哈尔滨工业大学(深圳)

2018年秋季学期期末考试试卷

HIT Shenzhen Examination Paper

Course Name:

矩阵分析

Lecturer:

严质彬

Question	One	Two	Three	Four	Five	Six	Seven	Eight	Nine	Ten	Total
Mark											

一、 $(20 \, f)$ P[x] 表示所有次数小于n 的实系数多项式的集合,它是P 上的向量空间(以多项式为"向量 "). (1). 证明向量组

$$f_1(x) = x+1$$
, $f_2(x) = x-1$, $f_3(x) = x^2$, $f_4(x) = x^3+1$

是P[x],的一个基,向量组

$$g_1(x) = 1$$
, $g_2(x) = x + 2$, $g_3(x) = x^2$, $g_4(x) = x^3$, $g_5(x) = 2x^4$

是 $P[x]_5$ 的一个基; (2). 定义映射 $A:P[x]_4 \to P[x]_5$ 如下:

$$A(f(x)) = 2\frac{d}{dx}f(x) - \int_0^x f(t)dt,$$

证明 A 是线性映射; (3). 求 A 在(1)中给出的一对基下的矩阵表示.

二、(20 分) (1). 设 $A \in P^{n \times n}$, 写出A的不变子空间的定义, 并证明 ker A 是A的一个不变子空间; (2). 设

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

求子空间 $\ker A$ 的一个基; (3). 将(2)中求出的基扩张成 P^3 的一个基; (4).求 A 所确定的 P^3 到 P^3 的线性变 换xα y = Ax 在(3)中给出的基下的矩阵表示.

三、(10 分) (1). 什么是 λ 矩阵的行列式因子和不变因子? (2). 什么是单位模阵? (3). 求 λ 矩阵

$$\begin{bmatrix} \lambda^2 - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 - 2\lambda + 1 \end{bmatrix}$$

的 Smith 标准型.

四、(10分) 求复数域 X 上的矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

的 Jordan 标准型, 并求出相应的相似变换矩阵.

五、(10分)(1). 已知P⁴中三个向量

$$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

求解最小值问题 $\min_{x_1,x_2\in P}\|\beta-\alpha_1x_1-\alpha_2x_2\|$; (2). 求 P^4 到子空间 $span\{\alpha_1,\alpha_2\}$ 的正交投影矩阵.

六、(10分)(1). 写出矩阵的正交-三角分解定理; (2). 求矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

的正交-三角分解.

七、(10) (1). 什么是正规矩阵? (2). 写出关于正规矩阵的 Schur 定理; (3). 写出酉矩阵的四个等 价条件,并证明酉矩阵的所有特征值的模均为1.

八、(10 分) (1). 什么是矩阵的奇异值分解? (2) 定义映射 $A: P^2 \rightarrow P^2$ 如下

$$y = A(x)$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} x$$

证明单位圆周

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} : x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

在映射 A 下的像 A(S) 是椭圆, 并求出该椭圆的长半轴和短半轴