Feuille d'exercices n°2

Calcul sous-différentiel
Méthodes d'optimisation du premier ordre
Propriété de Kurdyka–Łojasiewicz

Exercice 1 – Sous-différentiels convexe et limitant

Module A2, Propositions 12

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe propre. On admet que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \partial f(x) = \hat{\partial} f(x)$$

avec $\partial f(x)$ le sous-différentiel convexe de f. Soit $x^0 \in \operatorname{dom} f$. Montrer que le sous-différentiel limitant de f en x^0 vaut le sous-différentiel convexe de f.

Exercice 2 – Sous-différentiel d'une somme

Module A2, Proposition 16

Soit $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ et $g : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions telles que $\operatorname{dom}(f+g) \neq \emptyset$. Soit $x^0 \in \operatorname{dom}(f+g)$. On suppose que $f(x^0)$ est fini et que g est continûment différentiable au voisinage de x^0.

(a) Soit $p \in \partial f(x^0)$. Montrer qu'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\operatorname{dom} f$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} \big(f(x_k) + g(x_k)\big) = f(x^0) + g(x^0)$$

et une suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{X}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f(x) \geq f(x_k) + \langle p_k, x - x_k \rangle + o(\|x - x_k\|) \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} p_k = p$$

(b) Justifier qu'il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geq k_0, \quad g(x) \geq g(x_k) + \langle \nabla g(x_k), x - x_k \rangle + o(\|x - x_k\|)$$

En déduire que
$$\forall\, k \geq k_0, \quad p_k + \nabla g(x_k) \in \hat{\partial}(f+g)(x_k)$$

(c) Montrer que
$$\partial f(x^0) + \nabla g(x^0) \subset \partial(f+g)(x^0)$$

(d) En appliquant le résultat de la question précédente aux fonctions $f+g$ et $-g$, montrer que

$$\partial(f+g)(x^0) \subset \partial f(x^0) + \nabla g(x^0)$$

Exercice 3 – Fonctions coercives continues sur leur domaine

Module B1, Propositions 4 & 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction coercive continue sur son domaine. Soit $M \in \mathbb{R}$. On définit l'*ensemble de niveau inférieur* $\operatorname{niv}_{\leq M} J$ par

$$\operatorname{niv}_{\leq M} J = \Big\{ x \in \mathcal{X} \mid J(x) \leq M \Big\}$$

(a) Montrer que $\operatorname{niv}_{\leq M} J$ est un ensemble fermé. *On pourra remarquer que* $\operatorname{niv}_{\leq M} \subset \operatorname{dom} J$.

(b) Montrer qu'il existe $x^0 \in \mathcal{X}$ pour lequel $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J$ soit borné.

(c) En déduire que J atteint son minimum et son maximum sur $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J$.

(d) Conclure quant à l'existence d'un minimiseur pour J.

Exercice 4 – Fonctions s.c.i. coercives

Module B1, Proposition 6

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction coercive s.c.i. de domaine non vide. On suppose que J est continue sur son domaine.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{dom} J)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} J(x_k) = \inf_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

On pourra distinguer les cas $\inf J = -\infty$ *et* $\inf J \in \mathbb{R}$.

(b) Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{dom} J)^{\mathbb{N}}$ une telle suite. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \|x_k\| \leq M$$

(c) Justifier que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{dom} J)^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, de limite notée x^*.

(d) Montrer que $$J(x^*) = \inf_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

En déduire que J admet un minimiseur.

Exercice 5 – Règle de Fermat

Module B1, Propositions 1, 9 & 10

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction de domaine non vide et soit $x^* \in \operatorname{dom} J$.

(a) On suppose que x^* est un minimiseur local de J. Montrer $0 \in \partial J(x^*)$.

(b) On suppose que J est convexe. Montrer que tout minimiseur local de J est un minimiseur global de J.

(c) On suppose que J est convexe. Montrer que si $0 \in \partial J(x^*)$, alors x^* est un minimiseur global de J.

Exercice 6 – Fonctions fortement convexes en dimension finie

Module A3, Proposition 2, Module B1, Propositions 7 et 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction fortement convexe de module $\alpha > 0$.

(a) Justifier que la fonction $$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad g(x) = J(x) - \frac{\alpha}{2}\,\|x\|_2^2$$ est convexe

(b) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad J(x) \geq \langle a, x\rangle + b + \frac{\alpha}{2}\,\|x\|_2^2$$

(c) En déduire que J est coercive.

(d) Montrer que J admet exactement un minimiseur x^*.

(e) Soit $x \in \operatorname{dom} J$ tel que $\partial J(x) \neq \emptyset$. Montrer que pour tout $p \in \partial J(x)$,

$$J(x) - J(x^*) \geq \frac{1}{2\,\alpha}\,\|p\|_2^2 - \frac{1}{2}\left\|\frac{p}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}\,(x - x^*)\right\|_2^2$$

(f) En déduire que J satisfait la propriété KŁ en x^*.

Exercice 7 – Convergence d'un algorithme d'optimisation

Module B1, Proposition 13

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction de domaine fermé et non vide. On suppose que J est continue sur son domaine. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{dom} J)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite x^*. On suppose par ailleurs que

(1) pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $p_k \in \partial J(x_k)$;

(2) la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démontrer que x^* est un point critique de J.

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe propre. On admet que

$$\forall x \in \mathcal{X}, \qquad \partial f(x) = \hat{\partial} f(x)$$

avec $\partial f(x)$ le sous-différentiel convexe de f. Soit $x^0 \in \operatorname{dom} f$. Montrer que le sous-différentiel limitant de f en x^0 vaut le sous-différentiel convexe de f.

Ex 1

convexe, propre

$$\underline{\partial^{\text{convexe}} f(x_0) = \hat{\partial} f(x_0) \subset \partial^{\text{limitant}} f(x_0)}$$

D'après les définition de $\hat{\partial} f(x_0)$ et $\partial^{\text{limitant}} f(x_0)$

on a $\hat{\partial} f(x_0) \subset \partial^{\text{limitant}} f(x_0)$

$$\underline{\partial^{\text{limitant}} f(x_0) \subset \partial^{\text{convexe}} f(x_0) = \hat{\partial} f(x_0)}$$

Soit $p \in \partial^{\text{limitant}} f(x_0)$, il existe par définition deux suites $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$, telles que $p_k \in \hat{\partial} f(x_0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x \ , \quad \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f(x) \ , \quad \lim_{k\to+\infty} p_k = p$$

$\hat{\partial} f(x_0) = \partial^{\text{convexe}} f(x_0)$

or les $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$\forall z \in \mathcal{X}, \quad f(z) \geqslant f(x_k) + \langle p_k, z - x_k \rangle$$

alors
$$\lim_{k\to+\infty} f(z) \geqslant \lim_{k\to+\infty} \left(f(x_k) + \langle p_k, z - x_k \rangle \right)$$
$$f(z) \geqslant f(x) + \langle p, z - x \rangle$$

donc $p \in \partial^{\text{convexe}} f(x_0)$

Alors on a $\partial^{\text{limitant}} f(x_0) = \partial^{\text{convexe}} f(x_0)$

Soit $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ et $g : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions telles que $\mathrm{dom}(f+g) \neq \emptyset$. Soit $x^0 \in \mathrm{dom}(f+g)$. On suppose que $f(x^0)$ est fini et que g est continûment différentiable au voisinage de x^0.

(a) Soit $p \in \partial f(x^0)$. Montrer qu'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathrm{dom}\, f$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} \big(f(x_k) + g(x_k)\big) = f(x^0) + g(x^0)$$

et une suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{X}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f(x) \geq f(x_k) + \langle p_k, x - x_k\rangle + o(\|x - x_k\|) \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} p_k = p$$

(b) Justifier qu'il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geq k_0, \quad g(x) \geq g(x_k) + \langle \nabla g(x_k), x - x_k\rangle + o(\|x - x_k\|)$$

En déduire que $$\forall\, k \geq k_0, \quad p_k + \nabla g(x_k) \in \hat{\partial}(f+g)(x_k)$$

(c) Montrer que $$\partial f(x^0) + \nabla g(x^0) \subset \partial(f+g)(x^0)$$

(d) En appliquant le résultat de la question précédente aux fonctions $f+g$ et $-g$, montrer que

$$\partial(f+g)(x^0) \subset \partial f(x^0) + \nabla g(x^0)$$

(a) Comme $p \in \partial f(x^0)$ et $x^0 \in \mathrm{dom}(f+g)$, par définition, il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathrm{dom} f$ telles que

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f(x^0)$$

Par continuité de g au voisinage de x^0, la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ vérifient

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^0 \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} g(x_k) = g(x^0)$$

Donc on a

$$\lim_{k\to+\infty} \big(f(x_k) + g(x_k)\big) = f(x^0) + g(x^0)$$

Par ailleurs, il existe une suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dans $\mathcal{X}$ telle que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f(x) \geq f(x_k) + \langle p_k, x - x_k\rangle + o(\|x - x_k\|)$$

$$\text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} p_k = p$$

(b) Justifier qu'il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geq k_0, \quad g(x) \geq g(x_k) + \langle \nabla g(x_k), x - x_k \rangle + o(\|x - x_k\|)$$

En déduire que $$\forall\, k \geq k_0, \quad p_k + \nabla g(x_k) \in \hat{\partial}(f+g)(x_k)$$

(b) La fonction g étant différentiable au voisinage x^0, on en déduit qu'il existe un rang $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geq k_0, \quad g(x) \geq g(x_k) + \langle \nabla g(x_k), x - x_k \rangle + o(\|x - x_k\|)$$

En sommant les deux relations précédentes, il en découle que

$$\forall\, k \geq k_0, \; f(x) + g(x) \geq f(x_k) + g(x_k) + \langle p_k + \nabla g(x_k), x - x_k \rangle + o(\|x - x_k\|)$$

Donc $\forall\, k \geq k_0, \; p_k + \nabla g(x_k) \in \hat{\partial}(f+g)(x_k)$

(c) Montrer que $$\partial f(x^0) + \nabla g(x^0) \subset \partial(f+g)(x^0)$$

(c) La continuité de ∇g au voisinage de x^0 assure alors finalement que

$$\lim_{k \to +\infty} (p_k + \nabla g(x_k)) = p + \nabla g(x^0)$$

et on a

$$\forall\, k \geq k_0, \; f(x) + g(x) \geq f(x^0) + g(x^0) + \langle p + \nabla g(x^0), x - x^0 \rangle + o(\|x - x^0\|)$$

donc

$$\partial f(x^0) + \nabla g(x^0) \subset \partial(f+g)(x^0)$$

(d) En appliquant le résultat de la question précédente aux fonctions $f+g$ et $-g$, montrer que

$$\partial(f+g)(x^0) \subset \partial f(x^0) + \nabla g(x^0)$$

(d) Posons $F = f+g$ et $G = -g$. La fonction G étant continûment différentiable autour de x^0, on a démontré à la question précédent que

$$\partial F(x^0) + \nabla G(x^0) \subset \partial(F+G)(x^0)$$

soit $$\partial(f+g)(x^0) - \nabla g(x^0) \subset \partial f(x^0)$$

Donc

$$\partial(f+g)(x^0) \subset \partial f(x^0) + \nabla g(x^0)$$

Exercice 3 – Fonctions coercives continues sur leur domaine Module B1, Propositions 4 & 5

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction coercive continue sur son domaine. Soit $M \in \mathbb{R}$. On définit l'*ensemble de niveau inférieur* $\operatorname{niv}_{\leq M} J$ par

$$\operatorname{niv}_{\leq M} J = \left\{ x \in \mathcal{X} \mid J(x) \leq M \right\}$$

(a) Montrer que $\operatorname{niv}_{\leq M} J$ est un ensemble fermé. *On pourra remarquer que* $\operatorname{niv}_{\leq M} \subset \operatorname{dom} J$.

(b) Montrer qu'il existe $x^0 \in \mathcal{X}$ pour lequel $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J$ soit borné.

(c) En déduire que J atteint son minimum et son maximum sur $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J$.

(d) Conclure quant à l'existence d'un minimiseur pour J.

(a) On commence par noter que $\operatorname{niv}_{\leq M} J \subset \operatorname{dom} J$.

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\operatorname{niv}_{\leq M} J$. On suppose qu'elle converge vers x.

Le domaine de J étant fermé, on en déduit que $x \in \operatorname{dom} J$. Ainsi, on a par définition de la suite des x_k et par continuité de J sur son domaine

$$\forall k \in \mathbb{N},\ J(x_k) \leq M \quad \text{et} \quad \lim_{k\to+\infty} J(x_k) = J(x)$$

donc $J(x) \leq M$, $x \in \operatorname{niv}_{\leq M} J$

alors $\operatorname{niv}_{\leq M} J$ est fermé.

(b) On l'établit par l'absurde, en supposant que pour tout $x^0 \in \mathcal{X}$, l'ensemble $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J$ n'est pas borné.

Soit $x^0 \in \mathcal{X}$, par l'hypothèse, il existe donc une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{X}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} \|x_k\|_2 = +\infty \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}.\ J(x_k) \leq J(x^0)$$

La suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est donc bornée, elle ne peut pas diviger vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que J soit coercive.

(c) En déduire que J atteint son minimum et son maximum sur $\mathrm{niv}_{\leq J(x^0)} J$.

(d) Conclure quant à l'existence d'un minimiseur pour J.

(c) Par définition, J atteint son maximum dans en x^0.

D'après (a) (b), $\mathrm{niv}_{\leq f(x^0)} J$ est fermé, borné et non vide.

et comme J est continue sur $\mathrm{niv}_{\leq f(x^0)} J \subset \mathrm{dom}\, J$

Par Prop 3, J admet une minimiseur dans $\mathrm{niv}_{\leq f(x^0)} J$.

(d) D'après (c), soit le minimiseur de J sur $\mathrm{niv}_{\leq J(x^0)} J$ est x^*, on a

$$\forall x \notin \mathrm{niv}_{\leq J(x^0)} J, \quad J(x) > J(x^0) \geq J(x^*)$$

Donc, x^* est un minimiseur de J sur $\mathcal{X}$.

Exercice 4 – Fonctions s.c.i. coercives Module B1, Proposition 6

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction coercive s.c.i. de domaine non vide. On suppose que J est continue sur son domaine.

(a) Montrer qu'il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{dom} J)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} J(x_k) = \inf_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

On pourra distinguer les cas $\inf J = -\infty$ *et* $\inf J \in \mathbb{R}$.

(b) Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{dom} J)^{\mathbb{N}}$ une telle suite. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \|x_k\| \le M$$

(c) Justifier que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{dom} J)^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, de limite notée x^*.

(d) Montrer que

$$J(x^*) = \inf_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

En déduire que J admet un minimiseur.

(a) La preuve repose sur la caractérisation de la borne inférieure d'un sous-ensemble de $\overline{\mathbb{R}}$. Notons

$$m = \inf_{x\in\mathcal{X}} J(x) \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$$

① Cas $m = -\infty$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $x_k \in \operatorname{dom} J$ tel que $J(x_k) \leq -k$. Par comparaison,

$$\lim_{k\to+\infty} J(x_k) = -\infty$$

② Cas $m \in \mathbb{R}$. Posons $\varepsilon_k = \frac{1}{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Alors il existe $x_k \in \operatorname{dom} J$ tel que

$$m \leq J(x_k) < m + \varepsilon_k$$

de sorte que, par encadrement, on a

$$\lim_{k\to+\infty} J(x_k) = m$$

Donc il existe une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\operatorname{dom} J)^{\mathbb{N}}$ telle que

$$\lim_{k\to+\infty} J(x_k) = \inf_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

(b) Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathrm{dom}\, J)^{\mathbb{N}}$ une telle suite. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \|x_k\| \leq M$$

(b) Si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathrm{dom}\, J)^{\mathbb{N}}$ n'est pas bornée, alors la suite des $\|x_k\|$ diverge vers $+\infty$. La coercivité de J assurerait donc que $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ diverge vers $+\infty$, ce qui contredit le fait que cette suite a pour limite la borne inférieure de J.

Donc $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornées, c-à-d, il existe $M>0$ tel que $\forall k\in\mathbb{N}$, $\|x_k\| \leq M$.

(c) Justifier que $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathrm{dom}\, J)^{\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente, de limite notée x^*.

(c) D'après (b), $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Alors $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet donc une sous-suite $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergente.

(d) Montrer que

$$J(x^*) = \inf_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

En déduire que J admet un minimiseur.

(d) Puisque J est s.c.i., il s'ensuit que

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} J(x) \leq J(x^*) \leq \liminf_{j\to+\infty} J(x_{k_j}) = \lim_{j\to+\infty} J(x_{k_j}) = \inf_{x\in\mathcal{X}} J(x)$$

Autrement dit, x^* est un miniseur de J.

Exercice 5 – Règle de FERMAT Module B1, Propositions 1, 9 & 10

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction de domaine non vide et soit $x^* \in \operatorname{dom} J$.

(a) On suppose que x^* est un minimiseur local de J. Montrer $0 \in \partial J(x^*)$.

(b) On suppose que J est convexe. Montrer que tout minimiseur local de J est un minimiseur global de J.

(c) On suppose que J est convexe. Montrer que si $0 \in \partial J(x^*)$, alors x^* est un minimiseur global de J.

(a) Par définition, si x^* est un minimiseur local de J,

$$\forall x \in V(x^*),\quad J(x) \geq J(x^*)$$
$$= J(x^*) + \langle 0, x - x^* \rangle + o(\|x - x^*\|)$$

donc $0 \in \hat{\partial} f(x^*) \subset \partial f(x^*)$

(b) Si J est convexe, $\forall\, x^*$ minimiseur local de J,

il existe $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J$, tel que

$$\forall x \in \operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J,\quad J(x^*) \leq J(x) \leq J(x^0)$$

Et pour $x' \notin \operatorname{niv}_{\leq J(x^0)} J$, on a

$$J(x') \geq J(x^0) \geq J(x^*)$$

donc x^* est un minimiseur global de J.

(c) Pour une fonction convexe J, si $0 \in \partial f(x^*)$,

alors

$$\forall x \in \mathcal{X},\quad J(x) \geq J(x^*) + \langle 0, x - x^* \rangle = J(x^*)$$

donc x^* est un minimiseur global de J.

Exercice 6 – Fonctions fortement convexes en dimension finie

Module A3, Proposition 2, Module B1, Propositions 7 et 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction fortement convexe de module $\alpha > 0$.

(a) Justifier que la fonction $\quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n, \quad g(x) = J(x) - \frac{\alpha}{2}\,\|x\|_2^2 \quad$ est convexe

(b) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^n, \qquad J(x) \geq \langle a, x\rangle + b + \frac{\alpha}{2}\,\|x\|_2^2$$

(c) En déduire que J est coercive.

(d) Montrer que J admet exactement un minimiseur x^*.

(e) Soit $x \in \operatorname{dom} J$ tel que $\partial J(x) \neq \emptyset$. Montrer que pour tout $p \in \partial J(x)$,

$$J(x) - J(x^*) \geq \frac{1}{2\,\alpha}\,\|p\|_2^2 - \frac{1}{2}\left\|\frac{p}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}\,(x - x^*)\right\|_2^2$$

(f) En déduire que J satisfait la propriété KŁ en x^*.

(a) $\forall x_1, x_2 \in \operatorname{dom} J,\ \lambda \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &= J(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) - \frac{\alpha}{2}\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\|_2^2 \\ &\leq \lambda \cdot J(x_1) + (1-\lambda)\cdot J(x_2) - \frac{\alpha}{2}\lambda\cdot(1-\lambda)\|x_1 - x_2\|_2^2 \\ &\quad - \frac{\alpha}{2}\|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\|_2^2 \end{aligned}$$

et on a

$$-\lambda\cdot(1-\lambda)\cdot\|x_1 - x_2\|_2^2 = \|\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2\|_2^2 - \lambda\cdot\|x_1\|_2^2 - (1-\lambda)\cdot\|x_2\|_2^2$$

donc

$$\begin{aligned} g(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) &\leq \lambda\cdot J(x_1) - \lambda\cdot\frac{\alpha}{2}\|x_1\|_2^2 + (1-\lambda)\cdot J(x_2) - (1-\lambda)\cdot\frac{\alpha}{2}\|x_2\|_2^2 \\ &= \lambda\cdot g(x_1) + (1-\lambda)\cdot g(x_2) \end{aligned}$$

donc g est convexe

(b) Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad J(x) \geq \langle a, x \rangle + b + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$$

(b) D'après (a), $J(x) = g(x) + \frac{\alpha}{2} \cdot \|x\|_2^2$

Comme g est convexe, soit $x^0 \in \operatorname{dom} g$, $p \in \partial J(x^0)$

on a

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad g(x) \geqslant g(x^0) + \langle p, x - x_0 \rangle$$

alors

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad J(x) \geqslant \langle p, x \rangle + g(x_0) - \langle p, x_0 \rangle + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$$

donc il existe $a = p \in \mathbb{R}^n$, $b = g(x_0) - \langle p, x_0 \rangle \in \mathbb{R}$

tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad J(x) \geqslant \langle a, x \rangle + b + \frac{\alpha}{2} \|x\|_2^2$$

(c) En déduire que J est coercive.

(c) Soit $\|x_k\|_2$ tend vers $+\infty$,

Par l'absurde, on suppose $\lim_{k \to +\infty} J(x_k) = M < +\infty$

mais $\lim_{k \to +\infty} \langle a, x_k \rangle + b + \frac{\alpha}{2} \|x_k\|_2^2 \longrightarrow +\infty$

donc au moins une des coordonnées de la suite des x_k tend vers $+\infty$.

Donc J est coercive.

(d) Montrer que J admet exactement un minimiseur x^*.

(d) D'après (c), J est coercive, alors J admet le minimiseur.

Et comme J est fortement convexe, alors J est strictement convexe,

alors J admet une unique minimiseur.

(e) Soit $x \in \operatorname{dom} J$ tel que $\partial J(x) \neq \emptyset$. Montrer que pour tout $p \in \partial J(x)$,

$$J(x) - J(x^*) \geq \frac{1}{2\,\alpha}\,\|p\|_2^2 - \frac{1}{2}\left\|\frac{p}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}\,(x - x^*)\right\|_2^2$$

(e) Soit $x \in \operatorname{dom} J$, pour tout $p \in \partial J(x)$, on a

$$\forall z \in \mathcal{X},\ J(z) \geq J(x) + \langle p, z-x \rangle + \frac{\alpha}{2}\|z-x\|_2^2$$

on prend $z = x^*$, ?

$$J(x) - J(x^*) \leq \langle p, x-x^* \rangle - \frac{\alpha}{2}\|x-x^*\|_2^2$$

$$= \frac{1}{2\alpha}\cdot\|p\|_2^2 - \frac{1}{2}\left\|\frac{p}{\sqrt{\alpha}} - \sqrt{\alpha}\cdot(x-x^*)\right\|_2^2$$

(f) En déduire que J satisfait la propriété KŁ en x^*.

Exercice 7 – Convergence d'un algorithme d'optimisation Module B1, Proposition 13

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction de domaine fermé et non vide. On suppose que J est continue sur son domaine. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in (\mathrm{dom}\, J)^{\mathbb{N}}$ une suite convergente, de limite x^*. On suppose par ailleurs que

(1) pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $p_k \in \partial J(x_k)$;

(2) la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Démontrer que x^* est un point critique de J.

Ex 7

Comme J est continue sur son domaine,

$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^*$ on a $\lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f(x^*)$

Grace à la fermeture du sous-différentiel,

pour $\lim_{k\to+\infty} p_k = 0$ on a $0 \in \partial f(x^*)$

donc x^* est un point critique de J.