

2019 交大競技程式訓練冬令營
NCTU_Fox

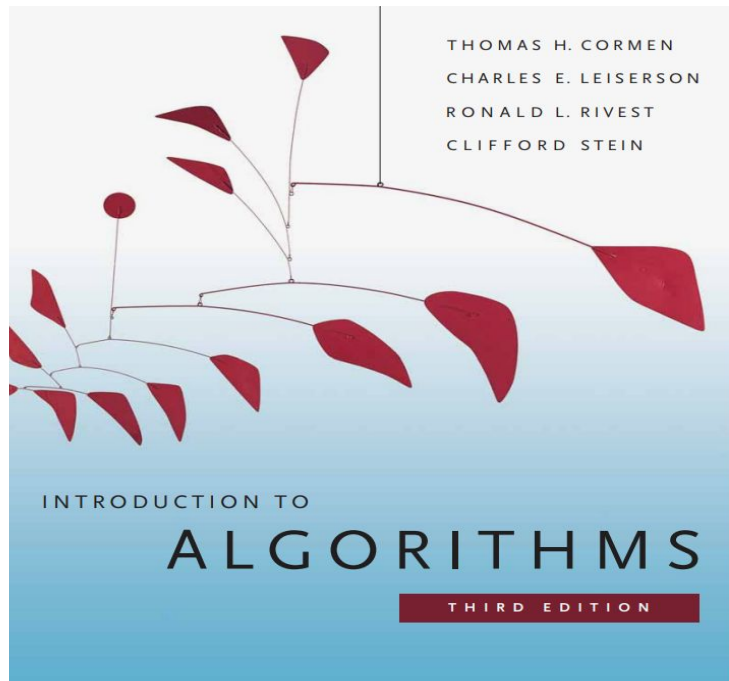
警告

前方大量破梗，請斟酌服用

大綱

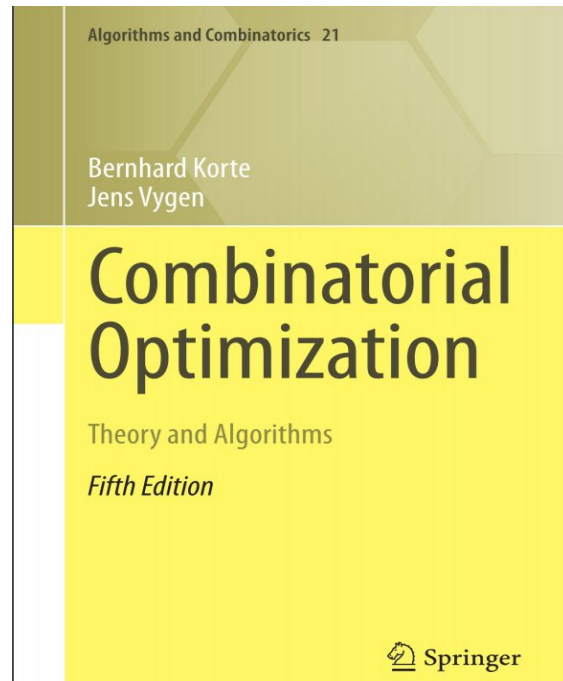
-

書籍



Introduction to Algorithms

Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson,
Ronald L. Rivest, Clifford Stein

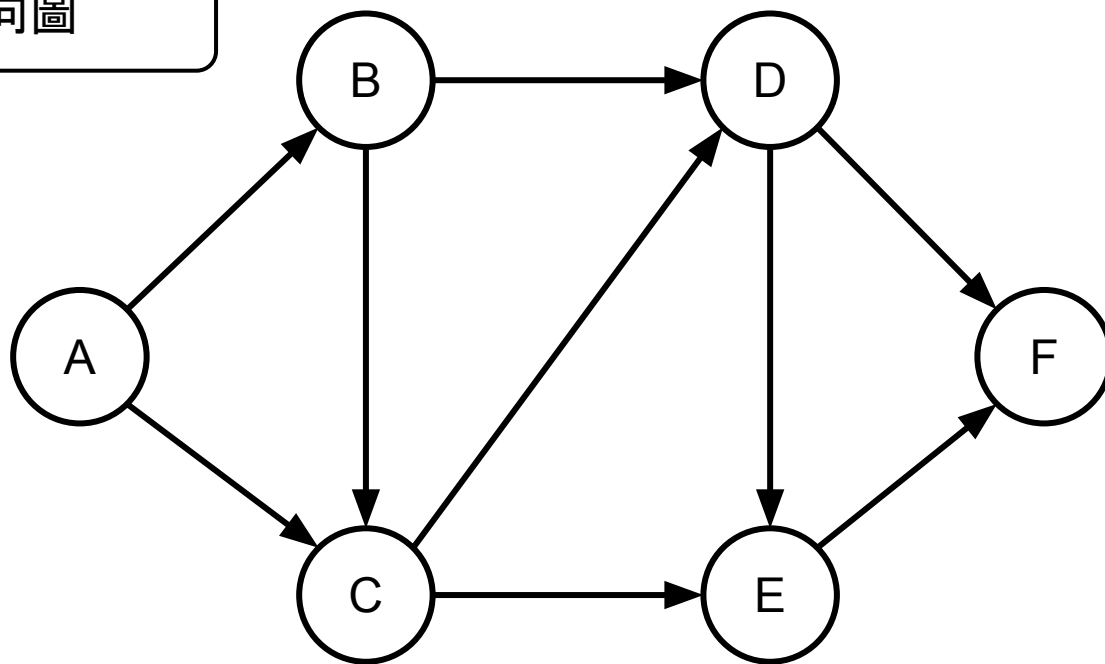


Combinatorial Optimization

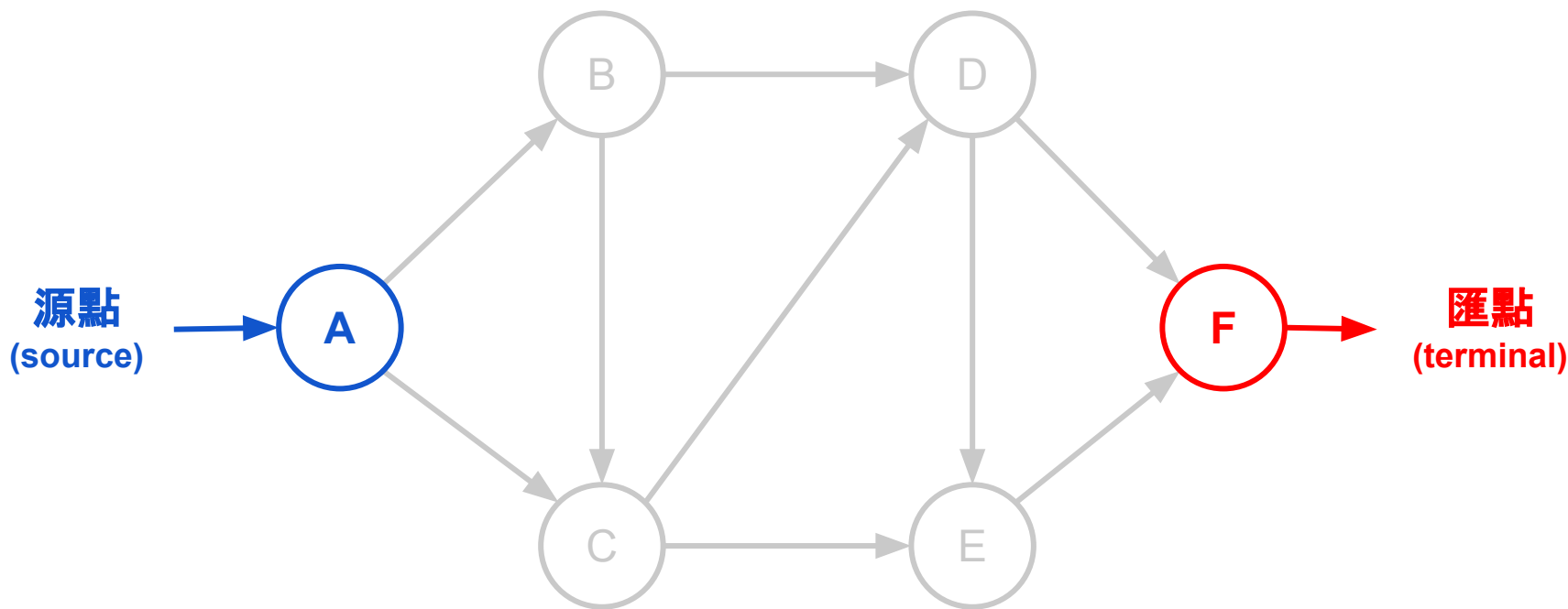
Bernhard Korte, Jens Vygen

Maximum Flow Problem (最大流問題)

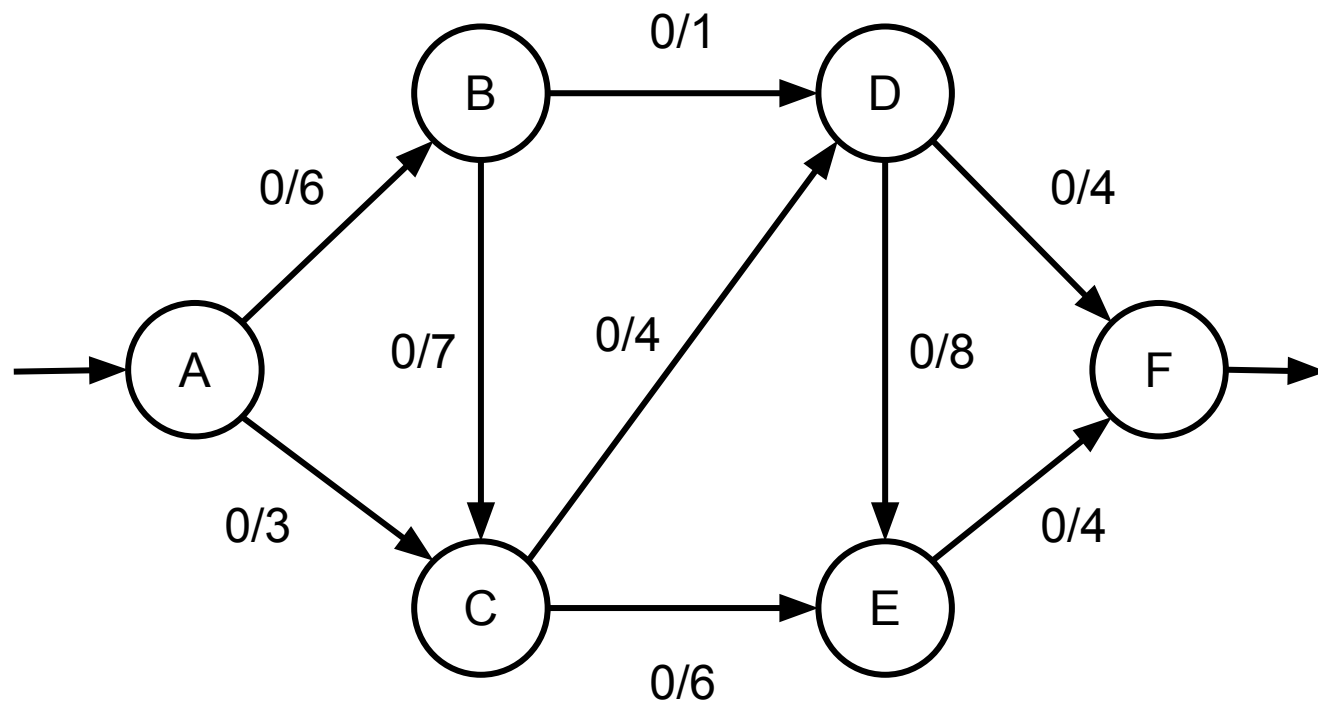
一個有向圖



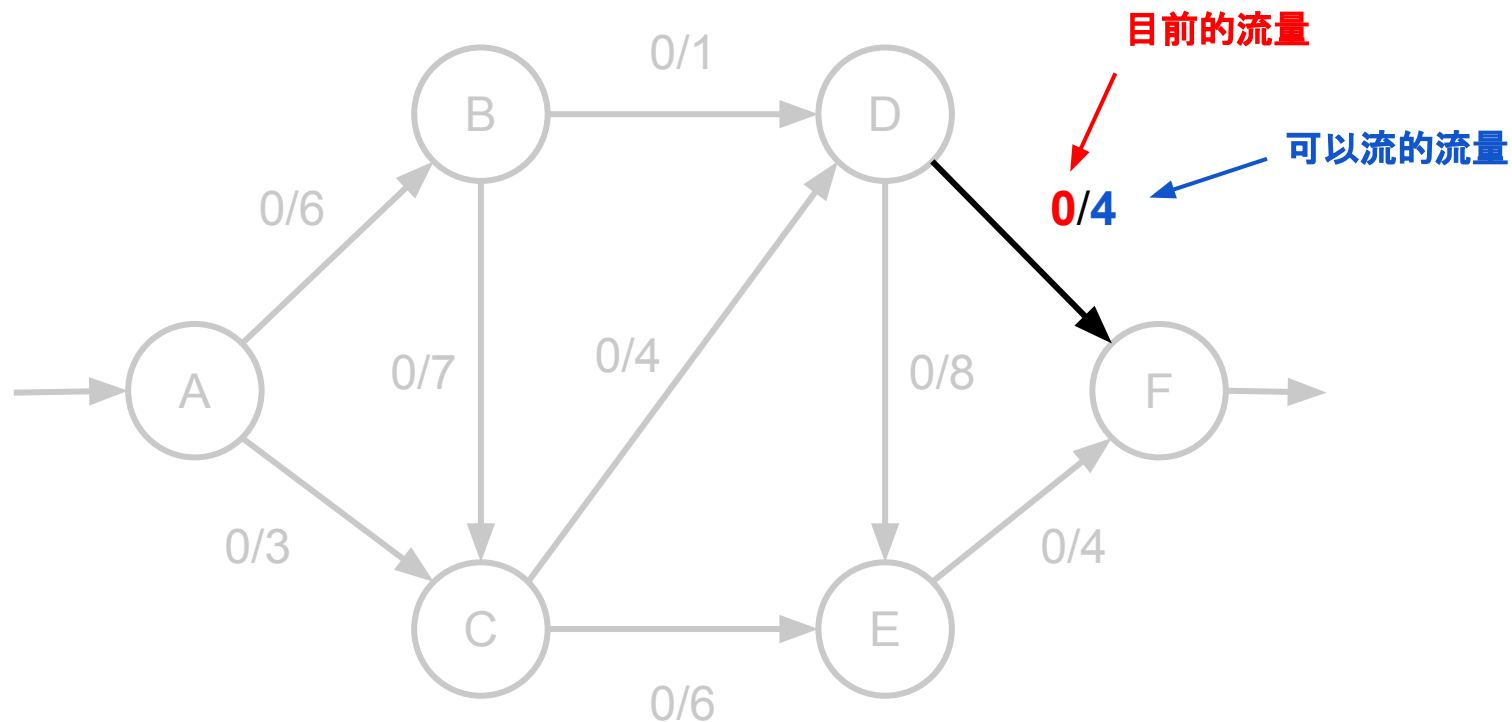
Maximum Flow Problem (最大流問題)



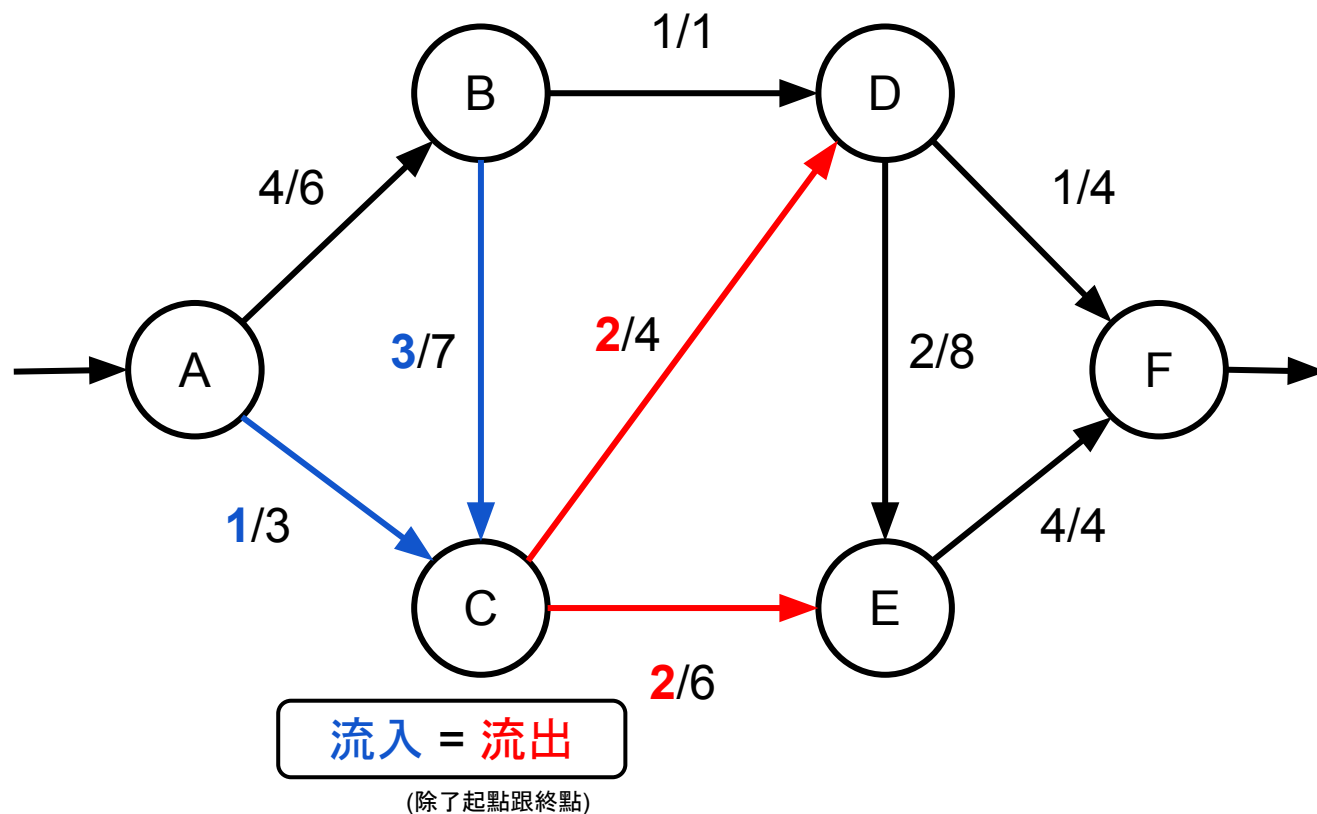
Maximum Flow Problem (最大流問題)



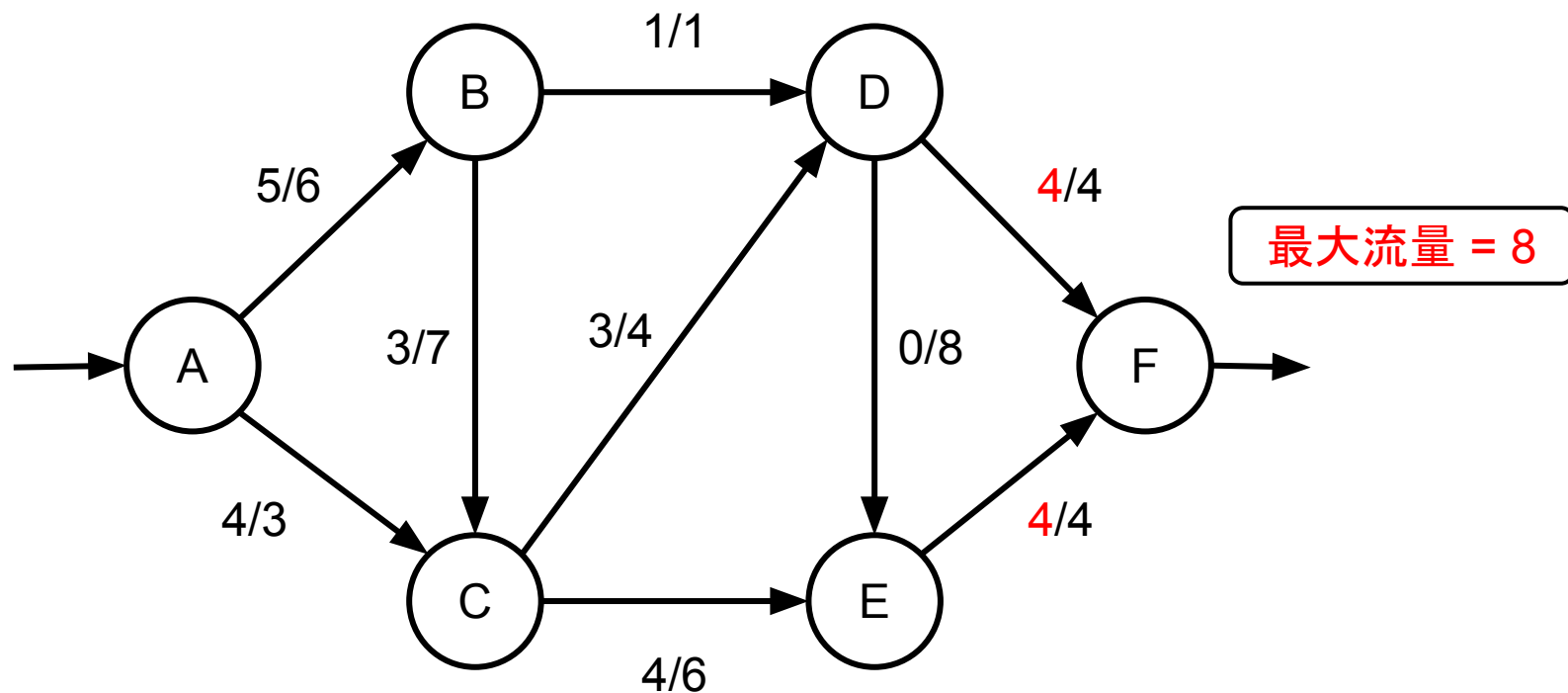
Maximum Flow Problem (最大流問題)



Maximum Flow Problem (最大流問題)



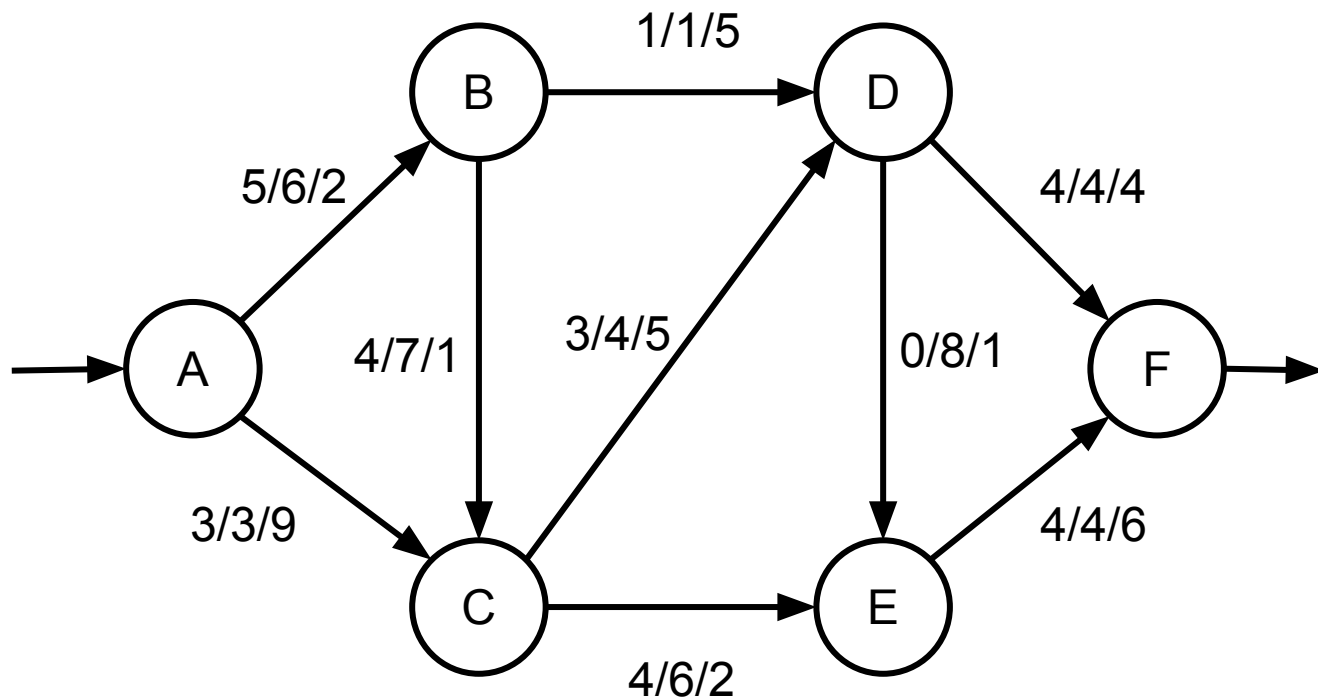
Maximum Flow Problem (最大流問題)



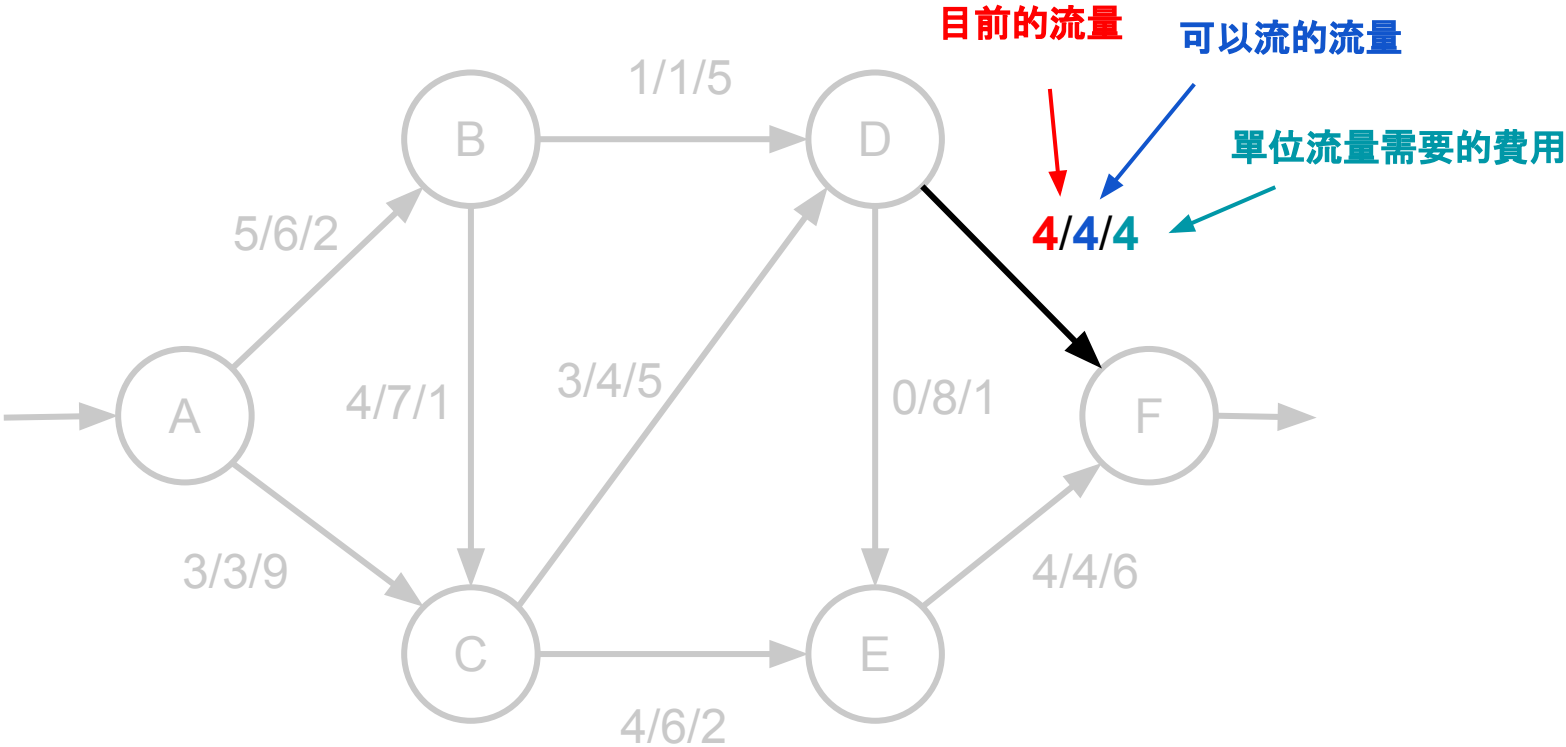
實戰用的 flow 演算法

- Ford-Fulkerson
 - $O(f E)$, f 為最大流流量
 - 適合流量小的題目
- Dinic
 - $O(\min(f, V^2)E)$
 - 常數很小
- ISAP
 - $O(V^3)$

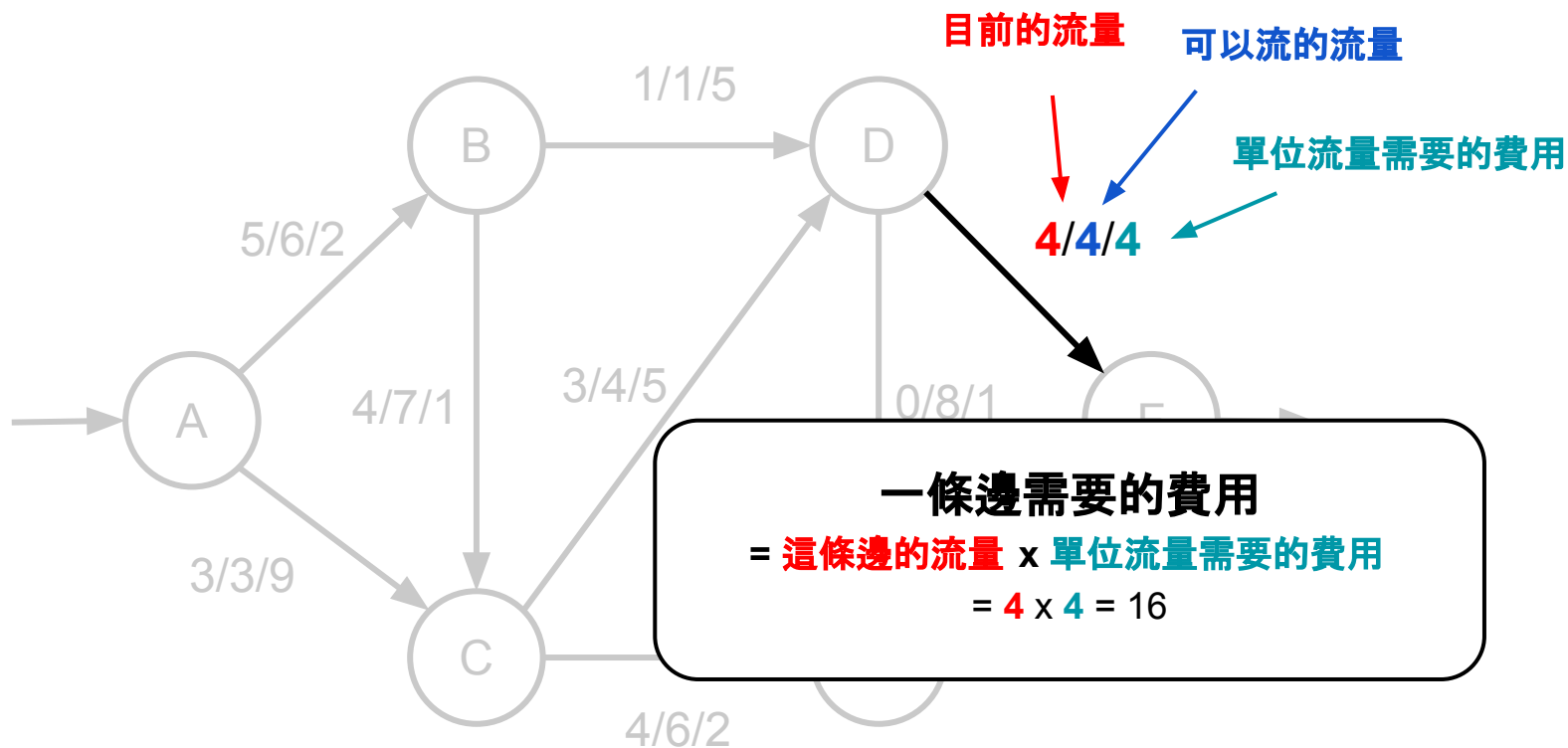
Min-Cost Max-Flow Problem (最小費用最大流問題)



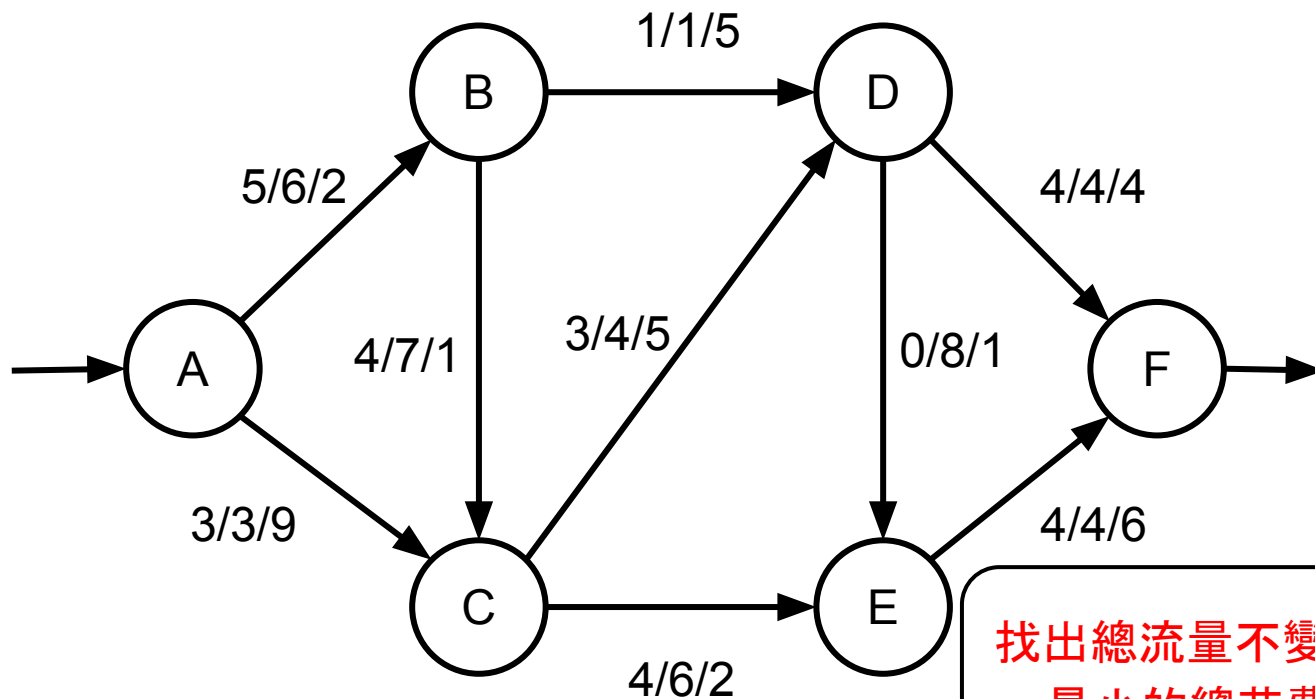
Min-Cost Max-Flow Problem (最小費用最大流問題)



Min-Cost Max-Flow Problem (最小費用最大流問題)



Min-Cost Max-Flow Problem (最小費用最大流問題)



找出總流量不變得前提下，
最小的總花費是多少？

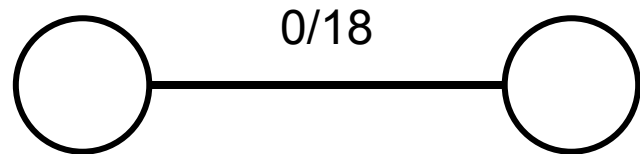
實戰用的 cost flow 演算法

- Successive shortest path algorithm
 - $O(fnm)$, f 為最大流流量
 - Ford–Fulkerson algorithm 的一般化
 - 利用 SPFA 優化加速
- Minimum mean cycle canceling
 - $O(n^2m^3\log n)$
 - 不斷利用最小平均環來擴增
 - 多項式時間演算法, 不用擔心因為流量很大而 TLE

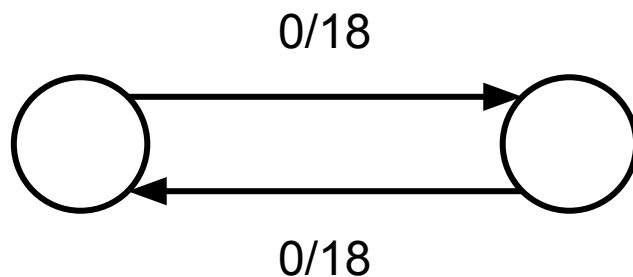
模版們

- flow
 - [dinic.cpp](#)
- cost flow
 - [min_cost_flow.cpp](#)

Flow 建模 - 無向圖

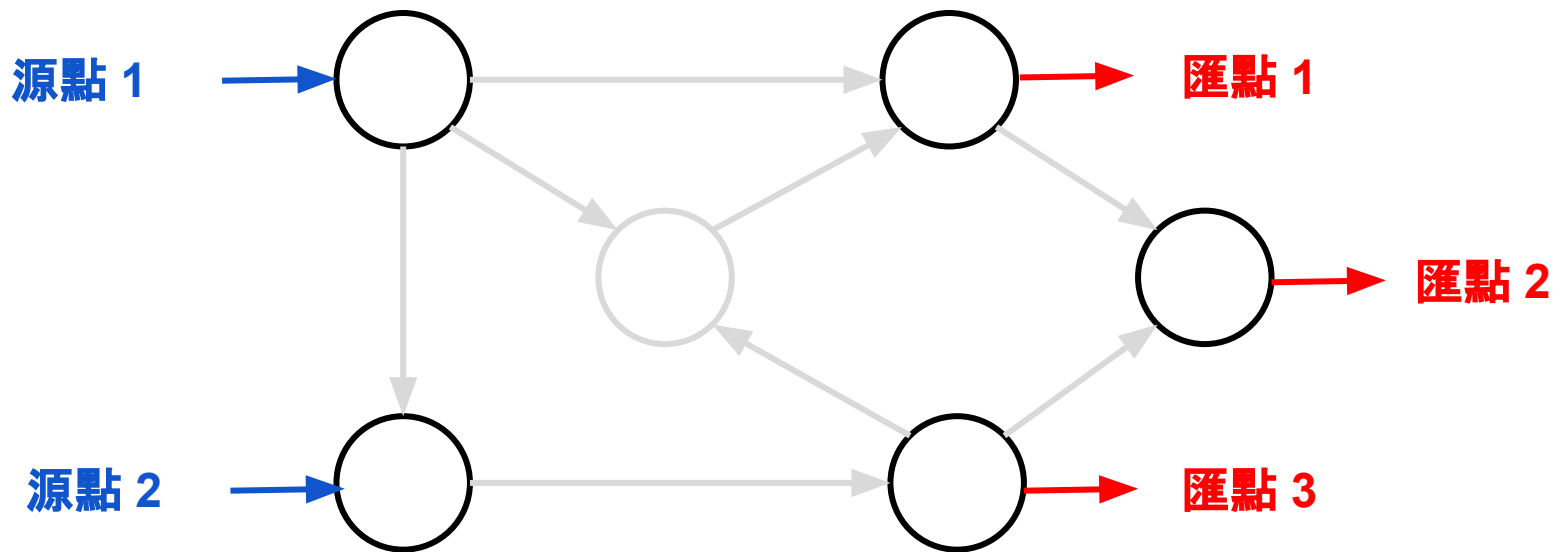


Flow 建模 - 無向圖

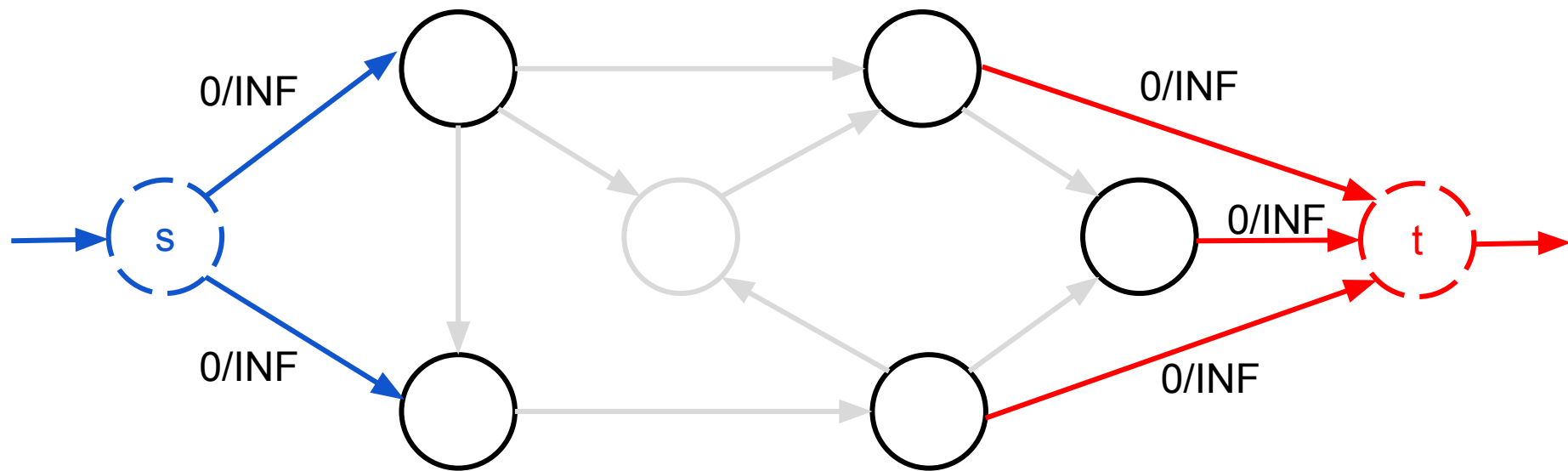


兩個介於 $[0,18]$ 的數字相差不會超過 18

Flow 建模 - 多源點多匯點 Flow



Flow 建模 - 多源點多匯點 Flow

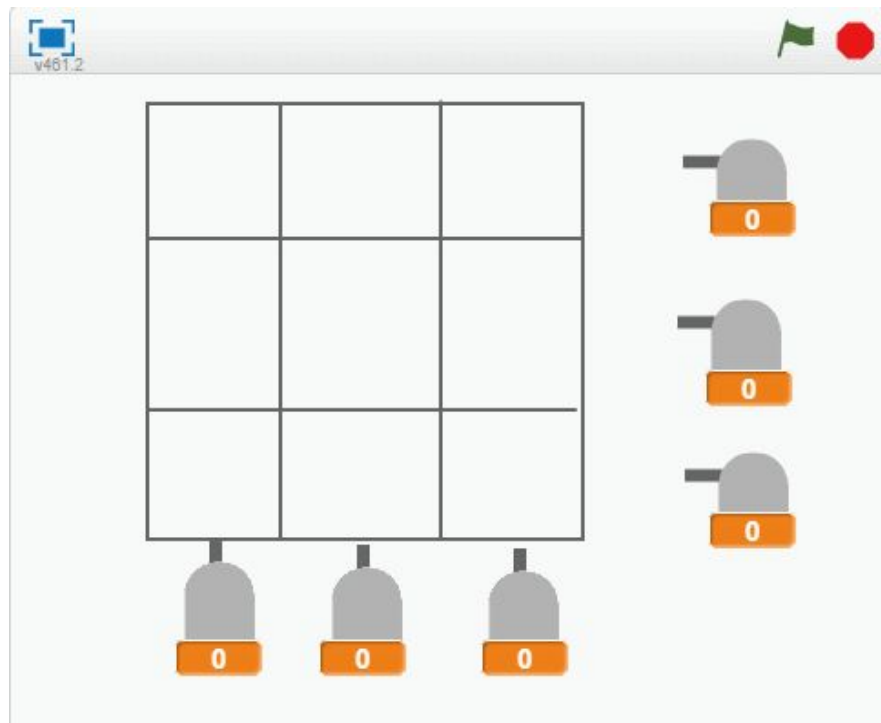


建立一個虛擬源點與虛擬匯點

砲塔問題(Formosa OJ 683)

有一個 $n \times n$ ($n \leq 64$) 棋盤格世界。每個 row, column 都有一個砲塔, 砲塔有個別的子彈數量, 棋盤格世界有 m 隻龍, 每隻龍有個別的血量。每顆子彈可以讓被打到的龍的血量減少一, 當龍的血量變成 0 就會神奇的消失不見。

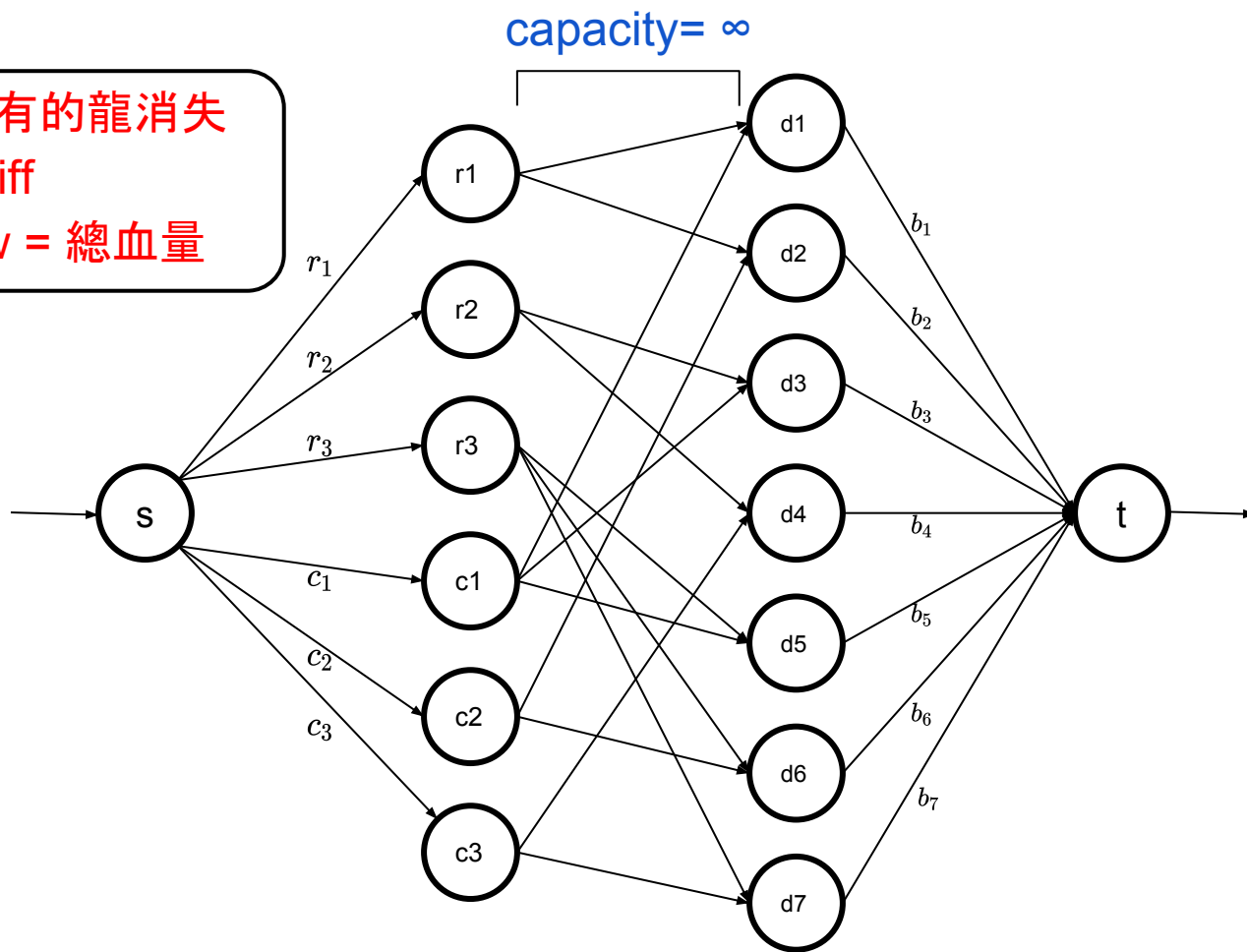
如何判斷是否存在一個策略讓全部的龍不見？



<https://bit.ly/2T5Ym0b>

砲塔問題(Formosa OJ 683)

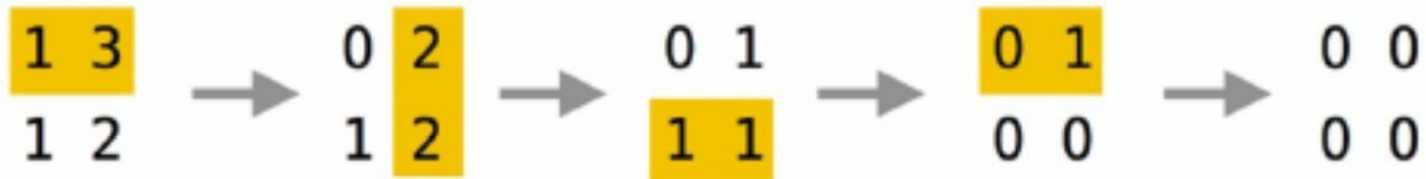
可以讓所有的龍消失
iff
 $\text{max flow} = \text{總血量}$



Daejeon15 C

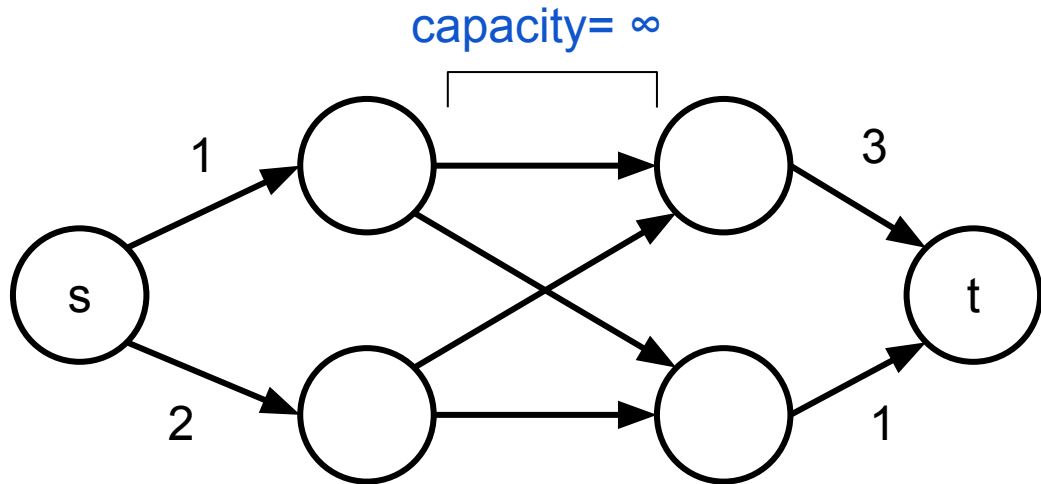
$n \times m$ ($n, m \leq 30$) 的棋盤格，每個格子有一個非負整數。每次操作可以將兩個相鄰的格子的數值同時減一（減到變成0為止）

至少要幾次才能將所有格子都變成 0 ？



Daejeon15 C

| | |
|---|---|
| 1 | 3 |
| 1 | 2 |



最少化操作次數 = 最大化兩格都有減到數字的操作數
棋盤格為二分圖, 將節點們分成兩群

Daejeon16 K

有一個 $n \times m$ ($n, m \leq 200$) 的表格，每個格子有一個浮點數，每個 row 最後一個後面會加上這個 row 的總和，每個 column 也做一樣的事情。

為每個非整數的數字決定是否要進位，最後的表格要滿足每個 row 的最後一個數字是前面的總和，column 也是。

| | 1 | 2 | 3 | row sum |
|------------|------|------|-----|---------|
| 1 | 4.3 | 6.7 | 7.1 | 18.1 |
| 2 | 9.2 | 3.0 | 0.2 | 12.4 |
| 3 | 4.0 | 7.7 | 1.3 | 13.0 |
| column sum | 17.5 | 17.4 | 8.6 | |

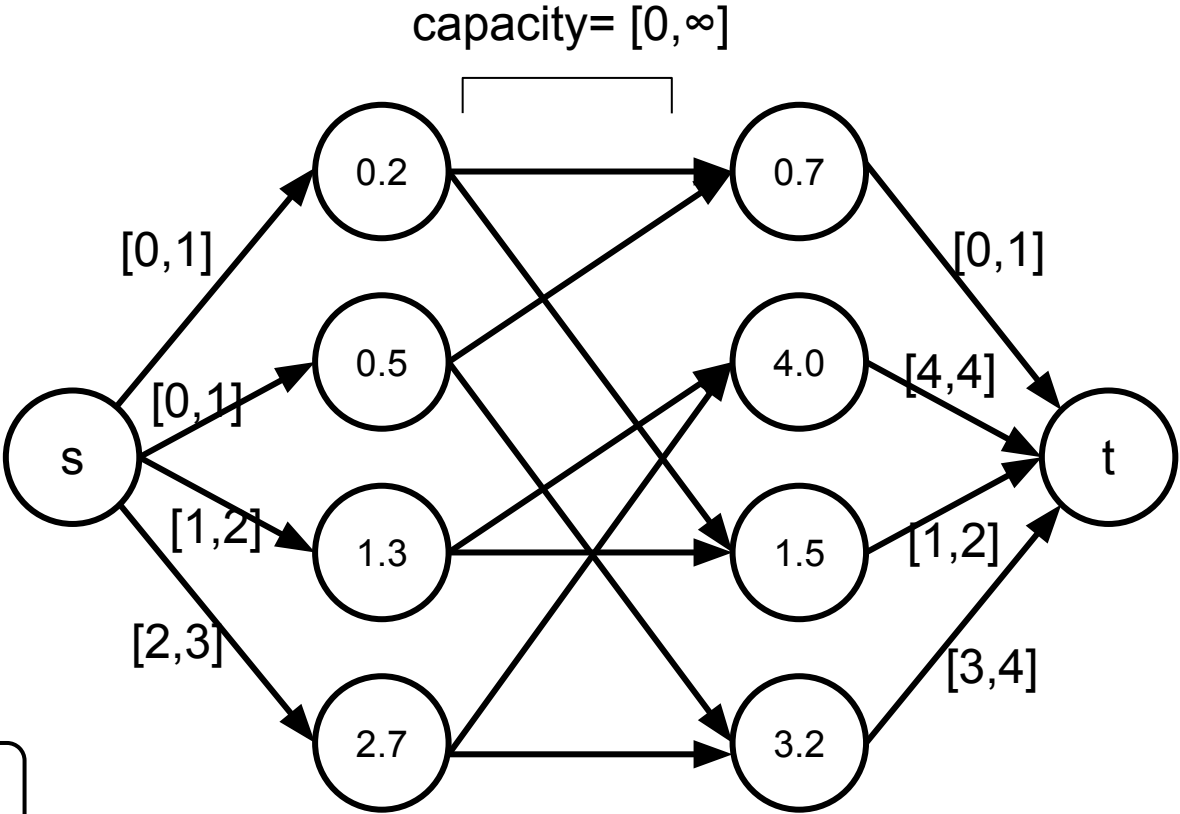
(a) Original Table

| | 1 | 2 | 3 | row sum |
|------------|----|----|---|---------|
| 1 | 4 | 7 | 7 | 18 |
| 2 | 9 | 3 | 0 | 12 |
| 3 | 4 | 7 | 2 | 13 |
| column sum | 17 | 17 | 9 | |

(b) A feasibly rounded table

Daejeon16 K

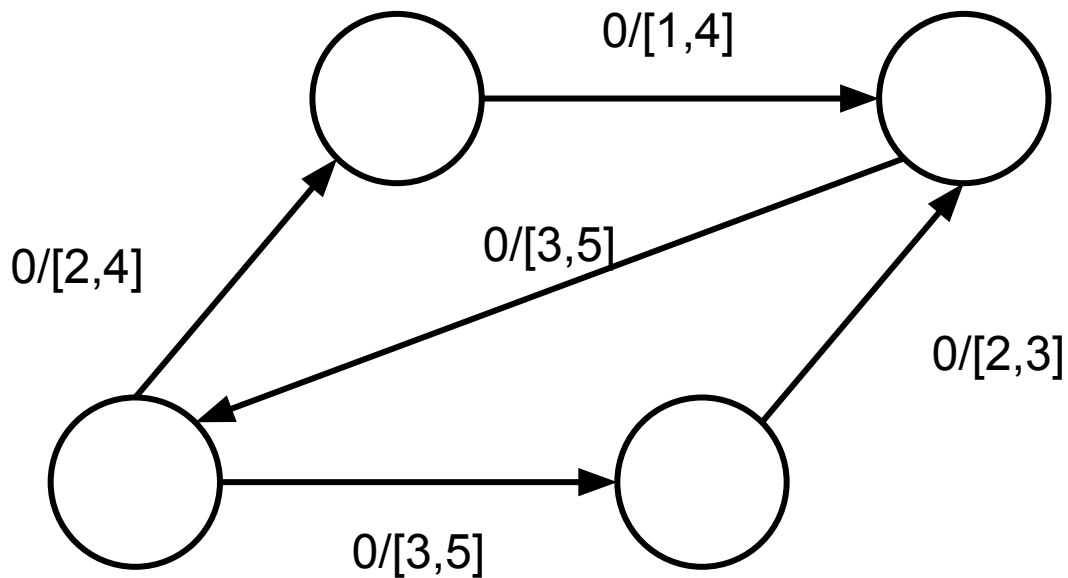
| | | |
|-----|-----|-----|
| 0.2 | 0.5 | 0.7 |
| 1.3 | 2.7 | 4.0 |
| 1.5 | 3.2 | |



限制每條邊的流量範圍

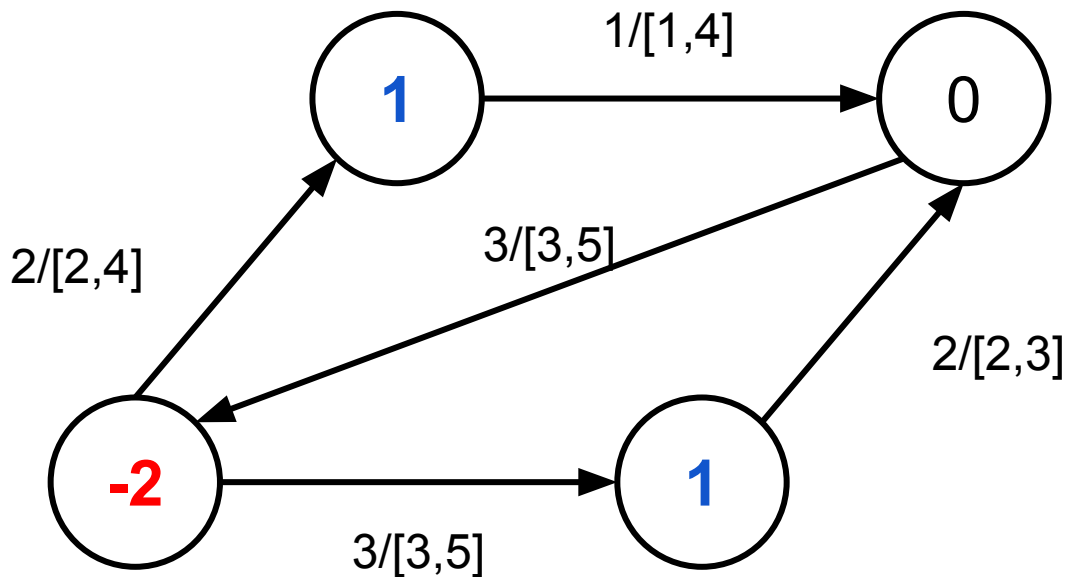
上下界網路流

- 先考慮沒有起點終點的 case



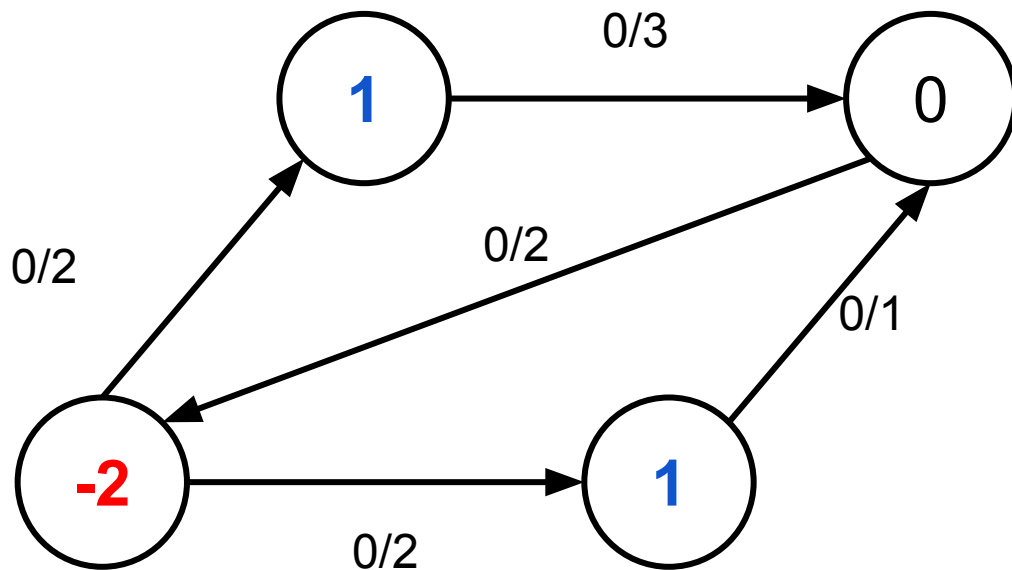
上下界網路流

- 每條邊都先給下界的流量，觀察每個節點的(流入-流出)的流量



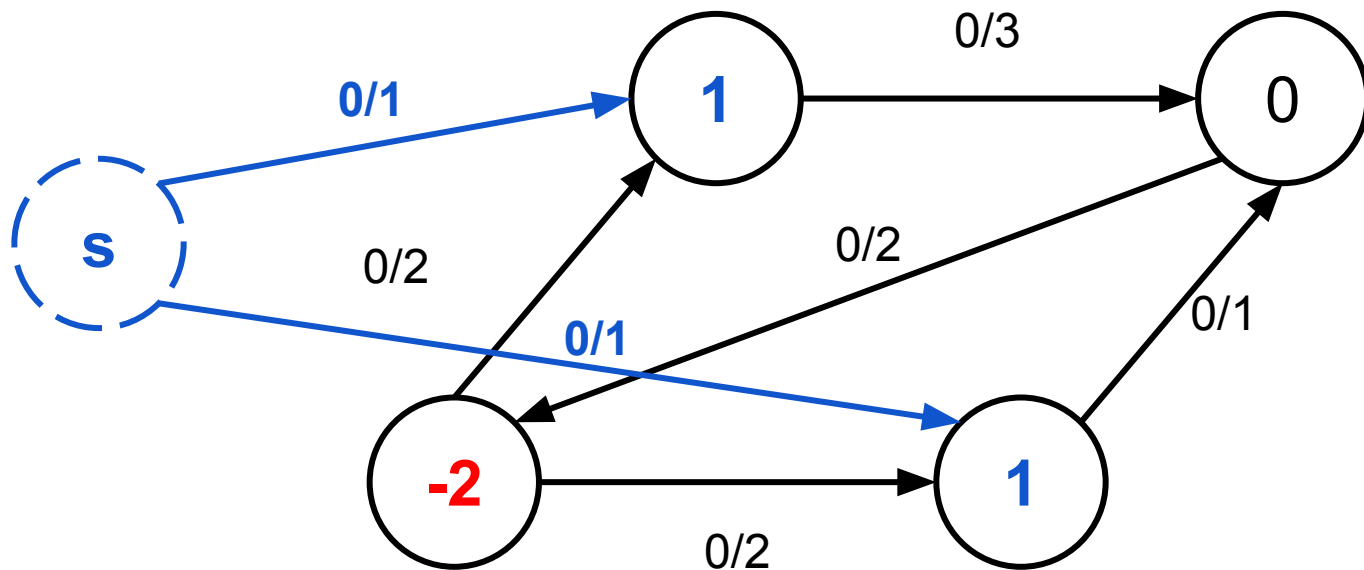
上下界網路流

- 本來有上下界 $[L,R]$, 的流量限制變成一般的流量限制 $R-L$



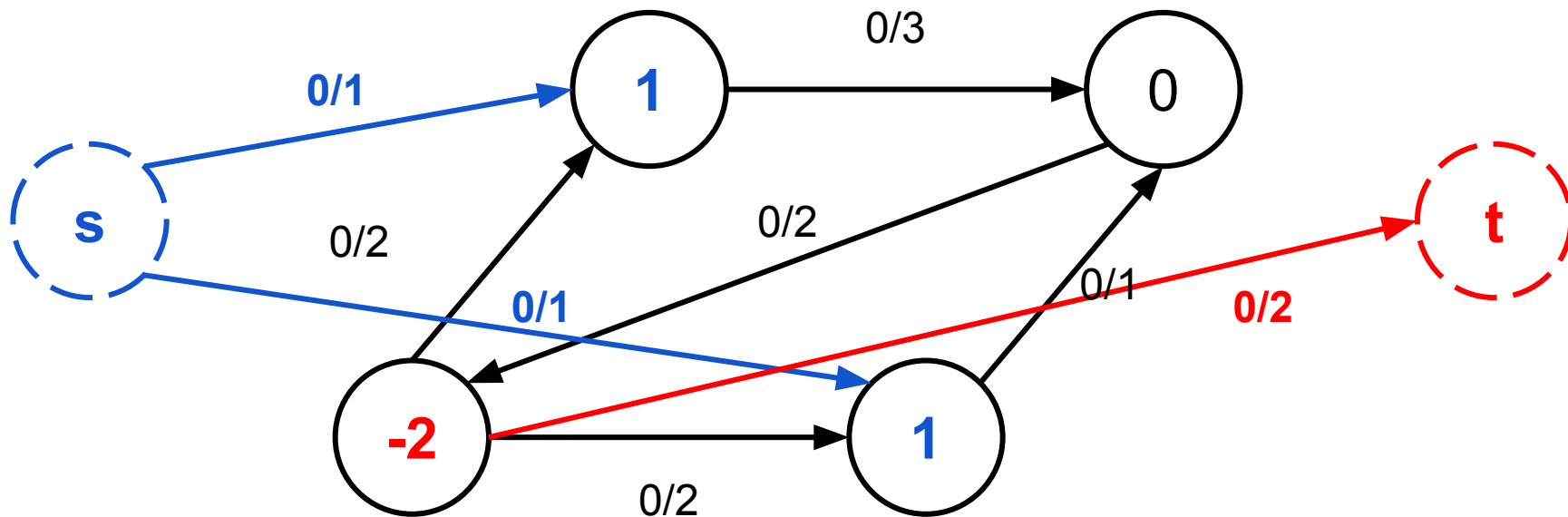
上下界網路流

- (流入-流出) > 0 的節點, 從 **s** 連邊



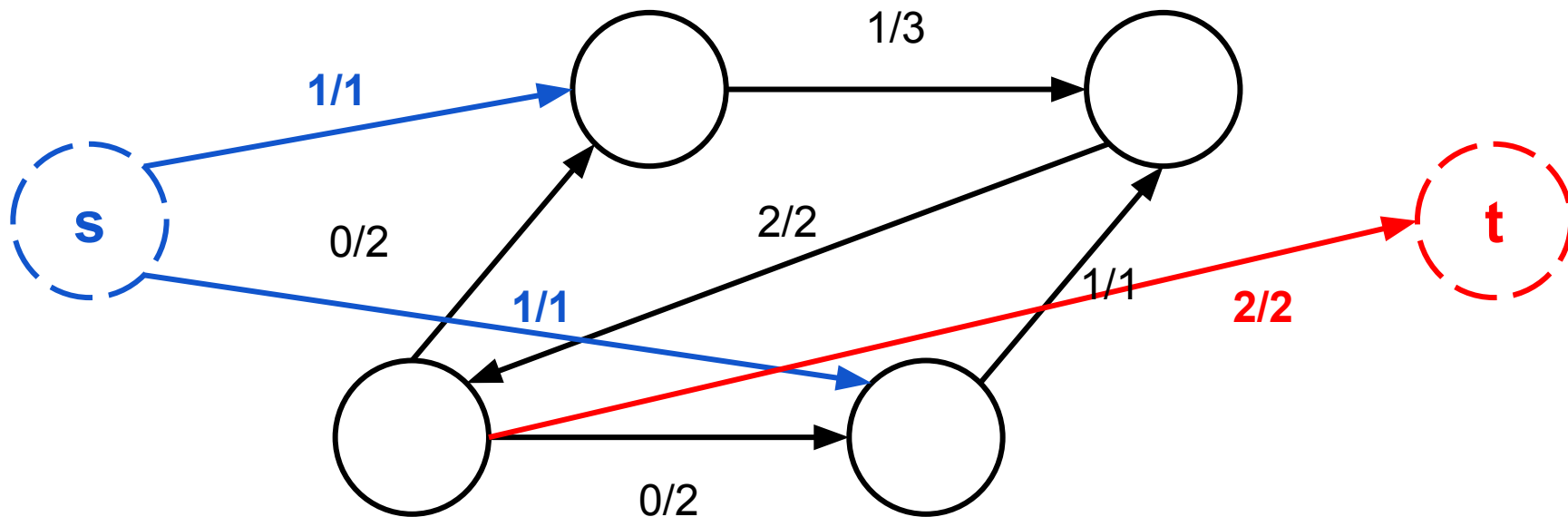
上下界網路流

- (流入-流出) > 0 的節點, 從 **s** 連邊
- (流入-流出) < 0 的節點, 連向 **t**



上下界網路流

- 上下界流有解 iff 最大流 = 起點連出去的邊權總和



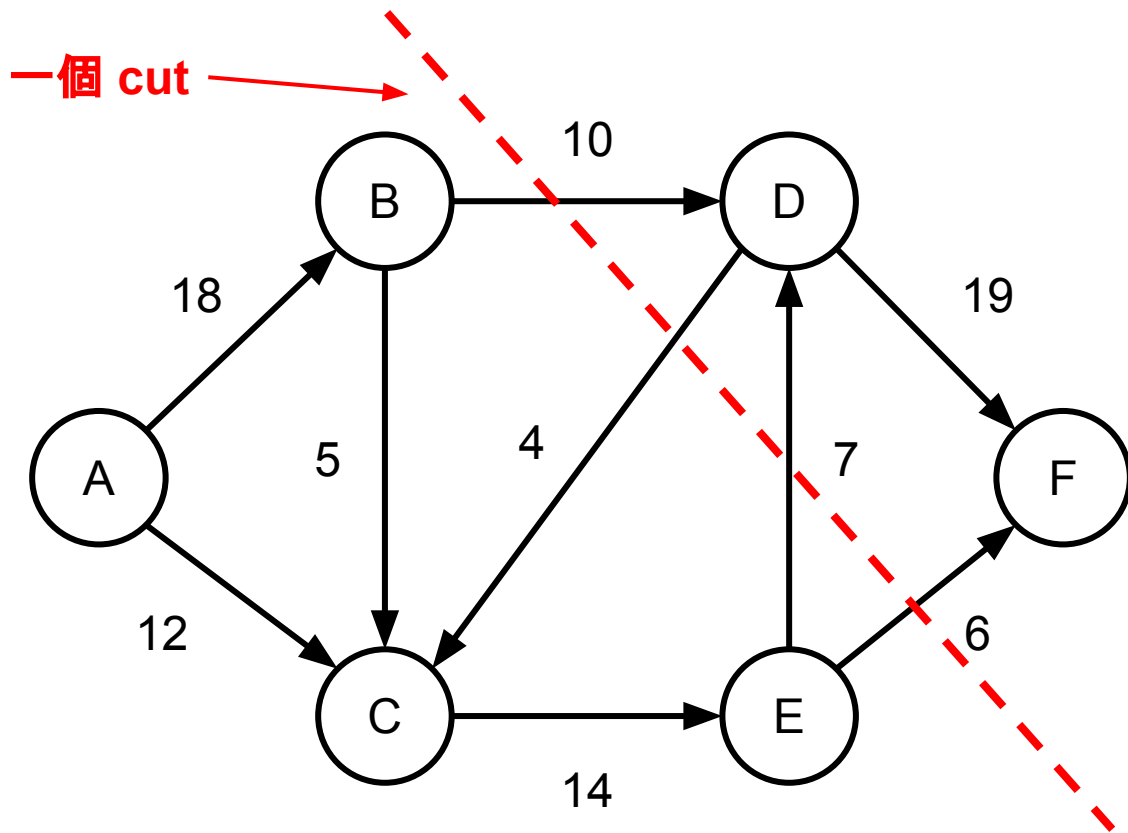
上下界網路流

- 有起點終點 s, t 的 case
 - 從 t 連一條限制是 $[0, \text{INF}]$ 的邊到這 s
 - 就變成沒有起點終點的 case
- 先做完一次無起點終點的上下界流使得每個節點流入等於流出, 再求一次原始的 s - t max flow
- 有起點終點的上下界 max flow
 - = 無起點終點的上下界流 + 新的圖的 s - t max flow

min-cost half max flow

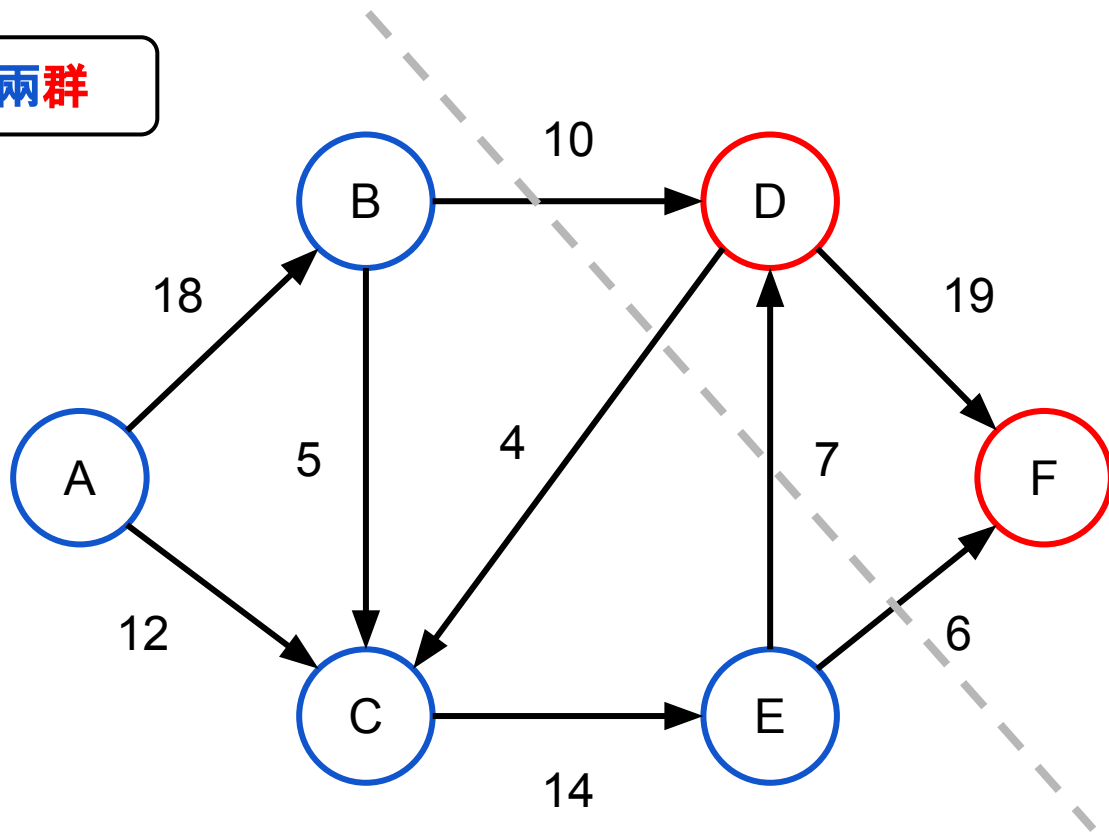
如何找到流量是最大流的一半的 flow 中, cost 最小的?

Min Cut Problem (最小割問題)



Min Cut Problem (最小割問題)

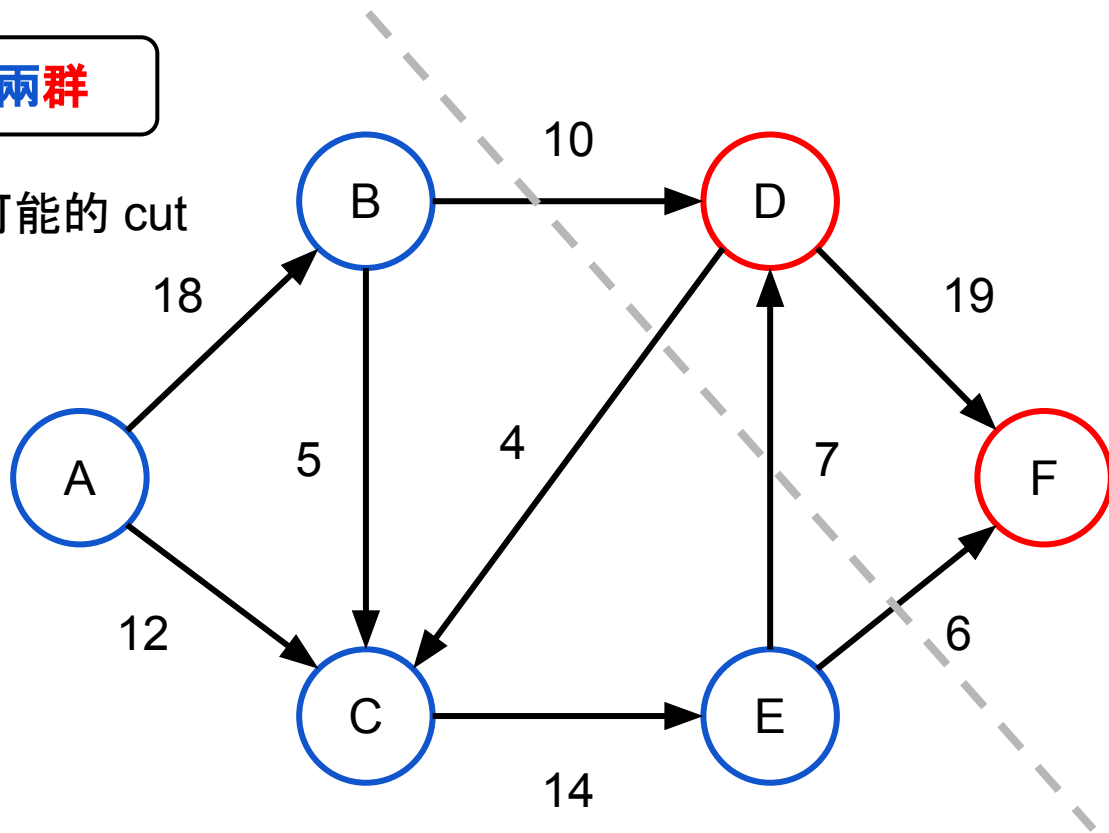
將點分成兩群



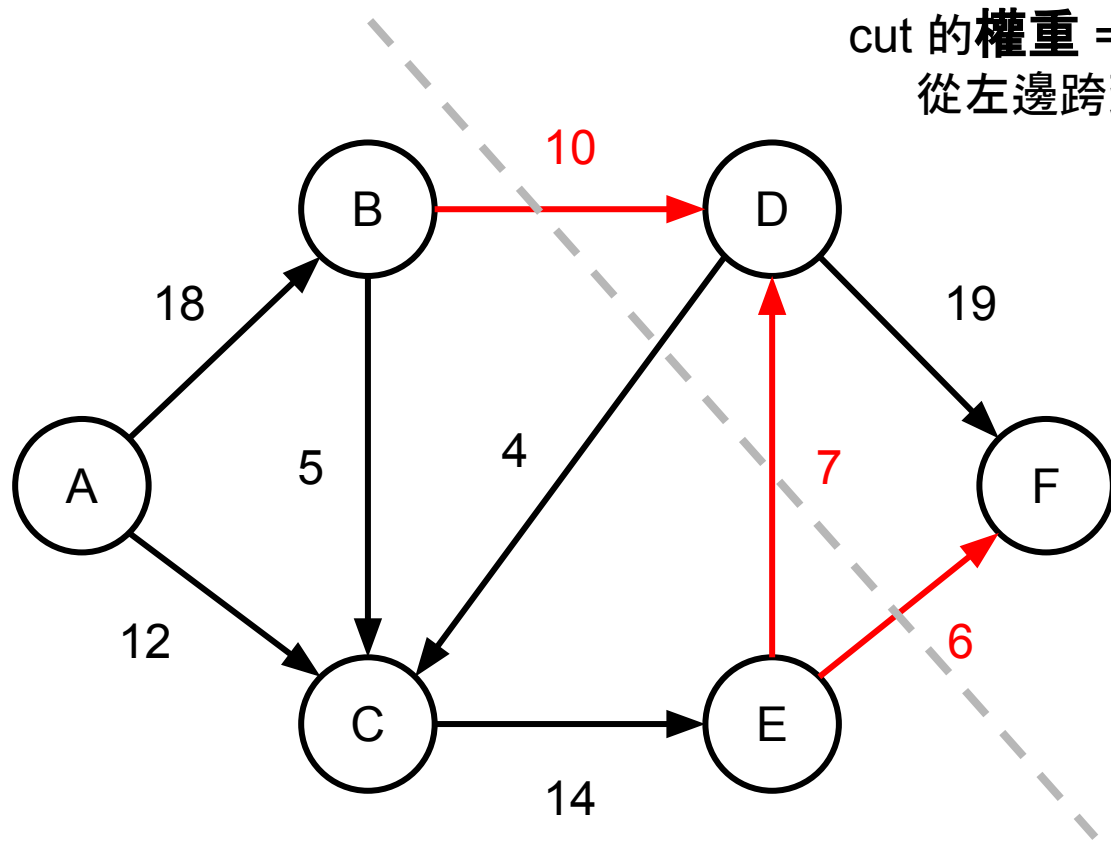
Min Cut Problem (最小割問題)

將點分成兩群

總共有 2^n 種可能的 cut

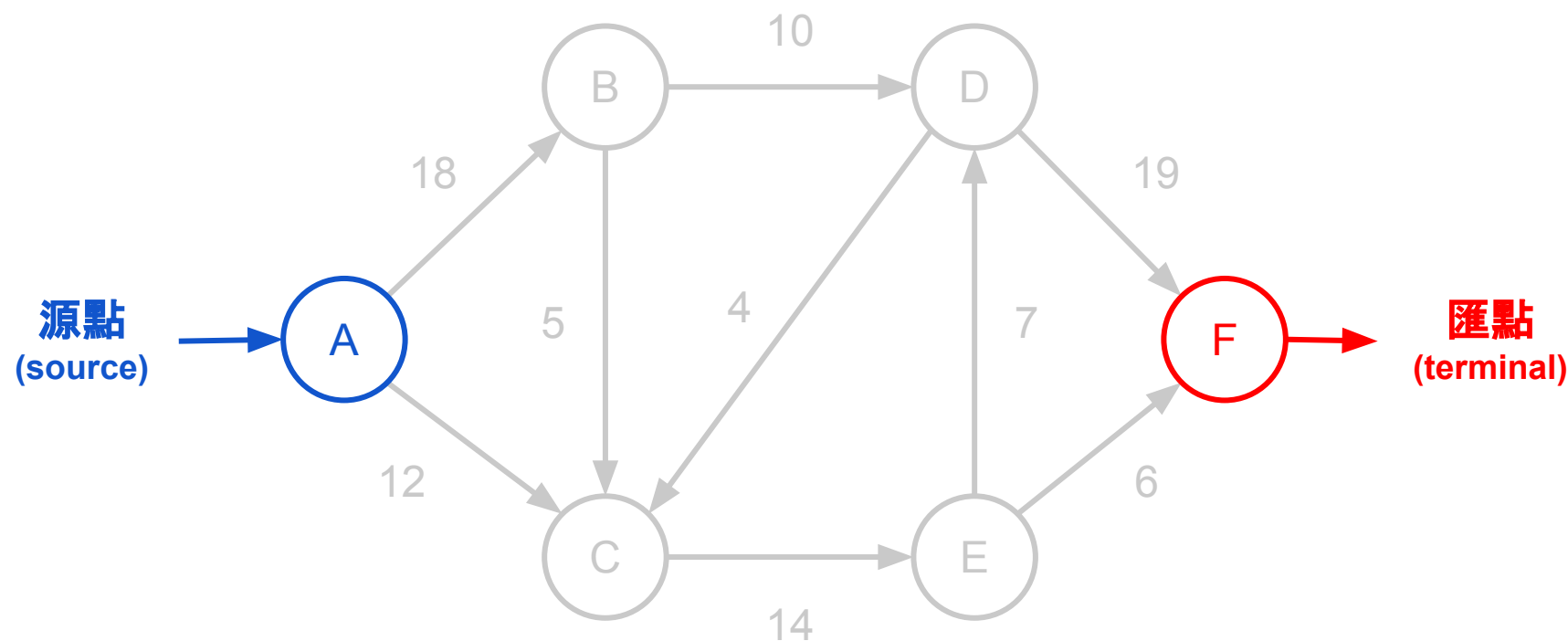


Min Cut Problem (最小割問題)

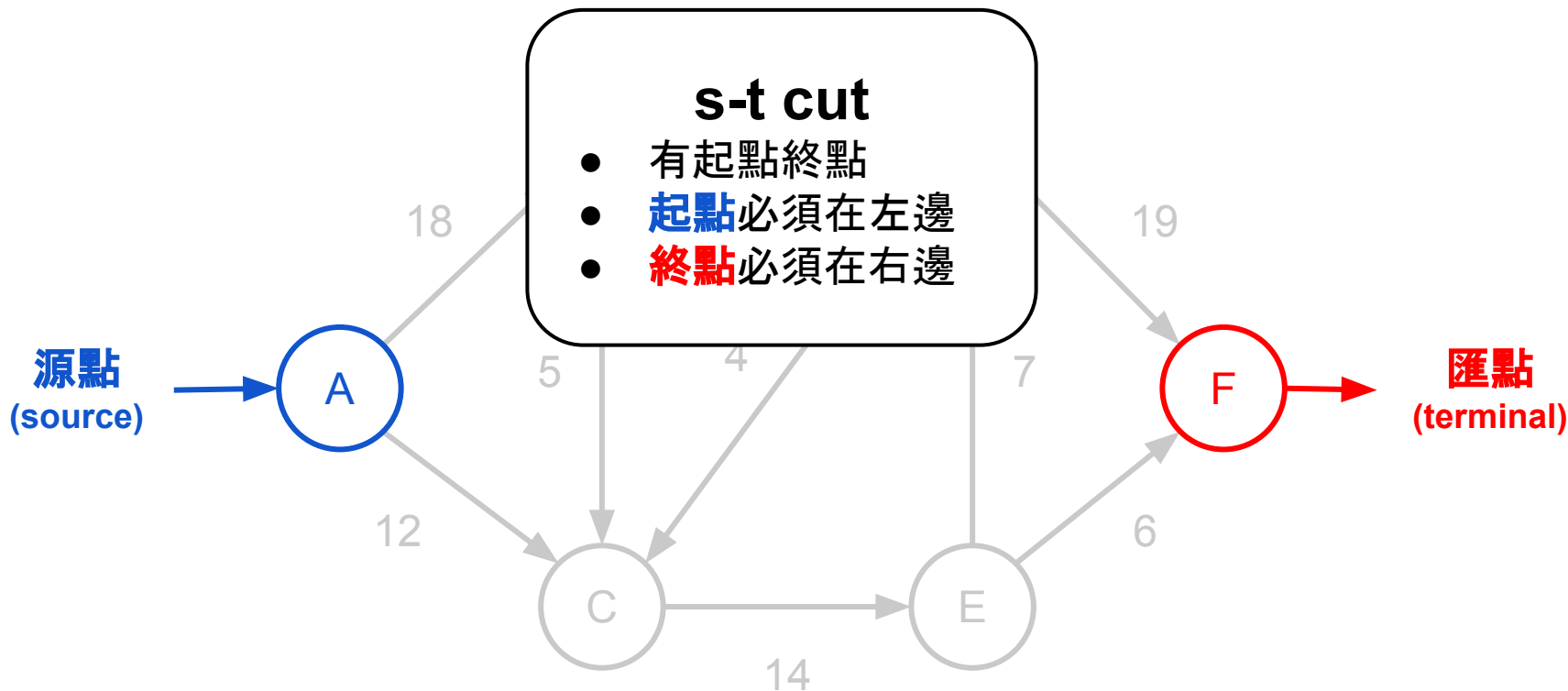


cut 的**權重** =
從左邊跨到右邊的邊全總和

Min Cut Problem (最小割問題)

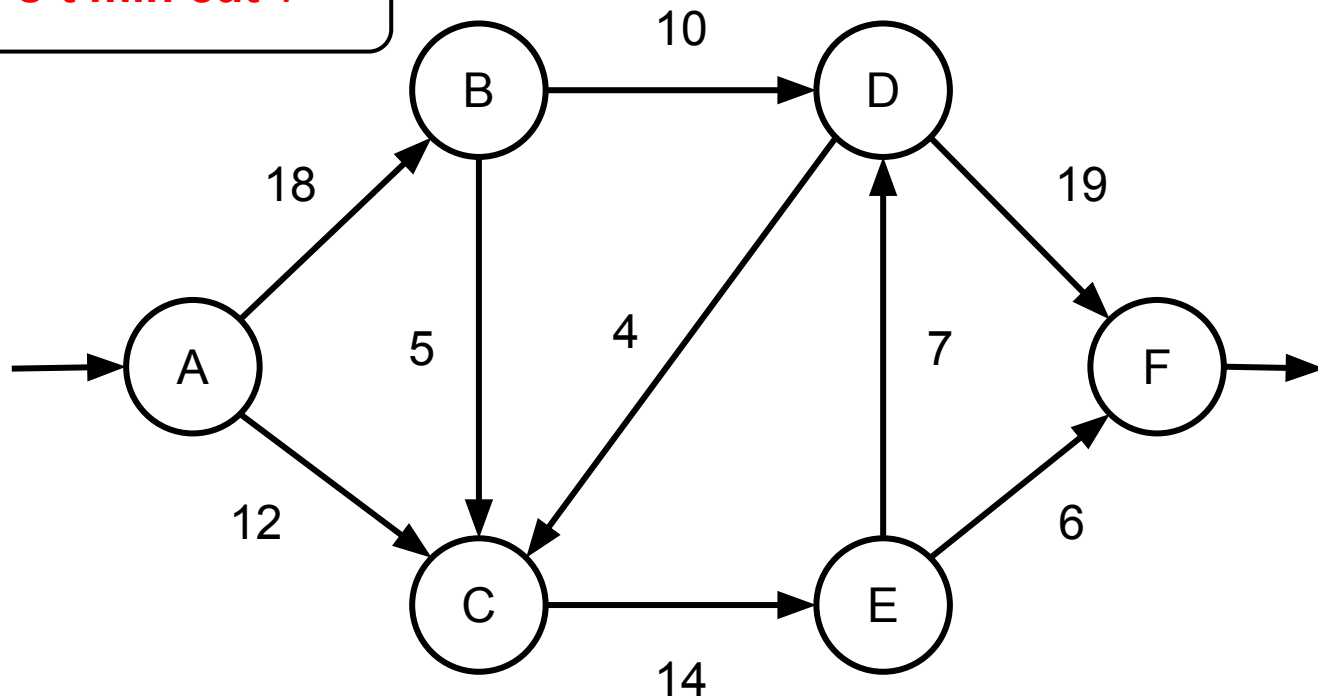


Min Cut Problem (最小割問題)



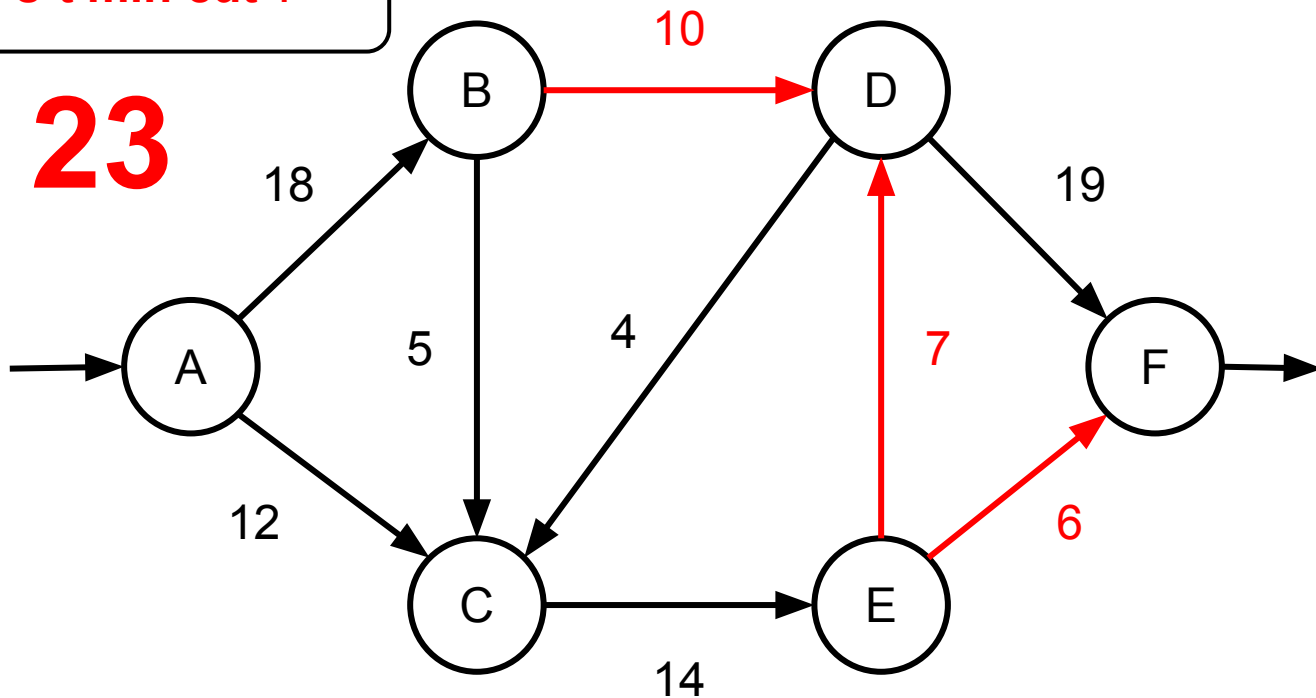
Min Cut Problem (最小割問題)

找出 **s-t min cut** ?



Min Cut Problem (最小割問題)

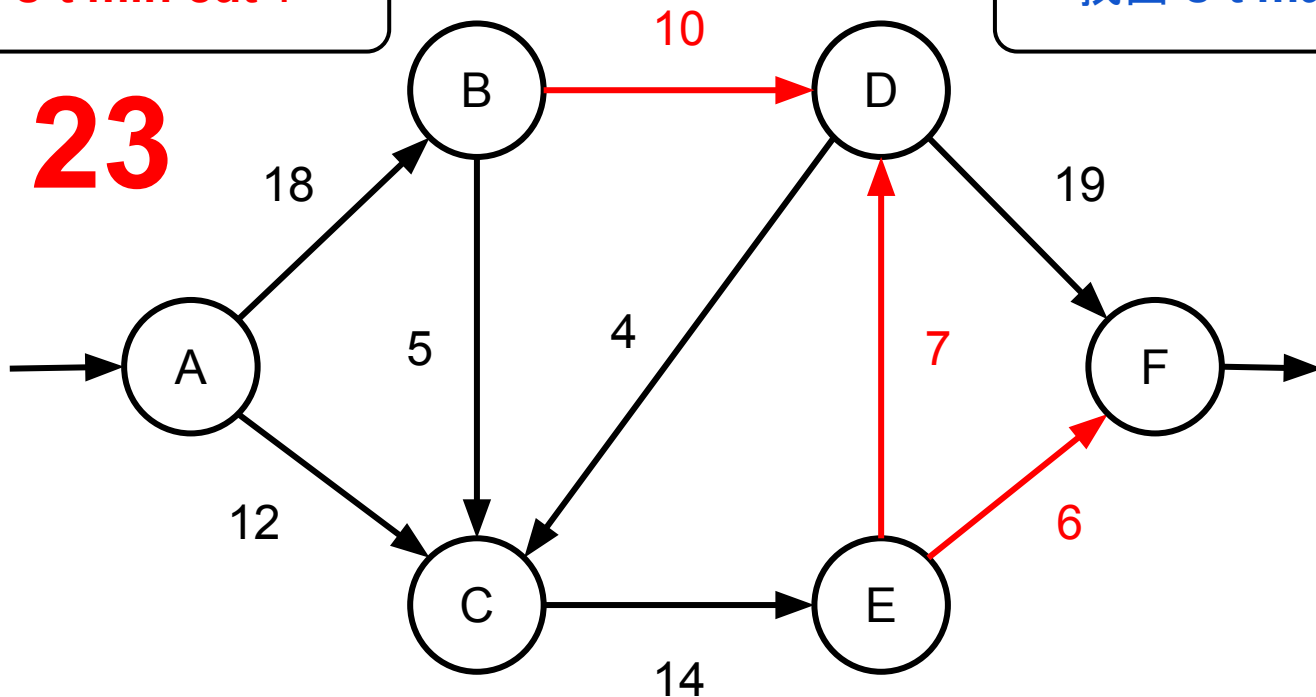
找出 s-t min cut ?



max-flow min-cut theorem (最大流最小割定理)

找出 s-t min cut ?

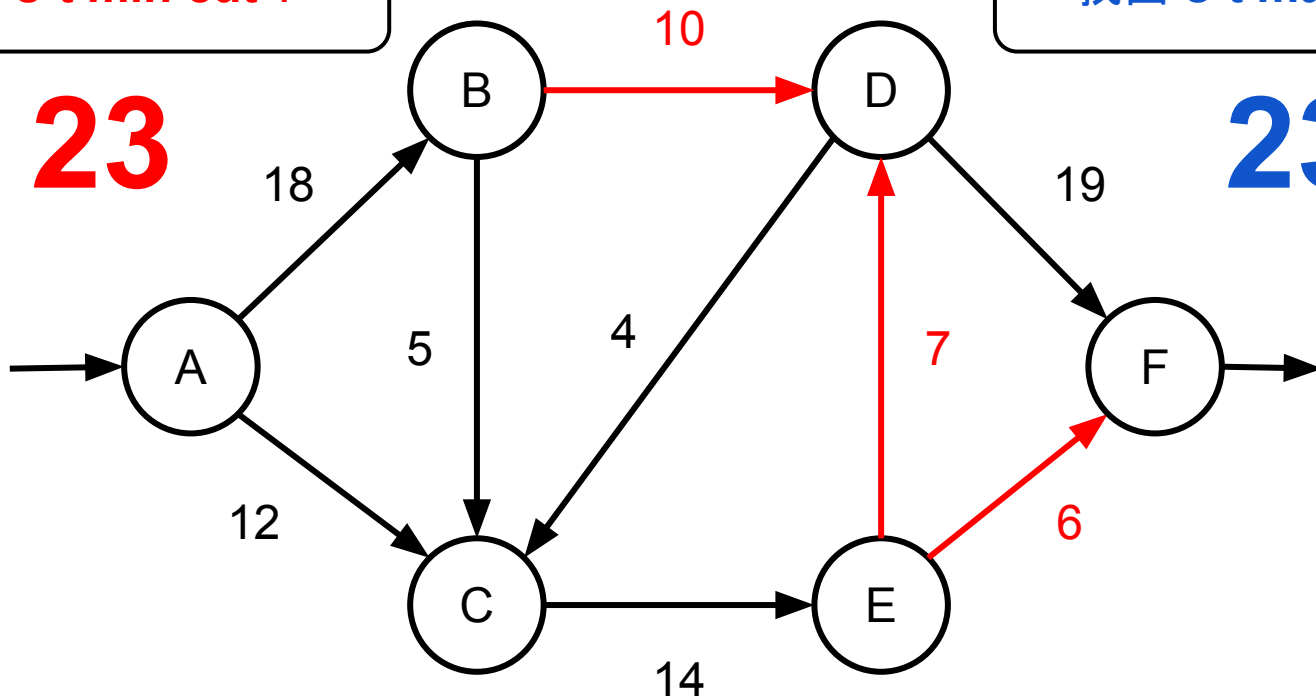
找出 s-t max flow?



max-flow min-cut theorem (最大流最小割定理)

找出 s-t min cut ?

找出 s-t max flow?



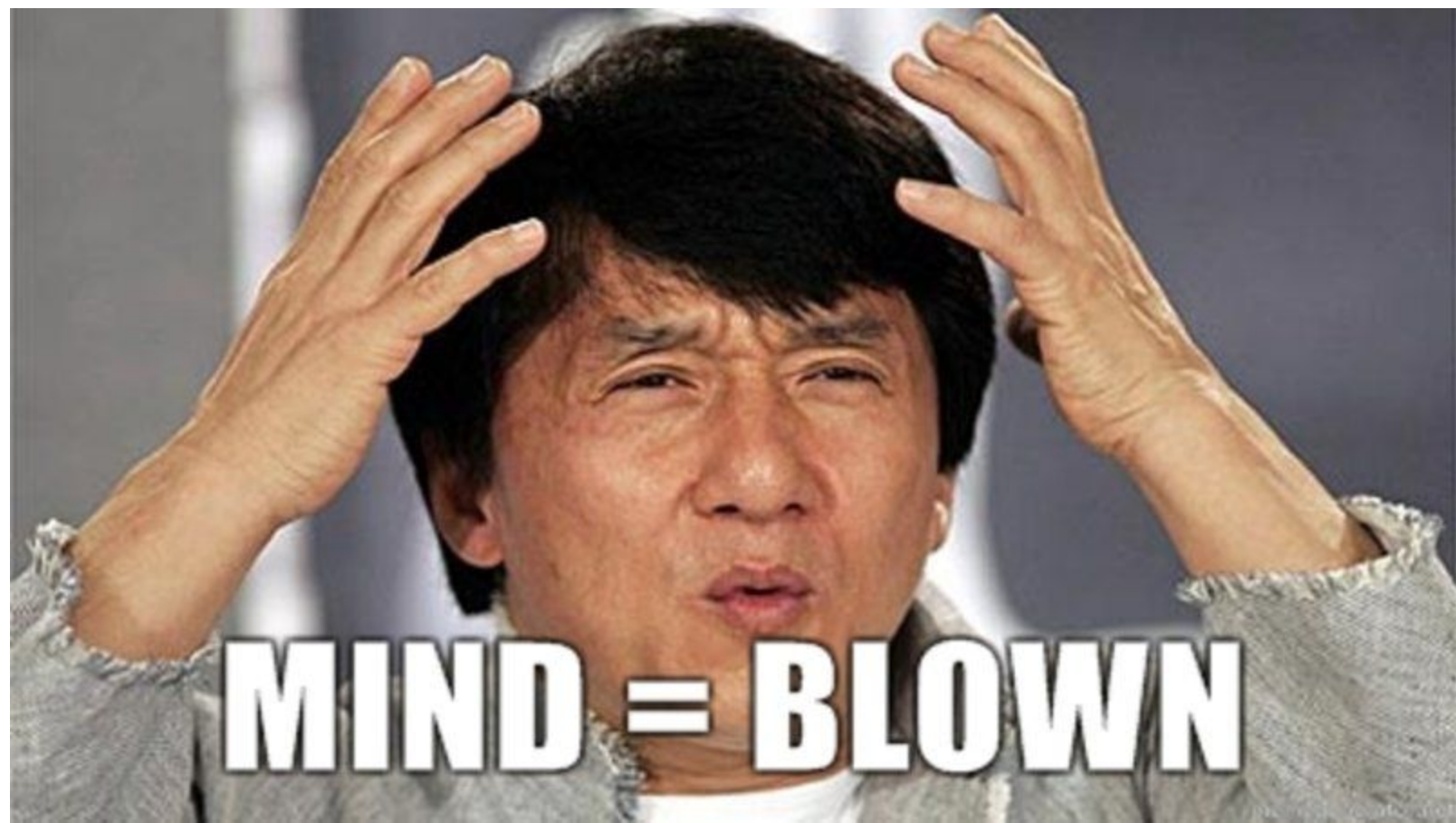
max-flow min-cut theorem (最大流最小割定理)

找出 s-t min cut ?

找出 s-t max flow?

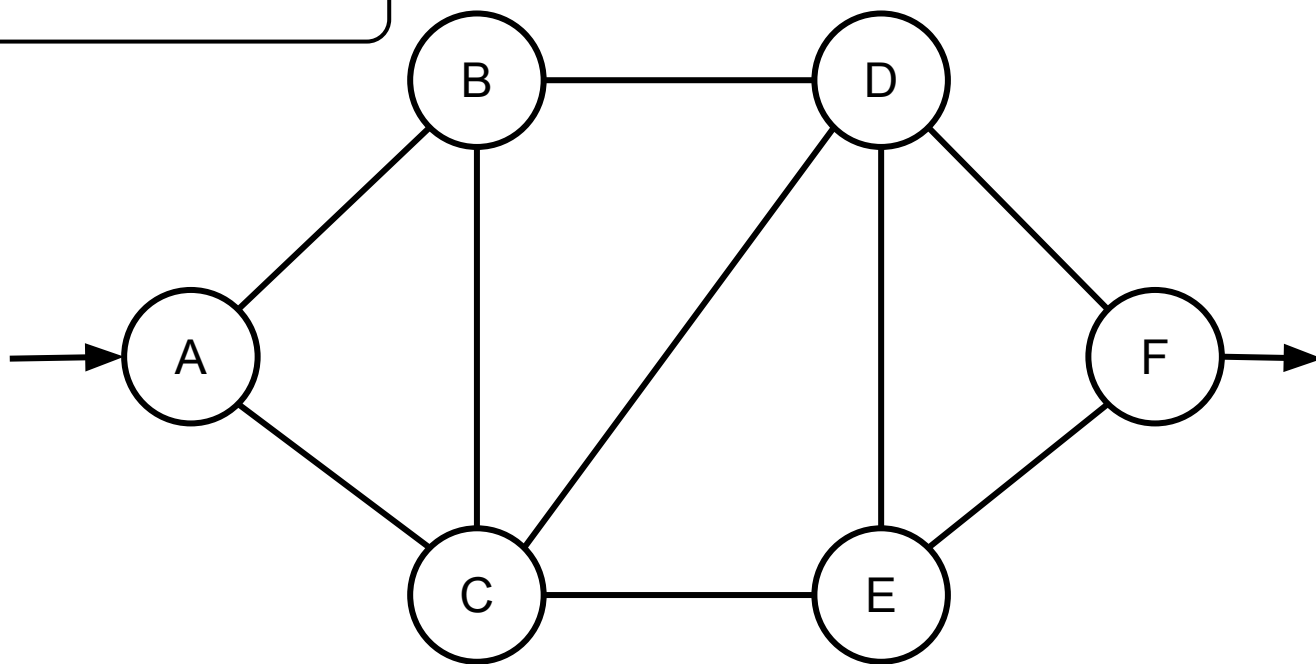
最大流最小割定理

- 有向圖 $G = (V, E)$
- 所有邊權重都大於等於 0
- $|\text{s-t max flow}| = |\text{s-t min cut}|$



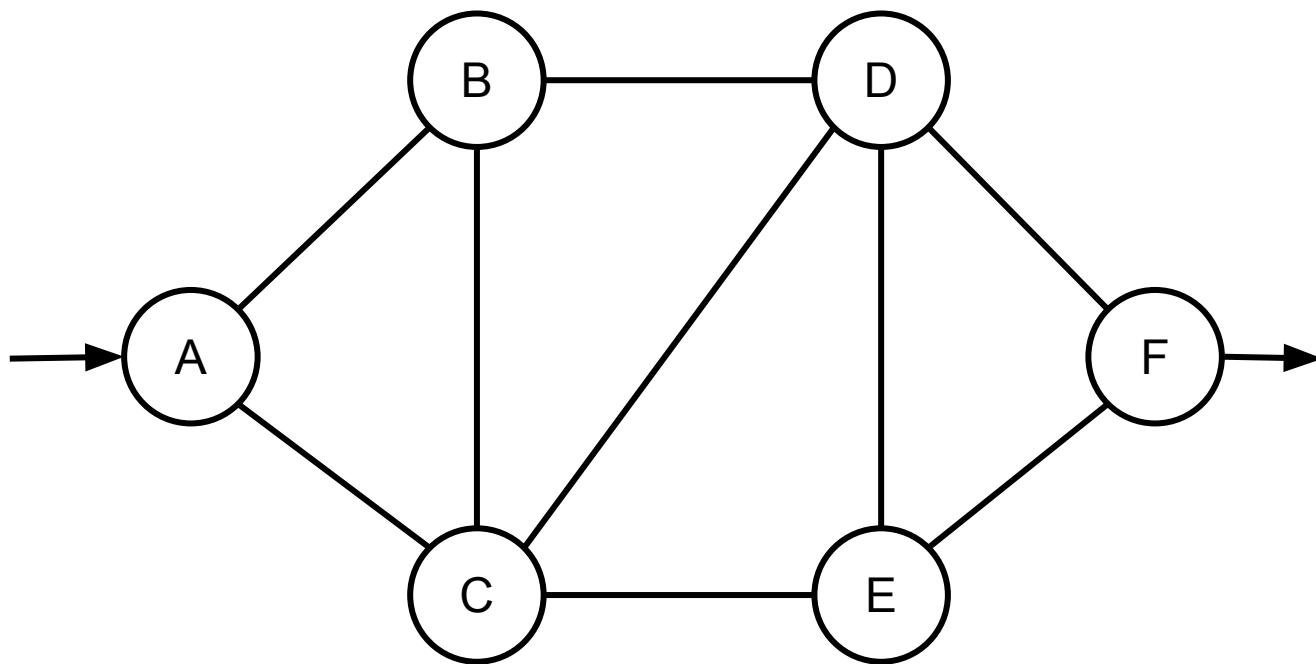
Max Cut Problem (最大割問題)

找出 s-t max cut ?



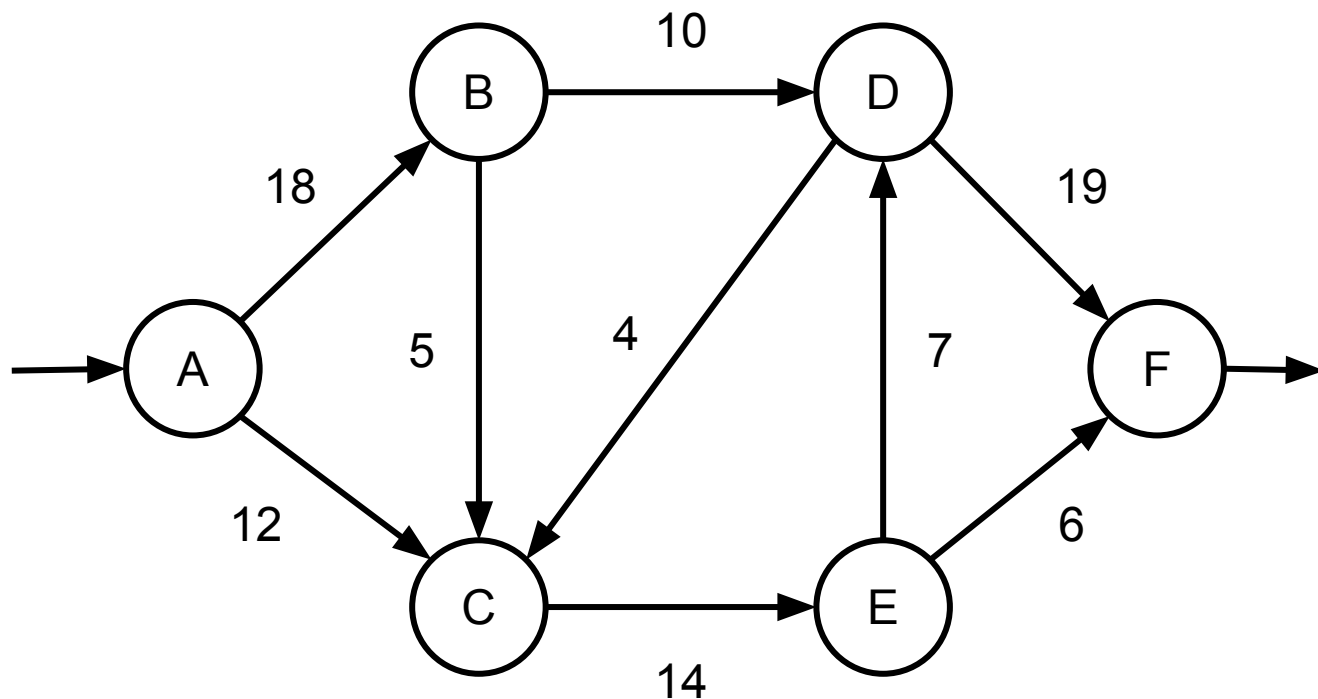
Max Cut Problem (最大割問題)

NP-hard



Max Cut Problem (最大割問題)

NP-hard



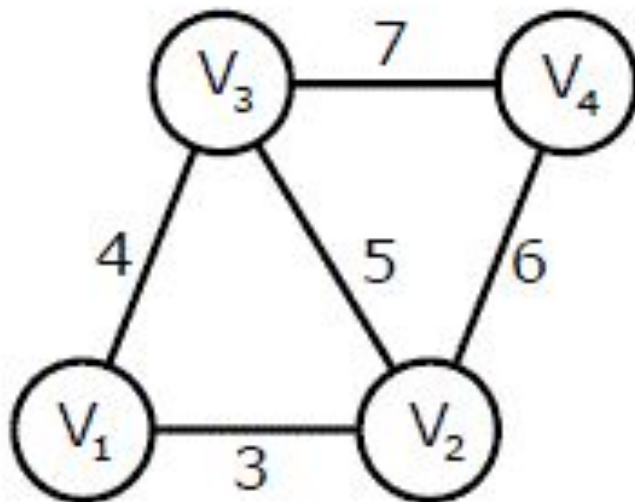
Max Cut Problem (最大割問題)

- $\frac{1}{2}$ - approximation **with high probability**
 - 隨機將點分成兩群
 - cut 期望有 $E/2$ 條邊
- derandomization
 - 找最大degree 的節點
- [Formosa OJ 635](#)

Daejeon17 E

給一個 n (≤ 100) 個節點, m (≤ 500) 條邊的無向帶權圖

對每條邊, 求出要使得這條邊有可能在 MST 上至少要刪除幾條邊?



題單 NCTU_Fox

- [Daejeon15 C](#) max flow
- [Daejeon17 E](#) min cut
- [Ho Chi Minh 17 E](#) KM
- [Samara Intercollegiate 18 D](#) bipartite matching
- [Daejeon16 D](#) bipartite matching
- [Singapore Preliminary 18 E](#) bipartite matching
- [Formosa OJ 745](#) bipartite matching, game
- [ASC13 A](#) cost flow
- [Arab14 F](#) cost flow
- [NTHU18 C](#) cost flow

題單 NCTU_Foudre

- [Daejeon15 C](#) max flow
- [SWERC15 F](#) min cut
- [NCTU17 L](#) max flow
- [UVA 10735](#) max flow
- [GCJ18R2 C](#) bipartite matching
- [PTC1806 D](#) bipartite matching, DAG edge cover
- [CF512 C](#) cycle cover in bipartite graph
- [BubbleCupX D](#) dynamic flow
- [BAPC14 A](#) dynamic flow
- [Moscow Pre-Finals 18 Day2 C](#)

題單 其他

- [PTC1901 E](#) cost flow, vertex disjoint path
- [競程日記 189](#) min cut, 平面圖 cut
- [NCPC18 I](#) flow, I2A 例題
- [Daejeon16 K](#) flow, 上下界流
- [Formosa OJ 683](#) flow
- [JAG Practice 15 J](#) cost flow, duality
- [ASC26 D](#) all pair min cut property
- [CF343 E](#) Gomory-Hu tree
- [NCPC17 L](#) Gomory-Hu tree
- [POJ2914](#) SW min-cut, all pair min cut