数学分析笔记

管

目录

1 多元函数的微分学

1.1 隐函数定理

定义 若 $D \subset \mathrm{R}^2$ 是一个区域，$F(x,y)$ 是 D 上的一个二元函数，而且 $F(x_0,y_0)=0,(x_0,y_0)\in D$，如果在 (x_0,y_0) 附近，由方程

$$F(x,y)=0$$

可以唯一确定一个函数 $y=f(x)$ 使得 $f(x_0)=y_0$，$F(x,f(x))=0,x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)$，则称 $f(x)$ 是由 $F(x,y)=0$ 确定的**隐函数**。

例 $y^5+7y-x^3=0$

例 Kepler 方程：

$$y-\varepsilon\sin y-x=0$$

例 $F(x,y)=x^2+y^2-1$

定理 设 $F(x,y)$ 满足以下条件：

(1) $F(x_0,y_0)=0$

(2) 在 $D=\{(x,y):|x-x_0|\le a,|y-y_0|\le b\}$ 上，$F\in C(D)$ 且 $\partial_x F,\partial_y F\in C(D)$

(3) $\partial_y F(x_0,y_0)\neq 0$

则 $\exists\rho>0,\eta>0$ 使得

(1) $x\in(x_0-\rho,x_0+\rho)$，方程 $F(x,y)=0$ 在 $(x_0-\eta,x_0+\eta)$ 中有唯一解 $y=f(x)$

(2) $f(x_0)=y_0$

(3) $f(x)\in C((x_0-\rho,x_0+\rho))$

(4) $f(x)$ 在 $(x_0-\rho,x_0+\rho)$ 上连续可导，而且

$$f'(x)=-\frac{\partial_x F(x,f(x))}{\partial_y F(x,f(x))},x\in(x_0-\rho,x_0+\rho).$$

证明. 利用

1. 导数 $>0\Rightarrow$ 函数严格单调增加;
2. 连续函数的介值定理

Step 1 存在性：不妨设 $\partial_y F(x_0,y_0)>0$，则由于 $\partial_y F\in C(D)$，故 $\exists 0<\alpha\le a,0<\beta\le b$ 使得 $\partial_y F(x_0,y_0)$ 在 $D^*=\{(x,y):|x-x_0|\le\alpha,|y-y_0|\le\beta\}$ 上 >0。由于 $\partial_y F(x_0,y)>0,|y-y_0|\le\beta$, 故 $F(x_0,y)$ 在 $[y_0-\beta,y_0+\beta]$ 上严格单调增加，又 $F(x_0,y_0)=0$，故 $F(x_0,y_0-\beta)<0,F(x_0,y_0+\beta)>0$. 又 $F(x,y_0-\beta),F(x,y_0+\beta)$ 在 $[x_0-\alpha,x_0+\alpha]$ 上连续，故 $\exists\rho\in(0,\alpha)$ 使得

$$F(x,y_0+\beta)>0,F(x,y_0-\beta)<0,x\in[x_0-\rho,x_0+\rho]$$

又 $\forall\bar{x}\in(x_0-\rho,x_0+\rho),\partial_y F(\bar{x},y)>0,y\in[y_0-\beta,y_0+\beta],F(\bar{x},y)$ 关于 y 在 $[y_0-\beta,y_0+\beta]$ 上严格单调增加，故 $\exists!\bar{y}\in(y_0-\beta,y_0+\beta)$ 试得 $F(\bar{x},\bar{y})=0$. 记 $\bar{y}=f(\bar{x})$

Step 2 $f(x)$ 在 $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ 上连续：任取 $\bar{x}\in(x_0-\rho, x_0+\rho)$，我们根据定义证明 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 处连续，即 $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, 只要 $|x-\bar{x}|<\delta$ 且 $x\in(x_0-\rho, x_0+\rho)$，就有 $|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$.

由于 $F(\bar{x}, f(\bar{x}))=0$，而且 $F(\bar{x}, y)$ 关于 y 严格单调增加，所以

$$F(\bar{x}, f(\bar{x})+\varepsilon)>0, F(\bar{x}, f(\bar{x})-\varepsilon)<0$$

又 $F(x, f(\bar{x})+\varepsilon), F(x, f(\bar{x})-\varepsilon)$ 在 $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ 上连续，故 $\exists\delta=\delta(\varepsilon)>0, s.t.$

$$F(x, f(\bar{x})+\varepsilon)>0, F(x, f(\bar{x})-\varepsilon)<0, |x-\bar{x}|<\delta, x\in(x_0-\rho, x_0+\rho)$$

由 $F(x,y)$ 关于 y 严格单调增加，故

$$f(\bar{x})-\varepsilon<f(x)<f(\bar{x})+\varepsilon\Rightarrow|f(x)-f(\bar{x})|<\varepsilon$$

（**Note:**f 连续性不需要 $F(x,y)$ 关于 x 可偏导这一条件）

连续性的另一个证明： 任取 $\bar{x}\in(x_0-\rho, x_0+\rho)$，取 Δx 足 $0<|\Delta x|<<1, s.t.\bar{x}+\Delta x\in(x_0-\rho, x_0+\rho)$. 由于

$$F(\bar{x}, f(\bar{x}))=0, F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}+\Delta x))=0,$$

故

$$\begin{aligned}
0=&F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}+\Delta x))-F(\bar{x}, f(\bar{x}))\\
=&F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}+\Delta x))-F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}))+F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}))-F(\bar{x}, f(\bar{x}))\\
=&\partial_y F(\bar{x}+\Delta x, \theta f(\bar{x}+\Delta x)+(1-\theta)f(\bar{x}))[f(\bar{x}+\Delta x)-f(\bar{x})]+F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}))-F(\bar{x}, f(\bar{x}))
\end{aligned}$$

由于 $F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}))-F(\bar{x}, f(\bar{x}))\in D^*$，故 $\neq 0$, 从而

$$f(\bar{x}+\Delta x)-f(\bar{x})=-\frac{F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}))-F(\bar{x}, f(\bar{x}))}{\partial_y F(\bar{x}+\Delta x, \theta f(\bar{x}+\Delta x)+(1-\theta)f(\bar{x}))}$$

故

$$|f(\bar{x}+\Delta x)-f(\bar{x})|\leq\frac{|F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}))-F(\bar{x}, f(\bar{x}))|}{m}$$

其中 $m=\inf_{x\in D^*}\partial_y F>0$. 所以 $\lim_{\Delta x\to 0}f(\bar{x}+\Delta x)-f(\bar{x})=0$

Step 3 f 在 $(x_0-\rho, x_0+\rho)$ 上可偏导：任取 $\bar{x} \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$, 取 Δx 满足 $0 < |\Delta x| << 1, s.t. \bar{x}+\Delta x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$. 由于

$$F(\bar{x}, f(\bar{x})) = 0, F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}+\Delta x)) = 0,$$

同理有

$$\begin{aligned} 0 =& F(\bar{x}+\Delta x, f(\bar{x}+\Delta x)) - F(\bar{x}, f(\bar{x})) \\ =& \partial_x F(\bar{x}+\theta\Delta x, \theta f(\bar{x}+\Delta x) + (1-\theta) f(\bar{x}))\Delta x \\ &+ \partial_y F(\bar{x}+\theta\Delta x, \theta f(\bar{x}+\Delta x) + (1-\theta) f(\bar{x}))[f(\bar{x}+\Delta x) - f(\bar{x})] \end{aligned}$$

从而

$$\frac{f(\bar{x}+\Delta x) - f(\bar{x})}{\Delta x} = -\frac{\partial_x F(\bar{x}+\theta\Delta x, \theta f(\bar{x}+\Delta x) + (1-\theta) f(\bar{x}))}{\partial_y F(\bar{x}+\theta\Delta x, \theta f(\bar{x}+\Delta x) + (1-\theta) f(\bar{x}))}$$

即

$$f'(\bar{x}) = -\frac{\partial_x F(\bar{x}, f(\bar{x}))}{\partial_y F(\bar{x}, f(\bar{x}))}.$$

□

Note:

(1) 隐函数定理是一个局部性定理，即只在 (x_0, y_0) 的一个邻域内成立；

(2) $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$ 只是充分条件。例：$F(x,y) = y^3 - x = 0$ 在 $(0,0)$ 附近唯一确定隐函数，但 $\partial_y F(0,0) = 0$;

(3) 定理中的 x 与 y 的地位是平等的，即如果 $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$, 则在 (x_0, y_0) 的一个邻域中，$F(x,y) = 0$ 可以唯一确定一个隐函数 $x = g(y)(F(g(y), y) = 0)$;

(4) 只是存在唯一性，可微性，但一般情况下很难写出 $f(x)$ 的显示表达式；

(5) **推论** 高阶可微性 (C^k)：

若 $F \in C^k(D)$，则 $f(x) \in C^k((x_0-\rho, x_0+\rho))$,$k = 1, 2, \cdots$. 若 $F \in C^\omega(D)$，[1]则 $f(x) \in C^\omega(D)$

[1] $f \in C^\omega(D)$：f 为解析函数

证明. 利用归纳法证明 $f(x) \in C^k((x_0-\rho, x_0+\rho))$：

当 $F \in C^1(D)$ 时，$f'(x) = -\frac{\partial_x F(x,f(x))}{\partial_y F(x,f(x))}, x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$, 此时 $f \in C^1((x_0-\rho, x_0+\rho))$.

当 $F \in C^2(D)$ 时，$\partial_x F, \partial_y F \in C^1(D)$, 由复合函数的可微性知 $f'(x) \in C^1((x_0-\rho, x_0+\rho))$ 也即 $f(x) \in C^2((x_0-\rho, x_0+\rho))$.

假设 $F \in C^k(D) \Rightarrow f(x) \in C^k((x_0-\rho, x_0+\rho))$。那么 $F \in C^{k+1}(D)$ 时，有 $\partial_x F, \partial_y F \in C^k(D)$，故 $\frac{\partial_x F(x,f(x))}{\partial_y F(x,f(x))} \in C^k(x_0-\rho, x_0+\rho)$，即 $f'(x) \in C^k(x_0-\rho, x_0+\rho)$，于是 $f(x) \in C^{k+1}((x_0-\rho, x_0+\rho))$.

$f(x) \in C^\omega(D)$ 的证明比较困难，这里从略。 □

(6) 若将 $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$ 换成：$\forall \bar{x} \in [x_0-\alpha, x_0+\alpha], F(\bar{x}, y)$ 关于 y 是严格单调增加的，则也 $\exists!$ 连续隐函数（也即只假设 $F \in C(D), F(x_0, y_0) = 0$）。

多元隐函数定理 设 $n+1$ 元函数 $F(\boldsymbol{x}, y)$（$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$）满足：

1. $F(\boldsymbol{x}_0, y_0) = 0$;
2. 记 $D = \{(\boldsymbol{x}, y) : |x_i - x_i^0| \leq a, |y-y_0| \leq b, i = 1, 2, \cdots, n\}, F \in C^1(D)$;
3. $\partial_y F(\boldsymbol{x}_0, y_0) \neq 0$

则 $\exists \rho > 0, \eta > 0$，使得

(i) $\forall \boldsymbol{x}_0 \in O(\bar{x}_0, \rho)$, 方程 $F(\boldsymbol{x}_0, y_0) = 0$ 在 $(y_0-\eta, y_0+\eta)$ 中存在唯一解 $f(\boldsymbol{x})$;

(ii) $f(\boldsymbol{x}_0) = y_0$;

(iii) $f \in C(O(\boldsymbol{x}_0, \rho))$;

(iv) $f \in C^1(O(\boldsymbol{x}_0, \rho))$ 且
$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial_{x_i} F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))}{\partial_y F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))}.$$

(iv) 的证明：由 $F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) = 0$ 知：

$$\begin{aligned}&\partial_{x_i} F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x})) + \frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))\frac{\partial f}{\partial x_i}(\boldsymbol{x}) = 0\\ \Rightarrow &\frac{\partial f}{\partial x_i} = -\frac{\partial_{x_i} F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))}{\partial_y F(\boldsymbol{x}, f(\boldsymbol{x}))}.\end{aligned}$$