

2018 矩阵考试参考答案，聂才，如有错误请于本人联系

V1.1 更改了三.(3)的答案

一、

(1) 设

$$k_1 f_1(x) + k_2 f_2(x) + k_3 f_3(x) + k_4 f_4(x) = 0$$

可得 $k_3 = k_4 = 0$ ，又由 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 线性无关可得 $k_1 = k_2 = 0$ ，进而得知向量组线性无关。

$P[x]_4$ 中的任一向量 a 可以示为 $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3$ ，则该向量可以由这组向量组这样表示：

$$a = [f_1(x) \quad f_2(x) \quad f_3(x) \quad f_4(x)] \begin{bmatrix} \frac{b_0 + b_1 - b_3}{2} \\ b_1 + b_3 - b_0 \\ \frac{b_2}{2} \\ b_3 \end{bmatrix}$$

可见向量组 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x)$ 是 $P[x]_4$ 的一个基。

同理设

$$k_1 g_1(x) + k_2 g_2(x) + k_3 g_3(x) + k_4 g_4(x) + k_5 g_5(x) = 0$$

明显 $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k_5 = 0$ ，向量组线性无关。

$P[x]_5$ 中的任一向量 a 可以示为 $b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4$ ，则该向量可以由这组向量组这样表示：

$$a = [g_1(x) \quad g_2(x) \quad g_3(x) \quad g_4(x) \quad g_5(x)] \begin{bmatrix} b_0 - 2b_1 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \frac{b_4}{2} \end{bmatrix}$$

可见向量组 $g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x), g_5(x)$ 是 $P[x]_5$ 的一个基。

(2) 证明：

由：

$$\begin{aligned} A(f_1(x) + f_2(x)) &= 2 \frac{d}{dx} (f_1(x) + f_2(x)) - \int_0^x (f_1(t) + f_2(t)) dt \\ &= 2 \frac{d}{dx} f_1(x) + 2 \frac{d}{dx} f_2(x) - \int_0^x f_1(t) dt - \int_0^x f_2(t) dt \\ &= A(f_1(x)) + A(f_2(x)) \end{aligned}$$

和

$$A(f(x) \cdot k) = 2 \frac{d}{dx} (f(x) \cdot k) - \int_0^x f(t) \cdot k dt = A(f(x)) \cdot k$$

得 A 是线性映射

(3)

$$A(f_1(x)) = 2 \frac{d}{dx} (x + 1) - \int_0^x t + 1 dt$$

$$= 2 - \frac{x^2}{2} - x$$

$$= [g_1(x) \quad g_2(x) \quad g_3(x) \quad g_4(x) \quad g_5(x)] \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

同理

$$A(f_2(x)) = [g_1(x) \quad g_2(x) \quad g_3(x) \quad g_4(x) \quad g_5(x)] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A(f_3(x)) = [g_1(x) \quad g_2(x) \quad g_3(x) \quad g_4(x) \quad g_5(x)] \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A(f_4(x)) = [g_1(x) \quad g_2(x) \quad g_3(x) \quad g_4(x) \quad g_5(x)] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 6 \\ 0 \\ 1 \\ -\frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

故A在(1)中给出的一对基下的矩阵表示为：

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -8 & 2 \\ -1 & 1 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 6 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

二、

(1) 设矩阵 $A \in P^{n \times n}$ ，如果子空间 $W \subseteq F^n$ 满足 $A(W) \subseteq W$ ，则 W 称为 A 的不变子空间。由 $A(ker A) = 0 \subseteq ker A$ ，可得 $ker A$ 是 A 的一个不变子空间。

(2) 由 $Ax = 0$ 可以求得 $ker A$ 的一个基为 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 。

(3) $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 可以扩张为 P^3 的一个基为 $\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ 。

(4) 基矩阵为

$$X = \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

设该矩阵表示为B, 由 $AX = XB$ 得:

$$\begin{aligned} B &= X^{-1}AX \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 28 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & -25 \\ 0 & 0 & \frac{13}{2} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

三、

(1) 设 $A(\lambda) \in F^{m \times n}[\lambda]$, 正整数 $k \leq \text{rank}(A(\lambda))$, $A(\lambda)$ 的 k 阶行列式因子是指 $A(\lambda)$ 的所有 k 阶子式的最高公因式。 $A(\lambda)$ 的Smith标准型上对角线的非0元素称为 $A(\lambda)$ 的不变因子。

(2) 设多项式矩阵为 $U(\lambda) \in F^{n \times n}[\lambda]$, 若存在 $V(\lambda) \in F^{n \times n}[\lambda]$ 使

$$U(\lambda)V(\lambda) = V(\lambda)U(\lambda) = I_n$$

则称 $U(\lambda)$ 为单位模阵。

(3) 不为0的一阶子式有

$$\lambda, (\lambda - 1)(\lambda + 1), (\lambda - 1)^2$$

则 $D_1(\lambda)$ 为公因子1。

不为0的二阶子式有

$$\begin{vmatrix} (\lambda - 1)(\lambda + 1) & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)(\lambda + 1), \begin{vmatrix} (\lambda - 1)(\lambda + 1) & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)^2 \end{vmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda - 1)^3,$$

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & (\lambda - 1)^2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda - 1)^2$$

则 $D_2(\lambda)$ 为公因子 $\lambda - 1$ 。

$$\text{而 } D_3(\lambda) = \begin{vmatrix} (\lambda - 1)(\lambda + 1) & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^2 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)^3$$

于是

$$d_1(\lambda) = D_1(\lambda) = 1,$$

$$d_2(\lambda) = D_2(\lambda)/D_1(\lambda) = \lambda - 1,$$

$$d_3(\lambda) = D_3(\lambda)/D_2(\lambda) = \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2$$

所以Smith标准型为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(\lambda + 1)(\lambda - 1)^2 \end{bmatrix}$$

四、

(1) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, 由 $\lambda I - A$ 的不变因子

$$d_1(\lambda) = 1, d_2(\lambda) = \lambda - 1, d_3(\lambda) = (\lambda - 1)^2$$

可得 $\lambda I - A$ 的Smith标准型为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^2 \end{bmatrix}$$

则 $\lambda I - A$ 的第二规范型为

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda - 1)^2 \end{bmatrix}$$

同时也为该矩阵的第三规范型。则 A 的Jordan标准型为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = J$$

设相似变换矩阵为 P , 即 $P^{-1}AP = J$, 将 P 按照Jordan块大小进行列分块为 $[P_1 \ P_2]$, 易

得 A 的特征向量为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 特征值为 1。可知 P_1 为特征向量其中一个。再把 P_2 列分块为

$[p_1 \ p_2]$, 由

$$\begin{aligned} (\lambda I - A)p_1 &= 0 \\ (\lambda I - A)p_2 &= p_1 \end{aligned}$$

得 p_1 为另一个特征向量, 而 $\lambda I - A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, 所以 p_1 不能为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 则可得 p_1 为 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, p_2

为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 进而 P_1 为 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 所求的变换矩阵 P 为:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

五、

(1) 设子空间 $\text{span}(a_1, a_2)$ 的基矩阵 $[a_1 \ a_2]$ 为 W , 先求得 β 到子空间 $\text{span}(a_1, a_2)$ 的投影 x 为:

$$\begin{aligned} x &= W(W^H W)^{-1} W^H \beta \\ &= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}
\min_{x_1, x_2 \in P} \|\beta - a_1 x_1 - a_2 x_2\| &= \|\beta - x\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{2}{3} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\| \\
&= \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \right\| = \frac{2}{\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

(2) 首先将 a_1, a_2 标准正交化为 $\widetilde{a}_1, \widetilde{a}_2$:

$$\widetilde{a}_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}$$

$$\widetilde{a}_2 = \frac{a_2 - a_1 \frac{\langle a_2, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle}}{\left\| a_2 - a_1 \frac{\langle a_2, a_1 \rangle}{\langle a_1, a_1 \rangle} \right\|} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ \frac{3}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{\sqrt{18}} \end{bmatrix}$$

则正交投影矩阵为

$$[\widetilde{a}_1 \quad \widetilde{a}_2][\widetilde{a}_1 \quad \widetilde{a}_2]^H$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{18}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{3}{\sqrt{18}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{18}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{18}} & \frac{3}{\sqrt{18}} & \frac{2}{\sqrt{18}} & \frac{2}{\sqrt{18}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{18} \begin{bmatrix} 4 & -6 & -2 & 4 \\ -6 & 12 & 6 & 0 \\ -2 & 6 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 16 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

六、

(1) 设 $A \in C^{n \times r}$ 列满秩, 则存在唯一的一对矩阵 $Q \in C^{n \times r}$ 和 $R \in C^{r \times r}$ 满足:

1. $A = QR$;
2. $Q^H Q = I_r$;
3. R 是对角线为正实数的上三角矩阵。

(2)

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{2}{3} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & \frac{4}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \\ -1 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{\sqrt{45}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{45}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{45}}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{4}{\sqrt{45}} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{45}} \\ \frac{2}{3} & \frac{5}{\sqrt{45}} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{45}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{45}}{3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

七、

(1) 若一个复方阵与它的共轭转置矩阵可以交换, 则称为正规矩阵。即 $A \in C^{n \times n}$, 若 $AA^H = A^H A$, 则 A 为正规矩阵。

(2) 任一复方阵均可以酉相似于上三角矩阵。

$$P^{-1}AP = J$$

J 为对角阵, 先将 P 做正交三角分解:

$$P = UT$$

则

$$U^{-1}AU = TJT^{-1}$$

其 U 为酉矩阵, TJT^{-1} 为上三角矩阵。

(3) $U \in C^{n \times n}$ 为酉矩阵与下列条件等价:

1. U^H 也为酉矩阵;
2. $U^H U = I_n$;
3. $U U^H = I_n$;
4. 对任意 $x, y \in C^n, \langle Ux, Uy \rangle = \langle x, y \rangle$;
5. 对任意 $x \in C^n, \|Ux\| = \|x\|$ 。

设 U 为酉矩阵, λ 为其一个特征值, x 为对应的特征向量, 即 $Ux = \lambda x$, 则

$$(Ux)^H Ux = \lambda^2 x^H x$$

$$x^H U^H Ux = \lambda^2 x^H x$$

$$x^H x = \lambda^2 x^H x$$

$$\lambda^2 = 1$$

故可得酉矩阵的所有特征值的模均为1。

八、

(1) 设 $A \in C^{m \times n}$, 则存在 m 阶酉矩阵 U 和 n 阶酉矩阵 V , 使得:

$$U^H A V = \begin{bmatrix} \Sigma_r & 0_{r \times (n-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (n-r)} \end{bmatrix}$$

其中 $r = \text{rank}(A)$, r 阶对角矩阵:

$$\Sigma_r = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{bmatrix}, \sigma_i > 0, i = 1, \dots, r$$

(2) 设矩阵 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, 则存在酉矩阵 V 使以下式子成立:

$$V^H A^H A V = V^H \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{bmatrix}$$

设矩阵 U 为 $AV \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}} \end{bmatrix}$, 易得 U 为酉矩阵。则可得奇异值分解:

$$U^H A V = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} \end{bmatrix} = B$$

由 $y = Ax$ 可得:

$$\begin{aligned}\|x\|^2 &= \|A^{-1}y\|^2 = \|(UBV^H)^{-1}y\|^2 = \|VB^{-1}(U^Hy)\|^2 = \|B^{-1}\tilde{y}\|^2 \\ &= \frac{|\widetilde{y}_1|^2}{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \frac{|\widetilde{y}_2|^2}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = 1\end{aligned}$$

其中 $\tilde{y} = Uy$ ，即在新的标准正交基 U 下，像 $A(S)$ 是标准椭圆方程，其长半轴为 $\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}}$ ，短半轴为 $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$