

Realce de Imágenes

3.1. Conceptos

El realce de imágenes es el mejoramiento de una imagen, ya sea en contraste, ruido, escala de grises, distorsiones, luminosidad, falta de nitidez, etc. En la práctica se realizan dos tipos de realces:

- **Realces Radiométricos.** Son operaciones que se efectúan directamente sobre un pixel, sin importar los pixeles vecinos. Este tipo de realces sirve para mejorar condiciones de bajo contraste, imágenes muy oscuras o imágenes muy luminosas [8].
- **Realces con Operaciones entre Vecinos.** Son operaciones que se efectúan sobre un pixel pero tomando en cuenta los pixeles que lo rodean, es decir los pixeles vecinos. Este tipo de realce sirve para quitar ruido en las imágenes o cuando se trata de mejorar la nitidez [8].

3.2. Realces Radiométricos

En este tipo de realce se utiliza la modificación del histograma para variar la distribución de los niveles de intensidad de la imagen. El histograma de una imagen es la representación gráfica de la distribución que existe de las distintas tonalidades de grises con relación al número de pixeles o porcentaje de los mismos. En la Figura 3.1, se representan cuatro distribuciones de probabilidad que representan los histogramas de imágenes claras, 3.1a; oscuras, 3.1b; con bajo contraste, 3.1c; con alto contraste, 3.1d, la representación de éste último, histograma ideal, sería, como se observa, el de una recta horizontal, ya que esto nos indicaría que todos los posibles valores de grises están distribuidos de manera uniforme en nuestra imagen.

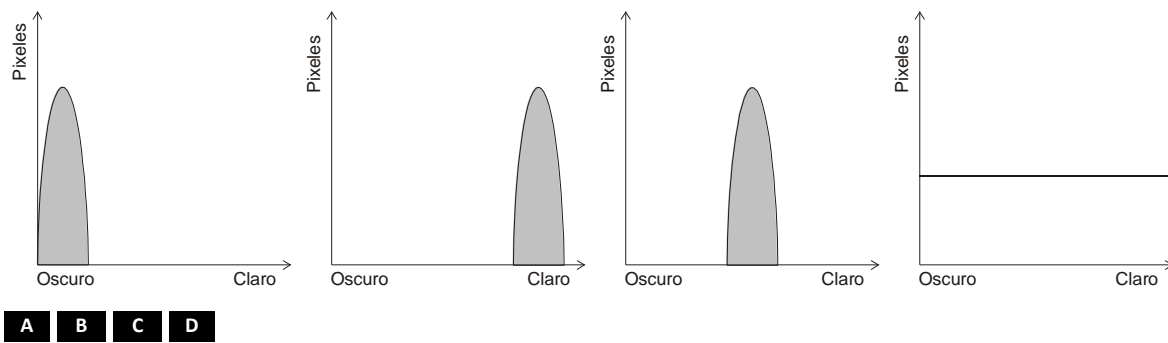


Figura 3.1: Ejemplos de tipos de histograma. **A.** Imagen muy Oscura; **B.** Imagen muy Luminosa; **C.** Imagen de Poco Contraste, ya que no usa todo el ancho de grises. Imagen muy plana y **D.** Histograma Ideal.

3.2.1. Idea de la ecualización de un histograma

La ecualización de un histograma consiste en encontrar una transformación con la cual el histograma tenga una representación uniforme, es decir, con la ecualización trataremos de igualar lo más posible el histograma de una imagen al histograma ideal (Figura 3.2).

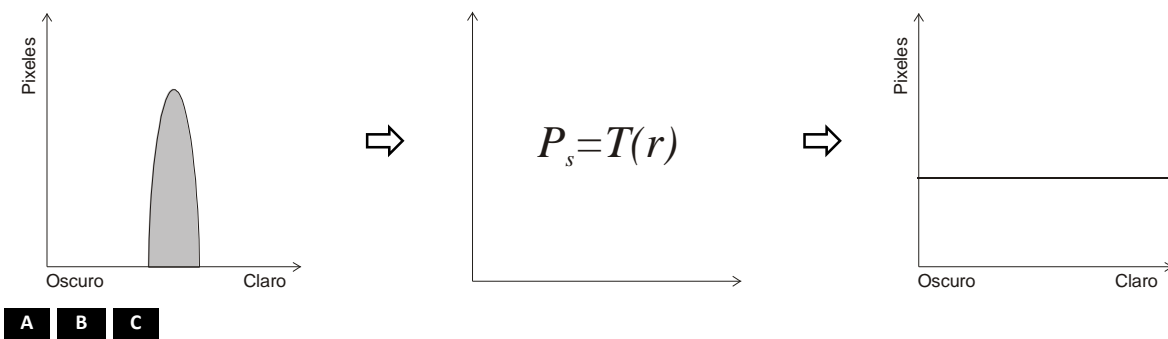


Figura 3.2: Transformación de un histograma con bajo contraste a uno ideal. **A.** Imagen con bajo contraste; **B.** Operación de transformación y **C.** Imagen ecualizada (histograma ideal).

Sin embargo para llevar a cabo esta ecualización es necesario establecer dos restricciones, ya que sin estas podríamos obtener resultados erróneos.

Restricciones, $T(r)$ debe ser:

- a. Monotónicamente Creciente $\frac{ds}{dr} > 0$. Esto indica que la pendiente de la función no puede ser negativa, ya que si fuera así, la imagen se vería afectada en su totalidad, porque lo que estaríamos haciendo, sería invertirla en sus tonalidades.
- b. $T(r)$ tenga inversa y que además sea monotónicamente creciente.

La primera garantiza que es de valor único y monótonamente creciente en el intervalo $0 \leq r \leq 1$ (de forma que se preserve el orden entre blanco y negro de la escala de grises) y la segunda estando en el intervalo $0 \leq T(r) \leq 1$ para $0 \leq r \leq 1$ (de manera que se garantice que la aplicación es coherente con el rango de valores de pixel permitidos).

Para resolver un problema como este, se tiene que suponer que:

- a. r y s son continuas y que r y s son variables aleatorias y continuas.
- b. $p(r)$ y $p(s)$ son funciones de densidad de probabilidad de r y s .



Histograma.

imhist (f, b)

Donde f es la imagen de entrada y b es el número de cajas usadas para la forma del histograma. Ver el toolbox para más información (sintaxis: help imhist).

3.2.2. Definiciones previas

Los procesos en el dominio espacial se denotarán por la expresión

$$g(x, y) = T[f(x, y)] \quad (3.1)$$

donde T es la función de transformación de la imagen de entrada que produce una imagen de salida.

3.3. Procesamiento puntual

La forma más simple de T es cuando la vecindad es de tamaño 1×1 (un sólo pixel). En ese caso, g depende sólo del valor de f en (x, y) y T se convierte en una función de transformación del nivel de gris de la forma:

$$S = T(r) \quad (3.2)$$

donde r y s denotan respectivamente el nivel de gris de $f(x, y)$ y $g(x, y)$ en cualquier punto (x, y) .

Ahora vamos a ver algunas transformaciones del nivel de gris básicas. En este caso, los valores de los pixeles antes y después de procesar, se denotarán por r y s , respectivamente. Como ya se dijo, estos valores se relacionan por la expresión $S = T(r)$, donde T es una transformación que mapea un pixel de valor r a un pixel de valor s .

Considérese la Figura 3.3, que muestra 3 tipos básicos de funciones utilizadas frecuentemente para la mejora de la imagen: lineal (negativo y transformación identidad), logarítmica (\log y \log inverso), y de potencia (n potencia y n raíz).

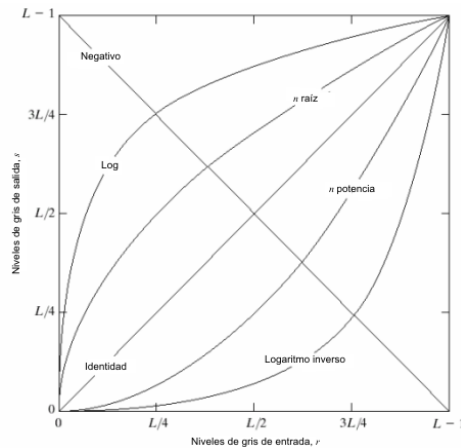


Figura 3.3: Algunas funciones de transformación del nivel de gris básicas utilizadas para mejora de la imagen [5].

3.3.1. Negativos de la imagen

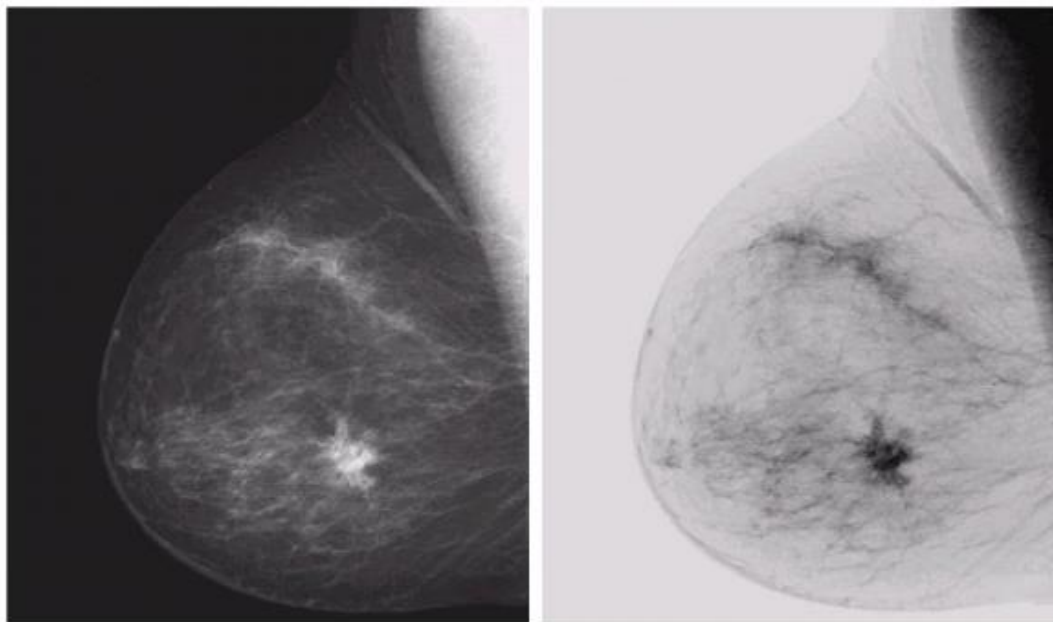
El negativo de una imagen con niveles de gris en el rango $[0, L-1]$ se obtiene al utilizar la transformación de negativo mostrada en la Figura 3.3, dada por la expresión:

$$s = L - 1 - r \quad (3.3)$$

Donde L es el número de niveles de intensidad y r es el nivel de gris a invertir.

Invertir los niveles de intensidad de esta manera produce el equivalente de un negativo fotográfico. Este tipo de procesamiento es útil para mejorar niveles de blanco o gris en regiones oscuras de la imagen, especialmente cuando las áreas negras dominan en tamaño.

Se muestra como ejemplo (Figura 3.4) la imagen de una mamografía con una pequeña lesión. Aunque el contenido visual es el mismo, nótese que es mucho más fácil analizar el tejido en la imagen negativa, para este caso en particular.



A **B**

Figura 3.4: **A.** Mamografía digital y **B.** Su negativo obtenido por la transformación $s = L - 1 - r$ [5].



Transformación de niveles de intensidad (NEGATIVO).

imadjust (f, [low_in high_in], [low_out high_out]) = imadjust(f, [0 1] [1 0])

Ver el toolbox para más información (sintaxis: >> help imadjust).

3.3.2. Transformaciones logarítmicas

La forma general de la transformación logarítmica mostrada en la Figura 3.3 es:

$$s = c \log(1 + r) \quad (3.4)$$

donde c es una constante, y se asume que $r \geq 0$. El efecto de la transformación es mapear un pequeño rango de valores bajos de nivel de gris a un rango más amplio de niveles de salida, al tiempo que lo contrario ocurre con los valores de entrada altos.

Se usa una transformación de este tipo para expandir los valores de píxeles oscuros de una imagen, mientras se comprime los valores de alto valor. La transformación logarítmica inversa lleva a cabo la transformación contraria.

La transformación logarítmica comprime el rango dinámico en imágenes con variaciones grandes en los valores del píxel. En la Figura 3.5 se muestra un ejemplo donde la transformación logarítmica ayuda a visualizar niveles de gris antes no distinguibles.

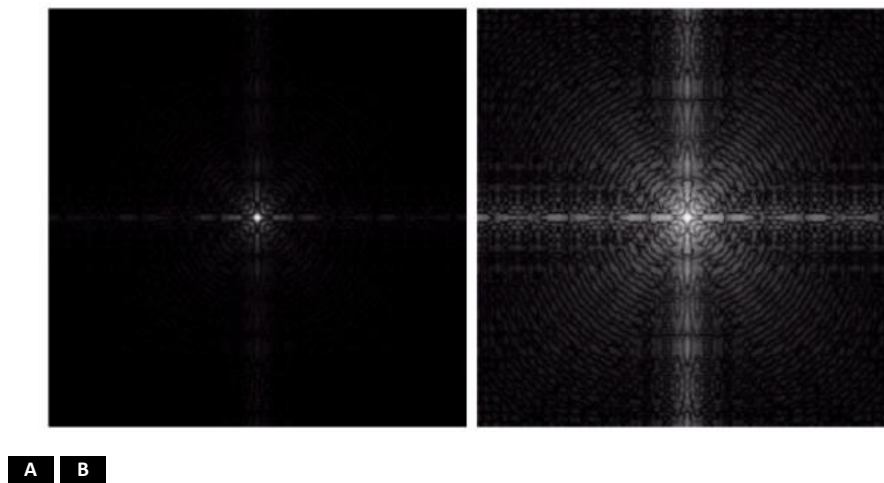


Figura 3.5: **A.** Espectro de Fourier y **B.** Resultado de una transformación logarítmica con $c = 1$ [5].



Transformación de niveles de intensidad (LOGARITMICA Y EXPANSIÓN DEL CONTRASTE).

c*log(1 + double (f))

Donde c es una constante. Ver el toolbox para más información.

3.3.3. Transformaciones de función de potencia

Las transformaciones de función de potencia tienen la forma básica:

$$s = cr^\gamma \quad (3.5)$$

donde c y γ son constantes positivas. Algunas veces la ecuación se escribe como $s = c(r - \xi)^\gamma$ para tomar en cuenta un offset de calibración.

Al variar la γ obtenemos las diversas transformaciones que se grafican en la Figura 3.6.

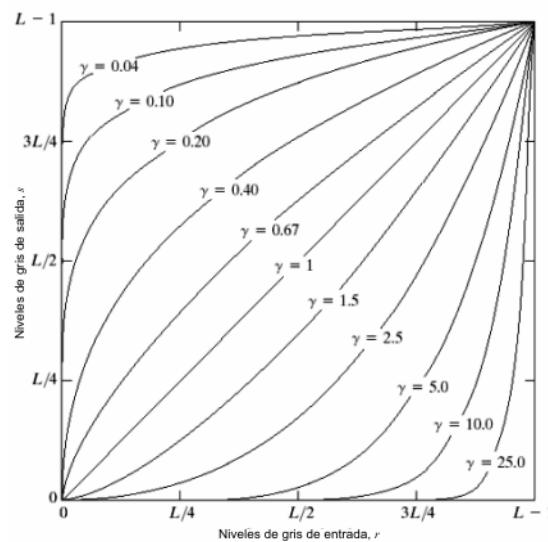


Figura 3.6: Gráficas de la ecuación $s = cr^\gamma$ para varios valores de γ ($c=1$) [5].

Como en el caso de la transformación logarítmica, las curvas de función de potencia con valores fraccionarios de γ mapean un rango pequeño de valores oscuros en un rango amplio de valores de salida y lo contrario con los valores claros de entrada. Sin embargo, en el caso de esta transformación, aquí obtenemos una familia de curvas de transformación simplemente variando γ .

Las curvas con valores de $\gamma > 1$ tienen un comportamiento contrario a las curvas con valores de $\gamma < 1$. Cuando $\gamma = 1$ la transformación es la transformación identidad (si $c = 1$).

Esta transformación también se utiliza para manipular el contraste de una imagen (ver Figura 3.7).

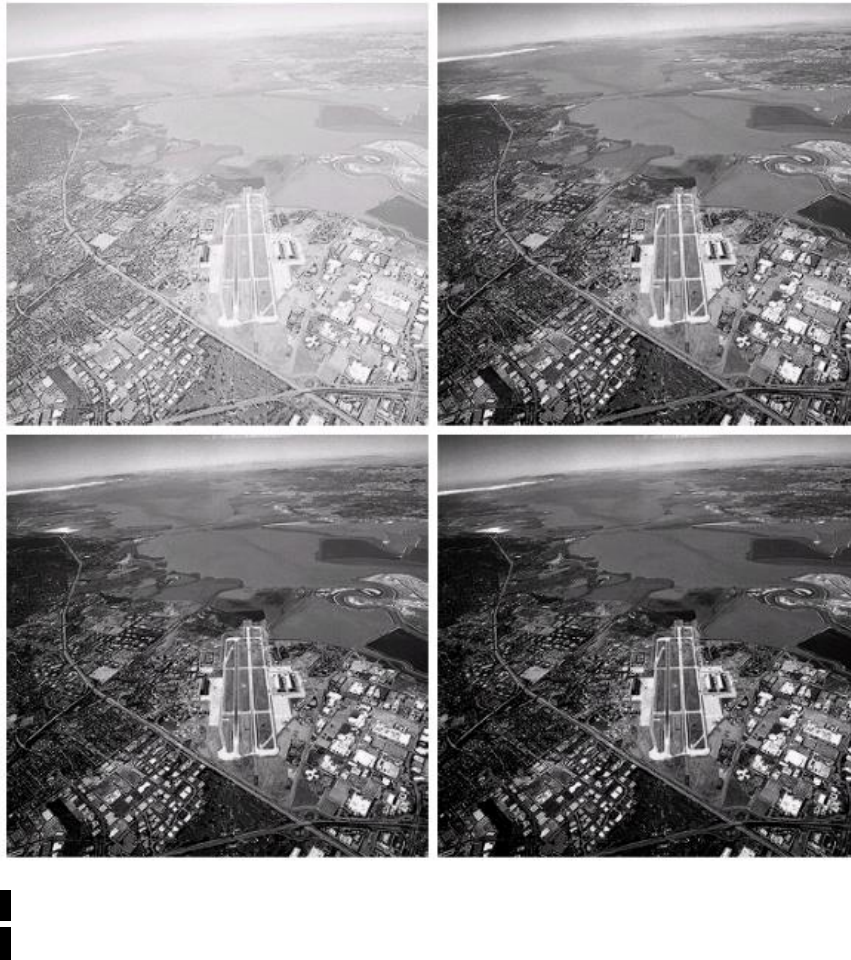


Figura 3.7: Resultado de aplicar la transformación de la ecuación $s = cr^\gamma$ a una Imagen aérea **A**, con $c=1$ y con: **B.** $\gamma=3.0$, **C.** $\gamma=4.0$ y **D.** $\gamma=5.0$ [5].

3.3.4. Funciones de transformación lineal por partes

La principal ventaja de las funciones de transformación lineal por partes es que pueden ser arbitrariamente complejas (pueden tener la forma que queramos). Su desventaja es que su especificación requiere más datos de entrada por parte del usuario.

3.3.4.1. Aumento del contraste

La idea del aumento del contraste es estirar el rango dinámico de los niveles de gris que se están procesando. En la Figura 3.8(a) vemos una transformación típica de aumento del contraste. Los puntos de control (r_1, s_1) y (r_2, s_2) determinan la forma de la función de transformación.

- Si $r_1=s_1$ y $r_2=s_2$ la transformación es una función lineal que no produce cambios en el nivel de gris.
- Si $r_1=r_2$, $s_1=0$ y $s_2=L-1$, la transformación se vuelve una función de umbral cuyo resultado es una imagen binaria (3.8d).
- Valores intermedios producen distintos grados de distribución del nivel de gris, afectando el contraste.
- La Figura 3.8c muestra el resultado de aumentar el contraste dados $(r_1, s_1) = (r_{\min}, 0)$ y $(r_2, s_2) = (r_{\max}, L-1)$ donde r_{\min} y r_{\max} denotan los valores mínimo y máximo de niveles de gris en la imagen original. La función de transformación estira el rango original de niveles de gris al rango máximo $[0, L-1]$.

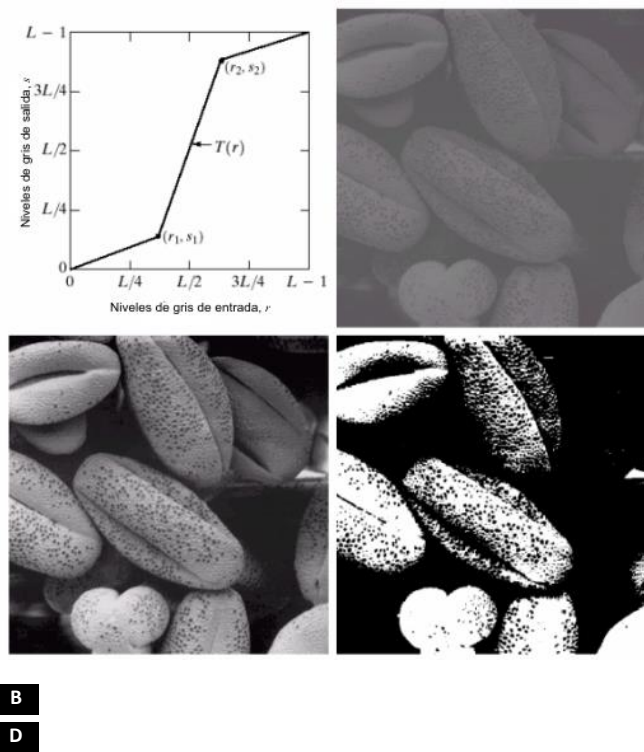


Figura 3.8: Aumento del contraste. **A.** función de transformación; **B.** Imagen con bajo contraste; **C.** Resultado de aumento del contraste y **D.** Función de umbral (para umbral=media) [5].

3.3.4.2. Fraccionamiento del nivel de gris

A veces se desea mostrar un rango específico de niveles de gris (p. Ej. Masas de agua en fotos satelitales). Una manera de lograr esto es con la transformación lineal por partes llamada fraccionamiento del nivel de gris. Se muestra un valor alto para todos los valores dentro del rango de interés y un valor bajo para todos los demás. Ejemplos de este tipo de transformación se muestran en la Figura 3.9.

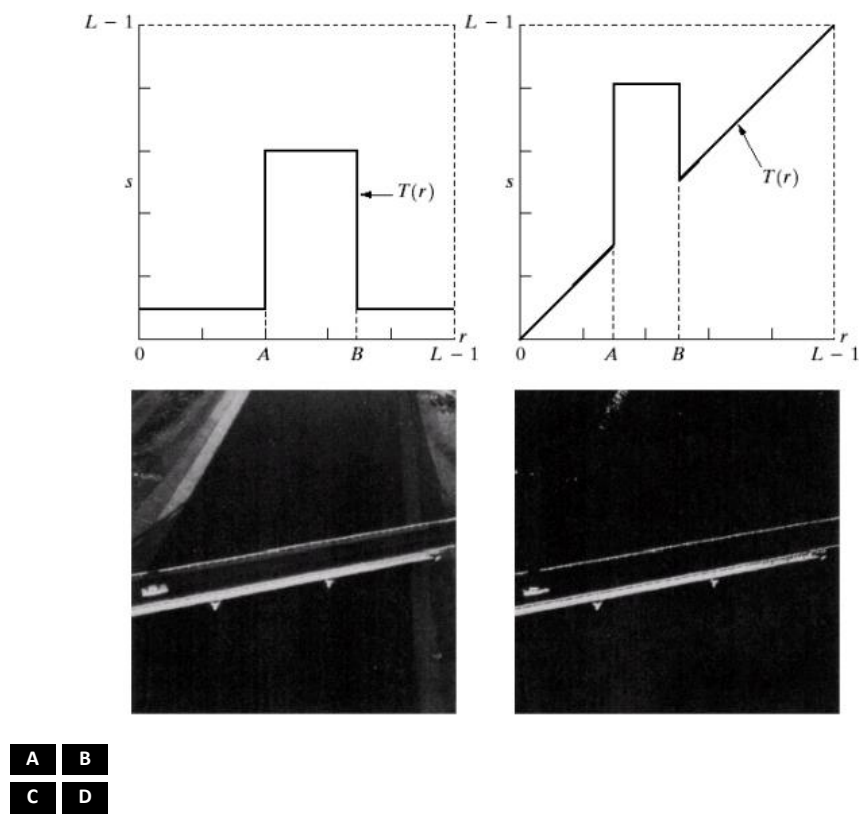


Figura 3.9: Fraccionamientos del nivel de gris para el rango de A a B . **C.** imagen original; **D.** resultado de aplicar la transformación B [5].

3.4. Otras transformaciones

Si $T(r)$ tiene la forma mostrada en la Figura 3.10(a), el efecto de la transformación sería producir una imagen de más alto contraste que la original al oscurecer los niveles bajo m y aclarar los niveles sobre m de la imagen original. Esta técnica se

denomina aumento del contraste. En el caso límite (Figura 3.10b) $T(r)$ produce una imagen en 2 niveles de gris (binaria). Un mapeo de este tipo se denomina función de umbral.

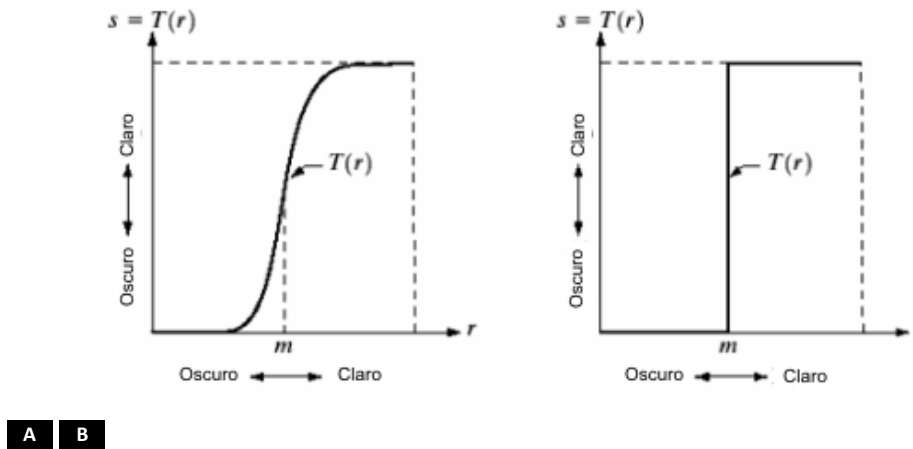


Figura 3.10: Funciones de transformación del nivel de gris para mejora del contraste. **A.** Aumento de contraste y **B.** Función umbral [5].

Si usamos una notación matemática para la Figura 3.10(a) tiene la forma: $s = T(r) = \frac{1}{1 + (m/r)^E}$; donde r representa las intensidades de la imagen de entrada y E controla la pendiente de la función (m es el punto de umbral).



Otras transformaciones de los niveles de intensidad.

$$g = 1 ./ (1 + (m ./ \text{double}(f) + \text{eps})) .^ E$$

Donde m es un punto de umbral, f la imagen de entrada y eps se introduce aquí para prevenir extenderse si f tuvo sólo valores 0. El "." en la ecuación son operaciones punto a punto. Ver el toolbox para más información sobre eps (syntax: `>> help eps`).

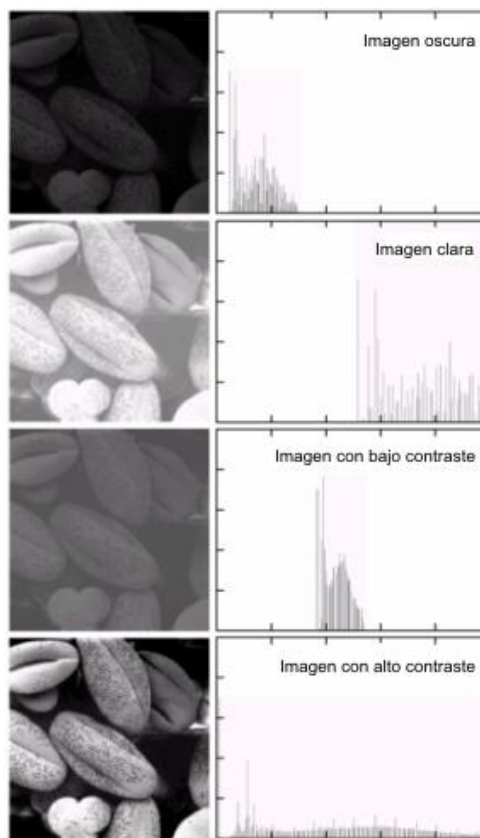
3.5. Procesamiento del histograma

El histograma de una imagen digital con niveles de gris en el rango $[0, L-1]$ es una función discreta $H(g) = N(g)$ donde g es el nivel de gris y $N(g)$ es el número de píxeles en la imagen con nivel de gris g .

Para normalizar el histograma se divide cada uno de sus valores entre el número total de píxeles en la imagen, $M \times N$. Así, el histograma normalizado se obtiene de $P(g) = \frac{N(g)}{M \times N}$, para $g = 0, 1, \dots, L-1$. En breve, $P(g)$ nos da una

estimación de la probabilidad de que aparezca el nivel de gris g (la suma de los componentes de un histograma normalizado es igual a 1).

Los histogramas son la base de muchas técnicas de procesamiento de la imagen en el dominio espacial. En la Figura 3.11 vemos 4 ejemplos de histogramas para 4 imágenes: oscura, clara, con bajo contraste y alto contraste. El eje horizontal de los histogramas es el valor de los niveles de gris, g y el eje vertical corresponde a los valores de $H(g) = N(g)$ o $P(g) = N(g)/M \times N$ si los valores están normalizados. La Figura 3.11 además nos muestra la distribución del histograma de acuerdo a las características de las imágenes.



A	B
C	D
E	F
G	H

Figura 3.11: Ejemplos de histograma para 4 tipos de imágenes. **A.** Imagen oscura con su histograma en **B**; **C.** Imagen brillante y su histograma en **D**; **E.** Imagen con bajo contraste y su histograma en **F** y **G.** imagen con alto contraste con su correspondiente histograma en **H** [5].

3.6. Propiedades estadísticas del histograma [9]

Como habíamos mencionado la probabilidad $P(g)$ de ocurrencia de un determinado nivel de g se define como:

$$P(g) = \frac{N(g)}{M \times N} \quad (3.6)$$

Donde recordamos que $M \times N$ es el número de píxeles en la imagen digital (tamaño de la imagen) y $N(g)$ es el número de píxeles en el nivel de intensidad g . Como cualquier distribución de probabilidad todos los valores de $P(g)$ son menores o iguales que 1 y la suma de todos los valores de $P(g)$ es 1.

Media: Es el valor medio de los niveles de gris y nos informa sobre el brillo general de la imagen, está definida por:

$$\bar{g} = \sum_{g=0}^{L-1} g P(g) = \sum_i \sum_j \frac{I(i, j)}{M \times N} \quad (3.7)$$

Donde L es el número total de niveles de gris, así para una imagen con valores de gris entre 0 y 255; $L=256$. Una imagen brillante tendrá media alta y una imagen oscura tendrá media baja.

Varianza: Que mide la dispersión de los alrededores de la media, está definida por:

$$\sigma^2 = \sum_{g=0}^{L-1} (g - \bar{g})^2 P(g) \quad (3.8)$$

La varianza siempre será mayor que cero. Mientras más se aproxima a cero, más concentrados están los valores de la serie alrededor de la media (imagen con bajo contraste). Por el contrario, mientras mayor sea la varianza, más dispersos están (imagen con alto contraste).

En general, un histograma (función discreta que representa el número de píxeles en la imagen en función de los niveles de intensidad g) con una distribución de los niveles de gris concentrada en una determinada zona presenta un contraste bajo, mientras que un histograma con una amplia distribución de los niveles de gris tiene un alto contraste. Un histograma con

los niveles de gris concentrados en la parte baja del rango corresponde a una imagen oscura, mientras que un histograma con los valores concentrados en la parte alta del mismo corresponde a una imagen brillante. El histograma puede ser modificado mediante una serie de funciones que expandan los niveles de gris, los compriman o los desplacen.

3.6.1. Contracción del histograma

Esta técnica no produce realmente un realzado de la imagen sino produce una disminución del contraste en la imagen. La función que la define es la siguiente:

$$g(x, y) = \left[\frac{C_{MAX} - C_{MIN}}{f(x, y)_{MAX} - f(x, y)_{MIN}} \right] [f(x, y) - f(x, y)_{MIN}] + C_{MIN} \quad (3.9)$$

Donde $f(x, y)$ es el nivel de gris de la imagen de entrada; $f(x, y)_{MAX}$ es el mayor valor del nivel de gris en la imagen de entrada f ; $f(x, y)_{MIN}$ es el menor valor del nivel de gris en la imagen de entrada f ; C_{MAX} y C_{MIN} corresponden al máximo y mínimo valores deseados en la compresión del histograma.

3.6.2. Expansión del histograma

Una función para expandir los niveles de gris de un histograma se puede definir de la siguiente manera:

$$g(x, y) = \left[\frac{f(x, y) - f(x, y)_{MIN}}{f(x, y)_{MAX} - f(x, y)_{MIN}} \right] [MAX - MIN] + MIN \quad (3.10)$$

Donde $f(x, y)$ es el nivel de gris de la imagen de entrada; $f(x, y)_{MAX}$ es el mayor valor del nivel de gris en la imagen de entrada f ; $f(x, y)_{MIN}$ es el menor valor del nivel de gris en la imagen de entrada f ; MAX y MIN corresponden al máximo y mínimo valores posibles de los niveles de gris (para 8 bits serían 0 y 255).

Esta ecuación toma una imagen de entrada f y expande el histograma a lo largo del rango de valores completo de los niveles de gris. Esto tiene el efecto de incrementar el contraste de una imagen de bajo contraste. Si se desea que la

expansión no cubra el rango total posible de niveles de gris, se pueden especificar diferentes valores para *MAX* y *MIN*.

Si muchos valores de una imagen caen dentro de un pequeño rango y existe un cierto número de valores extremos, entonces el histograma abarca todo el rango de valores y una expansión pura del histograma no mejora la imagen. En este caso suele ser una práctica habitual recortar los niveles de gris en los extremos a los valores de gris más bajo y más alto del rango (para 8 bits serían 0 y 255).

3.6.3. Desplazamiento del histograma

El desplazamiento del histograma se usa para aclarar u oscurecer una imagen pero manteniendo la relación entre los valores de los niveles de gris. Esta operación puede llevarse a cabo por simple adición o sustracción de un número a todos los niveles de gris como:

$$g(x, y) = f(x, y) + DES \quad (3.11)$$

Donde *DES* es el valor para desplazar el histograma.

En esta ecuación se asume que los valores que sobrepasen el máximo y el mínimo se redondean al máximo y mínimo posibles permitidos. Un valor *DES* positivo incrementa el brillo, mientras uno negativo la oscurece.

3.7. Ecualización del histograma [9]

Una de las técnicas más utilizadas para la mejora del contraste de la imagen original es la ecualización del histograma. Se trata de una técnica que realza la imagen original mediante una determinada transformación o modificación del histograma denominada ecualización o igualación del histograma indistintamente. Se trata de encontrar una función $F(g)$ que realce el contraste general en la imagen original expandiendo la distribución de los niveles de gris. Dicha expansión debe ser lo más suave posible en el sentido de que idealmente debería haber el mismo número de píxeles por nivel de gris. Es decir el objetivo es distribuir los niveles de gris de una manera uniforme a lo largo de todo el rango de valores de niveles de gris. Se puede deducir la función de $F(g)$ mediante la simple inspección del histograma original, pero es deseable una función analítica.

Dado que el número de píxeles en una imagen de dimensión $M \times N$ es precisamente este producto y el número de niveles de gris sobre el cual se va a realizar la expansión es N_g , un histograma ideal sería plano, con el mismo número de niveles de gris, es decir:

$$\text{Número ideal de píxeles en cada nivel de gris} = \frac{M \times N}{N_g} \quad (3.12)$$

Por otro lado, mediante una inspección del histograma podemos definir la función de densidad de probabilidad como sigue:

Si tenemos una imagen con 256 niveles de gris en el rango de 0 a 255, se cumple:

$$\sum_{g=0}^{g=255} N(g) = M \times N \quad (3.13)$$

La probabilidad por cada nivel de gris g está dada por:

$$p(g) = \frac{N(g)}{N \times M}; \quad g = 0, 1, \dots, 255 \quad (3.14)$$

Donde $N(g)$ es el número de píxeles en el nivel de intensidad g .

Se deduce que:

$$\sum_{g=0}^{g=255} p(g) = 1 \quad (3.15)$$

La función de densidad de probabilidad resulta ser:

$$P_x(x) \cong \sum_{g=0}^x p(g) \quad (3.16)$$

Trataremos de realizar una transformación entre funciones de densidad de probabilidad $P_x(x)$ y $P_y(y)$, si se impone la condición de que la función de transformación sea monótona creciente, para cada valor de x e y se cumple:

$$\int_0^{F(g)} P_y(y)dy = \int_0^g P_x(x)dx = \sum_{g=0}^x p(g) \quad (3.17)$$

Ésta es la expresión general que se utiliza para generar la ecualizaciones.

Veamos la obtención de diferentes tipos de ecualizaciones.

3.7.1. Ecualización uniforme

Se pretende ante cualquier histograma, este se modifique de tal forma que en la imagen resultante los niveles de gris se repartan de forma equitativa en todo el rango de valores establecido (para 8 bits sería de 0 a 255). La función de densidad de probabilidad de una distribución uniforme es:

$$P_y(y) = \frac{1}{255}; 0 \leq y \leq 255 \quad (3.18)$$

Aplicando la expresión general,

$$\int_0^{F(g)} \frac{1}{255} dy = \frac{1}{255} \int_0^{F(g)} dy = \frac{1}{255} y \Big|_0^{F(g)} = \frac{1}{255} [F(g) - 0] = \frac{F(g)}{255} \quad (3.19)$$

Despejando $F(g)$ se tiene

$$F(g) = 255 \sum_{g=0}^g p(g) \quad (3.20)$$

Considerando los valores de intensidad máximo y mínimo en el rango de niveles de gris de la imagen dada, g_{\max} y g_{\min} respectivamente, podemos reescribir las funciones de ecualización uniforme:

$$F(g) = [g_{\max} - g_{\min}] P_g(g) + g_{\min} \quad (3.21)$$

Con la probabilidad de ocurrencia acumulada $P_g(g) = \sum_{g=0}^g p(g)$

3.7.1.1. Para una función de distribución exponencial

Se trata de distribuir el histograma según una función exponencial:

$$P_y(y) = \alpha e^{-\alpha y}; 0 \leq y \leq 255 \quad (3.22)$$

Como antes, aplicando la expresión general:

$$\int_0^{F(g)} \alpha e^{-\alpha y} dy = 1 - e^{-\alpha F(g)} = \sum_{g=0}^g p(g) \quad (3.23)$$

Por lo que despejando $F(g)$ se obtiene

$$F(g) = -\frac{1}{\alpha} \ln \left[1 - \sum_{g=0}^g p(g) \right] \quad (3.24)$$

Se advierte que no se puede calcular $F(255)$ ya que aparece una indeterminación en el valor del logaritmo. El valor de α se ajusta con el fin de acumular los niveles de gris con más o menos densidad cerca del origen.

Considerando también los valores de intensidad máximo y mínimo en el rango de niveles de gris de la imagen dada, g_{\max} y g_{\min} respectivamente, podemos reescribir las funciones de ecualización exponencial:

$$F(g) = g_{\min} - \frac{1}{\alpha} \ln [1 - P_g(g)] \quad (3.25)$$

Con la probabilidad de ocurrencia acumulada $P_g(g) = \sum_{g=0}^g p(g)$

Cuanto mayor sea α menor es el valor de los pixeles más frecuentes del histograma en la imagen resultante.

Cuando $P_g(g) = 1$ existe una indeterminación y no se puede calcular su valor, se puede optar por asignar el valor máximo (o mínimo, según sea el caso) del rango de niveles de gris al valor correspondiente.

3.7.1.2. Para una función de distribución Rayleigh

$$P_y(y) = \frac{1}{\alpha^2} e^{\frac{-y^2}{2\alpha^2}}; 0 \leq y \leq 255 \quad (3.26)$$

$$F(g) = g_{\min} + \left[2\alpha^2 \ln \left\{ \frac{1}{1 - P_g(g)} \right\} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.27)$$

Con la probabilidad de ocurrencia acumulada $P_g(g) = \sum_{g=0}^g p(g)$

3.7.1.2. Para una función de distribución hipercúbica

$$P_y(y) = \frac{1}{3} \frac{y^{\frac{2}{3}}}{255^{\frac{1}{3}}}; 0 \leq y \leq 255 \quad (3.28)$$

$$F(g) = \left(\left[\sqrt[3]{g_{\max}} - \sqrt[3]{g_{\min}} \right] P_g(g) + \sqrt[3]{g_{\min}} \right)^3 \quad (3.29)$$

Con la probabilidad de ocurrencia acumulada $P_g(g) = \sum_{g=0}^g p(g)$

3.7.1.4. Para una función de distribución hiperbólica

$$F(g) = g_{\min} \left[\frac{g_{\max}}{g_{\min}} \right] P_g(g) \quad (3.30)$$

Con la probabilidad de ocurrencia acumulada $P_g(g) = \sum_{g=0}^g p(g)$

Cuando $g_{\min} = 0$ existe una indeterminación y no se puede calcular su valor, se puede optar por asignar el valor máximo (o mínimo, según sea el caso) del rango de niveles de gris al valor correspondiente.



Ecualización del Histograma.

histeq(f, nlev)

Donde f es la imagen de entrada y $nlev$ es el número de niveles de intensidad a ecualizar la imagen de entrada. Ver el toolbox para más información.

3.8. Especificación del Histograma

Aunque el método de ecualización (o igualación) del histograma es bastante útil, no nos proporciona la aplicación de técnicas interactivas para la mejora de imágenes ya que sólo es capaz de generar un resultado (una imagen de salida), con una aproximación a la distribución uniforme.

A veces es deseable ser capaces de especificar interactivamente histogramas concretos que resalten determinados rangos de nivel de gris. Para ver como esto se puede llevar a cabo supongamos, en el caso continuo, que $P_r(r)$ y $P_z(z)$ son las densidades de probabilidad original y deseada respectivamente. Supongamos, además, que a una imagen dada se le uniformiza el histograma utilizando:

$$s = T(r) = \int_0^r P_r(w)dw; 0 \leq r \leq 1 \text{ (cuando el histograma esta normalizado)} \quad (3.31)$$

Obviamente si la imagen deseada estuviera disponible, sus niveles podrían ser uniformizados utilizando la función de transformación:

$$v = G(z) = \int_0^z P_z(w)dw; 0 \leq z \leq 1 \text{ (cuando el histograma esta normalizado)} \quad (3.32)$$

El proceso inverso, $z = G^{-1}(v)$ produciría entonces los niveles que necesitamos. Observemos, por tanto, que lo que necesitamos es construir una distribución uniforme. Esto puede llevarse a cabo utilizando el s obtenido de la imagen original, los niveles resultantes $z = G^{-1}(s)$ tendrían entonces la función de densidad deseada. Supuesto que $G^{-1}(s)$ es unívluada el proceso puede resumirse como:

1. Uniformizar (ecualizar) los niveles de gris de la imagen original,
2. Especificar la función de densidad deseada y obtener la transformación $G(z)$ que la llevaría a una uniforme, y
3. Aplicar la transformación inversa $z = G^{-1}(s)$ a los niveles de gris que hemos obtenido en el paso primero.



Especificación del Histograma.

histeq(f, hspec)

Donde f es la imagen de entrada y $hspec$ es el histograma especificado (un vector fila de valores especificados). Ver el toolbox para más información.

3.9. Filtrado Espacial (realces con operaciones entre vecinos)

Como mencionamos las operaciones entre vecinos son aquellas que se efectúan sobre un pixel pero tomando en cuenta los pixeles que lo rodean, es decir los pixeles vecinos, por esto a este tipo de operaciones se le conoce además como filtrado espacial. Este tipo de realce sirve para quitar ruido en las imágenes o cuando se trata de mejorar la nitidez.

3.9.1. Relaciones de vecindad

La estructura de una imagen digital hace que las direcciones de ésta estén discretizadas, es decir, únicamente ciertas de ellas son dadas de acuerdo con el arreglo matricial de los píxeles. Para ilustrar esto observemos la imagen de la Figura 3.12 donde se ilustra una imagen de 5×5 píxeles (con sus coordenadas espaciales y espectral). En la Figura 3.12b se observa un arreglo de 3×3 en el cual nos referiremos a las vecindades de un píxel p con coordenadas (i, j) . Los primeros próximos vecinos a este píxel (i, j) son aquellos con coordenadas $(i+1, j)$, $(i, j-1)$, $(i-1, j)$, $(i, j+1)$, es decir los que se encuentran en las direcciones horizontales y verticales a (i, j) , dotemos a este grupo de píxeles como $N_4(p)$. Los segundos próximos vecinos de p son aquellos localizados en las diagonales principales especificadas por las coordenadas: $(i+1, j-1)$, $(i-1, j-1)$, $(i-1, j+1)$, $(i+1, j+1)$; sea este grupo de píxeles denotado como $N_D(p)$. La unión de los grupos $N_D(p)$ y $N_4(p)$ forman los 8 primeros vecinos de p y son designados como $N_8(p)$; es decir $N_8(p) = N_D(p) \cup N_4(p)$.

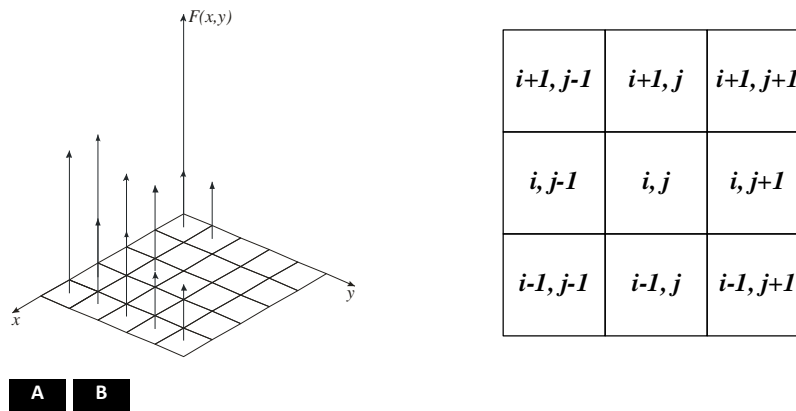


Figura 3.12: Estructura de una imagen digital. A. Representación bidimensional y B. Ubicación de un píxel en un área de 3×3 .

3.9.2. Filtrado

Antes de entrar en los detalles del filtrado espacial es conveniente observar lo que en una imagen digital se entiende por frecuencia espacial detallada por los niveles de intensidad de los píxeles.

La frecuencia espacial de una imagen se presenta como una alternancia de tonos (valores) de los píxeles de la imagen, esto es el número de cambios en los valores radiométricos por unidad de distancia, para cualquier parte de la imagen en particular.

Tenemos, por tanto, frecuencias espaciales bajas en aquellas regiones de la imagen donde se presente una tonalidad relativamente uniforme (Figura 3.13a); se tienen frecuencias espaciales altas en aquellas zonas de la imagen que presentan tonalidades cambiantes (Figura 3.13b). Concluimos que si hay pocos cambios en los valores radiométricos sobre un área dada en una imagen, esto se denomina área de baja frecuencia. Al contrario si hay muchos cambios en un área reducida, el área sería de alta frecuencia.

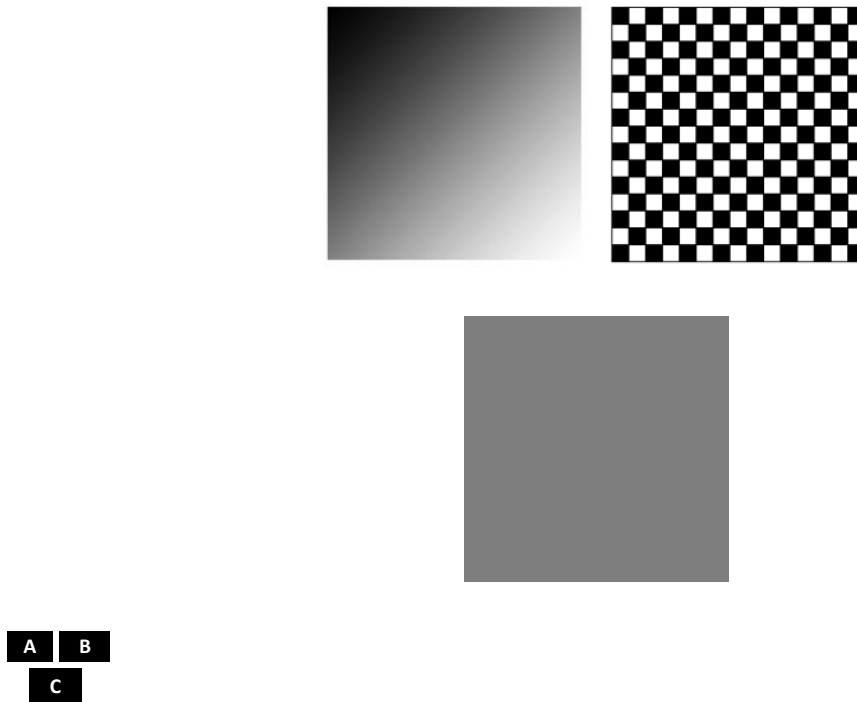


Figura 3.13: Concepto de frecuencia espacial. **A.** Frecuencia espacial baja, **B.** Frecuencia espacial alta y **C.** Frecuencia espacial cero o nula.

El filtrar una imagen ($f(x, y)$) consiste en aplicar una transformación T para obtener una nueva imagen ($g(x, y)$) de tal forma que ciertas características sean acentuadas (mejorar la nitidez) o disminuidas (ruido).

$$g(x, y) = T[f(x, y)] \quad (3.33)$$

Podemos considerar que la señal (imagen) pasa a través de un sistema (SLIT) que va a ser la función de filtro cuyo resultado será la imagen de entrada pero filtrada (ver Figura 3.14).

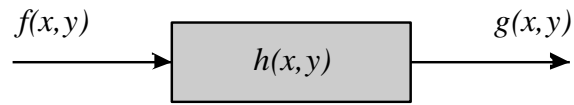


Figura 3.14: Modelo de filtrado espacial basado en la convolución.

Dónde: $f(x,y)$ es la imagen a filtrar, donde el pixel bajo estudio está definido por $f(x,y)$.

$h(x,y)$ es la respuesta al impulso del filtro.

$g(x,y)$ es la imagen de salida (filtrada)

La relación que define al filtrado es: $g(x, y) = f(x, y) * h(x, h)$, esta es la llamada convolución.

3.9.3. Convolución

Se denomina convolución a una función, que de forma lineal y continua, transforma una señal de entrada en una nueva señal de salida. La función de convolución se expresa por el símbolo $*$. En un sistema unidimensional, se dice que $g(x)$ convolucionada $f(x)$ cuando:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x')g(x-x')dx' \quad (3.34)$$

donde x' es una variable de integración.

El resultado de $g(x)$ depende únicamente del valor de $f(x)$ en el punto x , pero no de la posición de x . Esta propiedad se denomina invariante respecto la posición (position-invariant) y es condición necesaria en la definición de las integrales de convolución.

En el caso de una función continua, bidimensional, como es el caso de una imagen monocroma, la convolución de $f(x, y)$ por $g(x, y)$ será:

$$f(x, y) * g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x', y')g(x-x', y-y')dx'dy' \quad (3.35)$$

3.9.4. Sistemas discretos (imágenes digitalizadas)

En un sistema discreto, como el de las imágenes digitalizadas, la convolución de la función $f(x, y)$ por $g(x, y)$, en la que $g(x, y)$ es una matriz de M filas por N columnas, es:

$$f(x, y) * g(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) g(x-m, y-n) \quad (3.36)$$

Donde $x=0,1,2,\dots,M-1$ y $y=0,1,2,\dots,N-1$

La aplicación de estas funciones a las que por analogía con la teoría de señales se las denomina comúnmente "filtros", se basan en este proceso de convolución y en sus propiedades. Por esto, a muchos de estos filtros, se les suele denominar de acuerdo con el resultado visual que producen sobre la imagen "filtrada" (filtros de enfoque o desenfoque).

Un filtro de convolución, para una imagen digital, en el espacio real (x, y) , puede representarse como una matriz cuadrada o rectangular (matriz de convolución), de dimensiones (M, N) mucho más pequeñas que la de la imagen (Fig. 3.15). La matriz de convolución se desplaza sobre la imagen de tal forma que el elemento central de la matriz de convolución coincida con cada uno de los píxeles de la imagen. En cada posición, se multiplica el valor de cada pixel de la imagen, que coincide en posición con un elemento de la matriz de convolución, por el valor de éste ($g(x, y) = \sum_i \sum_j f(i, j) w(i, j)$)

en nuestro caso. El pixel de la imagen, que coincide con el elemento central de la matriz de convolución, es substituido por la suma de los productos (Fig. 3.16).

$W_{1,1}$	$W_{1,2}$	$W_{1,3}$
$W_{2,1}$	$W_{2,2}$	$W_{2,3}$
$W_{3,1}$	$W_{3,2}$	$W_{3,3}$

Figura 3.15: Ejemplo de mascara (o filtro) de tamaño 3x3.

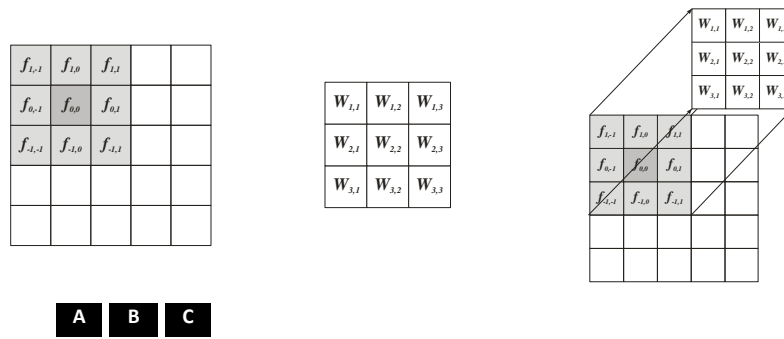


Figura 3.16: Filtrado en el dominio espacial. **A.** Imagen digital; **B.** Máscara de convolución y **C.** Superposición de A y B para la operación de convolución.

A cada celda de la máscara le corresponde un peso o coeficiente (w), de tal forma que el nuevo pixel es la sumatoria del producto de los pixeles vecinos con el peso correspondiente.

El tamaño y los valores de los coeficientes determinarán el tipo de filtrado que se realice y como mencionamos será éste el nombre de dicho filtro. Se emplean frecuentemente tamaños de 3×3 , 5×5 , 7×7 pixeles en los núcleos ya que con estos tamaños se obtiene un buen balance entre costo de cálculo computacional y calidad.



Convolución.

conv2(A, B)

Convoluciona dos matrices bidimensionales (A y B). Ver el toolbox para más información.

3.10. Filtrado Espacial Pasa-Bajas (Suavizamiento)

El objetivo de filtros espaciales pasa bajas (en el dominio de la frecuencia) es eliminar el ruido o detalles pequeños que no sean de interés, es decir, dejan el contenido de baja frecuencia inalterado mientras que atenúan los contenidos de alta frecuencia. Este tipo de filtros resulta adecuado para atenuar ruido aditivo aleatorio presente en la imagen. En la Figura 3.17 se muestra la respuesta de un filtro pasa bajas en frecuencia (una dimensión) y la correspondiente respuesta que debe tener en el dominio espacial. En la Figura 3.18 se muestran tres máscaras de convolución frecuentemente utilizadas para realizar el filtraje pasa bajas, una de las propiedades de tales máscaras es que la suma de todos sus coeficientes debe ser igual a la unidad (promedio o media aritmética, ya que obtiene el promedio de los pixeles vecinos, $w=1$). Uno de los efectos que es necesario tener presente cuando se aplica este tipo de filtros, es que los mismos pueden introducir apreciable borrosidad en la imagen. En la Figura 3.19 se ilustra este tipo de procesamiento, así en 3.19a se muestra la

imagen original a la cual ha sido contaminada con ruido aleatorio tal como se muestra en 3.19b, por su parte en 3.19c se muestra el resultado luego de procesar con un filtro pasa bajas en donde se observa que si bien el contenido de ruido disminuye, sin embargo la borrosidad de la imagen aumenta.

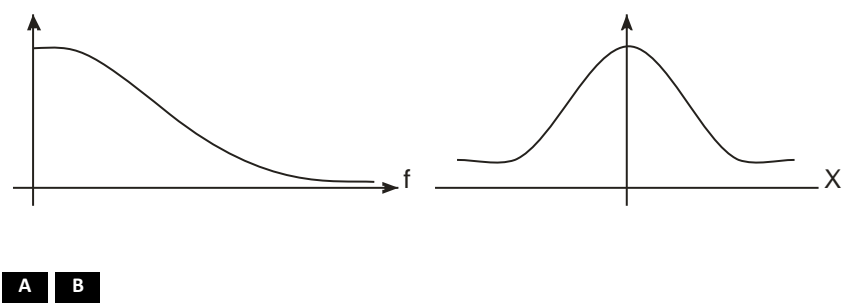
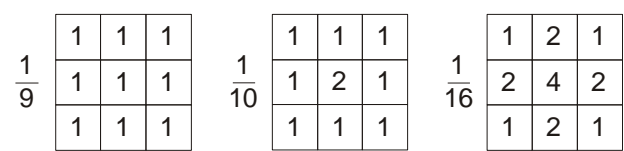


Figura 3.17: Filtro pasabajas: **A.** en frecuencia y **B.** en el dominio espacial.



A **B** **C**

Figura 3.18: Máscaras que permiten el filtraje pasa bajas de una imagen. **A.** Unitaria y, **B** y **C** con mayor peso en el coeficiente central.

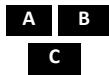
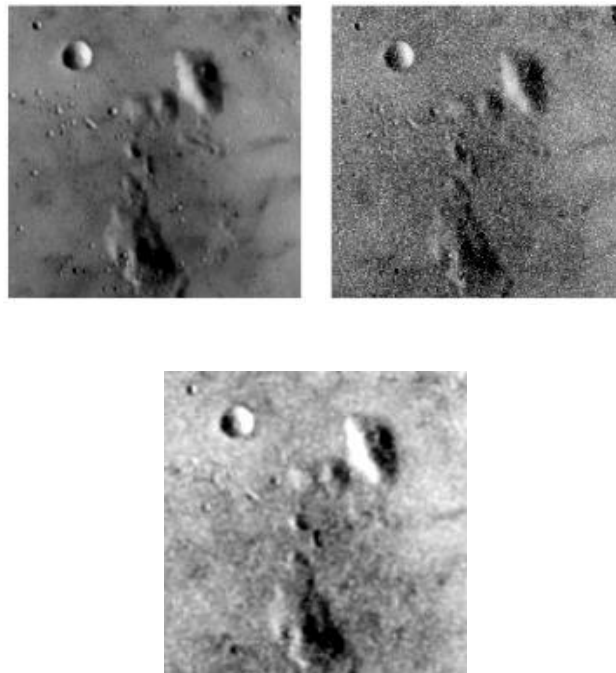


Figura 3.19: Procesamiento de una imagen con un filtro pasa bajo. **A.** Imagen original; **B.** resultado de agregar ruido a la imagen A y **C.** Imagen resultante luego de procesar B con la máscara mostrada en la Figura 3.18a.

3.10.1. Gaussiano

El filtrado gaussiano es una aproximación a la distribución gaussiana en dos dimensiones. Considerando una media igual a cero, la función de transformación de un filtro tipo gaussiano es:

$$T(x, y) = e^{-[(x^2 + y^2) / 2\pi\sigma^2]} \quad (3.37)$$

Donde σ es la desviación estándar. Para una máscara de 3×3 los valores de un filtro gaussiano típico se muestra en la Figura 3.20. La cantidad de suavizamiento que realiza el filtro gaussiano se puede controlar variando la desviación estándar y el tamaño de la máscara.

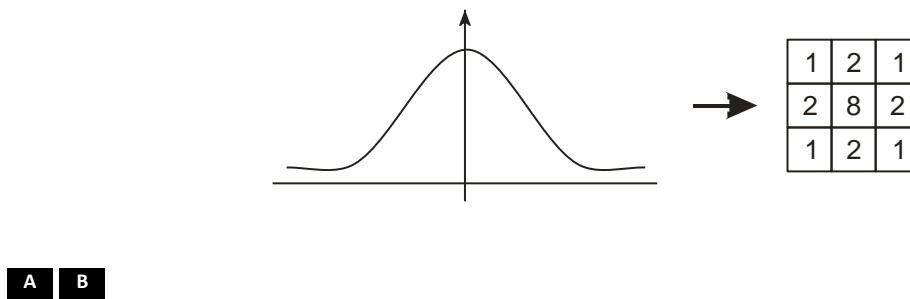


Figura 3.20: Filtro gaussiano. **A.** Espacio continuo, y **B.** Espacio digital bidimensional (máscara de 3X3).

3.10.2. Filtro de Mediana (no lineal)

El filtraje de mediana, es un procedimiento no-lineal, útil para reducir el ruido impulsivo y del tipo "sal y pimienta", muchas veces presente en las imágenes. El filtro de mediana utiliza los valores de los píxeles contenidos en una vecindad de tamaño impar, para determinar el nuevo valor del píxel de interés. El procedimiento para ello, consiste en clasificar todos los píxeles incluidos en la ventana en orden creciente y sustituir el píxel ubicado en el centro de la vecindad por el píxel mediano luego de la clasificación, es decir, si tenemos una secuencia discreta de tamaño N impar, entonces la mediana de tal secuencia, es aquel miembro de la secuencia, para el cual, $(N-1)/2$ elementos son más pequeños o a lo sumo iguales y $(N-1)/2$ elementos son más grandes. En la Figura 3.21 se muestra un ejemplo de la implantación del filtro de mediana. El costo computacional más importante corresponde a la clasificación del arreglo en orden creciente, por lo cual es muy importante utilizar algoritmos optimizados para realizar tal tarea. Una de las propiedades del filtro de mediana, es que el mismo tiende a preservar en lo posible la información referente a los contornos de la imagen, atenuando por el contrario, variaciones impulsivas aleatorias, por lo cual se utiliza frecuentemente. Así en la Figura 3.22a se muestra la imagen original, en la Figura 3.22b, la imagen contaminada con ruido impulsivo y en la Figura 3.22c, el resultado luego de procesar con un filtro de mediana de 5X5.

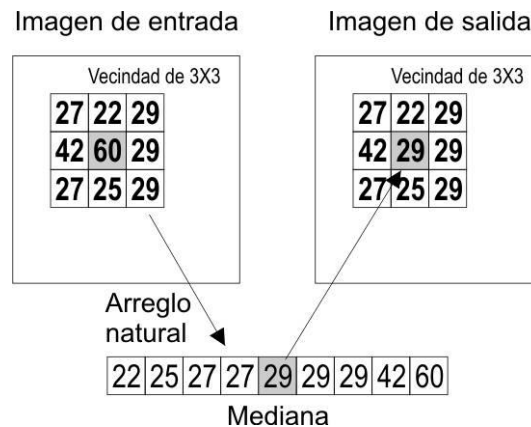


Figura 3.21: Ilustración del procedimiento para implantar el filtro de mediana.

Por tanto, observando la Figura 3.21, la mediana se obtiene ordenando los valores contenidos en la ventana (ordenación natural) y escogiendo el valor central.

En caso en que el número de píxeles contenidos en la ventana sea par, se realiza la media entre los dos valores centrales.

Este filtrado resulta especialmente indicado para aquellos casos en los que pretenda eliminarse ruido impulsional. En el caso de ruido gaussiano, es preferible el promediado espacial o el suavizado direccional.

Computacionalmente, es más costoso que el promediado espacial, puesto que requiere una operación de ordenación. Sin embargo, existen algoritmos eficientes para implementar el filtro de mediana en un tiempo más pequeño.

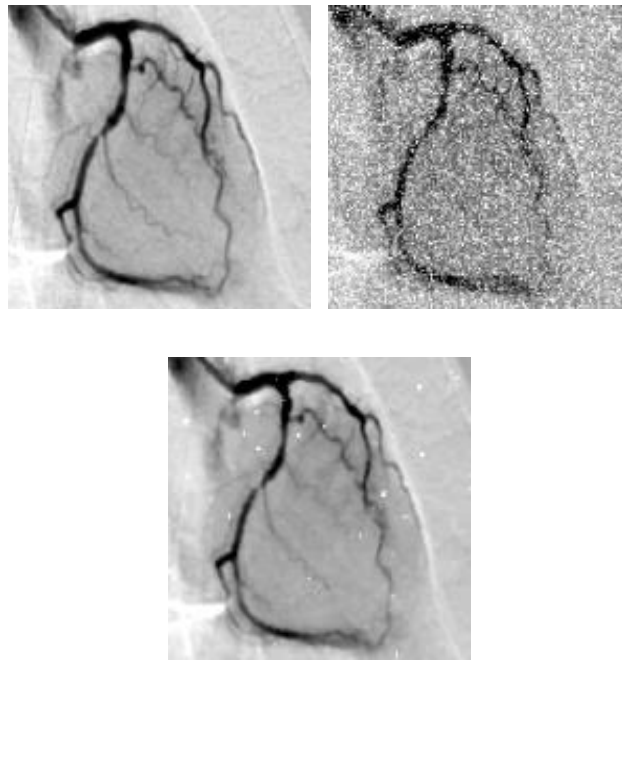


Figura 3.22: *A.* Imagen original, *B.* Imagen contaminada con ruido impulsivo y *C.* Imagen procesada con un filtro de mediana.

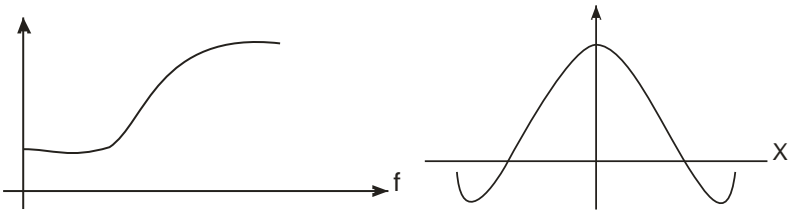
3.10.3. Suavizado Direccional (no lineal)

Este método consiste en aplicar promediados espaciales en diversas direcciones y escoger la dirección que proporciona una diferencia menor entre el valor filtrado y el original (antes de filtrar). Para saber cómo opera este método sigamos el siguiente ejemplo.

3.11. Filtrado Espacial Pasa-Altas (Acentuamiento)

El objetivo de estos filtros es de acentuar o intensificar los detalles de alta frecuencia o cambios bruscos de intensidad mientras atenúa las bajas frecuencias de una imagen. El resultado es un acentuamiento de las orillas (edge sharpening). Se conocen normalmente como filtros pasa altas y se utilizan cuando se quiere examinar objetos con alto contenido de frecuencia espacial, como consecuencia de tal procesamiento, las porciones de una imagen que presentan componentes de alta frecuencia, serán resaltadas mediante la utilización de niveles de gris más claros, mientras que aquellas con componentes de baja frecuencia serán más oscuras, en este sentido, este tipo de filtro puede ser utilizado para reforzar

los bordes presentes en la imagen. Uno de los efectos indeseados de estos filtros es que pueden acentuar el ruido de la imagen. En la Figura 3.23 se muestra como se reducen las bajas frecuencias y se mantienen las altas, en la Figura 3.24 se muestran tres máscaras de convolución para implantar el filtro pasa alto, por su parte en la Figura 3.25 se muestra el resultado de procesar una imagen con un filtro pasa alto, así en 3.25a se muestra la figura original que al ser procesada utilizando la máscara de convolución mostrada en la Figura 3.24a, se produce como resultado la imagen mostrada en la Figura 3.25b, en donde se observa que efectivamente los bordes aparecen reforzados.



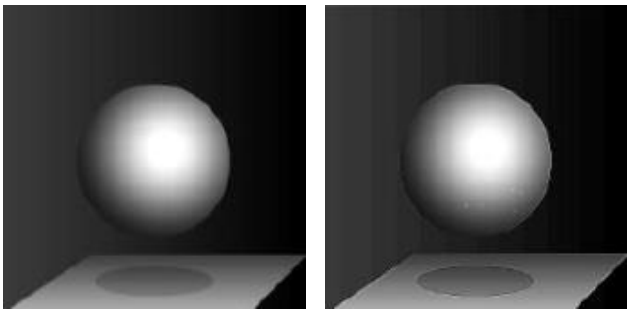
A **B**

Figura 3.23: Filtro pasa altas. **A.** Dominio en frecuencia y **B.** Dominio espacial.

-1	-1	-1	0	-1	0	1	-2	1
-1	9	-1	-1	5	-1	-2	5	-2
-1	-1	-1	0	-1	0	1	-2	1

A **B** **C**

Figura 3.24: Tres máscaras que permiten implantar el filtraje pasa-alto. **A.** Unitaria y **B** y **C** con variación de peso en sus coeficientes.



A **B**

Figura 3.25: Procesamiento de una imagen con un filtro pasa alto. **A.** imagen original y **B.** imagen resultante luego de procesar con la máscara mostrada en la Figura 4.45a.

3.12. Filtro para énfasis en las altas frecuencias

El filtrado pasa altas o de acentuamiento presenta solo las discontinuidades (borde en la imagen digital), atenuando fuertemente las bajas frecuencias y haciendo que desaparezcan las regiones homogéneas. Un tipo de filtro que aún acentuando las altas frecuencias preserva las bajas es el filtro “énfasis en las altas frecuencias” (high boost). Para obtener una imagen con énfasis en las altas frecuencias (EA), se puede considerar que se multiplica la imagen original por una constante A , esta constante debe ser mayor que uno para que acentúe.

$$EA = (A)original - PB \quad (3.38)$$

Esto es equivalente a la siguiente expresión:

$$EA = (A - 1)original + PA \quad (3.39)$$

En la práctica no es necesario hacer exactamente esto, sino se implementa haciendo la celda central del filtro pasa altas:

$$w = 9A - 1 \quad (3.40)$$

Como se ilustra en la Figura 3.26:

-1	-1	-1
-1	9A-1	-1
-1	-1	-1

Figura 3.26: Máscara de 3×3 para un filtro pasa altas con énfasis en las altas frecuencias con $A \geq 1$. El valor de A determinará la naturaleza del filtro.



Filtrado Espacial.

`imfilter(f, w, 'conv2')`

Donde *f* es la imagen de entrada y *w* es la máscara del filtro y *conv2* la operación de convolución. Ver el toolbox para más información.

3.13. Filtrado Frecuencial

Recordando el concepto de frecuencia espacial en la imagen digital como la alternancia de los valores en los pixeles, esto es, el número de cambios en los valores radiométricos por unidad de distancia, para cualquier parte de la imagen en particular, procedemos entonces, a definir las herramientas matemáticas que nos ayudarán a filtrar en el dominio de la frecuencia.

3.13.1. Series de Fourier

La idea más importante de este trabajo es que toda función que se repite periódicamente puede ser expresada como la suma de senos y/o cosenos de diferentes frecuencias, cada uno multiplicado por un coeficiente diferente (Figura 3.27). Ahora llamamos a esta suma Serie de Fourier.

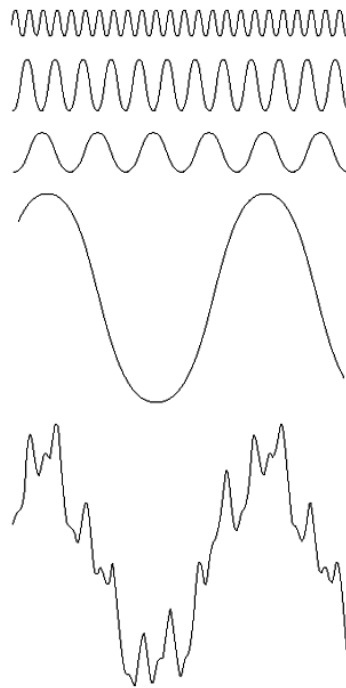


Figura 3.27: Descomposición de una onda en una suma de funciones senoidales y cosenoidales. La función inferior es la suma de las cuatro funciones superiores a esta [5].

3.13.2. Transformada de Fourier

Aún funciones que no son periódicas (pero con un área finita bajo la curva) pueden ser expresadas como la integral de senos y/o cosenos multiplicada por una función de ponderación. Esta es la transformada de Fourier, y su utilidad es aún más grande que la de las series de Fourier en muchos problemas prácticos.

Las dos representaciones comparten la importante característica de que una función, expresada en series de Fourier o la transformada, pueden ser reconstruidas (recobradas) completamente por un proceso inverso sin perder información.

La utilidad de las series y transformada de Fourier para resolver problemas prácticos las ha hecho ampliamente utilizadas y estudiadas como herramientas fundamentales.

El advenimiento de la computación digital y el “descubrimiento” del algoritmo la transformada rápida de Fourier (*FFT*) a finales de los años cincuentas revolucionaron el campo del procesamiento de señales.

Se utilizarán solamente funciones de duración finita (imágenes), así que nos concentraremos en la transformada de Fourier.

3.13.2.1. Introducción a la transformada de Fourier y el dominio de la frecuencia

En esta sección se introduce la transformada de Fourier en una y dos dimensiones. Nos enfocaremos en especial en la formulación discreta de la transformada continua y algunas de sus propiedades.

Cuando se usa el concepto de dominio de frecuencia en el proceso de imágenes, se hace referencia a la variación de los píxeles de la imagen en función de las coordenadas espaciales (ver 3.9.2).

3.13.2.2. La transformada de Fourier en una dimensión y su inversa

La transformada de Fourier $F(u)$ de una función continua de una sola variable, $f(x)$, se define con la ecuación

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j2\pi ux} dx \quad (3.41)$$

donde $j = \sqrt{-1}$. De manera correspondiente, dada $F(u)$, podemos obtener $f(x)$ por medio de la transformada de Fourier inversa

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{j2\pi ux} du \quad (3.42)$$

Estas dos ecuaciones comprenden el par de transformadas de Fourier. Es decir que una función puede ser recuperada a partir de su transformada.

Estas ecuaciones pueden fácilmente extenderse a 2 variables, u y v :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy \quad (3.43)$$

y, similarmente para la transformada inversa

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) e^{j2\pi(ux+vy)} du dv \quad (3.44)$$

Nosotros estamos interesados en funciones discretas. La transformada de Fourier de una función discreta de una variable, $f(x)$, cuando $x = 0, 1, \dots, M-1$, está dada por la ecuación

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) e^{\frac{-j2\pi ux}{M}} \quad \text{con: } u = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.45)$$

Esta transformada de Fourier Discreta (o *DFT*, por sus siglas en inglés), es la base del resto de este capítulo. Similarmente, dada $F(u)$, podemos obtener la función original usando la *DFT* inversa:

$$f(x) = \sum_{u=0}^{M-1} F(u) e^{\frac{j2\pi ux}{M}} \quad \text{con: } x = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.46)$$

Para obtener $F(u)$ comenzamos por sustituir $u = 0$ en el término exponencial y después sumamos para TODOS los valores de x . Después sustituimos $u = 1$ en el exponencial y repetimos la suma para todos los valores de x . Se repite este proceso para los M valores de u y de esta manera se obtiene la *DFT*.

Como $f(x)$, la transformada es una cantidad discreta, y tiene el mismo número de componentes que $f(x)$.

Una propiedad importante del par de transformadas discretas es que la transformada discreta de Fourier y su inversa siempre existen.

3.13.3. El dominio de la frecuencia

El concepto de dominio de la frecuencia, se puede derivar fácilmente de la fórmula de Euler:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta \quad (3.47)$$

Sustituyendo en la ecuación para obtener $F(u)$ y recordando que $\cos -\theta = \cos \theta$ y $\sin -\theta = -\sin \theta$, obtenemos

$$F(u) = \frac{1}{M} \sum_{x=0}^{M-1} f(x) [\cos 2\pi ux / M - j \sin 2\pi ux / M] \text{ con: } u = 0, 1, \dots, M-1 \quad (3.48)$$

Así, observamos que cada término de la transformada de Fourier (es decir, el valor de $F(u)$ para cada valor de u) se compone de la suma de todos los valores de la función $f(x)$.

A su vez, los valores de $f(x)$ son multiplicados por senos y cosenos en varias frecuencias.

El dominio (valores de u) para el rango de los valores de $F(u)$ es llamado, apropiadamente, dominio de la frecuencia, porque u determina la frecuencia de los componentes de la transformada.

Cada uno de los M términos de $F(u)$ se llama componente de frecuencia de la transformada.

El uso de los términos dominio de la frecuencia y componentes de frecuencia es equivalente a dominio del tiempo y componentes del tiempo que usaríamos para expresar el dominio y valores de $f(x)$ si x fuera una variable de tiempo (Una analogía muy útil es comparar la transformada de Fourier a un prisma de vidrio. El prisma es el dispositivo físico que separa la luz en sus componentes de color, cada uno dependiendo de su contenido en longitud de onda (o frecuencia). La transformada de Fourier puede ser vista como un “prisma matemático” que separa una función en sus componentes, también basada en sus frecuencias. Similarmente, la transformada nos permite caracterizar una función por su contenido en frecuencia).

En general, vemos en las ecuaciones para obtener $F(u)$ (tanto en forma exponencial como de Euler) que los componentes de la transformada de Fourier son cantidades complejas. A veces será conveniente manejar $F(u)$ en coordenadas polares:

$$F(u) = |F(u)| e^{-j\phi(u)} \quad (3.49)$$

Donde

$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$ es llamada magnitud o espectro de la transformada de Fourier, y

$\phi(u) = \tan^{-1} \frac{I(u)}{R(u)}$ es llamada ángulo de fase o espectro de fase de la transformada.

En estas dos últimas ecuaciones $R(u)$ e $I(u)$ son las partes real e imaginaria de $F(u)$, respectivamente.

En términos de mejora de la imagen nos conciernen primariamente las propiedades del espectro.

La densidad espectral es el cuadrado del espectro de Fourier:

$$P(u) = |F(u)|^2 = R^2(u) + I^2(u) \quad (3.50)$$

Dada la relación inversa entre una función y su transformada ilustrada en la Figura 3.28, no es sorprendente que Δx y Δu estén inversamente relacionadas por la expresión

$$\Delta u = \frac{1}{M\Delta x} \quad (3.51)$$

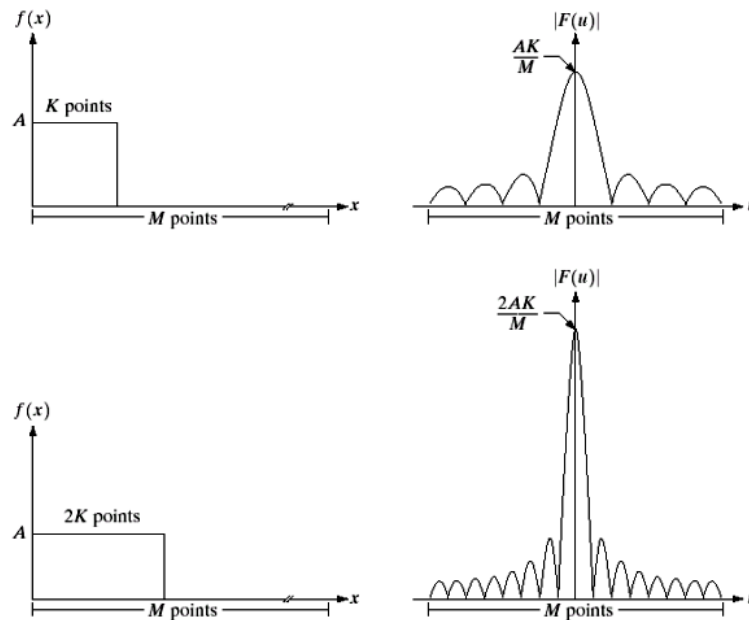


Figura 3.28: **A.** Una función discreta de M puntos, con k puntos con valor A , **B.** su transformada de Fourier; **C.** una función con el doble de puntos con valor A y **D.** Su transformada de Fourier.

Esta medida es útil cuando las medidas son importantes en las imágenes procesadas. Por ejemplo, en una aplicación de microscopía electrónica las muestras de la imagen podrían estar espaciadas una micra entre ellas, y ciertas características del dominio de la frecuencia (como los componentes periódicos) pueden tener implicaciones con respecto a la estructura de la muestra física.

3.13.4. La Transformada de Fourier Discreta (DFT) bidimensional y su inversa

La transformada discreta (o de análisis) de Fourier de una función (imagen) $f(x, y)$ de tamaño $M \times N$ está dada por la siguiente expresión:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left[\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right]} \quad \text{con } u = 0, 1, \dots, M-1 \text{ y } v = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.52)$$

su inversa (o de síntesis):

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left[\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right]} \quad \text{con } x = 0, 1, \dots, M-1 \text{ y } y = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.53)$$

Donde u y v son las variables de transferencia o frecuencia y x y y son las variables espaciales o de imagen.

Definimos como en la sección anterior el espectro de Fourier, el ángulo de fase y la magnitud:

$$F(u, v) = \left| \sqrt{R^2(u, v) + I^2(u, v)} \right| \quad (3.54)$$

$$\phi(u, v) = \tan^{-1} \left[\frac{I(u, v)}{R(u, v)} \right] \quad (3.55)$$

$$P(u, v) = |F(u, v)|^2 = R^2(u, v) + I^2(u, v) \quad (3.56)$$

Donde $R(u, v)$ e $I(u, v)$ son las partes real e imaginaria de $F(u, v)$, respectivamente.

Hay que notar, entonces, que la representación de la transformada de Fourier es otra imagen, que en este caso es compleja, pudiéndose separar en parte real e imaginaria o bien en módulo y fase.

Usualmente se multiplica la función (imagen) por $(-1)^{x+y}$ antes de calcular la transformada de Fourier. Debido a las propiedades de las exponenciales se puede demostrar que:

$$DFT[f(x, y)(-1)^{x+y}](u, v) = F(u - M/2, v - N/2) \quad (3.57)$$

Esta ecuación nos dice que el origen de la transformada de Fourier de $f(x, y)(-1)^{x+y}$ se localiza en $u = M/2$ y $v = N/2$, lo que pone el origen al centro del área $M \times N$ que ocupa la DFT bidimensional. Esta área es llamada rectángulo de frecuencia. En otras palabras multiplicando $f(x, y)$ por $(-1)^{x+y}$ se traslada el origen de $F(u, v)$ a las coordenadas $(M/2, N/2)$, las cuales coinciden con el centro del área de $M \times N$ ocupada por la transformada discreta de Fourier bidimensional.

Se requiere que M y N sean impares para que las coordenadas del centro sean enteras.

El valor de la transformada en $(u, v) = (0, 0)$ es:

$$F(0, 0) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (3.58)$$

el cuál es claramente el promedio de $f(x, y)$, lo que quiere decir que el valor de la DFT en el origen es igual al nivel de gris promedio de la imagen.

Como las frecuencias son cero en el origen, $F(0, 0)$ a veces es llamado el componente *dc* (de corriente directa o frecuencia cero).

Además, si $f(x, y)$ es real, el espectro de la transformada de Fourier es simétrico

$$|F(u, v)| = |F(-u, -v)| \quad (3.59)$$

y también se cumplen las siguientes relaciones:

$$\Delta u = 1/M\Delta x \quad (3.60)$$

$$\Delta v = 1/M\Delta y \quad (3.61)$$

La Figura 3.29 muestra un rectángulo blanco de 20×40 píxeles sobre un fondo negro de 512×512 . La imagen fue multiplicada $(-1)^{x+y}$ antes de aplicarle la *DFT* de manera que la frecuencia cero quede en el centro del espectro (b). Antes de mostrar la *DFT*, se le aplicó una transformación logarítmica $F'(u,v) = c * \log(1 + F(u,v))$ para realzar los niveles de gris.

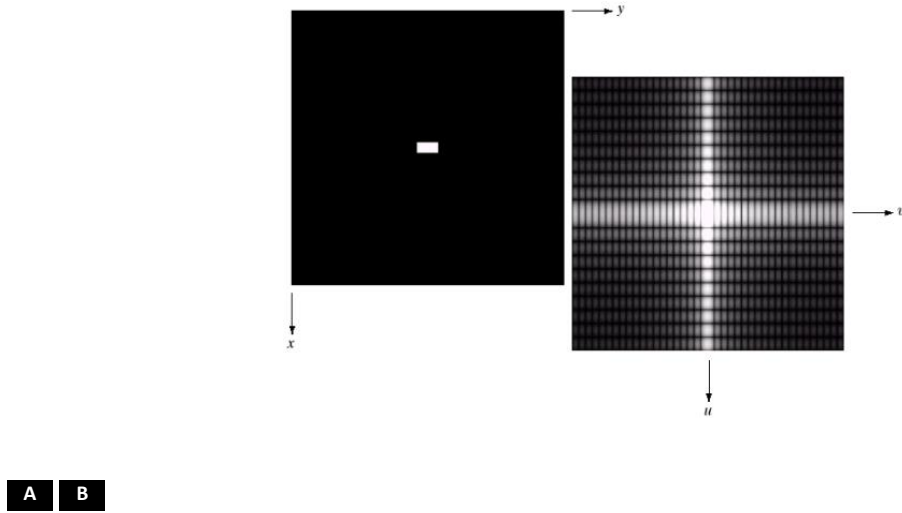


Figura 3.29: **A.** Un rectángulo blanco sobre fondo negro y **B.** El espectro de Fourier de la imagen premultiplicada por $(-1)^{x+y}$ y posprocesada con el logaritmo para ver detalles de los niveles oscuros de gris.

3.13.5. Propiedades de la DFT

3.13.5.1. Separabilidad

El par de transformadas de Fourier bidimensional, se pueden escribir de forma separada (vamos a verlas en imágenes cuadradas de aquí en adelante)

$$F(u,v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{N}\right)} \sum_{y=0}^{N-1} f(x,y) e^{-j2\pi\left(\frac{vy}{N}\right)} \quad \text{con } u = 0,1,\dots,N-1 \text{ y } v = 0,1,\dots,N-1 \quad (3.62)$$

$$f(x, y) = \frac{1}{N} \sum_{u=0}^{N-1} e^{j2\pi \left(\frac{ux}{N}\right)} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) e^{j2\pi \left(\frac{vy}{N}\right)} \text{ con } x = 0, 1, \dots, N-1 \text{ y } y = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.63)$$

La principal ventaja que ofrece esta propiedad es que se puede realizar la transformada de una señal bidimensional, como la sucesión de dos transformadas unidimensionales. Por lo tanto para calcular la transformada de una imagen, se hace primero la transformada de las filas, seguida, con lo obtenido, la transformada de las columnas (o viceversa).

3.13.5.2. Traslación

Esta propiedad se puede expresar como:

$$f(x, y) e^{j2\pi \frac{u_0 x + v_0 y}{N}} \Leftrightarrow F(u - u_0, v - v_0) \quad (3.64)$$

y

$$f(x - x_0, y - y_0) \Leftrightarrow F(u, v) e^{-j2\pi \frac{u_0 x + v_0 y}{N}} \quad (3.65)$$

Que representan la traslación en el dominio de la frecuencia y del espacio respectivamente.

Para el caso particular de:

$$e^{j2\pi \frac{u_0 x + v_0 y}{N}} = e^{j\pi(x+y)} = (-1)^{x+y} \quad (3.66)$$

Con lo que una traslación al centro, se traduce en el producto de la señal original por la expresión anterior:

$$f(x, y) \cdot (-1)^{x+y} \Leftrightarrow F\left(u - \frac{N}{2}, v - \frac{N}{2}\right) \quad (3.67)$$

Es importante destacar que esta propiedad, no modifica el módulo de la transformada.

3.13.5.3. Periodicidad y simetría conjugada

La *DFT* directa e inversa son periódicas de periodo N , es decir:

$$F(u, v) = F(u + N, v) = F(u, v + N) = F(u + N, v + N) \quad (3.68)$$

Se concluye que en un solo período de la señal está contenida toda la información de la señal en el dominio de la frecuencia (ver Figuras 3.54 y 3.55).

Cuando $f(x, y)$ es real, la transformada cumple la propiedad de simetría conjugada. Si se divide la imagen transformada en 4 cuadrantes (suponiendo que el origen de frecuencias está en el centro de la imagen transformada), y la imagen de entrada es real (generalmente lo será), el tercer cuadrante será igual al primer cuadrante rotado 180° , y el cuarto cuadrante será igual al segundo rotado 180° . Analíticamente:

$$|F(u, v)| = |f(-u, -v)|$$

3.13.5.4. Rotación

Si se hace un cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares las funciones $f(x, y)$ y $F(u, v)$ pasan a tener la forma:

$$f(r, \theta) \text{ y } F(\omega, \phi) \quad (3.69)$$

Si se aplica un giro $\theta_0 f(r, \theta)$, la imagen transformada gira el mismo ángulo (ver Figuras 3.30 y 3.35):

$$f(r, \theta + \theta_0) \Leftrightarrow F(r, \phi + \theta_0) \quad (3.71)$$

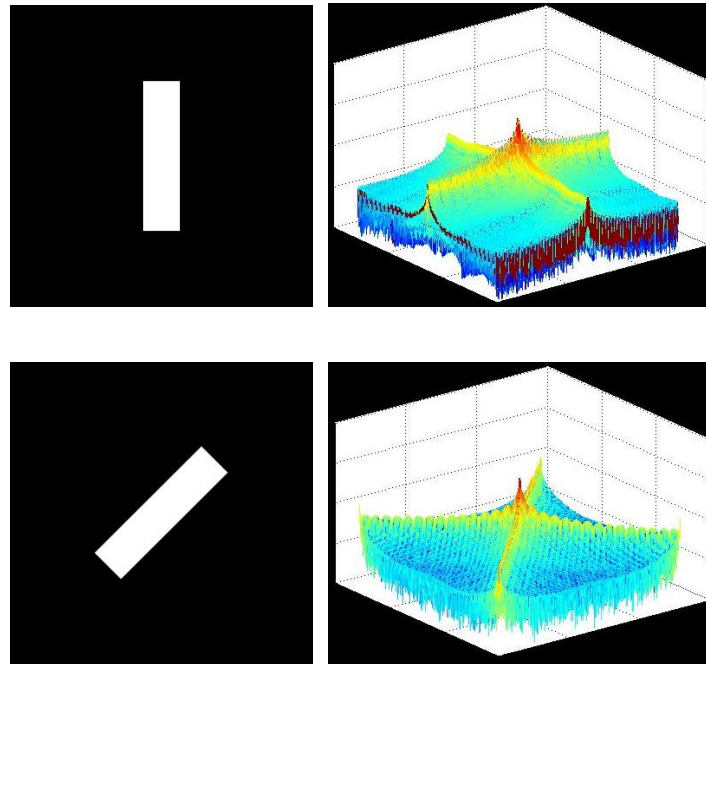


Figura 3.30: Propiedad de rotación de la DFT. **A.** Imagen Original, **B.** Su espectro de Fourier de la imagen A; **C.** Imagen girada y su espectro de Fourier en **D.**

Esta propiedad no es aplicable a señales unidimensionales, ya que no se pueden girar.

3.13.5.5. Distributividad y cambio de escala

De la definición de transformada se deduce que:

$$\mathfrak{F}\{f_1(x, y) + f_2(x, y)\} = \mathfrak{F}\{f_1(x, y)\} + \mathfrak{F}\{f_2(x, y)\} \quad (3.71)$$

y de forma general:

$$\mathfrak{F}\{f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)\} \neq \mathfrak{F}\{f_1(x, y)\} \cdot \mathfrak{F}\{f_2(x, y)\} \quad (3.72)$$

es decir la transformada de Fourier y su inversa son distributivas respecto de la suma, pero no con respecto al producto.

Si se tienen dos escalares a y b , se cumple que:

$$af(x, y) \Leftrightarrow aF(u, v) \quad (3.73)$$

es decir, si se multiplica la imagen de entrada por una constante, la imagen transformada también queda multiplicada por la misma constante.

Y que

$$f(ax, by) \Leftrightarrow \frac{1}{|ab|} F\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (3.74)$$

es decir, si se estira la imagen original, la imagen transformada se encoge y viceversa.

3.13.5.6. Valor medio

Usualmente el valor medio de una función discreta bidimensional se calcula como:

$$\overline{f(x, y)} = \frac{1}{N^2} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (3.75)$$

Por otro lado se tiene que la transformada de Fourier de $f(x, y)$ en el punto $u = 0, v = 0$ es:

$$F(0,0) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \quad (3.76)$$

Si se comparan ambas expresiones, se puede concluir que el cálculo del valor medio se puede hacer a través del uso de la transformada de Fourier de la siguiente forma:

$$\overline{f(x, y)} = \frac{1}{N} F(0, 0) \quad (3.77)$$

3.13.5.7. Convolución

La convolución bidimensional se puede expresar por:

$$f(x, y) * g(x, y) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f(m, n) \cdot g(x-m, y-n) \quad (3.78)$$

para $x = 0, 1, 2, \dots, M-1$ e $y = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Si se pasa esta expresión al dominio de Fourier el producto de convolución pasa a ser un producto algebraico, simplificando así su cálculo (ver Figura 3.57).

$$\begin{aligned} f(x, y) * g(x, y) &\Leftrightarrow F(u, v) \cdot G(u, v) \\ f(x, y) \cdot g(x, y) &\Leftrightarrow F(u, v) * G(u, v) \end{aligned} \quad (3.79)$$

La importancia de esta propiedad radica en la simplificación del cálculo de las respuestas a la salida de los sistemas LTI.

3.14. Transformada rápida de Fourier (FFT)

Una forma eficiente de hacer el cálculo de la transformada discreta de Fourier, es mediante el uso de algoritmos rápidos, como la *FFT*.

Si no existieran algoritmos como la *FFT* para el cálculo de la DFT, sería computacionalmente inviable el cálculo, ya que la implementación directa de la *DFT*, requiere de un gran número de operaciones por muestra de la señal, que es proporcional a N^2 . Por el contrario para el cálculo de la *DFT* a través de la *FFT*, se requieren exactamente

$N \cdot \log_2(N)$ sumas y $\frac{1}{2} N \cdot \log_2(N)$ multiplicaciones. Este cálculo es fácilmente demostrable.

Para el caso concreto del tratamiento digital de imágenes, y debido al gran número de píxeles que contiene una imagen, la *DFT* calculada de forma directa requeriría un tiempo de procesamiento muy elevado para una imagen de tamaño medio o grande.

Debido a la propiedad de separabilidad de la transformada discreta de Fourier bidimensional, el cálculo de la *FFT* bidimensional se puede realizar haciendo dos *FFT*'s unidimensionales.

3.15. Representación gráfica de la Transformada de Fourier Discreta (en imágenes)

La magnitud de la transformada de Fourier muestra los valores de los coeficientes (magnitud) de las funciones exponenciales complejas de frecuencia u, v que al sumarse producen la imagen original (ver Figuras 3.31 y 3.32).

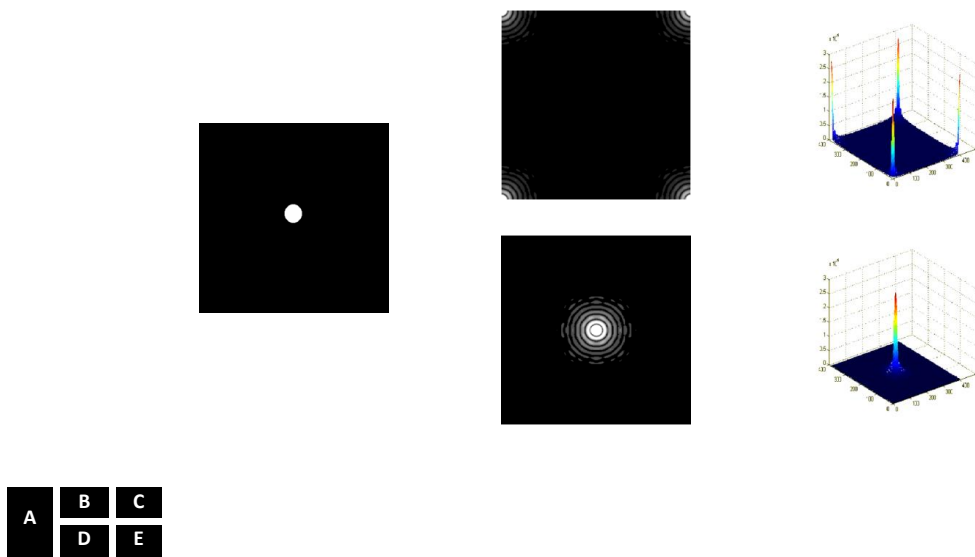


Figura 3.31: Representación Gráfica de la *DFT* en imágenes. **A.** Imagen original. **B.** Imagen de la magnitud de la transformada de Fourier; **C.** Gráfica de la magnitud de la transformada de Fourier; **D.** Imagen de la magnitud de la transformada de Fourier con centro desplazado y **E.** Gráfica de la magnitud de la transformada de Fourier con centro desplazado.

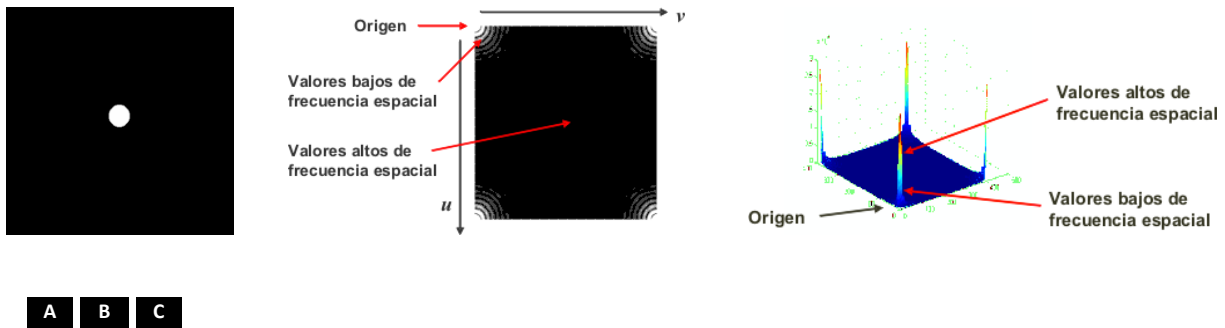


Figura 3.32: Valores de frecuencia representados en la imagen transformada. **A.** Imagen original. **B.** Imagen de la magnitud de la transformada de Fourier, y **C.** Gráfica de la magnitud de la transformada de Fourier.

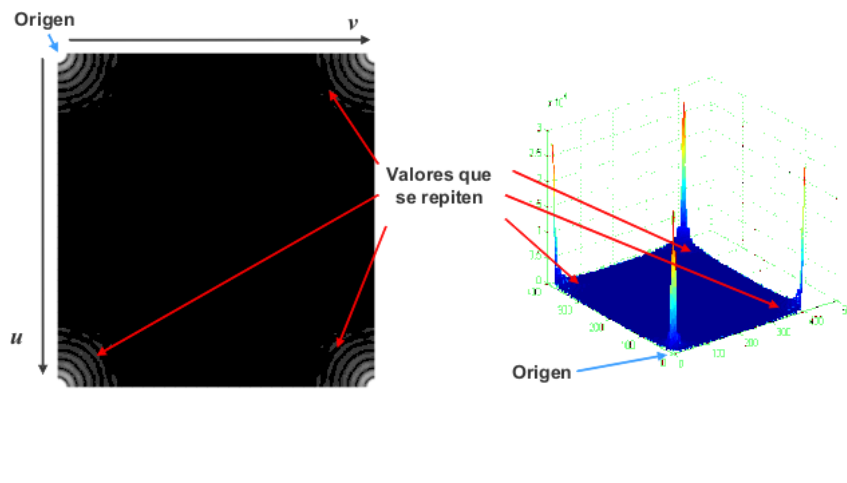


Figura 3.33: Periodicidad de la transformada de Fourier. **A.** Imagen de la magnitud de la transformada de Fourier, y **B.** Gráfica de la magnitud de la transformada de Fourier.

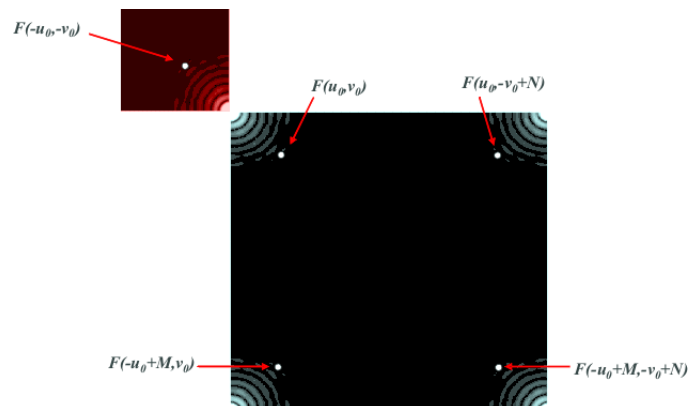


Figura 3.34: Simetría de la transformada de Fourier.

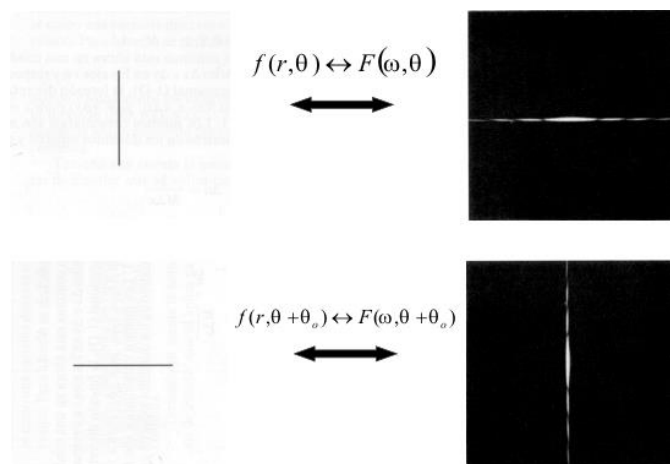


Figura 3.35: Propiedad de rotación de la transformada de Fourier.

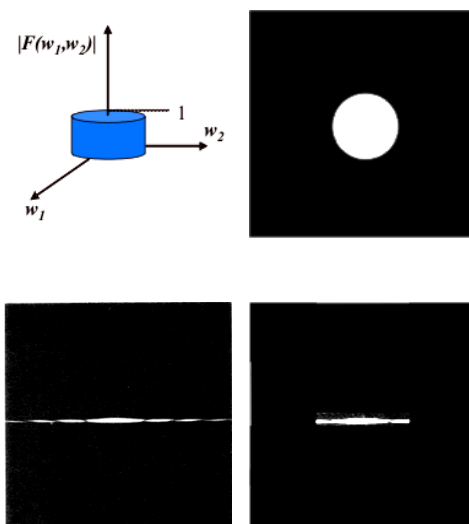


Figura 3.36: Propiedad de la Convolución. **A.** Magnitud de la *TDF* de un sistema con respuesta al impulso $h(x,y)$. **B.** Imagen de la magnitud de $H(u,v)$. **C.** Imagen de la magnitud de la *TDF* de una imagen $f(x,y)$. **D.** Magnitud de la *TDF* de la convolución entre $f(x,y)$ y $h(x,y)$.

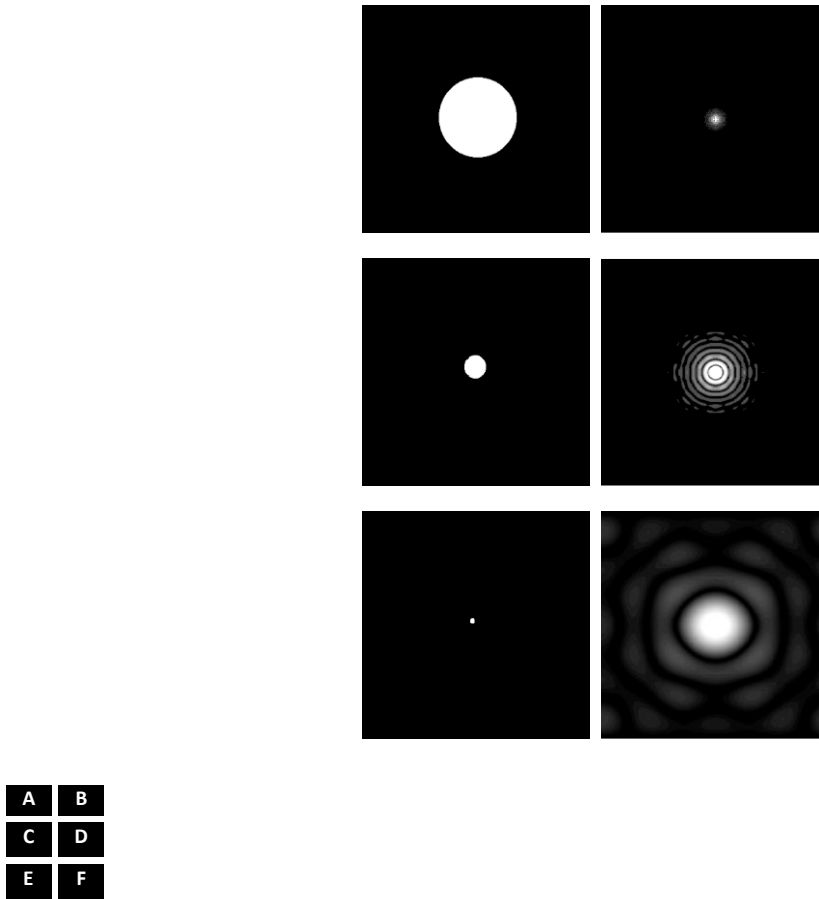


Figura 3.37: Transformadas de algunas imágenes. **A**, **C** y **E**. Imágenes con diferentes tipos de impulso; **B**, **D** y **F**. Magnitud de la Transformada de Fourier de A, B y C correspondientemente.

3.16. Procedimiento para filtrar en el dominio de la frecuencia

Para filtrar en el dominio de la frecuencia se deben seguir los siguientes pasos:

- Multiplicar la imagen de entrada por $(-1)^{x+y}$ para centrar la transformada según la ecuación:

$$DFT[f(x, y)(-1)^{x+y}]u, v = F(u - M/2, v - N/2) \quad (3.80)$$

- Calcular la DFT de la imagen, $F(u, v)$, mediante:

$$F(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) e^{-j2\pi \left[\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N} \right]} \quad (3.81)$$

- iii. Multiplicar $F(u, v)$ por una función $H(u, v)$ que actúe como filtro.
- iv. Calcular la DFT inversa del resultado hallado en (iii).
- v. Obtener la parte real del resultado de (iv).
- vi. Multiplicar el resultado de (v) por $(-1)^{x+y}$.

La razón por la que $H(u, v)$ actúa como filtro es que esta función elimina o acentúa ciertas frecuencias en la transformada y deja otras sin cambio.

Consideremos que $f(x, y)$ es la imagen de entrada del paso (i) del procedimiento descrito, y $F(u, v)$ su transformada de Fourier. Entonces, la transformada de Fourier de la imagen filtrada está dada por:

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) \quad (3.82)$$

La multiplicación de H y F involucra funciones bidimensionales, o sea, es el resultado de multiplicar elemento por elemento dos matrices. En general, los elementos de F son números complejos pero los filtros ($H(u, v)$) que se usan frecuentemente son reales. Estos filtros multiplican de igual forma la parte real y la imaginaria de los elementos de F y, por lo tanto, solo modifican la magnitud de la transformada manteniendo invariable el argumento.

La imagen filtrada se obtiene aplicando la transformada inversa de Fourier a $G(u, v)$ y multiplicando el resultado por $(-1)^{x+y}$. Cuando la imagen $f(x, y)$ y el filtro $H(u, v)$ son reales, la transformada inversa de Fourier de $G(u, v)$ debería ser real, pero en la práctica no es así ya que existen componentes complejos parásitos que aparecen como consecuencia del error numérico computacional. Estos componentes deben ser ignorados (son despreciables pero pueden influir en cálculos posteriores).

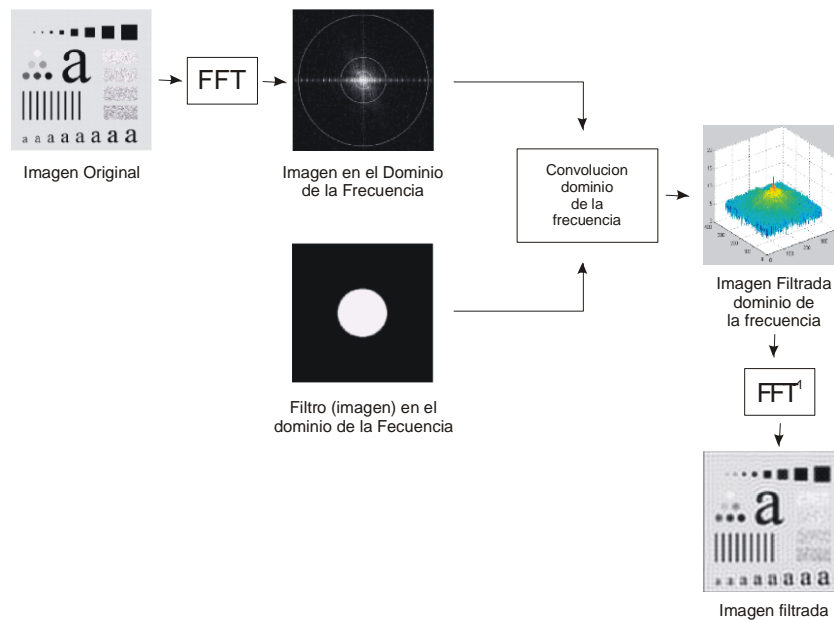


Figura 3.38: Proceso básico de filtrado en el dominio de la frecuencia.

3.17. Algunos filtros frecuenciales básicos

3.17.1. Filtros Pasabajas

Los bordes o fronteras y otros detalles de realce, (como el ruido) en los niveles de gris de la imagen, contribuyen significativamente al contenido de las frecuencias altas en el dominio de Fourier, por tanto, el emborronamiento (alisamiento) se alcanza en el dominio de Fourier atenuando un rango específico de componentes de altas frecuencias en la transformada de Fourier de una imagen dada:

$$G(u, v) = H(u, v) \cdot F(u, v) \quad (3.83)$$

3.17.1.1. Filtro ideal pasabajas

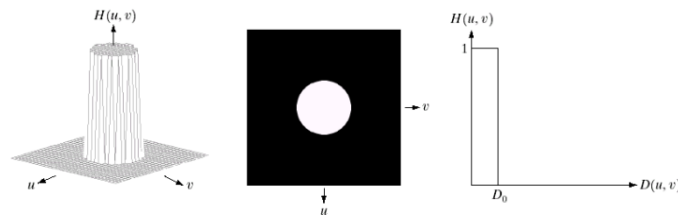
Un filtro ideal bidimensional, es aquel cuya función de transferencia satisface la relación:

$$H(u, v) = \begin{cases} 1 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 0 & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (3.84)$$

donde D_0 es una cantidad no negativa y $D(u, v)$ es la distancia del punto (u, v) al origen en el plano de frecuencias, es decir,

$$D(u, v) = \left[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2 \right]^{1/2} \quad (3.85)$$

$$D(u, v) = (u^2 + v^2)^{1/2} \quad (3.86)$$



A B C

Figura 3.39: **A.** Perspectiva de la gráfica de la función de transferencia de un filtro ideal pasa bajas. **B.** Filtro desplegado como imagen y **C.** Sección transversal del filtro.

El paso para entender el proceso de emborronamiento como un proceso de convolución en el dominio espacial está en la forma de $h(x, y)$.



Figura 3.40: Forma de un filtro $h(x, y)$ [5].

Supongamos una imagen simple formada por dos píxeles luminosos en un fondo negro.

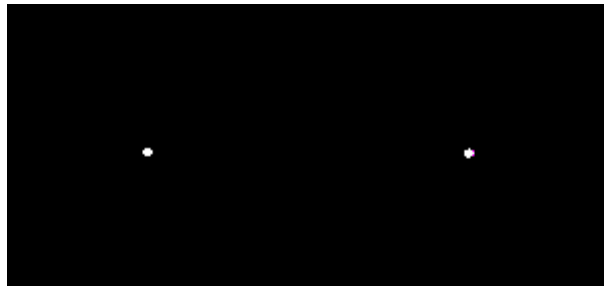


Figura 3.41: Dos puntos luminosos en un fondo negro [5].

Estos dos puntos brillantes pueden ser vistos como aproximaciones de dos impulsos cuyo ancho depende de la luminosidad de esos puntos.

Así pues, la convolución de $h(x, y)$ y $f(x, y)$ es un simple proceso de copia de $h(x, y)$ a la localización de cada impulso.

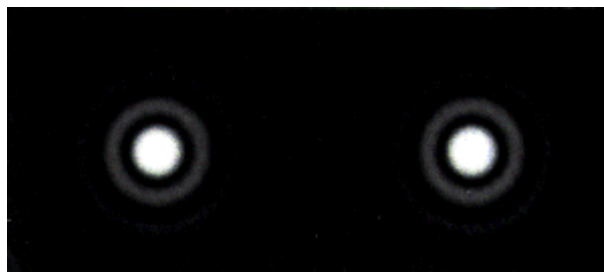


Figura 3.42: Proceso de la convolución de $h(x, y)$ y $f(x, y)$, resulta ser una copia de $h(x, y)$ a la localización de cada impulso de la Figura 3.62 [5].

Estos conceptos se extienden a imágenes más complejas, considerando cada pixel como un impulso con un ancho proporcional al nivel de gris del pixel.

La forma de $h(x, y)$ depende del radio de la función en el dominio de la frecuencia.

Haciendo la transformada inversa de $H(u, v)$ para un filtrado Pasabajas aparece que el radio de los anillos concéntricos en $h(x, y)$ es inversamente proporcional al valor de D_0

Por ello filtros severos en el dominio de las frecuencias (esto es, elegir un D_0 pequeño) produce un número relativamente pequeño de anchos anillos en $h(x, y)$ y, consecuentemente, más emborronamiento en $g(x, y)$.

Conforme D_0 se incrementa, el número de anillos en una región se incrementa, produciendo anillos más espaciados y menos emborronamiento.

Si D_0 está fuera del dominio de definición de $F(u, v)$, $h(x, y)$ se convierte en un 1 en su correspondiente región espacial y la convolución de $h(x, y)$ con $f(x, y)$ es simplemente $f(x, y)$. Esta situación corresponde a un no-filtrado.

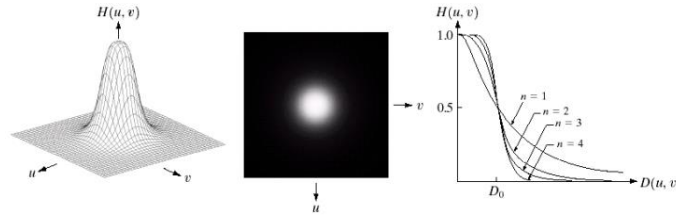
3.17.1.2. Filtro Butterworth pasabajas

La función de transferencia del filtro de Butterworth de orden n y frecuencia de corte a distancia D_0 tiene la forma:

$$H(u, v) = \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}} \quad (3.87)$$

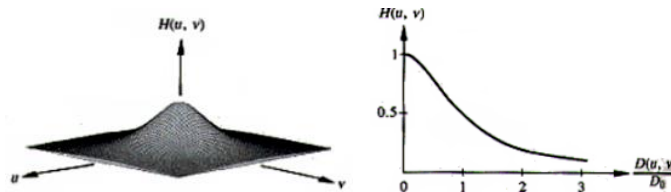
dónde:

$$D(u, v) = (u^2 + v^2)^{1/2} \quad (3.88)$$



A B C

Figura 3.43: **A.** Perspectiva de la gráfica de la función de transferencia de un filtro butterworth pasa bajas. **B.** Filtro desplegado como imagen y **C.** Sección transversal del filtro de orden 1 hasta orden 4.



A B

Figura 3.44: **A.** Filtro Butterworth Pasabajas y **B.** Sección transversal para $n=1$.

3.17.1.3. Filtro Gaussiano pasabajas

La forma de este filtro en dos dimensiones es:

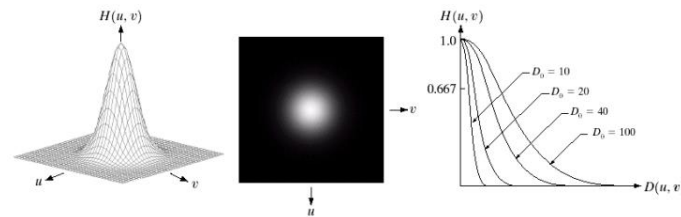
$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v) / 2\sigma^2} \quad (3.89)$$

Donde $D(u, v)$ es la distancia del punto (u, v) al origen en el plano de frecuencias.

Si $\sigma = D_0$ tenemos:

$$H(u, v) = e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2} \quad (3.90)$$

Donde D_0 es la frecuencia de corte



A **B** **C**

Figura 3.45: **A.** Perspectiva de la gráfica de la función de transferencia de un filtro pasa bajas gaussiano. **B.** Filtro desplegado como imagen y **C.** Sección transversal del filtro con varios valores de D_0 .

3.17.2. Filtros Pasaaltas

Una imagen, como mencionábamos anteriormente, puede ser emborronada atenuando los componentes de alta frecuencia de su Transformada de Fourier. Debido a que los bordes y otros cambios abruptos en los niveles de gris se asocian con frecuencias altas, el realce de imágenes puede alcanzarse mediante el filtrado de Paso alto, que atenúa las frecuencias bajas sin distorsionar la información en las altas frecuencias del dominio de Fourier.

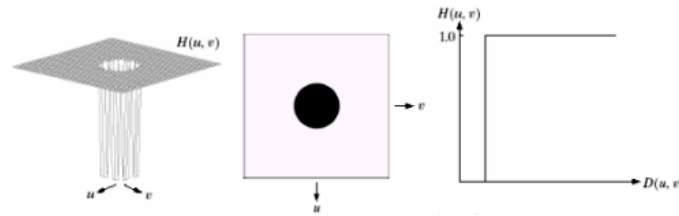
3.17.2.1. Filtro ideal pasaaltas

Un filtro ideal en dos dimensiones es aquel que cumple la relación:

$$H(u, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(u, v) \leq D_0 \\ 1 & \text{si } D(u, v) > D_0 \end{cases} \quad (3.91)$$

donde D_0 es una cantidad no negativa y $D(u, v)$ es la distancia del punto (u, v) al origen en el plano de frecuencias, es decir,

$$D(u, v) = (u^2 + v^2)^{1/2}$$



A **B** **C**

Figura 3.46: **A.** Perspectiva de la gráfica de la función de transferencia de un filtro ideal pasa Altas. **B.** Filtro desplegado como imagen y **C.** Sección transversal del filtro.

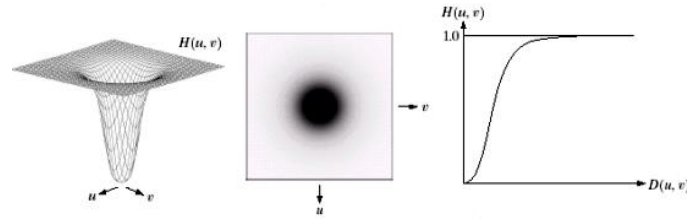
3.17.2.2. Filtro pasaaltas Butterworth

La función de transferencia de Butterworth de orden n y con frecuencia de corte D_0 desde el origen se define con la relación:

$$H(u, v) = 1 - \frac{1}{1 + [D(u, v) / D_0]^{2n}} = \frac{1}{1 + [D_0 / D(u, v)]^{2n}} \quad (3.92)$$

dónde:

$$D(u, v) = \left[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2 \right]^{1/2} \quad (3.93)$$



A **B** **C**

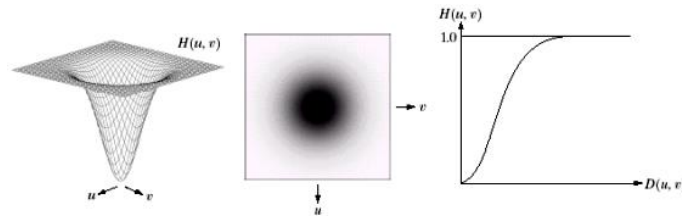
Figura 3.47: **A.** Perspectiva de la gráfica de la función de transferencia de un filtro pasa altas butterworth. **B.** Filtro desplegado como imagen y **C.** Sección transversal del filtro.

3.17.2.3. Filtro pasaaltas Gaussiano

$$H(u, v) = 1 - e^{-D^2(u, v) / 2D_0^2} \quad (3.94)$$

dónde:

$$D(u, v) = \left[(u - M/2)^2 + (v - N/2)^2 \right]^{1/2} \quad (3.95)$$



A **B** **C**

Figura 3.48: **A.** Perspectiva de la gráfica de la función de transferencia de un filtro pasa altas gaussiano. **B.** Filtro desplegado como imagen y **C.** Sección transversal del filtro.

3.18. Ejemplo del uso de diferentes técnicas (para filtrado pasa-altas)

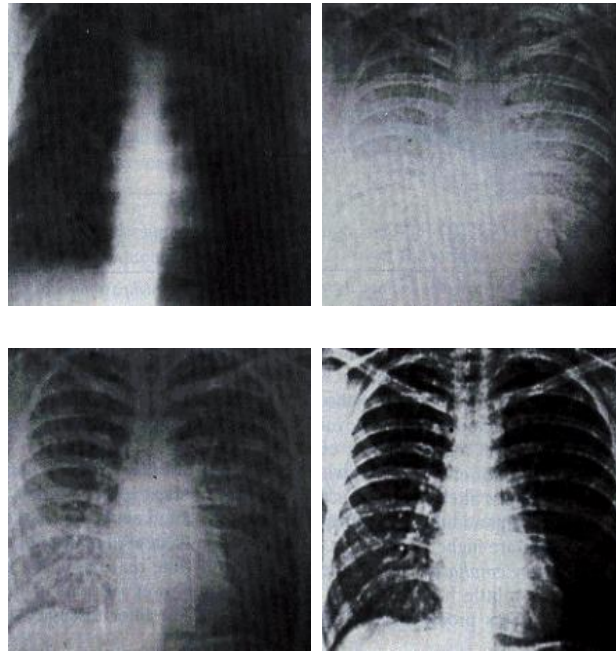


Figura 3.49: Aplicación del filtro butterworth a una imagen de rayos X de poca calidad **A**, **B**. Se le aplica un filtrado Pasaaltas de Butterworth de orden 1, sólo aparecen los bordes de la imagen al atenuar las frecuencias más bajas. A menudo se emplea un técnica, que es añadir una constante para preservar los componentes de baja frecuencia, está adición amplifica, por supuesto, también los componentes de alta frecuencia. A esta técnica se la denomina de énfasis en las altas frecuencias, equivalente al estudiado en la parte de máscaras, **C**. La técnica anterior tiende a emborronar el resultado, para aliviar esta situación se acaba realizando una ecualización del histograma, mostrando el resultado en **D**.



Filtrado Frecuencial (ejemplo).

% Construcción de un filtro ideal pasaaltas

```
PasaaltasIdeal=zeros(f,c);
```

```
for i=1:f
```

```
    for j=1:c
```

```
        D=sqrt((i-f/2)^2+(j-c/2)^2); % Se determina la distancia al centro del punto (i,j)
```

```
        if D>D0
```

```
            PasaaltasIdeal(i,j)=1;
```

```
        end
```

```
end
end

% Multiplico la transformada de la imagen por el filtro ideal
DFT_A_filtrada=DFT_A.*PasaaltasIdeal; % Multiplico elemento a elemento

% Aplico la DFT inversa
A_filtrada=ifft2(DFT_A_filtrada);

% Tomo el modulo para descartar cualquier residuo del tipo complejo
A_filtrada=abs(A_filtrada);

figure, mesh(abs(log(DFT_A_filtrada+1))),colorbar, title('Espectro de la imagen filtrada')
figure, imshow(uint8(A_filtrada)), title('Imagen filtrada')
figure, imshow(PasaaltasIdeal), title('Filtro pasaaltas ideal')

Par más información sobre fft2, abs, fftshift, log ver el toolbox.
```