Feuille d'exercices n°1
Éléments de topologie
Calcul sous-différentiel

Exercice 1 – Indicatrices d'ensemble

Module A1, Propositions 2, 6 & 8

Soit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{X}$ deux ensembles non vides.

(a) Justifier que
$$\operatorname{dom} \chi_{\mathcal{A}_1} = \mathcal{A}_1$$

(b) On suppose que $\mathcal{A}_1$ est convexe. Montrer que $\chi_{\mathcal{A}_1}$ convexe.

(c) On suppose que $\mathcal{A}_1$ est fermé. Montrer que $\chi_{\mathcal{A}_1}$ s.c.i.

(d) Montrer que
$$\chi_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2} = \chi_{\mathcal{A}_1} + \chi_{\mathcal{A}_2}$$
À quelle condition $\operatorname{dom} \chi_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}$ est-il non vide ?

(e) En déduire que si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont convexes, fermés et non vides, alors $\chi_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}$ est convexe, s.c.i. et propre.

Exercice 2 – Fonctions continues sur son domaine fermé

Module A1, Proposition 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction de domaine fermé non vide. On suppose que J est continue sur son domaine.

(a) Soit $x^0 \in \operatorname{dom} J$. Montrer que J est s.c.i. en x^0.

(b) Soit $x^0 \notin \operatorname{dom} J$. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite x^0. Montrer que l'ensemble
$$\Big\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in \operatorname{dom} J\Big\}$$
est fini.

(c) On suppose que $\operatorname{dom} J$ est fermé non vide. Montrer que J est s.c.i.

Exercice 3 – Enveloppe supérieure de fonctions convexes s.c.i

Module A1, Propositions 5 & 11

Soit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ et $f_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe s.c.i. propre pour tout $i \in \mathcal{I}$. On note f l'enveloppe supérieure des f_i. Pour toute fonction $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on définit
$$\operatorname{epi} g = \Big\{(x,t) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \mid t \geq g(x)\Big\}$$

(a) Soit $(x,y) \in \operatorname{epi} f$. Montrer que
$$\forall\, i \in \mathcal{I}, \qquad y \geq f_i(x)$$

(b) En déduire que
$$(x,y) \in \operatorname{epi} f \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x,y) \in \bigcap_{i\in\mathcal{I}} \operatorname{epi} f_i$$

(c) Justifier que $\operatorname{epi} f_i$ est convexe pour tout $i \in \mathcal{I}$.

(d) Montrer que $\operatorname{epi} f$ est convexe. En déduire que f est convexe.

(e) Soit $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que
$$\Big\{x \in \mathcal{X} \mid t \geq f_i(x)\Big\}$$
est fermé pour tout $i \in \mathcal{I}$.

(f) En déduire que $\operatorname{epi} f_i$ est fermé, puis que $\operatorname{epi} f$ est fermé.

(g) En raisonnant par l'absurde, montrer que f est s.c.i.

(h) La fonction f est-elle propre ?

Exercice 4 – Fonction convexe non continue

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Quel est le domaine de f ? La fonction f est-elle continue sur $\operatorname{dom} f$?

(b) Montrer que f est convexe.

(c) La fonction f est-elle s.c.i. ?

Exercice 5 – Caractérisation des fonctions fortement convexes

Module A1, Proposition 13

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction fortement convexe de module α.

(a) Justifier que f est strictement convexe.

Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On introduit la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{ccl} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x) - \dfrac{\alpha}{2}\,\|x - x^0\|^2 \end{array} \right.$$

(b) Montrer que g est convexe. En déduire que toute fonction fortement convexe est la somme d'une fonction convexe et d'une fonction quadratique.

(c) Montrer que la somme d'une fonction convexe et d'une fonction fortement convexe, de module α, est fortement convexe, de module α.

Exercice 6 – Sous-différentiel de la norme

Soit $\mathcal{X}$ un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de norme associée $\|\cdot\|$.

(a) Justifier que $\|\cdot\|$ est une fonction convexe.

(b) Montrer que $\|\cdot\|$ est différentiable sur $\mathcal{X} \setminus \{0\}$, de gradient

$$\forall\, x \neq 0, \qquad \nabla \|\cdot\|(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

(c) Montrer que tout $p \in \mathcal{X}$ de norme inférieure ou égale à 1 est sous-gradient de $\|\cdot\|$ en 0.

(d) Montrer que, si $\|p\| > 1$, alors

$$p \in \partial \|\cdot\|(0) \qquad \Longrightarrow \qquad \|p\| \geq \|p\|^2$$

(e) En déduire que le sous-différentiel de la norme $\|\cdot\|$ est la boule unité fermée pour la même norme.

Exercice 7 – Sous-différentiel de la somme de fonctions convexes

Module A2, Proposition 8

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ deux fonctions convexes telles que $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$.

(a) Montrer que $\qquad \forall\, x \in \operatorname{dom}(f+g), \qquad \partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial (f+g)(x)$

(b) On considère la fonction réelle définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est convexe, propre et s.c.i.

(c) Supposons qu'il existe $p \in \partial f(0)$. Justifier que

$$\forall\, x > 0, \qquad -1 \geq p\,\sqrt{x}$$

et que $p < 0$. Montrer que ce n'est pas possible.

(d) Justifier que la fonction $g = \chi_{]-\infty\,;0]}$ est convexe, propre et s.c.i. Montrer que $\partial f(0) + \partial g(0) = \emptyset$.

(e) Vérifier que $\partial (f+g)(0) = \,]-\infty\,;+\infty\,[$. Conclure.

Exercice 1 – Indicatrices d'ensemble Module A1, Propositions 2, 6 & 8

Soit $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2 \subset \mathcal{X}$ deux ensembles non vides.

(a) Justifier que
$$\operatorname{dom} \chi_{\mathcal{A}_1} = \mathcal{A}_1$$

(b) On suppose que $\mathcal{A}_1$ est convexe. Montrer que $\chi_{\mathcal{A}_1}$ convexe.

(c) On suppose que $\mathcal{A}_1$ est fermé. Montrer que $\chi_{\mathcal{A}_1}$ s.c.i.

(d) Montrer que
$$\chi_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2} = \chi_{\mathcal{A}_1} + \chi_{\mathcal{A}_2}$$
À quelle condition $\operatorname{dom} \chi_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}$ est-il non vide ?

(e) En déduire que si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont convexes, fermés et non vides, alors $\chi_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}$ est convexe, s.c.i. et propre.

(a)
$$\chi_{A_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A_1 \\ +\infty & \text{si } x \notin A_1 \end{cases}$$

$$\operatorname{dom} \chi_{A_1} = \{ x \in X \mid \chi_{A_1}(x) \notin \{+\infty, -\infty\} \} = A_1$$

(b) A_1 est convexe $\Longrightarrow \forall x, y \in A_1,\ \lambda x + (1-\lambda) y \in A_1$

① $\forall x, y \in A_1$,

$$\chi_{A_1}(\lambda x + (1-\lambda) y) = 0 \leq \lambda \cdot \chi_{A_1}(x) + (1-\lambda) \cdot \chi_{A_1}(y) = 0$$

② $\forall x \in A_1,\ \forall y \notin A_1$

$$\chi_{A_1}(\lambda x + (1-\lambda) y) = \{0, +\infty\} \leq \lambda \cdot \chi_{A_1}(x) + (1-\lambda) \cdot \chi_{A_1}(y) = +\infty$$

③ $\forall x, y \notin A_1$

$$\chi_{A_1}(\lambda x + (1-\lambda) y) = \{0, +\infty\} \leq \lambda \cdot \chi_{A_1}(x) + (1-\lambda) \cdot \chi_{A_1}(y) = +\infty$$

donc χ_{A_1} est convexe

(c) On suppose que $\mathcal{A}_1$ est fermé. Montrer que $\chi_{\mathcal{A}_1}$ s.c.i.

(c) D'après la définition du χ_{A_1}, on a que χ_{A_1} est continue sur A_1 et X/A_1.

Donc pour les points frontières de A_1, noté $fr(A_1)$ comme A_1 est fermé, on a $fr(A_1) \subset A_1$.

Alors $\forall x \in fr(A_1)$, $\forall (x_k^0)_{k\in\mathbb{N}} \in X$ tel que $\lim_{k\to\infty} x_k^0 = x^0$

on a

$$\liminf_{k\to\infty} \chi_{A_1}(x_k^0) \in \{0, +\infty\} \geq f(x^0) = 0$$

donc χ_{A_1} est s.c.i.

(d) Montrer que

$$\chi_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2} = \chi_{\mathcal{A}_1} + \chi_{\mathcal{A}_2}$$

À quelle condition dom $\chi_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}$ est-il non vide ?

(d) ① $\forall x \in A_1 \cap A_2$,

$$\chi_{A_1 \cap A_2}(x) = 0 = \chi_{A_1}(x) + \chi_{A_2}(x)$$

② $\forall x \in A_1$ et $x \notin A_2$

$$\chi_{A_1 \cap A_2}(x) = +\infty = 0 + (+\infty) = \chi_{A_1}(x) + \chi_{A_2}(x)$$

③ $\forall x \notin A_1$ et $x \in A_2$

$$\chi_{A_1 \cap A_2}(x) = +\infty = +\infty + 0 = \chi_{A_1}(x) + \chi_{A_2}(x)$$

④ $\forall x \notin A_1$ et $x \notin A_2$

$$\chi_{A_1 \cap A_2}(x) = +\infty = +\infty + (+\infty) = \chi_{A_1}(x) + \chi_{A_2}(x)$$

À la condition que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

À quelle condition dom $\chi_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}$ est-il non vide ?

(e) En déduire que si $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ sont convexes, fermés et non vides, alors $\chi_{\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2}$ est convexe, s.c.i. et propre.

(e) A_1 et A_2 sont convexes $\Longrightarrow$ $A_1 \cap A_2$ est convexe

$\Longrightarrow$ $\chi_{A_1 \cap A_2}$ est convexe

A_1 et A_2 sont fermés $\Longrightarrow$ $A_1 \cap A_2$ est fermé

$\Longrightarrow$ $\chi_{A_1 \cap A_2}$ est s.c.i.

假设有交集 ?

A_1 et A_2 sont non vide $\Longrightarrow$ $A_1 \cap A_2$ est non vide

$\Longrightarrow$ $\mathrm{dom}\, \chi_{A_1 \cap A_2} = A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$

$\Longrightarrow$ $\chi_{A_1 \cap A_2}$ est propre

Exercice 2 – Fonctions continues sur son domaine fermé

Module A1, Proposition 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction de domaine fermé non vide. On suppose que J est continue sur son domaine.

(a) Soit $x^0 \in \operatorname{dom} J$. Montrer que J est s.c.i. en x^0.

(b) Soit $x^0 \notin \operatorname{dom} J$. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite x^0. Montrer que l'ensemble

$$\left\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in \operatorname{dom} J\right\} \quad \text{est fini.}$$

(c) On suppose que $\operatorname{dom} J$ est fermé non vide. Montrer que J est s.c.i.

(a) soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathcal{X}$ convergeant vers x^0.
Puisque $\mathcal{X} = \operatorname{dom} J \cup \operatorname{dom} J^c$, deux cas de figure sont possibles.

① On peut extraire de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite dans $\operatorname{dom} J$.

Dans ce cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\liminf_{k\to\infty} J(x_k) = \inf_{n\geq k} J(x_n) = \inf_{\substack{n\geq k \\ x_n \in \operatorname{dom} J}} J(x_n) = \lim_{\substack{k\to+\infty \\ x_k\in\operatorname{dom} J}} J(x_k) = J(x^0)$$

en passant à la borne supérieure sur les $n \in \mathbb{N}$.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} J(x_n) = J(x^0)$$

② on ne peut pas extraire de la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une sous-suite dans $\operatorname{dom} J$.

Dans ce cas, il existe un rang $k^0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel les x_k n'appartient pas à $\operatorname{dom} J$.

Il s'ensuit puisque J ne prend pas la valeur $-\infty$ que

$$\liminf_{k\to+\infty} J(x_k) = \lim_{k\to+\infty} J(x_k) = +\infty > J(x^0)$$

Dans les deux cas, J est s.c.i. en x^0.

Exercice 2 – Fonctions continues sur son domaine fermé Module A1, Proposition 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction de domaine fermé non vide. On suppose que J est continue sur son domaine.

(a) Soit $x^0 \in \operatorname{dom} J$. Montrer que J est s.c.i. en x^0.

(b) Soit $x^0 \notin \operatorname{dom} J$. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite x^0. Montrer que l'ensemble

$$\left\{k \in \mathbb{N} \mid x_k \in \operatorname{dom} J\right\} \qquad \text{est fini.}$$

(b) Comme dom J est fermé, alors $fr(\operatorname{dom} J) \subset \operatorname{dom} J$

donc $x^0 \notin fr(\operatorname{dom} J)$.

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite x^0.

alors il existe $k^0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel les x_k

n'appartient pas à dom J.

Donc $\{k\in\mathbb{N} \mid x_k \in \operatorname{dom} J\}$ est fini.

(c) On suppose que dom J est fermé non vide. Montrer que J est s.c.i.

(c) D'après (a), J est s.c.i. sur dom J.

Et par définition, J est s.c.i. sur $\operatorname{dom} J^c$

$\forall x^0 \in fr(\operatorname{dom} J)$, soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente

de limite x^0, on a

$$\liminf_{k\to+\infty} J(x_k) = \{J(x^0), +\infty\} \geq J(x^0)$$

donc J est s.c.i.

Exercice 3 – Enveloppe supérieure de fonctions convexes s.c.i | Module A1, Propositions 5 & 11

Soit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ et $f_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe s.c.i. propre pour tout $i \in \mathcal{I}$. On note f l'enveloppe supérieure des f_i. Pour toute fonction $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, on définit

$$\operatorname{epi} g = \Big\{(x,t) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \mid t \geq g(x)\Big\}$$

(a) Soit $(x,y) \in \operatorname{epi} f$. Montrer que $\quad \forall i \in \mathcal{I}, \quad y \geq f_i(x)$

(b) En déduire que $\quad (x,y) \in \operatorname{epi} f \iff (x,y) \in \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \operatorname{epi} f_i$

(c) Justifier que $\operatorname{epi} f_i$ est convexe pour tout $i \in \mathcal{I}$.

(d) Montrer que $\operatorname{epi} f$ est convexe. En déduire que f est convexe.

(e) Soit $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\quad \Big\{x \in \mathcal{X} \mid t \geq f_i(x)\Big\} \quad$ est fermé pour tout $i \in \mathcal{I}$.

(f) En déduire que $\operatorname{epi} f_i$ est fermé, puis que $\operatorname{epi} f$ est fermé.

(g) En raisonnant par l'absurde, montrer que f est s.c.i.

(h) La fonction f est-elle propre ?

(a) D'après la définition, $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$

pour $(x,y) \in \operatorname{epi} f$, on a $y \geq f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x)$

donc on a

$$\forall i \in I, \quad y \geq f_i(x)$$

(b)
$$(x,y) \in \operatorname{epi} f = \{(x,t) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \mid t \geq \sup_{i \in I} f_i(x)\}$$
$$\iff (x,y) \in \{(x,t) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \mid \forall i \in I,\ t \geq f_i(x)\}$$
$$\iff (x,y) \in \bigcap_{i \in I} \{(x,t) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R} \mid t \geq f_i(x)\}$$
$$\iff (x,y) \in \bigcap_{i \in I} \operatorname{epi} f_i$$

(c) $\forall i \in I, \quad \forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \operatorname{epi} f_i$

on a $y_1 \geq f_i(x_1)$, $y_2 \geq f_i(x_2)$

et soit $\lambda \in]0,1[$,

$$\lambda \cdot (x_1, y_1) + (1-\lambda) \cdot (x_2, y_2) = (\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2)$$

et comme f_i est convexe, on a

$$f_i(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) \cdot f(x_2)$$
$$\leq \lambda \cdot y_1 + (1-\lambda) \cdot y_2$$

donc $\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \mathrm{epi} f_i$

$\mathrm{epi} f_i$ est convexe

(d) Montrer que epi$f$ est convexe. En déduire que f est convexe.

(d) D'après (c), $\forall i \in I$, $\mathrm{epi} f_i$ est convexe

alors $\mathrm{epi} f = \bigcap_{i \in I} \mathrm{epi} f_i$ est convexe

donc $\forall (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathrm{epi} f$, $\lambda \in]0,1[$

on a $(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \in \mathrm{epi} f$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda y_1 + (1-\lambda) y_2 \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

alors f est convexe

(e) Soit $t \in \mathbb{R}$. Vérifier que $\{x \in \mathcal{X} \mid t \geq f_i(x)\}$ est fermé pour tout $i \in \mathcal{I}$.

(e) $\forall i \in I$, $\{x \in \mathcal{X} \mid t \geq f_i(x)\} = f_i^{-1}([t, +\infty))$

comme f_i est s.c.i. et $[t, +\infty)$ est fermé

alors $\{x \in \mathcal{X} \mid t \geq f_i(x)\}$ est fermé

(f) En déduire que epif_i est fermé, puis que epi$f$ est fermé.

(f) D'après (e), $\forall t \in \mathbb{R}$, $\{x \in \mathcal{X} \mid t \geq f_i(x)\}$ est fermé

et $\forall x \in \mathcal{X}$, on a $[f_i(x), +\infty)$ est fermé

donc $\{t \in \mathbb{R} \mid t \geq f_i(x)\}$ est fermé

alors on a $\text{epi} f_i = \{x \in \mathcal{X} \mid t \geq f_i(x)\} \times \{t \in \mathbb{R} \mid t \geq f_i(x)\}$

est fermé.

Puis $\text{epi} f = \bigcap_{i=1}^{n} \text{epi} f_i$ est fermé.

(g) En raisonnant par l'absurde, montrer que f est s.c.i.

(g) Si f n'est pas s.c.i., soit $x^0 \in \mathcal{X}$ et $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite convergente de limite x^0.

Supposons que $\underbrace{\liminf_{k \to +\infty} f(x_k)}_{\in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}} < f(x^0) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

en particulier, il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$$\liminf_{k \to +\infty} f(x_k) < l < f(x^0)$$

il s'ensuit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour $k \in \mathbb{N}$

$$\inf_{n \geq k} f(x_n) \leq l - \varepsilon$$

pour tout $k \in \mathbb{N}$, on construire par récurrence une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ tel que

$$f(x_{n_k}) \leq l - \frac{\varepsilon}{2}$$

l'ensemble de niveau inférieur $l - \frac{\varepsilon}{2}$ étant fermé, on a $\lim_{k\to+\infty} x_{n_k} = x^0 \in \{x \in X \mid l - \frac{\varepsilon}{2} > f(x)\}$

soit $f(x^0) \leq l - \frac{\varepsilon}{2} < f(x)$

ce qui est absurde.

(h) La fonction f est-elle propre ?

(h) comme $(f_i)_{i\in I}$ sont propre, on a $\mathrm{dom} f_i \neq \emptyset$

donc $\mathrm{epi} f_i \neq \emptyset$

...

on a $\mathrm{dom} f \neq \emptyset$

donc f est propre

Exercice 4 – Fonction convexe non continue

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

(a) Quel est le domaine de f ? La fonction f est-elle continue sur $\operatorname{dom} f$?

(b) Montrer que f est convexe.

(c) La fonction f est-elle s.c.i. ?

(a) $\operatorname{dom} f = [0, +\infty)$

f n'est pas continue sur $\operatorname{dom} f$

(b) ① $x_1 < 0$, $x_2 = 0$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f(\lambda x_1) = +\infty \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

② $x_1 < 0$, $x_2 > 0$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \{0, 1, +\infty\} \leqslant +\infty = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

③ $x_1 = 0$, $x_2 > 0$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = f((1-\lambda)x_2) = 0 \leqslant \lambda = \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

(c) Pour $x^0 = 0$, soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers x^0

on a

$$\liminf_{k\to+\infty} f(x_k) = 1 \geqslant 1 = f(x^0)$$

donc f est s.c.i.

? 从正半轴趋于0的情况呢

Exercice 5 – Caractérisation des fonctions fortement convexes Module A1, Proposition 13

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction fortement convexe de module α.

(a) Justifier que f est strictement convexe.

Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On introduit la fonction

$$g : \left\{ \begin{array}{lcl} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & f(x) - \dfrac{\alpha}{2} \|x - x^0\|^2 \end{array} \right.$$

(b) Montrer que g est convexe. En déduire que toute fonction fortement convexe est la somme d'une fonction convexe et d'une fonction quadratique.

(c) Montrer que la somme d'une fonction convexe et d'une fonction fortement convexe, de module α, est fortement convexe, de module α.

(a) f est fortement convexe de module α, alors

$\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$,

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) \leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - \frac{\alpha}{2} \cdot \lambda (1-\lambda) \cdot \|x_1 - x_2\|^2$$
$$< \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

donc f est strictement convexe

(b) $\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2$, $\forall \lambda \in [0,1]$,

$$g(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) = f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) - \frac{\alpha}{2} \|\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 - x_0\|^2$$
$$\leq \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) - \frac{\alpha}{2} \cdot \lambda \cdot (1-\lambda) \cdot \|x_1 - x_2\|^2 - \frac{\alpha}{2} \cdot \lambda \cdot \|x_1 - x_0\|^2 - \frac{\alpha}{2} \cdot (1-\lambda) \cdot \|x_2 - x_0\|^2$$
$$\leq \lambda \cdot g(x_1) + (1-\lambda) \cdot g(x_2)$$

donc g est fortement convexe

Comme f et g sont arbitraires, alors on a

$$f(x) = g(x) + \frac{\alpha}{2} \|x - x^0\|^2$$

Donc toute fonction fortement convexe est la somme d'une fonction convexe et d'une fonction quadratique.

Exercice 5 – Caractérisation des fonctions fortement convexes Module A1, Proposition 13

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction fortement convexe de module α.

(a) Justifier que f est strictement convexe.

Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On introduit la fonction

$$g : \begin{cases} \mathcal{X} & \to \quad \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto \quad f(x) - \frac{\alpha}{2} \|x - x^0\|^2 \end{cases}$$

(b) Montrer que g est convexe. En déduire que toute fonction fortement convexe est la somme d'une fonction convexe et d'une fonction quadratique.

(c) Montrer que la somme d'une fonction convexe et d'une fonction fortement convexe, de module α, est fortement convexe, de module α.

(c) soit f est fortement convexe, g est convexe

d'après (b), $f = \ell + \frac{\alpha}{2}\|x-x^0\|^2$ avec ℓ convexe

alors $(g+\ell)$ est convexe

donc $h = f+g = (g+\ell) + \frac{\alpha}{2}\|x-x^0\|^2$ est fortement

convexe.

Exercice 6 – Sous-différentiel de la norme

Soit $\mathcal{X}$ un espace de HILBERT muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, de norme associée $\|\cdot\|$.

(a) Justifier que $\|\cdot\|$ est une fonction convexe.

(b) Montrer que $\|\cdot\|$ est différentiable sur $\mathcal{X} \setminus \{0\}$, de gradient

$$\forall x \neq 0, \qquad \nabla \|\cdot\|(x) = \frac{x}{\|x\|}$$

(c) Montrer que tout $p \in \mathcal{X}$ de norme inférieure ou égale à 1 est sous-gradient de $\|\cdot\|$ en 0.

(d) Montrer que, si $\|p\| > 1$, alors

$$p \in \partial \|\cdot\|(0) \qquad \Longrightarrow \qquad \|p\| \geq \|p\|^2$$

(e) En déduire que le sous-différentiel de la norme $\|\cdot\|$ est la boule unité fermée pour la même norme.

(a) $\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2, \ \forall \lambda \in [0,1]$,

$$\|\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2\| = \sqrt{\langle \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2, \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \rangle}$$

$$= \sqrt{\lambda^2 \cdot \|x_1\|^2 + (1-\lambda)^2 \|x_2\|^2 + 2 \cdot \lambda \cdot (1-\lambda) \langle x_1, x_2 \rangle}$$

$$\leq \lambda \cdot \|x_1\| + (1-\lambda) \cdot \|x_2\|$$

donc $\|\cdot\|$ est une fonction convexe

(b) $\forall x \in \mathcal{X} \setminus \{0\}$,

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

$$\nabla \|x\| = \nabla \sqrt{\langle x, x \rangle} = \frac{1}{2} \cdot \langle x, x \rangle^{-\frac{1}{2}} \cdot \partial_x (\langle x, x \rangle)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\|x\|} \cdot 2x$$

$$= \frac{x}{\|x\|}$$

(c) Pour $x = 0$, tout minorante affine de $\|\cdot\|$ vérifie

$$\|x\| \geqslant \langle p, x \rangle + c$$

pour $\|0\| = 0$, on a $c = 0$.

Ainsi, il s'agit de trouver les valeurs de p telle que

$$\|x\| \geqslant \langle p, x \rangle$$

Dans le cas $x=0$, on a

$$-1 \leqslant p \leqslant 1$$

(d) Montrer que, si $\|p\| > 1$, alors

$$p \in \partial\|\cdot\|(0) \quad \Longrightarrow \quad \|p\| \geq \|p\|^2$$

(d) pour $p \in \partial\|\cdot\|(0)$, on a

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \|x\| \geqslant \langle p, x \rangle$$

si on prend $x = p \in \mathcal{X}$, alors

$$\|p\| \geqslant \|p\|^2$$

ce qui est absurde pour $\|p\| > 1$ (?)

(e) En déduire que le sous-différentiel de la norme $\|\cdot\|$ est la boule unité fermée pour la même norme.

(e) D'après les questions précédentes.

$$\partial\|\cdot\|(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\|x\|} & \text{si } x \neq 0 \\ \{p \in \mathcal{X} \mid \|p\| \leqslant 1\} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Donc le sous-différentiel de la norme $\|\cdot\|$ est la boule unité fermée pour la même norme.

Exercice 7 – Sous-différentiel de la somme de fonctions convexes Module A2, Proposition 8

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ et $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ deux fonctions convexes telles que $\operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g \neq \emptyset$.

(a) Montrer que $\quad \forall\, x \in \operatorname{dom}(f+g), \quad \partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)(x)$

(b) On considère la fonction réelle définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} -\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que f est convexe, propre et s.c.i.

(c) Supposons qu'il existe $p \in \partial f(0)$. Justifier que

$$\forall\, x > 0, \qquad -1 \geq p\sqrt{x}$$

et que $p < 0$. Montrer que ce n'est pas possible.

(d) Justifier que la fonction $g = \chi_{]-\infty\,;0]}$ est convexe, propre et s.c.i. Montrer que $\partial f(0) + \partial g(0) = \emptyset$.

(e) Vérifier que $\partial(f+g)(0) = \,]-\infty\,;+\infty[$. Conclure.

(a) Remarque que $\operatorname{dom}(f+g) = \operatorname{dom} f \cap \operatorname{dom} g$

soit $x \in \operatorname{dom}(f+g)$ et $(p,q) \in \partial f(x) \times \partial g(x)$, alors

$$\forall z \in \mathcal{X}, \quad f(z) + g(z) \geq f(x) + g(x) + \langle p+q, z-x \rangle$$

donc $(p,q) \in \partial(f+g)(x)$

c-à-d $\quad \forall x \in \operatorname{dom}(f+g), \quad \partial f(x) + \partial g(x) \subset \partial(f+g)(x)$

(b) <u>Convexe</u>

① $\forall x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \quad \forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = -\sqrt{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2} \leq -\lambda\sqrt{x_1} - (1-\lambda)\sqrt{x_2}$$
$$= \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

② $\forall x_1 \geq 0, \; x_2 < 0, \quad \forall \lambda \in [0,1]$

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) = \{-\sqrt{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2}, +\infty\} \leq +\infty$$
$$= \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$$

③ $\forall x_1 < 0, \; x_2 < 0$, f est convexe

Donc f est convexe

日期: /

S.C.i.

Soit $x^0 = 0$, $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ suite convergente vers x^0

Si $x_k \geqslant 0$, par définitions

$$\liminf_{k\to+\infty} f(x_k) = \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f(x^0)$$

Si $x_k < 0$, on a

$$\liminf_{k\to+\infty} f(x_k) = +\infty \geqslant 0 = f(x^0)$$

Donc f est s.c.i.

propre

D'après la définition, $\operatorname{dom} f = [0,+\infty) \neq \emptyset$

donc f est propre

(c) Supposons qu'il existe $p \in \partial f(0)$. Justifier que

$$\forall x > 0, \qquad -1 \geq p\sqrt{x}$$

et que $p < 0$. Montrer que ce n'est pas possible.

(c) S'il existe $p \in \partial f(0)$, alors

$$\forall x > 0, \quad f(x) \geqslant p\cdot x$$

$$-\sqrt{x} \geqslant p\cdot x$$

$$-1 \geqslant p\cdot\sqrt{x}$$

et donc $p \leqslant -\frac{1}{\sqrt{x}} < 0$

(?) Et p ne peut être strictement négative, car il vérifie $\forall x > 0$, $-\frac{1}{p} = \frac{1}{|p|} \leqslant \sqrt{x}$

Donc ce n'est pas possible

(d) Justifier que la fonction $g = \chi_{]-\infty\,;0]}$ est convexe, propre et s.c.i. Montrer que $\partial f(0) + \partial g(0) = \emptyset$.
(e) Vérifier que $\partial(f+g)(0) =]-\infty\,;+\infty[$. Conclure.

(d) Comme $]-\infty;0]$ est convexe, non vide et fermé alors $g = \chi_{]-\infty,0]}$ est convexe, propre et s.c.i.

D'après (c), on a $\partial f(0) = \emptyset$
Et par définition, $\partial g(0) = \emptyset$
Donc $\partial f(0) + \partial g(0) = \emptyset$

(e) $$(f+g)(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Donc $\partial(f+g)(0) =]-\infty;+\infty[$