5MM71 : Méthodes du premier ordre pour l'optimisation non convexe et non lisse

Examen final du 12 janvier 2023 – Durée : 2 heures

Consignes – *Aucun document,* ***à l'exception de deux pages format A4 de notes manuscrites****, n'est autorisé. L'utilisation de calculatrices, téléphones portables (ainsi que tout autre appareil électronique) est interdite. Cet énoncé comporte* ***deux*** *exercices largement indépendants qui peuvent être traités dans l'ordre de votre choix. Les réponses doivent être soigneusement justifiées, sauf mention contraire. La qualité de la rédaction et la rigueur des raisonnements seront prises en compte dans la notation.* ***Le candidat est autorisé à rédiger en anglais.***

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire associé à la base canonique de $\mathbb{R}^n$ et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée.

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière fortement convexe et $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe, borné, fermé et non vide. On s'intéresse à la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathcal{C}} f(x)$$

Soit $\tau > 0$. On considère l'algorithme suivant :

$$x^0 \in \mathcal{C} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x^{k+1} = \operatorname{proj}_{\mathcal{C}}(x^k - \tau\, \nabla f(x^k))$$

1. Montrer que
$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad f(x^k) \geq f(x^{k+1}) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\tau} - L \right) \|x^{k+1} - x^k\|^2$$
En déduire que, si $0 < \tau < 2/L$, alors la suite $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.
2. À partir de cette question, $0 < \tau < 2/L$. On note $J = f + \chi_{\mathcal{C}}$. Montrer que la suite $(\|x^{k+1} - x^k\|)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. En déduire qu'il existe une suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $p_k \in \partial J(x^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. *On pensera à remarquer que* $\chi_{\mathcal{C}} = \tau\, \chi_{\mathcal{C}}$.
3. Justifier que la suite $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers une solution du problème étudié. *On pourra commencer par considérer les valeurs d'adhérence de cette suite.*

Exercice 2

Soit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n$ et $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{C}_i$ la boule fermée de centre C_i et de rayon r_i pour tout $i \in \{1, 2\}$. On suppose que l'intersection entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est non vide. Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{C}_1}(x) + \chi_{\mathcal{C}_2}(x) + \frac{1}{2} \|x - x^0\|^2$$

1. Justifier que le problème étudié admet une unique solution, que l'on notera x^*.
2. Montrer que $x^0 - x^* \in \partial\chi_{\mathcal{C}_1}(x^*) + \partial\chi_{\mathcal{C}_2}(x^*)$.

Dualité.

3. Soit $i \in \{1,2\}$. Calculer $(\chi_{\mathcal{C}_i})^*$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que
$$\chi_{\mathcal{C}_1}(x) + \chi_{\mathcal{C}_2}(x) = \sup_{y_1,y_2\in\mathbb{R}^n} \Big\{ \langle y_1 + y_2, x\rangle - (\chi_{\mathcal{C}_1})^*(y_1) - (\chi_{\mathcal{C}_2})^*(y_2) \Big\}$$
5. En déduire l'expression d'une fonction de couplage $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ telle que le problème d'optimisation étudié s'écrive sous la forme
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \sup_{y_1,y_2\in\mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x; y_1, y_2)$$
6. Soit $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que
$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ \langle y_1 + y_2, x\rangle + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2 \right\} = \frac{1}{2}\|x^0\|^2 - \frac{1}{2}\|y_1 + y_2 - x^0\|^2$$
7. En déduire que le problème dual associé à la fonction de couplage $\mathcal{L}$ est donné par
$$\min_{y_1,y_2\in\mathbb{R}^n} (\chi_{\mathcal{C}_1})^*(y_1) + (\chi_{\mathcal{C}_2})^*(y_2) + \frac{1}{2}\|y_1 + y_2 - x^0\|^2$$

Problème dual.

8. Montrer que le problème dual admet une unique solution, que l'on note (y_1^*, y_2^*).
9. Caractériser (y_1^*, y_2^*) au premier ordre. En déduire que
$$\begin{cases} y_1^* \in \partial\chi_{\mathcal{C}_1}(x^0 - y_1^* - y_2^*) \\ y_2^* \in \partial\chi_{\mathcal{C}_2}(x^0 - y_1^* - y_2^*) \end{cases}$$
10. Montrer que $x^0 - y_1^* - y_2^*$ est solution du problème primal.

Résolution du problème dual.

11. Écrire les itérations de l'algorithme de minimisation alternée pour la résolution du problème dual. On notera $((y_1^k, y_2^k))_{k\in\mathbb{N}}$ la suite générée par cet algorithme.
12. Montrer que cette suite vérifie
$$\begin{cases} y_1^{k+1} = x^0 - y_2^k - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}_1}(x^0 - y_2^k) \\ y_2^{k+1} = x^0 - y_1^{k+1} - \mathrm{proj}_{\mathcal{C}_2}(x^0 - y_1^{k+1}) \end{cases}$$

FIN DE L'ÉNONCÉ

Exercice 1

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction L-régulière fortement convexe et $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe, borné, fermé et non vide. On s'intéresse à la résolution du problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathcal{C}} f(x)$$

Soit $\tau > 0$. On considère l'algorithme suivant :

$$x^0 \in \mathcal{C} \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad x^{k+1} = \mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^k - \tau \nabla f(x^k))$$

1. Montrer que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad f(x^k) \geq f(x^{k+1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tau} - L\right) \|x^{k+1} - x^k\|^2$$

En déduire que, si $0 < \tau < 2/L$, alors la suite $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante et convergente.

---

(1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$, puisque f est L-régulière, par la lemme de descent,

$$f(x^{k+1}) \leq f(x^k) + \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle + \frac{L}{2}\|x^{k+1} - x^k\|^2$$

on remarque que

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{C}} = \mathrm{prox}_{\chi_{\mathcal{C}}}$$

alors

$$x^{k+1} = \mathrm{prox}_{\chi_{\mathcal{C}}}(x^k - \tau \nabla f(x^k))$$

par la caractérisation du point proximal dans le cas convexe,

$$x^k - \tau \nabla f(x^k) - x^{k+1} \in \partial \chi_{\mathcal{C}}(x^{k+1})$$

par la définition de la sous gradient,

$$\chi_{\mathcal{C}}(x^{k+1}) \geq \chi_{\mathcal{C}}(x^k) + \langle x^k - \tau \nabla f(x^k) - x^{k+1}, x^{k+1} - x^k \rangle$$

et puisque $x^0 \in \mathcal{C}$ et $(x_k)_{k\geq 1}$ sont les projétés de τ,

$$\chi_{\mathcal{C}}(x^{k+1}) = \chi_{\mathcal{C}}(x^k) = 0$$

日期: /

donc $$0 \geq \langle x^k - \tau \nabla f(x^k) - x^{k+1}, x^{k+1} - x^k \rangle$$

$$0 \geq -\|x^{k+1} - x^k\|^2 - \tau \langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle$$

alors

$$\langle \nabla f(x^k), x^{k+1} - x^k \rangle \geq -\frac{1}{\tau} \|x^{k+1} - x^k\|^2$$

on a

$$f(x^k) \geq f(x^{k+1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tau} - L\right) \cdot \|x^{k+1} - x^k\|^2$$

Si $0 < \tau < \frac{2}{L}$, on a

$$f(x^k) - f(x^{k+1}) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tau} - L\right) \cdot \|x^{k+1} - x^k\|^2 \geq 0$$

$$f(x^k) \geq f(x^{k+1})$$

donc la suite $(f(x^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Puisque C est fermé et borné, il s'agit un compact de $\mathbb{R}^n$. Ainsi la fonction continue f y atteint ses bornes. Ceci implique que $(f(x^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est minorée.
Alors $(f(x^k))_{k \in \mathbb{N}}$ est convergente.

2. À partir de cette question, $0 < \tau < 2/L$. On note $J = f + \chi_C$. Montrer que la suite $(\|x^{k+1} - x^k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0. En déduire qu'il existe une suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de limite nulle telle que $p_k \in \partial J(x^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. *On pensera à remarquer que* $\chi_C = \tau\,\chi_C$.

---

(2) D'après (1), dans le cas $0 < \tau < \frac{2}{L}$,

$$\|x^{k+1} - x^k\| \leq \frac{2}{\frac{2}{\tau} - L} \cdot (f(x^k) - f(x^{k+1}))$$

alors

$$\sum_{k=0}^{K} \|x^{k+1} - x^k\| \leq \frac{2}{\frac{2}{\tau} - L} \cdot (f(x^0) - f(x^{K+1}))$$

et puisque f est décroissante et convergente, on pose

$$\lim_{K\to+\infty} f(x^{K+1}) = \min_{x\in C} f(x) < +\infty$$

alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \|x^{k+1} - x^k\| \leq \lim_{K\to+\infty} \sum_{k=0}^{K} \|x^{k+1} - x^k\|$$
$$\leq \frac{2}{\frac{2}{\tau} - L} \cdot (f(x^0) - \min_{x\in C} f(x))$$
$$< +\infty$$

donc $(\|x^{k+1} - x^k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ est absolument convergente, alors $(\|x^{k+1} - x^k\|)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

D'après (1), $x^{k+1} = \operatorname{prox}_{\chi_C}(x^k - \tau\nabla f(x^k))$

par la caractérisation du point proximal,

$$x^k - \tau\nabla f(x^k) - x^{k+1} \in \partial\chi_C(x^{k+1})$$

puisque $\chi_C = \tau\cdot\chi_C$, on a

$$x^k - \tau\nabla f(x^k) - x^{k+1} \in \partial(\tau\cdot\chi_C)(x^{k+1})$$

日期: /

Comme f est continuement différentiable,

$$\partial J(x^{k+1}) = \nabla f(x^{k+1}) + \frac{1}{\tau} \cdot \partial(\tau \chi_C)(x^{k+1})$$

donc

$$p_{k+1} = \nabla f(x^{k+1}) + \frac{1}{\tau}\left(x^k - \tau \nabla f(x^k) - x^{k+1}\right)$$

$$= \nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k) + \frac{1}{\tau}\left(x^k - x^{k+1}\right)$$

par l'inégalité triangulaire,

$$\|p_{k+1}\| \leq \|\nabla f(x^{k+1}) - \nabla f(x^k)\| + \frac{1}{\tau}\|x^{k+1} - x^k\|$$

$$\leq L \cdot \|x^{k+1} - x^k\| + \frac{1}{\tau}\|x^{k+1} - x^k\|$$

$$= \left(L + \frac{1}{\tau}\right) \cdot \|x^{k+1} - x^k\|$$

puisque $\|x^{k+1} - x^k\| \xrightarrow{k \to +\infty} 0$ alors $\|p_k\| \xrightarrow{k \to +\infty} 0$

donc la suite $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3. Justifier que la suite $(x^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution du problème étudié. *On pourra commencer par considérer les valeurs d'adhérence de cette suite.*

(3) Puisque les points x^k appartient à l'ensemble C, et que celui-ci est borné, on en déduit que la suite des x_k admet au moins une valeur d'adhérence. Notons-la x^*.

Par définition, il existe une sous-suite $(x^{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ qui converge ver x^*.

Puisque C est fermée, alors $x^* \in C$.

Soit $j \in \mathbb{N}$, par la définition du sous-gradient,

$$\forall x \in C, \quad J(x) \geq J(x^{k_j}) + \langle p_{k_j}, x - x^{k_j} \rangle$$
$$= f(x^{k_j}) + \langle p_{k_j}, x - x^{k_j} \rangle$$

passons à la limite $j \longrightarrow +\infty$, par la continuité de J,

$$\forall x \in C, \quad J(x) \geq f(x^*) + \langle 0, x - x^* \rangle = J(x^*)$$

donc x^* est point critique de J.

Puisque f et χ_C sont fortement convexe, alors J est fortement convexe. Par la règle de Fermat. Alors x^* est l'unique minimiseur de J.

Finalement, on vient de montrer que toute sous suite convergente de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge nécessaire vers l'unique minimiseur de J, donc la suite de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers une solution de problème étudié.

Exercice 2

Soit $C_1, C_2 \in \mathbb{R}^n$ et $(r_1, r_2) \in \mathbb{R}^2$. On note $\mathcal{C}_i$ la boule fermée de centre C_i et de rayon r_i pour tout $i \in \{1, 2\}$. On suppose que l'intersection entre $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ est non vide. Soit $x^0 \in \mathbb{R}^n$. Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \chi_{\mathcal{C}_1}(x) + \chi_{\mathcal{C}_2}(x) + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2$$

1. Justifier que le problème étudié admet une unique solution, que l'on notera x^*.

(1) Puisque $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2$ est non-vide, fermée, convexe, on en déduit que $\chi_{\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_2} = \chi_{\mathcal{C}_1} + \chi_{\mathcal{C}_2}$ est une fonction convexe, s.c.i. et propre.

Alors $J(x) = \chi_{\mathcal{C}_1}(x) + \chi_{\mathcal{C}_2}(x) + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2$ sont fortement convexe.

Par la règle de Fermat, le problème étudié admet une unique solution x^*.

2. Montrer que $x^0 - x^* \in \partial\chi_{\mathcal{C}_1}(x^*) + \partial\chi_{\mathcal{C}_2}(x^*)$.

(2) Soit x^* est la solution du problème, alors

$$x^* = \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \left\{ \chi_{\mathcal{C}_1}(x) + \chi_{\mathcal{C}_2}(x) + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2 \right\}$$
$$= \operatorname{prox}_{\chi_{\mathcal{C}_1} + \chi_{\mathcal{C}_2}}(x^0)$$

par la caractérisation du point proximal,

$$x^0 - x^* \in \partial\chi_{\mathcal{C}_1}(x^*) + \partial\chi_{\mathcal{C}_2}(x^*)$$

日期:　　　/

(2) 标准答案

La règle de Fermat assure que

$$0 \in \partial\left(x \longmapsto \chi_{C_1}(x) + \chi_{C_2}(x) + \frac{1}{2}\|x-x^0\|^2\right)(x^*)$$

puisque $x \longmapsto \frac{1}{2}\|x-x^0\|^2$ est continument différentiable, on a que

$$\partial\left(x \longmapsto \chi_{C_1}(x) + \chi_{C_2}(x) + \frac{1}{2}\|x-x^0\|^2\right)(x^*) = \partial(\chi_{C_1}+\chi_{C_2})(x^*) + x^* - x^0$$

Puisque $\operatorname{dom}\chi_{C_i} = C_i$ et que $\forall x \in C_1 \cap C_2$, la fonction $\chi_{C_i}(x)$ est continue,

$$\partial(\chi_{C_1}+\chi_{C_2})(x^*) = \partial\chi_{C_1}(x^*) + \partial\chi_{C_2}(x^*)$$

donc

$$0 \in \partial(\chi_{C_1}+\chi_{C_2})(x^*) + x^* - x^0$$

$$x^0 - x^* \in \partial\chi_{C_1}(x^*) + \partial\chi_{C_2}(x^*)$$

Dualité.

3. Soit $i \in \{1,2\}$. Calculer $(\chi_{C_i})^*$.

(3) D'après le cours, si on note $\mathcal{C}_0$ la boule fermé unicité 单位球 de $\mathbb{R}^n$, on a

$$\forall y \in \mathbb{R}^n, \qquad (\chi_{\mathcal{C}_0})^*(y) = \|y\|$$

on remarque que

$$\begin{aligned}\chi_{\mathcal{C}_i}(x) = 0 &\iff \|x - C_i\| \leqslant r_i \\ &\iff \left\| \frac{x - C_i}{r_i} \right\| \leqslant 1 \\ &\iff \chi_{\mathcal{C}_0}\left(\frac{x - C_i}{r_i}\right) = 0\end{aligned}$$

Par la proposition,

$$(x \longmapsto \chi_{\mathcal{C}_0}(x - C_i))^*(y) = (\chi_{\mathcal{C}_0})^*(y) + \langle y, C_i \rangle$$

et

$$\left(x \longmapsto \chi_{\mathcal{C}_0}\left(\frac{x - C_i}{r_i}\right)\right)^*(y) = (\chi_{\mathcal{C}_0})^*(r_i y) + \langle r_i y, C_i \rangle$$

alors

$$(\chi_{C_i})^*(y) = \|r_i y\| + r_i \cdot \langle y, C_i \rangle$$

4. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\chi_{C_1}(x) + \chi_{C_2}(x) = \sup_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - (\chi_{C_1})^*(y_1) - (\chi_{C_2})^*(y_2) \right\}$$

(4) Puisque $\chi_{\mathcal{C}_i}$ est convexe, s.c.i. et propre, par le théorème de FENCHEL–MOREAU,

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \qquad \chi_{\mathcal{C}_i}(x) = \sup_{y_i \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle y_i, x \rangle - (\chi_{\mathcal{C}_i})^*(y_i) \right\}$$

En sommant $\chi_{\mathcal{C}_1}(x)$ et $\chi_{\mathcal{C}_2}(x)$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \; \chi_{\mathcal{C}_1}(x) + \chi_{\mathcal{C}_2}(x) = \sup_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - (\chi_{\mathcal{C}_1})^*(y_1) - (\chi_{\mathcal{C}_2})^*(y_2) \right\}$$

5. En déduire l'expression d'une fonction de couplage $\mathcal{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ telle que le problème d'optimisation étudié s'écrive sous la forme

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \sup_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x; y_1, y_2)$$

(5) Puisque $\chi_{C_1}(x) + \chi_{C_2}(x) + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2$

$$= \sup_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - (\chi_{C_1})^*(y_1) - (\chi_{C_2})^*(y_2) \right\} + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2$$

on en déduit que

$\forall (x, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$$\mathcal{L}(x; y_1, y_2) = \langle y_1 + y_2, x \rangle - (\chi_{C_1})^*(y_1) - (\chi_{C_2})^*(y_2) + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2$$

6. Soit $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$. Montrer que

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2 \right\} = \frac{1}{2}\|x^0\|^2 - \frac{1}{2}\|y_1 + y_2 - x^0\|^2$$

(6) On pose $g(x) = \langle y_1 + y_2, x \rangle + \frac{1}{2}\|x - x^0\|^2$

Le minimum existe car g est fortement convexe.

Soit le minimiseur est x^*, par le règle de Fermat,

$$\nabla g(x^*) = y_1 + y_2 + x^* - x^0 = 0$$

$$x^* = x^0 - (y_1 + y_2)$$

donc

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} g(x) = \langle y_1 + y_2, x^0 - (y_1 + y_2) \rangle + \frac{1}{2}\|y_1 + y_2\|^2$$

$$= \langle y_1 + y_2, x^0 \rangle - \frac{1}{2}\|y_1 + y_2\|^2$$

$$= \frac{1}{2}\|x^0\|^2 - \frac{1}{2}\|y_1 + y_2 - x^0\|^2$$

7. En déduire que le problème dual associé à la fonction de couplage $\mathcal{L}$ est donné par

$$\min_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n} (\chi_{C_1})^*(y_1) + (\chi_{C_2})^*(y_2) + \frac{1}{2} \|y_1 + y_2 - x^0\|^2$$

(7) Par définition, le problème dual est

$$\max_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x; y_1, y_2)$$

d'après (6), on a

$$\inf_{x \in \mathbb{R}^n} \mathcal{L}(x; y_1, y_2) = \frac{1}{2}\|x^0\|^2 - \frac{1}{2}\|y_1 + y_2 - x_0\|^2 - (\chi_{C_1})^*(y_1) - (\chi_{C_2})^*(y_2)$$

et on en déduit que

$$\max_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|x^0\|^2 - \frac{1}{2}\|y_1 + y_2 - x_0\|^2 - (\chi_{C_1})^*(y_1) - (\chi_{C_2})^*(y_2)$$

$$= \min_{y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n} \frac{1}{2}\|y_1 + y_2 - x_0\|^2 + (\chi_{C_1})^*(y_1) + (\chi_{C_2})^*(y_2)$$

Problème dual.

8. Montrer que le problème dual admet une unique solution, que l'on note (y_1^*, y_2^*).

(8) Puisque $(\chi_{C_1})^*(y_1)$, $(\chi_{C_2})^*(y_2)$ sont convexes, alors le problème dual est fortement convexe.
Alors le problème dual admet une unique solution.

9. Caractériser (y_1^*, y_2^*) au premier ordre. En déduire que

$$\begin{cases} y_1^* \in \partial \chi_{C_1}(x^0 - y_1^* - y_2^*) \\ y_2^* \in \partial \chi_{C_2}(x^0 - y_1^* - y_2^*) \end{cases}$$

(9) Par la règle de Fermat

$$0 \in \partial\left((y_1, y_2) \longmapsto \frac{1}{2}\|y_1 + y_2 - x_0\|^2 + (\chi_{C_1})^*(y_1) + (\chi_{C_2})^*(y_2)\right)(y_1^*, y_2^*)$$

puisque le terme quadratique est continument différentiable

日期: /

$$0 \in \partial\left((y_1,y_2) \longmapsto (\chi_{C_1})^*(y_1) + (\chi_{C_2})^*(y_2)\right)(y_1^*, y_2^*)$$
$$+ \nabla\left((y_1,y_2) \longmapsto \frac{1}{2}\|y_1+y_2-x_0\|^2\right)(y_1^*, y_2^*)$$

et on a

$$\nabla\left((y_1,y_2) \longmapsto \frac{1}{2}\|y_1+y_2-x_0\|^2\right)(y_1^*, y_2^*) = \begin{bmatrix} y_1^*+y_2^*-x_0 \\ y_1^*+y_2^*-x_0 \end{bmatrix}$$

$$\partial\left((y_1,y_2) \longmapsto (\chi_{C_1})^*(y_1) + (\chi_{C_2})^*(y_2)\right)(y_1^*, y_2^*) = \partial(\chi_{C_1})^*(y_1^*) \times \partial(\chi_{C_2})^*(y_2^*)$$

Par le règle de Fermat,

$$\begin{cases} 0 \in \partial(\chi_{C_1})^*(y_1^*) + y_1^*+y_2^*-x_0 \\ 0 \in \partial(\chi_{C_2})^*(y_2^*) + y_1^*+y_2^*-x_0 \end{cases}$$

donc
$$\begin{cases} x_0-y_1^*-y_2^* \in \partial(\chi_{C_1})^*(y_1^*) \\ x_0-y_1^*-y_2^* \in \partial(\chi_{C_2})^*(y_2^*) \end{cases}$$

alors

$$\begin{cases} y_1^* \in \partial\chi_{C_1}(x^0-y_1^*-y_2^*) \\ y_2^* \in \partial\chi_{C_2}(x^0-y_1^*-y_2^*) \end{cases}$$

10. Montrer que $x^0 - y_1^* - y_2^*$ est solution du problème primal.

(10) D'après (9)

$$y_1^*+y_2^* \in \partial\chi_{C_1}(x^0-y_1^*-y_2^*) + \partial\chi_{C_2}(x^0-y_1^*-y_2^*)$$

donc

$$0 \in \partial\chi_{C_1}(x^0-y_1^*-y_2^*) + \partial\chi_{C_2}(x^0-y_1^*-y_2^*) + x^0-y_1^*-y_2^*-x^0$$

日期: /

D'après (2) $x^* = x^0 - y_1^* - y_2^*$

Résolution du problème dual.

11. Écrire les itérations de l'algorithme de minimisation alternée pour la résolution du problème dual. On notera $((y_1^k, y_2^k))_{k\in\mathbb{N}}$ la suite générée par cet algorithme.

(11) L'algorithme BCD s'écrit

$$y_2^0 \in \mathbb{R}^n, \ \forall k \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} y_1^{k+1} \in \underset{y_1\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2}\|y_1 + y_2^k - x_0\|^2 + (\chi_{\mathcal{C}_1})^*(y_1) \right\} \\ y_2^{k+1} \in \underset{y_2\in\mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}} \left\{ \frac{1}{2}\|y_1^{k+1} + y_2 - x_0\|^2 + (\chi_{\mathcal{C}_2})^*(y_2) \right\} \end{cases}$$

12. Montrer que cette suite vérifie

$$\begin{cases} y_1^{k+1} = x^0 - y_2^k - \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_1}(x^0 - y_2^k) \\ y_2^{k+1} = x^0 - y_1^{k+1} - \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_2}(x^0 - y_1^{k+1}) \end{cases}$$

(12) Puisque $(\chi_{\mathcal{C}_1})^*$ et $(\chi_{\mathcal{C}_2})^*$ sont convexe, s.c.i. et propre,

on a
$$\begin{cases} y_1^{k+1} = \operatorname{prox}_{(\chi_{\mathcal{C}_1})^*}(x^0 - y_2^k) \\ y_2^{k+1} = \operatorname{prox}_{(\chi_{\mathcal{C}_2})^*}(x^0 - y_1^{k+1}) \end{cases}$$

Par l'identité de Moreau

$$\begin{cases} \operatorname{prox}_{(\chi_{\mathcal{C}_1})^*}(x^0 - y_2^k) = x^0 - y_2^k - \operatorname{prox}_{\chi_{\mathcal{C}_1}}(x^0 - y_2^k) \\ \operatorname{prox}_{(\chi_{\mathcal{C}_2})^*}(x^0 - y_1^{k+1}) = x^0 - y_1^{k+1} - \operatorname{prox}_{\chi_{\mathcal{C}_2}}(x^0 - y_1^{k+1}) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} y_1^{k+1} = x^0 - y_2^k - \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_1}(x^0 - y_2^k) \\ y_2^{k+1} = x^0 - y_1^{k+1} - \operatorname{proj}_{\mathcal{C}_2}(x^0 - y_1^{k+1}) \end{cases}$$

日期: /