,$
$|A_2\cap A_3\cap A_{11}|=\left[\frac{200}{66}\right]=3, |A_2\cap A_3\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{78}\right]=2, |A_2\cap A_5\cap A_7|=\left[\frac{200}{70}\right]=2,$
$|A_2\cap A_5\cap A_{11}|=\left[\frac{200}{110}\right]=1, |A_2\cap A_5\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{130}\right]=1, |A_2\cap A_7\cap A_{11}|=\left[\frac{200}{154}\right]=1,$
$|A_2\cap A_7\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{182}\right]=1, |A_2\cap A_{11}\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{286}\right]=0, |A_3\cap A_5\cap A_7|=\left[\frac{200}{105}\right]=1,$
$|A_3\cap A_5\cap A_{11}|=\left[\frac{200}{165}\right]=1, |A_3\cap A_5\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{195}\right]=1, |A_3\cap A_7\cap A_{11}|=\left[\frac{200}{231}\right]=0,$
$|A_3\cap A_7\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{273}\right]=0, |A_3\cap A_{11}\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{429}\right]=0, |A_5\cap A_7\cap A_{11}|=\left[\frac{200}{385}\right]=0,$
$|A_5\cap A_7\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{455}\right]=0, |A_5\cap A_{11}\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{715}\right]=0, |A_7\cap A_{11}\cap A_{13}|=\left[\frac{200}{1001}\right]=0,$

$total=200-(100+66+40+28+18+15)+(33+20+14+9+7+13+9+6+5+5+3+3+2+2+1)-(6+4+3+2+2+1+1+1+1+0+1+1+1+0+0+0+0+0+0+0)=41$

$2,3,5,7,11,13$ 为素数，1 不是素数，所以 200 以内的素数总数为 $41+6-1=46$。

5. 求序列 $1,1\times 4,1\times 4\times 7,\cdots,1\times 4\times 7\times\cdots\times(3n+1),\cdots$ 的指数母函数。

Ans. 见 combinatorics_IV.pdf 的第 11 页。

6. 证明：$\sum\limits_{k=0}^{n} 2^k C_{2n-k}^{n} = 2^{2n}$。

Ans. 见 combinatorics_IV.pdf 的第 38，39 页

7. 求解递归关系 $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}\ (n \geqslant 2), F_0 = 1, F_1 = 1$。

Ans. 见 combinatorics_V.pdf 的第 40 页。

8. 证明：错位排列数 $D_n$ 满足递推关系式 $D_1 = 0, D_2 = 1, D_n = (n-1)(D_{n-2} + D_{n-1}) \quad (n \geqslant 3)$ 和 $D_1 = 0, D_n = nD_{n-1} + (-1)^n \quad (n \geqslant 2)$

Ans. 见 combinatorics_III.pdf 的第 31，32 页。

9. 长为 $2n$ 的 $1, -1$ 序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, 2n)$，问这样序列个数是多少？

Ans. 对于长为 $2n$ 的 $1, -1$ 序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \neq 0\ (k = 1, 2, \cdots, 2n)$，若 $a_1 = 1 > 0$，那么 $a_2 \neq -1$，否则 $a_1 + a_2 = 0$，从而 $a_1 + a_2 > 0$。可以证明 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, 2n)$。否则存在 $m \in \{1, 2, \cdots, 2n\}$，使得 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} > 0$ 且 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m \ngtr 0$。而 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m \neq 0$，必有 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m < 0$。推知 $a_m = -1$。但由 $a_1 + a_2 + \cdots + a_{m-1} > 0$ 知，即使 $a_m = -1$ 也只能使 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 0$，矛盾。

同理，对于长为 $2n$ 的 $1, -1$ 序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \neq 0\ (k = 1, 2, \cdots, 2n)$，若 $a_1 = -1 < 0$，则 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k < 0\ (k = 1, 2, \cdots, 2n)$。

所以前 $k$ 项和不为 0 的 $2n$ 长 $1, -1$ 序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 的集合按照 $a_1 > 0$ 和 $a_1 < 0$ 被分成两个不相交的集合。这两个集合间有一个对等关系 $f$，对于长为 $2n$ 的 $1, -1$ 序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, 2n)$，令 $f(a_1, a_2, \cdots, a_{2n}) = (-a_1, -a_2, \cdots, -a_{2n})$。显然 $(-a_1) + (-a_2) + \cdots + (-a_k) = -(a_1 + a_2 + \cdots + a_k) < 0\ (k = 1, 2, \cdots, 2n)$。$f$ 显然为双射。所以满足给定条件的序列个数为前 $k$ 项和不为 0 的 $2n$ 长 $1, -1$ 序列 $a_1, a_2, \cdots, a_{2n}$ 集合基数 $C_{2n}^{n}$ 的一半，为 $\frac{1}{2}C_{2n}^{n}$。

10. 用红蓝两色对正六角形的顶点进行着色，要求三红三蓝，共有多少种不同的着色方案？如果要求两红四蓝，共有多少种不同的着色方案？

Ans.

| $D_6$中的$f$ | 循环因子分解 | $type(f)$ |
|---|---|---|
| $\rho_6^0$ | $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$ | $(6,0,0,0,0,0)$ |
| $\rho_6^1$ | $(123456)$ | $(0,0,0,0,0,1)$ |
| $\rho_6^2$ | $(135)(246)$ | $(0,0,2,0,0,0)$ |
| $\rho_6^3$ | $(14)(25)(36)$ | $(0,3,0,0,0,0)$ |
| $\rho_6^4$ | $(153)(246)$ | $(0,0,2,0,0,0)$ |
| $\rho_6^5$ | $(165432)$ | $(0,0,0,0,0,1)$ |
| $\tau_1$ | $(1)(4)(26)(35)$ | $(2,2,0,0,0,0)$ |
| $\tau_2$ | $(2)(5)(13)(46)$ | $(2,2,0,0,0,0)$ |
| $\tau_3$ | $(3)(6)(24)(15)$ | $(2,2,0,0,0,0)$ |
| $\tau_4$ | $(12)(36)(45)$ | $(0,3,0,0,0,0)$ |
| $\tau_5$ | $(23)(14)(56)$ | $(0,3,0,0,0,0)$ |
| $\tau_6$ | $(16)(25)(34)$ | $(0,3,0,0,0,0)$ |

循环指数为$P_{D_6}(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6)=\dfrac{1}{12}(z_1^6+2z_6+2z_3^2+4z_2^3+3z_1^2z_2^2)$

用红蓝双色着色的生成函数为

$$\begin{aligned}P_{D_6}(r^1+b^1,r^2+b^2,r^3+b^3,r^4+b^4,r^5+b^5,r^6+b^6)=&\frac{1}{12}((r^1+b^1)^6+2(r^6+b^6)+2(r^3+b^3)^2\\&+4(r^2+b^2)^3+3(r^1+b^1)^2(r^2+b^2)^2)\end{aligned}$$

$r^3b^3$ 系数为 $\dfrac{1}{12}(C_6^3+2C_2^1+3(C_2^1C_2^1))=\dfrac{1}{12}(20+4+12)=3$

$r^2b^4$ 系数为 $\dfrac{1}{12}(C_6^2+4C_3^1+3(C_2^0C_2^1+C_2^2C_2^0))=\dfrac{1}{12}(15+12+9)=3$