Feuille d'exercices n°7

Dualité de Fenchel
Éclatement primal-dual

Exercice 1 – Propriétés de la conjuguée convexe

Module A7, Propositions 1 et 2 et Corollaire 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction de domaine non vide.

(a) Montrer que J^* est une fonction convexe.

(b) Montrer que J^* est une fonction s.c.i.

(c) On suppose que J admet une minorante affine. Montrer que J^* est propre.

(d) En déduire que si J est convexe et propre, alors J^* est convexe, propre et s.c.i.

Exercice 2 – Théorème de Fenchel–Moreau

Module A7, Lemme 1, Proposition 5 et Théorème 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i et propre.

(a) Montrer que
$$\forall\, (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \qquad J(x) + J^*(y) \geq \langle x, y \rangle$$

(b) En déduire que J admet une minorante affine et que
$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) \geq \sup_{y \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle x, y \rangle - J^*(y) \Big\}$$

(c) Montrer que J^{**} est l'ensemble supérieure des minorantes affines de J.

(d) En déduire que
$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) = \sup_{y \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle x, y \rangle - J^*(y) \Big\}$$

Exercice 3 – Quelques exemples

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer J^*.

(a) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{2}\,\|x\|^2 \end{array} \right.$

(b) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array} \right.$

(c) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & \chi_{\mathcal{B}(0,1)} \end{array} \right.$

Exercice 4 – Règle de bascule

Module A7, Lemme 3, Propositions 6 et 7

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. Soit $x \in \operatorname{dom} J$ et $p \in \mathcal{X}$.

(a) Montrer que
$$p \in \partial J(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad J(x) + J^*(p) = \langle p, x \rangle$$

(b) Soit $y \in \mathcal{X}$ et $p \in \partial J(x)$. Montrer que
$$\langle p - y, x \rangle + J^*(y) \geq \langle p, x \rangle - \sup_{y \in \mathcal{X}} \Big\{ \langle y, x \rangle + J^*(y) \Big\}$$

En déduire que
$$\langle p - y, x \rangle + J^*(y) \geq \langle p, x \rangle - \langle p, x \rangle + J^*(p)$$

(c) Montrer que $x \in \partial J^*(p)$.

(d) On suppose que J est s.c.i. et propre. Montrer que
$$p \in \partial J(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in \partial J^*(p)$$

Exercice 5 – Règles de calcul

Module A7, Propositions 8 et 9

Soit $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer J^* en fonction de f^*.

(a) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \alpha\, f(x) \end{array} \right.$ **(b)** $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & f(\alpha\, x) \end{array} \right.$ **(c)** $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & f(x - x^0) \end{array} \right.$

Exercice 6 – Identité de Moreau

Module A7, Proposition 11

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$ et $x^+ = \operatorname{prox}_J(x^0)$. On pose

$$p = x^0 - x^+$$

(a) Justifier que $p \in \partial J(x^+)$. En déduire que $x^+ \in \partial J^*(p)$.

(b) Montrer que $p = \operatorname{prox}_{J^*}(x^0)$.

(c) En déduire que $\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad x = \operatorname{prox}_J(x) + \operatorname{prox}_{J^*}(x)$

Exercice 7 – Éclatement de Dykstra

Soit $f, h : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes, s.c.i. et propres. Soit $r \in \mathcal{X}$. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ J(x) := f(x) + h(x) + \frac{1}{2}\,\|x - r\|^2 \right\}$$

(a) Justifier que le problème considéré possède une unique solution.

(b) Montrer que $\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad f(x) + h(x) = \sup_{(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) \right\}$

(c) Écrire le problème considéré comme un problème de recherche point-selle.

(d) Montrer que le problème dual considéré est le problème de minimisation

$$\min_{(y_1, y_2) \in \mathcal{Y}^2} \left\{ f^*(y_1) + h^*(y_2) + \frac{1}{2}\,\|y_1 + y_2 - r\|^2 \right\}$$

(e) Caractériser au premier ordre les solutions duales (y_1^*, y_2^*). En déduire que

$$0 \in \partial J(r - y_1^* - y_2^*)$$

Que peut-on en conclure quant à la solution primale ?

Exercice 8 – Problèmes composites

Module B7, Proposition 1

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes, s.c.i. et propres. Soit $A : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un opérateur linéaire borné. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(A\, x) + g(x) \tag{$\mathcal{P}_{\text{C-P}}$}$$

(a) On suppose qu'il existe une solution primale x^*. Les caractériser au premier ordre.

(b) Justifier que $\partial f(A\, x^*)$ est non vide. Soit $p \in \partial f(A\, x^*)$. Montrer que

$$-A^* p \in \partial g(x^*)$$

(c) En utilisant la conjuguée convexe de f, proposer une formulation primale-duale n'impliquant aucune composition de fonctions.

(d) Écrire le problème dual associé. Exprimer la fonction duale à l'aide de f^*, g^* et A^*.

(e) Caractériser les solutions duales. En déduire que p est une solution duale.

(f) Montrer que le problème primal-dual considéré vérifie la propriété de dualité forte.

(g) En déduire que (x^*, p) est un point-selle d'une fonction que l'on précisera.

Exercice 1 – Propriétés de la conjuguée convexe Module A7, Propositions 1 et 2 et Corollaire 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction de domaine non vide.

(a) Montrer que J^* est une fonction convexe.

(b) Montrer que J^* est une fonction s.c.i.

(c) On suppose que J admet une minorante affine. Montrer que J^* est propre.

(d) En déduire que si J est convexe et propre, alors J^* est convexe, propre et s.c.i.

Exercice 1

(a) Par définition $J^*(y) = \sup_{y \in \mathcal{X}} \{\langle y, x\rangle - J(x)\}$

pour la fonction $y \longmapsto \langle y, x\rangle - J(x)$ est affine

alors $y \longmapsto \langle y, x\rangle - J(x)$ est convexe

donc l'enveloppe supérieur de cette fonction est convexe

c-à-d J^* est convexe

(b) La même. $y \longmapsto \langle y, x\rangle - J(x)$ est s.c.i.

et l'enveloppe supérieur de cette fonction es

(c) Par l'hypothése, J est non-vide.

Alors J n'est pas identiquement égale à $+\infty$, sa conjuguée convexe J^* est nécessairement à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Ainsi, il nous reste à démontrer qu'il existe $y_0 \in \mathcal{X}$ tel que $J^*(y_0) \neq +\infty$. Par l'hypothèse, on a pour tout $y \in \mathcal{X}$,

$$\forall x \in \mathcal{X}, \ \langle y, x\rangle - J(x) \leq \langle y-a, x\rangle - b$$

En particulier, si on choisit $y_0 = a$, alors la majoration précédente devient

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \langle y_0, x \rangle - J(x) \leq -b$$

ce qui assure, en passant à la borne supérieure, que $J^*(y_0)$ est fini.

Exercice 1 – Propriétés de la conjuguée convexe

Module A7, Propositions 1 et 2 et Corollaire 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction de domaine non vide.

(a) Montrer que J^* est une fonction convexe.

(b) Montrer que J^* est une fonction s.c.i.

(c) On suppose que J admet une minorante affine. Montrer que J^* est propre.

(d) En déduire que si J est convexe et propre, alors J^* est convexe, propre et s.c.i.

(d) Si J est convexe, alors J admet une minorante affine.

Si J est propre, alors sa domaine est non vide.

D'après (a), (b), (c), on a que J^* est conexe, propre et s.c.i.

Exercice 2 – Théorème de Fenchel–Moreau Module A7, Lemme 1, Proposition 5 et Théorème 1

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i et propre.

(a) Montrer que $\qquad \forall (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \qquad J(x) + J^*(y) \geq \langle x, y\rangle$

(b) En déduire que J admet une minorante affine et que

$$\forall x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) \geq \sup_{y \in \mathcal{X}} \left\{ \langle x, y\rangle - J^*(y) \right\}$$

(c) Montrer que J^{**} est l'ensemble supérieure des minorantes affines de J.

(d) En déduire que $\qquad \forall x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) = \sup_{y \in \mathcal{X}} \left\{ \langle x, y\rangle - J^*(y) \right\}$

(a) Soit $y \in \mathcal{Y}$, par définition,

$$J^*(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \{\langle x, y\rangle - J(x)\} \geqslant \langle x, y\rangle - J(x)$$

donc

$$\forall (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \quad J(x) + J^*(y) \geqslant \langle x, y\rangle$$

(b) D'après (a), on a

$$\forall (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \quad J(x) \geqslant \langle x, y\rangle - J^*(y)$$

alors

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad J(x) \geqslant \sup_{y \in \mathcal{Y}} \{\langle x, y\rangle - J^*(y)\}$$

et J admet une minorante affine

(c) "$\leqslant$"

D'après (b), J admet une minorante affine.

Soit $x \in \mathcal{X}$. Il existe par hypothèse $(a,b) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}$ tel que

$\forall z \in \mathcal{X}, \quad \langle a, z\rangle + b \leqslant J(z) \quad$ soit $\quad \langle a, z\rangle - J(z) \leqslant -b$

En passant à la borne supérieure, on a

$$J^*(a) \leqslant -b \quad \text{soit} \quad \langle a, x\rangle + b \leqslant \langle a, x\rangle - J^*(a) \leqslant J^{**}(x)$$

En passant à la borne supérieure en (a,b) définissant une minorante affine de J, on obtient

$$\sup\{\langle a,x\rangle+b \mid \forall z\in\mathcal{X}, \langle a,z\rangle+b\leq J(z)\}\leq J^{**}(x)$$

"$\geq$"

D'après l'inégalité de FENCHEL-YOUNG, pour tout $y\in\operatorname{dom}J^*$, la fonction $z\longmapsto\langle y,z\rangle-J^*(y)$ est une minorante affine de J.

Par définition de la borne supérieure, pour tout $y\in\operatorname{dom}J^*$

$$\langle y,x\rangle-J^*(y)\leq\sup\{\langle a,x\rangle+b \mid \forall z\in\mathcal{X}, \langle a,z\rangle+b\leq J(z)\}$$

alors

$$\sup_{y\in\mathcal{Y}}\{\langle y,x\rangle-J^*(y)\}=J^{**}(x)\leq\sup\{\langle a,x\rangle+b \mid \forall z\in\mathcal{X}, \langle a,z\rangle+b\leq J(z)\}$$

Donc $J^{**}(x)=\sup\{\langle a,x\rangle+b \mid \forall z\in\mathcal{X}, \langle a,z\rangle+b\leq J(z)\}$

(d) En déduire que $\quad \forall x\in\mathcal{X}, \quad J(x)=\sup_{y\in\mathcal{X}}\left\{\langle x,y\rangle-J^*(y)\right\}$

(d) Par l'hypothèse, J est propre, convexe et s.c.i.

alors J est l'enveloppe supérieur de ses minorantes affines.

Donc

$$\begin{aligned}J(x)&=\sup\{\langle a,x\rangle+b \mid \forall z\in\mathcal{X}, \langle a,z\rangle+b\leq J(z)\}\\&=J^{**}(x)\\&=\sup_{y\in\mathcal{Y}}\{\langle x,y\rangle-J^*(y)\}\end{aligned}$$

Exercice 3 – Quelques exemples

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer J^*.

(a) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \frac{1}{2}\|x\|^2 \end{cases}$ (b) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \|x\| \end{cases}$ (c) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ x & \mapsto \chi_{\mathcal{B}(0,1)} \end{cases}$

(a) Par définition

$$\forall y \in \mathcal{X}, \quad J^*(y) = \sup_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \langle x,y\rangle - \frac{1}{2}\|x\|^2 \right\}$$
$$= -\inf_{x\in\mathcal{X}} \left\{ -\langle x,y\rangle + \frac{1}{2}\|x\|^2 \right\}$$

d'après la régle de Fermat,

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \left\{ -\langle x,y\rangle + \frac{1}{2}\|x\|^2 \right\} = -\|y\|^2 + \frac{1}{2}\|y\|^2 = -\frac{1}{2}\|y\|^2$$

donc $J^*(y) = \frac{1}{2}\|y\|^2$

(b) $\forall y \in \mathcal{X}, \quad J^*(y) = \sup_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \langle x,y\rangle - \|x\| \right\}$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \langle x,y\rangle - \|x\| \leqslant \|x\|\cdot\|y\| - \|x\| = \|x\|\cdot(\|y\|-1)$$

si $\|y\| \leqslant 1$, on a $\langle x,y\rangle - \|x\| \leqslant 0$

alors $J^*(y) = \sup_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \langle x,y\rangle - \|x\| \right\} = 0$

si $\|y\| > 1$, il suffit de poser $x_k = ky$,

$$\langle x_k, y\rangle - \|x_k\| = \langle ky, y\rangle - \|ky\| = k\cdot\|y\|\cdot(\|y\|-1)$$

alors $\lim_{k\to+\infty} \langle x_k, y\rangle - \|x_k\| = +\infty$

de sort que

$$J^*(y) = \begin{cases} 0 & \text{si } \|y\| \leqslant 1 \\ +\infty & \text{si } \|y\| > 1 \end{cases} = \chi_{B(0,1)}$$

Exercice 3 – Quelques exemples

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer J^*.

(a) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2}\|x\|^2 \end{cases}$ (b) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{cases}$ (c) $J : \begin{cases} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & \chi_{\mathcal{B}(0,1)} \end{cases}$

(c) Par définition

$$J^*(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} \{ \langle x, y \rangle - \chi_{B(0,1)}(x) \}$$

$$= \sup_{\|x\| \leq 1} \langle x, y \rangle$$

$$= \|y\|$$

Exercice 4 – Règle de bascule | Module A7, Lemme 3, Propositions 6 et 7

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. Soit $x \in \operatorname{dom} J$ et $p \in \mathcal{X}$.

(a) Montrer que
$$p \in \partial J(x) \qquad \iff \qquad J(x) + J^*(p) = \langle p, x\rangle$$

(b) Soit $y \in \mathcal{X}$ et $p \in \partial J(x)$. Montrer que

? −

$$\langle p - y, x\rangle + J^*(y) \geq \langle p, x\rangle - \sup_{y \in \mathcal{X}} \left\{ \langle y, x\rangle + J^*(y) \right\}$$

En déduire que
$$\langle p - y, x\rangle + J^*(y) \geq \langle p, x\rangle - \langle p, x\rangle + J^*(p)$$

(c) Montrer que $x \in \partial J^*(p)$.

(d) On suppose que J est s.c.i. et propre. Montrer que
$$p \in \partial J(x) \qquad \iff \qquad x \in \partial J^*(p)$$

(a) Soit $x \in \operatorname{dom} J$ et $p \in \mathcal{X}$. On a

$$\begin{aligned}
J^*(p) = \langle p, x\rangle - J(x) &\iff \forall z \in \mathcal{X},\ \langle p, z\rangle - J(z) \leqslant \langle p, x\rangle - J(x) \\
&\iff \forall z \in \mathcal{X},\ J(z) \geqslant J(x) + \langle p, z - x\rangle \\
&\iff p \in \partial J(x)
\end{aligned}$$

(b) Soit $y \in \mathcal{X}$ et $p \in \partial J(x)$. On a

$$\begin{aligned}
\langle p - y, x\rangle + J^*(y) &= \langle p, x\rangle - (\langle y, x\rangle - J^*(y)) \\
&\geqslant \langle p, x\rangle - \sup_{y \in \mathcal{X}} \{\langle y, x\rangle - J^*(y)\} \\
&= \langle p, x\rangle - J^{**}(x) \\
&\geqslant \langle p, x\rangle - J(x) \\
&= \langle p, x\rangle - \langle p, x\rangle + J^*(p) \\
&= J^*(p)
\end{aligned}$$

(c) D'après (b), on a

$$\forall y \in \mathcal{X},\quad J^*(y) \geqslant J^*(p) + \langle x, y - p\rangle$$

alors $\quad x \in \partial J^*(p)$

(d) On suppose que J est s.c.i. et propre. Montrer que

$$p \in \partial J(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x \in \partial J^*(p)$$

(d) D'après (c), on a

$$p \in \partial J(x) \Longrightarrow x \in \partial J^*(p)$$

alors

$$x \in \partial J^*(p) \Longrightarrow p \in \partial J^{**}(x)$$

comme J est propre, s.c.i. et convexe, on a

$$J^{**}(x) = J(x)$$

alors

$$x \in \partial J^*(p) \Longrightarrow p \in \partial J(x)$$

donc

$$p \in \partial J(x) \Longleftrightarrow x \in \partial J^*(p)$$

Exercice 5 – Règles de calcul Module A7, Propositions 8 et 9

Soit $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer J^* en fonction de f^*.

(a) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & \alpha\, f(x) \end{array} \right.$ (b) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & f(\alpha\, x) \end{array} \right.$ (c) $J : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ x & \mapsto & f(x - x^0) \end{array} \right.$

(a)

$$J^*(y) = \sup_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \langle x, y\rangle - \alpha f(x) \right\} = \alpha \cdot \sup_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \langle \frac{y}{\alpha}, x\rangle - f(x) \right\}$$
$$= \alpha \cdot f^*\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

(b) $$J^*(y) = \sup_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \langle x, y\rangle - f(\alpha x) \right\} = \sup_{u\in\mathcal{X}} \left\{ \langle \frac{u}{\alpha}, y\rangle - f(u) \right\}$$
$$= \sup_{u\in\mathcal{X}} \left\{ \langle u, \frac{y}{\alpha}\rangle - f(u) \right\} = f^*\left(\frac{y}{\alpha}\right)$$

(c) $$J^*(y) = \sup_{x\in\mathcal{X}} \left\{ \langle x, y\rangle - f(x - x^0) \right\} = \sup_{u\in\mathcal{X}} \left\{ \langle u + x^0, y\rangle - f(u) \right\}$$
$$= \sup_{u\in\mathcal{X}} \left\{ \langle u, y\rangle - f(u) \right\} + \langle x^0, y\rangle$$
$$= f^*(y) + \langle x^0, y\rangle$$

Exercice 6 – Identité de Moreau Module A7, Proposition 11

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe, s.c.i. et propre. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$ et $x^+ = \operatorname{prox}_J(x^0)$. On pose

$$p = x^0 - x^+$$

(a) Justifier que $p \in \partial J(x^+)$. En déduire que $x^+ \in \partial J^*(p)$.

(b) Montrer que $p = \operatorname{prox}_{J^*}(x^0)$.

(c) En déduire que $\forall x \in \mathcal{X}, \quad x = \operatorname{prox}_J(x) + \operatorname{prox}_{J^*}(x)$

(a) $x^+ = \operatorname{prox}_J(x^0)$ par la caractérisation du point proximal

on a $x^0 - x^+ \in \partial J(x^+)$

$p \in \partial J(x^+)$

et d'après la régle de Bascul

$x^+ \in \partial J^*(p)$

(b) D'après (a), on a

$x^0 - p \in \partial J^*(p)$

par la caractérisation du point proximal

$p = \operatorname{prox}_{J^*}(x^0)$

(c) D'après (a) et (b), $\forall x \in \mathcal{X}$, il existe $x^+ = \operatorname{prox}_J(x)$

et $p = x - x^+ = \operatorname{prox}_{J^*}(x)$

on a $x = \operatorname{prox}_J(x) + \operatorname{prox}_{J^*}(x)$

Exercice 7 – Éclatement de Dykstra

Soit $f, h : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes, s.c.i. et propres. Soit $r \in \mathcal{X}$. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ J(x) := f(x) + h(x) + \frac{1}{2} \|x - r\|^2 \right\}$$

(a) Justifier que le problème considéré possède une unique solution.

(b) Montrer que $\quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad f(x) + h(x) = \sup_{(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) \right\}$

(c) Écrire le problème considéré comme un problème de recherche point-selle.

(d) Montrer que le problème dual considéré est le problème de minimisation

$$\min_{(y_1, y_2) \in \mathcal{Y}^2} \left\{ f^*(y_1) + h^*(y_2) + \frac{1}{2} \|y_1 + y_2 - r\|^2 \right\}$$

(e) Caractériser au premier ordre les solutions duales (y_1^*, y_2^*). En déduire que

$$0 \in \partial J(r - y_1^* - y_2^*)$$

Que peut-on en conclure quant à la solution primale ?

(a) Comme f, h sont convexes, s.c.i. et propres.
alors $J(x) = f(x) + h(x) + \frac{1}{2}\|x - r\|^2$ est fortement convexe
donc le probléme $\min_{x \in X} J(x)$ possède une unique solutions.

(b) Comme f, h sont convexes, s.c.i. et propres.

$$\begin{aligned}
\forall x \in X, \quad f(x) + h(x) &= f^{**}(x) + h^{**}(x) \\
&= \sup_{y_1 \in X} \{ \langle y_1, x \rangle - f^*(y_1) \} + \sup_{y_2 \in X} \{ \langle y_2, x \rangle - h^*(y_2) \} \\
&= \sup_{(y_1, y_2) \in X^2} \{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) \}
\end{aligned}$$

Exercice 7 – Éclatement de Dykstra

Soit $f, h : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes, s.c.i. et propres. Soit $r \in \mathcal{X}$. On s'intéresse au problème d'optimisation suivant

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ J(x) := f(x) + h(x) + \frac{1}{2} \|x - r\|^2 \right\}$$

(a) Justifier que le problème considéré possède une unique solution.

(b) Montrer que $\quad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad f(x) + h(x) = \sup\limits_{(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) \right\}$

(c) Écrire le problème considéré comme un problème de recherche point-selle.

(c) $\displaystyle \min_{x \in \mathcal{X}} J(x) = \min_{x \in \mathcal{X}} \sup_{(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) + \frac{1}{2} \|x - r\|^2 \right\}$

soit $\mathcal{L}(x; y_1, y_2) = \langle y_1 + y_2, x \rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) + \frac{1}{2} \|x - r\|^2$

c'est un problème de recherche point-selle.

(d) Montrer que le problème dual considéré est le problème de minimisation

$$\min_{(y_1, y_2) \in \mathcal{Y}^2} \left\{ f^*(y_1) + h^*(y_2) + \frac{1}{2} \|y_1 + y_2 - r\|^2 \right\}$$

(d) on a

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \frac{1}{2} \|x - r\|^2 + \langle y_1 + y_2, x \rangle \right\} = \frac{1}{2} \|r\|^2 - \frac{1}{2} \|y_1 + y_2 - r\|^2$$

alors

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \left\{ \langle y_1 + y_2, x \rangle - f^*(y_1) - h^*(y_2) + \frac{1}{2} \|x - r\|^2 \right\}$$
$$= \frac{1}{2} \|r\|^2 - \frac{1}{2} \|y_1 + y_2 - r\|^2 - f^*(y_1) - h^*(y_2)$$

et la problème

$$\min_{x \in \mathcal{X}} J(x) = \min_{x \in \mathcal{X}} \sup_{(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2} \mathcal{L}(x; y_1, y_2)$$
$$= \max_{(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y_1, y_2)$$
$$= \max_{(y_1, y_2) \in \mathcal{X}^2} \left\{ \frac{1}{2} \|r\|^2 - \frac{1}{2} \|y_1 + y_2 - r\|^2 - f^*(y_1) - h^*(y_2) \right\}$$

日期: /

Donc le problème dual considéré est

$$\max_{(y_1,y_2)\in\mathcal{X}^2}\left\{-\frac{1}{2}\|y_1+y_2-r\|^2-f^*(y_1)-h^*(y_2)\right\}$$
$$=\min_{(y_1,y_2)\in\mathcal{X}^2}\left\{\frac{1}{2}\|y_1+y_2-r\|^2+f^*(y_1)+h^*(y_2)\right\}$$

(e) Caractériser au premier ordre les solutions duales (y_1^*, y_2^*). En déduire que

$$0 \in \partial J(r - y_1^* - y_2^*)$$

Que peut-on en conclure quant à la solution primale ?

(e) La CNS d'optimalité du primer ordre assure qu'elles sont caractérisées par le système d'inclusion suivant :

$$\begin{cases} r-y_1^*-y_2^* \in \partial f^*(y_1^*) \\ r-y_1^*-y_2^* \in \partial h^*(y_2^*) \end{cases} \iff \begin{cases} y_1^* \in \partial f(r-y_1^*-y_2^*) \\ y_2^* \in \partial h(r-y_1^*-y_2^*) \end{cases}$$

En utilisant l'inclusion $\partial f(x)+\partial g(x) \subset \partial(f+g)(x)$, il s'ensuit que

$$y_1^*+y_2^*+(r-y_1^*-y_2^*)-r=0 \in \partial J(r-y_1^*-y_2^*)$$

Autrement dit, si le problème dual admet une solution (y_1^*, y_2^*), alors le point

$$x^* = r - y_1^* - y_2^*$$

est une solution du probléme primale.

Exercice 8 – Problèmes composites Module B7, Proposition 1

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $g : \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes, s.c.i. et propres. Soit $A : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ un opérateur linéaire borné. On considère le problème d'optimisation suivant :

$$\min_{x \in \mathcal{X}} f(Ax) + g(x) \tag{$\mathcal{P}_{\text{C-P}}$}$$

(a) On suppose qu'il existe une solution primale x^*. Les caractériser au premier ordre.

(b) Justifier que $\partial f(Ax^*)$ est non vide. Soit $p \in \partial f(Ax^*)$. Montrer que

$$-A^* p \in \partial g(x^*)$$

(c) En utilisant la conjuguée convexe de f, proposer une formulation primale-duale n'impliquant aucune composition de fonctions.

(d) Écrire le problème dual associé. Exprimer la fonction duale à l'aide de f^*, g^* et A^*.

(e) Caractériser les solutions duales. En déduire que p est une solution duale.

(f) Montrer que le problème primal-dual considéré vérifie la propriété de dualité forte.

(g) En déduire que (x^*, p) est un point-selle d'une fonction que l'on précisera.

(a) S'il existe une solution primale x^*, alors

$$0 \in A^* \partial f(Ax^*) + \partial g(x^*)$$

(b) f est convexes, s.c.i. et propres.

Et $Ax^* \in \mathcal{X} = \operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$, alors $\partial f(Ax^*) \neq \emptyset$

Soit $p \in \partial f(Ax^*)$, on a

$$0 \in A^* p + \partial g(x^*)$$

$$-A^* p \in \partial g(x^*)$$

(c) En utilisant la conjuguée convexe de f, on a

$\forall x \in \mathcal{X}$, $\quad f(Ax) = f^{**}(Ax) = \sup_{y \in \mathcal{X}} \{\langle y, Ax\rangle - f^*(y)\}$

de sorte que le probléme s'exprime comme la recherche d'un point-selle,

$$\min_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{X}} \{\langle y, Ax\rangle - f^*(y) + g(x)\}$$

$$= \max_{y \in \mathcal{X}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \{\langle y, Ax\rangle - f^*(y) + g(x)\}$$

(d) Écrire le problème dual associé. Exprimer la fonction duale à l'aide de f^*, g^* et A^*.

(d) $\inf_{x \in X} \{ \langle y, Ax \rangle - f^*(y) + g(x) \}$

$= - \sup_{x \in X} \{ -g(x) - \langle A^* y, x \rangle + f^*(y) \}$

$= -g^*(-A^* y) - f^*(y)$

Donc le problème dual associé est

$\max_{y \in Y} \{ -g^*(-A^* y) - f^*(y) \}$

$= \min_{y \in Y} \{ g^*(-A^* y) + f^*(y) \}$

(e) Caractériser les solutions duales. En déduire que p est une solution duale.

(e) Soit x^* est la solution primale, alors

$p \in \partial f(Ax^*)$ et $-A^* p \in \partial g(x^*)$

par la régle de bascule,

$Ax^* \in \partial f^*(p)$ et $x^* \in \partial g^*(-A^* p)$

alors p est une solution duale.

(f) Montrer que le problème primal-dual considéré vérifie la propriété de dualité forte.

(f) $f(Ax^*) = \langle p, Ax^* \rangle - f^*(p)$

$g(x^*) = -\langle A^* p, x^* \rangle - g^*(-A^* p)$

alors

$J(x^*) = f(Ax^*) + g(x^*) = -g^*(-A^* p) - f^*(p) = E(p)$

donc le problème primal-dual vérifie la propriété de dualité forte.

(g) En déduire que (x^*, p) est un point-selle d'une fonction que l'on précisera.

(g) D'après (f)

$$\mathcal{L}(x^*; p) = \langle p, Ax^* \rangle - f^*(p) + g(x^*)$$
$$= \min_{x \in X} \sup_{y \in X} \{ \langle y, Ax \rangle - f^*(y) + g(x) \}$$
$$= \max_{y \in X} \inf_{x \in X} \{ \langle y, Ax \rangle - f^*(y) + g(x) \}$$

(x^*, p) est un point-selle du fonction

$$\mathcal{L}(x; y) = \langle y, Ax \rangle - f^*(y) + g(x)$$