COMPLÉMENTS N°2
Éléments d'analyse hilbertienne

Dans ce second **Compléments**, on fait quelques rappels sur l'analyse hilbertienne.

1 Espaces de HILBERT

Pour plus d'informations sur les espaces de HILBERT, le lecteur est invité à consulter le polycopié de l'UE **3MA210 – Analyse fonctionnelle**.

1.1 Produit scalaire

Définition 1 (Produit scalaire)

Soit $\mathcal{X}$ un espace vectoriel. On appelle *produit scalaire* sur $\mathcal{X}$ toute fonction $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (*bilinéarité*) pour tout $u \in \mathcal{X}$, les fonctions $x \mapsto \langle x, u \rangle$ et $z \mapsto \langle u, z \rangle$ sont des formes linéaires ;
- (*symétrie*) $\qquad \forall\,(x, z) \in \mathcal{X}^2, \qquad \langle x, z \rangle = \langle z, x \rangle$
- (*positivité*) $\qquad \forall\,x \in \mathcal{X}, \qquad \langle x, x \rangle \geq 0$
- (*caractère défini*) $\qquad \langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0$

Un produit scalaire permet toujours de définir une norme :

Proposition 1 (Norme euclidienne)

Soit $\mathcal{X}$ un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathcal{X}$. Alors la fonction

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x \rangle} \end{array} \right.$$

définit une norme. On dit que cette norme découle du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on parle de *norme euclidienne*.

EXEMPLE

Cas euclidien. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction suivante définie par

$$\forall\,x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n, \forall\,z = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n, \qquad \langle x, z \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i\,z_i$$

La norme qui en découle est la norme euclidienne

$$\forall\, x = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n, \forall\, z = (z_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n, \qquad \|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$$

Définition 2 (Espace de Hilbert réel)

Soit $\mathcal{X}$ un espace vectoriel. On dit que $\mathcal{X}$ est un *espace de Hilbert réel*, ou encore un *espace hilbertien réel*, s'il est muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et s'il est complet pour la norme qui découle de ce produit scalaire.

C'est la généralisation en dimension quelconque (finie ou infinie) d'un espace euclidien. On rappelle qu'un espace est *complet* si toute suite de Cauchy converge pour la norme qui découle de ce produit scalaire. Notons que tout espace de Hilbert est un espace de Banach.

Exemple

Quelques exemples d'espaces de Hilbert réels de dimension infinie. Sont des espaces de Hilbert réels :

- l'espace $\mathrm{L}^2([\,a\,;b\,]\,;\mathbb{R})$ des fonctions définies sur $[\,a\,;b\,]$ et de carré intégrable, muni du produit scalaire

$$\forall\, f, g \in \mathrm{L}^2([\,a\,;b\,]\,;\mathbb{R}), \qquad \langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

- l'espace $\ell^2(\mathbb{R})$ des suites réelles de carré sommable, muni du produit scalaire

$$\forall\, u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, \forall\, v = (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{R}), \qquad \langle u, v \rangle = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\, v_n$$

Les normes euclidiennes partagent des propriétés avec la valeur absolue :

Proposition 2 (Identité remarquable)

Soit $\mathcal{X}$ un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathcal{X}$. On note $\|\cdot\|$ la norme qui découle de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors on a

$$\forall\, (x, y) \in \mathcal{X}^2, \qquad \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\langle x, y \rangle + \|y\|^2$$

Proposition 3 (Identité du parallélogramme)

Soit $\mathcal{X}$ un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathcal{X}$. On note $\|\cdot\|$ la norme qui découle de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors on a

$$\forall\, (x, y) \in \mathcal{X}^2, \qquad 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2 = \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2$$

Proposition 4 (Inégalité de Cauchy–Schwarz)

Soit $\mathcal{X}$ un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathcal{X}$. On note $\| \cdot \|$ la norme qui découle de $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Alors on a

$$\forall\, (x, y) \in \mathcal{X}^2, \qquad |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Remarquons que l'inégalité de Cauchy–Schwarz s'interprète de manière développée :

$$\forall\, (x, y) \in \mathcal{X}^2, \qquad -\|x\| \, \|y\| \leq \langle x, y \rangle \leq |\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Proposition 5

Soit $\mathcal{X}$ un espace vectoriel et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur $\mathcal{X}$. Soit $u \in \mathcal{X}$. On suppose que

$$\forall\, h \in \mathcal{X}, \qquad \langle u, h \rangle \leq 0$$

Alors $u = 0$.

1.2 Opérateurs linéaires

On rappelle la définition suivante :

Définition 3 (Norme d'opérateur)

Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un opérateur linéaire. On dit que A est *borné* si la quantité suivante

$$|||A||| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}$$

est finie. On appelle alors *norme (d'opérateur)* de A la valeur $|||A|||$.

Remarquons que la définition précédente dépend du choix des normes sur $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$. Si celui-ci n'est pas précisé, c'est qu'il découle naturellement du contexte. Ainsi, dans le cas des espaces de Hilbert, la norme par défaut est la norme euclidienne.

Par linéarité et A et par 1-homogénéité des normes, la norme d'un opérateur A vaut également

$$|||A||| = \sup_{\|x\|=1} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} = \sup_{x \in \mathcal{B}(0,1) \setminus \{0\}} \frac{\|A(x)\|}{\|x\|}$$

où $\mathcal{B}(0, 1)$ est la boule unité (fermée). On peut interpréter le caractère borné d'un opérateur linéaire de diverses manières, parmi lesquelles :

- l'image par A de la boule unité est bornée ;
- l'application A est lipschitzienne, de constante de Lipschitz $|||A|||$.

Proposition 6

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un opérateur linéaire. Alors A est borné.

Proposition 7 (Opérateur adjoint)

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Hilbert. Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ est un opérateur linéaire. Alors il existe un unique opérateur linéaire $A^* : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$, appelé *opérateur adjoint à* A, tel que

$$\forall\, (x, y) \in \mathcal{X} \to \mathcal{Y}, \qquad \langle A(x), y \rangle = \langle x, A^*(y) \rangle$$

Dans le cas euclidien, on a un lien entre l'opérateur adjoint et la matrice transposée :

Proposition 8

Soit $(n, m) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Soit $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un opérateur linéaire. Si $A(x) = \tilde{A}\, x$ avec $\tilde{A} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, alors $A^*(y) = \tilde{A}^\top\, y$.

Lorsque la norme d'opérateur est définie à l'aide de la norme euclidienne, on a :

Proposition 9

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach. Soit $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ un opérateur linéaire borné. Alors A^*, $A^* A$ et $A\, A^*$ sont bornés et on a

$$|||A|||^2 = |||A^*|||^2 = |||A^* A||| = |||A\, A^*|||$$

2 Différentielle sur un espace de Hilbert

2.1 Définition

Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter le polycopié du cours **3MA260 – Topologie et calcul différentiel II**.

Définition 4 (Différentielle de Fréchet)

Soit $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux espaces de Banach munis chacun d'une norme notée $\|\cdot\|$. Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{X}$ un ouvert et $a \in \mathcal{O}$. Soit $f : \mathcal{O} \to \mathcal{Y}$ une application. On dit que f est *différentiable (au sens de Fréchet)* ou encore *Fréchet-différentiable* en a s'il existe une application linéaire continue $L : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$, un voisinage $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$ de 0 et une fonction $\varepsilon : \mathcal{V} \to \mathcal{Y}$ tels que $\varepsilon(h)$ tend vers 0 lorsque $\|h\|$ tend vers 0 et

$$\forall\, h \in \mathcal{V}, \qquad f(a+h) = f(a) + L(h) + \|h\|\, \varepsilon(h)$$

L'application L est alors appelée *différentielle (de Fréchet)* de f en a.

Remarque : On utilisera dans ce polycopié la notation de Landau

$$o(t) = t\, \varepsilon(t)$$

où $\varepsilon(t) \to 0$ lorsque $t \to 0$ lorsque cela sera nécessaire. Toutefois, la notation "explicite" avec ε, bien que plus lourde, est à privilégier en cas de manipulations. En cas de doute sur les opérations possibles ou non sur les $o(t)$, il est vivement conseillé d'y revenir.

EXEMPLE

Fonctions polynomiales. Les fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}^m$, c'est-à-dire de la forme

$$(x_1, \ldots, x_m) \mapsto \sum_{j=1}^{J} a_j \prod_{i=1}^{m} x_i^{d_{i,j}} \qquad \text{avec } d_{i,j} \in \mathbb{N}$$

sont différentiables. C'est donc le cas en particulier du produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$, du déterminant d'une matrice, de la trace d'une matrice etc.

2.2 Gradient

Dans les espaces de Hilbert, on a le théorème central suivant :

Théorème 1 (de représentation de Riesz)

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soit $L : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. Alors il existe un unique vecteur $v \in \mathcal{X}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad L(x) = \langle v, x \rangle$$

Appliquons ce résultat à la différentielle df_a en $a \in \mathcal{X}$ d'une **fonction** $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ définie sur un espace de Hilbert réel $\mathcal{X}$. Par définition, $d_a f$ est une forme linéaire continue. Ainsi, le théorème de représentation de Riesz assure qu'il existe un unique vecteur $v \in \mathcal{X}$ tel que

$$\forall\, h \in \mathcal{X}, \qquad d_a f\, h = \langle v, h \rangle$$

Pour un point a donné, le vecteur v est unique, mais il dépend en général de a et de f. Aussi, on note $\nabla f(a)$ cet unique vecteur v.

Définition 5 (Gradient d'une fonction différentiable)

Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{X}$ un ouvert et $a \in \mathcal{O}$. Soit $f : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable en a. On appelle *gradient de f en a* l'unique vecteur $\nabla f(a)$ vérifiant

$$\forall\, h \in \mathcal{X}, \qquad d_a f\, h = \langle \nabla f(a), h \rangle$$

Pour plus de détails, le lecteur est invité à consulter le polycopié du cours **3MA261 – Calcul différentiel et optimisation**.

Notons que le gradient dépend du produit scalaire choisi, et celui-ci n'est pas unique pour un espace de Hilbert donné. Il est donc essentiel de connaître le choix du produit scalaire. Lorsque celui n'est pas précisé, c'est soit parce qu'il existe un choix conventionnel (produit scalaire usuel) implicite, soit parce qu'il s'agit d'un résultat général (et le produit scalaire aussi bien que le gradient dépendent d'un choix arbitraire).

Les règles de calcul différentiel se traduisent donc dans le cas hilbertien par :

Proposition 10 (Combinaison linéaire et composition)

Soit $\mathcal{Z}$ un espace de Banach. Soit $\mathcal{O} \subset \mathcal{X}$ et $U \subset \mathbb{R}$ deux ouverts, $a \in \mathcal{O}$. Soit $f, g : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ deux fonctions différentiables en a telles que $f(a) \in U$ et $j : U \to \mathcal{Z}$ une fonction dérivable en $f(a)$. Alors on a

- (homogénéité) $$\nabla(\lambda\, f)(a) = \lambda\, \nabla f(a)$$
- (somme) $$\nabla(f + g)(a) = \nabla f(a) + \nabla g(a)$$
- (produit) $$\nabla(f \times g)(a) = g(a)\, \nabla f(a) + f(a)\, \nabla g(a)$$
- (composition) $$\nabla(j \circ f)(a) = j'(f(a)) \nabla f(a)$$