- $\LaTeX$ of README.md may fail to display on GitHub. For better experience, pls check report in pdf format.

CS205 C/ C++ Programming Project04

Matrix Multiplication in C

Name: 樊斯特(Fan Site)

SID: 12111624

项目结构

```
```

Part 1 - Analysis

题目重述&主要思路

本题目要求**使用C语言**实现正确而尽可能高效的矩阵乘法，使用`OpenMP`，`SIMD`等工具提升效率，并与`OpenBLAS`库中的矩阵乘法在各平台进行效率比较。

根据题目描述，题目要求的矩阵乘法需要支持的主要功能为：

1. 实现朴素乘法，用于检验高效矩阵乘法的正确性
2. `OpenMP`，`SIMD`等工具实现提升效率的矩阵乘法
3. 测试16×16、128×128、$1k \times 1k$、$8k \times 8k$、$64k \times 64k$等尺寸的矩阵乘法效率
4. 与`OpenBLAS`进行效率比较
5. 进行`ARM`、`X86`等多平台效率测试

本项目完成了上述基础要求，并在其中几项进行了拓展，本次报告将侧重于矩阵乘法的优化过程，与上次报告重复处将略讲，详见下文。

模型假设

本项目按题设要求继承了前一项目的数据类型，在实现矩阵乘法时以效率为主，小幅降低了安全性检查的严格程度。

- 单个元素均为4字节`float`类型，有效位数默认为6位，数据范围约$-3.4 * 10^{-38} < val < 3.4 * 10^{38}$
- 参与运算的矩阵均为**方阵**，且阶数为**8的倍数**
- 可接受`<0.01`的单精度浮点数计算误差

Part 2 - Code

宏与结构体

```c
//matrix.c
#define float_equal(x, y) ((x-y)<1e-3&&(y-x)<1e-3)

typedef struct Matrix_
{
    size_t row;
    size_t col;
    float *data;
} Matrix;
```

在题设条件下，矩阵尺寸默认$row = col$(其实可以存成一个，但部分矩阵乘法函数简单修改后可支持非方阵情况)，使用`size_t`存储，满足跨平台需求。

使用浮点型指针指向存储数据，采用行优先方式存储，空间由创建函数动态分配，分配后可通过释放函数释放。

创建、释放与合法性检查

```c
//matrix.c
Matrix *createMatFromArr(size_t row, size_t col,float *src)
{
    if (row==0||col==0)
    {
        fprintf(stderr, "Rows/cols number is 0.\n");
        return NULL;
    }
    if(src==NULL)
    {
        fprintf(stderr,"Source array is NULL.\n");
        return NULL;
    }
    Matrix *pMatrix = malloc(sizeof(Matrix));
    if (pMatrix == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "Failed to allocate memory for a matrix.\n");
        return NULL;
    }
    pMatrix->row = row;
    pMatrix->col = col;
    pMatrix->data = malloc(sizeof(float) * row * col);
    if (pMatrix->data == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "Failed to allocate memory for the matrix data.\n");
        free(pMatrix);
        return NULL;
    }
    memcpy(pMatrix->data,src,sizeof(float)*row*col);
    return pMatrix;
}
```

以从数组创建矩阵为例，本项目该部分与前一项目的差别在于：优化了安全性检查与报错，使用fprintf的stderr报错，使其变得更加合理和规范，同时采用了memcpy()代替手动赋值。

```c
//matrix.c
bool releaseMat(Matrix **pMatrix)
{
    if (pMatrix == NULL)
    {
        fprintf(stderr,"Pointer to the pointer of matrix is NULL.\n");
        return false;
    }
    if((*pMatrix)==NULL)
    {
        fprintf(stderr,"The pointer to the matrix is NULL.\n");
        return false;
    }
    if((*pMatrix)->data==NULL)
    {
        fprintf(stderr,"The pointer to the matrix data is NULL.\n");
        return false;
    }
    free((*pMatrix)->data);
    free(*pMatrix);
    *pMatrix = NULL;
    return true;
}
```

释放矩阵与此前的差别同样在与报错与安全性的优化。

```c
//matmul.c
bool safe_check(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst)
{
    if (src1 == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "File %s, Line %d, Function %s(): The 1st parameter is
NULL.\n", __FILE__, __LINE__,
                __FUNCTION__);
        return false;
    }
    else if (src1->data == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "%s(): The 1st parameter has no valid data.\n",
__FUNCTION__);
        return false;
    }
    if (src2 == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "File %s, Line %d, Function %s(): The 2nd parameter is
NULL.\n", __FILE__, __LINE__,
                __FUNCTION__);
        return false;
    }
    else if (src2->data == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "%s(): The 2nd parameter has no valid data.\n",
__FUNCTION__);
        return false;
```

```c
    }
    if (dst == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "File %s, Line %d, Function %s(): The 3rd parameter is
NULL.\n", __FILE__, __LINE__,
                __FUNCTION__);
        return false;
    }
    else if (dst->data == NULL)
    {
        fprintf(stderr, "%s(): The 3rd parameter has no valid data.\n",
__FUNCTION__);
        return false;
    }
    if (src1->row != src1->col || src1->row != src2->row || src1->col != src2-
>col || src1->row != dst->row || src1->col != dst->col)
    {
        fprintf(stderr, "The input and the output do not match, they should have
the same square size.\n");
        fprintf(stderr, "Their sizes are (%zu,%zu), (%zu,%zu) and (%zu,%zu).\n",
                src1->row, src1->col, src2->row, src2->col, dst->row, dst->col);
        return false;
    }
    return true;
}
```

在进行矩阵乘法前，本项目对三个参数矩阵都进行了安全性检查，并用更规范的形式报错和处理。此处的最后一个`if`限定了三个矩阵应均为方阵，修改条件后可解除方阵要求。

矩阵乘法

```c
//matmul.h
bool safe_check(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst);

bool matmul_plain(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst);

bool matmul_divide(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst);

bool matmul_omp(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst);

bool matmul_avx_vec8(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst);

bool matmul_avx_block8(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst);

bool matmul_thread(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst, size_t num_threads);
```

项目实现了6个矩阵乘法函数，依次为：朴素乘法，4×4分块乘法，`OpenMP`优化朴素乘法，向量点乘级`SIMD`优化朴素乘法，`SIMD`优化8×8分块乘法，手动多线程算法(基于`pthread.h`)。

下文将逐个展开解析优化策略和原理，效率比较部分将在后文体现。

朴素乘法

```
bool matmul_plain(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst)
{
    if (!safe_check(src1, src2, dst))
    {
        return false;
    }
    size_t n = src1->row;
    for (size_t i = 0; i < n; i++)
    {
        size_t i_n = i * n;
        for (size_t k = 0; k < n; k++)
        {
            float t = src1->data[i_n + k];
            size_t k_n = k * n;
            for (size_t j = 0; j < n; j++)
            {
                dst->data[i_n + j] += t * src2->data[k_n + j];
            }
        }
    }
    return true;
}
```

说是朴素，但要是为了衬托其他算法把朴素写得太朴素没什么意思，所以这个朴素版其实是小幅优化后的朴素版，继承了上一项目的乘法，时间复杂度$O(N^3)$。

硬件优化：通过交换循环顺序将内存访问的跳跃次数从n^3+n^2-n降低到n^2次。

软件优化：暂存了$i \times n$和$k \times n$，小幅减少了乘法的次数。

4×4分块乘法(Tiling)

```
bool matmul_divide(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst)
{
    if (!safe_check(src1, src2, dst))
    {
        return false;
    }
    size_t n = src1->row;
    size_t k, j;
    float *data1 = src1->data;
    float *data2 = transpose(src2->data, n);
    float *data3 = dst->data;
    for (size_t i = 0; i < n; i += 4)
    {
        for (j = 0; j < n; j += 4)
        {
            for (k = 0; k < n; k += 4)
            {
                for (size_t i2 = 0; i2 < 4; i2++)
                {
                    for (size_t j2 = 0; j2 < 4; j2++)
```

```
                        {
                            for (size_t k2 = 0; k2 < 4; k2++)
                            {
                                data3[(i + i2) * n + (j + j2)] += data1[(i + i2) * n + (k + k2)] * data2[(k + k2) + (j + j2) * n];
                            }
                        }
                    }
                }
            }
        }
    return true;
}
```

硬件优化：在大规模矩阵乘法时，两个元素间隔可能很远，因此CPU往往需要将两个元素都加载进`cache`，耗费大量访存时间。考虑到小矩阵的数据可以存储进`CPU cache`中，我们可以将原先的大矩阵按行和列切割成若干4×4的小块再进行运算。同时，通过转置矩阵将内存访问变得连续。

OpenMP优化朴素乘法

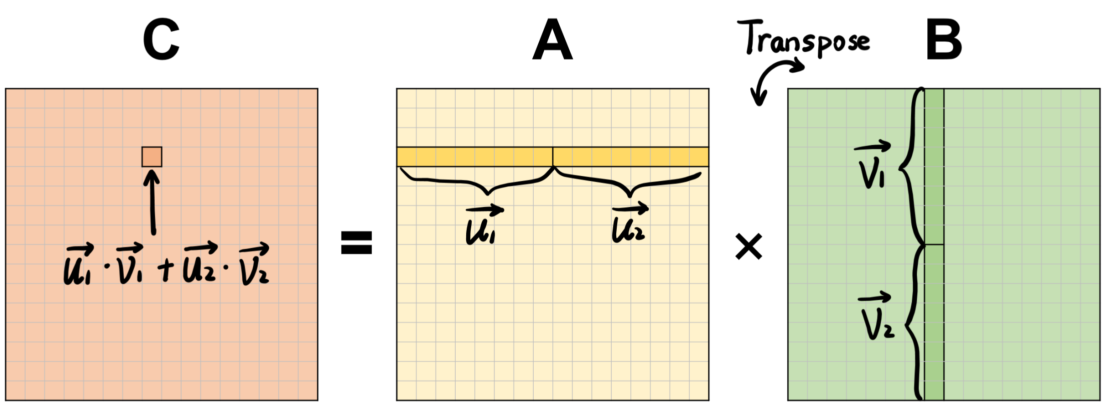
```
bool matmul_omp(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst)
{
    if (!safe_check(src1, src2, dst))
    {
        return false;
    }
    register size_t n = src1->row;
    register size_t k, j;
#pragma omp parallel
    {
#pragma omp for private(k, j)
        for (register size_t i = 0; i < n; i++)
        {
            size_t i_n = i * n;
            for (k = 0; k < n; k++)
            {
                float t = src1->data[i_n + k];
                size_t k_n = k * n;
                for (j = 0; j < n; j++)
                {
                    dst->data[i_n + j] += t * src2->data[k_n + j];
                }
            }
        }
    }
    return true;
}
```

硬件优化：将原本串行执行的多次乘法通过`OpenMP`变为多线程并行，双线程效率较单线程折半，四线程较双线程接近折半，不过在线程数增加的过程中耗时减少的幅度逐渐降低，但总体而言较朴素算法有若干倍的提升，详见下文测试部分。

向量化SIMD优化

```
bool matmul_avx_vec8(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst)
{
    if (!safe_check(src1, src2, dst))
    {
        return false;
    }
    size_t n = src1->row;
    size_t k, j;
    float *data1 = src1->data;
    float *data2 = transpose(src2->data, n);
    float *data3 = dst->data;
#pragma omp parallel
    for (size_t i = 0; i < n; i++)
    {
#pragma omp for private(k, j)
        for (j = 0; j < n; j++)
        {
            __m256 sx = _mm256_setzero_ps();
            for (k = 0; k < n; k += 8)
            {
                sx = _mm256_add_ps(sx, _mm256_mul_ps(_mm256_loadu_ps(data1 + i * n + k), _mm256_loadu_ps(data2 + j * n + k)));
            }
            sx = _mm256_add_ps(sx, _mm256_permute2f128_ps(sx, sx, 1));
            sx = _mm256_hadd_ps(sx, sx);
            data3[i * n + j] = _mm256_cvtss_f32(_mm256_hadd_ps(sx, sx));
        }
    }
    return true;
}
```

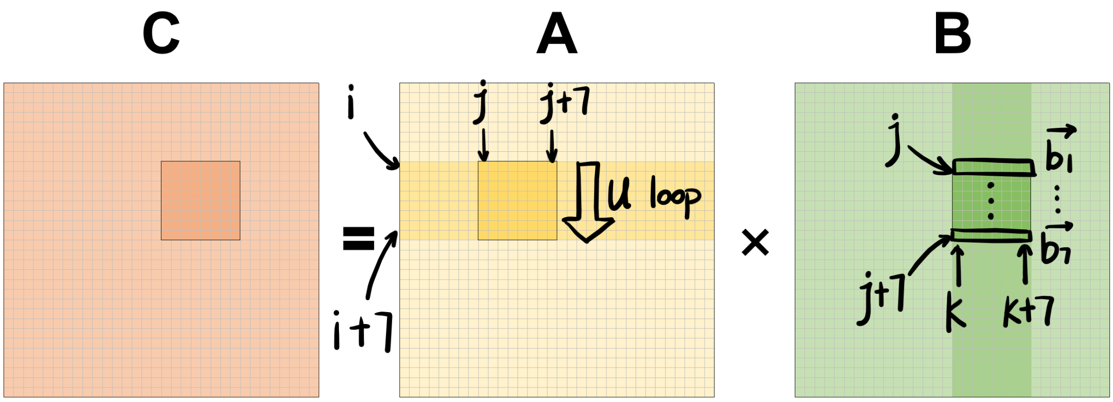
由于计算对象矩阵默认阶数为8的倍数，因此可以将8个连续的元素使用`__m256`进行合并，再进行批量乘法。在使用了`OpenMP`并行优化的基础上，进行维数为8的向量乘法代替8次串行的逐元素运算，将效率再次大幅提高。



8×8分块SIMD优化

```
bool matmul_avx_block8(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst)
{
    if (!safe_check(src1, src2, dst))
    {
        return false;
    }
    register size_t n = src1->row;
    float *data1 = src1->data;
    float *data2 = src2->data;
    float *data3 = dst->data;

#pragma omp parallel for
    for (register size_t i = 0; i < n; i += 8)
    {
        for (register size_t j = 0; j < n; j += 8)
        {
            for (register size_t k = 0; k < n; k += 8)
            {
                for (register size_t u = i; u < i + 8; u++)
                {
                    __m256 a_1 = _mm256_set1_ps(data1[u * n + j]);
                    __m256 a_2 = _mm256_set1_ps(data1[u * n + j + 1]);
                    __m256 a_3 = _mm256_set1_ps(data1[u * n + j + 2]);
                    __m256 a_4 = _mm256_set1_ps(data1[u * n + j + 3]);
                    __m256 a_5 = _mm256_set1_ps(data1[u * n + j + 4]);
                    __m256 a_6 = _mm256_set1_ps(data1[u * n + j + 5]);
                    __m256 a_7 = _mm256_set1_ps(data1[u * n + j + 6]);
                    __m256 a_8 = _mm256_set1_ps(data1[u * n + j + 7]);

                    __m256 b_1 = _mm256_loadu_ps(data2 + j * n + k);
                    __m256 b_2 = _mm256_loadu_ps(data2 + (j + 1) * n + k);
                    __m256 b_3 = _mm256_loadu_ps(data2 + (j + 2) * n + k);
                    __m256 b_4 = _mm256_loadu_ps(data2 + (j + 3) * n + k);
                    __m256 b_5 = _mm256_loadu_ps(data2 + (j + 4) * n + k);
                    __m256 b_6 = _mm256_loadu_ps(data2 + (j + 5) * n + k);
                    __m256 b_7 = _mm256_loadu_ps(data2 + (j + 6) * n + k);
                    __m256 b_8 = _mm256_loadu_ps(data2 + (j + 7) * n + k);

                    b_1 = _mm256_mul_ps(b_1, a_1);
                    b_2 = _mm256_mul_ps(b_2, a_2);
                    b_3 = _mm256_mul_ps(b_3, a_3);
                    b_4 = _mm256_mul_ps(b_4, a_4);
                    b_5 = _mm256_mul_ps(b_5, a_5);
                    b_6 = _mm256_mul_ps(b_6, a_6);
                    b_7 = _mm256_mul_ps(b_7, a_7);
                    b_8 = _mm256_mul_ps(b_8, a_8);

                    __m256 t_1 = _mm256_add_ps(b_1, b_2);
                    __m256 t_2 = _mm256_add_ps(b_3, b_4);
                    __m256 t_3 = _mm256_add_ps(b_5, b_6);
                    __m256 t_4 = _mm256_add_ps(b_7, b_8);

                    __m256 t_5 = _mm256_add_ps(t_1, t_2);
```

```
                        __m256 t_6 = _mm256_add_ps(t_3, t_4);
                        __m256 t_7 = _mm256_add_ps(t_5, t_6);

                        __m256 t_c = _mm256_loadu_ps(data3 + u * n + k);
                        __m256 t_8 = _mm256_add_ps(t_7, t_c);

                        _mm256_storeu_ps(data3 + u * n + k, t_8);
                    }
                }
            }
        }
        return true;
}
```

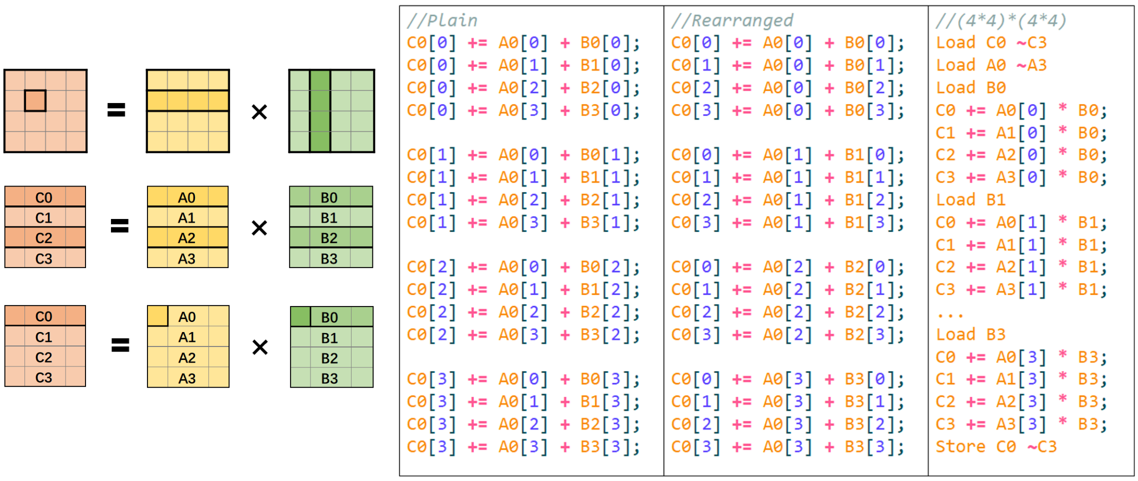


这是上述计算过程的图像解释，我们每次将B中的8个元素合并载入`__mm256`，再将A中的单个元素广播载入`__mm256`，二者批量相乘后再累加至对应8个元素中，通过u的循环就可以得到8×8分块的值。

为了便于说明，我们以4×4的例子入手讲解，以下是计算`c[0][0..3]`的式子

```
C0[0]+=A0[0]+B0[0]   C0[0]+=A0[1]+B1[0]   C0[0]+=A0[2]+B2[0]   C0[0]+=A0[3]+B3[0]
C0[1]+=A0[0]+B0[1]   C0[1]+=A0[1]+B1[1]   C0[1]+=A0[2]+B2[1]   C0[1]+=A0[3]+B3[1]
C0[2]+=A0[0]+B0[2]   C0[2]+=A0[1]+B1[2]   C0[2]+=A0[2]+B2[2]   C0[2]+=A0[3]+B3[2]
C0[3]+=A0[0]+B0[3]   C0[3]+=A0[1]+B1[3]   C0[3]+=A0[2]+B2[3]   C0[3]+=A0[3]+B3[3]
```

对于朴素乘法，我们对上述16个式子是“行优先”执行的，但如果按“列优先”的视角重排后，我们发现A可以一次性载入用作输出的计算，对于B则逐行拆分使用。利用AVX指令集，我们将四个元素的访存与计算向量化，则能达到提高效率的目的。



<pthread.h>多线程

```
#include <pthread.h>

struct PartialMatMulParams
{
    size_t fromColumn, toColum, n;
    float *a, *b, *c;
};

void *partialMatMul(void *params)
{
    struct PartialMatMulParams *p = (struct PartialMatMulParams *)params;
    size_t n = p->n;
    float *a = p->a;
    float *b = p->b;
    float *c = p->c;

#pragma omp parallel for
    for (size_t i = p->fromColumn; i < p->toColum; i++)
    {
        for (size_t j = 0; j < n; j++)
        {
            for (size_t k = 0; k < n; k++)
            {
                c[j * n + i] += a[j * n + k] * b[k * n + i];
            }
        }
    }
    return NULL;
}

bool matmul_thread(Matrix *src1, Matrix *src2, Matrix *dst, size_t num_threads)
{
    if (!safe_check(src1, src2, dst))
    {
        return false;
    }
    register size_t n = src1->row;
    float *data1 = src1->data;
    float *data2 = src2->data;
    float *data3 = dst->data;
    pthread_t *threads = malloc(sizeof(pthread_t) * num_threads);
    struct PartialMatMulParams *params = malloc(sizeof(struct
PartialMatMulParams) * num_threads);

    for (size_t i = 0; i < num_threads; i++)
    {
        params[i].a = data1;
        params[i].b = data2;
        params[i].c = data3;
        params[i].n = n;

        params[i].fromColumn = i * (n / num_threads);
        params[i].toColum = (i + 1) * (n / num_threads);
```

```c
        pthread_create(&threads[i], NULL, partialMatMul, &params[i]);
    }
    for (size_t i = 0; i < num_threads; i++)
    {
        pthread_join(threads[i], NULL);
    }
    free(threads);
    free(params);
}
```

以上函数是笔者对于`<pthread.h>`库的实验品，在浅略阅读相关讲解与教程后所写，在实际运行测试中，虽然能正确得到结果，但以16线程运行的效率甚至低于无优化的朴素算法，且笔者对于该库的线程安全问题并不了解，因此仅作为学习过程的副产品，不参与后续效率比较。

Part 3 - Test & Comparison

测试说明

`benchmark.c`为本项目测试用代码，其中依次测试了矩阵乘法的各类实现的正确性与耗时。

矩阵尺寸由调试者输入，矩阵元素为随机生成的$[0,1]$的单精度浮点数。

乘法标准答案由`cblas.h`的`cblas_sgemm()`函数输出至矩阵C，其余函数输出至D并与之比较，会打印出首次误差情况。

考虑到使用了`OpenMP`提高效率，此处使用`double omp_get_wtime()`计算运行时间，单位为秒。

在运行一个函数前，程序会“预热”两次，即预先运行2次再计时。

下面是以`matmul_avx_block8()`为例的测试片段。

```c
matmul_avx_block8(A, B, D);
matmul_avx_block8(A, B, D);
memset(D->data, 0, sizeof(float) * nn);
time1 = omp_get_wtime();
matmul_avx_block8(A, B, D);
time2 = omp_get_wtime();
printf("[AVX_block+OpenMP] %ld ms used\n", (long int)(1000 * (time2 - time1)));
printf(equals(C, D) ? "Result Accepted.\n" : "Wrong Result.\n");
memset(D->data, 0, sizeof(float) * nn);
```

x64平台测试结果

笔记本型号：Surface Pro7 ~~孱弱的主动散热~~+外置风扇

系统：Linux version 5.10.16.3(WSL2)，64位系统，基于x64处理器

处理器：Intel(R) Core(TM) i7-1065G7 CPU @ 1.30GHz   1.50 GHz

时间单位:毫秒(ms)，`0`代表1ms内完成，`/`表示等待时间在作者的耐心之外(超过5分钟)

~~由于要预热，超出5分钟的函数笔者要等15分钟以上~~

Without addition compilation option

阶数/函数	plain	divide	plain+omp	avx_vec8	avx_block8	OpenBLAS
16	0	0	0	0	0	0
128	7	7	1	0	30	0
1024	3657	1366	792	194	257	7
2048	27677	11123	6783	1835	1496	43
4096	205834	116130	61203	12968	11397	395
8192	/	/	543397	124802	107255	2940
16384	/	/	/	/	/	24763

With -O2

阶数/函数	plain	divide	plain+omp	avx_vec8	avx_block8	OpenBLAS
16	0	0	0	0	0	0
128	2	0	0	0	28	0
1024	515	165	110	32	52	6
2048	4746	1727	933	623	232	46
4096	34098	15463	11363	5395	1765	395
8192	270939	139216	89797	46394	14359	3015
16384	/	/	/	/	196830^	24433

^: 在测试16384×16384矩阵的avx_block8函数时，即便笔者使用了外置散热手段，还是无法避免CPU长期高负荷计算过热导致的降频，因此该数据效率有明显下降。

With -O3

阶数/函数	plain	divide	plain+omp	avx_vec8	avx_block8	OpenBLAS
16	0	0	0	0	6	0
128	0	0	0	115	59	2
1024	134	131	47	112	89	7
2048	1648	975	357	607	299	48
4096	13601	7905	3099	5386	1837	388
8192	112437	74809	41208	44041	14188	3069
16384	/	/	/	/	188428^	24325

笔者将电脑关闭冷却后，使用-O3编译，发现如下现象：

- 对于阶数在2048以下的矩阵，自行实现的`SIMD`优化函数效率有所下降，而对于较大矩阵，自行实现的`SIMD`优化函数效率基本不变。

- 未引入手动`SIMD`优化的函数效率有较大提高，但在大规模计算时效率低于`SIMD`优化
- 又降频了，说明效率门槛从访存速度转移至算力。

随后尝试了-Ofast编译，效果在误差允许范围内与-O3几乎相同。

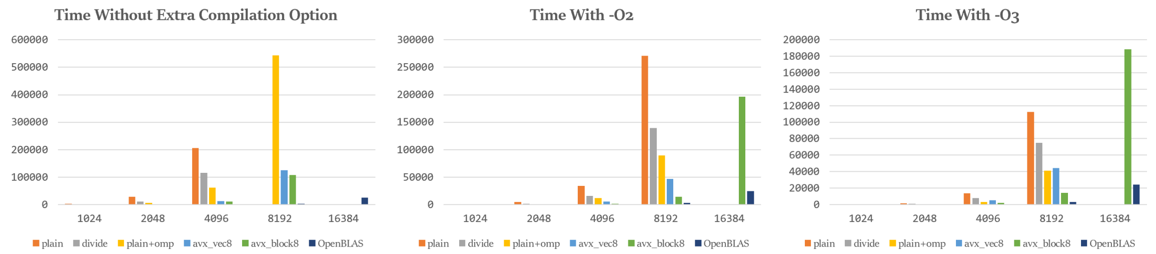
图表比较

下图是矩阵乘法的不同实现对于各规模矩阵的用时柱状图，单位ms。

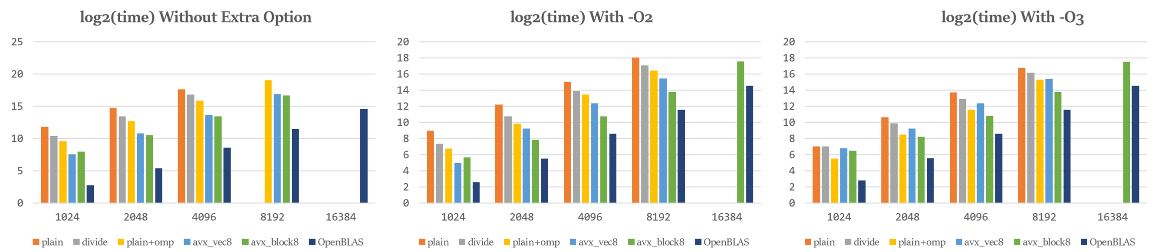
自行实现的各算法中，开启`-o2`时耗时比约为：

$$T_{plain} \approx 1.95T_{divide} \approx 3.01T_{plain+omp} \approx 5.83T_{avx\_vec8} \approx 18.87T_{avx\_block8} \approx 89.86T_{OpenBLAS}$$

由上述原因，只看n=16384时，自行实现的最快算法`avx_block8`耗时也达到了OpenBLAS的8倍左右，但在其他规模下，`avx__block8`可以达到OpenBLAS的4~5倍。

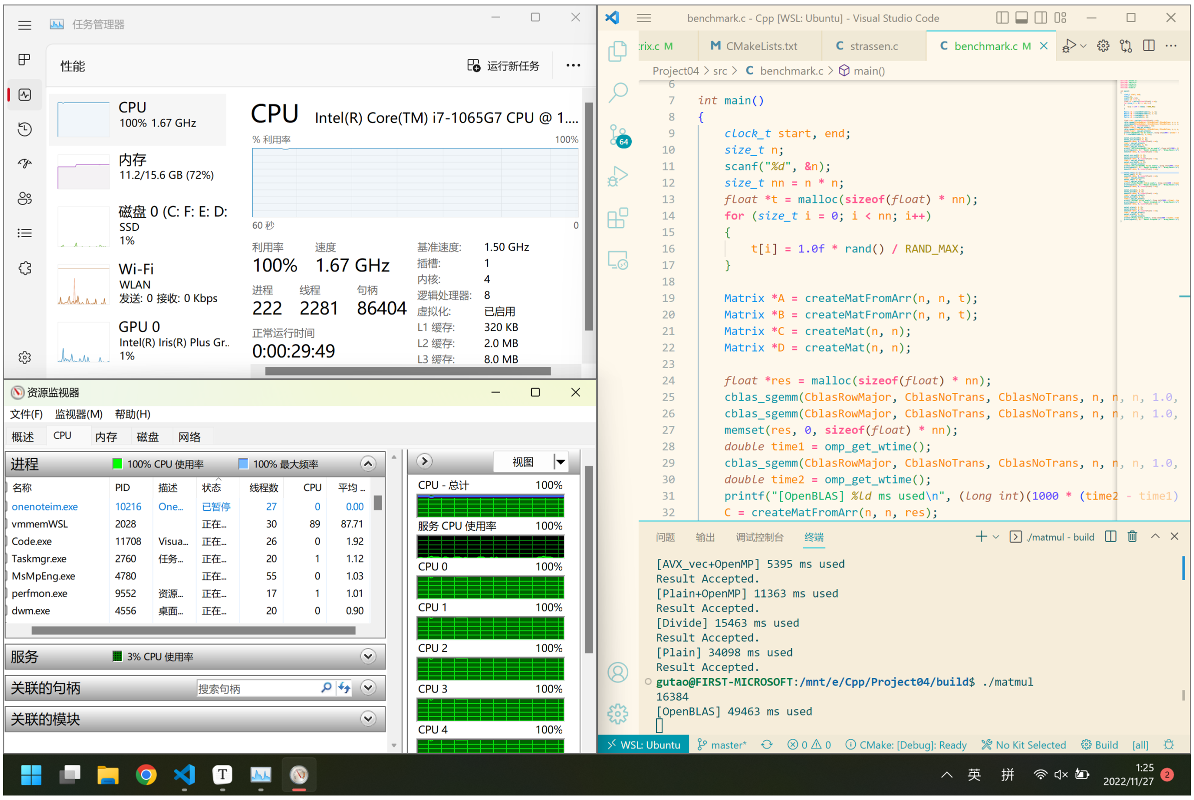


为了方便观察比较，此处对时间取`log2`对数，得到下图。



这张图可以观察到，在开启`-o2`编译后，`avx_block8`的`log2(time)`与`OpenBLAS`相差只有2左右，即达到了约1/4的效率。

ARM平台测试结果



Part 4 - Difficulties & Solutions

Difficulty I. 误差处理

笔者在测试时发现，对于规模在2048以上的矩阵乘法，很容易产生`0.001`的误差，(通常是OpenBLAS与自己实现的不同，而自己实现的几个往往成对相同)。下图是某个凌晨一点钟，没开风扇降频跑16k规模矩阵时得到的结果。

```
gutao@FIRST-MICROSOFT:/mnt/e/Cpp/Project04/build$ ./matmul
16384
[OpenBLAS] 49463 ms used
[AVX_block+OpenMP] 275669 ms used
difference found: 4076.764648 : 4076.774658
Wrong Result.
```

Solution

经同学提醒，可以将误差设置为数据的1‰而非0.001，这样的误差要求对于进行了很多次加、乘法得到的结果也都是可以接受的。

不过为了比较时的效率，`benchmark.c`依然采用旧版比较，适当放宽误差到`0.01`时可以验证乘法的正确性，既然保证了正确性，精确到哪一位才算正确似乎也没有那么重要了。

```
#define float_equal(x, y) ((x - y) < 1e-3 && (y - x) < 1e-3) //old
#define mx(x, y) ((x) > (y) ? (x) : (y))
#define float_equal2(x, y) (x > y ? (x - y < mx(x, 1) * 1e-3) : (y - x < mx(y, 1) * 1e-3)) // new
```

Difficulty II. Strassen

与同学讨论的过程中，笔者了解到$O(N^{lg7}) \approx O(N^{2.81})$复杂度的`Strassen`算法，并且尝试自己写了一下，通过了正确性测试，但效率非常悲观，仅比朴素略快一筹。

Solution

随后笔者分析了原因：`Strassen`算法将矩阵运算中的8次子矩阵乘法与4次子矩阵加法，分别变为了7次和18次，即以额外的14次加法为代价减少一次乘法，在阶数很高时才能体现差距，且笔者在实现Strassen时并未使用`SIMD`进行加速，导致加法运算并未得到很好的优化，而分治的截取、合并等操作导致内存访问的跳跃数较高，虽然从软件层面降低了复杂度，但在硬件层面增大了操作复杂性。

另外，该算法的优化幅度为$O(N^{0.19})$，而当$N = 16384$时，也只有理论上限6.32倍的提升，矩阵规模越小优化越不明显。加上访问不连续、矩阵分块等操作带来的额外复杂度，总体呈现负优化。也许加上合适的`SIMD`优化能提高其效率。

Difficulty III. Segmentation Fault

`SIMD`优化过程中屡次出现段错误，笔者试图使用`memalign`函数在创建矩阵时将`data`对齐，粒度设置为32，以便后续的load等操作，但发现写入数据时会导致段错误。

Solution

查询`memalign`的用法后发现并无异常，但就是无法对申请的内存进行正常读写，于是笔者推测可能是申请的空间过大，无法通过该函数申请到一块连续、对齐的内存用于存储数据，导致并未将data指向一段合法内存，因此读写时会段错误。考虑到申请如此大块的内存的确不太现实，笔者选择在载入时牺牲一定效率，换用`loadu_ps`来对未对齐的数据进行载入，效率还算不错，借此实现了本项目最快的函数，对齐后也许还能更快。