Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»

(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Фундаментальные науки»

КАФЕДРА «Вычислительная математика и математическая физика»

РАСЧЕТНО-ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА К КУРСОВОЙ РАБОТЕ НА ТЕМУ:

Разработка методов визуализации двухмерных векторных полей с помощью линий тока

Дисциплина: «Численные методы»

Студент ФН11-62Б

Губанова В.И.

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Руководитель курсовой работы

Захаров А.А.

(Подпись, дата) (И.О.Фамилия)

Москва 2020

СПИСОК ИСПОЛНИТЕЛЕЙ

Руководитель	(подпись, дата)	Захаров А.А. (И.О.Фамилия)
Исполнитель	(подпись, дата)	Губанова В.И. (И.О.Фамилия)
Нормоконтролер	(подпись, дата)	Прозоровский А.А. (И.О.Фамилия)

РЕФЕРАТ

Отчет 23 с., 13 изображений

РАЗРАБОТКА МЕТОДОВ ВИЗУАЛИЗАЦИИ ДВУХМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ С ПОМОЩЬЮ ЛИНИЙ ТОКА, ГОСТ 7.32-2017.

Цель работы – разработать метод визуализации двухмерного векторного поля с помощью линий тока.

В результате работы был изучен алгоритм построения векторного поля, при помощи линий тока и разработана компьютерная программа, которая позволяет рассчитать векторное поле при помощи данного алгоритма. Так же была произведена устная защита курсовой работы и выполнен письменный отчет в соответствии со стандартами оформления научно-технической документации.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Курсовая работа – вид учебной работы обучающегося, в которой присутствуют элементы самостоятельного научного исследования.

Целью курсовой работы является исследование методов и алгоритмов визуализации двухмерного векторного поля с помощью линий тока.

Задачами курсовой работы являются:

- поиск необходимой литературы;
- изучение методов для произведения расчетов и визуализации;
- разработка метода визуализации;
- использование цветового кодирования;
- разработка программы на С++ для реализации алгоритма построения векторного поля при помощи линий тока.

1. Постановка задачи и основные понятия

В работе приводится описание метода постпроцессинга и визуализации результатов численного моделирования разностными методами задач механики сплошной среды, в частности, описание метода обработки и визуализации векторных полей. Численными результатами моделирования является набор состояний моделируемой системы на некоторые моменты времени. В каждый момент времени система характеризуется набором скалярных и векторных величин на расчетной сетке.

Постобработкой назовем обработку накопленных результатов численного моделирования после расчета. Наряду с явной информацией присутствует и неявная информация, которую необходимо вычислить. По явной информации можно вычислить дополнительную информацию, которую после постобработки можно представить графически, например, изолинии или изоповерхности скалярных полей или же линии тока (ЛТ) векторных полей. Дополнительную информацию назовем новой информацией. Совокупность значений той или иной величины, заданных в каждой точке рассматриваемой области, называется полем этой величины. Если рассматриваемая величина — скаляр, значение которого в данной точке не зависит от выбора системы координат, то поле называется скалярным. Примерами скалярных полей могут служить поле температур, поле плотностей и др. Если рассматриваемая величина — вектор, как, например, скорость, ускорение, то поле называется векторным [1]. Дадим формальное определение векторного поля [1].

Опр. 1: если каждой точке пространства M поставить в соответствие вектор $\overline{v}$, результате получим векторное поле. В декартовой системе координат двумерное векторное поле можно записать в виде:

$$\bar{v}(x,y) = P(x,y)\cdot\bar{i} + Q(x,y)\cdot\bar{j} \qquad (1)$$

Скалярные функции P, Q однозначно определяют векторное поле.

Для наглядного представления векторных полей применяют линии тока (векторные линии, силовые линии). Например, в магнитной динамике ЛТ называются силовыми линиями.

Опр. 2: Через каждую точку M проходит одна линия тока. За исключением точек, где поле не определено или $v(M) = 0$, линии тока никогда не пересекаются. В декартовых координатах дифференциальные уравнения линий тока имеют вид:

$$\frac{dx}{P(x,y)} = \frac{dy}{Q(x,y)} \quad (2)$$

Данная работа будет посвящена алгоритмам и методам визуализации статически заданных результатов моделирования с помощью постобработки.

Для моделирования будем использовать двумерные регулярные разностные сетки. Данное предположение не ограничивает общность применимости представленных здесь алгоритмов и методов для других структур данных. Регулярные разностные сетки – наиболее часто встречающийся метод дискретизации сплошной среды.

Пусть геометрия данных, т. е. регулярная двумерная сетка, описана двумерными матрицами $X[M;N], Y[M;N]$, где M, N — размерность сетки [1]. Пусть на сетке задана векторная величина $\bar{u}$, например, в каждом узле заданы две координатные составляющие (u_x, u_y). Каждая составляющая представляет собой скалярную величину. Векторное поле записывается в виде двух матриц $u_x[M;N], u_y[M;N]$, где M, N — размерность сетки.

2. Алгоритм нахождения линий тока

2.1. Идея алгоритма

Алгоритм основывается только на информации, которая явно задана в узлах расчетной сетки. Внутри ячеек сетки информации нет. Линией тока называется линия, которая для данного момента времени t обладает следующим свойством: вектор скорости $\bar{v}$, вычисленный в любой точке этой линии, направлен по касательной к ней. Следовательно, можно сказать, что в любой точке среды проходит только одна ЛТ. Поэтому нужно определить правила, по которым можно быстро интерполировать векторное поле внутри ячейки или, что одно и тоже, интерполировать две скалярные величины, т. е. координатные компоненты. Очевидно, что геометрически нужно опираться на ячейки расчетной сетки или на ребра ячеек.

Для нахождения ЛТ векторного поля предлагается применить двумерный аналог алгоритма Фонга [2]. Подобный подход был применен в работе [3] для цветовой интерполяции физических величин внутри ячеек. Классический алгоритм Фонга для расчета освещенности внутренних точек ячеек в сеточных трехмерных моделях для графического представления эффекта плавного изменения освещенности внутри ячеек. В результате алгоритм нахождения ЛТ базируется на двойной линейной интерполяции вдоль ребер ячеек и вдоль внутренних отрезков.

2.2. Блок-схема алгоритма

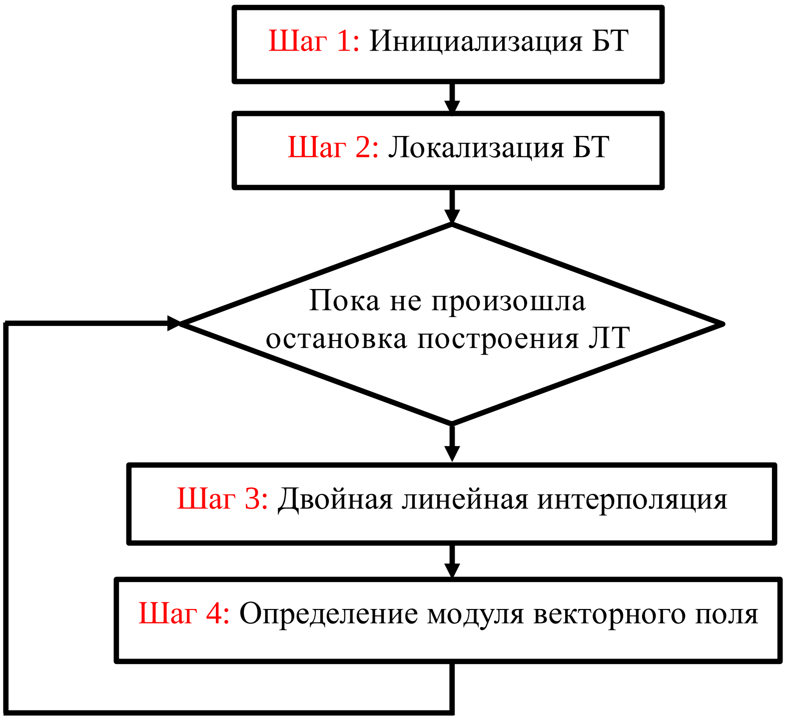

Рисунок 1

2.3. Инициализация ЛТ

Алгоритм построения ЛТ начинается с того, что необходимо произвести инициализацию базовой точки (БТ) на области определения векторного поля, которая будет определять одну ЛТ. В программе, написанной в ходе этой работы, есть два механизма задания базовой точки:

- пользователь может задать БТ;
- Случайная генерация БТ.

2.4. Локализация БТ

Нужно определить, какой ячейке сетки принадлежит БТ. На этом шаге работают алгоритмы локализации точки. Время локализации точки зависит от того, какая разностная сетка используется. Можно предложить два метода локализации БТ:

1) Последовательный полный перебор ячеек. Рассмотрим текущую четырехугольную ячейку с индексами: $(i,j), (i+1,j), (i,j+1), (i+1,j+1)$ (рис. 1). Вычисляется габаритный прямоугольник, описывающий ячейку. Определение факта принадлежности точки прямоугольнику является тривиальным. Если БТ не принадлежит описывающему прямоугольнику, то заведомо БТ не принадлежит ячейке, иначе нужен более точный анализ.

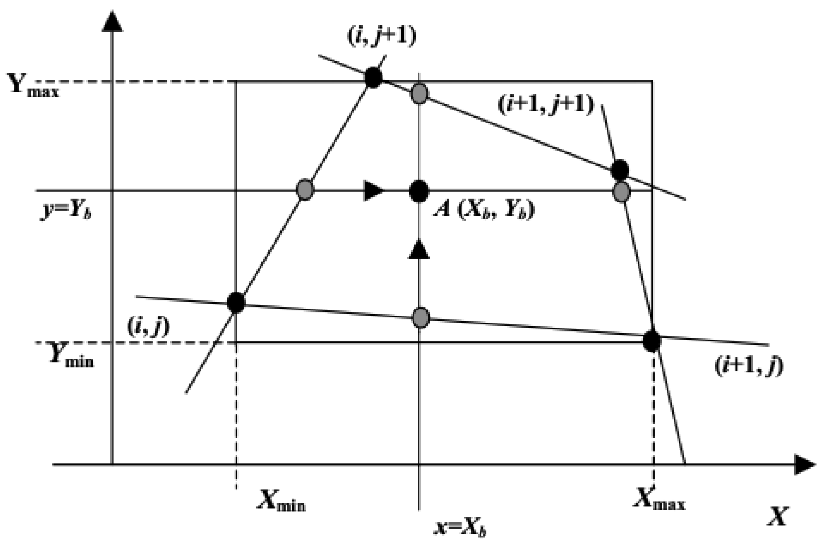

Рисунок 2

Можно применить следующий способ: узлы ячеек легко ориентировать по часовой стрелке или против и рассматривать ребра в виде векторов (рис. 2). Тогда для БТ можно определить ее положение относительно каждого вектора. Если для каждого вектора БТ будет справа или слева, в зависимости от выбранной ориентации граничных векторов, то она принадлежит ячейке.

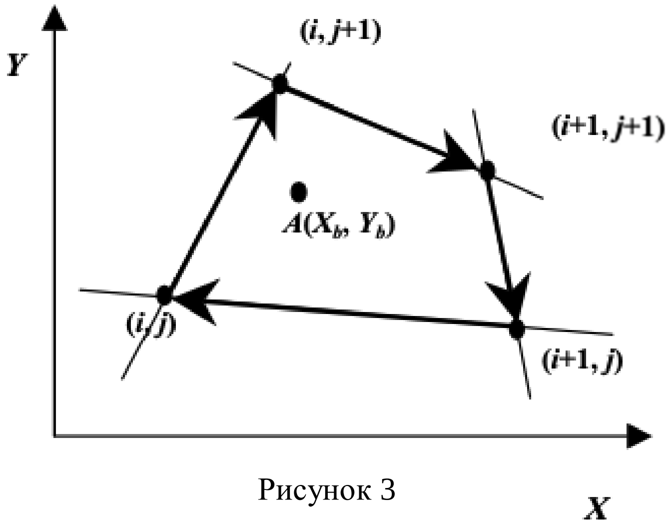

Рисунок 3

2) В этом методе полный перебор ячеек нужен только в худшем случае и количество вычислений меньше в среднем. Рассматриваются горизонтальная $(y = Y_b)$ и вертикальная $(x = X_b)$ прямые, которые пересекаются в БТ. Рассмотрим текущую ячейку с индексами: $(i, j), (i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1)$. Сначала определяется факт пересечения, например, с горизонтальной прямой, т. е. рассматриваются координаты абсцисс узлов ячейки. Если существуют узлы с координатами X_1 и X_2 : $X_1 > X_b > X_2$ или $X_1 < X_b < X_2$, то необходимо проверить факт пересечения с вертикальной прямой. Если нет пересечения, то переходим к следующей ячейке. Проверка факта пересечения с вертикальной прямой аналогична горизонтальной, если ячейка не пересекает вертикальную прямую, то происходит переход к следующей ячейке. Если ячейка пересекает обе прямые, то ячейка анализируется детально с помощью первого метода. Таких подозрительных ячеек оказывается мало. Стоит отметить, что данные методы применимы только для выпуклых ячеек.

В программе, реализующей алгоритм, используется второй метод для первичного поиска и первый для более точного анализа.

2.5. Двойная линейная интерполяция.

Пусть нам известно, что БТ принадлежит ячейке с индексами: $(i, j), (i+1, j), (i, j+1), (i+1, j+1)$. Необходимо произвести интерполяцию значений векторной величины $\bar{u}$ в БТ. Аналогично методу Гуро введем аналог сканирующей строки, которая проходит через БТ. Строка выбирается либо горизонтальная, либо вертикальная.

Не ограничивая общность, допустим, что $i = 0, j = 0$, т. е. индексы для текущей ячейки: $(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)$. Текущая ячейка с узловыми векторными величинами представлена схематично на рис. 3. Обозначим узлы так: $V_1 = (0,1), V_2 = (1,1), V_3 = (1,0), V_4 = (0,0)$. Координаты векторов в узлах обозначим: $(u_{V_1}, v_{V_1}), (u_{V_2}, v_{V_2}), (u_{V_3}, v_{V_3}), (u_{V_4}, v_{V_4})$. Алгоритм интерполяции векторной величины сводится к билинейной интерполяции двух координат вектора.

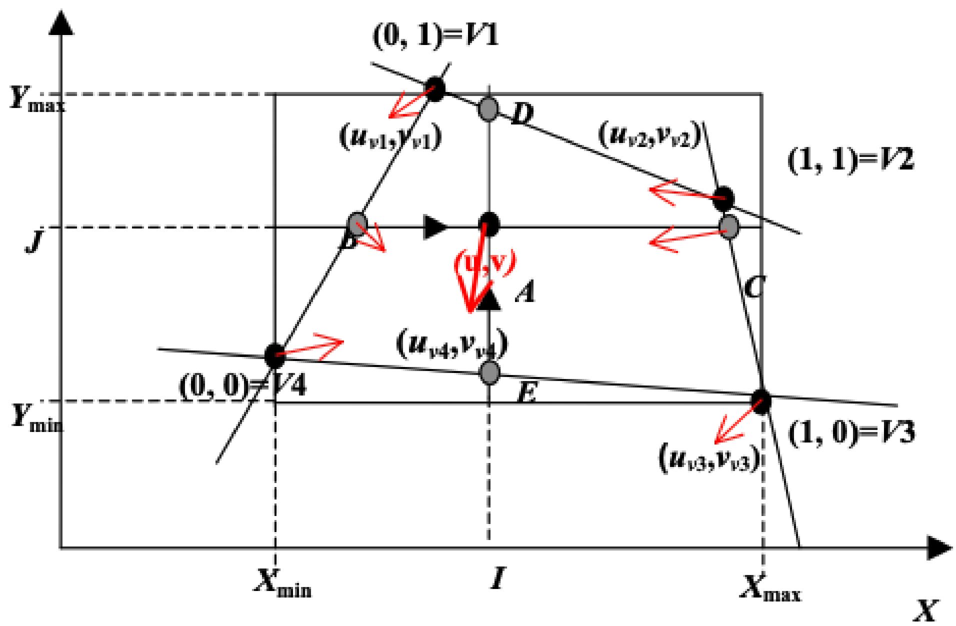

Рисунок 4

Первая интерполяция

Для сканирующей прямой находятся точки пересечения с ребрами ячейки. Обозначим их: B, C(см. рис. 4). Теперь в эти точки необходимо интерполировать значения Uиз узлов ребер. Интерполирование значений векторной величины U подразумевает интерполирование координат вектора (u, v) . Воспользуемся линейной интерполяцией.

$$U_B = t \cdot u_{V_1} + (1 - t) \cdot u_{V_4} \tag{3}$$

$$V_B = t \cdot v_{V_1} + (1 - t) \cdot v_{V_4} \tag{4}$$

$$U_C = \tau \cdot u_{V_2} + (1 - \tau) \cdot u_{V_3} \tag{5}$$

$$V_C = \tau \cdot v_{V_2} + (1 - \tau) \cdot v_{V_3} \tag{6}$$

Где $u_B, v_B, u_C, v_C, u_{V_1}, v_{V_1}, u_{V_2}, v_{V_2}, u_{V_3}, v_{V_3}, u_{V_4}, v_{V_4}$ координаты векторов для соответствующих точек B, C, V_1, V_2, V_3, V_4. А параметры t, τ: $0 \leq t \leq 1, \leq \tau \leq 1$.

$$t = \frac{|V_4 B|}{|V_1 V_4|} \tag{7}$$

$$\tau = \frac{|V_3 C|}{|V_2 V_3|} \tag{8}$$

Вторая интерполяция

Далее необходимо линейно интерполировать значение координат векторов из точек B, C в точку A:

$$u = p \cdot u_B + (1 - p) \cdot u_C \tag{9}$$

$$v = p \cdot v_B + (1 - p) \cdot v_C \tag{10}$$

Где $0 \leq p \leq 1$ и

$$p = \frac{|AC|}{|BC|} \tag{11}$$

В результате билинейной интерполяции приближенно находится и восполняется значение векторной величины $\overline{u_a}$ в БТ (см. рис. 4).

2.6. Построение ЛТ

После вычисления значения векторного поля в БТ и определения направления движения линии тока от БТ. Происходит поиск приближенной кусочно–линейной траектории ЛТ. Существует два метода последовательного построения кусочно–линейной линии тока.

Ячеечный метод

Эмпирически задается длина элементарного шага смещения от БТ вдоль вектора $\overline{u_a}$. Например, длина шага ориентировочно может определяться некоторым соотношением габаритов области определения. Зная направление шага и длину, однозначно определяется следующая точка линии тока A_1 (рис. 5). Вектор A_0A_1 назовем вектором элементарного смещения (ВЭС). Если ВЭС не пересекает ни одного ребра ячейки, то точка A_1 остается в текущей ячейке, тогда нужно перейти на шаг 3 интерполяции для точки A_1, иначе ЛТ переходит в соседнюю ячейку, которая однозначно определяется по пересеченному ребру. Меняется текущая ячейка и происходит переход на шаг 3. И так далее последовательно осуществляется построение ЛТ целиком в виде кусочно–линейной кривой.

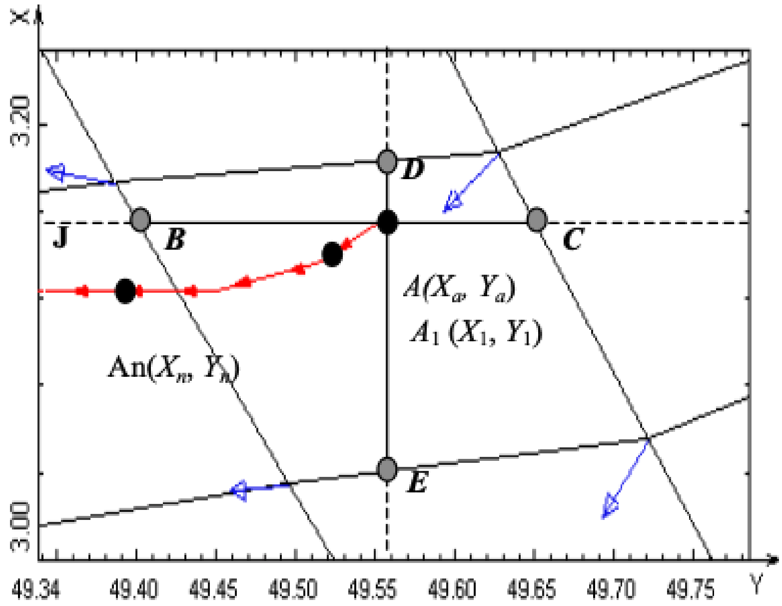

Рисунок 5

Реберный метод

Этот способ является более быстрым, но менее точным, он базируется на одной линейной интерполяции вдоль ребра ячейки. Из БТ выпускается вектор по направлению ВЭС до пересечения с каким–либо ребром ячейки (рис. 6). Точка пересечения A_1 считается следующей точкой линии тока, и она переходит в следующую ячейку. Далее идем на шаг 3 интерполяции, в этом методе осуществляется только одна интерполяция векторной величины вдоль пересекаемого ребра. В результате в точке A_1 получаем значение векторной величины U_1. Затем из точки A_1 выпускается вектор по направлению ВЭС до пересечения с каким–либо ребром данной ячейки. И процесс повторяется.

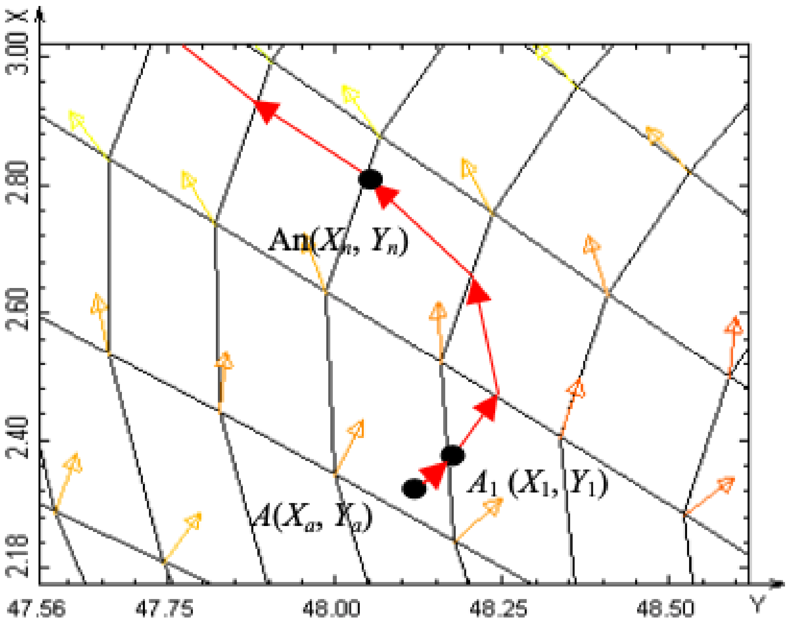

Рисунок 6

Алгоритм численного нахождения одной ЛТ завершен.

1. Дополнения к алгоритму

1.1. Остановка построения ЛТ

Выбор критерия остановки построения ЛТ является очень важной подзадачей. Приведем несколько критериев остановки построения ЛТ:

1. построение ЛТ можно прекращать, когда очередной ВЭС пересечет границу расчетной области (рис. 7). Однако эту ситуацию можно обрабатывать точнее. Можно найти точку пересечения ВЭС с граничным ребром и вычислить с помощью одной линейной интерполяции из узлов данного граничного ребра значение векторной величины в этой точке. Тогда возможны два варианта действия. Если новый ВЭС направлен из расчетной области, то ЛТ прерывается на данной точке пересечения, иначе, т. е. если новый ВЭС направлен внутрь расчетной области, то построение ЛТ продолжается (см. рис. 7).

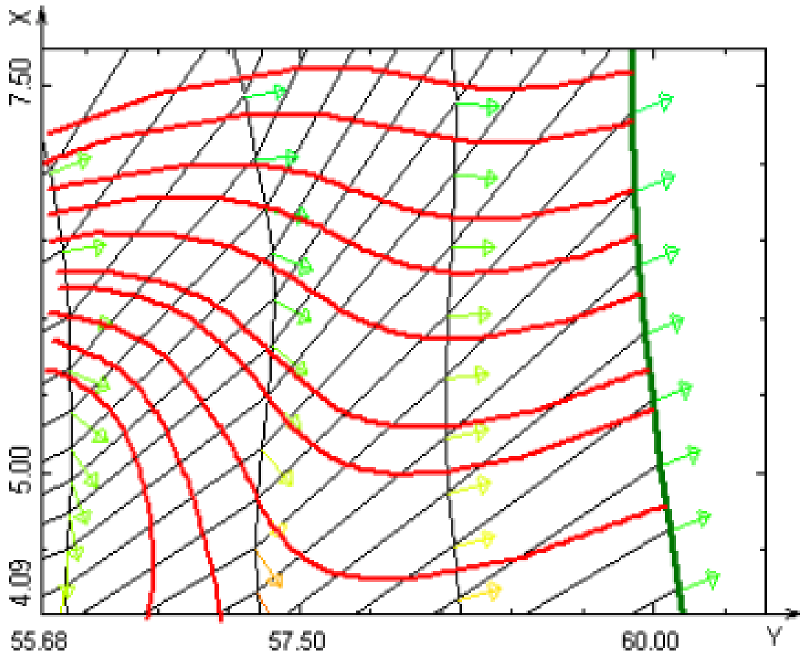

Рисунок 7

2. ЛТ не должна пересекать саму себя. Наш алгоритм численный, т. е. приближенный, поэтому в случае завихрений ситуация с самопересечением возможна. Это происходит, если ВЭС постоянной длины и не зависит от модуля векторной величины (см. рис. 8). Поэтому необходимо постоянно проверять ЛТ на самопересечение.

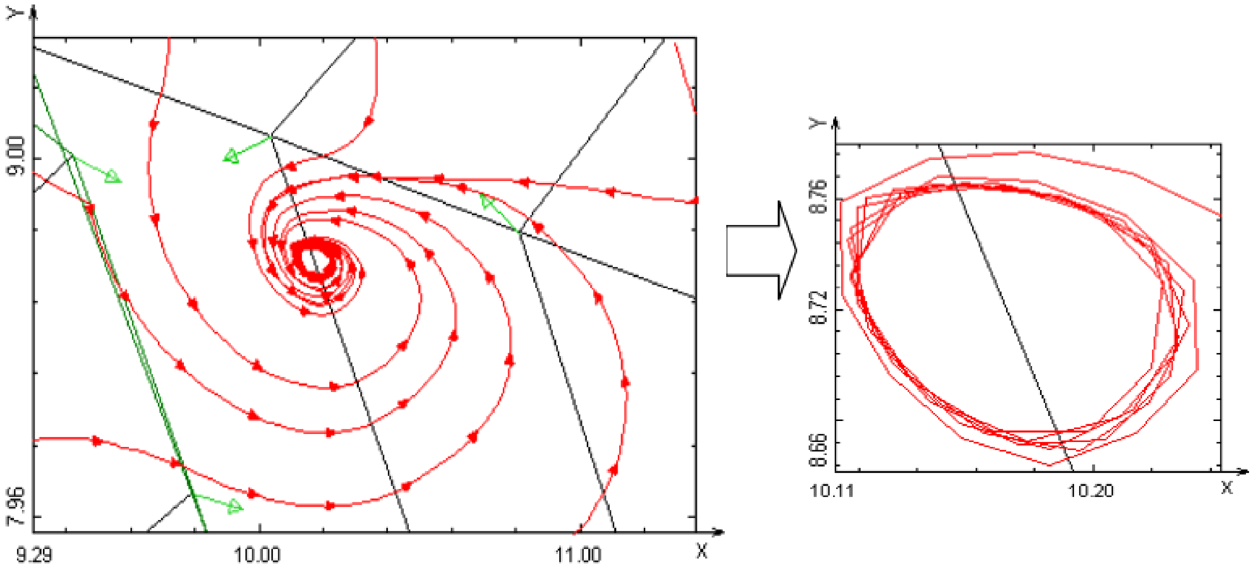

Рисунок 8

1.2.Анимация линий тока векторного поля

Мы рассматриваем установившееся статическое состояние системы в некоторый момент времени моделирования, поэтому о настоящей динамике мы не можем говорить. Представленную динамику далее будем называть псевдодинамикой. Несмотря на статичность, в каждом узле сетки задана вполне определенная векторная величина, модуль которой можно посчитать. Данной информации можно использовать для реализации разных способов повышения информативности визуализации, что позволит более точно и качественно оценить состояние модели. Анимационные эффекты функции визуализации трудно представить статическими картинками. Представим несколько способов визуализации псевдодинамики, т. е. визуализации изменения модуля величины векторного поля вдоль линии тока:

Способ 1. Изменение скорости графического построения траектории ЛТ, с помощью применения нормированной длины ВЭС.

Способ 2. Вдоль траектории ЛТ движется маркер или множество маркеров с соответствующей скоростью.

Способ 3. Прорисовка траектории ЛТ штрихами, которые периодически смещаются по направлению ЛТ.

Так же для повышения информативности можно использовать статическую визуализацию с помощью цветной визуализации траектории ЛТ, используя цветовую палитру, которая соответствует диапазону изменения модуля векторной величины вдоль траектории ЛТ.

2. Проверка результатов работы программы

В ходе выполнения курсовой работы, была написана программа на языке C++. В данной программе реализован, приведенный выше алгоритм и возможность генерации файла .msh, для наглядной работы программы. Для проверки корректности работы, произведем сравнение векторного поля, полученного при помощи программы, основанной на алгоритме построения векторного поля на основе линий тока, и векторного поля, построенного на информации в каждой точке сетки.

Пример 1

Рассмотрим векторное поле, заданное аналитически $a(x, y, z) = i - (x^2 + y) \cdot j$, и построим линии, проходящие через точки $(-1. -2{,}0), (-1{,}0{,}0), (-1{,}1{,}0)$.

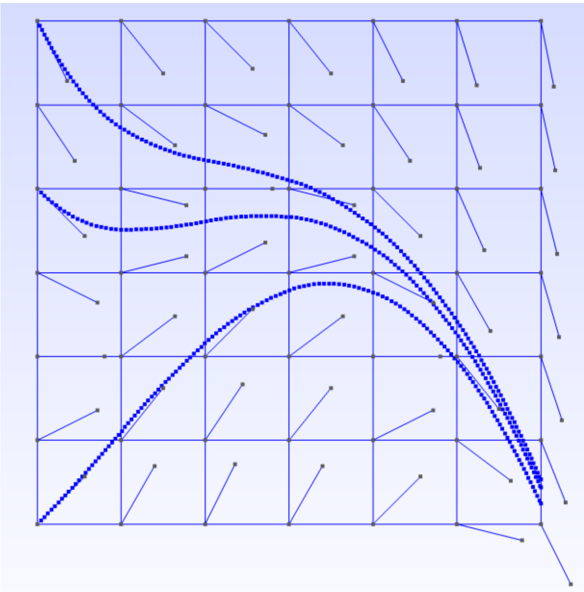

Рисунок 9
Визуализация, полученная с помощью написанной программы

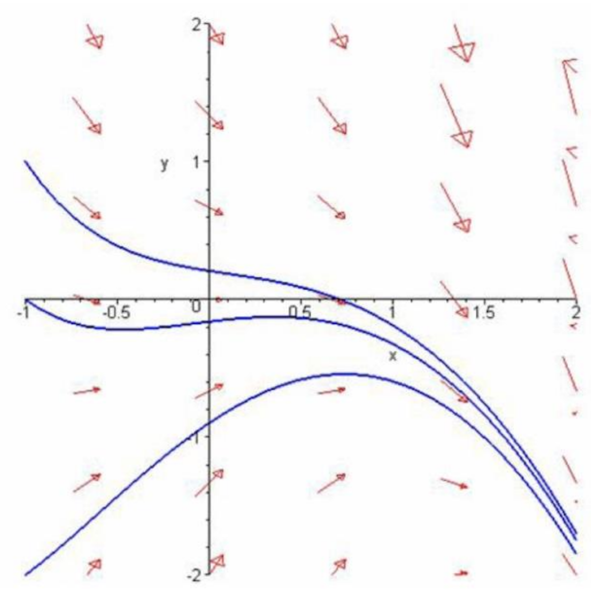

Рисунок 10
Визуализация, полученная с помощью математического пакета MAPLE

Пример 2

Рассмотрим векторное поле $a(x,y,z) = i + (e^{-x} \cdot x - y) \cdot j$, и построим линии, проходящие через точки $(-1.-2{,}0), (-1{,}0{,}0), (-1{,}1{,}0)$.

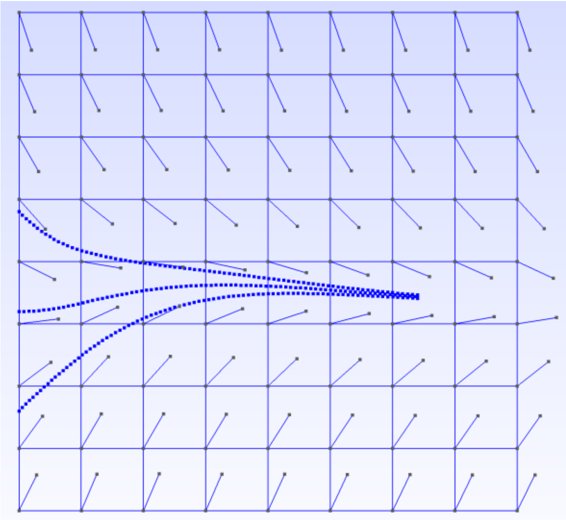

Рисунок 11

Визуализация, полученная с помощью написанной программы

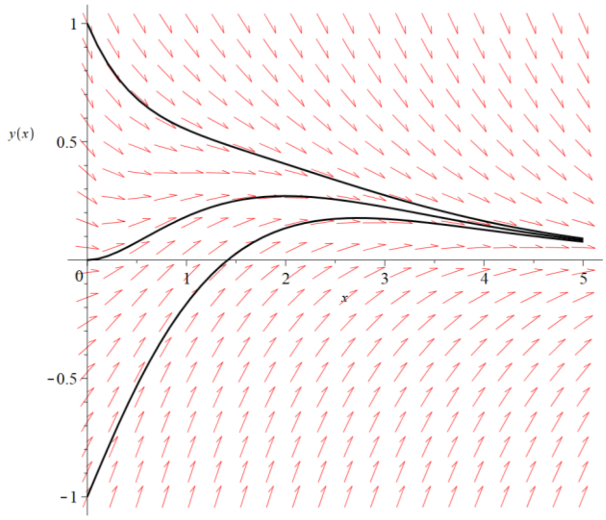

Рисунок 12

Визуализация, полученная с помощью математического пакета MAPLE

Пример 3

На рисунке 13 показана визуализация векторного поля $a(x, y, z) = e^x \cdot i + y^3 \cdot j$, с генерацией базовых точек в цикле (с шагом 0.2 по горизонтали и вертикали).

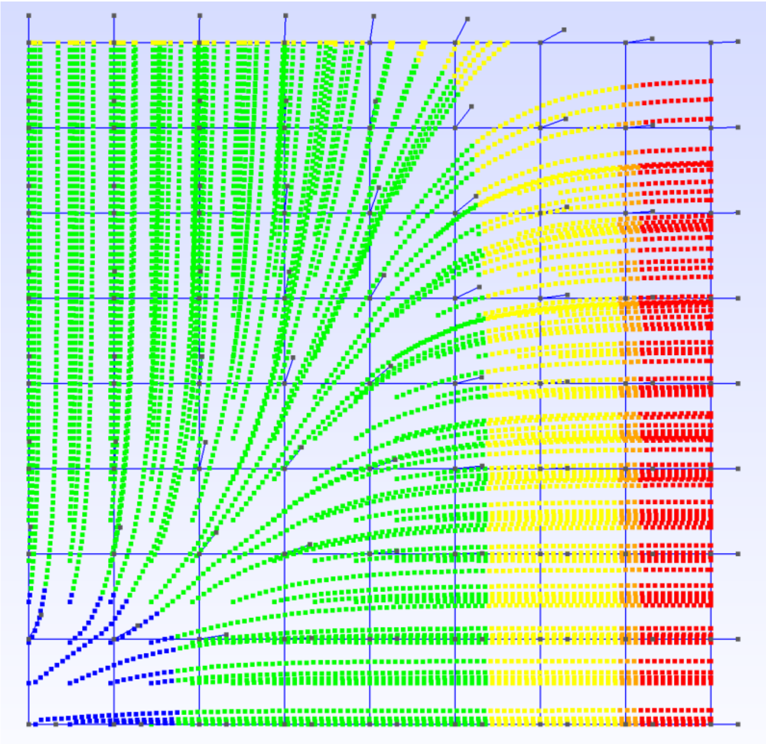

Рисунок 13

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения курсовой работы была достигнута цель исследования метода визуализации двухмерного векторного поля с помощью линий тока, также был освоен основной алгоритм, необходимый для реализации данного метода.

В ходе работы были выполнены следующие задачи:

- поиск необходимой литературы;
- изучение методов для произведения расчетов и визуализации;
- разработка метода визуализации;
- использование цветового кодирования;
- разработка программы на C++ для реализации алгоритма построения векторного поля при помощи линий тока.

В разработанной программе учитывается каждый этап приведенного в работе алгоритма. Все логически не связные компоненты разбиты на различные классы, для увеличения масштабируемости программы. Необходимость в масштабируемости обусловлена тем, что в дальнейшем планируется реализация метода построения и визуализации векторного поля при помощи линий тока для трехмерного случая. Для проверки корректности работы программы код был покрыт тестами на 80%. Стоит отметить, что исходный код был проверен на отсутствие утечек памяти.

В заключении хочется отметить, что линии тока позволяют детально передать топологию и структуру векторного поля. Анимация псевдодинамики ЛТ наглядно передает потенциальное направление движения сплошной среды, именно Анимация псевдодинамики ЛТ дает возможность получить больше информации о рассматриваемой сплошной среде для дальнейшего анализа полученной информации.

В следующих работах будут представлены: обобщение на трехмерные результаты численного моделирования и динамическая визуализация в условиях постобработки.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды. - М., Наука, 1976. - Т. 1
2. Phong, Bui–Tuong, 1975, «Illumination for Computer Generated Images», doctoral thesis, University of Utah, 1973. Also as Comp. Sci. Dept. Rep. UTEC–CSc–73–129б NTIS ADA 008 786. A condensed version is given in CACM. Vol.18.P.311-317.
3. Dmitry V. Mogilenskikh & Igor V. Pavlov. Visualization and imaging in transport phenomena. Annals of the New York Academy of sciences. Volume 972 2002г. Color Interpolation Algorithms in Visualizing Results of Numerical.Simulations.P.43-52.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана»
(МГТУ им. Н.Э.Баумана)

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой ФН-11

_________ Ю.И. Димитриенко

« 10 » февраля 2020 г.

З А Д А Н И Е

на выполнение курсовой работы

по дисциплине «Численные методы»
Студент группы ФН11-62Б Губанова В.И.
Тема курсовой работы:
Разработка методов визуализации двухмерных векторных полей с помощью линий токая
Направленность КР: учебная
Источник тематики: кафедра
График выполнения работы: 25% к 5 нед., 50% к 8 нед., 75% к 11 нед., 100% к 14 нед.

Техническое задание:

1.1 Изучить и представить обзор средств и методов построения векторного поля с помощью линий тока;
1.2 Написать программу, реализующую алгоритм визуализации;
1.3 Изучить принцип работы программы gmsh и реализовать возможность работы с разностными сетками из файлов с расширением .msh.

2 Оформление курсовой работы

2.1 Расчетно-пояснительная записка объёмом от 23 листа формата А4.
2.2 Перечень графического материала (плакаты, схемы и т.п.) ______________________________
2.3 Электронную версию готовой курсовой работы (формат Word) выслать в электронный архив кафедры – на адрес электронной почты archive-fn@mail.ru

Дата выдачи задания « 10 » февраля 2020 г.

Руководитель курсовой работы _____________________ Захаров А.А.

Студент _______________________ Губанова В.И.