数学分析笔记

管思桐

目录

1 多元函数的微分学

1.1 隐函数定理

定义 若 $D \subset \mathrm{R}^2$ 是一个区域，$F(x,y)$ 是 D 上的一个二元函数，而且 $F(x_0,y_0)=0,(x_0,y_0)\in D$，如果在 (x_0,y_0) 附近，由方程

$$F(x,y)=0$$

可以唯一确定一个函数 $y=f(x)$ 使得 $f(x_0)=y_0$，$F(x,f(x))=0, x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，则称 $f(x)$ 是由 $F(x,y)=0$ 确定的**隐函数**。

例 $y^5+7y-x^3=0$

例 Kepler 方程：

$$y-\varepsilon\sin y-x=0$$

例 $F(x,y)=x^2+y^2-1$

定理 设 $F(x,y)$ 满足以下条件：

(1) $F(x_0,y_0)=0$;

(2) 在 $D=\{(x,y):|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\}$ 上，$F\in C(D)$ 且 $\partial_x F,\partial_y F\in C(D)$;

(3) $\partial_y F(x_0,y_0)\neq 0$,

则 $\exists\rho>0,\eta>0$ 使得

(1) $x\in(x_0-\rho,x_0+\rho)$，方程 $F(x,y)=0$ 在 $(y_0-\eta,y_0+\eta)$ 中有唯一解 $y=f(x)$;

(2) $f(x_0)=y_0$;

(3) $f(x)\in C((x_0-\rho,x_0+\rho))$;

(4) $f(x)$ 在 $(x_0-\rho,x_0+\rho)$ 上连续可导，而且

$$f'(x)=-\frac{\partial_x F(x,f(x))}{\partial_y F(x,f(x))}, x\in(x_0-\rho,x_0+\rho).$$

证明. 利用

1. 导数 $>0 \Rightarrow$ 函数严格单调增加;

2. 连续函数的介值定理

Step 1 存在性：不妨设 $\partial_y F(x_0, y_0) > 0$，则由于 $\partial_y F \in C(D)$，故 $\exists 0 < \alpha \le a, 0 < \beta \le b$ 使得 $\partial_y F(x_0, y_0)$ 在 $D^* = \{(x, y) : |x - x_0| \le \alpha, |y - y_0| \le \beta\}$ 上 >0。由于 $\partial_y F(x_0, y) > 0, |y - y_0| \le \beta$, 故 $F(x_0, y)$ 在 $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ 上严格单调增加，又 $F(x_0, y_0) = 0$，故 $F(x_0, y_0 - \beta) < 0, F(x_0, y_0 + \beta) > 0$. 又 $F(x, y_0 - \beta), F(x, y_0 + \beta)$ 在 $[x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$ 上连续，故 $\exists \rho \in (0, \alpha)$ 使得

$$F(x, y_0 + \beta) > 0, F(x, y_0 - \beta) < 0, x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$$

又 $\forall \bar{x} \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho), \partial_y F(\bar{x}, y) > 0, y \in [y_0 - \beta, y_0 + \beta], F(\bar{x}, y)$ 关于 y 在 $[y_0 - \beta, y_0 + \beta]$ 上严格单调增加，故 $\exists! \bar{y} \in (y_0 - \beta, y_0 + \beta)$ 试得 $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. 记 $\bar{y} = f(\bar{x})$

Step 2 $f(x)$ 在 $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ 上连续：任取 $\bar{x} \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$，我们根据定义证明 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 处连续，即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 只要 $|x - \bar{x}| < \delta$ 且 $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$，就有 $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$.

由于 $F(\bar{x}, f(\bar{x})) = 0$，而且 $F(\bar{x}, y)$ 关于 y 严格单调增加，所以

$$F(\bar{x}, f(\bar{x}) + \varepsilon) > 0, F(\bar{x}, f(\bar{x}) - \varepsilon) < 0$$

又 $F(x, f(\bar{x}) + \varepsilon), F(x, f(\bar{x}) - \varepsilon)$ 在 $(x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ 上连续，故 $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, s.t.$

$$F(x, f(\bar{x}) + \varepsilon) > 0, F(x, f(\bar{x}) - \varepsilon) < 0, |x - \bar{x}| < \delta, x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$$

由 $F(x, y)$ 关于 y 严格单调增加，故

$$f(\bar{x}) - \varepsilon < f(x) < f(\bar{x}) + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$$

（**Note:**f 连续性不需要 $F(x, y)$ 关于 x 可偏导这一条件）

连续性的另一个证明 任取 $\bar{x} \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$，取 Δx 足 $0 < |\Delta x| << 1, s.t. \bar{x} + \Delta x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. 由于

$$F(\bar{x}, f(\bar{x})) = 0, F(\bar{x} + \Delta x, f(\bar{x} + \Delta x)) = 0,$$

故

$$\begin{aligned}
0 =& F(\bar{x} + \Delta x, f(\bar{x} + \Delta x)) - F(\bar{x}, f(\bar{x})) \\
=& F(\bar{x} + \Delta x, f(\bar{x} + \Delta x)) - F(\bar{x} + \Delta x, f(\bar{x})) + F(\bar{x} + \Delta x, f(\bar{x})) - F(\bar{x}, f(\bar{x})) \\
=& \partial_y F(\bar{x} + \Delta x, \theta f(\bar{x} + \Delta x) + (1 - \theta) f(\bar{x}))[f(\bar{x} + \Delta x) - f(\bar{x})] + F(\bar{x} + \Delta x, f(\bar{x})) - F(\bar{x}, f(\bar{x}))
\end{aligned}$$

由于 $F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}))-F(\bar{x}, f(\bar{x}))\in D^*$，故 $\neq 0$, 从而

$$f(\bar{x}+\Delta x)-f(\bar{x})=-\frac{F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}))-F(\bar{x}, f(\bar{x}))}{\partial_y F(\bar{x}+\Delta x, \theta f(\bar{x}+\Delta x)+(1-\theta)f(\bar{x}))}$$

故

$$|f(\bar{x}+\Delta x)-f(\bar{x})|\leq\frac{|F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}))-F(\bar{x}, f(\bar{x}))|}{m}$$

其中 $m=\inf_{x\in D^*}\partial_y F>0$. 所以 $\lim_{\Delta x\to 0} f(\bar{x}+\Delta x)-f(\bar{x})=0$.

Step 3 f 在 $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ 上可偏导：任取 $\bar{x}\in(x_0-\rho, x_0+\rho)$, 取 Δx 满足 $0<|\Delta x|<<1, s.t.\bar{x}+\Delta x\in(x_0-\rho, x_0+\rho)$. 由于

$$F(\bar{x}, f(\bar{x}))=0, F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}+\Delta x))=0,$$

同理有

$$\begin{aligned}0=&F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}+\Delta x))-F(\bar{x}, f(\bar{x}))\\=&\partial_x F(\bar{x}+\theta\Delta x, \theta f(\bar{x}+\Delta x)+(1-\theta)f(\bar{x}))\Delta x\\&+\partial_y F(\bar{x}+\theta\Delta x, \theta f(\bar{x}+\Delta x)+(1-\theta)f(\bar{x}))[f(\bar{x}+\Delta x)-f(\bar{x})]\end{aligned}$$

从而

$$\frac{f(\bar{x}+\Delta x)-f(\bar{x})}{\Delta x}=-\frac{\partial_x F(\bar{x}+\theta\Delta x, \theta f(\bar{x}+\Delta x)+(1-\theta)f(\bar{x}))}{\partial_y F(\bar{x}+\theta\Delta x, \theta f(\bar{x}+\Delta x)+(1-\theta)f(\bar{x}))}$$

即

$$f'(\bar{x})=-\frac{\partial_x F(\bar{x}, f(\bar{x}))}{\partial_y F(\bar{x}, f(\bar{x}))}.$$

□

Note:

(1) 隐函数定理是一个局部性定理，即只在 (x_0, y_0) 的一个邻域内成立；

(2) $\partial_y F(x_0, y_0)\neq 0$ 只是充分条件。例：$F(x,y)=y^3-x=0$ 在 $(0,0)$ 附近唯一确定隐函数，但 $\partial_y F(0,0)=0$;

(3) 定理中的 x 与 y 的地位是平等的，即如果 $\partial_y F(x_0, y_0)\neq 0$, 则在 (x_0, y_0) 的一个邻域中，$F(x,y)=0$ 可以唯一确定一个隐函数 $x=g(y)(F(g(y),y)=0)$;

(4) 只是存在唯一性，可微性，但一般情况下很难写出 $f(x)$ 的显示表达式；

(5) **推论** 高阶可微性 (C^k)：

若 $F\in C^k(D)$，则 $f(x)\in C^k((x_0-\rho,x_0+\rho))$,$k=1,2,\cdots$. 若 $F\in C^\omega(D)$，[1]则 $f(x)\in C^\omega(D)$

证明. 利用归纳法证明 $f(x)\in C^k((x_0-\rho,x_0+\rho))$：

当 $F\in C^1(D)$ 时，$f'(x)=-\frac{\partial_x F(x,f(x))}{\partial_y F(x,f(x))}, x\in(x_0-\rho,x_0+\rho)$, 此时 $f\in C^1((x_0-\rho,x_0+\rho))$.

当 $F\in C^2(D)$ 时，$\partial_x F,\partial_y F\in C^1(D)$, 由复合函数的可微性知 $f'(x)\in C^1((x_0-\rho,x_0+\rho))$ 也即 $f(x)\in C^2((x_0-\rho,x_0+\rho))$.

假设 $F\in C^k(D)\Rightarrow f(x)\in C^k((x_0-\rho,x_0+\rho))$。那么 $F\in C^{k+1}(D)$ 时，有 $\partial_x F,\partial_y F\in C^k(D)$，故 $\frac{\partial_x F(x,f(x))}{\partial_y F(x,f(x))}\in C^k(x_0-\rho,x_0+\rho)$，即 $f'(x)\in C^k(x_0-\rho,x_0+\rho)$，于是 $f(x)\in C^{k+1}((x_0-\rho,x_0+\rho))$.

$f(x)\in C^\omega(D)$ 的证明比较困难，这里从略。 □

(6) 若将 $\partial_y F(x_0,y_0)\neq 0$ 换成：$\forall\bar{x}\in[x_0-\alpha,x_0+\alpha], F(\bar{x},y)$ 关于 y 是严格单调增加的，则也 $\exists!$ 连续隐函数（也即只假设 $F\in C(D), F(x_0,y_0)=0$）。

多元隐函数定理 设 $n+1$ 元函数 $F(\boldsymbol{x},y)$（$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$）满足：

(1) $F(\boldsymbol{x}_0,y_0)=0$;

(2) 记 $D=\{(\boldsymbol{x},y):|x_i-x_i^0|\le a,|y-y_0|\le b,i=1,2,\cdots,n\}, F\in C^1(D)$;

(3) $\partial_y F(\boldsymbol{x}_0,y_0)\neq 0$

则 $\exists\rho>0,\eta>0$，使得

(i) $\forall\boldsymbol{x}_0\in O(\bar{x}_0,\rho)$, 方程 $F(\boldsymbol{x}_0,y_0)=0$ 在 $(y_0-\eta,y_0+\eta)$ 中存在唯一解 $f(\boldsymbol{x})$;

(ii) $f(\boldsymbol{x}_0)=y_0$;

(iii) $f\in C(O(\boldsymbol{x}_0,\rho))$;

(iv) $f\in C^1(O(\boldsymbol{x}_0,\rho))$ 且

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}=-\frac{\partial_{x_i}F(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))}{\partial_y F(\boldsymbol{x},f(\boldsymbol{x}))}.$$

[1] $f\in C^\omega(D)$：f 为解析函数

(iv) 的证明：由 $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))=0$ 知：

$$
\begin{aligned}
&\partial_{x_i} F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))+\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=0 \\
\Rightarrow & \frac{\partial f}{\partial x_i}=-\frac{\partial_{x_i} F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))}{\partial_y F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))}.
\end{aligned}
$$

求导方法 $F(x, f(x))=0, x \in (x_0-\rho, x_0+\rho), f(x_0)=y_0$，关于 x 求导得：

$$
\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))+\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \frac{\partial f}{\partial x}(x)=0 \tag{1}
$$

$$
0 \Rightarrow f'(x)=-\frac{\partial_x F(x, f(x))}{\partial_y F(x, f(x))} \tag{2}
$$

从而可得 $f'(x_0)$ 的值。

二阶导可以直接由式(2)$f'(x)$ 出发求导；或可根据式(1)：

$$
0=\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, f(x))+2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) f'(x)+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, f(x))(f'(x))^2+\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) f''(x)
$$

从而得到 $f''(x)$ 以及 $f''(x_0)$.

多元隐函数的求导方法

$$
F(x_1, x_2, \cdots, x_n, f(x_1, x_2, \cdots, x_n))=0, x \in O(\boldsymbol{x}_0, \rho) \tag{3}
$$

对(3)关于 x_i 求偏导得：

$$
\partial_{x_i} F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))+\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})=0 \tag{4}
$$

从而

$$
\frac{\partial f}{\partial x_i}=-\frac{\partial_{x_i} F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))}{\partial_y F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))}, i=1,2, \cdots, n \tag{5}
$$

若 $F \in C^2$，则 $f \in C^2(O(\boldsymbol{x}_0, \rho))$，对(4)关于 x_j 求偏导，有：

$$
\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))+\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial y}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x})+\frac{\partial^2 F}{\partial x_j \partial y}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) \tag{6}
$$

$$
+\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \frac{\partial f}{\partial x_j}(\boldsymbol{x}) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x})+\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x})=0 \tag{7}
$$

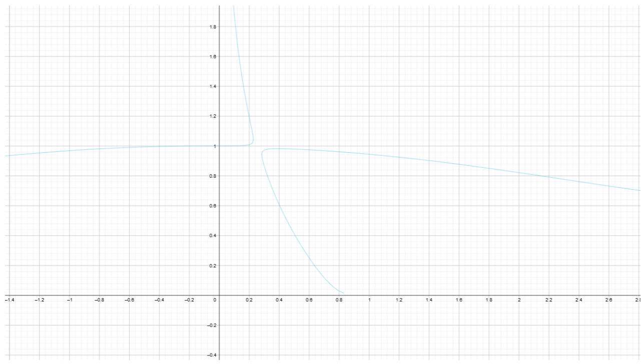

图 1: 函数图像

例 $\sin x+(1-x)\ln y-xy^3=0$（函数图像参见1）

解：$F(x,y)=\sin x+(1-x)\ln y-xy^3=0$,$F(0,1)=0,\partial_y F(0,1)=\left(\frac{1-x}{y}-3xy^2\right)\Big|_{(0,1)}=1$,$F(1,(\sin 1)^{1/5})=0,\partial_y F(1,(\sin 1)^{1/5})=\left(\frac{1-x}{y}-3xy^2\right)\Big|_{1,(\sin 1)^{1/5}}=-3(\sin 1)^{2/5}$. 可以利用隐函数求导求出函数图像的部分点.

例 $x^2+y^2+z^2=4z$，确定 z 为 x,y 的函数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$（课本例题）

解：关于 x,y 分别求偏导数，得：

$$2x+2z\frac{\partial z}{\partial x}=4\frac{\partial z}{\partial x} \tag{8a}$$

$$2y+2z\frac{\partial z}{\partial y}=4\frac{\partial z}{\partial y} \tag{8b}$$

从上式中可解出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$. 下面可以对(8a)和(8b)对 x 求偏导得到 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ 的值。

几点补充

1. 唯一性的另一个证明（归一法）：

   证明. 假设 $f_1(x),f_2(x)$ 是由 $F(x,y)=0$ 在 (x_0,y_0) 的一个邻域中确定的两个隐函数，即 $F(x,f_1(x))=F(x,f_2(x))=0$; $f_1(x_0)=f_2(x_0)=y_0$,$|f_1(x)-y_0|<\eta,|f_2(x)-y_0|<\eta,x\in O(x_0,\rho)$(下面利用中值定理证明：)

   $$\Rightarrow 0=F(x,f_1(x))-F(x,f_2(x))=\partial_y F(x,\theta f_1(x)+(1-\theta)f_2(x))[f_1(x)-f_2(x)],$$

$\theta \in (0,1)$。由于 $\partial_y F(x, \theta f_1(x) + (1-\theta) f_2(x)) \neq 0, x \in O(x_0, \rho)$，故 $f_1(x) = f_2(x), x \in O(x_0, \rho)$ □

2. 存在性的另一个证明（Picard 迭代）：

   Step 1 构造 Picard 序列；

   Step 2 $\{y_n(x)\}$ 在 $O(x_0, \rho)$ 上一致收敛。

一元向量值函数的隐函数定理　设 $F(x, y_1, y_2), G(x, y_1, y_2)$ 满足以下条件：

(1) $F(x_0, y_1^0, y_2^0) = G(x_0, y_1^0, y_2^0) = 0$;

(2) $D = \{(x, y_1, y_2) : |x - x_0| < a, |y_1 - y_1^0| < b_1, |y_2 - y_2^0| < b_2\}; F, G$ 在 D 上连续，而且有连续偏导数；

(3) Jacobi 行列式不为零：

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y_1,y_2)}(x_0, y_1^0, y_2^0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \frac{\partial G}{\partial y_1} & \frac{\partial G}{\partial y_2} \end{vmatrix} (x_0, y_1^0, y_2^0) \neq 0$$

则 $\exists \rho > 0, \eta > 0, s.t.$

(i) $\forall x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$，方程

$$\begin{cases} F(x, y_1, y_2) = 0 \\ G(x, y_1, y_2) = 0 \end{cases}$$

在 $O(\boldsymbol{y}_0, \eta)$ 中有唯一解 (其中 $\boldsymbol{y}_0 = (y_1^0, y_2^0)$)，记为 $\boldsymbol{y}(x) = (y_1(x), y_2(x))$;

(ii) $\boldsymbol{y}(x_0) = \boldsymbol{y}_0$;

(iii) $\boldsymbol{y}(x) \in C^1(O(x_0, \rho))$(连续可微;$\boldsymbol{y}(x) \in C^1$ 意为 $y_1(x), y_2(x) \in C^1$);

(iv) 而且

$$\begin{pmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \frac{\partial G}{\partial y_1} & \frac{\partial G}{\partial y_2} \end{pmatrix}^{-1} (x, \boldsymbol{y}(x)) \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial x} \end{pmatrix} (x, \boldsymbol{y}(x)).$$

证明.（思想：消元法）由于

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \frac{\partial G}{\partial y_1} & \frac{\partial G}{\partial y_2} \end{vmatrix} (x_0, y_1^0, y_2^0) \neq 0,$$

故 $(\frac{\partial G}{\partial y_1}, \frac{\partial G}{\partial y_2}) \neq (0,0)$；不妨设 $\frac{\partial G}{\partial y_2} \neq 0$. 又 $G(x_0, y_1, y_2)$ 在 (x, y_1^0, y_2^0) 的一个邻域，于是满足隐函数定理条件，即：

(1) $G(x_0, y_1^0, y_2^0) = 0$;

(2) G 在 D 上连续可微；

(3) $\frac{\partial G}{\partial y_2}(x_0, y_1^0, y_2^0) \neq 0$

由隐函数定理知 $\exists \tilde{\rho} > 0, \tilde{\eta} > 0$ 以及隐函数 $h(x, y_1)$ 满足：

(i) $h(x_0, y_1^0) = y_2^0$;

(ii) $G(x, y_1, h(x, y_1)) = 0, (x, y_1) \in O((x_0, y_1^0), \tilde{\rho})$;

(iii) $h(x, y_1) \in C^1(O((x_0, y_1^0), \tilde{\rho}))$;

(iv) $\frac{\partial h}{\partial y_1}(x, y_1) = -\frac{\frac{\partial G}{\partial y_1}(x,y,h(x,y_1))}{\frac{\partial G}{\partial y_2}(x,y,h(x,y_1))}, |h(x, y_1) - y_2^0| < \tilde{\eta}, \forall (x, y_1) \in O((x_0, y_1^0), \tilde{\rho})$

令 $H(x, y_1) = F(x, y_1, h(x, y_1))$，则

(i) $H(x_0, y_1^0) = F(x_0, y_1^0, h(x_0, y_1^0)) = F(x_0, y_1^0, y_2^0) = 0$;

(ii) 令 $D = \{(x, y_1) : |x - x_0| \leq \frac{\tilde{\rho}}{2}, |y - y_0| \leq \frac{\tilde{\rho}}{2}\}$, 则 $H(x, y_1)$ 在 D 上连续可微（利用复合函数）;

(iii)

$$\frac{\partial H}{\partial y_1}(x_0, y_1^0) = \frac{\partial F}{\partial y_1}(x_0, y_1^0, y_2^0) + \frac{\partial F}{\partial y_2}(x_0, y_1^0, y_2^0)\frac{\partial h}{\partial y_1}(x_0, y_1^0) = \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y_1,y_2)}(x_0, y_1^0, y_2^0)}{\frac{\partial G}{\partial y_2}(x_0, y_1^0, y_2^0)} \neq 0$$

对 $H(x, y_1)$ 用隐函数定理，得：$\exists \rho > 0, \eta > 0$ 以及隐函数 $y_1(x) \in C^1(O(x_0, \rho))$, 满足:

(i) $y_1(x_0) = y_1^0, H(x, y_1(x)) = 0, |y_1(x) - y_1^0| < \eta, \forall x \in O(x_0, \rho)$;

(ii) 连续可微；

(iii) 可偏导（且有公式，不写了）。

令 $y_2(x) = h(x, y_1(x)), x \in O(x_0, \rho)$, 则 $y_2(x_0) = h(x_0, y_1(x_0)) = h(x_0, y_1^0) = y_2^0$，而且 $y_2(x) \in C^1(O(x_0, \rho))$.

又因为 $F(x, y_1(x), y_2(x)) = F(x, y_1(x), h(x, y_1(x))) = 0, \forall x \in O(x_0, \rho)$, 同理 $G(x, y_1(x), y_2(x)) = G(x, y_1(x), h(x, y_1(x))) = 0, \forall x \in O(x_0, \rho)$；从而我们证明了定理中的存在性以及 (ii)(iii).

唯一性的证明：若 $\boldsymbol{z}_1(x), \boldsymbol{z}_2(x)$ 是[2]由

$$\begin{cases} F(x, \boldsymbol{y}) = 0 \\ G(x, \boldsymbol{y}) = 0 \end{cases}$$

在 $(x_0, \boldsymbol{y}_0)$ 的一个邻域中有确定的两个隐函数，则

$$\begin{cases} F(x, \boldsymbol{z}_1(x)) = F(x, \boldsymbol{z}_2(x)) = 0 \\ G(x, \boldsymbol{z}_1(x)) = G(x, \boldsymbol{z}_2(x)) = 0 \end{cases}$$

若直接用类似二元函数 $f(x, y)$ 的证明的中值定理（见“几点补充”)：

$$0 = F(x, \boldsymbol{z}_1(x)) - F(x, \boldsymbol{z}_2(x)) = \nabla_{\boldsymbol{y}} F(x, \theta \boldsymbol{z}_1(x) + (1-\theta)\boldsymbol{z}_2(x))(\boldsymbol{z}_1(x) - \boldsymbol{z}_2(x)) \tag{9a}$$

$$0 = G(x, \boldsymbol{z}_1(x)) - G(x, \boldsymbol{z}_2(x)) = \nabla_{\boldsymbol{y}} G(x, \tilde{\theta} \boldsymbol{z}_1(x) + (1-\tilde{\theta})\boldsymbol{z}_2(x))(\boldsymbol{z}_1(x) - \boldsymbol{z}_2(x)) \tag{9b}$$

由于 θ 和 $\tilde{\theta}$ 不一定相等，故不能用这种方法证明（我们想要利用“Jacobi 矩阵行列式不为零”这一条件证明)。

所以我们用 Taylor 公式：

$$\begin{aligned} 0 =& F(x, \boldsymbol{z}_1(x)) - F(x, \boldsymbol{z}_2(x)) \qquad (10) \\ =& \nabla_{\boldsymbol{y}} F(x, \boldsymbol{z}_2(x))(\boldsymbol{z}_1(x) - \boldsymbol{z}_2(x)) + o(||\boldsymbol{z}_1(x) - \boldsymbol{z}_2(x)||) \quad (x \to x_0) \qquad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 =& G(x, \boldsymbol{z}_1(x)) - G(x, \boldsymbol{z}_2(x)) \qquad (12) \\ =& \nabla_{\boldsymbol{y}} G(x, \boldsymbol{z}_2(x))(\boldsymbol{z}_1(x) - \boldsymbol{z}_2(x)) + o(||\boldsymbol{z}_1(x) - \boldsymbol{z}_2(x)||) \quad (x \to x_0) \qquad (13) \end{aligned}$$

从而

$$\boldsymbol{z}_1(x) - \boldsymbol{z}_2(x) = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \frac{\partial G}{\partial y_1} & \frac{\partial G}{\partial y_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} o_1(||\boldsymbol{z}_1(x) - \boldsymbol{z}_2(x)||) \\ o_2(||\boldsymbol{z}_1(x) - \boldsymbol{z}_2(x)||) \end{pmatrix}, x \to x_0,$$

两边取模，因

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2} \\ \frac{\partial G}{\partial y_1} & \frac{\partial G}{\partial y_2} \end{vmatrix}^{-1}$$

为有界量，而

$$\begin{vmatrix} o_1(||\boldsymbol{z}_1(x) - \boldsymbol{z}_2(x)||) \\ o_2(||\boldsymbol{z}_1(x) - \boldsymbol{z}_2(x)||) \end{vmatrix}$$

[2]发现这里 z 和 $\boldsymbol{z}$ 差别不大。。但注意以下均为粗体的 $\boldsymbol{z}$；另外下面行向量和列向量可能有点乱，可以稍微注意一下哈哈

是关于 $||\boldsymbol{z}_1(x)-\boldsymbol{z}_2(x)||$ 的高阶无穷小；故当 $x\to x_0$ 时有

$$\begin{vmatrix}\frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2}\\ \frac{\partial G}{\partial y_1} & \frac{\partial G}{\partial y_2}\end{vmatrix}^{-1}\begin{vmatrix}o_1(||\boldsymbol{z}_1(x)-\boldsymbol{z}_2(x)||)\\ o_2(||\boldsymbol{z}_1(x)-\boldsymbol{z}_2(x)||)\end{vmatrix}\le\frac{1}{2}||\boldsymbol{z}_1(x)-\boldsymbol{z}_2(x)||,$$

从而 $x\to x_0$ 时，有：

$$||\boldsymbol{z}_1(x)-\boldsymbol{z}_2(x)||\le\frac{1}{2}||\boldsymbol{z}_1(x)-\boldsymbol{z}_2(x)||,$$

从而只能有 $||\boldsymbol{z}_1(x)-\boldsymbol{z}_2(x)||=0$，即 $\boldsymbol{z}_1(x)=\boldsymbol{z}_2(x)$.

求导方法：设 $y_1(x),y_2(x)$ 是由方程组

$$\begin{cases}F(x,y_1,y_2)=0\\ G(x,y_1,y_2)=0\end{cases}$$

在 (x_0,y_1^0,y_2^0) 的一个邻域内确定的隐函数，则有

$$\begin{cases}F(x,y_1,y_2)=0\\ G(x,y_1,y_2)=0\end{cases},\forall x\in O(x_0,\rho),$$

对上式关于 x 求导得：

$$\begin{cases}\frac{\partial F}{\partial x}(x,\boldsymbol{y}(x))+\frac{\partial F}{\partial y_1}(x,\boldsymbol{y}(x))y_1'(x)+\frac{\partial F}{\partial y_2}(x,\boldsymbol{y}(x))y_2'(x)=0\\ \frac{\partial G}{\partial x}(x,\boldsymbol{y}(x))+\frac{\partial G}{\partial y_1}(x,\boldsymbol{y}(x))y_1'(x)+\frac{\partial G}{\partial y_2}(x,\boldsymbol{y}(x))y_2'(x)=0\end{cases}$$

从而

$$\begin{pmatrix}y_1'(x)\\ y_2'(x)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial y_1} & \frac{\partial F}{\partial y_2}\\ \frac{\partial G}{\partial y_1} & \frac{\partial G}{\partial y_2}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial F}{\partial x}\\ \frac{\partial G}{\partial x}\end{pmatrix}(x,\boldsymbol{y}(x)),x\in O(x_0,\rho)$$

□

Note 求导可以达到线性化的目的。

例 课本例题 12.4.4。设 $\begin{cases}y=y(x)\\ z=z(x)\end{cases}$ 是由方程组 $\begin{cases}z=xf(x+y)\\ F(x,y,z)=0\end{cases}$ 所确定的向量值隐函数，其中 f 和 F 分别具有连续的导数和偏导数，求 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$.

解：两边关于 x 求偏导。

n 元 m 维向量值隐函数定理 考虑如下方程组：

$$\begin{cases} F_1(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0 \\ F_2(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0 \\ \cdots \\ F_m(x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m)=0 \end{cases}$$

记

$$\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial y_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial y_1} & \frac{\partial F_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial y_m} \end{vmatrix}$$

称为 $F_1,\cdots,F_m$ 关于 $y_1,\cdots,y_m$ 的 Jacobi 行列式。引入记号 $\boldsymbol{x}=(x_1,\cdots,x_n),\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_m),\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\begin{pmatrix} F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \\ \vdots \\ F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \end{pmatrix}$。于是如果 $\boldsymbol{F}$ 满足：

(1) $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=0$;

(2) 在 $D=\{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):|x_i-x_i^0|\le a_i,|y_j-y_j^0|\le b_j,i=1,\cdots,n,j=1,\cdots,m\}$ 连续，而且有连续偏导数；

(3) $\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\neq 0$,

则 $\exists\rho>0,\eta>0$ 使得：

(i) $\forall\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x}_0,\rho)$，方程 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ 在 $O(\boldsymbol{y}_0,\eta)$ 中有唯一解，记为 $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})$;

(ii) $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{y}_0$;

(iii) $\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x})\in C^1(O(\boldsymbol{x}_0,\rho))$，而且 $\boldsymbol{y}'(\boldsymbol{x})=-\left(\nabla_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}\right)^{-1}\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}(\boldsymbol{x}))$, 其中

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}=\begin{pmatrix} \nabla_{\boldsymbol{x}}F_1 \\ \vdots \\ \nabla_{\boldsymbol{x}}F_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial F_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

证明. 参见史济怀/徐森林。 □

下面我们用线性方程组的角度大致理解条件“Jacobi 矩阵行列式不为零”：在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 附近对 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 做 Taylor 展开：

$$F_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=F_1(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\nabla_{\boldsymbol{x}}F_1(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)\nabla_{\boldsymbol{y}}F_1(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)+h_1(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

$$\vdots$$

$$F_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=F_m(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)+(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)\nabla_{\boldsymbol{x}}F_m(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)+(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)\nabla_{\boldsymbol{y}}F_m(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)+h_m(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$$

从而（因 $F_i(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)=0, i=1,\cdots,m$）

$$0=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\nabla_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}),$$

于是隐函数存在就等价于

$$0=\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\nabla_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \tag{14}$$

其中

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})-\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)-\nabla_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0),$$

方程(14)的线性近似方程为:

$$\nabla_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\nabla_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)=0 \tag{15}$$

方程(15)对 $\forall\boldsymbol{x}\in\mathrm{R}^n$ 可解 $\Leftrightarrow \nabla_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 可逆。

这里用到了以下（描述不太严谨的）定理：“线性方程可解”+“非线性扰动 $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ 满足 $||\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1)-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)||\le\varepsilon||\boldsymbol{y}_1-\boldsymbol{y}_2||,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_1),(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}_2)$ 在 $(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)$ 附近” $\Longrightarrow$ 非线性方程可解。

Note

1. 局部性；
2. $\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\neq 0$ 只是充分条件；
3. C^k- 可微性：若 $\boldsymbol{F}\in C^k(D)$，则 $\boldsymbol{y}(x)\in C^k(O(\boldsymbol{x}_0,\rho)),k=1,\cdots,k$；若 $\boldsymbol{F}\in C^\omega(D)$，则 $\boldsymbol{y}(x)\in C^\omega(O(\boldsymbol{x}_0,\rho))$（实解析函数）；
4. 地位对称性，即 $x_1,\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m$ 是平等的。例：如果 $\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(x_1,\cdots,x_m)}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\neq 0$，则 $x_1,\cdots,x_m$ 可表示为 $x_{m+1},\cdots,x_n,y_1,\cdots,y_m$ 的函数。

1.2 逆映射定理

回顾：若 $f \in C^1((a,b))$ 且 $f'(x_0) \neq 0$，则 $\exists x_0$ 的一个邻域 $O(x_0,\rho)$ 和 $y_0 = f(x_0)$ 的一个邻域 $O(y_0,\eta)$ 使得

(i) f 在 $O(x_0,\rho)$ 上单射，而且 $f(O(x_0,\rho)) = O(y_0,\eta)$（存在）;

(ii) 记 g 是 f 在 $O(y_0,\eta)$ 上的反函数，$g \in C^1(O(y_0,\eta))$（连续可微）;

(iii) $g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}, \forall y \in O(y_0,\eta)$.

下面考虑多元：若

$$\begin{cases} f_1(x_1,\cdots,x_n) = y_1 \\ \vdots \\ f_n(x_1,\cdots,x_n) = y_n \end{cases}$$

而且 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{y}_0$，Q:在什么条件下，$x_1,\cdots,x_n$ 可写成 $y_1,\cdots,y_n$ 的函数?

局部逆映射定理 设 $D \subset \mathrm{R}^n$ 是一个区域，$\boldsymbol{x}_0 \in D, \boldsymbol{f}: D \to \mathrm{R}^n$ 满足以下条件:

(1) $\boldsymbol{f} \in C^1(D)(\boldsymbol{f} = (f_1,\cdots,f_n))$;

(2) $\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$;

记 $\boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)$，则存在 $\boldsymbol{x}_0$ 的一个邻域 U 以及 $\boldsymbol{y}_0$ 的一个邻域 V, 使得:

(i) $\boldsymbol{f}$ 在 U 上是单射，而且 $\boldsymbol{f}(U) = V$(此时反函数存在唯一);

(ii) 记 $\boldsymbol{g}$ 是 $\boldsymbol{f}$ 在 U 上的逆映射，则 $\boldsymbol{g} \in C^1(V)$(连续可微性);

(iii) $\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})))^{-1}, \forall \boldsymbol{y} \in V$(此时 $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{y}, \forall \boldsymbol{y} \in V; \boldsymbol{g} \circ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}, \forall \boldsymbol{x} \in U$)(Jacobi 矩阵的逆矩阵)

证明. 考虑 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{y}(F_i(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = f_i(\boldsymbol{x}) - y_i, i = 1,\cdots,n)(D \times \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^n)$, 则 $\boldsymbol{f} \in C^1(D \times \mathrm{R}^n)$, 而且 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0) - \boldsymbol{y}_0 = 0, \frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(\boldsymbol{x}_0) \neq 0$, 由隐函数定理知: $\exists \rho > 0, \eta > 0$, 以及唯一的隐函数 $\boldsymbol{g} \in C^1(O(\boldsymbol{y}_0,\rho))$,s.t.:

(i) $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_0) = \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{F}(\boldsymbol{g}(y),\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})) - \boldsymbol{y} = 0, \forall \boldsymbol{y} \in O(\boldsymbol{y}_0,\rho), ||\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{x}_0|| < \eta$. 令 $V = O(\boldsymbol{y}_0,\rho), U = \boldsymbol{g}(V)$, 则 $\boldsymbol{g} \in C^1(V)$;

(ii) 而且 $\boldsymbol{f}(U)=V, \boldsymbol{f}$ 在 U 上是单射（In fact, if $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_1)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in U$，则 $\exists \boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in V$,s.t.$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_1)=\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}_2)=\boldsymbol{x}_2$, 则有 $\boldsymbol{y}_1=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y_1})=\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y_2})=\boldsymbol{y}_2 \Rightarrow \boldsymbol{x}_1=\boldsymbol{x}_2$.

(iii) 下面证明：U 是开集。Claim:$U=O(\boldsymbol{x}_0,\eta)\cap(\boldsymbol{f})^{-1}(V)$，其中 $(\boldsymbol{f})^{-1}(V)$ 是 V 的原像，即 $(\boldsymbol{f})^{-1}(V)=\{\boldsymbol{x}\in D:\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\in V\}$. 首先显然有 $U\subset O(\boldsymbol{x}_0,\eta)\cup(\boldsymbol{f})^{-1}(V)$; 反之，$\forall\tilde{\boldsymbol{x}}\in O(\boldsymbol{x}_0,\eta)\cup(\boldsymbol{f})^{-1}(V)$, 有 $||\tilde{\boldsymbol{x}}-\boldsymbol{x}_0||<\eta$ 且 $\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})\in V$(因为第一条，有唯一性)，故 $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})\in U$(由唯一性，只能有 $\boldsymbol{g}\circ\boldsymbol{f}(\tilde{\boldsymbol{x}})=\tilde{\boldsymbol{x}}$), 所以 $O(\boldsymbol{x}_0,\eta)\cup(\boldsymbol{f})^{-1}(V)\subset U$. 又因为 $O(\boldsymbol{x}_0,\eta)$ 与 $(\boldsymbol{f})^{-1}(V)$（连续映射把开集映为开集）都是开集，所以 U 是开集。

(iv) 求导方法：由 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))=\boldsymbol{y},\forall\boldsymbol{y}\in V$，两边关于 y 求导得：

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}))\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})=I(\text{单位矩阵})\Rightarrow\boldsymbol{g}'(\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y})))^{-1},\forall\boldsymbol{y}\in V.$$

(v) C^k 可微性：若 $\boldsymbol{f}\in C^k(D),\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ 可逆，则 $\boldsymbol{g}\in C^k(V),k=1,2,\cdots$(这一点容易得到)；若 $\boldsymbol{f}\in C^\omega(D),\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)$ 可逆，则 $\boldsymbol{g}\in C^\omega(V)$(这一点不容易证明)；

(vi) 关于单射的理解：当 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 在 $\boldsymbol{x}_0$ 附近时，有

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0)+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0)-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0),$$

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0)+\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0)+\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y}),\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}_0)-\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{y}_0)(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{y}_0),$$

两式相减，若 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y})$，则

$$\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0)(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}),$$

从而

$$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}=(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0))^{-1}[\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})]$$
$$\Rightarrow||\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}||\le||(\boldsymbol{f}'(\boldsymbol{x}_0))^{-1}||\cdot||\boldsymbol{h}(\boldsymbol{y})-\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x})||,$$

类似1.1的理由知此时只能有 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}$.

□

回顾： 若 $f\in C^1(a,b)$ 且 $f'(x)\neq 0,\forall x\in(a,b)$, 则 f^{-1} 在 $(f(a),f(b))$(or $(f(b),f(a))$) 上存在。Q: 若 $\boldsymbol{f}\in C^1(D)$ 且 $\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(\boldsymbol{x}_0)\neq 0,\forall\boldsymbol{x}\in D$，那么 $\boldsymbol{f}$ 是否在 D 上是单射？

A: 当 $n\ge 2$ 时一般不对。**例：**

$$\boldsymbol{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$$

$$(x,y)\mapsto(\mathrm{e}^x\cos y,\mathrm{e}^x\sin y)$$

不是单射，而且

$$\frac{\partial(f_1,f_2)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\mathrm{e}^x\cos y & -\mathrm{e}^x\sin y\\ \mathrm{e}^x\sin y & \mathrm{e}^x\cos y\end{vmatrix}=\mathrm{e}^{2x}\neq 0,\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

遗留问题

a（延拓问题：）隐函数存在区间有多大？

b The behavior of Implicit function?

总结

1. 一元隐函数定理 $(\partial_y F(x_0,y_0)\neq 0)$;
2. 多元隐函数定理 $(\partial_y F(\boldsymbol{x}_0,y_0)\neq 0)$;
3. 一元二维向量值隐函数定理 $(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y_1,y_2)}(x_0,\boldsymbol{y}_0)\neq 0)$;
4. n 元 m 维向量值隐函数定理 $(\frac{\partial(F_1,\cdots,F_m)}{\partial(y_1,\cdots,y_m)}(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{y}_0)\neq 0)$;
5. 逆映射定理 $(\frac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(x_1,\cdots,x_n)}(\boldsymbol{x}_0)\neq 0)$.

要求

1. 会计算隐函数的导数（隐式微分法）;
2. 掌握定理的条件及结论（注意一下偏导不为零的条件），了解证明。

理论 $\begin{cases}\text{偏导数（方向导数）与全微分的概念，求导方法（+、-、×、÷，复合）}\\ \text{中值定理及 Taylor 公式}\\ \text{隐函数定理及逆映射定理}\end{cases}$

应用 $\begin{cases}\text{在几何中的应用——微分几何}\\ \text{极值}\end{cases}$

1.3 偏导数在几何中的应用

1. 空间曲线的切线方程与法平面方程：关键是求出切向量；
2. 曲面的法线方程与法平面方程：关键是求出法向量；
3. 曲线在交点处的夹角，曲面在交线一点处的夹角。

1.3.1 空间曲线的切向量和法平面

1. 参数表示

   切向量与切线方程：设 $(x(t), y(t), z(t)), t \in [a, b]$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的一条曲线，记为 Γ；而且 $x(t), y(t), z(t) \in C^1([a, b]), (x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2 \neq 0, \forall t \in [a, b]$。取一点 $P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)) \in \Gamma$, 计算 P_0 处的切线方程（切线定义为割线的极限）。设 $P(x(t), y(t), z(t))$ 是曲线上异于 P_0 的一点，则割线 $\overline{PP_0}$ 的方程为：

   $$\frac{x - x_0}{x(t) - x(t_0)} = \frac{y - y_0}{y(t) - y(t_0)} = \frac{z - z_0}{z(t) - z(t_0)},$$

   同时除以 $t - t_0$，有：

   $$\frac{x - x_0}{\frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0}} = \frac{y - y_0}{\frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0}} = \frac{z - z_0}{\frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0}},$$

   令 $t \to t_0$，得：

   $$\frac{x - x_0}{x'(t)} = \frac{y - y_0}{y'(t)} = \frac{z - z_0}{z'(t)}, \tag{16}$$

   即为切线方程。说明：若 $x'(t_0) = 0$，则方程(16)变为 $\begin{cases} x = x_0 \\ \frac{y - y_0}{y'(t)} = \frac{z - z_0}{z'(t)} \end{cases}$；若 $x'(t_0) = y'(t_0) = 0$，则(16)变为 $\begin{cases} x = x_0 \\ y = y_0 \end{cases}$.

   也可这样推导：Γ 在 P_0 点处的切向量为 $(x'(t), y'(t), z'(t))$, 则 Γ 过 P_0 点的切线方程为（切线方程与切向量平行）：

   $$\frac{x - x_0}{x'(t)} = \frac{y - y_0}{y'(t)} = \frac{z - z_0}{z'(t)}, \tag{17}$$

   法平面方程：Γ 在 P_0 点处的法平面方程为（直接利用点积为零）：

   $$(x - x_0)x'(t_0) + (y - y_0)y'(t_0) + (z - z_0)z'(t_0) = 0. \tag{18}$$

2. 显示方程

设曲线 Γ 由 $\begin{cases} y = y(x) \\ z = z(x) \end{cases}, x \in (a,b)$ 给出，取 $P_0(x_0, y(x_0), z(x_0)) \in \Gamma$，则 Γ 在 P_0 点的切向量为 $(1, y'(x_0), z'(x_0))$，故 Γ 在 P_0 点的切线方程为

$$x - x_0 = \frac{y - y_0}{y'(x_0)} = \frac{z - z_0}{z'(x_0)},$$

Γ 在 P_0 点的法平面方程为

$$x - x_0 + (y - y_0)y'(x_0) + (z - z_0)z'(x_0) = 0.$$

3. 隐式表示

设曲线 Γ 由两张曲面相交而成，方程为

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0 \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}, (x,y,z) \in D, \text{且} F \in C^1(D), G \in C^1(D).$$

此时设 $D_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Gamma$, 而且 $\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x}(D_0) & \frac{\partial F}{\partial y}(D_0) & \frac{\partial F}{\partial z}(D_0) \\ \frac{\partial G}{\partial x}(D_0) & \frac{\partial G}{\partial y}(D_0) & \frac{\partial G}{\partial z}(D_0) \end{pmatrix}$ 满秩，计算 Γ 在 P_0 点处的切向量。

此时不妨设 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0) \neq 0$，则由隐函数定理知 $\exists \rho > 0$ 以及 $y(x) \in C^1(O(x_0,\rho)), z(x) \in C^1(O(x_0,\rho))$ 使得

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ z(x_0) = z_0 \end{cases} \text{且} \begin{cases} F(x, y(x), z(x)) = 0 \\ G(x, y(x), z(x)) = 0 \end{cases}, x \in o(x_0, \rho)$$

因此 Γ 在 P_0 点的一个邻域中，Γ 的方程可由 $(x, y(x), z(x))$ 给出，$x \in O(x_0,\rho)$，从而 Γ 在 P_0 点的切向量为 $(1, y'(x_0), z'(x_0))$, 且

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y'(x_0) \\ z'(x_0) \end{pmatrix} &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{pmatrix}^{-1} (P_0) \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial x} \end{pmatrix} (P_0) = -\frac{\begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial z} & -\frac{\partial F}{\partial z} \\ -\frac{\partial G}{\partial y} & \frac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial G}{\partial x} \end{pmatrix} (P_0)}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0)} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0)} & \frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0)} \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

从而 Γ 在 P_0 点的切向量为

$$\left(\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0), \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0), \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)\right).$$

另一种方法：设 Γ 的参数方程为 $(x(t), y(t), z(t))$, 而且 $P_0(x_0, y_0, z_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$，又因为

$$\begin{cases} F(x(t), y(t), z(t)) = 0 \\ G(x(t), y(t), z(t)) = 0 \end{cases},$$

关于 t 求偏导后再将 $t = t_0$ 带入，有：

$$\begin{cases} F_x(P_0)x'(t_0) + F_y(P_0)y'(t_0) + F_z(P_0)z'(t_0) = 0 \\ G_x(P_0)x'(t_0) + G_y(P_0)y'(t_0) + G_z(P_0)z'(t_0) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \perp (F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)), (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) \perp (G_x(P_0), G_y(P_0), G_z(P_0))$

所以

$$\begin{aligned} &(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)) // (F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)) \times (G_x(P_0), G_y(P_0), G_z(P_0)) \\ =&\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{z} \\ F_x(P_0) & F_y(P_0) & F_z(P_0) \\ G_x(P_0) & G_y(P_0) & G_z(P_0) \end{vmatrix} = \left(\tfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}(P_0), \tfrac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}(P_0), \tfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}(P_0)\right) \end{aligned}$$

1.3.2 曲面的切平面与法线

关键是计算法向量

(1) 隐式方程：设曲面 S 的方程为

$$F(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in D \subset \mathbb{R}^2,$$

而且 $F \in C^1(D), F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 \neq 0, \forall (x, y, z) \in D$. 取 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in S$,欲计算 S 在 P_0 处的切平面方程与法线方程。任取 S 上过点 P_0 的一条曲线 $(x(t), y(t), z(t))$, 设 $P_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$. 显然有

$$F(x(t), y(t), z(t)) = 0, t \in O(t_0, \rho)$$

与3同理有

$$(F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)) \perp (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)),$$

因此 S 上过 P_0 的所有曲线在 P_0 处的切线落在一个平面 π 上，称 π 为 S 在 P_0 点的切平面，$\boldsymbol{n}=(F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0))$ 称为 S 在 P_0 点的法向量。所以 S 在 P_0 处的切平面方程为：

$$F_x(P_0)(x-x_0)+F_y(P_0)(y-y_0)+F_z(P_0)(z-z_0)=0; \tag{19}$$

S 在 P_0 处的法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{F_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{F_z(P_0)}. \tag{20}$$

(2) 显示表示：设曲面 S 的方程为 $z=f(x,y),(x,y)\in D\subset \mathrm{R}^2$，令 $F(x,y,z)=f(x,y)-z$，则 S 的方程为 $F(x,y,z)=0$。从而在 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0))=(f_x(P_0),f_y(P_0),-1)$

或：设 $(x(t),y(t),z(t))$ 在 S 上，则 $z(t)=f(x(t),y(t))\Rightarrow z'(t)=f_x(P_0)x'(t_0)+f_y(P_0)y'(t_0)$；从而 $(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\perp(f_x(P_0),f_y(P_0),-1)$，从而 $(f_x(P_0),f_y(P_0),-1)$ 是法向量。

从而 S 在 P_0 处的切平面方程为：

$$f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)-(z-z_0)=0 \tag{21}$$

或可写作

$$\begin{aligned} z=&z_0+f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)\\ =&f(x_0,y_0)+f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)\end{aligned}$$

回忆 Taylor 展开：

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(P_0)(x-x_0)+f_y(P_0)(y-y_0)+o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}) \tag{22}$$

从而可微也即可用切平面逼近。S 在 P_0 处的法线方程为：

$$\frac{x-x_0}{f_x(P_0)}=\frac{y-y_0}{f_y(P_0)}=\frac{z-z_0}{-1}. \tag{23}$$

(3) 参数方程：设曲面 S 的参数方程为 $\begin{cases}x=x(u,v)\\ y=y(u,v)\\ z=z(u,v)\end{cases}$ $,(u,v)\in D\subset\mathrm{R}^2$，而且 $\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v}\end{pmatrix}(u,v)$

在 D 上满秩，取 $U-$ 曲线 $\begin{cases}x=x(u,v_0)\\ y=y(u,v_0)\\ z=z(u,v_0)\end{cases}$ ，则在 P_0 处的切向量为

$$\left(\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial z}{\partial u}(u_0,v_0)\right);$$

取 $V-$ 曲线 $\begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \\ z = z(u_0, v) \end{cases}$，则在 P_0 处的切向量为

$$\left(\frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0), \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\right),$$

从而 S 在 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量为

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right)(u_0, v_0) \times \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v}\right)(u_0, v_0) \\ =&\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{z} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right). \end{aligned}$$

或利用反函数定理推导：设曲面 S 的参数方程为 $\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases}$，$(u, v) \in D \subset \mathrm{R}^2$，而且 $\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{pmatrix}(u, v)$ 在 D 上满秩。设 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in S$，对应于 (u_0, v_0)（即 $\begin{cases} x = x(u_0, v_0) \\ y = y(u_0, v_0) \\ z = z(u_0, v_0) \end{cases}$，不妨设 $\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}(u_0, v_0) \neq 0$，于是由逆映射定理知：$\exists \rho > 0$ 以及 $\tilde{f}, \tilde{g} \in C^1(O((x_0, y_0), \rho))$,s.t.

$$\begin{cases} \tilde{f}(x_0, y_0) = u_0 \\ \tilde{g}(x_0, y_0) = v_0 \end{cases} \text{以及} \begin{cases} x = f(\tilde{f}(x, y), \tilde{g}(x, y)) \\ y = g(\tilde{f}(x, y), \tilde{g}(x, y)) \end{cases}, (x, y) \in O((x_0, y_0), \rho)$$

这样，曲面 S 在 $O((x_0, y_0), \rho)$ 上有显示表达式 $z = h(\tilde{f}(x, y), \tilde{g}(x, y)) := k(x, y)$。从而在 P_0 点的法向量为 $\left(\frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0), -1\right)$。又因为

$$\frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x}(x_0, y_0) + \frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial \tilde{g}}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial h}{\partial u}(u_0, v_0)\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial h}{\partial v}(u_0, v_0)\frac{\partial \tilde{g}}{\partial y}(x_0, y_0)$$

从而

$$\left(\frac{\partial k}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial k}{\partial y}(x_0,y_0)\right)=\left(\frac{\partial h}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial h}{\partial v}(u_0,v_0)\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial \tilde f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial \tilde f}{\partial y}(x_0,y_0)\\ \frac{\partial \tilde g}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial \tilde g}{\partial y}(x_0,y_0)\end{pmatrix}$$
$$=\left(\frac{\partial h}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial h}{\partial v}(u_0,v_0)\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial \tilde f}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial \tilde f}{\partial v}(u_0,v_0)\\ \frac{\partial \tilde g}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial \tilde g}{\partial v}(u_0,v_0)\end{pmatrix}^{-1}$$
$$=\left(\frac{\partial h}{\partial u}(u_0,v_0),\frac{\partial h}{\partial v}(u_0,v_0)\right)\frac{\begin{pmatrix}\frac{\partial \tilde g}{\partial v}(u_0,v_0) & -\frac{\partial \tilde f}{\partial v}(u_0,v_0)\\ -\frac{\partial \tilde g}{\partial u}(u_0,v_0) & \frac{\partial \tilde f}{\partial u}(u_0,v_0)\end{pmatrix}}{\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)}$$

所以在 P_0 处的法向量为 $\left(\frac{\partial(g,h)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0),\frac{\partial(h,f)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0),\frac{\partial(f,g)}{\partial(u,v)}(u_0,v_0)\right)$.

1.3.3 计算夹角

(1) 两条曲线在交点处的夹角是指两条曲线在交点处切向量的夹角。

设两条曲线 Γ_1,Γ_2 在 P_0 处相交，而且在 P_0 点的切向量分别为 $\boldsymbol{\tau}_1,\boldsymbol{\tau}_2$，则夹角 α 满足 $\cos\alpha=\frac{\boldsymbol{\tau}_1\cdot\boldsymbol{\tau}_2}{||\boldsymbol{\tau}_1||\cdot||\boldsymbol{\tau}_2||}$.

(2) 两张曲面在角线处上一点处的夹角是指它们在这点处的法向量的夹角。

例 圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与马鞍面 $bz=xy$ 的夹角（图像参考2）。

解：设 (x_0,y_0,z_0) 是交线上的一点，则圆柱面在 P_0 处的法向量为 $(2x_0,2y_0,0)$，马鞍面在 P_0 处的法向量为 $(y_0,x_0,-b)$。所以在 P_0 处的夹角 α 满足 $\cos\alpha=\frac{4x_0y_0}{\sqrt{4(x_0^2+y_0^2)}\sqrt{x_0^2+y_0^2+b^2}}=\frac{4x_0y_0}{a\sqrt{a^2+b^2}}$

1.4 条件极值——（最）优化问题

定义 设 $\Omega\in\mathbb{R}^n$ 是一个区域，$\boldsymbol{x}_0\in\Omega,f(\boldsymbol{x})$ 是 Ω 上的一个函数。如果 $\exists r>0$s.t.$O(\boldsymbol{x}_0,r)\subset\Omega$，而且 $f(\boldsymbol{x})\geq f(\boldsymbol{x}_0),\forall\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x}_0,r)$, 则称 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 在 Ω 上的极小值点，$f(\boldsymbol{x}_0)$ 称为相应的极小值；如果“$f(\boldsymbol{x})\geq f(\boldsymbol{x}_0),\forall\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x}_0,r)$” 换成”$f(\boldsymbol{x})>f(\boldsymbol{x}_0),\forall\boldsymbol{x}\in O(\boldsymbol{x}_0,r)\backslash\{\boldsymbol{x}_0\}$”，则称 $\boldsymbol{x}_0$ 为 f 在 Ω 上的一个严格极小（大）值点，相应的 $f(\boldsymbol{x}_0)$ 称为严格极小（大）值。“严格极小（大）值点”“严格极小（大）值”等定义类似。

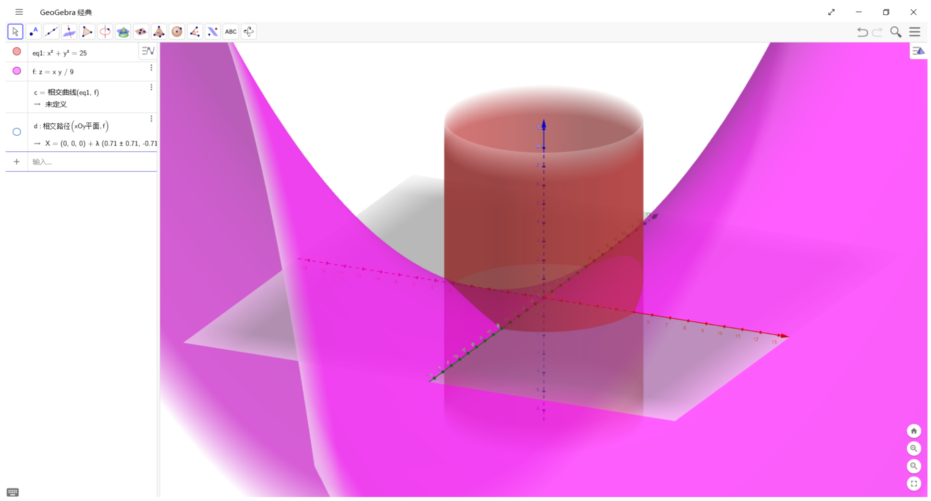

图 2: 交线

Q: 如何来求极值与极值点？

先来看必要条件：

回顾一元函数:

1. 若 $f \in C^1(a,b), x_0 \in (a,b)$ 是极值点，则 $f'(x_0) = 0$;
2. 若 $f \in C^2(a,b), x_0 \in (a,b)$ 是极小值点，则 $f''(x_0) \geq 0$; 若 x_0 是极大值点，则 $f''(x_0) \leq 0$;

定理 （n 元函数取值的必要条件）若 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是一个区域，$\boldsymbol{x}_0 \in \Omega, f \in C^1(\Omega)$

(1) 如果 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 在 Ω 上的一个极值点，则 $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = 0$(即 $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}_0) = 0, i = 1, 2, \cdots, n$);

(2) 若 $f \in C^2(\Omega), \boldsymbol{x}_0$ 是 f 在 Ω 上的一个极大值点，则 Hesse 矩阵 $Hf(\boldsymbol{x}_0) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\boldsymbol{x}_0)\right) \leq 0$，即 $Hf(\boldsymbol{x}_0)$ 是半负定矩阵；反之若为极小值点，则 $Hf(\boldsymbol{x}_0) \geq 0$，即 $Hf(\boldsymbol{x}_0)$ 是半正定矩阵。

证明. 方法 1：令 $g(t) = f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h})$，其中 $|t| < \rho, \boldsymbol{h} \in S^{n-1}$（单位球面），则 $g(t) \in C^1(-\rho, \rho)$，而且 $g(t) \geq g(0), \forall t \in (-\rho, \rho)$，所以 $g'(0) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{h}\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = 0, \forall \boldsymbol{h} \in S^{n-1}$，从而 $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = 0$.

若 $f \in C^2(\Omega)$, 则 $g \in C^2(-\rho, \rho)$；又当 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 在 Ω 上的极大值点时，0 是 g 在 $(-\rho, \rho)$ 上的极大值点，所以 $g''(0) \leq 0$。而

$$g'(t) = \boldsymbol{h}\nabla f(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) = \sum_{i=1}^{n} h_i \frac{\partial f}{\partial x_0}(\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h})$$

$$g''(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i \left(\sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h}) \right) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\boldsymbol{x}_0 + t\boldsymbol{h})$$

所以

$$g''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{h} \cdot Hf(\boldsymbol{x}_0) \boldsymbol{h}^T \le 0, \forall \boldsymbol{h} \in S^{n-1}$$

所以 $Hf(\boldsymbol{x}_0) \le 0$.

方法 2：若 $\boldsymbol{x}_0$ 是 f 在 Ω 上的一个极小值点，则 $f(\boldsymbol{x}_0 + \varepsilon \boldsymbol{h}) \ge f(\boldsymbol{x}_0), \forall |\varepsilon| < \rho, \boldsymbol{h} \in S^{n-1}$。又因为

$$f(\boldsymbol{x}_0 + \varepsilon \boldsymbol{h}) = f(\boldsymbol{x}_0) + \nabla f(\boldsymbol{x}_0) \cdot \varepsilon \boldsymbol{h} + \frac{1}{2} (\varepsilon \boldsymbol{h}) Hf(\boldsymbol{x}_0) (\varepsilon \boldsymbol{h})^T + o(\varepsilon^2) = f(\boldsymbol{x}_0) + \frac{\varepsilon^2}{2} \boldsymbol{h} Hf(\boldsymbol{x}_0) \boldsymbol{h}^T + o(\varepsilon^2)$$

我们有

$$\frac{\varepsilon^2}{2} \boldsymbol{h} Hf(\boldsymbol{x}_0) \boldsymbol{h}^T + o(\varepsilon^2) \ge 0, \forall |\varepsilon| < \rho, boldsymbol h \in S^{n-1}$$

$$Rightarrow \frac{1}{2} \boldsymbol{h} Hf(\boldsymbol{x}_0) \boldsymbol{h}^T + \frac{o(\varepsilon^2)}{\varepsilon^2} \ge 0, \forall \boldsymbol{h} \in S^{n-1}$$

令 $\varepsilon \to 0$，得 $\boldsymbol{h} Hf(\boldsymbol{x}_0) \boldsymbol{h}^T \ge 0, \forall \boldsymbol{h} \in S^{n-1}$, 所以 $Hf(\boldsymbol{x}_0) \ge 0$. □

例 若 $\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - f = 0, x^2 + y^2 < 1, \\ f|_{x^2+y^2=1} = 0 \end{cases}$, 则 $f \equiv 0$.

证明. 令 $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$. 若 $\exists (x_0, y_0) \in \Omega, s.t. f(x_0, y_0) = \max_\Omega |f| > 0$，则

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} (x_0, y_0) \le 0 \Rightarrow \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x_0, y_0) \le 0$$

从而 $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) (x_0, y_0) - f(x_0, y_0) < 0$，矛盾。 □

Note

1. 只是必要条件。例：$f(x, y) = xy$（图像见3），则 $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$，但是 $(0, 0)$ 不是 f 的极值点。又例：$f(x, y) = x^3 + y^3$（图像见4），则 $\nabla f(0, 0) = (0, 0), Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，但 $(0, 0)$ 不是极值点。例：$f(x, y) = 4xy^2 + x^2 + y^4$（图像见5），此时有 $\nabla f(0, 0) = (0, 0), Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ge 0$，但是 $(0, 0)$ 不是极值点。

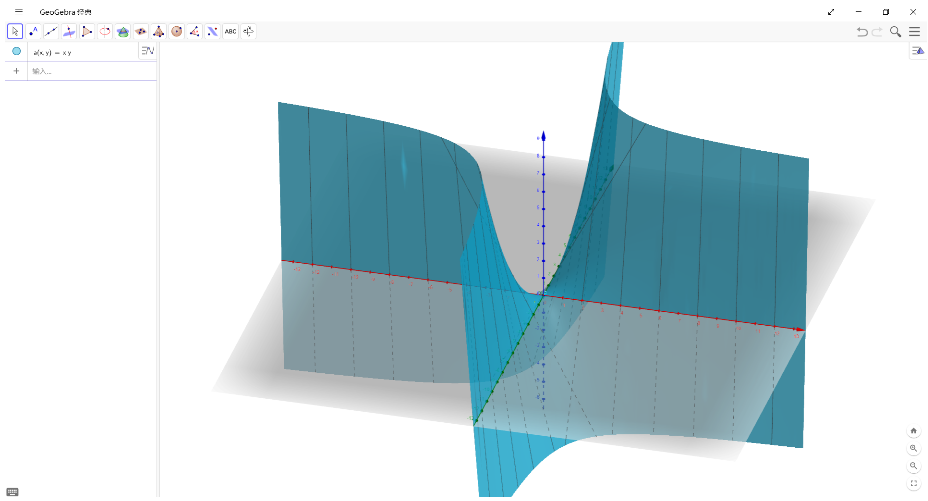

图 3: $f(x,y)=xy$

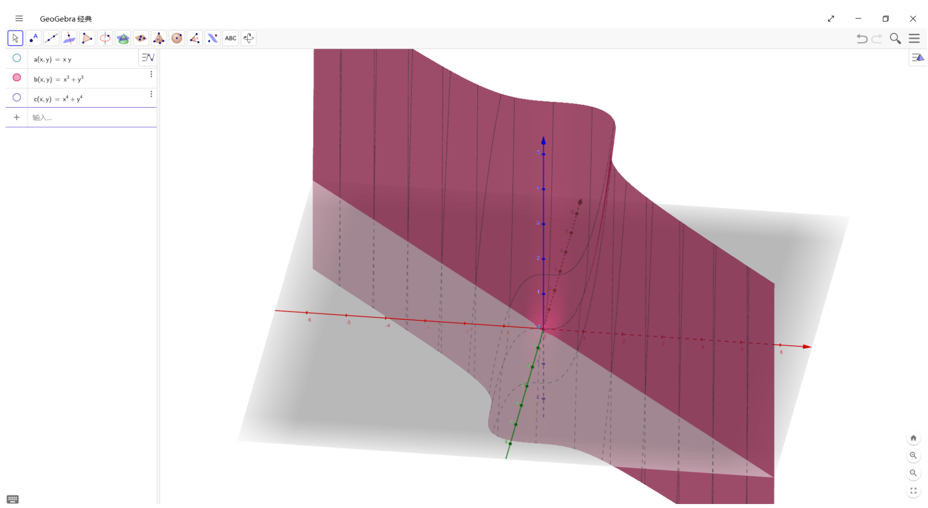

图 4: $f(x,y)=x^3+y^3$

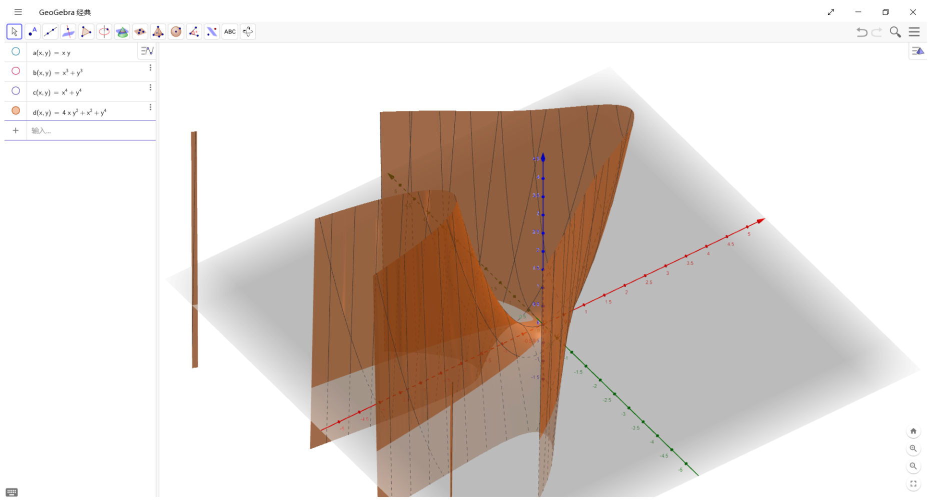

图 5: $f(x,y)=4xy^2+x^2+y^4$

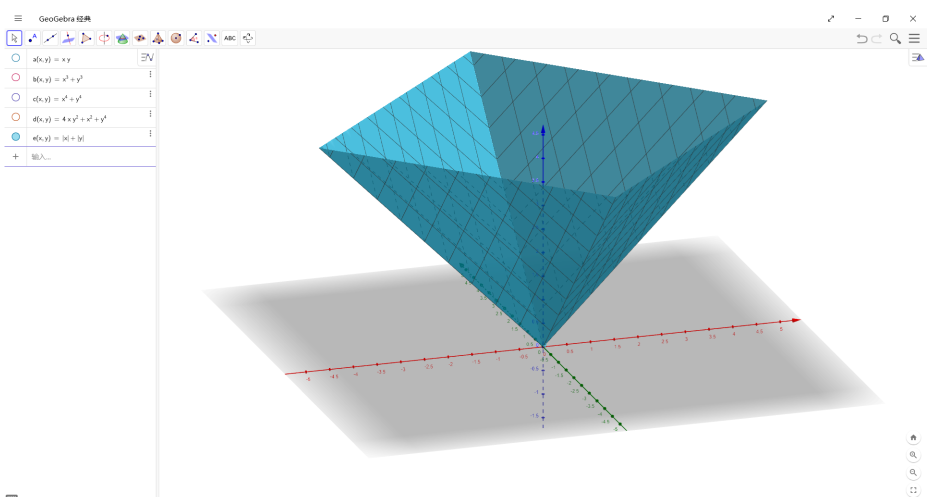

图 6: $f(x,y)=|x|+|y|$

2. 偏导数不存在的点又可能是极值点。例：$f(x,y)=|x|+|y|$（图像参考6）,$(0,0)$ 为其极小值，但 f 在 $(0,0)$ 处偏导数不存在。