Feuille d'exercices n°3
Fonctions régulières
Méthodes de gradient explicite

Exercice 1 – Exemples de fonctions régulières Soit $a > 0$. Montrer que les deux fonctions suivantes sont régulières. Donner une estimation de la constante de LIPSCHITZ de la dérivée.

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} t^2/2 & \text{si } |t| \leq a \\ a\,|t| - a^2/2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$ **(b)** $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & |t| - a\,\ln\left(1 + \dfrac{|t|}{a}\right) \end{array} \right.$

Exercice 2 – Fonctions composites Module A4, proposition 3

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière. Soit $A : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un opérateur linéaire borné et $b \in \mathcal{X}$. Montrer que $x \mapsto f(A\,x + b)$ est une fonction régulière et donner une estimation de la constante de LIPSCHITZ du gradient de cette fonction.

Exercice 3 – Lemme de descente Module A4, proposition 4

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière. Soit $(x, z) \in \mathcal{X}^2$. On pose

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} [\,0\,;1\,] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & J(x + t\,(z - x)) - \langle \nabla J(x), x + t\,(z - x) \rangle \end{array} \right.$$

(a) Vérifier que
$$J(z) - J(x) - \langle \nabla J(x), z - x \rangle = \Big[f(t) \Big]_1^0$$

(b) Montrer que
$$\Big[f(t) \Big]_1^0 \leq \left| \Big[f(t) \Big]_1^0 \right| \leq L \int_0^1 t\, \|z - x\|^2$$

(c) En déduire que
$$J(z) \leq J(x) + \langle \nabla J(x), z - x \rangle + \frac{L}{2}\, \|x - z\|^2$$

Exercice 4 – Monotonie de la méthode du gradient à pas fixe dans le cas régulier Module B2, proposition 4

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière. On suppose que J est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par la méthode du gradient à pas fixe $\tau \in \,]\,0\,;2/L\,[$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$J(x_{k+1}) - J(x_k) = \Big[J(x_k - t\,\nabla J(x_k)) \Big]_0^\tau = -\int_0^\tau \langle \nabla J(x_k), \nabla J(x_k - t\,\nabla J(x_k)) \rangle\, \mathrm{d}t$$

En déduire que
$$J(x_{k+1}) - J(x_k) = -\tau\,\|\nabla J(x_k)\|^2 + \int_0^\tau \langle \nabla J(x_k), \nabla J(x_k) - \nabla J(x_k - t\,\nabla J(x_k)) \rangle\, \mathrm{d}t$$

(b) Montrer que
$$J(x_{k+1}) - J(x_k) \leq -\left(\tau - \frac{\tau^2}{2}\, L \right) \|\nabla J(x_k)\|^2$$

(c) En déduire que la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.

Exercice 5 – Convergence de la méthode du gradient à pas fixe dans le cas convexe

Module B2, lemme 1, propositions 5 et 7

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** L-régulière. On suppose que J admet un minimiseur x^*. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par la méthode du gradient à pas fixe $\tau \in \,]\,0\,;2/L\,[$.

(a) Montrer que l'ensemble des points fixes de la méthode du gradient est l'ensemble des minimiseurs de J.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^*\|^2 - 2\,\tau\,\langle \nabla J(x_k) - \nabla J(x^*), x_k - x^* \rangle + \tau^2\,\|\nabla J(x_k) - \nabla J(x^*)\|^2$$

En déduire que $\quad \|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - \dfrac{2}{L}\left(\tau - \dfrac{\tau^2}{2}\,L\right)\|\nabla J(x_k) - \nabla J(x^*)\|^2$

puis que la suite $(\|x_k - x^*\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante convergente.

(c) Justifier que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(d) Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \|\nabla J(x_k)\| = 0$$

(e) Justifier que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que sa limite est minimiseur de J.

Exercice 6 – Convergence de la méthode du gradient à pas fixe dans le cas coercif et KŁ

Module B2, corollaire 2, lemme 2 & proposition 9

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction coercive et L-régulière. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par la méthode du gradient à pas fixe $\tau \in \,]\,0\,;2/L\,[$.

(a) Montrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_k \in \operatorname{niv}_{\leq J(x_0)} J$$

En déduire que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(b) Justifier que toute valeur d'adhérence de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est point critique de J.

On suppose à présent que J est également une fonction KŁ.

(c) Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un point critique de J.

⋆ Exercice 7 – Lemme de Baillon–Haddad

Module A4, lemme 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que

$$\exists\, L > 0, \qquad \forall\, (x,z) \in \mathcal{X}^2, \quad \langle \nabla J(x) - \nabla J(z), x - z \rangle \geq \frac{1}{L}\,\|\nabla J(x) - \nabla J(z)\|^2$$

(a) Montrer que J est L-régulière.

(b) Montrer que J est convexe.

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** et L-régulière. Soit $(x,z) \in \mathcal{X}^2$.

(c) Vérifier que, pour tout $p \in \mathcal{X}$,

$$\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p - x \rangle - \frac{L}{2}\,\|p - x\|^2 = \frac{1}{2\,L}\,\|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2 - \frac{L}{2}\left\|\frac{\nabla J(z) - \nabla J(x)}{L} - (p - x)\right\|^2$$

En déduire que $\quad \displaystyle\sup_{p\in\mathcal{X}} \left\{\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p - x \rangle - \frac{L}{2}\,\|p - x\|^2\right\} = \frac{1}{2\,L}\,\|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2$

et $\quad \displaystyle\sup_{p\in\mathcal{X}} \left\{\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p \rangle - \frac{L}{2}\,\|p - x\|^2\right\} = \langle \nabla J(z) - \nabla J(x), x \rangle + \frac{1}{2\,L}\,\|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2$

(d) Soit $p \in \mathcal{X}$. Montrer que

$$\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p \rangle - \frac{L}{2}\,\|p - x\|^2 \leq J(x) - J(p) + \langle \nabla J(z), p \rangle - \langle \nabla J(x), x \rangle$$

En déduire que

$$\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), x \rangle + \frac{1}{2\,L}\,\|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2 \leq -\langle \nabla J(x), x \rangle + J(x) + \sup_{p\in\mathcal{X}} \left\{\langle \nabla J(z), p \rangle - J(p)\right\}$$

(e) Vérifier que

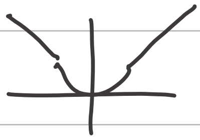
$$\langle \nabla J(z), z \rangle - J(z) = \sup_{p\in\mathcal{X}} \left\{\langle \nabla J(z), p \rangle - J(p)\right\}$$

(f) Conclure.

Exercice 1 – Exemples de fonctions régulières Soit $a > 0$. Montrer que les deux fonctions suivantes sont régulières. Donner une estimation de la constante de Lipschitz de la dérivée.

(a) $f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} t^2/2 & \text{si } |t| \leq a \\ a\,|t| - a^2/2 & \text{sinon} \end{cases} \end{array} \right.$ (b) $g : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & |t| - a \ln\left(1 + \frac{|t|}{a}\right) \end{array} \right.$

Ex 1



(a)

$$f'(t) = \begin{cases} t & \text{si } |t| \leq a \\ a \cdot \frac{t}{|t|} & \text{sinon} \end{cases}$$

① $t_1, t_2 \in \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \leq a\}$,

$$|f'(t_1) - f'(t_2)| = |t_1 - t_2| \leq 1 \times |t_1 - t_2|$$

② $t_1, t_2 \in \{t \in \mathbb{R} \mid |t| > a\}$,

(i) $t_1 \cdot t_2 < 0$,

$$|f'(t_1) - f'(t_2)| = \left| a \cdot \frac{t_1}{|t_1|} - a \cdot \frac{t_2}{|t_2|} \right| \leq 2a \leq 1 \cdot |t_1 - t_2|$$

(ii) $t_1 \cdot t_2 \geq 0$,

$$|f'(t_1) - f'(t_2)| = 0 \leq 1 \cdot |t_1 - t_2|$$

③ $t_1 \in \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \leq a\}$, $t_2 \in \{t \in \mathbb{R} \mid |t| > a\}$,

$$|f'(t_1) - f'(t_2)| = \left| t_1 - a \cdot \frac{t_2}{|t_2|} \right| \leq |t_1 - t_2|$$

Donc f est 1-régulière.

Exercice 1 – Exemples de fonctions régulières Soit $a > 0$. Montrer que les deux fonctions suivantes sont régulières. Donner une estimation de la constante de LIPSCHITZ de la dérivée.

(a) $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & \begin{cases} t^2/2 & \text{si } |t| \leq a \\ a\,|t| - a^2/2 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$ (b) $g : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & |t| - a \ln\left(1 + \frac{|t|}{a}\right) \end{cases}$

(b)
$$g'(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{a+t} & \text{si } t \geqslant 0 \\ \dfrac{t}{a-t} & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

① $t_1, t_2 \geqslant 0$
$$|g'(t_1) - g'(t_2)| = \left| \frac{t_1}{a+t_1} - \frac{t_2}{a+t_2} \right| = a \cdot \left| \frac{t_1 - t_2}{(a+t_1)(a+t_2)} \right|$$
$$\leqslant \frac{a}{a^2} \cdot |t_1 - t_2|$$
$$= \frac{1}{a} \cdot |t_1 - t_2|$$

② $t_1, t_2 < 0$
$$|g'(t_1) - g'(t_2)| = \left| \frac{t_1}{a-t_1} - \frac{t_2}{a-t_2} \right| = a \cdot \left| \frac{t_1 - t_2}{(a-t_1)(a-t_2)} \right|$$
$$\leqslant \frac{a}{a^2} \cdot |t_1 - t_2|$$
$$= \frac{1}{a} \cdot |t_1 - t_2|$$

③ $t_1 \geqslant 0, t_2 < 0$
$$|g'(t_1) - g'(t_2)| = \left| \frac{t_1}{a+t_1} - \frac{t_2}{a-t_2} \right| = \left| \frac{a(t_1 - t_2) - 2t_1 t_2}{(a+t_1)(a-t_2)} \right|$$
$$\leqslant \frac{a}{a^2} \cdot |t_1 - t_2|$$
$$= \frac{1}{a} \cdot |t_1 - t_2|$$

Exercice 2 – Fonctions composites Module A4, proposition 3

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière. Soit $A : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un opérateur linéaire borné et $b \in \mathcal{X}$. Montrer que $x \mapsto f(Ax+b)$ est une fonction régulière et donner une estimation de la constante de LIPSCHITZ du gradient de cette fonction.

Ex2

La fonction cosidérée est différentiable de gradient

$$x \longmapsto A^* \nabla f(Ax+b)$$

puis on utilise la régularité de J pour écrire que,

$\forall (x,z) \in \mathcal{X}^2$,

$$\|\nabla f(Ax+b) - \nabla f(Az+b)\| \leqslant L \cdot \|Ax+b - Az+b\|$$
$$\leqslant L \cdot |||A||| \cdot \|x-z\|$$

alors

$$\|A^* \cdot \nabla f(Ax+b) - A^* \cdot \nabla f(Az+b)\| \leqslant L \cdot |||A|||^2 \cdot \|x-z\|$$

donc $x \rightarrow f(Ax+b)$ est une fonction $L \cdot |||A|||^2$ – régulière

Exercice 3 – Lemme de descente

Module A4, proposition 4

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière. Soit $(x,z) \in \mathcal{X}^2$. On pose

$$f : \left\{ \begin{array}{rcl} [0\,;1] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & J(x + t\,(z-x)) - \langle \nabla J(x), x + t\,(z-x) \end{array} \right.$$

(a) Vérifier que
$$J(z) - J(x) - \langle \nabla J(x), z - x\rangle = \Big[f(t)\Big]_0^1$$

(b) Montrer que
$$\Big[f(t)\Big]_1^0 \leq \left|\Big[f(t)\Big]_1^0\right| \leq L \int_0^1 t\,\|z-x\|^2$$

(c) En déduire que
$$J(z) \leq J(x) + \langle \nabla J(x), z - x\rangle + \frac{L}{2}\,\|x - z\|^2$$

(a) $$[f(t)]_0^1 = f(1) - f(0)$$
$$= J(z) - \langle \nabla J(x), z \rangle - J(x) + \langle \nabla J(x), x \rangle$$
$$= J(z) - J(x) - \langle \nabla J(x), z-x \rangle$$

(b) $$[f(t)]_0^1 = \int_0^1 f'(t)\,dt$$
$$= \int_0^1 \langle \nabla J(x+t(z-x)), z-x \rangle - \langle \nabla J(x), z-x \rangle \,dt$$
$$= \int_0^1 \langle \nabla J(x+t(z-x)) - \nabla J(x), z-x \rangle \,dt$$

$$[f(t)]_0^1 \leq \left|[f(t)]_0^1\right| = \left|\int_0^1 \langle \nabla J(x+t(z-x)) - \nabla J(x), z-x \rangle \,dt\right|$$
$$\leq \int_0^1 \left|\langle \nabla J(x+t(z-x)) - \nabla J(x), z-x \rangle\right| dt$$
$$\leq \int_0^1 \|\nabla J(x+t(z-x)) - \nabla J(x)\| \cdot \|z-x\|\,dt$$
$$\leq \int_0^1 L \cdot t \cdot \|z-x\|^2\,dt$$
$$= \frac{L}{2} \cdot \|z-x\|^2$$

(c) D'après (a) et (b), on a
$$J(z) \leq J(x) + \langle \nabla J(x), x-z \rangle + \frac{L}{2} \cdot \|x-z\|^2$$

Exercice 4 – Monotonie de la méthode du gradient à pas fixe dans le cas régulier

Module B2, proposition 4

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière. On suppose que J est minorée. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par la méthode du gradient à pas fixe $\tau \in]0; 2/L[$.

(a) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$J(x_{k+1}) - J(x_k) = \Big[J(x_k - t\,\nabla J(x_k))\Big]_0^\tau = -\int_0^\tau \langle \nabla J(x_k), \nabla J(x_k - t\,\nabla J(x_k))\rangle\,\mathrm{d}t$$

En déduire que

$$J(x_{k+1}) - J(x_k) = -\tau\,\|\nabla J(x_k)\|^2 + \int_0^\tau \langle \nabla J(x_k), \nabla J(x_k) - \nabla J(x_k - t\,\nabla J(x_k))\rangle\,\mathrm{d}t$$

(b) Montrer que
$$J(x_{k+1}) - J(x_k) \leq -\left(\tau - \frac{\tau^2}{2}\,L\right)\|\nabla J(x_k)\|^2$$

(c) En déduire que la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.

(a) $J(x_{k+1}) - J(x_k) = J(x_k + \tau\nabla J(x_k)) - J(x_k)$

$= \left[J(x_k - t\cdot\nabla J(x_k))\right]_0^\tau$

$= \int_0^\tau \langle -\nabla J(x_k), \nabla J(x_k - t\cdot\nabla J(x_k))\rangle\, dt$

$= -\int_0^\tau \langle \nabla J(x_k), \nabla J(x_k - t\cdot\nabla J(x_k))\rangle\, dt$

$= -\int_0^\tau \langle \nabla J(x_k), \nabla J(x_k)\rangle - \langle \nabla J(x_k), -\nabla J(x_k) + \nabla J(x_k - t\cdot\nabla J(x_k))\rangle\, dt$

$= -\tau\cdot\|\nabla J(x_k)\|^2 + \int_0^\tau \langle \nabla J(x_k), \nabla J(x_k) - \nabla J(x_k - t\cdot\nabla J(x_k))\rangle\, dt$

(b) D'après (a)

$J(x_{k+1}) - J(x_k) \leq -\tau\cdot\|\nabla J(x_k)\|^2 + \int_0^\tau |\langle \nabla J(x_k), \nabla J(x_k) - \nabla J(x_k - t\cdot\nabla J(x_k))\rangle|\, dt$

$\leq -\tau\cdot\|\nabla J(x_k)\|^2 + \int_0^\tau \|\nabla J(x_k)\|\cdot\|\nabla J(x_k) - \nabla J(x_k - t\cdot\nabla J(x_k))\|\, dt$

$\leq -\tau\cdot\|\nabla J(x_k)\|^2 + \int_0^\tau \|\nabla J(x_k)\|\cdot L\cdot\|x_k - x_k + t\cdot\nabla J(x_k)\|\, dt$

$= -(\tau - \int_0^\tau Lt\,dt)\cdot\|\nabla J(x_k)\|^2$

$= -(\tau - \frac{L}{2}\tau^2)\cdot\|\nabla J(x_k)\|^2$

(c) Par l'hypothèse sur $\tau \in]0, \frac{2}{L}[$, on a $\tau - \frac{L}{2}\cdot\tau^2 > 0$

donc $J(x_{k+1}) \leq J(x_k)$ alors $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente

Exercice 5 – Convergence de la méthode du gradient à pas fixe dans le cas convexe

Module B2, lemme 1, propositions 5 et 7

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** L-régulière. On suppose que J admet un minimiseur x^*. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par la méthode du gradient à pas fixe $\tau \in \,]\,0\,;2/L\,[$.

(a) Montrer que l'ensemble des points fixes de la méthode du gradient est l'ensemble des minimiseurs de J.

(b) Soit $k \in \mathbb{N}$. Justifier que

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - x^*\|^2 - 2\,\tau\,\langle \nabla J(x_k) - \nabla J(x^*), x_k - x^*\rangle + \tau^2\,\|\nabla J(x_k) - \nabla J(x^*)\|^2$$

En déduire que $\quad \|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - \dfrac{2}{L}\left(\tau - \dfrac{\tau^2}{2}\,L\right)\|\nabla J(x_k) - \nabla J(x^*)\|^2$

puis que la suite $(\|x_k - x^*\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante convergente.

(c) Justifier que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(d) Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \|\nabla J(x_k)\| = 0$$

(e) Justifier que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que sa limite est minimiseur de J.

(a) x^* est point fixes de la méthode du gradient

$\iff \quad x^* = x^* - \tau \cdot \nabla J(x^*)$

$\iff \quad \nabla J(x^*) = 0$

convexe

$\iff \quad x^*$ est minimiseur de J

(b) $\|x_{k+1} - x^*\|^2 = \|x_k - \tau\cdot\nabla J(x_k) - x^* + \tau\cdot\nabla J(x^*)\|^2$

$= \|x_k - x^*\|^2 - 2\cdot\tau\cdot\langle x_k - x^*, \nabla J(x_k) - \nabla J(x^*)\rangle + \tau^2\cdot\|\nabla J(x_k) - \nabla J(x^*)\|^2$

comme J est L-régulière, on a

$$\|\nabla J(x_k) - \nabla J(x^*)\| \leq L\cdot\|x_k - x^*\|$$

donc

$-2\cdot\tau\cdot\langle x_k - x^*, \nabla J(x_k) - \nabla J(x^*)\rangle \leq -\frac{2}{L}\cdot\tau\cdot\|\nabla J(x_k) - \nabla J(x^*)\|^2$

alors

$$\|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2 - \frac{2}{L}\cdot\left(\tau - \frac{\tau^2}{2}\cdot L\right)\|\nabla J(x_k) - \nabla J(x^*)\|^2$$

comme $\quad \frac{2}{L}\cdot\left(\tau - \frac{\tau^2}{2}L\right) = \tau\cdot\left(\frac{2}{L} - \tau\right) \geq 0$

alors $\quad \|x_{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x_k - x^*\|^2$

donc $\quad (\|x_k - x^*\|^2)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante convergente

(c) Justifier que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(c) D'après (b), on a $\lim_{k\to+\infty} x_k = x^* < +\infty$

Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, on a $\lim_{k\to+\infty} x_k = +\infty$

C'est absurde.

Donc $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(d) Montrer que

$$\lim_{k\to+\infty} \|\nabla J(x_k)\| = 0$$

(d)
$$\|\nabla J(x_k)\| = \left\|\frac{x_k - x_{k+1}}{\tau}\right\|$$
$$\leqslant \frac{1}{\tau}\left(\|x_{k+1}-x^*\| + \|x_k - x^*\|\right)$$

et on a

$$\lim_{k\to+\infty} \frac{1}{\tau}\left(\|x_{k+1}-x^*\| + \|x_k - x^*\|\right) = 0$$

donc

$$\lim_{k\to+\infty} \|\nabla J(x_k)\| = 0$$

(e) Justifier que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Montrer que sa limite est minimiseur de J.

(e) Puisque la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, elle admet une sous-suite $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente. Notons x^* sa limite.

D'après (d), la sous-suite des gradients $\nabla J(x_k)$ converge vers 0. Par continuité, on a

$$0 = \lim_{j\to+\infty} \nabla J(x_{k_j}) = \nabla J\left(\lim_{j\to+\infty} x_{k_j}\right) = \nabla J(x^*)$$

alors il existe une sous-suite $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point critique de J.

Par unicité de la limite,

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k - x^*\| = \lim_{j\to+\infty} \|x_{k_j} - x^*\| = 0$$

alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*.

Et comme J est convexe, alors x^* est minimiseur de J.

Exercice 6 – Convergence de la méthode du gradient à pas fixe dans le cas coercif et KŁ

Module B2, corollaire 2, lemme 2 & proposition 9

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction coercive et L-régulière. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par la méthode du gradient à pas fixe $\tau \in \,]\,0\,;2/L\,[$.

(a) Montrer que $\qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_k \in \operatorname{niv}_{\leq J(x_0)} J$

En déduire que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(b) Justifier que toute valeur d'adhérence de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est point critique de J.

On suppose à présent que J est également une fonction KŁ.

(c) Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un point critique de J.

(a) Par la propriété de décroissance du critère, on a

$$\forall k\in\mathbb{N}, \quad J(x_k) \leq J(x_0)$$

donc $\quad \forall k\in\mathbb{N}, \quad x_k \in \operatorname{niv}_{\leq J(x_0)} J$

Par l'absurde, on suppose $\operatorname{niv}_{\leq J(x_0)} J$ n'est pas borné.

Par l'hypothèse, il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{X}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k\| = +\infty \quad \text{et} \quad \forall k\in\mathbb{N}, \ J(x_k) \leq J(x_0)$$

La suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bornée, elle ne peut pas diverger vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que J soit coercive.

Donc $\operatorname{niv}_{\leq J(x_0)} J$ est borné, alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est borné.

Exercice 6 – Convergence de la méthode du gradient à pas fixe dans le cas coercif et KŁ

Module B2, corollaire 2, lemme 2 & proposition 9

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction coercive et L-régulière. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par la méthode du gradient à pas fixe $\tau \in \,]\,0\,;2/L\,[$.

(a) Montrer que $\qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad x_k \in \mathrm{niv}_{\leq J(x_0)} J$

En déduire que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

(b) Justifier que toute valeur d'adhérence de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est point critique de J.

On suppose à présent que J est également une fonction KŁ.

(c) Montrer que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un point critique de J.

(b) D'après (a), $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée, elle admet une sous-suite $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente. Notons x^* sa limite.

D'après l'exercice 5, la sous-suite des gradients $\nabla J(x_{k_j})$ converge vers 0. Par continuité,

$$0 = \lim_{j\to+\infty} \nabla J(x_{k_j}) = \nabla J\left(\lim_{j\to+\infty} x_{k_j}\right) = \nabla J(x^*)$$

donc toute valeur de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est point critique de J.

(c) Pour $\forall k\in\mathbb{N}$, $x_{k+1} = x_k - \tau\cdot\nabla J(x_k)$

(C1) D'après la proposition 4, on a

$$J(x_{k+1}) \leq J(x_k) - \left(\tau - \frac{\tau^2}{2}L\right)\cdot\|\nabla J(x_k)\|^2$$

$$J(x_{k+1}) + \left(\tau - \frac{\tau^2}{2}L\right)\cdot\frac{1}{\tau}\cdot\|x_k - x_{k+1}\|^2 \leq J(x_k)$$

$$J(x_{k+1}) + \left(1 - \frac{\tau}{2}\cdot L\right)\|x_k - x_{k+1}\|^2 \leq J(x_k)$$

(C2) $\qquad x_{k+1} = x_k - \tau\nabla J(x_k) \implies \|\nabla J(x_k)\| = \frac{1}{\tau}\|x_k - x_{k+1}\|$

(C3) D'après (b), il existe une sous-suite $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$, tel que

$$\lim_{j\to+\infty} x_{k_j} = x^* \quad \text{et} \quad \lim_{j\to+\infty} J(x_{k_j}) = J(x^*)$$

Par le théorème d'Attouch, Bolte & Svaiter, alors la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*

⋆ Exercice 7 – Lemme de BAILLON–HADDAD Module A4, lemme 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable telle que

$$\exists\, L > 0, \qquad \forall\, (x,z) \in \mathcal{X}^2, \quad \langle \nabla J(x) - \nabla J(z), x - z\rangle \geq \frac{1}{L} \left\|\nabla J(x) - \nabla J(z)\right\|^2$$

(a) Montrer que J est L-régulière.

(b) Montrer que J est convexe.

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** et L-régulière. Soit $(x,z) \in \mathcal{X}^2$.

(c) Vérifier que, pour tout $p \in \mathcal{X}$,

$$\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p - x\rangle - \frac{L}{2}\left\|p - x\right\|^2 = \frac{1}{2\,L}\left\|\nabla J(z) - \nabla J(x)\right\|^2 - \frac{L}{2}\left\|\frac{\nabla J(z) - \nabla J(x)}{L} - (p - x)\right\|^2$$

En déduire que $\displaystyle \sup_{p\in\mathcal{X}} \left\{ \langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p - x\rangle - \frac{L}{2}\left\|p - x\right\|^2 \right\} = \frac{1}{2\,L}\left\|\nabla J(z) - \nabla J(x)\right\|^2$

et $\displaystyle \sup_{p\in\mathcal{X}} \left\{ \langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p\rangle - \frac{L}{2}\left\|p - x\right\|^2 \right\} = \langle \nabla J(z) - \nabla J(x), x\rangle + \frac{1}{2\,L}\left\|\nabla J(z) - \nabla J(x)\right\|^2$

(d) Soit $p \in \mathcal{X}$. Montrer que

$$\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p\rangle - \frac{L}{2}\left\|p - x\right\|^2 \leq J(x) - J(p) + \langle \nabla J(z), p\rangle - \langle \nabla J(x), x\rangle$$

En déduire que

$$\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), x\rangle + \frac{1}{2\,L}\left\|\nabla J(z) - \nabla J(x)\right\|^2 \leq -\langle \nabla J(x), x\rangle + J(x) + \sup_{p\in\mathcal{X}} \Big\{ \langle \nabla J(z), p\rangle - J(p) \Big\}$$

(e) Vérifier que $\displaystyle \langle \nabla J(z), z\rangle - J(z) = \sup_{p\in\mathcal{X}} \Big\{ \langle \nabla J(z), p\rangle - J(p) \Big\}$

(f) Conclure.

(a) $\frac{1}{L}\|\nabla J(x) - \nabla J(z)\|^2 \leq \|\nabla J(x) - \nabla J(z)\| \cdot \|x - z\|$

$\|\nabla J(x) - \nabla J(z)\| \leq L \cdot \|x - z\|$

Donc J est L-régulière

(b) $\langle \nabla J(x) - \nabla J(z), x - z\rangle \geq \frac{1}{L}\|\nabla J(x) - \nabla J(z)\|^2 \geq 0$

donc ∇J est monotone

Donc J est convexe

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** et L-régulière. Soit $(x, z) \in \mathcal{X}^2$.

(c) Vérifier que, pour tout $p \in \mathcal{X}$,

$$\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p - x \rangle - \frac{L}{2} \|p - x\|^2 = \frac{1}{2L} \|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2 - \frac{L}{2} \left\| \frac{\nabla J(z) - \nabla J(x)}{L} - (p - x) \right\|^2$$

En déduire que $\sup_{p \in \mathcal{X}} \left\{ \langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p - x \rangle - \frac{L}{2} \|p - x\|^2 \right\} = \frac{1}{2L} \|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2$

et $\sup_{p \in \mathcal{X}} \left\{ \langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p \rangle - \frac{L}{2} \|p - x\|^2 \right\} = \langle \nabla J(z) - \nabla J(x), x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2$

(c) $\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p-x \rangle - \frac{L}{2} \|p-x\|^2$

$= \frac{1}{2L} \|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2 - \frac{L}{2} \left(\frac{\|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2}{L^2} - \frac{2}{L} \langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p-x \rangle + \|p-x\|^2 \right)$

$= \frac{1}{2L} \|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2 - \frac{L}{2} \cdot \left\| \frac{\nabla J(z) - \nabla J(x)}{L} - (p-x) \right\|^2$

comme $\frac{L}{2} \cdot \left\| \frac{\nabla J(z) - \nabla J(x)}{L} - (p-x) \right\|^2 \geq 0$, alors

quand $p = x + \frac{\nabla J(z) - \nabla J(x)}{L}$, on a

$\sup_{p \in \mathcal{X}} \left\{ \langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p-x \rangle - \frac{L}{2} \|p-x\|^2 \right\}$

$= \frac{1}{2L} \|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2$

Donc

$\sup_{p \in \mathcal{X}} \left\{ \langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p \rangle - \frac{L}{2} \|p-x\|^2 \right\}$

$= \langle \nabla J(z) - \nabla J(x), x \rangle + \frac{1}{2L} \|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2$

(d) Soit $p \in \mathcal{X}$. Montrer que

$$\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p\rangle - \frac{L}{2}\|p-x\|^2 \leq J(x) - J(p) + \langle \nabla J(z), p\rangle - \langle \nabla J(x), x\rangle$$

En déduire que

$$\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), x\rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2 \leq -\langle \nabla J(x), x\rangle + J(x) + \sup_{p\in\mathcal{X}}\left\{\langle \nabla J(z), p\rangle - J(p)\right\}$$

(d) D'après la lemme de descente

$$J(p) \leqslant J(x) + \langle \nabla J(x), p-x\rangle + \frac{L}{2}\|p-x\|^2$$

et on a

$$\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p\rangle - \frac{L}{2}\|p-x\|^2 \leqslant J(x) - J(p) + \langle \nabla J(z), p\rangle - \langle \nabla J(x), x\rangle$$

d'après (c), on a

$$\sup_{p\in\mathcal{X}}\left\{\langle \nabla J(z) - \nabla J(x), p\rangle - \frac{L}{2}\|p-x\|^2\right\}$$

$$= \langle \nabla J(z) - \nabla J(x), x\rangle + \frac{1}{2L}\|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2$$

$$\leqslant -\langle \nabla J(x), x\rangle + J(x) + \sup_{p\in\mathcal{X}}\left\{\langle \nabla J(z), p\rangle - J(p)\right\}$$

(e) Vérifier que $$\langle \nabla J(z), z\rangle - J(z) = \sup_{p\in\mathcal{X}}\left\{\langle \nabla J(z), p\rangle - J(p)\right\}$$

(e) J est convexe et différentiable, on a donc pour tout $p \in \mathcal{X}$,

$J(p) \geqslant J(z) + \langle \nabla J(z), p-z\rangle$ soit $\langle \nabla J(z), z\rangle - J(z) \geqslant \langle \nabla J(z), p\rangle - J(p)$

alors

$$\langle \nabla J(z), z\rangle - J(z) = \sup_{p\in\mathcal{X}}\left\{\langle \nabla J(z), p\rangle - J(p)\right\}$$

(f) Conclure.

(f) Pour tout $(x,z) \in \mathcal{X}^2$

$$\langle \nabla J(x), x \rangle - J(x) \leq \langle \nabla J(x) - \nabla J(z), x \rangle - \frac{1}{2L} \|\nabla J(z) - \nabla J(x)\|^2 + \langle \nabla J(z), z \rangle - J(z)$$