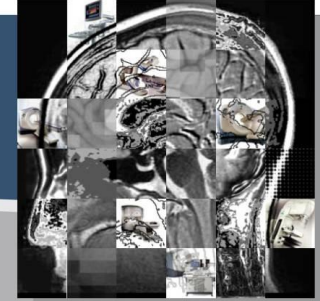


Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional Autónoma de México

Especificación del Histograma

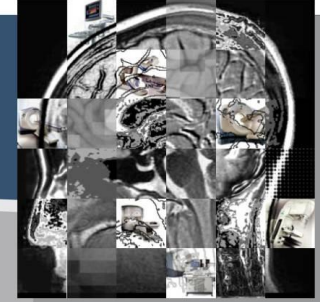


Aunque el método de ecualización (o igualación) del histograma es bastante útil, no nos proporciona la aplicación de técnicas interactivas para la mejora de imágenes ya que sólo es capaz de generar un resultado (una imagen de salida), con una aproximación a la distribución uniforme.

Para ver como esto se puede llevar a cabo supongamos, en el caso continuo, que:

$$P_r(r) \quad \text{y} \quad P_z(z)$$

Son las densidades de probabilidad original y deseada respectivamente. Supongamos, además, que a una imagen dada se le uniformiza el histograma utilizando:



$$s = T(r) = \int_0^r P_r(w)dw$$

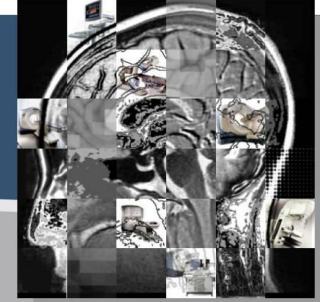
Obviamente si la imagen deseada estuviera disponible, sus niveles podrían ser uniformizados utilizando la función de transformación:

$$v = G(z) = \int_0^z P_z(w)dw$$

El proceso inverso, $z = G^{-1}(v)$

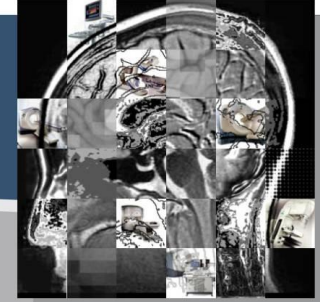
produciría entonces los niveles que necesitamos. Observemos, por tanto, que lo que necesitamos es construir una distribución uniforme. Esto puede llevarse a cabo utilizando el s obtenido de la imagen original, los niveles resultantes $z = G^{-1}(s)$

tendrían entonces la función de densidad deseada.

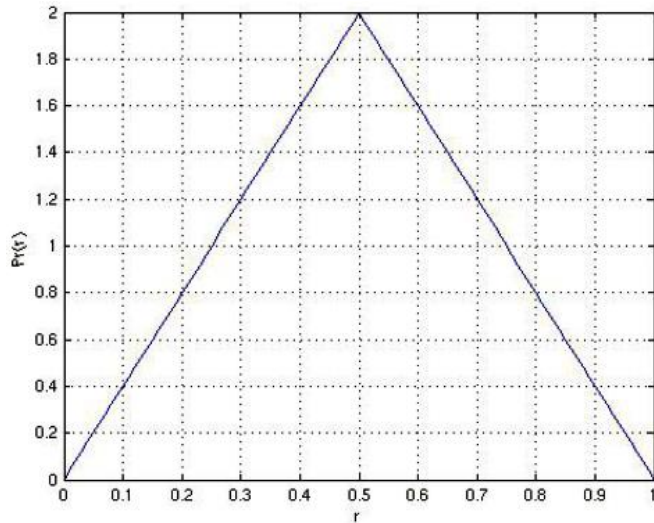


El proceso puede resumirse como:

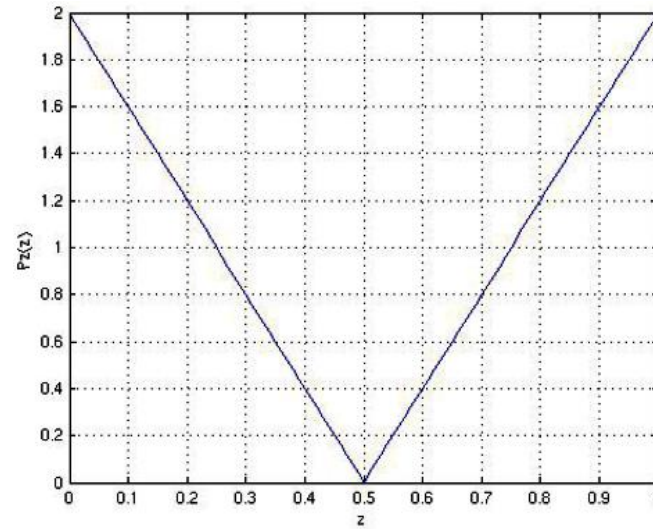
1. Uniformizar (ecualizar) los niveles de gris de la imagen original
2. Especificar la función de densidad deseada y obtener la transformación $G(z)$ que la llevaría a una uniforme
3. Aplicar la transformación inversa $z = G^{-1}(s)$ a los niveles de gris que hemos obtenido en el paso primero.



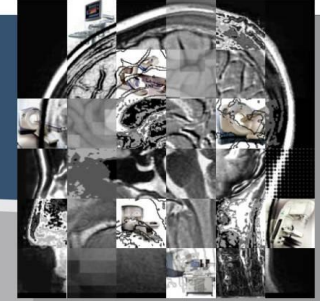
Ejemplo. En la Figura (a) se muestra el histograma original que se desea especificar para obtener el histograma de la Figura (b):



(a)



(b):



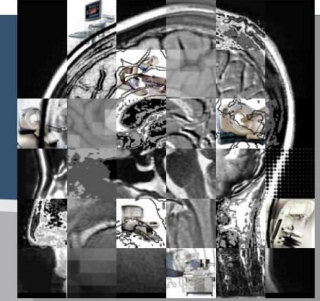
Solución:

1) Se ecualiza $P_r(r)$ usando la ecuación general:

$$S = T(r) = \int_0^r P_r(w)dw$$

La ecuación de $P_r(r)$ es:

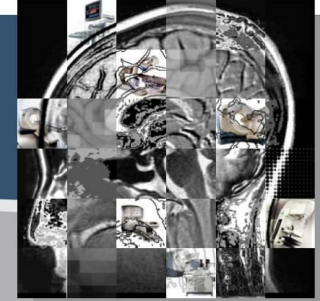
$$P_r(r) = \left\{ \begin{array}{ll} 4r; & 0 \leq r \leq \frac{1}{2} \\ -4r + 4; & \frac{1}{2} \leq r \leq 1 \end{array} \right\}$$



Sustituyendo en la ecuación general:

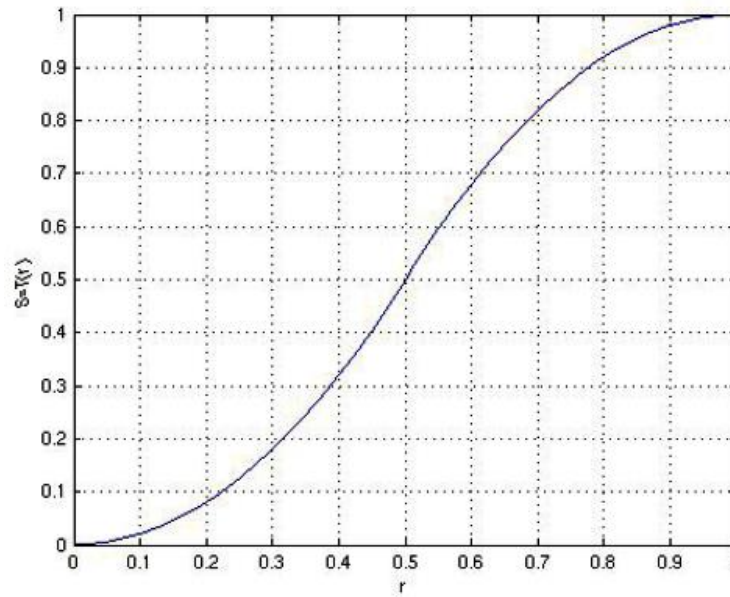
$$S = T(r) = \left\{ \begin{array}{l} S_1 = \int_0^r 4w dw \\ S_1 = \int_{1/2}^r (-4w + 4) dw \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} 2r^2; \quad 0 \leq r \leq 1/2 \\ -2r^2 + 4r - 1; \quad 1/2 \leq r \leq 1 \end{array} \right\}$$

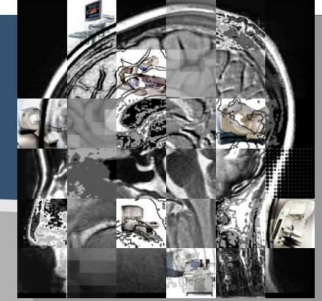
Obteniendo $S = T(r)$ la cual es monotónicamente creciente y con pendiente positiva:



Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional Autónoma de México



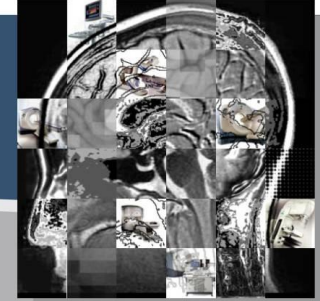


2) Ecualizar $P_z(z)$:

$$P_z(z) = \begin{cases} -4z + 2; & 0 \leq z \leq \frac{1}{2} \\ 4z - 2; & \frac{1}{2} \leq z \leq 1 \end{cases}$$

Sustituyendo en la ecuación general:

$$\hat{S} = \int_0^z P_z(w) dw$$

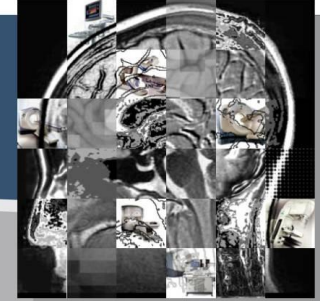


Se tiene:

$$\hat{S} = T(z) = \begin{cases} \hat{S}_1 = \int_0^z (-4w + 2)dw \\ \hat{S}_1 = \int_{1/2}^z (4w - 2)dw \end{cases} = \begin{cases} -2z^2 + 2z; & 0 \leq z \leq 1/2 \\ 2z^2 - 2z + 1; & 1/2 \leq z \leq 1 \end{cases}$$

3) Igualar $S = \hat{S}$

$$2r^2 = -2z^2 + 2z$$



Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional Autónoma de México

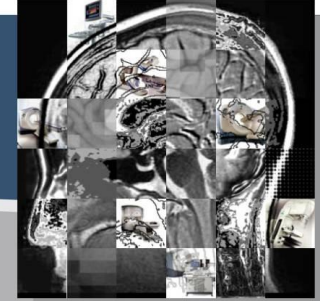
$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4r^2}}{2}$$

$$z = \frac{1 - \sqrt{1 - 4r^2}}{2}; 0 \leq r, \quad z \leq 1/2$$

Se toma la raíz negativa para asegurar que z esté en el intervalo $[0, 1/2]$.

$$-2r^2 + 4r - 1 = 2z^2 - 2z + 1$$

$$z = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(r^2 - 2r + 1)}}{2}$$

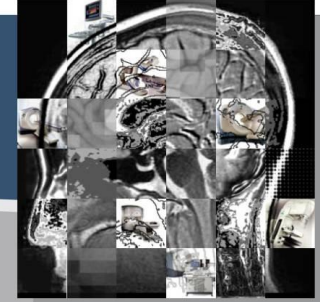


Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional Autónoma de México

$$z = \frac{1 + \sqrt{1 - 4(r^2 - 2r + 1)}}{2}; \quad \frac{1}{2} \leq r, \quad z \leq 1$$

Se toma la raíz positiva para asegurar que z este en el intervalo $[1/2, 1]$.

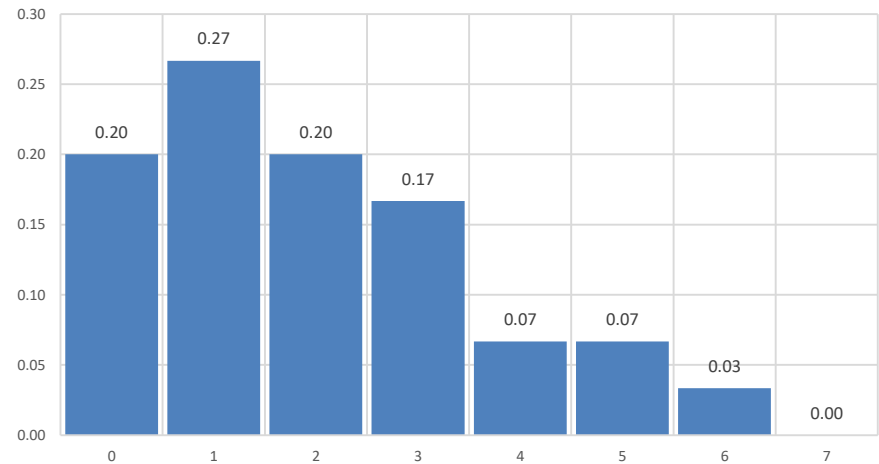


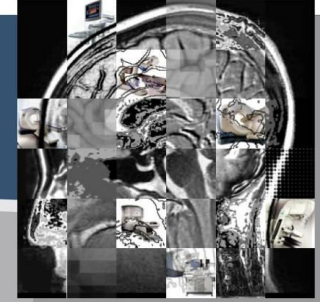
Ejemplo en imágenes, tenemos una imagen según se muestra, su tabla y su histograma:

0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1
1	1	2	2	2	2
2	2	3	3	3	3
3	4	4	5	5	6

r	n(r)	p(r)
0	6	0.20
1	8	0.27
2	6	0.20
3	5	0.17
4	2	0.07
5	2	0.07
6	1	0.03
7	0	0.00
Σ	30	1.00

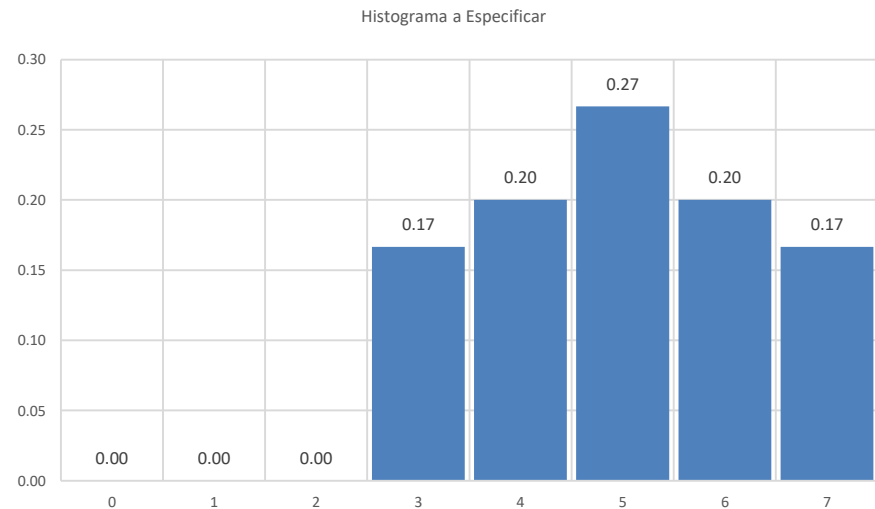
Histograma de la Imagen de Entrada

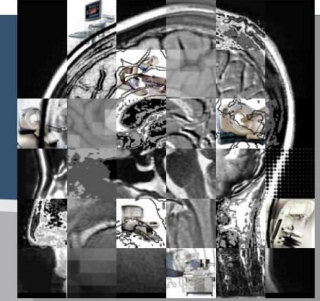




Se requiere transformar (especificar) su histograma de entrada para tener el histograma de salida mostrado

s	n(s)	p(s)
0	0	0.00
1	0	0.00
2	0	0.00
3	5	0.17
4	6	0.20
5	8	0.27
6	6	0.20
7	5	0.17
Σ	30	1.00





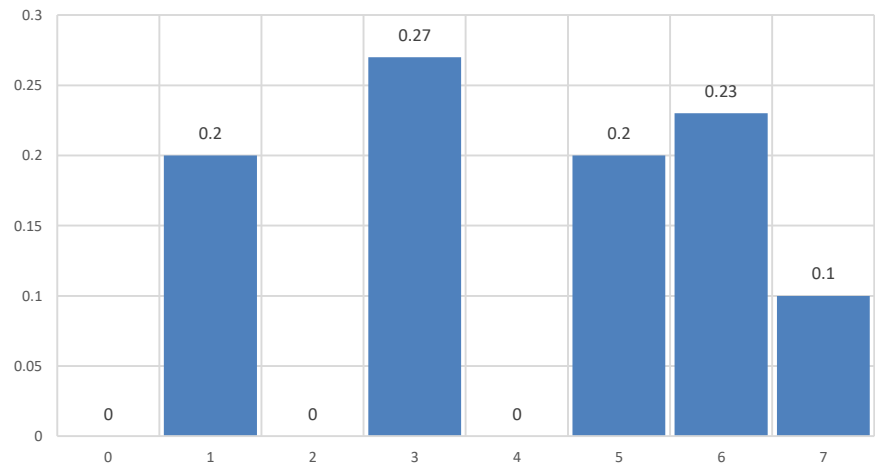
El primer paso es obtener el histograma ecualizado (uniformemente) del histograma de entrada.

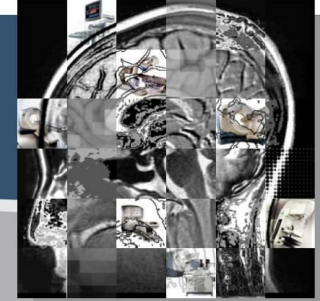
Aplicamos: $F(g) = [g_{max} - g_{min}]p_g(g) + g_{min}$

Donde para nuestro caso $g_{max} = 7$ y $g_{min} = 0$

r	n(r)	p(r)	pr(r)	f(r)	f(r) org
0	6	0.20	0.20	1	0
1	8	0.27	0.47	3	0.2
2	6	0.20	0.67	5	0
3	5	0.17	0.83	6	0.27
4	2	0.07	0.90	6	0
5	2	0.07	0.97	7	0.2
6	1	0.03	1.00	7	0.23
7	0	0.00	1.00	7	0.1

Histograma de la Imagen de Entrada Ecualizada





Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional Autónoma de México

Se ecualiza el histograma a
especificar:

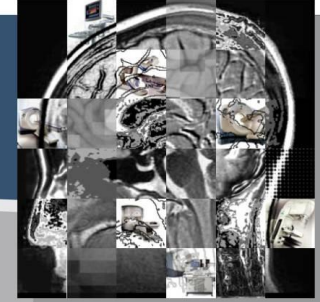
s	n(s)	p(s)	ps(s)	f(s)
0	0	0.00	0.00	0
1	0	0.00	0.00	0
2	0	0.00	0.00	0
3	5	0.17	0.17	1
4	6	0.20	0.37	3
5	8	0.27	0.63	4
6	6	0.20	0.83	6
7	5	0.17	1.00	7

Especificamos:

r	f(r) org
0	0
1	0.2
2	0
3	0.27
4	0
5	0.2
6	0.23
7	0.1

s	f(s)
0	0
1	0
2	0
3	1
4	3
5	4
6	6
7	7

Al primer valor de $f(r)$ le
corresponde el primer
valor de $f(s)$ y así
sucesivamente.



Facultad de Ingeniería

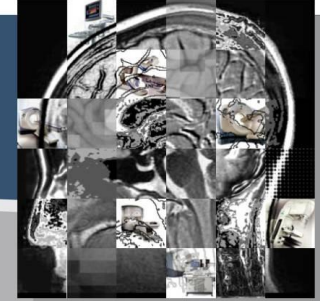
Universidad Nacional Autónoma de México

Nos queda:

r	f(r) org	f(s)
0	0	
1	0.2	3
2	0	
3	0.27	4
4	0	0
5	0.2	5
6	0.23	6
7	0.1	7

Reorganizando, tenemos:

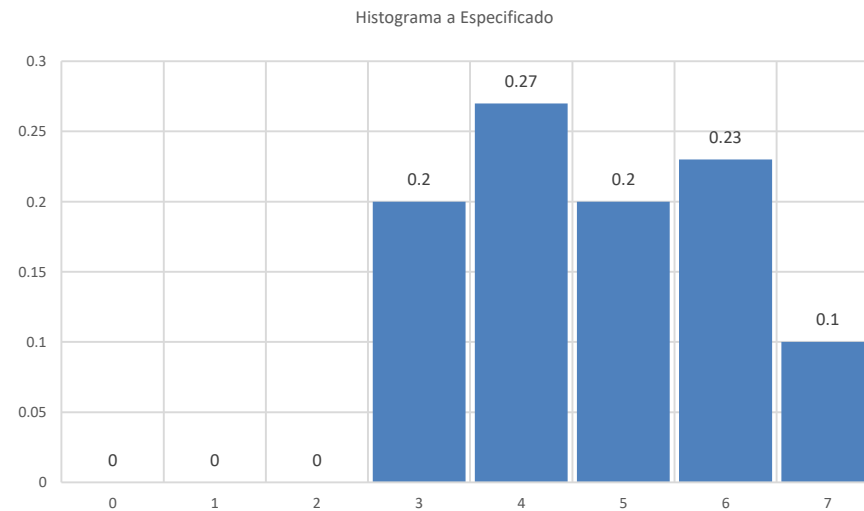
r	f(s)
0	0
1	0
2	0
3	0.2
4	0.27
5	0.2
6	0.23
7	0.1

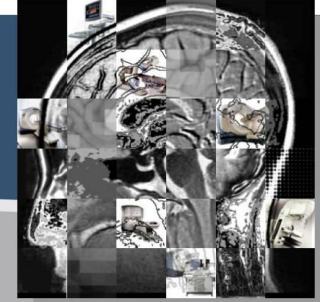


Facultad de Ingeniería

Universidad Nacional Autónoma de México

Siendo su histograma:





El comando `histeq` permite especificar el histograma a la imagen de entrada, la sintaxis es la siguiente:

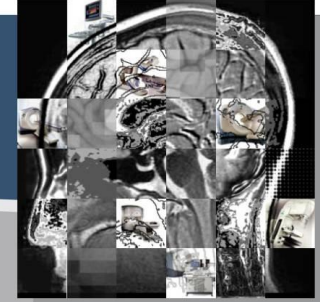
$B = \text{histeq}(A, pz);$

donde:

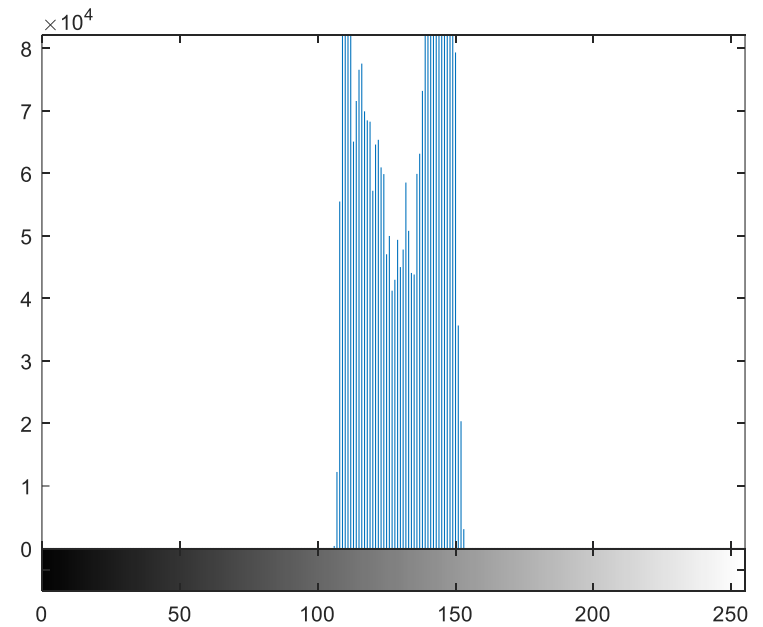
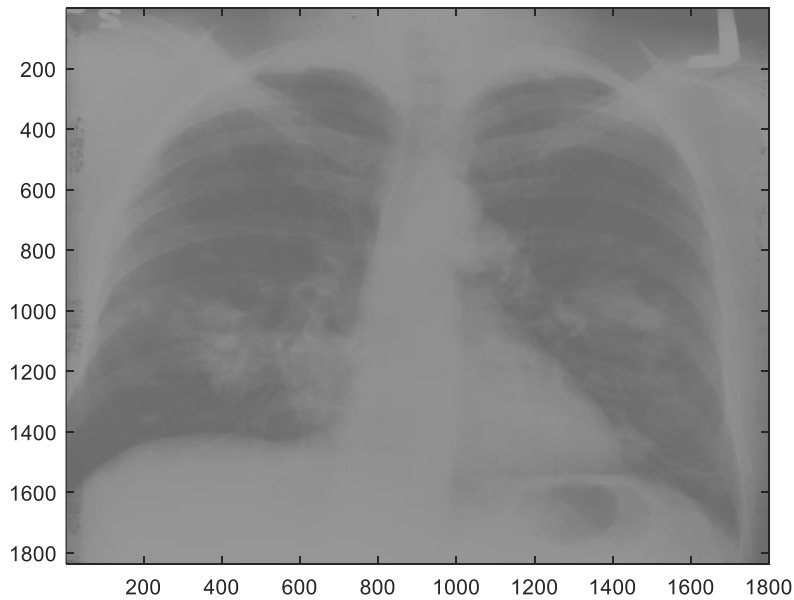
A.- Es la imagen de entrada.

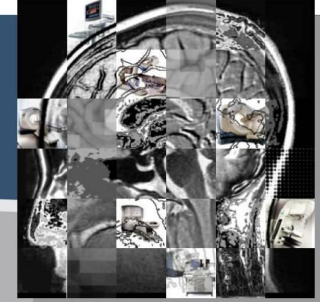
pz.- Es la función ecualizadora, la cual cumple con la condición que su área bajo la curva es igual a 1, esta función puede tener N niveles de gris.

B.- Es la imagen resultante.

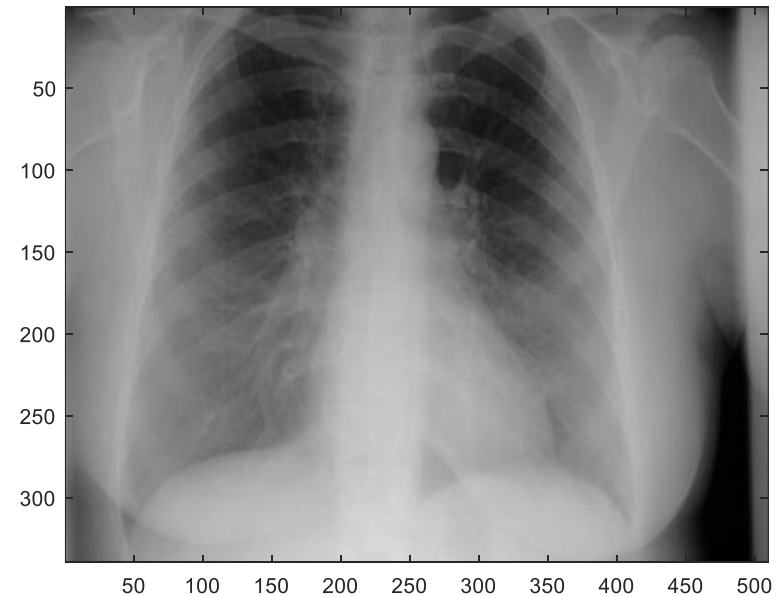
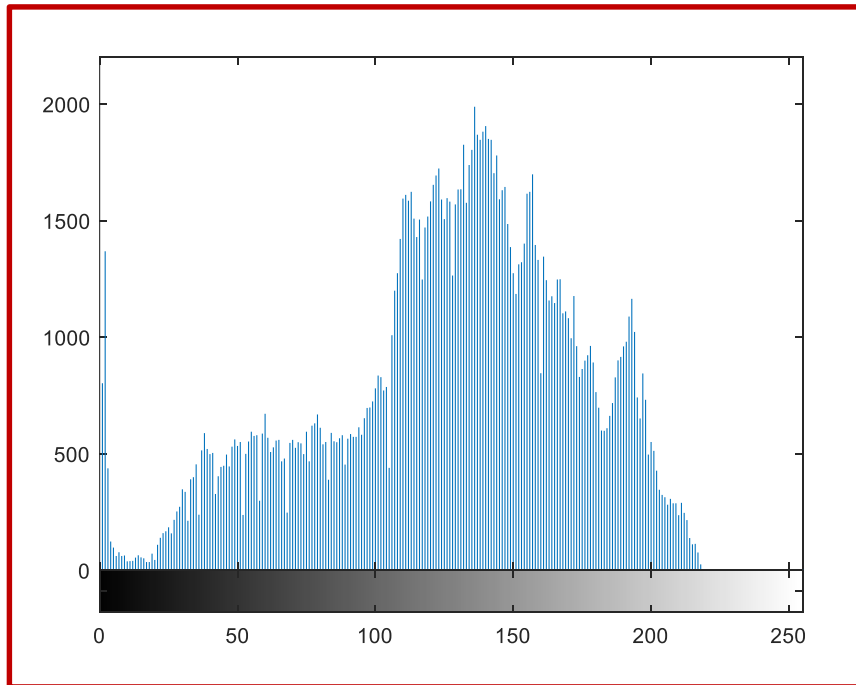


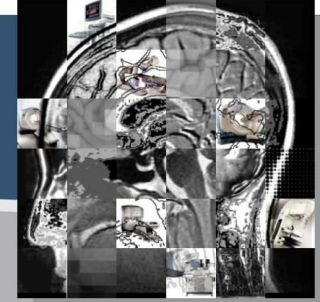
Tenemos la imagen y su histograma:





Queremos especificar la imagen anterior con el histograma de la imagen:





Haciendo uso de: $B = \text{histeq}(A, pz)$; tenemos:

