Sistemas Inteligentes: Redes neurais para estimação de sistemas senoidais

Nelson Carlos de Sousa Campos

Maio de 2016

1 Introdução

A estimação de frequências de sinais senoidais é um importante problema na teoria e aplicação de comunicações digitais e processamento de sinais. Ele recebeu uma grande atenção nas últimas duas décadas, e muitas técnicas tem sido desenvolvidas ao longo dos anos. [3] [4]

Neste trabalho será apresentada uma abordagem para o problema da estimativa de frequência senoidal utilizando-se funções gradientes que foram obtidas a partir do modelo de redes neurais recorrentes (Rede de Hopfield). Os modelos das redes neurais desenvolvidas podem, simultaneamente, estimar frequências, amplitudes e fases de um sinal sinusoidal a partir de amostras coletadas.

2 Definição do Problema

Considere um conjunto de amostras do sinal da equação 1, onde m é o número de senóides com amplitudes, frequências e fases a serem estimadas e A_k, f_k e Φ_k são as amplitudes, frequências e fases do sinal x_n, respectivamente.

O objectivo deste trabalho consiste em elaborar um modelo para estimar frequências, amplitudes e fases dos sinusóides com base nas medições coletadas.

$$x_n = \sum_{k=0}^{m} A_k cos(2\pi f_k n + \Phi_k),, \text{ for } n = 0, 1, 2, ...N - 1 \tag{1}$$

3 Redes de Hopfield

Esta seção discutirá a rede neural recorrente de Hopfield, que teve grande influência no ressurgimento das redes neurais na década de 1980.

De um ponto de vista prático, Hopfield apresentou o seu modelo de rede neural em um diagram de circuito elétrico.[2] A Figure 1 ilustra esta rede para o caso de dois neurônios. A equação dinâmica deste circuito é representada pela forma da equação 2.

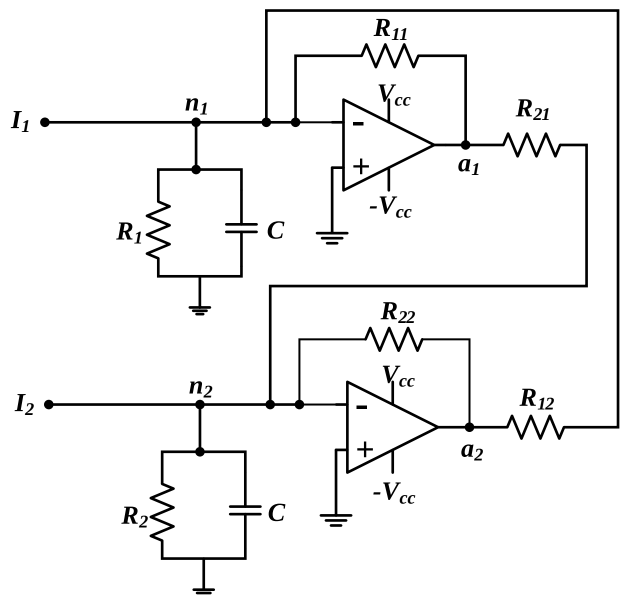

Figura 1: Rede de Hopfield com 2 neurônios

$$C\frac{dn_i(t)}{dt} = \sum_{i=1}^{S} T_{i,j}a_j - \frac{n_i(t)}{R_i} + I_i \tag{2}$$

onde,

$$|T_{i,j}| = \frac{1}{R_{i,j}} \tag{3}$$

Cada neurônio é representado por um aplificador inversor, que é realimentado em outro amplificador. Assim, de acordo com o teorema de Lyapunov, a rede evolui assintoticamente no tempo de modo a estabilizar no ponto estacionário da função de energia, de acordo com a equação 4.

$$\frac{dE}{dt} \leq 0 \tag{4}$$

Uma aplicação da rede de Hopfield na estimação de sinais senoidais da forma da equação 1 pode ser vista em [1]. Uma tentativa de reproduzir os experimentos não apresentaram resultados satisfatórios. Sendo assim, algumas alterações foram propostas no modelo com o intuito de contornar a solução do problema.

Utilizando o conceito de rede neural de Hopfield, pode-se aplicar o problema da estimação dos parâmetros de x_n como um problema de minimização de mínimos quadrados, conforme a equação 5, que tem como resultado a equação 6

$$\frac{dE}{dn} = \frac{d}{dn}\left[-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{N-1}[\ x_n - \sum_{k=1}^{m} A_k cos(2\pi f_k n + \Phi_k)]^2\right] \tag{5}$$

$$\frac{dE}{dn} = -2\pi\sum_{n=0}^{N-1}[f_1 A_1 sin(2\pi f_1 + \Phi_1) + f_2 A_2 sin(2\pi f_2 + \Phi_2)] \tag{6}$$

O gradiente da função E em relação à A_k, f_k e Φ_k são obtidos nas equações 8, 7 e 9, respectivamente, onde d_n é definido na equação 10.

$$\frac{dE}{df_k} = -\sum_{n=0}^{N-1} 2\pi n A_k sin(2\pi n f_k + \Phi_k)d_n, \text{ for } k = 0, 1, 2, ...m \tag{7}$$

$$\frac{dE}{dA_k} = \sum_{n=0}^{N-1} cos(2\pi n f_k + \Phi_k)d_n, \text{ for } k = 0, 1, 2, ...m \tag{8}$$

$$\frac{dE}{d\Phi_k} = -\sum_{n=0}^{N-1} A_k sin(2\pi n f_k + \Phi_k)d_n, \text{ for } k = 0, 1, 2, ...m \tag{9}$$

$$dn = x_n - \sum_{i=1}^{m} A_i cos(2\pi f_i n + \Phi_i) \tag{10}$$

As derivadas da frequências do sinal x_n indicam a evolução dessas frequências ao longo do tempo. Quando a derivada se anula, a frequência convergiu para um valor que obedece a regra de minimização. Sendo assim, de acordo com as equações 11, 12 e 13, as frequências, amplitudes e fases de x_n são obtidas de acordo com as equações 14, 15 e 16:

$$\frac{\frac{\Delta E}{\Delta n}}{\frac{\Delta E}{\Delta f_k}} = \frac{\Delta f_k}{\Delta n} \tag{11}$$

$$\frac{\frac{\Delta E}{\Delta n}}{\frac{\Delta E}{\Delta A_k}} = \frac{\Delta A_k}{\Delta n} \tag{12}$$

$$\frac{\frac{\Delta E}{\Delta n}}{\frac{\Delta E}{\Delta \Phi_k}} = \frac{\Delta \Phi_k}{\Delta n} \tag{13}$$

$$f_k = f_{k-1} - \frac{\frac{\Delta E}{\Delta n}}{\sum_{n=0}^{N-1} 2\pi n A_k sin(2\pi n f_k + \Phi_k) d_n} \tag{14}$$

$$A_k = A_{k-1} + \frac{\frac{\Delta E}{\Delta n}}{\sum_{n=0}^{N-1} cos(2\pi n f_k + \Phi_k) d_n} \tag{15}$$

$$\Phi_k = \Phi_{k-1} - \frac{\frac{\Delta E}{\Delta n}}{\sum_{n=0}^{N-1} A_k sin(2\pi n f_k + \Phi_k) d_n} \tag{16}$$

4 Resultados e Conclusões

Para um conjunto de 10000 amostras, o método proposto foi implementado para se estimar um sinal composto por duas senóides, cujuos parâmetros estão listados na Tabela 1.

Tabela 1: Estimação dos parâmetros de x_n

	Valor Real	Valor Inicial	Valor Estimado
A_1	1.0	1.25	1.1299
A_2	0.8	1.0	0.9215
f_1	0.3	0.375	0.3762
f_2	0.32	0.4	0.3988
Φ_1	0.7854	1.1781	0.0804
Φ_2	0.3927	0.589	-0.1170

Como estimativa inicial, escolheu-se valores 25% maiores para as amplitudes e frequências do sinal, enquanto que valores 50% maiores para as fases. A fase não teve um erro de convergência maior que os outros parâmetros, sendo este fato devido a um chute inicial maior, e em parte também porque a função a ser estimada tem múltiplos parâmetros e uma otimização multi-objetivo trataria este problema com conjuntos de soluções que minimizariam as soluções conflitantes.

5 Anexo

```
clear all
close all
clc

f = [0.30 0.32];
a = [1.0 0.8];
phi = [pi/4 pi/8];

n = [0: 1: 10000];

x1 = a(1)*cos(2*pi*f(1)*n+phi(1));
x2 = a(2)*cos(2*pi*f(2)*n+phi(2));
xn = x1+x2;


% figure(1), subplot (2,2,1), plot(n,x1),
%            subplot (2,2,2), plot(n,x2),
%            subplot (2,2,3), plot(n,xn);



ak = 1.25*a;
fk = 1.25*f;
phik = 1.5*phi;

y1 = ak(1)*cos(2*pi*fk(1)*n+phik(1));
y2 = ak(2)*cos(2*pi*fk(2)*n+phik(2));
yn=y1+y2;

dn=xn-yn;
for i=1:length(n)-1

  y1 = ak(1)*cos(2*pi*fk(1)*n+phik(1));
  y2 = ak(2)*cos(2*pi*fk(2)*n+phik(2));
  yn=y1+y2;
  dn = xn-yn;
  deltaE = -2*pi*sum( (fk(1)*ak(1)*sin(2*pi*fk(1)+phik(1))+fk(2)*ak
    (2)*sin(2*pi*fk(2)+phik(2))).*dn );

  fk(1) = fk(1)-deltaE/sum( 2*pi.*n*ak(1).*sin(2*pi*fk(1)*n+phik(1)
    ).*dn);
  fk(2) = fk(2)-deltaE/sum( 2*pi.*n*ak(2).*sin(2*pi*fk(2)*n+phik(2)
    ).*dn);

  ak(1) = ak(1)+deltaE/sum( cos(2*pi*fk(1)*n+phik(1)).*dn);
  ak(2) = ak(2)+deltaE/sum( cos(2*pi*fk(2)*n+phik(2)).*dn);

  phik(1) = phik(1)-deltaE/sum( ak(1)*sin(2*pi*fk(1)*n+phik(1)).*dn
    );
  phik(2) = phik(2)-deltaE/sum( ak(2)*sin(2*pi*fk(2)*n+phik(2)).*dn
    );
end

a, ak
f, fk
```

```
phi ,  phik
```

Código 1: Hopfield Code

Referências

[1] Lifang Han and Saroj K Biswas. Neural networks for sinusoidal frequency estimation. *Journal of The Franklin Institute*, 334(1):1–18, 1997.

[2] John J Hopfield. Neurons with graded response have collective computational properties like those of two-state neurons. *Proceedings of the national academy of sciences*, 81(10):3088–3092, 1984.

[3] Steven M Kay. *Modern spectral estimation*. Pearson Education India, 1988.

[4] Steven M Kay and Stanley Lawrence Marple Jr. Spectrum analysis—a modern perspective. *Proceedings of the IEEE*, 69(11):1380–1419, 1981.