Compléments n°1
Éléments d'algèbre linéaire

Dans ce premier **Compléments**, on fait quelques rappels sur l'algèbre linéaire.

1 Opérateur linéaire

1.1 Opérateur adjoint et matrice transposée

Proposition 1 (Opérateur adjoint)

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Hilbert. Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est un opérateur linéaire. Alors il existe un unique opérateur linéaire $A^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, appelé *opérateur adjoint à* A, tel que

$$\forall\, (x, y) \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad \langle A(x), y\rangle = \langle x, A^*(y)\rangle$$

Lorsque $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^m$ sont des espaces euclidiens, on peut identifier l'application linéaire $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et sa matrice associée $M_L \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ dans la base canonique, dans le sens où

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad L(x) = M_L\, x$$

où le produit entre M_L et x est le produit matriciel. Montrons alors qu'il existe un lien entre opérateur adjoint et transposition :

Proposition 2

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un opérateur linéaire. Si $L(x) = M_L\, x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ avec $M_L \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^m, \qquad L^*(y) = {M_L}^\top\, y$$

Signalons enfin que, de même que la "bi-transposition" (c'est-à-dire la transposition de la transposée) ne définit aucun nouvel objet, il n'existe pas de notion de "bi-adjoint" :

Proposition 3

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Hilbert. Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est un opérateur linéaire. Alors

$$(A^*)^* = A$$

1.2 Norme d'opérateur ou norme subordonnée

On rappelle la définition suivante :

Définition 1 (Norme d'opérateur)

Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un opérateur linéaire. On dit que A est *borné* si la quantité suivante

$$|||A||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}$$

est finie. On appelle alors *norme (d'opérateur)* de A la valeur $|||A|||$.

Remarquons que la définition précédente dépend du choix des normes sur $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. Si celui-ci n'est pas précisé, c'est qu'il découle naturellement du contexte. Ainsi, dans le cas des espaces de Hilbert, la norme par défaut est la norme euclidienne.

Par linéarité et A et par 1-homogénéité des normes, la norme d'un opérateur A vaut également

$$|||A||| = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathcal{B}(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}$$

où $\mathcal{B}(0,1)$ est la boule unité (fermée). On peut interpréter le caractère borné d'un opérateur linéaire de diverses manières, parmi lesquelles :

- l'image par A de la boule unité est bornée ;
- l'application A est lipschitzienne, de constante de Lipschitz $|||A|||$.

Proposition 4

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un opérateur linéaire. Alors L est borné.

Lorsque la norme d'opérateur est définie à l'aide de la norme euclidienne, on a :

Proposition 5

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Hilbert. Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un opérateur linéaire borné. Alors A^*, $A^* A$ et $A\, A^*$ sont bornés et on a

$$|||A|||^2 = |||A^*|||^2 = |||A^* A||| = |||A\, A^*|||$$

2 Matrices symétriques semi-définies positives

Définition 2 (Matrice symétrique)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice carrée. On dit que M est *symétrique* si

$$M^\top = M$$

On parle aussi parfois de matrice réelle auto-adjointe par abus de langage : c'est l'application linéaire associée à la matrice qui l'est. En effet, le caractère symétrique d'une matrice ne dépend pas des bases considérées.

Proposition 6

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Alors M est diagonalisable et il existe une matrice orthogonale $P \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

On rappelle qu'une matrice P est orthogonale si elle est inversible, d'inverse $P^\top$.

Définition 3 (Matrice semi-définie positive)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On dit que M est *semi-définie positive* si

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle M\,x, x\rangle \geq 0$$

Définition 4 (Matrice définie positive)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On dit que M est *définie positive* si

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \qquad \langle M\,x, x\rangle > 0$$

Proposition 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. La matrice M est semi-définie positive (resp. définie positive) si et seulement si ses valeurs propres sont positives (resp. strictement positives).

Démonstration : Notons que $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ ses valeurs propres, ordonnées de la manière suivante :

$$\lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_n$$

Par ailleurs, on sait qu'il existe une famille de vecteurs propres $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ vérifiant

$$\forall\, i = 1, \dots, n, \qquad A\,V_i = \lambda_i$$

et telle que $(V_i)_{1\leq i\leq n}$ forme une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que

$$\forall\, i, j = 1, \dots, n, \qquad \langle V_i, V_j\rangle = \begin{cases} \|V_i\|^2 = 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Posons $P = {}^t(V_1, \dots, V_n) \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{R})$. Alors P est une matrice orthonormée, et on a

$P^{-1} = P^\top$. Par ailleurs,

$$A = P^\top D\, P \qquad \text{avec} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Calculons maintenant $\langle A\, h, h \rangle$ pour tout $h \in \mathbb{R}^n$. En utilisant l'écriture introduite ci-dessus, on obtient que

$$\langle A\, h, h \rangle = \langle P^\top D\, P\, h, h \rangle = \langle D\, P\, h, P\, h \rangle$$

Écrivons ce produit scalaire sous forme étendue :

$$\langle D\, P\, h, P\, h \rangle = \sum_{i=1}^{n} (D\, P\, h)_i\, (P\, h)_i$$

Or, la matrice D étant diagonale, on en déduit que, pour tout $i = 1, \dots, n$, on a $(D\, P\, h)_i = \lambda_i\, (P\, h)_i$. Ainsi, on obtient que

$$\langle D\, P\, h, P\, h \rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, (P\, h)_i\, (P\, h)_i = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, (P\, h)_i^2$$

Puisque les $(P\, h)_i^2$ sont positifs, on peut minorer chacun des termes de cette somme par $\lambda_1\, (P\, h)_i^2$. En factorisant par λ_1, on obtient finalement que

$$\langle A\, h, h \rangle \geq \lambda_1 \sum_{i=1}^{n} (P\, h)_i^2 = \lambda_1\, \|P\, h\|^2 = \lambda_1\, \|h\|^2$$

la dernière égalité provenant du fait que P est orthonormée. Ainsi, si $\lambda_1 \geq 0$, alors $\langle A\, h, h \rangle \geq 0$.