Feuille d'exercices n°6
Dualité min-max
Dualité de Lagrange

Exercice 1 – Dualité faible

Module A6, Proposition 1

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction. On suppose qu'il existe $(x^0, y^0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \qquad \mathcal{L}(x; y^0) > -\infty \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}(x^0, y) < +\infty$$

(a) Soit $(x', y') \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Montrer que

$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y') \leq \mathcal{L}(x'; y') \leq \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y)$$

(b) En déduire que
$$\sup_{y'\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y') \leq \inf_{x'\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y)$$

Exercice 2 – Existence d'un point-selle

Module A6, Proposition 2

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction. On suppose que

(i) la fonction $\quad x \mapsto \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y) \quad$ atteint son minimum en $\bar{x}$;

(ii) la fonction $\quad y \mapsto \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y) \quad$ atteint son maximum en $\bar{y}$;

(iii) son saut de dualité $\mathcal{G}$ est nul.

(a) Montrer que $\quad \forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y}) \leq \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y}) \leq \mathcal{L}(x; \bar{y})$

(b) Montrer que $\quad \forall\, y \in \mathcal{Y}, \qquad \mathcal{L}(\bar{x}; y) \leq \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y})$

(c) En déduire que $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$.

Exercice 3 – Propriétés des points-selles

Module A6, Proposition 2

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction. On suppose que $\mathcal{L}$ admet un point-selle $(\bar{x}, \bar{y})$.

(a) Montrer que
$$\sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) \leq \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y}) \leq \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

puis que
$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) \leq \sup_{y\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

(b) En déduire que
$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) = \sup_{y\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

(c) Montrer que $\quad \inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) = \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) \qquad \text{et} \qquad \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y}) = \sup_{y\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$

En déduire que les fonctions $\quad x \mapsto \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y) \quad$ et $\quad y \mapsto \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y)$

atteignent respectivement leur minimum et leur maximum.

Exercice 4 – Points-selles dans le cas convexe

Module A6, Propositions 3 et 4

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction convexe-concave propre.

(a) On suppose que $\mathcal{L}$ admet un point-selle $(\bar{x}, \bar{y})$. Montrer que

$$0 \in \partial_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{et} \qquad 0 \in \partial_y(-\mathcal{L})(\bar{x}, \bar{y})$$

Le point $(\bar{x}, \bar{y})$ est-il un point critique de $\mathcal{L}$?

(b) On suppose qu'il existe un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{dom} \mathcal{L}$ tel que

$$0 \in \partial_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{et} \qquad 0 \in \partial_y(-\mathcal{L})(\bar{x}, \bar{y})$$

Montrer que $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$.

(c) Construire une fonction $\mathcal{L}$ convexe-concave admettant un point critique qui ne soit pas un point-selle.

Exercice 5 – Dualité min-max

Module A6, Corollaire 3

Soit $J : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. On suppose qu'il existe une fonction s.c.i. $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y)$$

Soit $(x^*, y^*) \in \operatorname{dom} \mathcal{L}$. Montrer que (x^*, y^*) est un point-selle de $\mathcal{L}$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) le problème primal $(\mathcal{P})$ admet comme solution le point x^* ;

(ii) le problème dual $(\mathcal{D})$ admet comme solution le point y^* ;

(iii) les problèmes primal et dual admettent la même valeur optimale, c'est-à-dire que

$$\min_{x \in \mathcal{X}} J(x) = \max_{y \in \mathcal{Y}} E(y)$$

Exercice 6 – Points-selles du lagrangien augmenté

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $h : \mathcal{X} \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^m$ de même domaine. On suppose h est continûment différentiables sur son domaine Intéressons-nous au problème d'optimisation suivant

$$\min_{\substack{x \in \mathcal{X} \\ h(x)=0}} J(x) \tag{$\mathcal{P}_{\text{ce}}$}$$

(a) Écrire le lagrangien et le lagrangien augmenté pour le problème $(\mathcal{P}_{\text{ce}})$.

(b) Soit $(\bar{x}, \bar{\mu}) \in \mathcal{X} \times (\mathbb{R}^+)^m$ un point-selle du lagrangien. Après avoir justifié que $h(\bar{x}) = 0$, montrer que pour tout $(x, \mu) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{L}(\bar{x}; \mu) + \frac{1}{2\,\tau}\,\|h(\bar{x})\|_2^2 \leq \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{\mu}) + \frac{1}{2\,\tau}\,\|h(\bar{x})\|_2^2 \leq \mathcal{L}(x, \bar{\mu}) + \frac{1}{2\,\tau}\,\|h(x)\|_2^2$$

En déduire que $(\bar{x}, \bar{\mu})$ est un point-selle de $\mathcal{L}_\tau$.

(c) Soit $(\bar{x}, \bar{\mu})$ est un point-selle de $\mathcal{L}_\tau$. Justifier que $\bar{\mu}$ est une solution duale de $(\mathcal{P}_e)$.

(d) Justifier que

$$\mu \mapsto \mathcal{L}_\tau(\bar{x}; \mu) = J(\bar{x}) + \langle \mu, h(\bar{x}) \rangle + \frac{1}{2\,\tau}\,\|h(\bar{x})\|_2^2$$

admet un maximum sur $\mathbb{R}^m$. Montrer que si $h(\bar{x}) \neq 0$, alors cette fonction n'est pas majorée.

(e) Montrer que $\bar{x}$ est un minimiseur de la fonction partielle

$$x \mapsto \mathcal{L}_\tau(x; \bar{\mu}) = J(x) + \langle \bar{\mu}, h(x) \rangle + \frac{1}{2\,\tau}\,\|h(x)\|_2^2$$

en déduire que $\bar{x}$ est une solution primale.

Exercice 1 – Dualité faible Module A6, Proposition 1

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction. On suppose qu'il existe $(x^0, y^0) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \qquad \mathcal{L}(x; y^0) > -\infty \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}(x^0, y) < +\infty$$

(a) Soit $(x', y') \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}$. Montrer que

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y') \leq \mathcal{L}(x'; y') \leq \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y)$$

(b) En déduire que

$$\sup_{y' \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y') \leq \inf_{x' \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y)$$

(a) Par l'hypothèse, $\mathcal{L}(x'; y^0) > -\infty$, et par définition de la borne supérieure

$$\forall y' \in \mathcal{Y}, \qquad \mathcal{L}(x'; y') \leqslant \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

on démontre de la même façon que

$$\forall x' \in \mathcal{X}, \qquad \mathcal{L}(x'; y') \geqslant \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y')$$

donc

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y') \leqslant \mathcal{L}(x'; y') \leqslant \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y)$$

(b) Puisque $\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y')$ ne dépend pas de x', $\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y')$ ne dépend pas de y', on peut passer successivement à la borne supérieure, puis la borne inférieure

$$\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y') \leqslant \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y)$$

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y') \leqslant \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y)$$

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y') \leqslant \inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y)$$

Exercice 2 – Existence d'un point-selle Module A6, Proposition 2

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction. On suppose que

(i) la fonction $x \mapsto \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y)$ atteint son minimum en $\bar{x}$;

(ii) la fonction $y \mapsto \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y)$ atteint son maximum en $\bar{y}$;

(iii) son saut de dualité $\mathcal{G}$ est nul.

(a) Montrer que $\forall x \in \mathcal{X}, \quad \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y}) \leq \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y}) \leq \mathcal{L}(x; \bar{y})$

(b) Montrer que $\forall y \in \mathcal{Y}, \quad \mathcal{L}(\bar{x}; y) \leq \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y})$

(c) En déduire que $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$.

(a) Par l'hypothése, le saut de dualité G est null.

Supposons qu'il existe deux points $\bar{x} \in \mathcal{X}$ et $\bar{y} \in \mathcal{Y}$ tels que

$$\sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) = \min_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y)$$

et $$\inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y}) = \max_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y)$$

Alors, par définition des bornes inférieure et supérieure,

$$\mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y}) \leq \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) = \min_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y)$$
$$= \max_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

Puis $\forall x \in \mathcal{X}, \quad \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y}) \leq \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y}) \leq \mathcal{L}(x; \bar{y})$

日期: /

(b) Montrer que $$\forall y \in \mathcal{Y}, \qquad \mathcal{L}(\bar{x}; y) \leq \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y})$$

(b) Par définition des bornes inférieure et supérieure,

$$\mathcal{L}(\bar{x};\bar{y}) \geqslant \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x;\bar{y}) = \min_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(x;y)$$

$$= \max_{y\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x;y) = \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x};y)$$

donc

$$\forall y\in\mathcal{Y}, \qquad \mathcal{L}(\bar{x};\bar{y}) \geqslant \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x};y) \geqslant \mathcal{L}(\bar{x};y)$$

(c) En déduire que $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$.

(c) D'après (a) et (b), on a

$$\mathcal{L}(\bar{x};y) \leqslant \mathcal{L}(\bar{x};\bar{y}) \leqslant \mathcal{L}(x;\bar{y})$$

donc $(\bar{x},\bar{y})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$

Exercice 3 – Propriétés des points-selles

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction. On suppose que $\mathcal{L}$ admet un point-selle $(\bar{x}, \bar{y})$.

(a) Montrer que
$$\sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) \le \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y}) \le \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

puis que
$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) \le \sup_{y\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

(b) En déduire que
$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) = \sup_{y\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

(c) Montrer que
$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) = \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) \quad \text{et} \quad \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y}) = \sup_{y\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

En déduire que les fonctions
$$x \mapsto \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y) \quad \text{et} \quad y \mapsto \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y)$$

atteignent respectivement leur minimum et leur maximum.

(a) On suppose que $\mathcal{L}$ admet un point-selle $(\bar{x}, \bar{y})$.

Par définition, on a
$$\forall (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \quad \mathcal{L}(\bar{x}; y) \leq \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y}) \leq \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

en passant à la borne supérieure sur y, et à la borne inférieur sur x, on obtient
$$\sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}; y) \leq \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{y}) \leq \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y})$$

Puisque, par ailleurs
$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y) \leq \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(\bar{x}, y)$$

et
$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; \bar{y}) \leq \sup_{y\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y')$$

on obtient l'inégalité
$$\inf_{x\in\mathcal{X}} \sup_{y\in\mathcal{Y}} \mathcal{L}(x'; y) \leq \sup_{y\in\mathcal{Y}} \inf_{x\in\mathcal{X}} \mathcal{L}(x; y')$$

(b) En déduire que $$\inf_{x\in\mathcal{X}}\sup_{y\in\mathcal{Y}}\mathcal{L}(\bar{x};y)=\sup_{y\in\mathcal{Y}}\inf_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{L}(x;\bar{y})$$

(b) Or, par Ex 1, on a
$$\inf_{x\in\mathcal{X}}\sup_{y\in\mathcal{Y}}\mathcal{L}(x';y)\geqslant\sup_{y\in\mathcal{Y}}\inf_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{L}(x;y')$$
On a
$$\inf_{x\in\mathcal{X}}\sup_{y\in\mathcal{Y}}\mathcal{L}(x';y)=\sup_{y\in\mathcal{Y}}\inf_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{L}(x;y')$$

(c) Montrer que $$\inf_{x\in\mathcal{X}}\sup_{y\in\mathcal{Y}}\mathcal{L}(\bar{x};y)=\sup_{y\in\mathcal{Y}}\mathcal{L}(\bar{x};y)\quad\text{et}\quad\inf_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{L}(x;\bar{y})=\sup_{y\in\mathcal{Y}}\inf_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{L}(x;\bar{y})$$

En déduire que les fonctions $x\mapsto\sup_{y\in\mathcal{Y}}\mathcal{L}(x;y)$ et $y\mapsto\inf_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{L}(x;y)$ atteignent respectivement leur minimum et leur maximum.

(c) On en déduit l'égalité dans cette relation. Celle-ci implique que toutes les inégalités sont également des égalités.
$$\inf_{x\in\mathcal{X}}\sup_{y\in\mathcal{Y}}\mathcal{L}(x';y)=\sup_{y\in\mathcal{Y}}\mathcal{L}(\bar{x};y)$$
et
$$\inf_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{L}(x;\bar{y})=\sup_{y\in\mathcal{Y}}\inf_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{L}(x;\bar{y})$$
Puisque ces deux quantités sont égales et sont finies, on a que

$x\longmapsto\sup_{y\in\mathcal{Y}}\mathcal{L}(x;y)$ atteint son minimum en $\bar{x}$

$y\longmapsto\inf_{x\in\mathcal{X}}\mathcal{L}(x;y)$ atteint son maximum en $\bar{y}$

Exercice 4 – Points-selles dans le cas convexe Module A6, Propositions 3 et

Soit $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty; -\infty\}$ une fonction convexe-concave propre.

(a) On suppose que $\mathcal{L}$ admet un point-selle $(\bar{x}, \bar{y})$. Montrer que

$$0 \in \partial_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{et} \qquad 0 \in \partial_y(-\mathcal{L})(\bar{x}, \bar{y})$$

Le point $(\bar{x}, \bar{y})$ est-il un point critique de $\mathcal{L}$?

(b) On suppose qu'il existe un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{dom} \mathcal{L}$ tel que

$$0 \in \partial_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{et} \qquad 0 \in \partial_y(-\mathcal{L})(\bar{x}, \bar{y})$$

Montrer que $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$.

(c) Construire une fonction $\mathcal{L}$ convexe-concave admettant un point critique qui ne soit pas un point-selle.

(a) Par l'hypothése, $\mathcal{L}$ admet un point-selle $(\bar{x}, \bar{y})$
alors $\bar{x}$ est un minimiseur de la fonction
partielle $x \longmapsto \mathcal{L}(x, \bar{y})$ et $\bar{y}$ est un minimiseur
de la fonction partielle $y \longmapsto -\mathcal{L}(\bar{x}; y)$.
Par la règle de Fermat, on a

$$0 \in \partial(x \mapsto \mathcal{L}(x;\bar{y}))(\bar{x}) = \partial_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y})$$

$$0 \in \partial(y \mapsto -\mathcal{L}(\bar{x};y))(\bar{y}) = \partial_y \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y})$$

Le point $(\bar{x}, \bar{y})$ n'est pas nécéssairement le point critique.
必须得 $\mathcal{L}$ continuement différentiable

(b) On suppose qu'il existe un point $(\bar{x}, \bar{y}) \in \operatorname{dom} \mathcal{L}$ tel que

$$0 \in \partial_x \mathcal{L}(\bar{x}, \bar{y}) \qquad \text{et} \qquad 0 \in \partial_y(-\mathcal{L})(\bar{x}, \bar{y})$$

Montrer que $(\bar{x}, \bar{y})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$.

(b) $\mathcal{L}$ est une fonction convexe-concave propre.
alors $x \longmapsto \mathcal{L}(x, \bar{y})$ et $y \longmapsto -\mathcal{L}(\bar{x}, y)$ sont convexe.
Par le régle de Fermat,

日期:　　/

$\bar{x}$ est un minimiseur de la fonction partiel $x \longmapsto \mathcal{L}(x,\bar{y})$

$\bar{y}$ est un minimiseur de la fonction partiel $y \longmapsto (-\mathcal{L})(\bar{x},y)$

donc

$$\forall (x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y}, \quad \mathcal{L}(x,\bar{y}) \leqslant \mathcal{L}(\bar{x},\bar{y}) \leqslant \mathcal{L}(\bar{x},y)$$

alors $(\bar{x},\bar{y})$ est un point-selle de $\mathcal{L}$.

(c) Construire une fonction $\mathcal{L}$ convexe-concave admettant un point critique qui ne soit pas un point-selle.

(c) $\mathcal{L}(x,y) = -|y|$

Exercice 5 – Dualité min-max Module A6, Corollaire 3

Soit $J : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction s.c.i. On suppose qu'il existe une fonction s.c.i. $\mathcal{L} : \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \to \overline{\mathbb{R}}$ telle que

$$\forall x \in \mathcal{X}, \qquad J(x) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x; y)$$

Soit $(x^*, y^*) \in \operatorname{dom} \mathcal{L}$. Montrer que (x^*, y^*) est un point-selle de $\mathcal{L}$ si et seulement si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

(i) le problème primal $(\mathcal{P})$ admet comme solution le point x^* ;

(ii) le problème dual $(\mathcal{D})$ admet comme solution le point y^* ;

(iii) les problèmes primal et dual admettent la même valeur optimale, c'est-à-dire que

$$\min_{x \in \mathcal{X}} J(x) = \max_{y \in \mathcal{Y}} E(y)$$

Ex5

D'après la définition, $J(x) = \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x;y)$, $E(y) = \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x;y)$

alors

(i) $\iff \min_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x;y)$ admet une solution le point x^*

$\iff x \longmapsto \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x;y)$ admet un minimum en x^*

(ii) $\iff \max_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x;y)$ admet une solution le point y^*

$\iff y \longmapsto \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x;y)$ admet un maximum en y^*

(iii) $\iff \min_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x;y) = \max_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x;y)$

$\iff \inf_{x \in \mathcal{X}} \sup_{y \in \mathcal{Y}} \mathcal{L}(x;y) - \sup_{y \in \mathcal{Y}} \inf_{x \in \mathcal{X}} \mathcal{L}(x;y) = 0$

$\iff$ le saut de dualité est 0

D'après l'exercise 2 et 3, on a l'équivalence.

Exercice 6 – Points-selles du lagrangien augmenté

Soit $J : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $h : \mathcal{X} \to (\mathbb{R} \cup \{+\infty\})^m$ de même domaine. On suppose h est continûment différentiables sur son domaine Intéressons-nous au problème d'optimisation suivant

$$\min_{\substack{x\in\mathcal{X}\\ h(x)=0}} J(x) \qquad (\mathcal{P}_{\mathrm{ce}})$$

(a) Écrire le lagrangien et le lagrangien augmenté pour le problème $(\mathcal{P}_{\mathrm{ce}})$.

(b) Soit $(\bar{x}, \bar{\mu}) \in \mathcal{X} \times (\mathbb{R}^+)^m$ un point-selle du lagrangien. Après avoir justifié que $h(\bar{x}) = 0$, montrer que pour tout $(x, \mu) \in \mathcal{X} \times \mathbb{R}^m$,

$$\mathcal{L}(\bar{x}; \mu) + \frac{1}{2\tau}\|h(\bar{x})\|_2^2 \le \mathcal{L}(\bar{x}; \bar{\mu}) + \frac{1}{2\tau}\|h(\bar{x})\|_2^2 \le \mathcal{L}(x, \bar{\mu}) + \frac{1}{2\tau}\|h(x)\|_2^2$$

En déduire que $(\bar{x}, \bar{\mu})$ est un point-selle de $\mathcal{L}_\tau$.

(c) Soit $(\bar{x}, \bar{\mu})$ est un point-selle de $\mathcal{L}_\tau$. Justifier que $\bar{\mu}$ est une solution duale de $(\mathcal{P}_e)$.

(d) Justifier que

$$\mu \mapsto \mathcal{L}_\tau(\bar{x}; \mu) = J(\bar{x}) + \langle \mu, h(\bar{x})\rangle + \frac{1}{2\tau}\|h(\bar{x})\|_2^2$$

admet un maximum sur $\mathbb{R}^m$. Montrer que si $h(\bar{x}) \neq 0$, alors cette fonction n'est pas majorée.

(e) Montrer que $\bar{x}$ est un minimiseur de la fonction partielle

$$x \mapsto \mathcal{L}_\tau(x; \bar{\mu}) = J(x) + \langle \bar{\mu}, h(x)\rangle + \frac{1}{2\tau}\|h(x)\|_2^2$$

en déduire que $\bar{x}$ est une solution primale.

(a) $\mathcal{L}(x;\mu) = J(x) + \langle \mu, h(x)\rangle$

$\mathcal{L}_\tau(x;\mu) = \mathcal{L}(x;\mu) + \frac{\tau}{2}\|h(x)\|_2^2 = J(x) + \langle \mu, h(x)\rangle + \frac{\tau}{2}\|h(x)\|_2^2$

(b) $(\bar{x}, \bar{\mu})$ est le point-selle du Lagrancien, alors

$\bar{x}$ est le minimiseur du $x \longmapsto \sup_{\mu\in(\mathbb{R}^+)^m} \mathcal{L}(x;\mu)$

et alors $\langle \mu, h(\bar{x})\rangle = 0$ donc $h(\bar{x}) = 0$

Puisque $\forall x \in \mathcal{X}$, $0 \le \frac{1}{2\tau}\|h(x)\|_2^2$, $0 = \frac{1}{2\tau}\|h(\bar{x})\|_2^2$

Pour tout $(x,\mu) \in \mathcal{X} \times (\mathbb{R}^+)^m$, on a

$$\mathcal{L}(\bar{x};\mu) \le \mathcal{L}(\bar{x};\bar{\mu}) \le \mathcal{L}(x;\bar{\mu})$$

on a

$$\mathcal{L}(\bar{x};\mu) + \frac{1}{2\tau}\|h(\bar{x})\|_2^2 \le \mathcal{L}(\bar{x};\bar{\mu}) + \frac{1}{2\tau}\|h(\bar{x})\|_2^2$$

$$\mathcal{L}(\bar{x};\bar{\mu}) \leqslant \mathcal{L}(x;\bar{\mu}) \leqslant \mathcal{L}(x;\bar{\mu}) + \frac{1}{2\tau}\cdot\|h(x)\|_2^2$$

alors on a

$$\mathcal{L}(\bar{x};\mu) + \frac{1}{2\tau}\cdot\|h(\bar{x})\|_2^2 \leqslant \mathcal{L}(\bar{x};\bar{\mu}) + \frac{1}{2\tau}\cdot\|h(\bar{x})\|_2^2$$
$$\leqslant \mathcal{L}(x;\bar{\mu}) + \frac{1}{2\tau}\cdot\|h(x)\|_2^2$$

c-à-d

$$\mathcal{L}_\tau(\bar{x};\mu) \leqslant \mathcal{L}_\tau(\bar{x};\bar{\mu}) \leqslant \mathcal{L}_\tau(x;\bar{\mu})$$

donc $(\bar{x},\bar{\mu})$ est un point-selle du $\mathcal{L}_\tau$

(c) Soit $(\bar{x},\bar{\mu})$ est un point-selle de $\mathcal{L}_\tau$. Justifier que $\bar{\mu}$ est une solution duale de $(\mathcal{P}_e)$.

(c) Soit $(\bar{x},\bar{\mu})$ est un point-selle de $\mathcal{L}_\tau$

D'après l'exercise 5, $\bar{\mu}$ est une solution duale de $(\mathcal{P}_e)$

(d) Justifier que
$$\mu \mapsto \mathcal{L}_\tau(\bar{x};\mu) = J(\bar{x}) + \langle \mu, h(\bar{x})\rangle + \frac{1}{2\tau}\|h(\bar{x})\|_2^2$$
admet un maximum sur $\mathbb{R}^m$. Montrer que si $h(\bar{x}) \neq 0$, alors cette fonction n'est pas majorée.

(d) $(\bar{x},\bar{\mu})$ est un point-selle de $\mathcal{L}_\tau$, alors

$$\mathcal{L}_\tau(\bar{x};\mu) \leqslant \mathcal{L}_\tau(\bar{x};\bar{\mu})$$

donc il admet un maximum sur $\mathbb{R}^m$.

Si $h(\bar{x}) \neq 0$, par définition de $\mathcal{L}(x;\mu)$,

on a $\mathcal{L}(x;\mu) = +\infty$,

alors $\mathcal{L}_\tau(\bar{x};\mu) = \mathcal{L}(\bar{x};\mu) + \frac{1}{2\tau}\|h(x)\|_2^2 = +\infty$

c-à-d cette fonction n'est pas majorée.

(e) Montrer que $\bar{x}$ est un minimiseur de la fonction partielle

$$x \mapsto \mathcal{L}_\tau(x;\bar{\mu}) = J(x) + \langle \bar{\mu}, h(x) \rangle + \frac{1}{2\tau}\|h(x)\|_2^2$$

en déduire que $\bar{x}$ est une solution primale.

(e) $(\bar{x}, \bar{\mu})$ est un point-selle de $\mathcal{L}_\tau$

Alors $\mathcal{L}_\tau(\bar{x};\bar{\mu}) \leq \mathcal{L}_\tau(x;\bar{\mu})$

donc $\bar{x}$ est un minimiseur de la fonction partielle

Et on a $J(x) = \sup_{\mu\in(\mathbb{R}^+)^m} \mathcal{L}_\tau(x;\mu) = \mathcal{L}_\tau(x;\bar{\mu})$

donc $\bar{x}$ est un minimiseur de $J(x)$

c-à-d $\bar{x}$ est une solution primale.

日期: /