Feuille d'exercices n°5
Algorithme FBS (*Forward-Backward Splitting*)
Algorithme BCD (*Block-Coordinate Descent*)

Exercice 1 – Règle de Fermat dans l'éclatement d'opérateurs

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions. On suppose que $f+g$ admet un minimiseur x^*.

(a) On suppose que f est continûment différentiable au voisinage de x^*. Montrer que

$$-\nabla f(x^*) \in \partial g(x^*)$$

En déduire que, pour tout $\tau > 0$, $\qquad x^* = \operatorname{prox}_{\tau g}(x^* - \tau \nabla f(x^*))$

(b) On suppose que f et g sont convexes. A-t-on

$$0 \in \partial f(x^*) + \partial g(x^*)\,?$$

Exercice 2 – Itérations FBS

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions avec f différentiable. On suppose que $f+g$ est minorée. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) + g(x)$$

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme FBS de pas τ. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que

$$x_{k+1} \in \arg\min_{x\in\mathcal{X}} \tilde{J}_k(x) \qquad \text{avec} \qquad \tilde{J}_k(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k\rangle + \frac{1}{2\,\tau}\,\|x - x_k\|^2 + g(x)$$

À quoi correspond la fonction $\tilde{J}_k$?

(b) Montrer que $\quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau J_k}(x_k) \qquad$ avec $\qquad J_k(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k\rangle + g(x)$

À quoi correspond la fonction J_k ?

Exercice 3 – Convergence de FBS

Module B4, Corollaire 1 et 2, Lemme 1 et Proposition 4, 6 et 7

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions avec f une fonction L-régulière. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) + g(x)$$

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme FBS de pas τ. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $\qquad f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k\rangle + \dfrac{L}{2}\,\|x_{k+1} - x_k\|^2$

(b) Justifier que $\qquad g(x_{k+1}) + \dfrac{1}{2\,\tau}\,\|x_{k+1} - x_k + \tau\,\nabla f(x_k)\|^2 \leq g(x_k) + \dfrac{1}{2\,\tau}\,\|\tau\,\nabla f(x_k)\|^2$

En déduire que $\qquad J(x_k) \geq J(x_{k+1}) + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{\tau} - L\right)\|x_{k+1} - x_k\|^2$

(c) On suppose dans cette question que g **est convexe**. Montrer que

$$g(x_k) \geq g(x_{k+1}) - \frac{1}{\tau} \langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - x_k + \tau \nabla f(x_k) \rangle$$

En déduire que
$$J(x_k) \geq J(x_{k+1}) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\tau} - L \right) \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

(d) Sous quelles conditions sur τ la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle décroissante ? Justifier que, dans ce cas, la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Qu'en est-il du cas où g convexe ?

(e) On pose
$$p_{k+1} = \frac{1}{\tau} (x_{k+1} - x_k) + \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$$

Montrer que $p_{k+1} \in \partial J(x_{k+1})$.

(f) On suppose désormais que $\tau \in \left]0\,;1/L\right[$. Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\tau} - L \right) \sum_{k=0}^{K-1} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq J(x_0) - J(x_K)$$

En déduire que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

(g) On suppose à présent que J est continue sur son domaine supposé fermé et est KŁ. Montrer que si la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, alors elle est convergente, et que sa limite est point critique de J.

Exercice 4 – Convergence du critère dans l'algorithme BCD

Module B6, Proposition 1

Soit $J : \mathcal{X}\times\mathcal{Z} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. On suppose qu'il existe $(x^0, z^0) \in \operatorname{dom} J$ tel que l'ensemble de sous-niveau $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0,z^0)} J$ soit borné. On considère la suite $((x_k, z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ générée par l'algorithme

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} x_{k+1} \in \operatorname*{argmin}_{x\in\mathcal{X}} J\big(x, z_k\big) \\ z_{k+1} \in \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{Z}} J\big(x_{k+1}, z\big) \end{cases}$$

Montrer que les suites $(J(x_k, z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(J(x_{k+1}, z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes, convergentes et convergent vers la même limite.

Exercice 5 – Sous-différentiels partiels

On considère la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & |x + y| + 2\,|x - y| \end{array} \right.$$

(a) Montrer que la fonction f est convexe.

(b) Pour tout $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}$, calculer les sous-différentiels des fonctions partielles convexes

$$x \mapsto f(x, y^0) \qquad \text{et} \qquad y \mapsto f(x^0, y)$$

en $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, que l'on notera respectivement $\partial_x f(x, y^0)$ et $\partial_y f(x^0, y)$.

(c) Soit $a \neq 0$. Vérifier que $0 \in \partial_x f(a, a)$ et $0 \in \partial_y f(a, a)$.

(d) Montrer que $(0, 0) \notin \partial J(a, a)$ si $a \neq 0$. Comment interpréter ce résultat ?

Exercice 1 – Règle de Fermat dans l'éclatement d'opérateurs

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions. On suppose que $f + g$ admet un minimiseur x^*.

(a) On suppose que f est continûment différentiable au voisinage de x^*. Montrer que

$$-\nabla f(x^*) \in \partial g(x^*)$$

En déduire que, pour tout $\tau > 0$, $\quad x^* = \mathrm{prox}_{\tau g}(x^* - \tau \nabla f(x^*))$

(b) On suppose que f et g sont convexes. A-t-on

$$0 \in \partial f(x^*) + \partial g(x^*)\,?$$

(a) x^* est le minimiseur de $f+g$, par le régle de Fermat,

$$0 \in \partial(f+g)(x^*)$$

et comme f est continûment différentiable,

$$0 \in \nabla f(x^*) + \partial g(x^*)$$

$$-\nabla f(x^*) \in \partial g(x^*)$$

et on a

$$-\tau \cdot \nabla f(x^*) \in \tau \cdot \partial g(x^*)$$

$$x^* - \tau \cdot \nabla f(x^*) - x^* \in \partial(\tau g)(x^*)$$

donc

$$x^* = \mathrm{prox}_{\tau g}(x^* - \tau \cdot \nabla f(x^*))$$

(b) Non, le cas d'égalité comprennent

① f et g sont convexes propres avec f ou g continue en un point $x \in \mathrm{intr}(\mathrm{dom}\, J)$

② f (ou g) est continûment différentiable dans un voisinage de $x \in \mathrm{dom}\, J$.

Exercice 2 – Itérations FBS

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions avec f différentiable. On suppose que $f+g$ est minorée. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) + g(x)$$

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme FBS de pas τ. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que

$$x_{k+1} \in \arg\min_{x\in\mathcal{X}} \tilde{J}_k(x) \qquad \text{avec} \qquad \tilde{J}_k(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{1}{2\tau} \|x - x_k\|^2 + g(x)$$

À quoi correspond la fonction $\tilde{J}_k$?

(b) Montrer que $\quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau J_k}(x_k) \quad$ avec $\quad J_k(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + g(x)$

À quoi correspond la fonction J_k ?

(a) Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme FBS de pas τ. Pour l'itération,

$x_0 \in \mathcal{X}$ et $\forall k \in \mathbb{N}$, $x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau_k g}(x_k - \tau_k \nabla f(x_k))$ avec $\tau_k > 0$

d'après la définition du point proximal,

$$x_{k+1} \in \underset{x\in\mathcal{X}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \tau_k \cdot g(x) + \frac{1}{2} \|x - x_k + \tau_k \cdot \nabla f(x_k)\|^2 \right\}$$

$$x_{k+1} \in \underset{x\in\mathcal{X}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \tau_k \cdot g(x) + \frac{1}{2} \|x - x_k\|^2 + \tau_k \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{\tau_k^2}{2} \|\nabla f(x_k)\|^2 \right\}$$

$$x_{k+1} \in \underset{x\in\mathcal{X}}{\operatorname{argmin}} \left\{ g(x) + \frac{1}{2\tau_k} \|x - x_k\|^2 + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + \frac{\tau_k}{2} \|\nabla f(x_k)\|^2 \right\}$$

L'ajout de termes constants par rapport à x ne modifiant pas les minimiseurs,

$$x_{k+1} \in \underset{x\in\mathcal{X}}{\operatorname{argmin}} \left\{ g(x) + \frac{1}{2\tau_k} \|x - x_k\|^2 + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + f(x_k) \right\}$$

Exercice 2 – Itérations FBS

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions avec f différentiable. On suppose que $f+g$ est minorée. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x\in\mathcal{X}} f(x) + g(x)$$

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme FBS de pas τ. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que

$$x_{k+1} \in \arg\min_{x\in\mathcal{X}} \tilde{J}_k(x) \qquad \text{avec} \qquad \tilde{J}_k(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k\rangle + \frac{1}{2\tau}\|x - x_k\|^2 + g(x)$$

À quoi correspond la fonction $\tilde{J}_k$?

(b) Montrer que $\quad x_{k+1} \in \operatorname{prox}_{\tau J_k}(x_k) \qquad$ avec $\qquad J_k(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k\rangle + g(x)$

À quoi correspond la fonction J_k ?

(b) D'après (a), on a

$$x_{k+1} \in \underset{x\in\mathcal{X}}{\operatorname{argmin}} \left\{ \tau_k \cdot \left(g(x) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + f(x_k) \right) + \frac{1}{2}\|x - x_k\|^2 \right\}$$

donc

$$x_{k+1} = \operatorname{prox}_{\tau_k J_k}(x_k) \quad \text{avec} \quad J_k(x) = f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x - x_k \rangle + g(x)$$

Exercice 3 – Convergence de FBS Module B4, Corollaire 1 et 2, Lemme 1 et Proposition 4, 6 et 7

Soit $f, g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions avec f une fonction L-régulière. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(x) + g(x)$$

Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme FBS de pas τ. Soit $k \in \mathbb{N}$.

(a) Montrer que $$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

(a) f est L-régulière, par la lemme de descent, pour $x_k, x_{k+1} \in \mathcal{X}$,

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle + \frac{L}{2} \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

(b) Justifier que $$g(x_{k+1}) + \frac{1}{2\tau} \|x_{k+1} - x_k + \tau \nabla f(x_k)\|^2 \leq g(x_k) + \frac{1}{2\tau} \|\tau \nabla f(x_k)\|^2$$

En déduire que $$J(x_k) \geq J(x_{k+1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} - L\right) \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

(b) $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite générée par l'algorithme FBS de pas τ.

$\forall k \in \mathbb{N}$, $\quad x_{k+1} \in \mathrm{prox}_{\tau g}(x_k - \tau \cdot \nabla f(x_k))$

par la définition du point optimal,

$$x_{k+1} \in \underset{x\in\mathcal{X}}{\mathrm{argmin}} \left\{ \tau \cdot g(x) + \frac{1}{2} \|x - x_k + \tau \cdot \nabla f(x_k)\|^2 \right\}$$

donc

$$\tau \cdot g(x_{k+1}) + \frac{1}{2} \|x_{k+1} - x_k + \tau \cdot \nabla f(x_k)\|^2 \leq \tau \cdot g(x_k) + \frac{1}{2} \|\tau \cdot \nabla f(x_k)\|^2$$

$$g(x_{k+1}) + \frac{1}{2\tau} \|x_{k+1} - x_k + \tau \cdot \nabla f(x_k)\|^2 \leq g(x_k) + \frac{1}{2\tau} \|\tau \cdot \nabla f(x_k)\|^2$$

alors

$$g(x_k) \geq g(x_{k+1}) + \frac{1}{2\tau} \cdot \|x_{k+1} - x_k\|^2 + \langle \nabla f(x_k), x_{k+1} - x_k \rangle$$

en sommant le résultat de (a), on a

$$J(x_k) \geq J(x_{k+1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} - L\right) \|x_{k+1} - x_k\|^2$$

(c) On suppose dans cette question que g est **convexe**. Montrer que

$$g(x_k) \geq g(x_{k+1}) - \frac{1}{\tau}\langle x_k - x_{k+1}, x_{k+1} - x_k + \tau \nabla f(x_k)\rangle$$

En déduire que
$$J(x_k) \geq J(x_{k+1}) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{\tau} - L\right)\|x_{k+1} - x_k\|^2$$

(c) g est convexe, alors

$$x_{k+1} = \mathrm{prox}_{\tau g}(x_k - \tau \nabla f(x_k))$$

donc

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \tau \cdot g(x) \geqslant \tau \cdot g(x_{k+1}) - \langle x - x_{k+1}, x_k - \tau \cdot \nabla f(x_k) - x_{k+1}\rangle$$

on prend $x = x_k$

$$g(x_k) \geqslant g(x_{k+1}) - \frac{1}{\tau}\langle x_k - x_{k+1}, x_k - x_{k+1} - \tau \cdot \nabla f(x_k)\rangle$$

alors

$$g(x_k) \geqslant g(x_{k+1}) - \frac{1}{\tau}\|x_k - x_{k+1}\|^2 + \langle x_k - x_{k+1}, \nabla f(x_k)\rangle$$

en sommant le résultat de (a), on a

$$J(x_k) \geqslant J(x_{k+1}) + \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{\tau} - L\right)\cdot\|x_{k+1} - x_k\|^2$$

(d) Sous quelles conditions sur τ la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est-elle décroissante ? Justifier que, dans ce cas, la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente. Qu'en est-il du cas où g convexe ?

(d) On pose $Q = 2$ si g est convexe, et $Q = 1$ sinon.
Sous la condition que $\tau \in]0, \frac{Q}{L}]$, la suite $(J(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

$$J(x_{k+1}) \leqslant J(x_k) - \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{\tau} - L\right)\cdot\|x_{k+1} - x_k\|^2$$

La convergence découle du fait que cette suite soit minorée par la borne inférieure de J.

(e) On pose
$$p_{k+1} = \frac{1}{\tau}(x_{k+1} - x_k) + \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)$$
Montrer que $p_{k+1} \in \partial J(x_{k+1})$.

(e) Puisque f est L-régulière, on a
$$\partial J(x_{k+1}) = \nabla f(x_{k+1}) + \partial g(x_{k+1})$$
par $x_{k+1} \in \text{prox}_{\tau g}(x_k - \tau_k \cdot \nabla f(x_k))$,
$$x_k - \tau \cdot \nabla f(x_k) - x_{k+1} \in \tau \cdot \partial g(x_{k+1})$$
combinons ces deux relations,
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad \frac{x_k - x_{k+1}}{\tau} + \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k) \in \partial J(x_{k+1})$$

(f) On suppose désormais que $\tau \in]0 ; 1/L[$. Soit $K \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} - L\right) \sum_{k=0}^{K-1} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq J(x_0) - J(x_K)$$
En déduire que la suite $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tend vers 0.

(f) D'après (b), on a
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} - L\right) \cdot \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq J(x_k) - J(x_{k+1})$$
donc
$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tau} - L\right) \sum_{k=0}^{K-1} \|x_{k+1} - x_k\|^2 \leq J(x_0) - J(x_K)$$
$$\leq J(x_0) - \inf J$$
il s'ensuit que la série de terme général $\|x_{k+1} - x_k\|^2$ est absolument convergente. donc $\|x_{k+1} - x_k\|$ converge vers 0.
$$\|p_{k+1}\| = \left\|\frac{1}{\tau}(x_k - x_{k+1}) + \nabla f(x_{k+1}) - \nabla f(x_k)\right\|$$
$$\leq \left(\frac{1}{\tau} + L\right) \cdot \|x_{k+1} - x_k\|$$
donc $(p_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers 0

(g) On suppose à présent que J est continue sur son domaine supposé fermé et est KŁ. Montrer que si la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence, alors elle est convergente, et que sa limite est point critique de J.

(g) Si la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ admet une valeur d'adhérence x^*, on suppose qu'il existe une sous-suite $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ convergeant vers $x^* \in \operatorname{dom} J$.

D'après (f), $\|x_{k+1}-x_k\|$ converge vers 0, donc $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est convergente, donc elle converge vers x^*.

Par l'hypothése, J est KŁ, donc par la théorème d'Attouch, Bolte & Svaiter, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers sa point critique.

Exercice 4 – Convergence du critère dans l'algorithme BCD Module B6, Proposition 1

Soit $J : \mathcal{X} \times \mathcal{Z} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On suppose qu'il existe $(x^0, z^0) \in \operatorname{dom} J$ tel que l'ensemble de sous-niveau $\operatorname{niv}_{\leq J(x^0,z^0)} J$ soit borné. On considère la suite $((x_k, z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ générée par l'algorithme

$$\forall k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} x_{k+1} \in \underset{x\in\mathcal{X}}{\operatorname{argmin}}\, J(x, z_k) \\ z_{k+1} \in \underset{z\in\mathcal{Z}}{\operatorname{argmin}}\, J(x_{k+1}, z) \end{cases}$$

Montrer que les suites $(J(x_k, z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(J(x_{k+1}, z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ sont décroissantes, convergentes et convergent vers la même limite.

Exercise 4

Par optimalité, on a pour $k \in \mathbb{N}$,

$$J(x_{k+1}, z_k) \leq J(x_k, z_k)$$

et

$$J(x_{k+1}, z_{k+1}) \leq J(x_{k+1}, z_k)$$

donc $(J(x_k, z_k))_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissantes et minorées,

donc elle est convergentes.

L'identité de leur limite découle de l'encadrement

$$J(x_{k+1}, z_{k+1}) \leq J(x_{k+1}, z_k) \leq J(x_k, z_k)$$

Exercice 5 – Sous-différentiels partiels

On considère la fonction suivante :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & |x+y| + 2\,|x-y| \end{array} \right.$$

(a) Montrer que la fonction f est convexe.

(b) Pour tout $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}$, calculer les sous-différentiels des fonctions partielles convexes

$$x \mapsto f(x, y^0) \qquad \text{et} \qquad y \mapsto f(x^0, y)$$

en $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, que l'on notera respectivement $\partial_x f(x, y^0)$ et $\partial_y f(x^0, y)$.

(c) Soit $a \neq 0$. Vérifier que $0 \in \partial_x f(a,a)$ et $0 \in \partial_y f(a,a)$.

(d) Montrer que $(0,0) \notin \partial J(a,a)$ si $a \neq 0$. Comment interpréter ce résultat ?

1a) f est la combinaison linéaire à coeffcients positifs de combinaisons d'une fonction convexe (la valeur absolue) avec une forme linéaire.
Donc f est convexe.

(b)

$$f(x,y^0) = |x+y^0| + 2\cdot|x-y^0| = \begin{cases} -3x+y^0 & \text{si } x \leqslant -y^0 \\ -x+3y^0 & \text{si } |x| \leqslant y^0 \\ 3x - y^0 & \text{si } x \geqslant y^0 \end{cases}$$

$$\partial_x f(x,y^0) = \begin{cases} -3 & \text{si } x < -y^0 \\ \{p \in \mathbb{R} \mid -3 \leqslant p \leqslant -1\} & \text{si } x = -y^0 \\ -1 & \text{si } |x| < y^0 \\ \{p \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant p \leqslant 3\} & \text{si } x = y^0 \\ 3 & \text{si } x > y^0 \end{cases}$$

La même pour $\partial_y f(x^0, y)$

Exercice 5 – Sous-différentiels partiels

On considère la fonction suivante :

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & |x + y| + 2\,|x - y| \end{cases}$$

(a) Montrer que la fonction f est convexe.

(b) Pour tout $(x^0, y^0) \in \mathbb{R}$, calculer les sous-différentiels des fonctions partielles convexes

$$x \mapsto f(x, y^0) \qquad \text{et} \qquad y \mapsto f(x^0, y)$$

en $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$, que l'on notera respectivement $\partial_x f(x, y^0)$ et $\partial_y f(x^0, y)$.

(c) Soit $a \neq 0$. Vérifier que $0 \in \partial_x f(a, a)$ et $0 \in \partial_y f(a, a)$.

(d) Montrer que $(0, 0) \notin \partial J(a, a)$ si $a \neq 0$. Comment interpréter ce résultat ?

(c) D'après (b), si $a \neq 0$

$$\partial_x f(a,a) = \{ p \in \mathbb{R} \mid -1 \leq p \leq 3 \}$$

donc $0 \in \partial_x f(a,a)$

et de même $0 \in \partial_y f(a,a)$

(d) Si $a \neq 0$, $J(a,a) = |2a|$

et si $a = 0$, $J(0,0) = 0$ est minimiseur

donc $(0,0) \notin \partial J(a,a)$ si $a \neq 0$

Contre-exemple

Non-convergence vers le minimiseur dans le cas non différentiable. On considère le cas où $\mathcal{X} = \mathcal{Z} = \mathbb{R}$ avec

$$J(x, z) = |x + z| + 2\,|x - z|$$

Il est aisé de vérifier que, comme combinaison linéaire à coefficients positifs de combinaisons d'une fonction convexe (la valeur absolue) avec une forme linéaire, la fonction J est convexe. Appliquons l'algorithme BCD à la minimisation de cette fonction. Les itérations s'écrivent

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad \begin{cases} x_{k+1} \in \operatorname*{argmin}_{x \in \mathbb{R}} \left\{ |x + z_k| + 2\,|x - z_k| \right\} \\ z_{k+1} \in \operatorname*{argmin}_{z \in \mathbb{R}} \left\{ |x_{k+1} + z| + 2\,|x_{k+1} - z| \right\} \end{cases}$$

On voit qu'il s'agit dans les deux cas de minimiser la fonction strictement convexe, continue, affine par morceaux et coercive f_a, avec

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_a(t) = |t + a| + 2\,|t - a|$$

Un simple calcul montre que, si $a \geq 0$, alors

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \qquad f_a(t) = \begin{cases} -3\,t + a & \text{si } t \leq -a \\ -t + 3\,a & \text{si } |t| \leq a \\ 3\,t - a & \text{si } t \geq a \end{cases}$$

de sorte que son minimiseur se trouve parmi les deux points a et $-a$; or, puisque $f_a(a) = 2\,a$ et que $f_a(-a) = 4\,a$, il s'ensuit que le minimiseur vaut a.

日期:　　　/