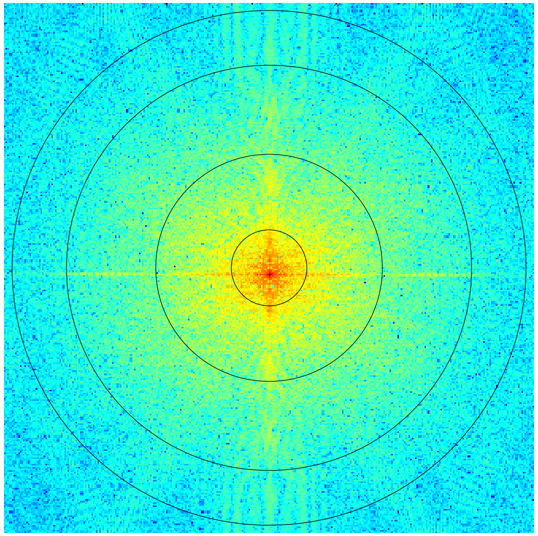
PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMAGENES

Filtrado en el Dominio de la Frecuencia



La transformada de Fourier de una función discreta de una variable, $f(x)$, cuando $x = 0,1,\ldots,M-1$, está dada por la ecuación

$$F(u) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)e^{\frac{-j2\pi ux}{M}} \quad \text{con: } u = 0,1,\cdots,M-1$$

Similarmente, dada $F(u)$, podemos obtener la función original usando la *DFT* inversa:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u)e^{\frac{j2\pi ux}{M}} \quad \text{con: } x = 0,1,\cdots,M-1$$

Para obtener $F(u)$ comenzamos por sustituir $u = 0$ en el término exponencial y después sumamos para TODOS los valores de *x*. Después sustituimos $u = 1$ en el exponencial y repetimos la suma para todos los valores de *x*. Se repite este proceso para los *M* valores de *u* y de esta manera se obtiene la *DFT*. Como $f(x)$, la transformada es una cantidad discreta, y tiene el mismo número de componentes que $f(x)$.

El dominio de la frecuencia

El concepto de dominio de la frecuencia, se puede derivar fácilmente de la fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos\theta + jsen\theta$$

Sustituyendo en la ecuación para obtener $F(u)$ y recordando que $\cos-\theta = \cos\theta$ y $sen-\theta = -sen\theta$, obtenemos

$$F(u) = \frac{1}{M}\sum_{x=0}^{M-1} f(x)\left[\cos 2\pi ux/M - jsen2\pi ux/M\right] \text{ con: } u = 0,1,\cdots,M-1$$

Así, observamos que cada término de la transformada de Fourier (es decir, el valor de $F(u)$ para cada valor de *u*) se compone de la suma de todos los valores de la función $f(x)$.

A su vez, los valores de $f(x)$ son multiplicados por senos y cosenos en varias frecuencias.

El dominio (valores de u) para el rango de los valores de $F(u)$ es llamado, apropiadamente, dominio de la frecuencia, porque u determina la frecuencia de los componentes de la transformada.

Cada uno de los M términos de $F(u)$ se llama componente de frecuencia de la transformada.

En general, vemos en las ecuaciones para obtener $F(u)$ (tanto en forma exponencial como de Euler) que los componentes de la transformada de Fourier son cantidades complejas. A veces será conveniente manejar $F(u)$ en coordenadas polares:

$$F(u) = |F(u)| e^{-j\phi(u)}$$

Donde $|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$ es llamado magnitud o espectro de la transformada de Fourier, y $\phi(u) = \tan^{-1} \frac{I(u)}{R(u)}$ es llamado ángulo de fase o espectro de fase de la transformada.

En estas dos últimas ecuaciones $R(u)$ e $I(u)$ son las partes real e imaginaria de $F(u)$, respectivamente.

En términos de mejora de la imagen nos conciernen primariamente las propiedades del espectro.

La densidad espectral es el cuadrado del espectro de Fourier:

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u)$$

Dada la relación inversa entre una función y su transformada, no es sorprendente que *Δx* y *Δu* estén inversamente relacionadas por la expresión

$$\Delta u = \frac{1}{M \Delta x}$$

La Transformada de Fourier Discreta (DFT) bidimensional y su inversa

La transformada discreta (o de análisis) de Fourier de una función (imagen) $f(x,y)$ de tamaño *MxN* está dada por la siguiente expresión:

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\left[\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right]}$$ con $u=0,1,\ldots,M-1$ y $v=0,1,\ldots,N-1$

su inversa (o de síntesis):

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi\left[\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N}\right]}$$ con $x=0,1,\ldots,M-1$ y $y=0,1,\ldots,N-1$

Donde *u* y *v* son las variables de transferencia o frecuencia y *x* e *y* son las variables espaciales o de imagen.

Definimos como en la sección anterior el espectro de Fourier, el ángulo de fase y la magnitud:

$$F(u,v) = \left|\sqrt{R^2(u,v) + I^2(u,v)}\right|$$

$$\phi(u,v) = \tan^{-1}\left[\frac{I(u,v)}{R(u,v)}\right]$$

$$P(u,v) = \left|F(u,v)\right|^2 = R^2(u,v) + I^2(u,v)$$

Donde $R(u,v)$ e $I(u,v)$ son las partes real e imaginaria de $F(u,v)$, respectivamente.

Hay que notar, entonces, que la representación de la transformada de Fourier es otra imagen, que en este caso es compleja, pudiéndose separar en parte real e imaginaria o bien en módulo y fase.

Usualmente se multiplica la función (imagen) por $(-1)^{x+y}$ antes de calcular la transformada de Fourier. Debido a las propiedades de las exponenciales se puede demostrar que:

$$DFT\left[f(x,y)(-1)^{x+y}\right](u,v) = F(u-M/2, v-N/2)$$

Esta ecuación nos dice que el origen de la transformada de Fourier de $f(x,y)(-1)^{x+y}$ se localiza en $u = M/2$ y $v = N/2$, lo que pone el origen al centro del área *MxN* que ocupa la *DFT* bidimensional. Esta área es llamada rectángulo de frecuencia. En otras palabras multiplicando $f(x,y)$ por $(-1)^{x+y}$ se traslada el origen de $F(u,v)$ a las coordenadas $(M/2, N/2)$, las cuales coinciden con el centro del área de *MxN* ocupada por la transformada discreta de Fourier bidimensional.
Se requiere que *M* y *N* sean impares para que las coordenadas del centro sean enteras.

El valor de la transformada en $(u,v)=(0,0)$ es:

$$F(0,0)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)$$

el cuál es claramente el promedio de $f(x,y)$, lo que quiere decir que el valor de la *DFT* en el origen es igual al nivel de gris promedio de la imagen.

Como las frecuencias son cero en el origen, $F(0,0)$ a veces es llamado el componente *dc* (de corriente directa o cero frecuencia).

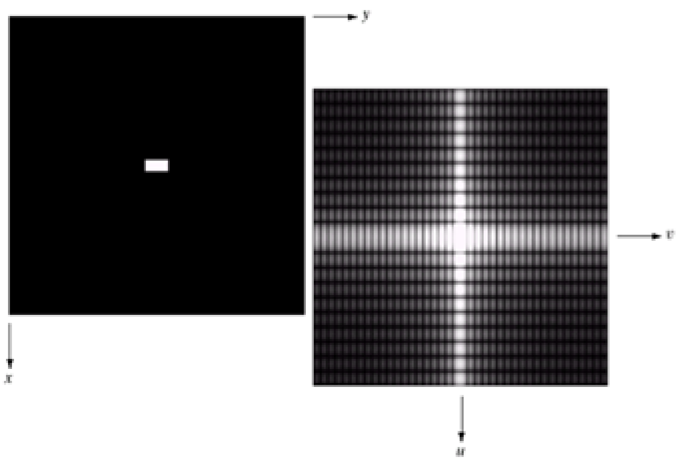
Además, si $f(x,y)$ es real, el espectro de la transformada de Fourier es simétrico

$$|F(u,v)|=|F(-u,-v)|$$

y también se cumplen las siguientes relaciones:

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \qquad \Delta v = \frac{1}{M\Delta y}$$

La Figura muestra un rectángulo blanco de *20x40* pixeles sobre un fondo negro de *512x512*. La imagen fue multiplicada $(-1)^{x+y}$ antes de aplicarle la *DFT* de manera que la frecuencia cero quede en el centro del espectro. Antes de mostrar la *DFT*, se le aplicó una transformación logarítmica $F'(u,v) = c * \log(1 + F(u,v))$ para realzar los niveles de gris.



Propiedades de la DFT

Separabilidad

El par de transformadas de Fourier bidimensional, se pueden escribir de forma separada (vamos a verlas en imágenes cuadradas de aquí en adelante)

$$F(u,v)=\frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N}\right)}\sum_{y=0}^{N-1}f(x,y)e^{-j2\pi\left(\frac{vy}{N}\right)} \text{ con } u=0,1,\ldots,N-1 \text{ y } v=0,1,\ldots,N-1$$

$$f(x,y)=\frac{1}{N}\sum_{u=0}^{N-1}e^{j2\pi\left(\frac{ux}{N}\right)}\sum_{v=0}^{N-1}F(u,v)e^{j2\pi\left(\frac{vy}{N}\right)} \text{ con } x=0,1,\ldots,N-1 \text{ y } y=0,1,\ldots,N-1$$

La principal ventaja que ofrece esta propiedad es que se puede realizar la transformada de una señal bidimensional, como la sucesión de dos trasformadas unidimensionales. Por lo tanto para calcular la transformada de una imagen, se hace primero la transformada de las filas, seguida, con lo obtenido, la transformada de las columnas (o viceversa).

Traslación

Esta propiedad se puede expresar como:

$$f(x,y)e^{j2\pi\frac{u_0x+v_0y}{n}} \Leftrightarrow F(u-u_0,v-v_0)$$

y

$$f(x-x_0,y-y_0) \Leftrightarrow F(u,v)e^{-j2\pi\frac{u_0x+v_0y}{n}}$$

Que representan la traslación en el dominio de la frecuencia y del espacio respectivamente.

Para el caso particular de:

$$e^{j2\pi\frac{u_0x+v_0y}{N}} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y}$$

Con lo que una traslación al centro, se traduce en el producto de la señal original por la expresión anterior:

$$f(x,y)\cdot(-1)^{x+y} \Leftrightarrow F\left(u-\frac{N}{2}, v\frac{N}{2}\right)$$

Es importante destacar que esta propiedad, no modifica el módulo de la transformada.

Periodicidad y simetría conjugada

La *DFT* directa e inversa son periódicas de periodo *N*, es decir:

$$F(u,v)=F(u+N,v)=F(u,v+N)=F(u+N,v+N)$$

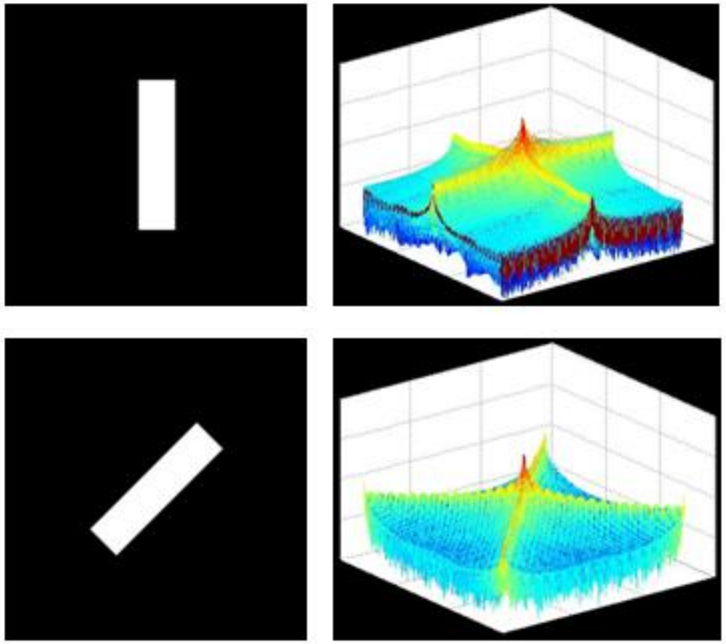
Se concluye que en un solo período de la señal está contenida toda la información de la señal en el dominio de la frecuencia.
Cuando $f(x,y)$ es real, la transformada cumple la propiedad de simetría conjugada. Si se divide la imagen transformada en 4 cuadrantes (suponiendo que el origen de frecuencias está en el centro de la imagen transformada), y la imagen de entrada es real (generalmente lo será), el tercer cuadrante será igual al primer cuadrante rotado 180°, y el cuarto cuadrante será igual al segundo rotado 180°. Analíticamente:

$$|F(u,v)|=|f(-u,-v)|$$

Rotación

Si se hace un cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares las funciones $f(x,y)$ y $F(u,v)$ pasan a tener la forma: $f(r,\theta)$ y $F(\omega,\phi)$

Si se aplica un giro $\theta_0 f(r,\theta)$, la imagen transformada gira el mismo ángulo: $f(r,\theta+\theta_0) \Leftrightarrow F(r,\phi+\theta_0)$



Distributividad y cambio de escala

De la definición de transformada se deduce que: $\Im\{f_1(x,y)+f_2(x,y)\}=\Im\{f_1(x,y)\}+\Im\{f_2(x,y)\}$

y de forma general: $\Im\{f_1(x,y)\cdot f_2(x,y)\}\neq\Im\{f_1(x,y)\}\cdot\Im\{f_2(x,y)\}$

es decir la transformada de Fourier y su inversa son distributivas respecto de la suma, pero no con respecto al producto.

Si se tienen dos escalares *a* y *b*, se cumple que $af(x,y)\Leftrightarrow aF(u,v)$ es decir, si se multiplica la imagen de entrada por una constante, la imagen transformada también queda multiplicada por la misma constante.

Y que $f(ax,by)\Leftrightarrow\frac{1}{|ab|}F\left(\frac{u}{a},\frac{v}{b}\right)$ es decir, si se estira la imagen original, la imagen transformada se encoge y viceversa.

Valor medio

Usualmente el valor medio de una función discreta bidimensional se calcula como:

$$\overline{f(x,y)} = \frac{1}{N^2}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

Por otro lado se tiene que la transformada de Fourier de $f(x,y)$ en el punto $u=0$, $v=0$ es:

$$F(0,0) = \frac{1}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)$$

Si se comparan ambas expresiones, se puede concluir que el cálculo del valor medio se puede hacer a través del uso de la transformada de Fourier de la siguiente forma:

$$\overline{f(x,y)} = \frac{1}{N}F(0,0)$$

Convolución

La convolución bidimensional se puede expresar por:

$$f(x,y) * g(x,y) = \sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1} f(m,n)\cdot g(x-m,y-n) \text{ para } x = 0,1,2,\ldots,M-1 \text{ e } y = 0,1,2,\ldots,N-1$$

Si se pasa esta expresión al domino de Fourier el producto de convolución pasa a ser un producto algebraico, simplificando así su cálculo

$$f(x,y) * g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v)\cdot G(u,v)$$
$$f(x,y)\cdot g(x,y) \Leftrightarrow F(u,v) * G(u,v)$$

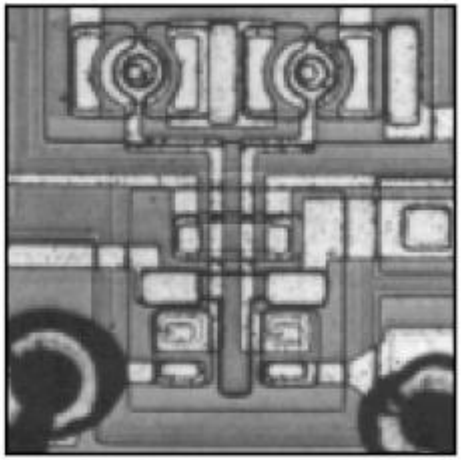
La importancia de esta propiedad radica en la simplificación del cálculo de las respuestas a la salida de los sistemas LTI.

Transformada rápida de Fourier (FFT)

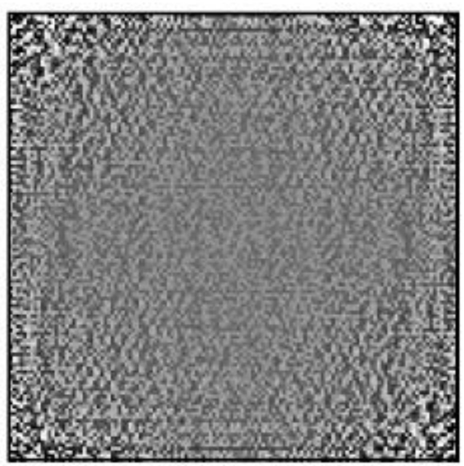
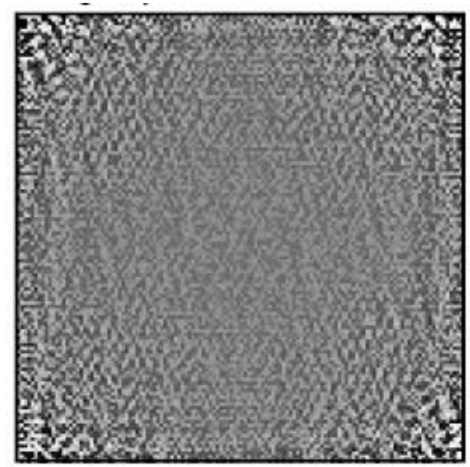
Una forma eficiente de hacer el cálculo de la transformada discreta de Fourier, es mediante el uso de algoritmos rápidos, como la *FFT*.
Si no existieran algoritmos como la *FFT* para el cálculo de la DFT, seria computacionalmente inviable el cálculo, ya que la implementación directa de la *DFT*, requiere de un gran número de operaciones por muestra de la señal, que es proporcional a N^2. Por el contrario para el cálculo de la *DFT* a través de la *FFT*, se requieren exactamente $N \cdot \log_2(N)$ sumas y $\frac{1}{2} N \cdot \log_2(N)$ multiplicaciones.
Para el caso concreto del tratamiento digital de imágenes, y debido al gran número de píxeles que contiene una imagen, la *DFT* calculada de forma directa requeriría un tiempo de procesamiento muy elevado para una imagen de tamaño medio o grande.
Debido a la propiedad de separabilidad de la transformada discreta de Fourier bidimensional, el cálculo de la *FFT* bidimensional se puede realizar haciendo dos *FFT´s* unidimensionales.

La Transformada de Fourier

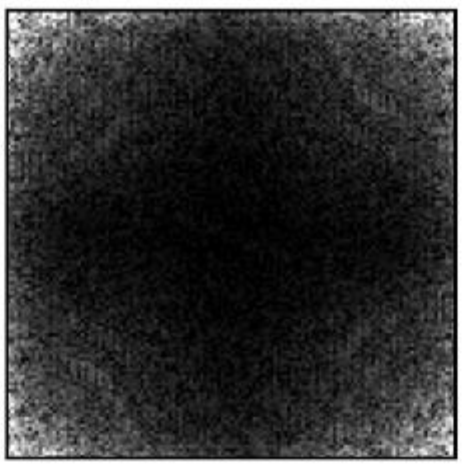
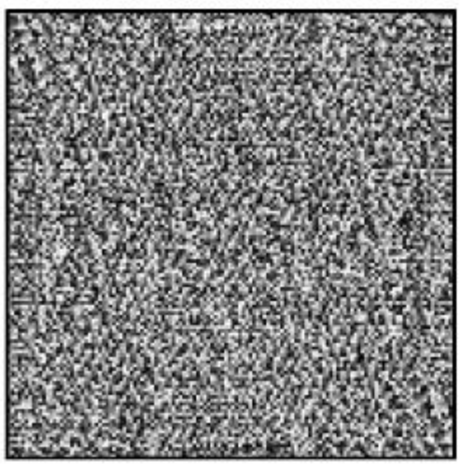
Espectro en frecuencia de una imagen:
La siguiente imagen, es una fotografía microscópica de la superficie de un circuito integrado de silicio.



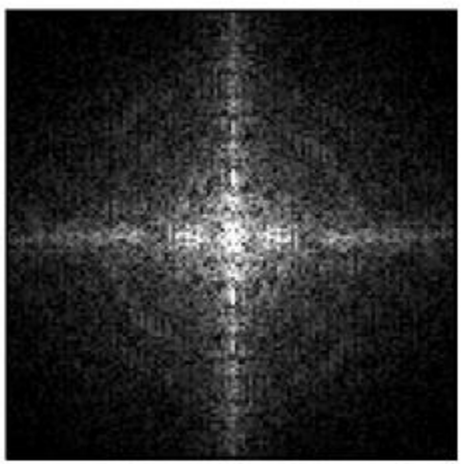
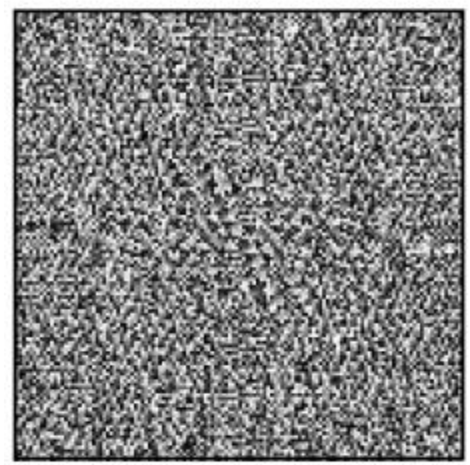
El espectro de la frecuencia puede desplegarse partes reales e imaginarias

(b) Espectro en frecuencias desplegado en forma rectangular (con parte real e imaginaria)	
Real	**Imaginaria**
	

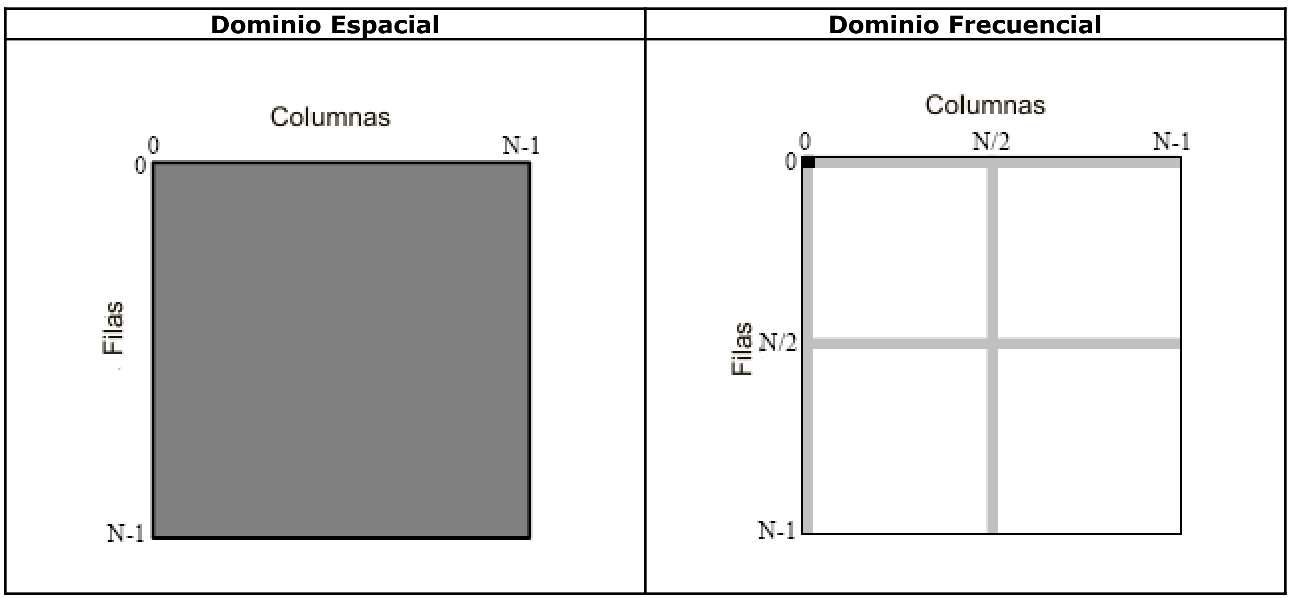
El espectro de la frecuencia puede desplegarse también como la magnitud y la fase

(c) Espectro en frecuencias desplegado en forma polar (con la magnitud y fase)	
Magnitud	**Fase**
	

Las figuras anteriores, (b) y (c) son desplegadas con las frecuencias bajas en las esquinas y las altas frecuencias en el centro. Como el dominio de la frecuencia es periódico, el despliegue se puede cambiar para invertir estas posiciones. Esto se muestra en (d), donde la magnitud y la fase se muestran con las frecuencias bajas situadas en el centro y las frecuencias altas en las esquinas.

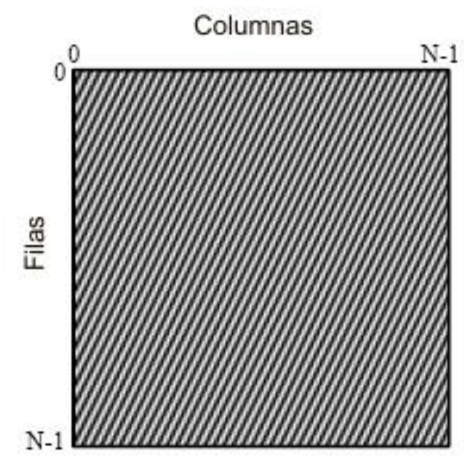
(d) Espectro en frecuencias desplegado en forma polar con el espectro cambiado de lugar para poner la frecuencia cero en el centro	
Magnitud	**Fase**
	

La siguiente figura ilustra cómo se organiza el dominio de la frecuencia en dos dimensiones (con las frecuencias bajas puestas en las esquinas). La fila N/2 y la columna N/2 separa el espectro de la frecuencia en cuatro cuadrantes. Para la parte real y la magnitud, el cuadrante superior derecho es una imagen reflejada del cuadrante inferior izquierdo, mientras que el superior izquierdo es una imagen reflejada del inferior derecho. Esta simetría también sostiene para la parte imaginaria y la fase, excepto que los valores de los pixeles reflejados son opuestos en signo. Es decir cada punto en el espectro de la frecuencia tiene un punto contrario puesto simétricamente en el otro lado del centro de la imagen (fila N/2 y columna N/2).

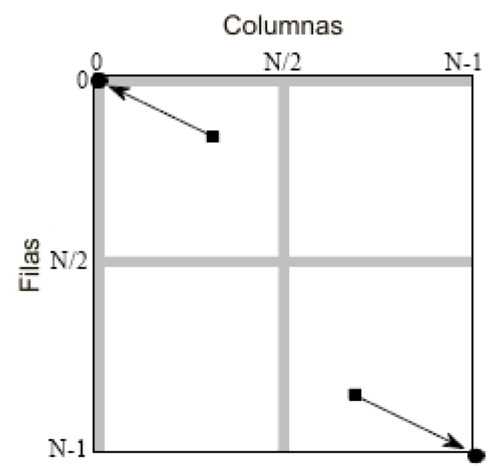


Sinusoidales en dos dimensiones. Las ondas del seno y del coseno de la imagen tienen una frecuencia y una dirección. Cuatro ejemplos se demuestran aquí. Estos espectros se muestran con las frecuencias bajas en las esquinas. Los círculos en estos espectros muestran la localización de la frecuencia cero.

Dominio Espacial



Dominio Frecuencial



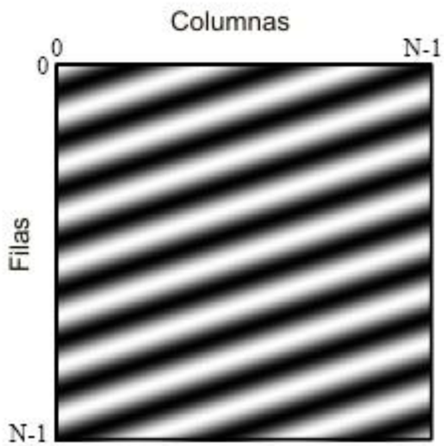
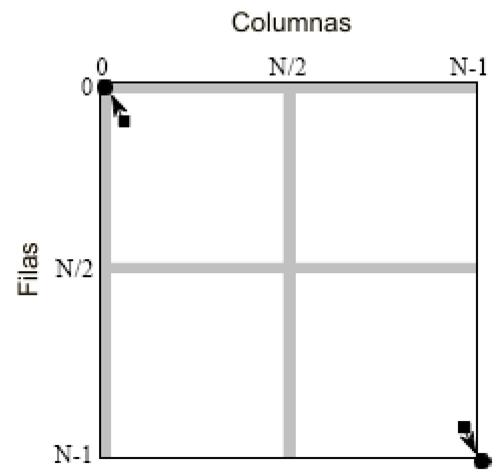
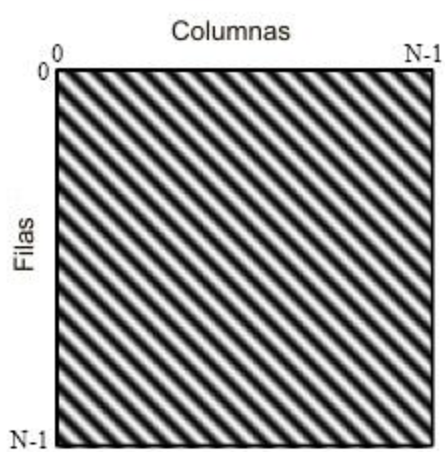
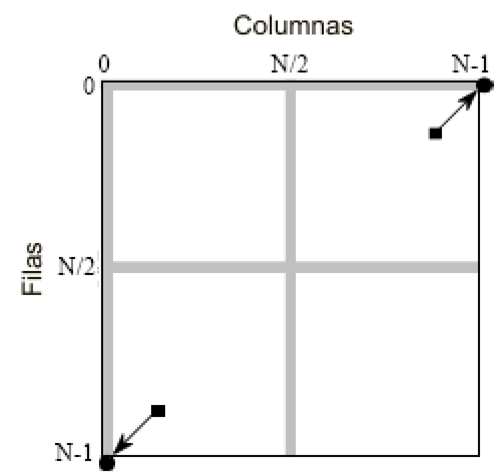
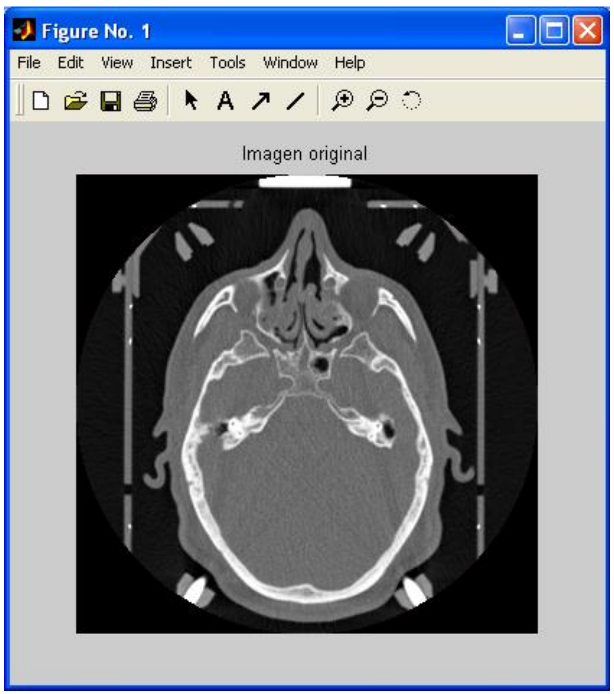
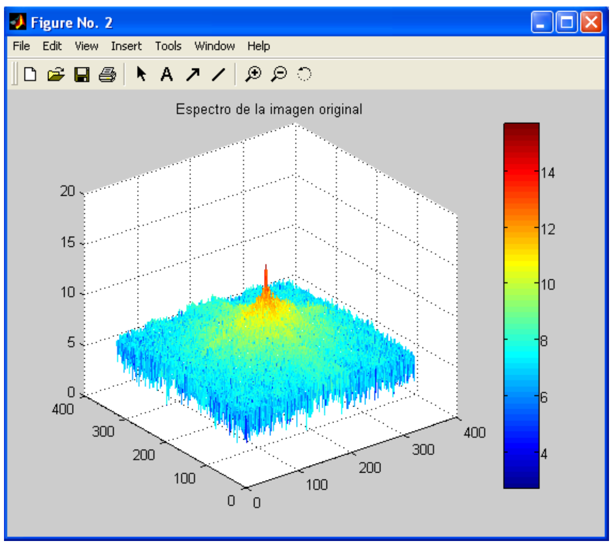
Dominio Espacial	Dominio Frecuencial
	
	

Imagen a filtrar

Dominio Espacial	Dominio Frecuencial





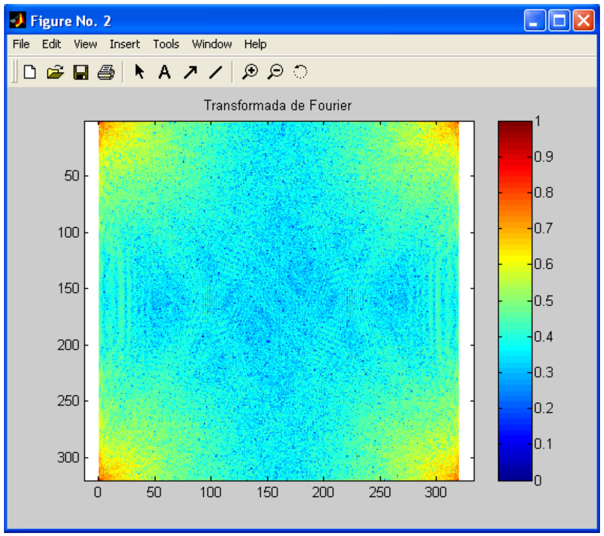


Figure No. 2
File Edit View Insert Tools Window Help
Transformada de Fourier

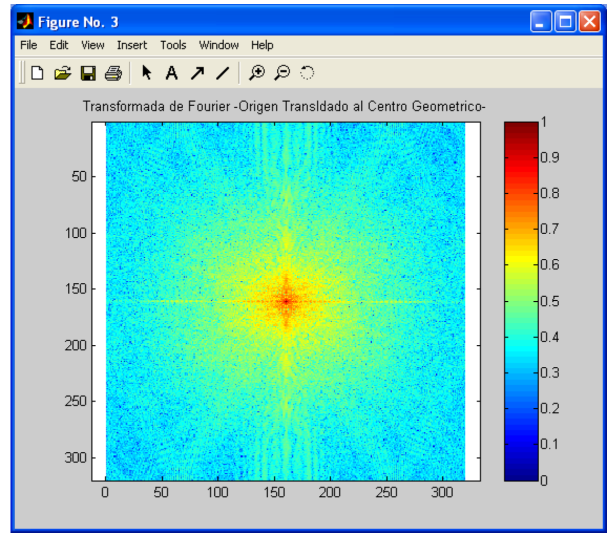


Figure No. 3
File Edit View Insert Tools Window Help
Transformada de Fourier -Origen Transldado al Centro Geometrico-

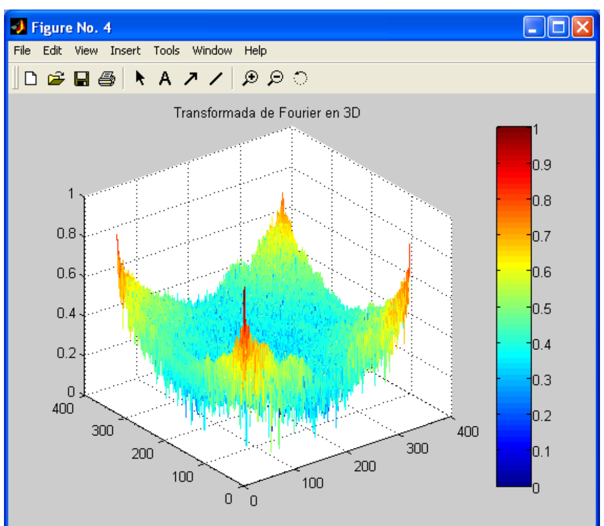


Figure No. 4
File Edit View Insert Tools Window Help
Transformada de Fourier en 3D

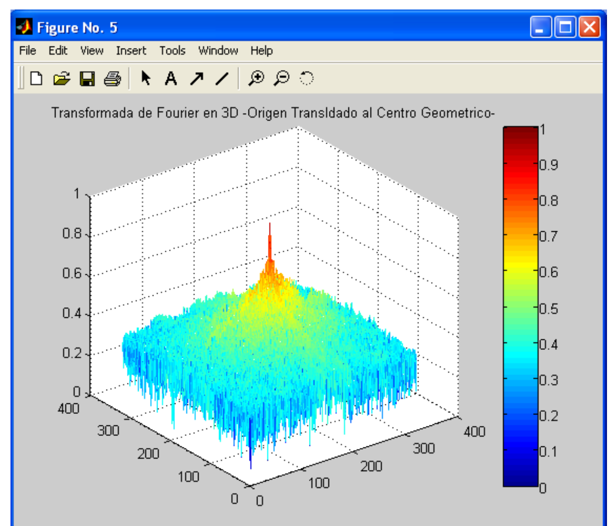
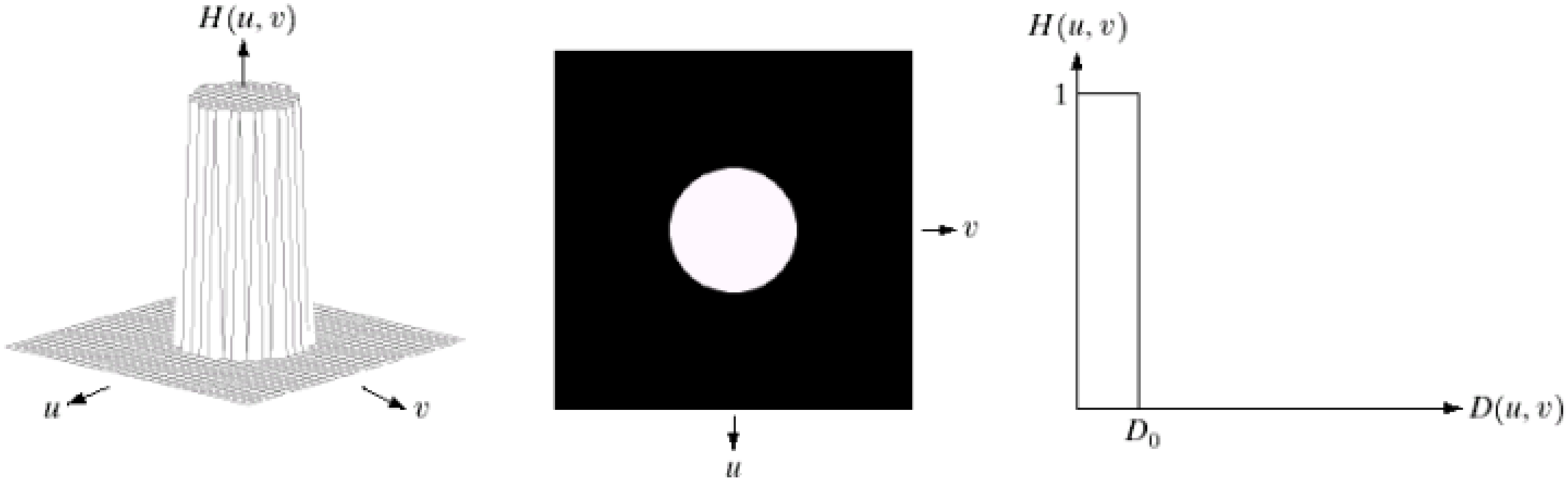


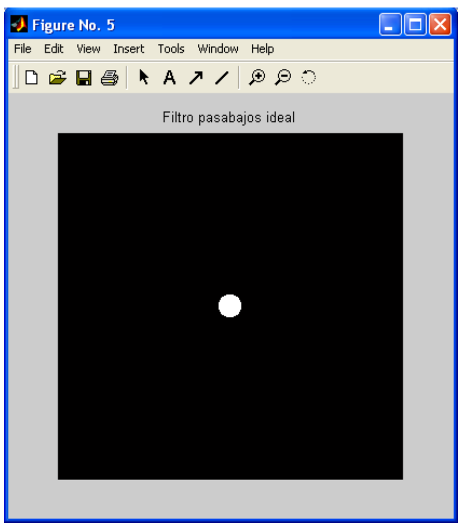
Figure No. 5
File Edit View Insert Tools Window Help
Transformada de Fourier en 3D -Origen Transldado al Centro Geometrico-

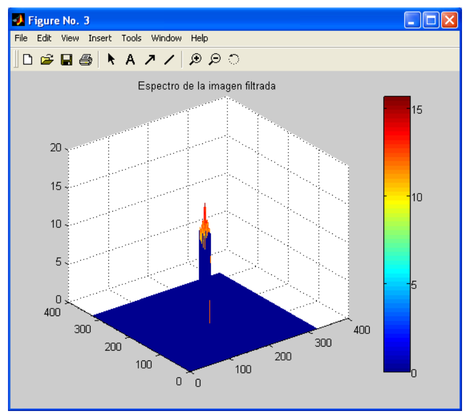
Filtro Pasa Bajas Ideal



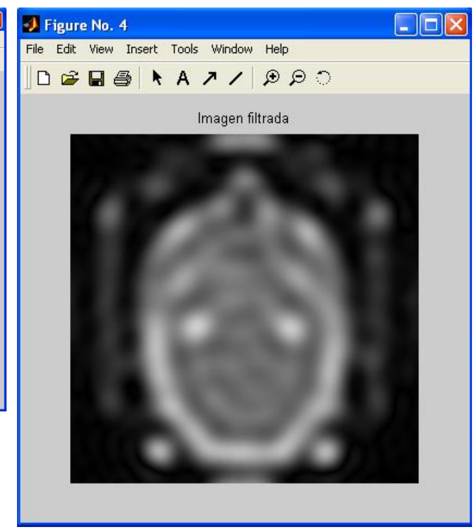
PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMAGENES

Filtro	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

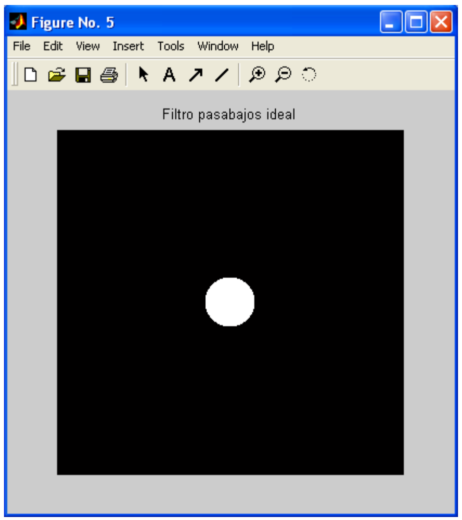


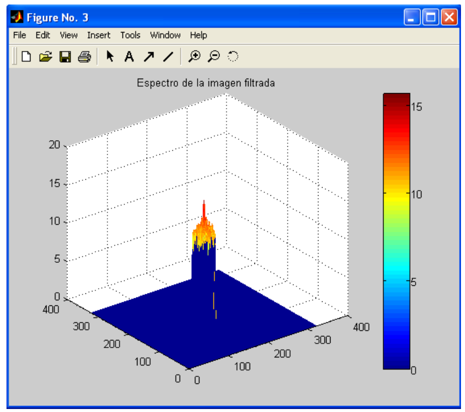


Frecuencia de corte
D_0=f/2/15

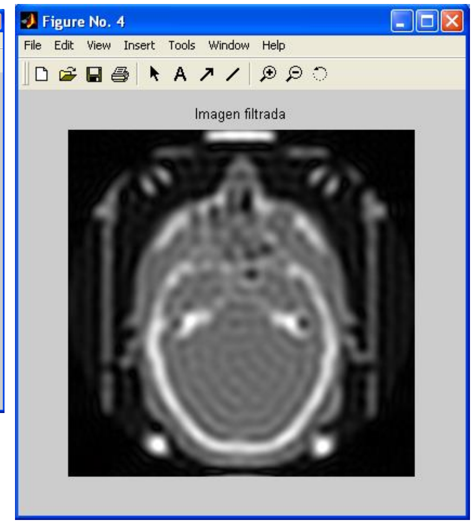


Filtro	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

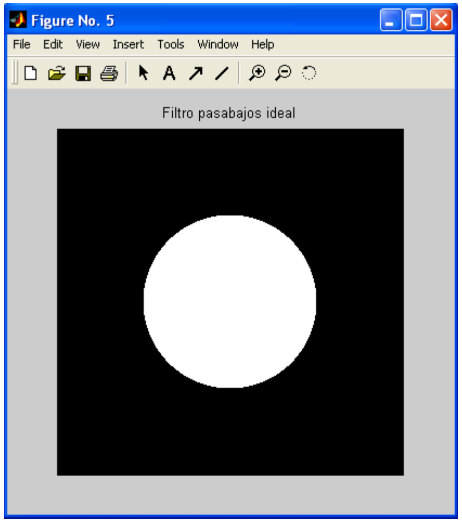


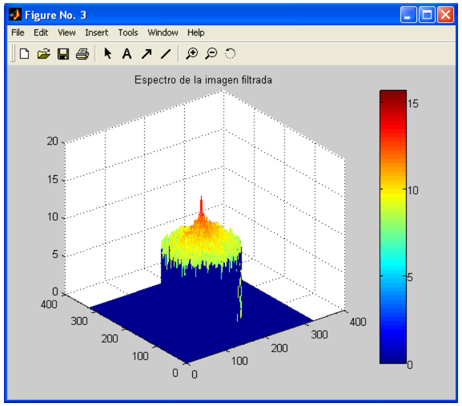


Frecuencia de corte
D_0=f/2/7

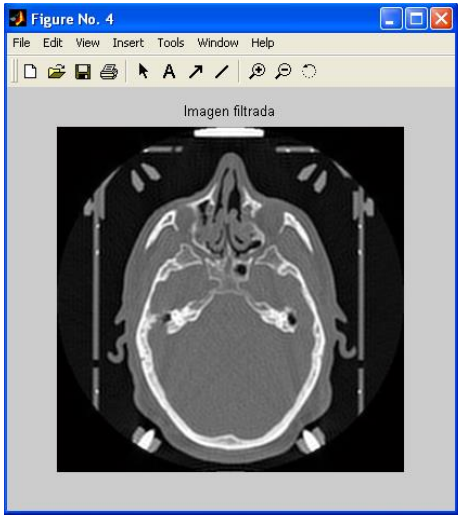


Filtro	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

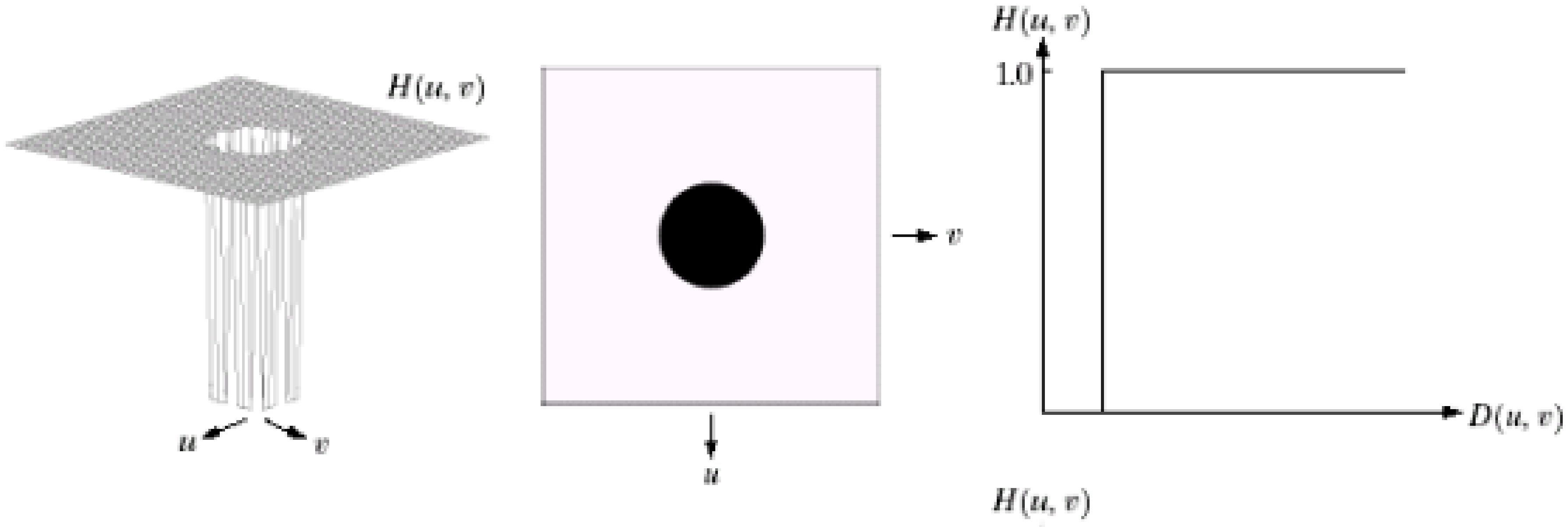




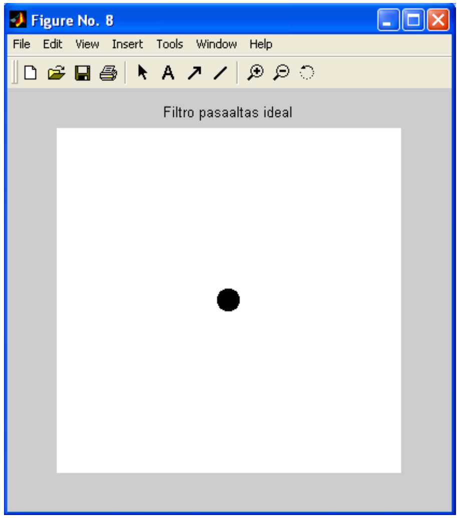
Frecuencia de corte
$D_0=f/2/2$

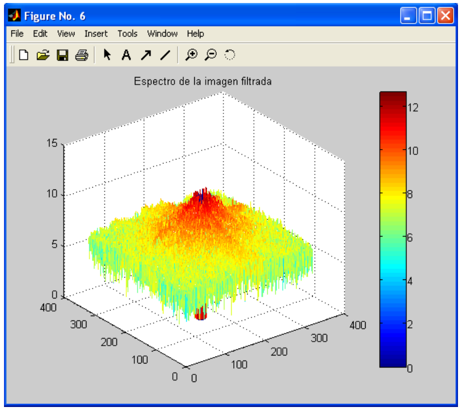


Filtro Pasa Altas Ideal

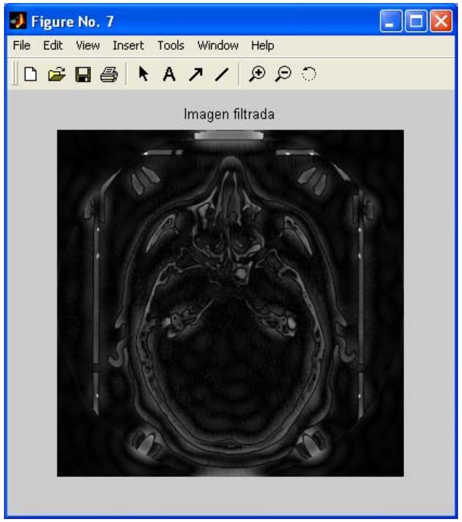


Filtro	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

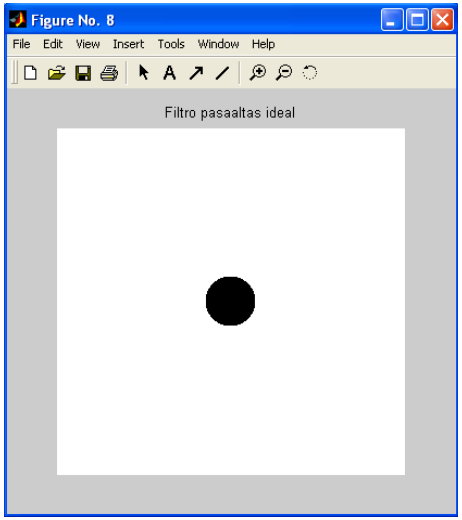


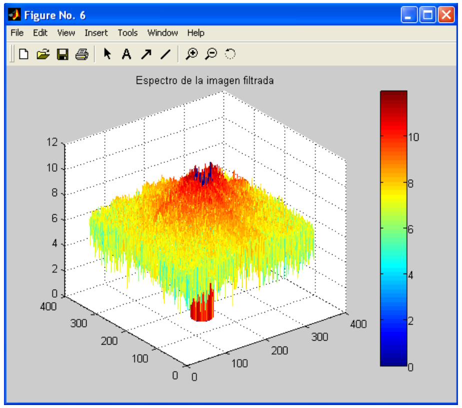


Frecuencia de corte
D_0=f/2/15

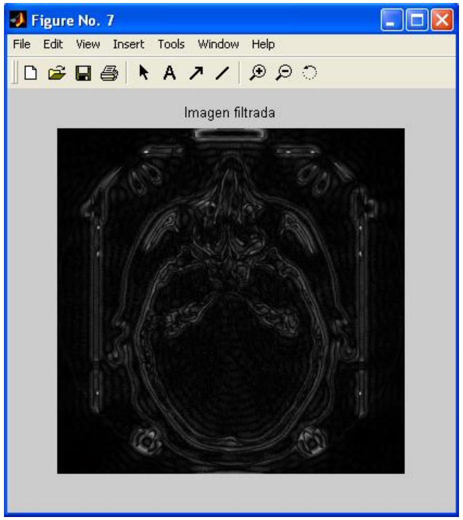


Filtro	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

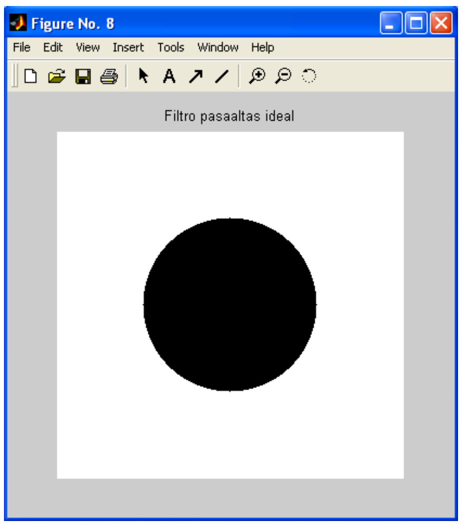


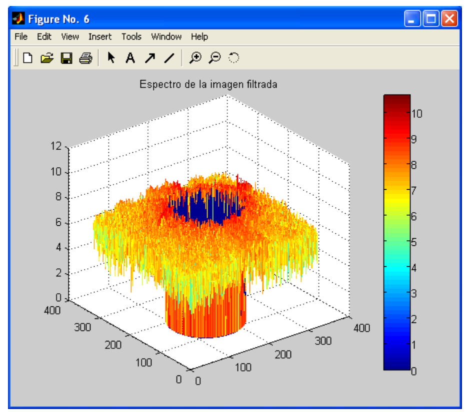


Frecuencia de corte
D_0=f/2/7

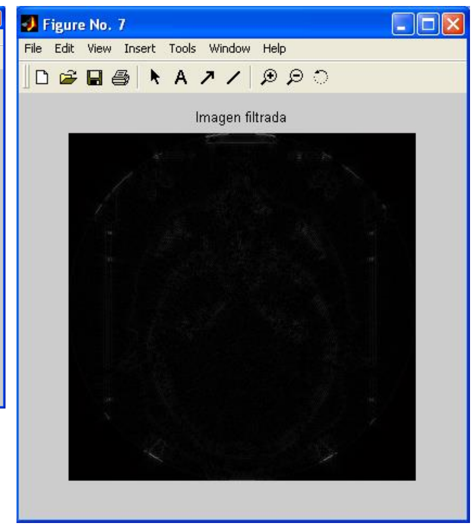


Filtro	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

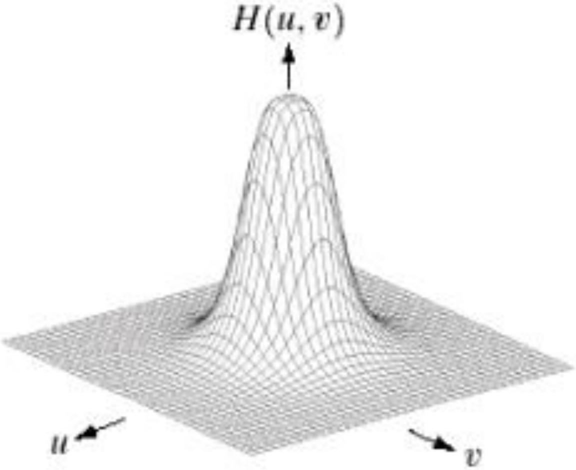


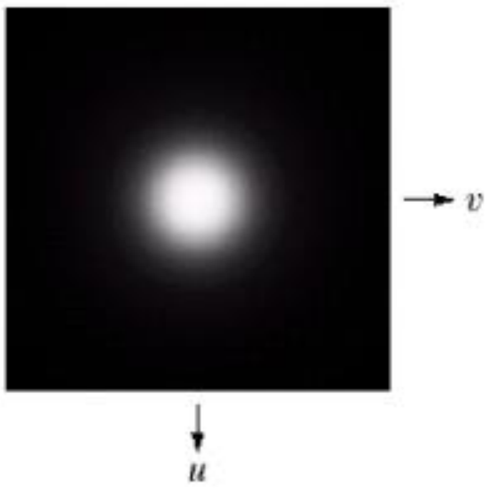


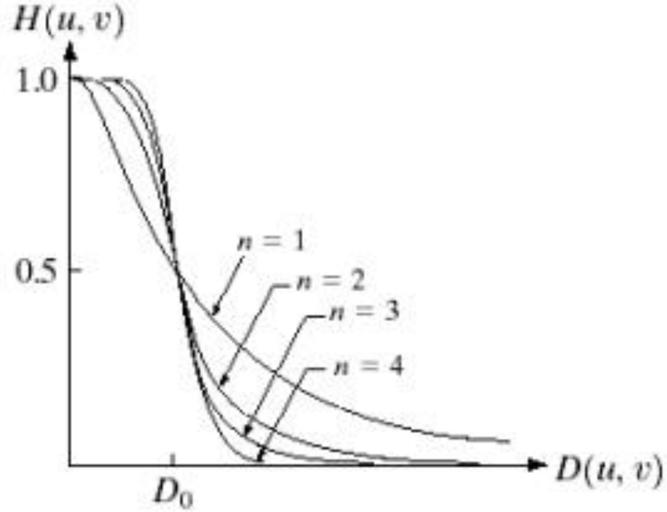
Frecuencia de corte
D_0=f/2/2



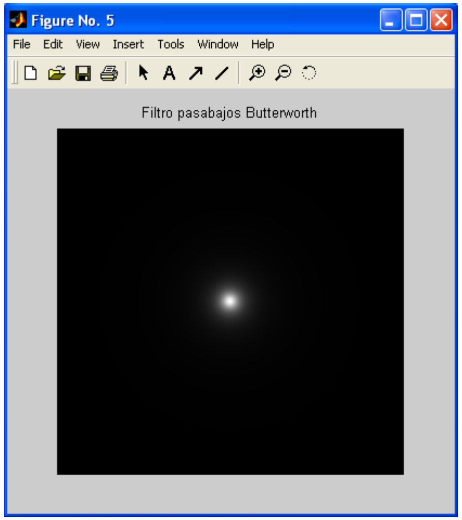
Filtro Pasa Bajas Butterworth

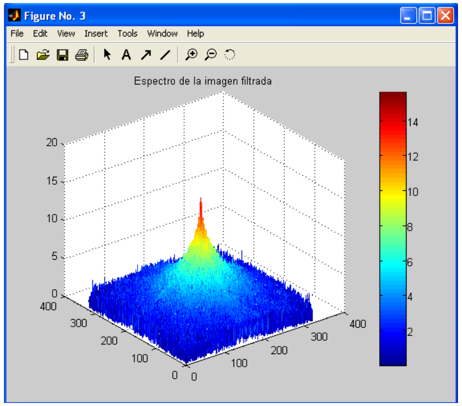




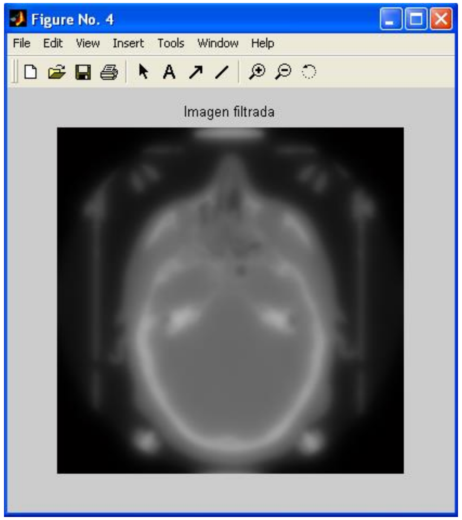


Filtro; N=2	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

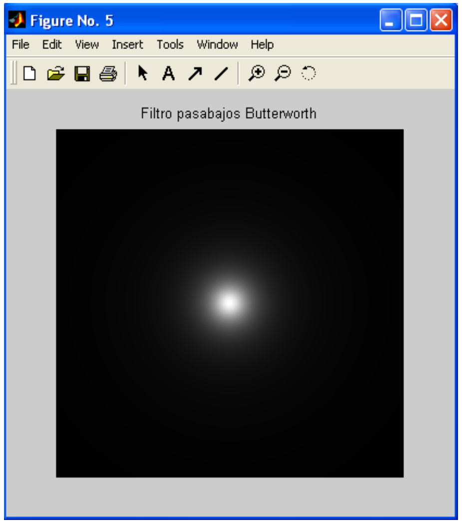


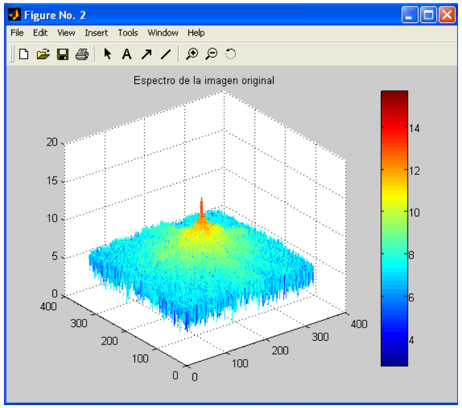


Frecuencia de corte
D_0=f/2/15

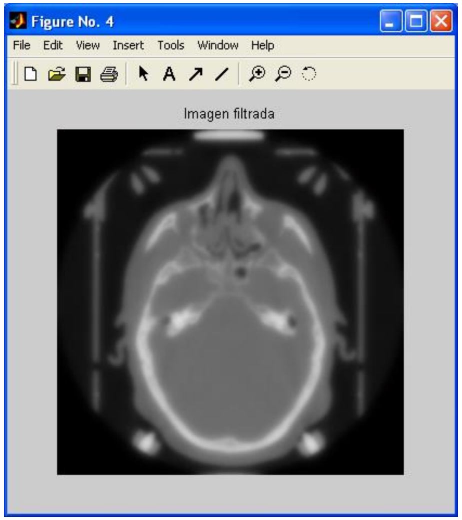


Filtro; N=2	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

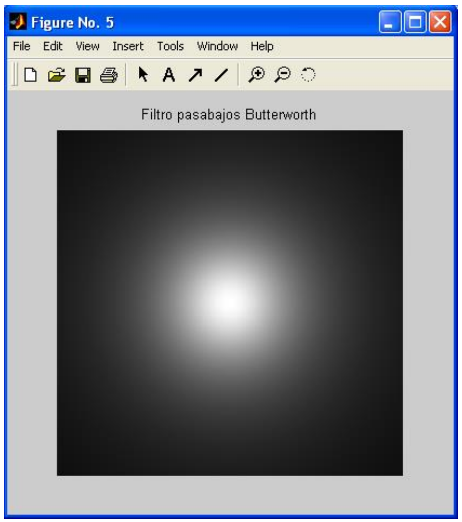


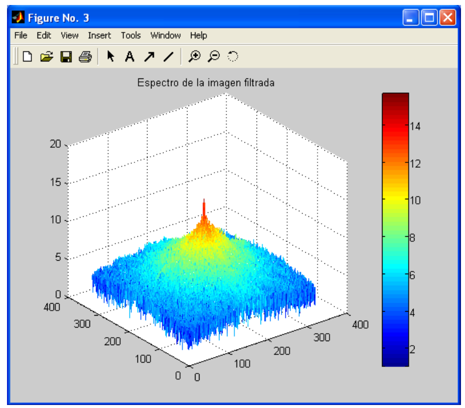


Frecuencia de corte
D_0=f/2/7

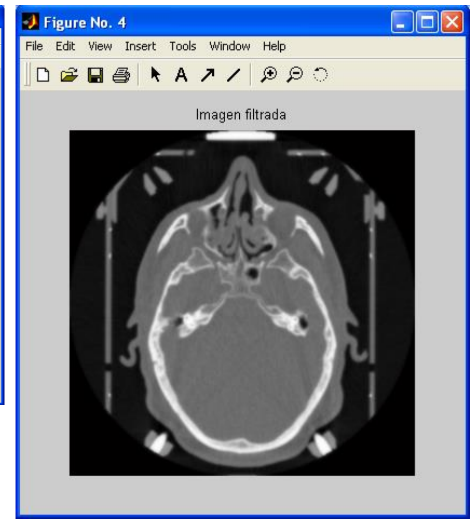


Filtro; N=2	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

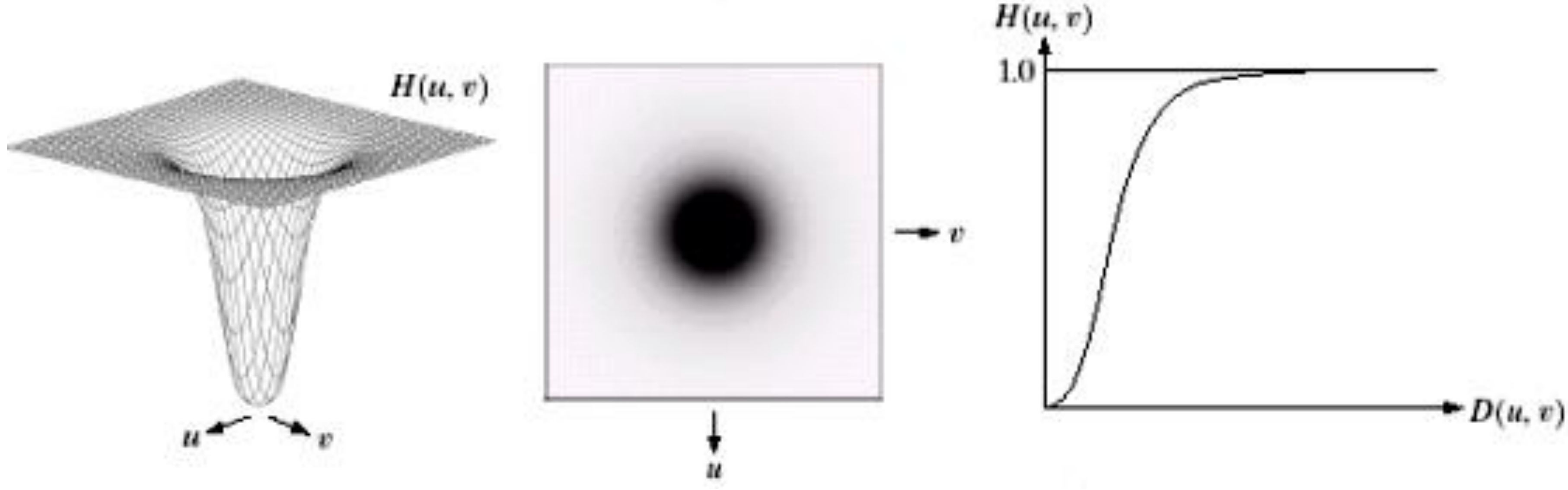




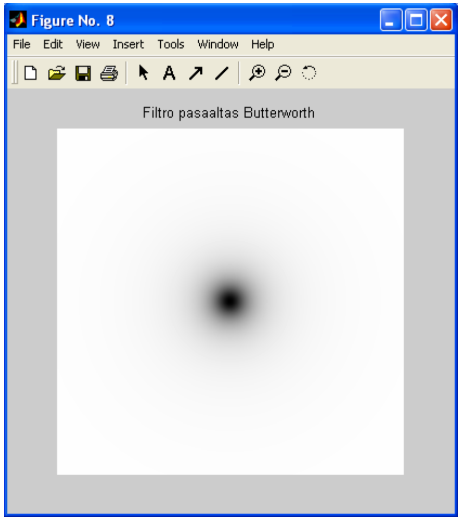
Frecuencia de corte
D_0=f/2/2

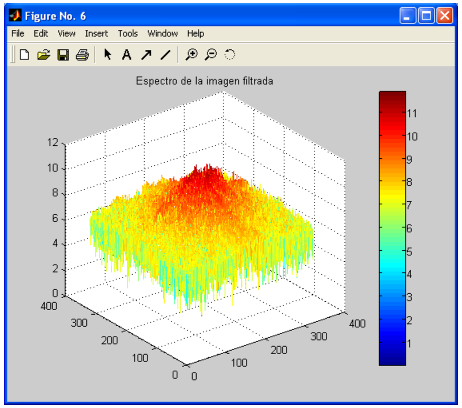


Filtro Pasa Altas Butterworth

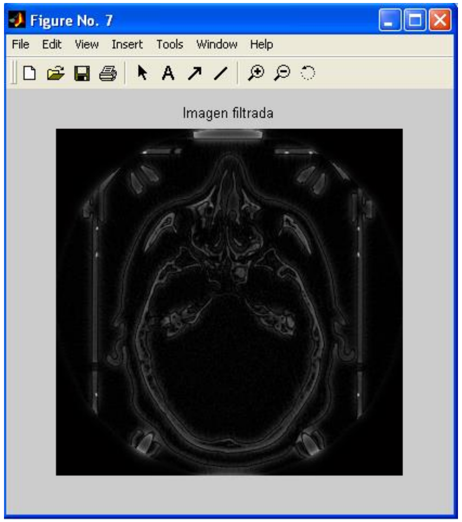


Filtro; N=2	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

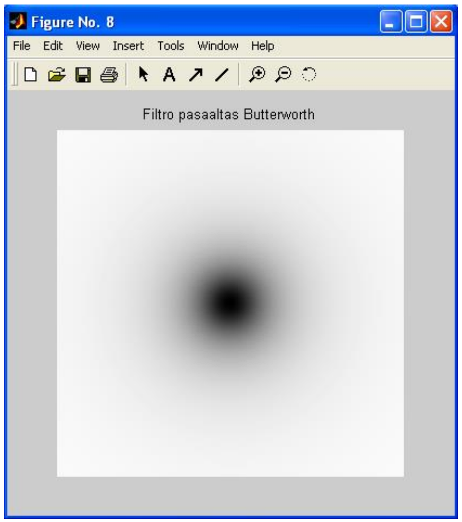


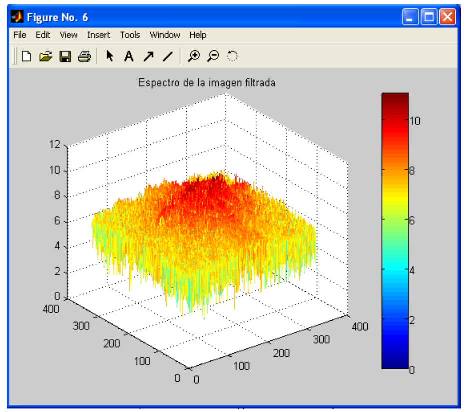


Frecuencia de corte
D_0=f/2/15

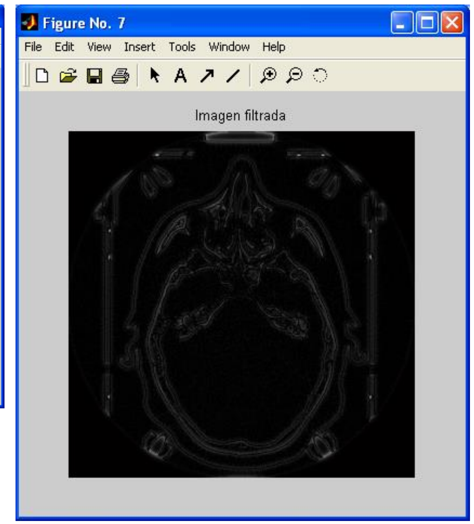


Filtro; N=2	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

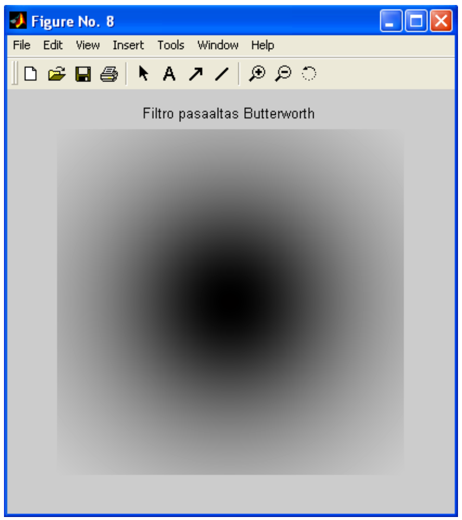


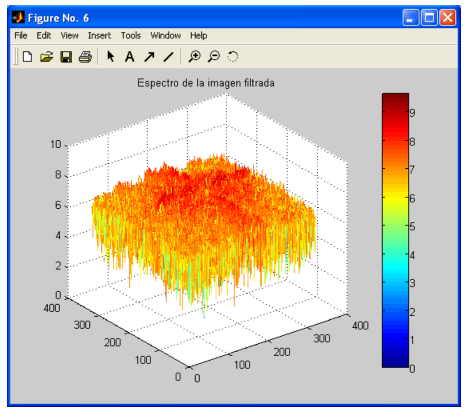


Frecuencia de corte
$D_0=f/2/7$

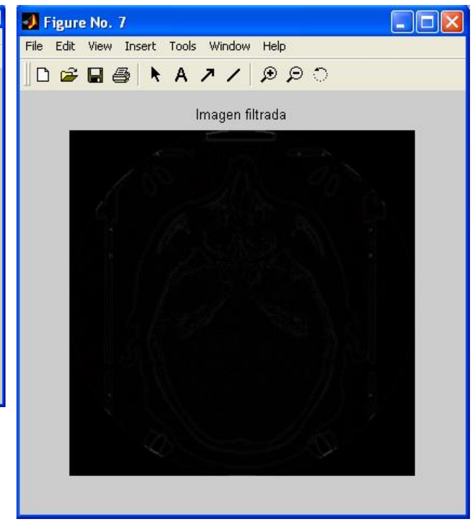


Filtro; N=2	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

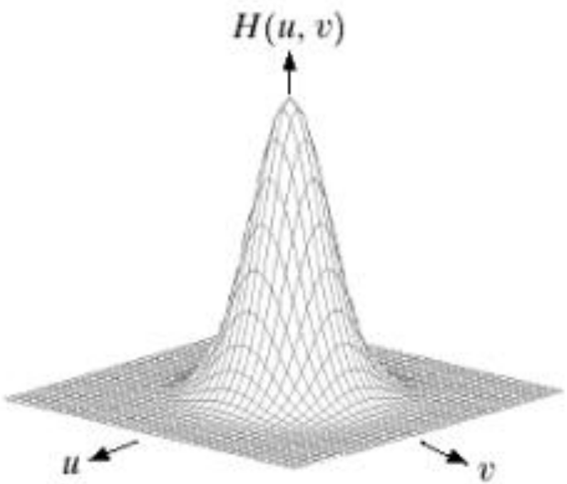


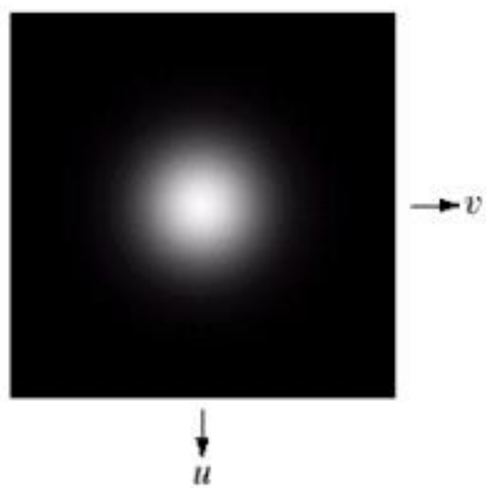


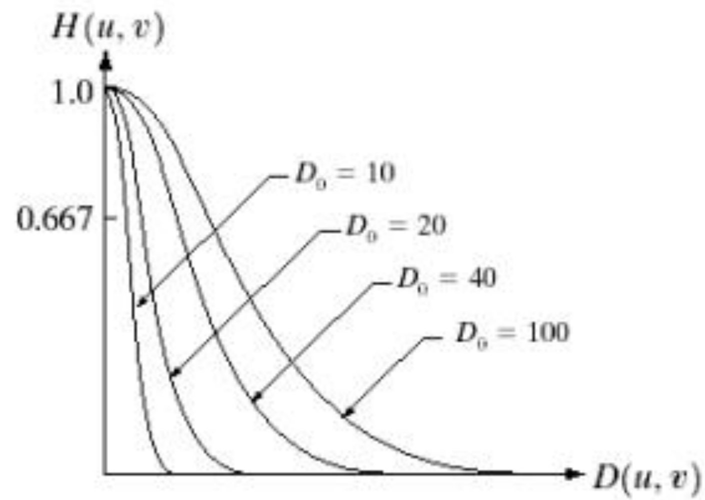
Frecuencia de corte
D_0=f/2/2



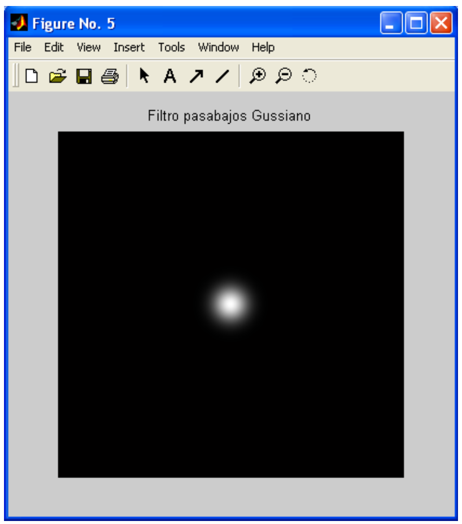
Filtro Pasa Bajas Gaussiano

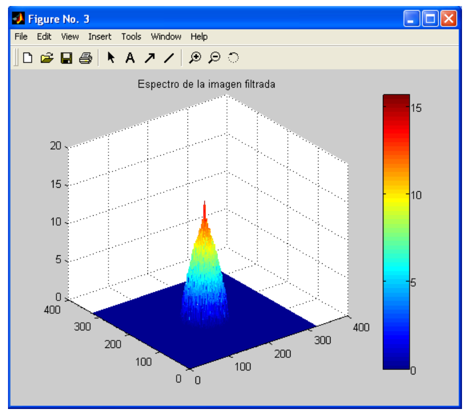




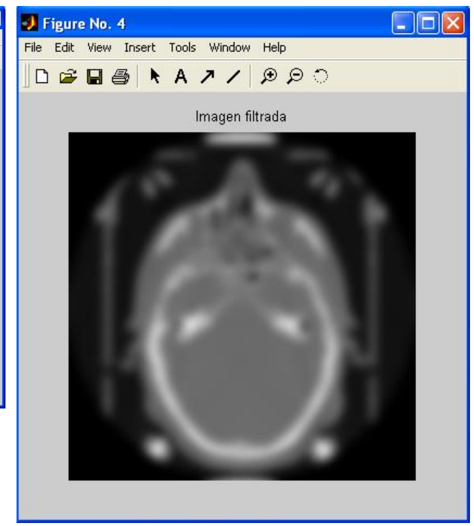


Filtro; N=2	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

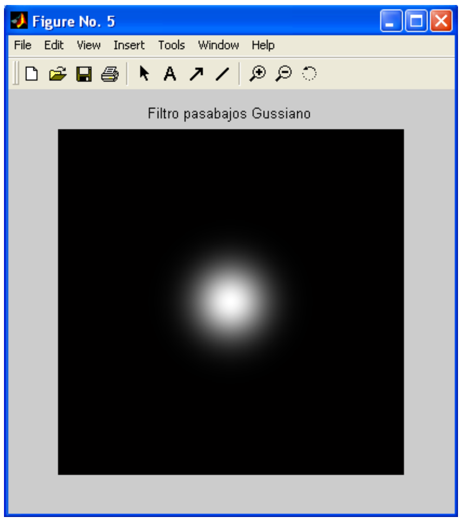


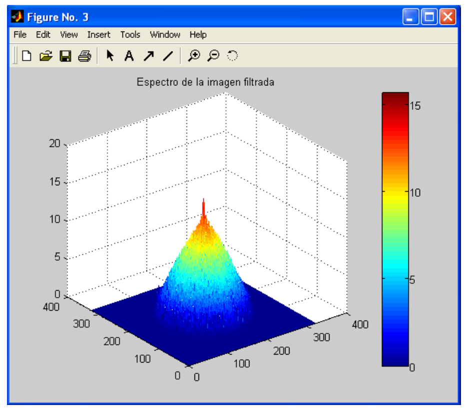


Frecuencia de corte
D_0=f/2/15

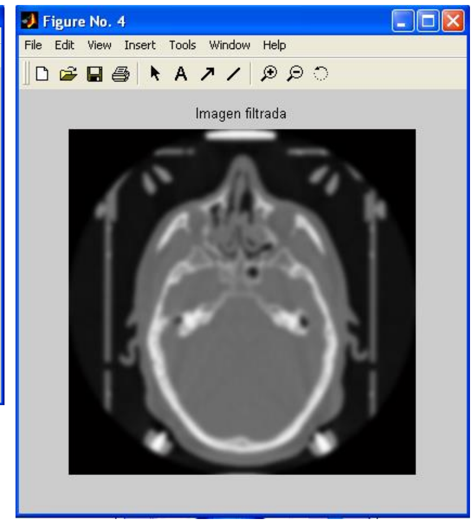


Filtro; N=2	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

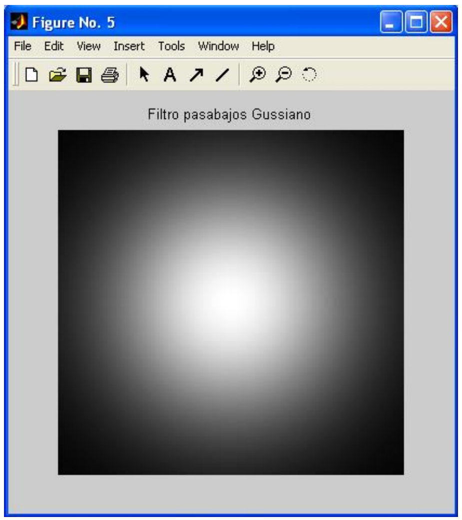


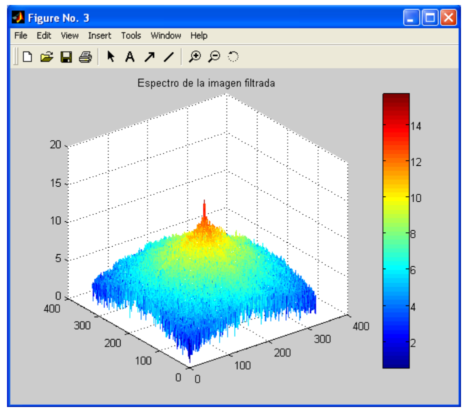


Frecuencia de corte
D_0=f/2/7

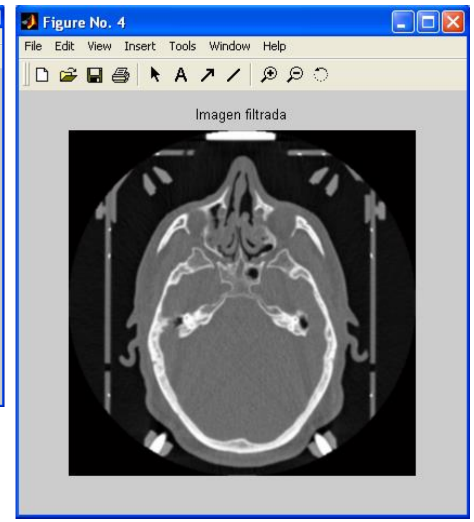


Filtro; N=2	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

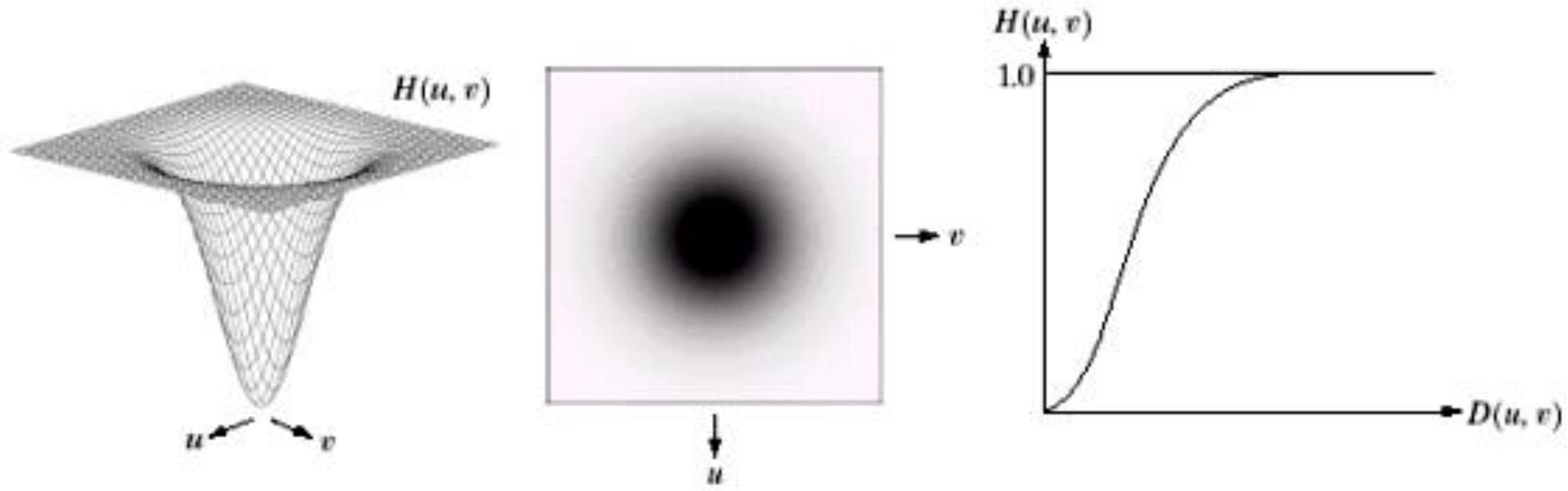




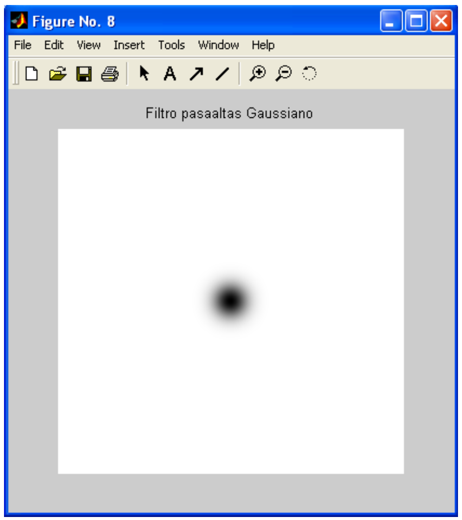
Frecuencia de corte
D_0=f/2/2

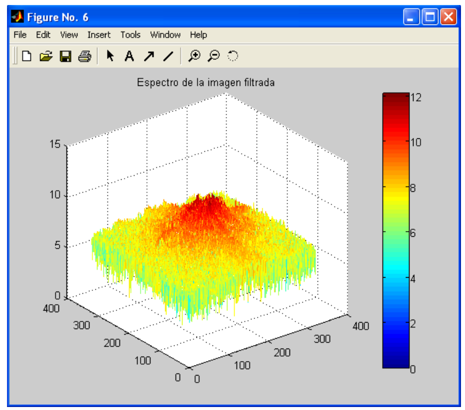


Filtro Pasa Altas Gaussiano

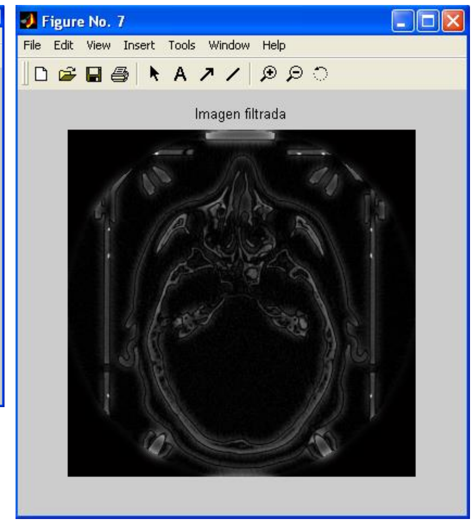


Filtro; N=2	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

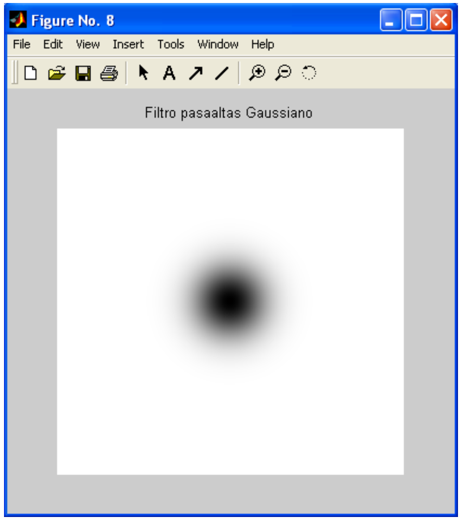


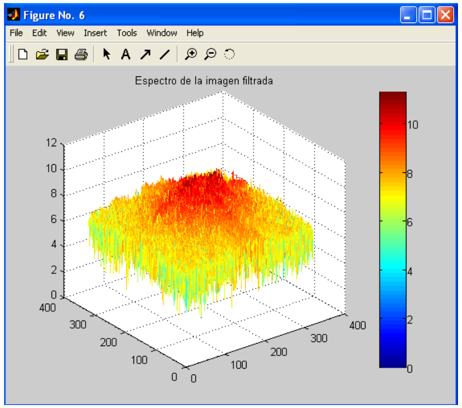


Frecuencia de corte
D_0=f/2/15

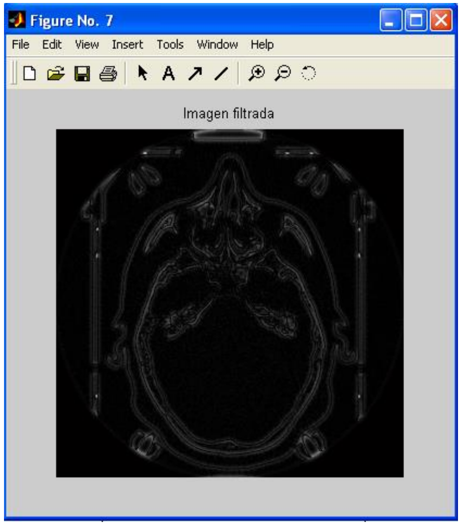


Filtro; N=2	Espectro del Filtro	Imagen Resultante

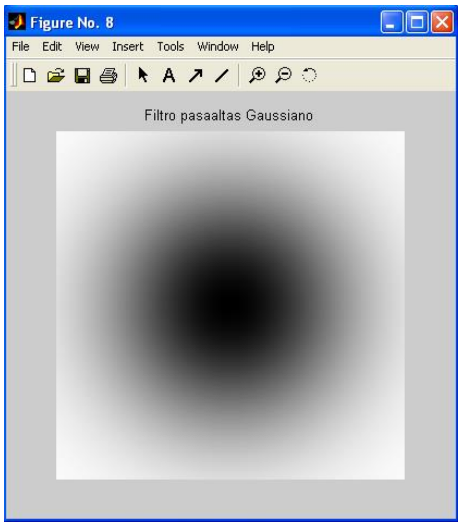


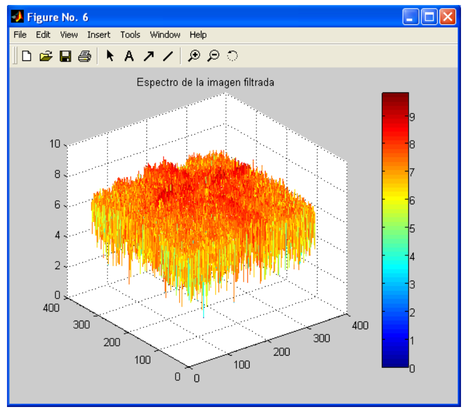


Frecuencia de corte
D_0=f/2/7

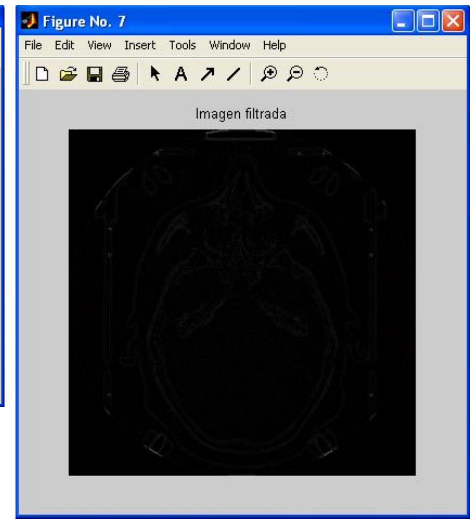


Filtro; N=2	Espectro del Filtro	Imagen Resultante





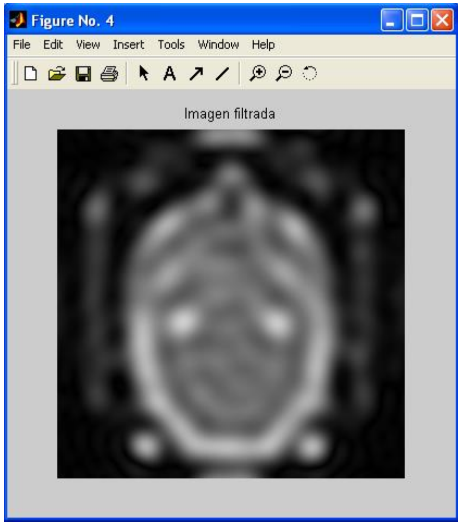
Frecuencia de corte
$D_0=f/2/2$

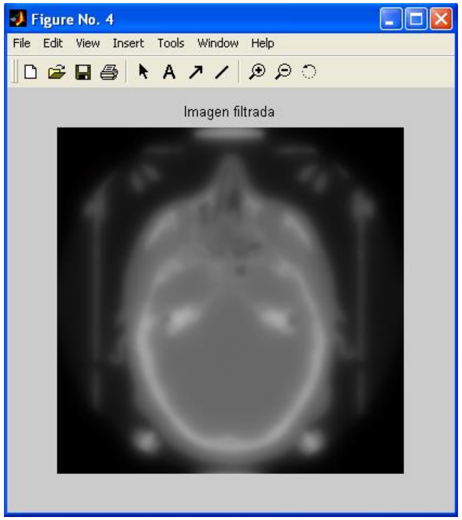


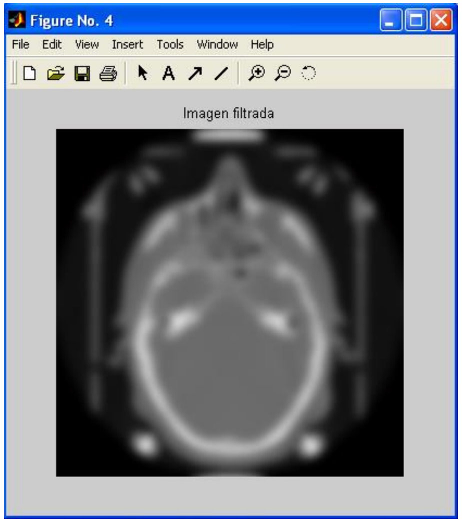
FILTRADO FRECUENCIAL PASA BAJAS

Frecuencia de corte
D_0=f/2/15

Ideal	Butterworth	Gausssiano



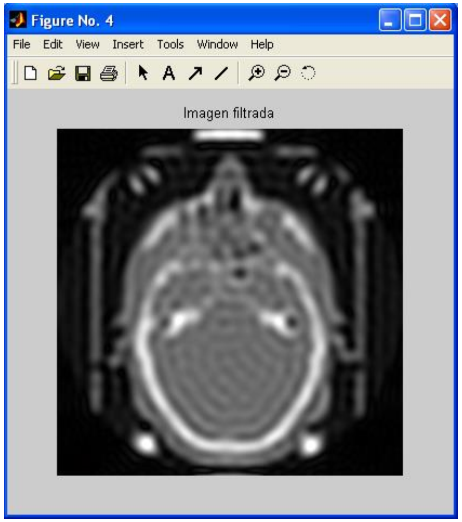


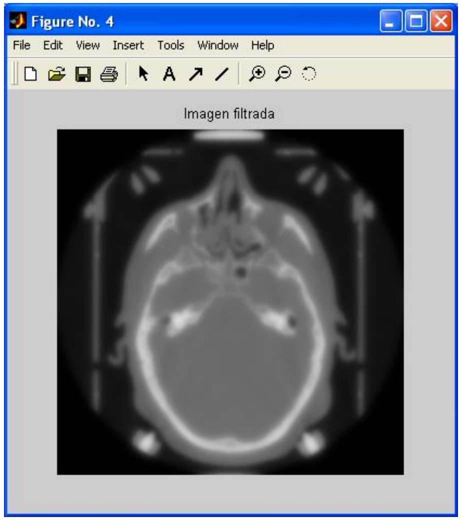


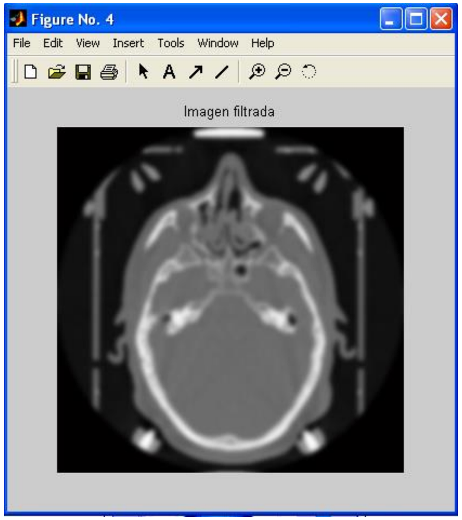
FILTRADO FRECUENCIAL PASA BAJAS

Frecuencia de corte
D_0=f/2/7

Ideal	Butterworth	Gausssiano



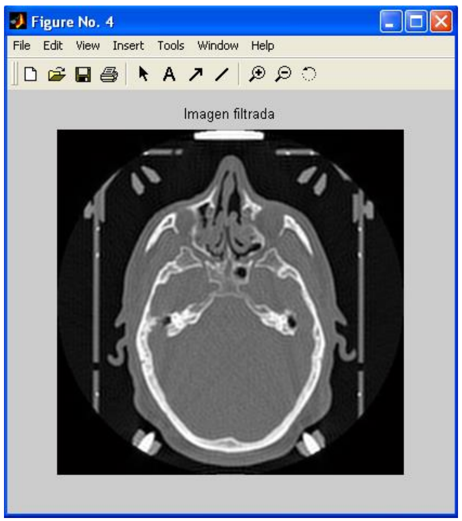


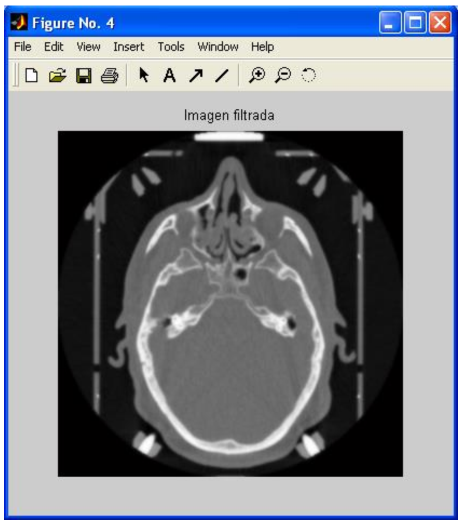


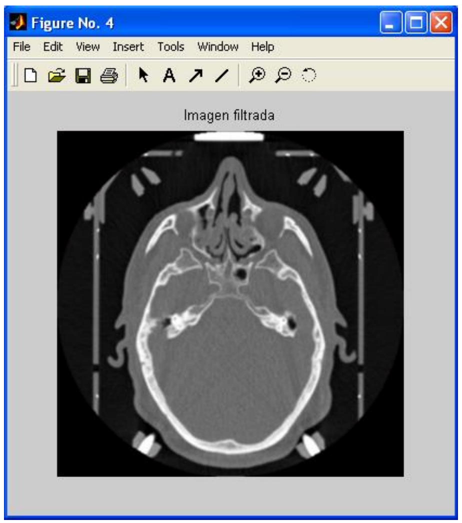
FILTRADO FRECUENCIAL PASA BAJAS

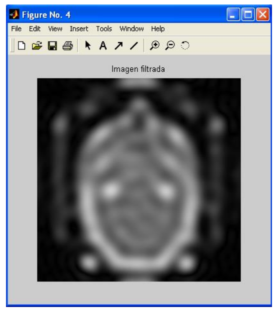
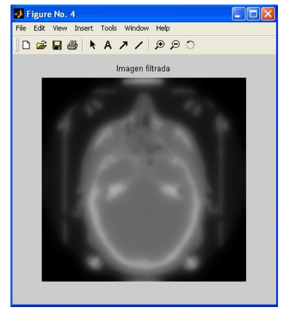
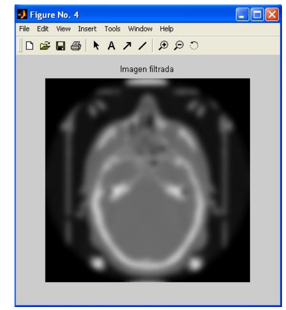
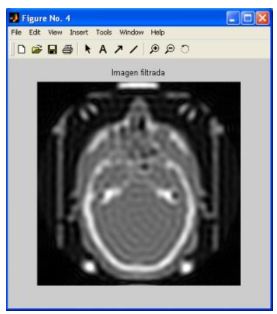
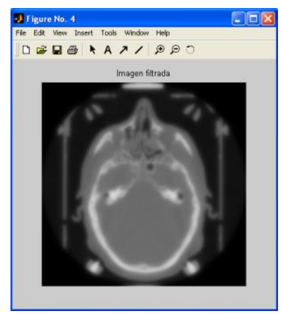
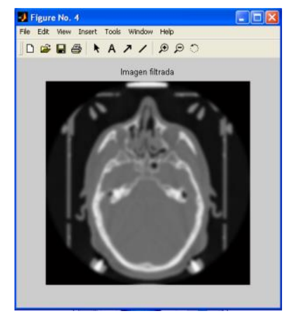
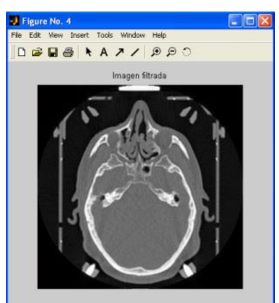
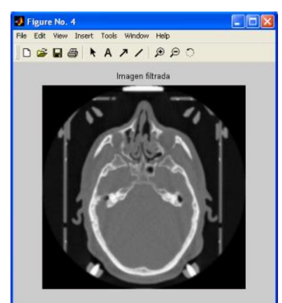
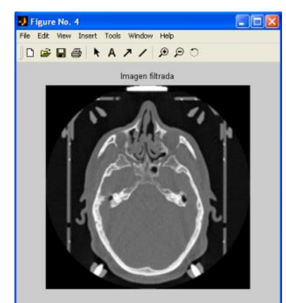
Frecuencia de corte
D_0=f/2/2

Ideal	Butterworth	Gausssiano





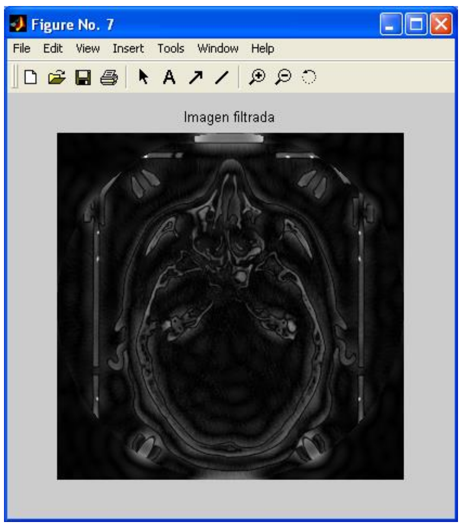


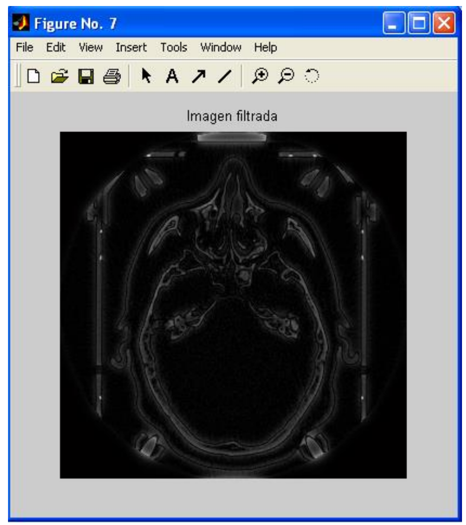
Frecuencia de corte	Ideal	Butterworth	Gausssiano
D_0=f/2/15			
D_0=f/2/7			
D_0=f/2/2			

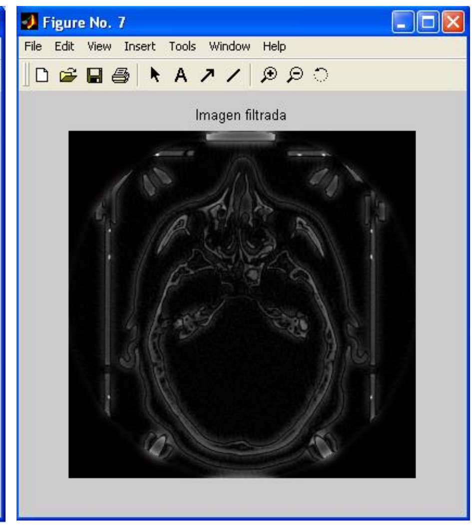
FILTRADO FRECUENCIAL PASA ALTAS

Frecuencia de corte
D_0=f/2/15

Ideal	Butterworth	Gausssiano



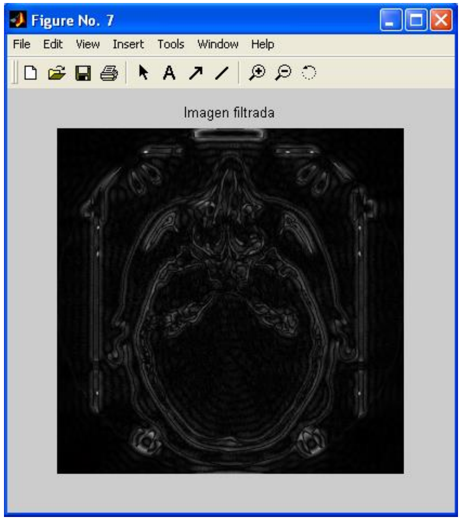


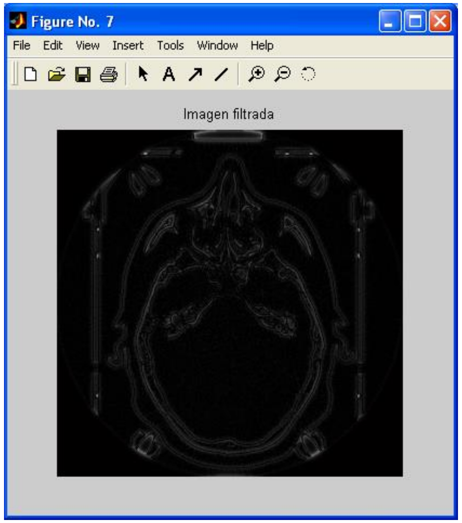


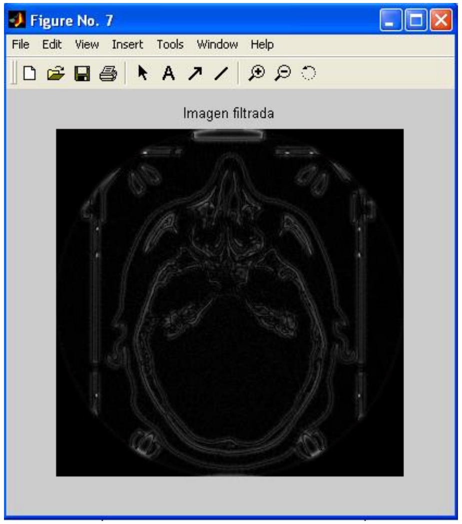
FILTRADO FRECUENCIAL PASA ALTAS

Frecuencia de corte
D_0=f/2/7

Ideal	Butterworth	Gausssiano

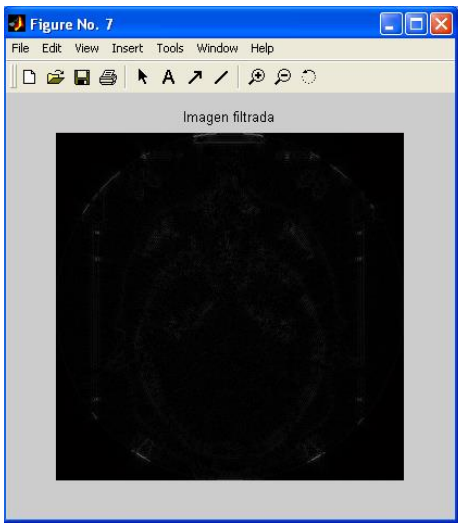
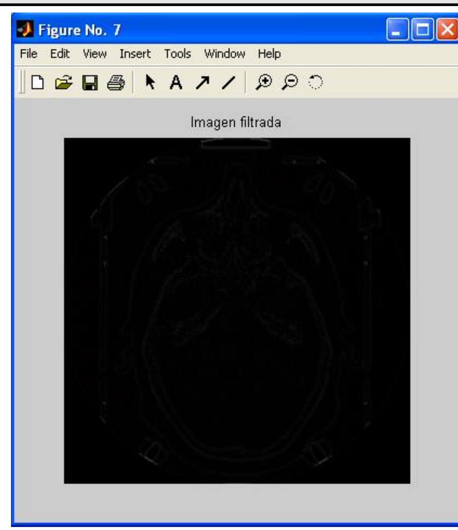
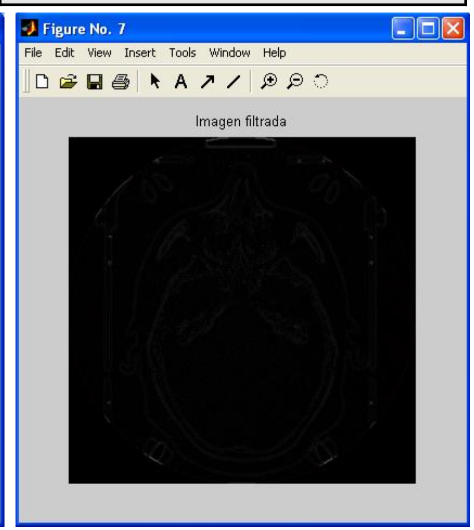




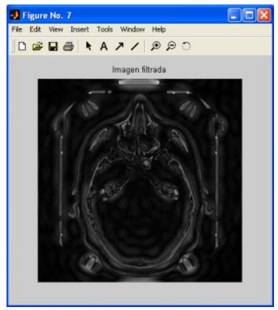
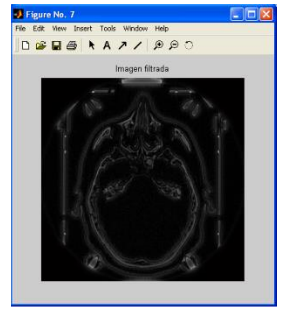
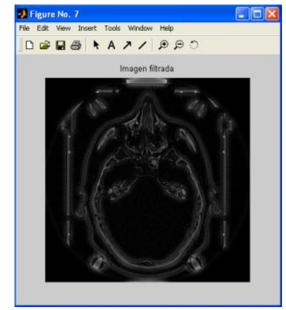
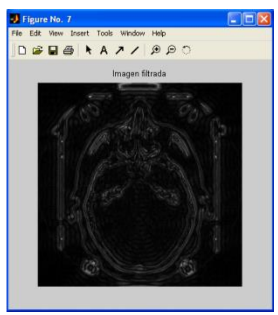
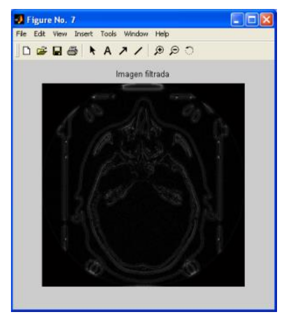
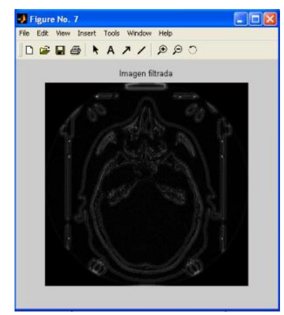


FILTRADO FRECUENCIAL PASA ALTAS

Frecuencia de corte
D_0=f/2/2

Ideal	Butterworth	Gausssiano
		

PROCESAMIENTO DIGITAL DE IMAGENES

Frecuencia de corte	Ideal	Butterworth	Gausssiano
D_0=f/2/15			
D_0=f/2/7			
D_0=f/2/2