Feuille d'exercices n°4
Opérateur de Moreau
Algorithme du point proximal

Exercice 1 – Opérateur de Moreau dans le cas convexe

Module A5, Propositions 1, 5 et 10

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$.

(a) Montrer que $\operatorname{prox}_J(x^0)$ est non vide et possède un unique élément.

(b) Soit $x^+ \in \mathcal{X}$. Montrer que $x^+ = \operatorname{prox}_J(x^0)$ si et seulement si $x^0 - x^+ \in \partial J(x^+)$.

(c) En déduire que $\operatorname{prox}_J(x^0) = x^0$ si et seulement si x^0 est un minimiseur de J.

Exercice 2 – Quelques exemples

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\operatorname{prox}_J(x^0)$ pour tout x^0.

(a) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\,\|x\|^2 \end{array} \right.$

(b) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{array} \right.$

(c) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\|_1 \end{array} \right.$

(d) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & \chi_{\mathcal{B}(0,1)}(x) \end{array} \right.$

Exercice 3 – Règles de calcul

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Soit $z \in \mathcal{X}$ et $\alpha > 0$. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\operatorname{prox}_J(x^0)$ en fonction de prox_f.

(a) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x - z) \end{array} \right.$

(b) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(\alpha\, x) \end{array} \right.$

Exercice 4 – Ferme non-expansivité de l'opérateur de Moreau

Module A5, Proposition 7 et Corollaire 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $(x, x') \in \mathcal{X}^2$.

(a) Montrer que
$$\langle \operatorname{prox}_J(x) - \operatorname{prox}_J(x'), x - x' \rangle \geq \|\operatorname{prox}_J(x) - \operatorname{prox}_J(x')\|^2$$

(b) En déduire que prox_J est 1-lipschitzien, puis que prox_J est continu.

Exercice 5 – Inégalité proximale

Module A5, Proposition 8

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $\tau > 0$ et $x^0 \in \mathcal{X}$. On pose
$$x^+ \in \operatorname{prox}_{\tau J}(x^0)$$

Montrer que
$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) \geq J(x^+) - \frac{1}{\tau}\,\langle x - x^+, x^+ - x^0 \rangle$$

Exercice 6 – Convergence de PPA dans le cas convexe Module B5, Propositions 2, 3 et 5

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, propre et s.c.i. On suppose que J admet un minimiseur x^*. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme du point proximal de pas $\tau > 0$.

(a) Montrer que
$$J(x_{k+1}) \leq J(x_{k+1}) + \frac{1}{2\,\tau}\,\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq J(x_k)$$
En déduire que la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente. On note J^* sa limite.

(b) On pose
$$p_{k+1} = \frac{1}{\tau}\,(x_k - x_{k+1})$$
Montrer que $p_{k+1} \in \partial J(x_{k+1})$. En déduire que
$$\langle p_{k+1} - p_k, p_{k+1}\rangle \leq 0$$

(c) Montrer que
$$\|p_{k+1}\|^2 \leq \|p_k\| \cdot \|p_{k+1}\|$$
En déduire que la suite $(\|p_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante convergente.

(d) Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$0 \leq \frac{\tau}{2}\sum_{k=0}^{K}\|p_k\|^2 \leq J(x_0) - J(x_{K+1})$$

(e) En déduire que la suite $(\|p_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(f) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$J(x^*) - J(x_{k+1}) \geq \frac{1}{\tau}\,\langle x_k - x_{k+1}, x^* - x_{k+1}\rangle \geq \frac{1}{2\,\tau}\,\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\,\tau}\big(\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2\big)$$

(g) Montrer que
$$k\,J(x_k) - (k+1)\,J(x_{k+1}) + J(x_{k+1}) \geq \frac{k}{\tau}\,\|x_k - x_{k+1}\|^2$$
En déduire que
$$J(x^*) + k\,J(x_k) - (k+1)\,J(x_{k+1}) \geq \frac{1+2\,k}{2\,\tau}\,\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\,\tau}\big(\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2\big)$$

(h) Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$K\,J(x^*) - K\,J(x_K) \geq \sum_{k=0}^{K-1}\frac{1+2\,k}{2\,\tau}\,\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\,\tau}\big(\|x_0 - x^*\|^2 - \|x_K - x^*\|^2\big)$$
En déduire que la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le minimum de J.

(i) Montrer que toute valeur d'adhérence de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est minimiseur de J.

> Pour montrer la convergence des itérées x_k vers un minimiseur, on peut utiliser l'équivalence entre l'algorithme du point proximal et la méthode du gradient explicite.

Exercice 1 – Opérateur de Moreau dans le cas convexe | Module A5, Propositions 1, 5 et 10

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$.

(a) Montrer que $\text{prox}_J(x^0)$ est non vide et possède un unique élément.

(b) Soit $x^+ \in \mathcal{X}$. Montrer que $x^+ = \text{prox}_J(x^0)$ si et seulement si $x^0 - x^+ \in \partial J(x^+)$.

(c) En déduire que $\text{prox}_J(x^0) = x^0$ si et seulement si x^0 est un minimiseur de J.

(a) Par la définition, pour la fonction

$$F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$
$$x \longmapsto J(x) + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2$$

puisque J est convexe, on a F est fortement convexe

Donc F admet un unique minimiseur.

Alors $\text{prox}_J(x_0) = \underset{x \in \mathcal{X}}{\text{argmin}} \left\{ J(x) + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2 \right\}$ est non-vide et possède un unique élément.

(b) Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Par définition du point proximal, on a

$$x^+ = \underset{x \in \mathcal{X}}{\text{argmin}} \left\{ J(x) + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2 \right\}$$

$\overset{\text{régle de Fermat}}{\Longleftrightarrow}$

$J(x) + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2$ est fortement convexe

$$0 \in \partial F(x^+) = \partial J(x^+) + (x^+ - x^0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^0 - x^+ \in \partial J(x^+)$$

(c) D'après (b)

$$x^0 = \text{prox}_J(x^0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 = x^0 - x^0 \in \partial J(x^0)$$

$$\Longleftrightarrow \quad x^0 \text{ est minimiseur de } J$$

Exercice 2 – Quelques exemples

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\mathrm{prox}_J(x^0)$ pour tout x^0.

(a) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\|x\|^2 \end{cases}$

(b) $J : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{cases}$

(c) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\|_1 \end{cases}$

(d) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ x & \mapsto & \chi_{\mathcal{B}(0,1)}(x) \end{cases}$

(a) $\mathrm{prox}_J(x^0) = \underset{x\in\mathcal{X}}{\mathrm{argmin}} \left\{ \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|x-x^0\|^2 \right\}$

$F(x) = \frac{1}{2}\|x\|^2 + \frac{1}{2}\|x-x^0\|^2$

$\partial F(x) = x + x - x_0$

on prend $\partial F(x^*) = 0$ alors $x^* = \frac{x^0}{2}$

donc $\mathrm{prox}_J(x^0) = \frac{x^0}{2}$

(b) Puisque $J(x) = |x|$ est convexe, le point $x^+ = \mathrm{prox}_J(x^0)$ est caractérisé par

$$x^0 - x^+ \in \partial J(x^+) = \begin{cases} \left\{\frac{x^+}{|x^+|}\right\} & \text{si } x^+ \neq 0 \\ [0,1] & \text{si } x^+ = 0 \end{cases}$$

on a

① $x^+ = 0 \iff x^0 \in [0,1]$

② $x^+ > 0 \iff x^0 - x^+ = 1 \iff x^+ = x^0 - 1$

③ $x^+ < 0 \iff x^0 - x^+ = -1 \iff x^+ = x^0 + 1$

$\left.\begin{matrix} ② \\ ③ \end{matrix}\right\} x^+ = \frac{x^0}{|x^0|}(|x^0| - 1)$

donc

$$\mathrm{prox}_J(x^0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^0 \in [0,1] \\ \frac{x^0}{|x^0|}(|x^0|-1) & \text{si } x^0 \notin [0,1] \end{cases}$$

Exercice 2 – Quelques exemples

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\mathrm{prox}_J(x^0)$ pour tout x^0.

(a) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\|x\|^2 \end{cases}$

(b) $J : \begin{cases} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| \end{cases}$

(c) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\|_1 \end{cases}$

(d) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & \chi_{\mathcal{B}(0,1)}(x) \end{cases}$

(c) Puisque $J(x) = \|x\|_1$ est convexe, le point $x^+ = \mathrm{prox}_J(x^0)$ est caractérisé par

$$x^0 - x^+ \in \partial J(x^+) = \begin{cases} \left\{ \frac{x^+}{\|x^+\|_1} \right\} & \text{si } x^+ \neq 0 \\ \{ p \in \mathcal{X} \mid \|p\|_1 \leq 1 \} & \text{si } x^+ = 0 \end{cases}$$

on a

① $x^+ = 0 \iff x^0 \in \{ p \in \mathcal{X} \mid \|p\|_1 \leq 1 \}$

② $x^+ \neq 0 \iff x^0 = x^+ + \frac{x^+}{\|x^+\|_1} \iff x^+ = \frac{x^0}{\|x^0\|_1} \cdot (\|x^0\|_1 - 1)$

donc

$$\mathrm{prox}_J(x^0) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|x^0\|_1 \leq 1 \\ \frac{x^0}{\|x^0\|_1} \cdot (\|x^0\|_1 - 1) & \text{si } \|x^0\|_1 > 1 \end{cases}$$

(d) Puisque $J(x) = \chi_{B(0,1)}(x)$, on a $\mathrm{prox}_{\chi_{B(0,1)}} = \mathrm{proj}_{B(0,1)}$

donc

$$\mathrm{prox}_{\chi_{B(0,1)}}(x_0) = \mathrm{proj}_{B(0,1)}(x_0) = \begin{cases} x_0 & \text{si } \|x_0\| \leq 1 \\ \frac{x_0}{\|x_0\|} & \text{si } \|x_0\| > 1 \end{cases}$$

Exercice 3 – Règles de calcul

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. Soit $z \in \mathcal{X}$ et $\alpha > 0$. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer $\text{prox}_J(x^0)$ en fonction de prox_f.

(a) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x - z) \end{cases}$

(b) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(\alpha x) \end{cases}$

(a) Par définition,

$$\begin{aligned}
\text{prox}_J(x^0) &= \underset{x \in \mathcal{X}}{\text{argmin}} \left\{ f(x-z) + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2 \right\} \\
&= \underset{x \in \mathcal{X}}{\text{argmin}} \left\{ f(x-z) + \frac{1}{2}\|x - z - (x^0 - z)\|^2 \right\} \\
&= z + \underset{t \in \mathcal{X}}{\text{argmin}} \left\{ f(t) + \frac{1}{2}\|t - (x^0 - z)\|^2 \right\} \\
&= z + \text{prox}_f(x^0 - z)
\end{aligned}$$

(b) Par définition,

$$\begin{aligned}
\text{prox}_J(x^0) &= \underset{x \in \mathcal{X}}{\text{argmin}} \left\{ f(\alpha x) + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2 \right\} \\
&= \underset{x \in \mathcal{X}}{\text{argmin}} \left\{ f(\alpha x) + \frac{1}{2\alpha^2}\|\alpha x - \alpha x^0\|^2 \right\} \\
&= \underset{x \in \mathcal{X}}{\text{argmin}} \left\{ \frac{1}{\alpha^2} \cdot \left(\alpha^2 \cdot f(\alpha x) + \frac{1}{2}\|\alpha x - \alpha x^0\|^2 \right) \right\} \\
&= \underset{x \in \mathcal{X}}{\text{argmin}} \left\{ \alpha^2 \cdot f(\alpha x) + \frac{1}{2}\|\alpha x - \alpha x^0\|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha} \cdot \underset{t \in \mathcal{X}}{\text{argmin}} \left\{ \alpha^2 f(t) + \frac{1}{2}\|t - \alpha x^0\|^2 \right\} \\
&= \frac{1}{\alpha} \cdot \text{prox}_{\alpha^2 f}(\alpha x^0)
\end{aligned}$$

Exercice 4 – Ferme non-expansivité de l'opérateur de Moreau

Module A5, Proposition 7 et Corollaire 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $(x, x') \in \mathcal{X}^2$.

(a) Montrer que $$\langle \operatorname{prox}_J(x) - \operatorname{prox}_J(x'), x - x' \rangle \geq \|\operatorname{prox}_J(x) - \operatorname{prox}_J(x')\|^2$$

(b) En déduire que prox_J est 1-lipschitzien, puis que prox_J est continu.

(a) Soit $(x, x') \in \mathcal{X}^2$. La caractérisation du point proximal permet d'écrire

$$x - \operatorname{prox}_J(x) \in \partial J(\operatorname{prox}_J(x))$$

et $x' - \operatorname{prox}_J(x') \in \partial J(\operatorname{prox}_J(x'))$

En utilisant la monotonie de ∂J, on obtient que

$$\langle x - \operatorname{prox}_J(x) - x' + \operatorname{prox}_J(x'), \operatorname{prox}_J(x) - \operatorname{prox}_J(x') \rangle \geqslant 0$$

$$\langle \operatorname{prox}_J(x) - \operatorname{prox}_J(x'), x - x' \rangle \geqslant \|\operatorname{prox}_J(x) - \operatorname{prox}_J(x')\|^2$$

(b) D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\|\operatorname{prox}_J(x) - \operatorname{prox}_J(x')\|^2 \leqslant \langle \operatorname{prox}_J(x) - \operatorname{prox}_J(x'), x - x' \rangle$$

$$\leqslant \|\operatorname{prox}_J(x) - \operatorname{prox}_J(x')\| \cdot \|x - x'\|$$

alors

$$\|\operatorname{prox}_J(x) - \operatorname{prox}_J(x')\| \leqslant \|x - x'\|$$

Exercice 5 – Inégalité proximale Module A5, Proposition 8

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $\tau > 0$ et $x^0 \in \mathcal{X}$. On pose

$$x^+ \in \operatorname{prox}_{\tau J}(x^0)$$

Montrer que $$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) \geq J(x^+) - \frac{1}{\tau}\left\langle x - x^+, x^+ - x^0 \right\rangle$$

Puisque $x^+ \in \operatorname{prox}_{\tau J}(x^0)$, d'après l'exercise 1,

$$x^0 - x^+ \in \partial(\tau J)(x^+)$$

donc $\frac{1}{\tau}(x^0 - x^+) \in \partial J(x^+)$

de sorte que, par définition des sous-gradients, on a

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad J(x) \geqslant J(x^+) + \frac{1}{\tau}\langle x^0 - x^+, x - x^+\rangle$$
$$= J(x^+) - \frac{1}{\tau}\langle x - x^+, x^+ - x^0\rangle$$

Exercice 6 – Convergence de PPA dans le cas convexe Module B5, Propositions 2, 3 et 5

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, propre et s.c.i. On suppose que J admet un minimiseur x^*. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme du point proximal de pas $\tau > 0$.

(a) Montrer que $$J(x_{k+1}) \leq J(x_{k+1}) + \frac{1}{2\tau}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq J(x_k)$$

En déduire que la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente. On note J^* sa limite.

(a) Par l'algorithme du point proximal de pas $\tau > 0$,

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad x_{k+1} = \operatorname{prox}_{\tau J}(x_k) = \underset{x \in \mathcal{X}}{\operatorname{argmin}}\left\{\tau J(x) + \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2\right\}$$

par définition d'un minimiseur global, $\forall x \in \operatorname{dom} J$

$$\tau \cdot J(x_{k+1}) + \frac{1}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leqslant \tau \cdot J(x) + \frac{1}{2}\|x_{k+1} - x\|^2$$

on prend $x = x_k$, alors

$$J(x_{k+1}) + \frac{1}{2\tau}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leqslant J(x_k) + 0$$

donc

$$J(x_{k+1}) \leqslant J(x_{k+1}) + \frac{1}{2\tau}\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leqslant J(x_k)$$

日期:　　/

alors $J(x_{k+1}) - J(x_k) \leq -\frac{1}{2\tau}\|x_{k+1}-x_k\|^2 \leq 0$

$$J(x_{k+1}) \leq J(x_k)$$

donc $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante et convergente.

(b) On pose

$$p_{k+1} = \frac{1}{\tau}(x_k - x_{k+1})$$

Montrer que $p_{k+1} \in \partial J(x_{k+1})$. En déduire que

$$\langle p_{k+1} - p_k, p_{k+1}\rangle \leq 0$$

(b) D'après la définition, $\forall x \in \operatorname{dom} J$,

$$\tau\cdot J(x_{k+1}) + \frac{1}{2}\|x_{k+1}-x_k\|^2 \leq \tau\cdot J(x) + \frac{1}{2}\|x-x_k\|^2$$

donc
$$J(x_{k+1}) \leq J(x) + \frac{1}{2\tau}\cdot\|x-x_k\|^2 - \frac{1}{2\tau}\|x_{k+1}-x_k\|^2$$

$$J(x) \geq J(x_{k+1}) + \frac{1}{2\tau}\cdot\left(\|x_{k+1}-x_k\|^2 - \|x-x_k\|^2\right)$$

et on a

$$\|x_{k+1}-x_k\|^2 - \|x-x_k\|^2 = \langle x_{k+1} - 2\cdot x_k + x,\ x_{k+1} - x\rangle$$

$$= \langle x_{k+1}-x_k, x_{k+1}-x\rangle + \langle x-x_k, x_{k+1}-x\rangle$$

$$= \langle x_k - x_{k+1}, x - x_{k+1}\rangle + \langle x_k - x, x - x_{k+1}\rangle$$

?? $\geq 2\cdot\langle x_k - x_{k+1}, x - x_{k+1}\rangle$

donc

$$J(x) \geq J(x_{k+1}) + \left\langle \frac{1}{\tau}(x_k - x_{k+1}),\ x - x_{k+1}\right\rangle$$

alors

$$p_{k+1} = \frac{1}{\tau}(x_k - x_{k+1}) \in \partial J(x_{k+1})$$

日期: /

on a $\langle p_{k+1}-p_k, p_{k+1}\rangle = -\frac{1}{\tau}\langle p_{k+1}-p_k, x_{k+1}-x_k\rangle$

puisque J est convexe, alors le sous-différentiel est monotone

$$\langle p_{k+1}-p_k, x_{k+1}-x_k\rangle \geqslant 0$$

donc

$$\langle p_{k+1}-p_k, p_{k+1}\rangle \leqslant 0$$

(c) Montrer que $$\|p_{k+1}\|^2 \leq \|p_k\| \cdot \|p_{k+1}\|$$
En déduire que la suite $(\|p_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante convergente.

(c) D'après (b), et par l'inégalité de C-S

$$\|p_{k+1}\|^2 \leqslant \langle p_k, p_{k+1}\rangle \leqslant \|p_k\|\cdot\|p_{k+1}\|$$

alors $\|p_{k+1}\| \leqslant \|p_k\|$

donc $(\|p_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante convergente.

(d) Soit $K\in\mathbb{N}$. Montrer que $$0 \leq \frac{\tau}{2}\sum_{k=0}^{K}\|p_k\|^2 \leq J(x_0)-J(x_{K+1})$$

(d) D'après (a) $\frac{1}{2\tau}\|x_{k+1}-x_k\|^2 \leqslant J(x_k)-J(x_{k+1})$

$$\frac{\tau}{2}\cdot\|p_k\|^2 \leqslant J(x_k)-J(x_{k+1})$$

alors on a

$$0 \leqslant \frac{\tau}{2}\sum_{k=0}^{K}\|p_k\|^2 \leqslant \sum_{k=0}^{K}\left(J(x_k)-J(x_{k+1})\right)$$
$$= J(x_0)-J(x_{K+1})$$

(e) En déduire que la suite $(\|p_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(e) D'après (a), $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente donc on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|p_k\|^2 \leq \frac{2}{\tau} \cdot \left(J(x_0) - \lim_{k\to+\infty} J(x_{k+1})\right) \leq M$$

donc

$(\|p_k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

(f) Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$J(x^*) - J(x_{k+1}) \geq \frac{1}{\tau}\langle x_k - x_{k+1}, x^* - x_{k+1}\rangle \geq \frac{1}{2\tau}\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\tau}(\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2)$$

(f) Soit $k\in\mathbb{N}$, on a $p_{k+1} = \frac{1}{\tau}(x_k - x_{k+1}) \in \partial J(x_{k+1})$

La convexité de J assure que

$$\forall x \in \mathcal{X},\ J(x) - J(x_{k+1}) \geq \frac{1}{\tau}\langle x_k - x_{k+1}, x - x_{k+1}\rangle$$

Si $x = x^*$, on a

$$J(x^*) - J(x_{k+1}) \geq \frac{1}{\tau}\langle x_k - x_{k+1}, x^* - x_{k+1}\rangle$$

et comme

$$\frac{1}{2}(a-b)^2 - \frac{1}{2}((a-c)^2 - (b-c)^2) = \frac{1}{2}(a-b)^2 - \frac{1}{2}(a-b)(a+b-2c)$$
$$= \frac{1}{2}(a-b)(2c-2b)$$
$$= (a-b)(c-b)$$

on a

$$\frac{1}{2}\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2}(\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2) = \langle x_k - x_{k+1}, x^* - x_{k+1}\rangle$$

donc

$$\frac{1}{\tau}\langle x_k - x_{k+1}, x^* - x_{k+1}\rangle \geq \frac{1}{2\tau}\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\tau}(\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2) \quad ①$$

(g) Montrer que $$k\,J(x_k) - (k+1)\,J(x_{k+1}) + J(x_{k+1}) \geq \frac{k}{\tau}\,\|x_k - x_{k+1}\|^2$$

En déduire que

$$J(x^*) + k\,J(x_k) - (k+1)\,J(x_{k+1}) \geq \frac{1+2\,k}{2\,\tau}\,\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\,\tau}(\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2)$$

(g) D'après (f)

$$\forall x \in \mathcal{X},\quad J(x) - J(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{\tau}\langle x_k - x_{k+1}, x - x_{k+1}\rangle$$

si $x = x_k$,

$$J(x_k) - J(x_{k+1}) \geqslant \frac{1}{\tau}\|x_k - x_{k+1}\|^2$$

$$k\cdot J(x_k) - k\cdot J(x_{k+1}) \geqslant \frac{k}{\tau}\|x_k - x_{k+1}\|^2$$

$$k\cdot J(x_k) - (k+1)\cdot J(x_{k+1}) + J(x_{k+1}) \geqslant \frac{k}{\tau}\|x_k - x_{k+1}\|^2 \qquad ②$$

① + ② on a

$$J(x^*) + k\cdot J(x_k) - (k+1)\cdot J(x_{k+1}) \geqslant \frac{1+2k}{2\tau}\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\tau}\left(\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2\right)$$

(h) Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$K\,J(x^*) - K\,J(x_K) \geq \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1+2\,k}{2\,\tau}\,\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\,\tau}(\|x_0 - x^*\|^2 - \|x_K - x^*\|^2)$$

En déduire que la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers le minimum de J.

(h) $$\sum_{k=0}^{K-1} J(x^*) + k\cdot J(x_k) - (k+1)\cdot J(x_{k+1}) = K\cdot J(x^*) - K\cdot J(x_K)$$

$$\sum_{k=0}^{K-1} \frac{1+2k}{2\tau}\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\tau}\left(\|x_k - x^*\|^2 - \|x_{k+1} - x^*\|^2\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} \frac{1+2k}{2\tau}\|x_k - x_{k+1}\|^2 - \frac{1}{2\tau}\left(\|x_0 - x^*\|^2 - \|x_K - x^*\|^2\right)$$

D'après la décroissance de la suite $\|x_k - x_{k+1}\|$, on a

$$\|x_k - x_{k+1}\|^2 \geqslant \|x_{k-1} - x_k\|^2$$

et on a

$$\sum_{k=0}^{k-1} \frac{1+2k}{2\tau} = \sum_{k=0}^{k-1} \frac{1}{2\tau} + \sum_{k=0}^{k-1} \frac{k}{\tau}$$

$$= \frac{k}{2\tau} + \frac{k(k-1)}{2\tau} = \frac{k^2}{2\tau}$$

Donc

$$k \cdot J(x^*) - k \cdot J(x_k) \geq \frac{k^2}{2\tau} \cdot \|x_{k-1} - x_k\|^2 - \frac{1}{2\tau}\left(\|x_0 - x^*\|^2 - \|x_k - x^*\|^2\right)$$

alors

$$J(x_k) - J(x^*) \leq \frac{1}{2\tau k}\left(\|x_0 - x^*\|^2 - \|x_k - x^*\|^2\right) - \frac{k}{2\tau}\|x_{k-1} - x_k\|^2$$

on prend $k \to +\infty$, on a

$$\frac{1}{2\tau k}\left(\|x_0 - x^*\|^2 - \|x_k - x^*\|^2\right) \longrightarrow 0$$

$$\frac{k}{2\tau}\|x_{k-1} - x_k\|^2 \longrightarrow 0$$

donc $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers $J(x^*)$, le minimum de J

(i) Montrer que toute valeur d'adhérence de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est minimiseur de J.

(i) Soit $^{\tau}J(x^0) = \min_{x\in X}\left\{ J(x) + \frac{1}{2\tau}\|x - x^0\|^2 \right\}$

$$= J(\mathrm{prox}_J(x^0)) + \frac{1}{2\tau}\|\mathrm{prox}_J(x^0) - x^0\|^2$$

Et $^{\tau}J$ et J ont même minimiseur.

Puisque J est convexe, s.c.i. et propre, alors $^{\tau}J$ est $(\frac{1}{\tau})$-régulière et convexe.

D'après la proposition 7 de B2, on a

$(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers x^*

c-à-d toute valeur d'adhérence de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est x^*

日期:　　　/