拓扑元素 Module A1
Éléments de topologie

Sauf mention contraire, $\mathcal{X}$ (resp. $\mathcal{Y}$) est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et on note $\|\cdot\|$ la norme qui découle du produit scalaire.

L'objectif de ce module est d'introduire brièvement des résultats de topologie qui nous seront utiles dans la suite du cours pour l'analyse du comportement des méthodes d'optimisation du premier ordre.

1 Droite réelle achevée 完备实直线

Dans ce cours, pour des raisons de lisibilité 易读性, au lieu de considérer un couple de fonction $\tilde{f}$ et de son domaine de définition $\mathcal{D} \subset \mathcal{X}$, on va considérer des fonctions f dont le domaine de définition est défini de manière *implicite*, en "prolongeant" la définition de $\tilde{f}$ sur l'espace $\mathcal{X}$ par la valeur $+\infty$; plus précisément, on va remplacer la fonction $\tilde{f} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ par la fonction $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad f(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{si } x \in \mathcal{D} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Cette opération implique de considérer la définition suivante :

Définition 1 (Droite réelle achevée) 完备实直线

On appelle *droite réelle achevée* 完备实直线 l'ensemble suivant, noté $\overline{\mathbb{R}}$:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\} = [\,-\infty\,;+\infty\,]$$

由于最初在整个空间X上的未定义函数的“延拓”是通过给未定义点分配一个无限图像来完成的

Puisque le "prolongement" d'une fonction non définie initialement sur tout l'espace $\mathcal{X}$ se fait en attribuant aux points non définis une image infinie, on pourrait se contenter de considérer l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} =]\,-\infty\,;+\infty\,]$. Cependant, dans le module **A6 : Dualité min-max**, on verra qu'exceptionnellement, il peut être utile d'attribuer à certains points l'image $-\infty$.

En adjoignant à la droite réelle les deux valeurs infinies $+\infty$ et $-\infty$, on est amené à étendre les opérations élémentaires (règles de calcul) à ces deux points supplémentaires. Certaines sont simples à définir ; on commence par exemple avec la somme 加法 d'une valeur infinie avec un scalaire :

$$\forall\, \beta \in \mathbb{R}, \qquad (+\infty) + \beta = +\infty \qquad \text{et} \qquad (-\infty) + \beta = -\infty$$

(la valeur finie est "absorbée" 吸收 par la valeur infinie). Le produit 乘积 d'une valeur infinie avec un scalaire non nul est également simple à définir : pour tout $\alpha \neq 0$,

$$\alpha \times (+\infty) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ -\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \alpha \times (-\infty) = \begin{cases} -\infty & \text{si } \alpha > 0 \\ +\infty & \text{si } \alpha < 0 \end{cases}$$

Le cas du produit avec 0 est plus délicat 巧妙的 ; on songera par exemple aux fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto 1/x$, pour lesquelles on a

$$f(0^+) = 0, \qquad g(0^+) = +\infty \qquad \text{et} \qquad f(0^+) \times g(0^+) = 1$$

car $f \times g = 1$, alors que

$$f(0^+) = 0, \qquad \big(g(0^+)\big)^2 = +\infty \qquad \text{et} \qquad f(0^+) \times \big(g(0^+)\big)^2 = +\infty$$

car $(f \times g^2)(x) = 1/x$ quel que soit $x \in \mathbb{R}$. On voit donc qu'il n'est pas raisonnable d'attribuer une valeur unique à ce produit. Concernant les opérations entre valeurs infinies, on a d'une part

$$(+\infty) + (+\infty) = +\infty \qquad \text{et} \qquad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$$

et d'autre part

$$(+\infty) \times (+\infty) = (-\infty) \times (-\infty) = +\infty \qquad \text{et} \qquad (+\infty) \times (-\infty) = (-\infty) \times (+\infty) = -\infty$$

Il n'est en revanche pas non plus raisonnable de définir 不合理定义 la somme $(+\infty) + (-\infty)$ (ou, de manière équivalente, $+\infty - (+\infty)$) ; en effet, si l'on considère la fonction $g : x \mapsto 1/x$, on a par exemple

$$g(0^+) - g(0^+) = 0 \qquad \text{et} \qquad \big(g(0^+)\big)^2 - g(0^+) = +\infty$$

(car $g(x) - g(x) = 0$ et $(g(x))^2 - g(x) = (1-x)/x^2$). On peut résumer ces observations en introduisant les *conventions* 约定 suivantes :

Définition 2 (Lois de composition sur $\overline{\mathbb{R}}$) $\overline{R}$ 上的组合定律

On peut étendre la définition de la somme et du produit usuels dans $\mathbb{R}$ sur la droite réelle achevée en posant pour la somme 加法

$$\forall\, \beta \in \left]-\infty\,;+\infty\right], \qquad (+\infty) + \beta = +\infty$$
$$\forall\, \beta \in \left[-\infty\,;+\infty\right[, \qquad (-\infty) + \beta = -\infty$$

et pour le produit 乘法

$$\forall\, \alpha \in \left]0\,;+\infty\right], \qquad \alpha \times (+\infty) = +\infty \qquad \text{et} \qquad \alpha \times (-\infty) = -\infty$$
$$\forall\, \alpha \in \left[-\infty\,;0\right[, \qquad \alpha \times (+\infty) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \alpha \times (-\infty) = +\infty$$

ces deux lois de composition internes restant commutatives. 保有 可交换性

> Il n'est donc pas possible de munir de manière raisonnable la droite réelle achevée d'une structure de groupe ou de corps. 因此，不可能以合理的方式为完备实直线提供群或域结构

On revient maintenant au cas des fonctions dont on étend la “définition” sur l'espace entier $\mathcal{X}$. Puisque les fonctions que nous étudierons seront maintenant définies sur $\mathcal{X}$, il faut distinguer 区分 le domaine de définition formel 形式定义域 (ici $\mathcal{X}$) de l'ensemble des points 取值无穷的点的集合 sur lequel elles prennent une valeur finie (l'ensemble de définition classique).

Définition 3 (Domaine d'une fonction) 函数的定义域

Soit $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. On appelle *domaine* (ou *domaine effectif*) 实际定义域 de f l'ensemble

$$\operatorname{dom} f = \Big\{ x \in \mathcal{X} \mid f(x) \notin \{+\infty, -\infty\} \Big\}$$

> **Attention !** Dorénavant, dans ce cours, on ne précisera plus l'ensemble de définition des fonctions 此后 considérées, celui-ci étant implicitement donné par le domaine de la fonction. En particulier, une fonction $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ semble par défaut "définie" partout, mais c'est un leurre car elle peut prendre en certains points 缺少 une valeur infinie. En revanche, une fonction $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ est explicitement à valeurs **finies** (dans $\mathbb{R}$). Seules de telles fonctions peuvent être continues ou différentiables (sous-entendu : sur tout l'espace).

Considérons un premier exemple de fonctions pouvant prendre une valeur infinie :

Définition 4 (Indicatrice d'un ensemble) 集合的指示函数

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$. On appelle *indicatrice de* $\mathcal{A}$ 指示函数 la fonction $\chi_{\mathcal{A}} : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \chi_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathcal{A} \\ +\infty & \text{si } x \notin \mathcal{A} \end{cases}$$

> 不要混淆!
> Attention ! Il faut bien distinguer la fonction indicatrice de la *fonction caractéristique* 特征函数 de l'ensemble $\mathcal{A}$
>
> $$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \mathbb{1}_{\mathcal{A}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathcal{A} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathcal{A} \end{cases}$$
>
> Notons que $\operatorname{dom} \chi_{\mathcal{A}} = \mathcal{A}$ 实际定义域 mais que $\operatorname{dom} \mathbb{1}_{\mathcal{A}} = \mathcal{X}$. 全部区域

D'autres opérations sur la droite réelle achevée nous seront utiles dans ce cours. Il s'agit tout d'abord de la relation d'ordre 顺序关系

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R}, \qquad -\infty < \alpha < +\infty$$

de sorte que $+\infty$ (resp. $-\infty$) est le plus grand (resp. le plus petit) élément de $\overline{\mathbb{R}}$. Tout ensemble de la droite réelle achevée admet une borne supérieure et une borne inférieure dans $\overline{\mathbb{R}}$; plus précisément, si $\mathcal{E} \subset \overline{\mathbb{R}}$ est non vide et différent du singleton $\{-\infty\}$ (resp. $\{+\infty\}$), alors

$$\sup \mathcal{E} \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \qquad (\text{resp.} \qquad \inf \mathcal{E} \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\})$$

空集特殊情况 tandis que $\quad \sup \emptyset = \sup\{-\infty\} = -\infty \quad$ et $\quad \inf \emptyset = \inf\{+\infty\} = +\infty$

Remarque : Puisque les bornes supérieure et inférieure d'une fonction $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ sur un ensemble $\mathcal{E} \subset \mathcal{X}$ sont définies comme

$$\sup_{x \in \mathcal{E}} f(x) = \sup \Big\{ f(x) \mid x \in \mathcal{E} \Big\} \qquad \text{et} \qquad \inf_{x \in \mathcal{E}} f(x) = \inf \Big\{ f(x) \mid x \in \mathcal{E} \Big\}$$

l'ensemble $\mathcal{E}$ n'étant pas nécessairement inclus dans le domaine de f, les ensembles considérés au-dessus peuvent contenir $+\infty$ ou $-\infty$. Autrement dit, contrairement au cas réel ordinaire, il est techniquement possible d'avoir

$$\sup_{x \in \mathcal{E}} f(x) = -\infty \qquad \text{et} \qquad \inf_{x \in \mathcal{E}} f(x) = +\infty$$

même lorsque $\mathcal{E}$ est non vide.

Dans le cas des fonctions à valeurs sur la droite réelle achevée, il est nécessaire d'adapter la définition de la caractérisation séquentielle de la continuité en un point de façon à lever toute ambiguïté. En effet, si l'on considère la fonction $\chi_{[0\,;1]}$ comme
有必要调整连续性的顺序特征的定义，以消除所有歧义

"prolongement" de la restriction de la fonction nulle au segment $[0;1]$ (que l'on notera $\tilde{f}$), la définition usuelle de la continuité assure que $\tilde{f}$ est continue en 0. En revanche, 然而 si l'on considère la fonction $\chi_{[0;1]}$ dont l'ensemble de définition est formellement tout $\mathbb{R}$, la caractérisation séquentielle de la continuité assure que $\chi_{[0;1]}$ n'est pas continue en 0 ; en effet, selon que l'on considère la suite $(1/k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ ou $(-1/k)_{k\in\mathbb{N}^*}$, toutes deux de limite nulle, on aura

$$\lim_{k\to+\infty} \chi_{[0;1]}\left(\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to+\infty} 0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to+\infty} \chi_{[0;1]}\left(-\frac{1}{k}\right) = \lim_{k\to+\infty} +\infty = +\infty$$

Cette incohérence n'est pas acceptable, car $\chi_{[0;1]} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ et $\tilde{f} : [0;1] \to \mathbb{R}$ sont censées définir le même objet. On est donc amené à considérer la définition modifiée 修订定义 suivante :

Définition 5 (Fonction continue) 连续函数

Soit $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Soit $x^0 \in \operatorname{dom} f$. On dit que f est *continue en* x^0 si pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\operatorname{dom} f$, on a

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^0 \qquad \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f(x^0)$$

On dit que f est *continue sur son domaine* 在定义域中连续 si f est continue en tout point de son domaine. On dit que f est *continue* 连续 si f est continue sur $\mathcal{X}$.

> Ainsi, dans ce cours (par convention), toute fonction continue (et *a fortiori* différentiable) ne peut prendre de valeur infinie. En particulier, si $\mathcal{A} \neq \mathcal{X}$, la fonction indicatrice $\chi_{\mathcal{A}}$ **n'est pas** continue (ni différentiable).

2 Semi-continuité inférieure 下半连续性

Dans cette section, on va introduire une notion plus faible que la continuité 更弱的连续性 afin de conserver des hypothèses raisonnables sur des fonctions à valeurs sur $\overline{\mathbb{R}}$.

2.1 Définition et exemples 定义和例子

Définition 6 (Fonction semi-continue inférieurement) 下半连续函数

Soit $f : \mathcal{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On dit que f est *semi-continue inférieurement* 下半连续的 en x^0, abrégé en *s.c.i.* en x^0, si pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$,

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^0 \qquad \Longrightarrow \qquad \liminf_{k\to+\infty} f(x_k) \geq f(x^0)$$

On dit que f est *s.c.i.* si elle est s.c.i. en tout point $x^0 \in \mathcal{X}$.

Cette définition est connue sous le nom de *caractérisation séquentielle* 序列特征 de la semi-continuité inférieure. Notons qu'elle ne fait pas appel au domaine de f. Elle est équivalente à :

$$\liminf_{x\to x^0} f(x) \geq f(x^0)$$

On rappelle que
$$\liminf_{k\to+\infty} u_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left\{ \inf_{n\geq k} u_n \right\}$$

et que
$$\liminf_{x \to x^0} f(x) = \lim_{t \to 0^+} \inf \left\{ f(x) \mid 0 < \|x - x^0\| < t \right\}$$

下半连续函数 例子

EXEMPLE

Exemple d'une fonction s.c.i. Considérons la fonction réelle définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x > 0 \\ x^2 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Son graphe est représenté en figure 1. Cette fonction est continue, donc s.c.i., en tout point $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. En 0, on a

$$f(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, x \neq 0, \qquad f(x) \in \{0, 1\}$$

En particulier, on a $f(x) \geq 0$. Il s'ensuit que pour toute suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de limite nulle,

对于所有极限为 0 的点列 $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$

$$\liminf_{k \to +\infty} f(x_k) \geq 0 = f(0)$$

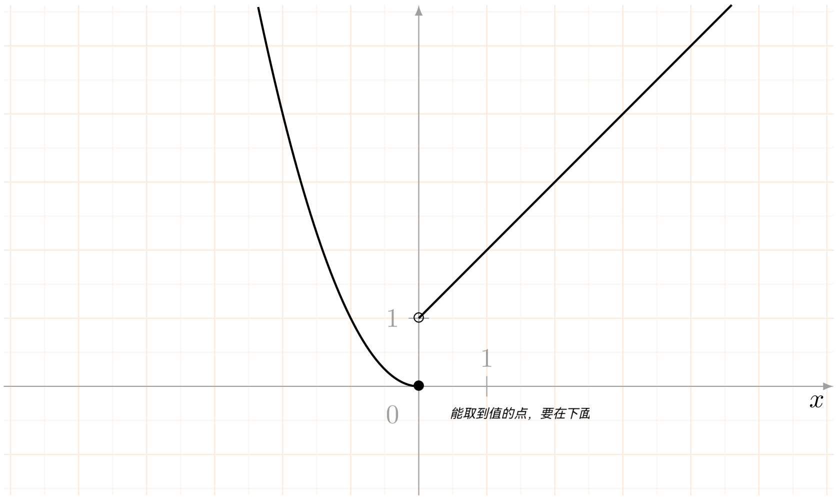

FIGURE 1 – Exemple de fonction s.c.i. non continue.

下半连续函数 不一定 连续

Comme on l'a vu dans l'exemple précédent, une fonction s.c.i. n'est pas nécessairement continue. On a cependant immédiatement le résultat suivant lorsque f ne prend pas la valeur $-\infty$:

Proposition 1 连续函数 一定是 下半连续的

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. Soit $x^0 \in \operatorname{dom} f$. On suppose que f est continue en x^0. Alors f est s.c.i. en x^0.

DÉMONSTRATION : Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathcal{X}$ convergeant vers x^0. Puisque $\mathcal{X} = \operatorname{dom} f \cup {}^{c}\operatorname{dom} f$, deux cas de figure sont possibles.

- **On peut extraire de la suite** $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ **une sous-suite dans** $\operatorname{dom} f$**.** Dans ce cas, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\liminf_{k \to +\infty} f(x_k) = \inf_{n \geq k} f(x_n) = \inf_{\substack{n \geq k \\ x_n \in \operatorname{dom} f}} f(x_n) = \lim_{\substack{k \to +\infty \\ x_k \in \operatorname{dom} f}} f(x_k) = f(x^0)$$

où la limite est une conséquence de la continuité de f en x^0 ; en passant à la borne supérieure sur les $n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k} f(x_n) = f(x^0)$$

- **On ne peut pas extraire de la suite** $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ **une sous-suite dans** $\operatorname{dom} f$**.** Dans ce cas, il existe un rang $k^0 \in \mathbb{N}$ à partir duquel les x_k n'appartiennent pas à $\operatorname{dom} f$. Il s'ensuit puisque f ne prend pas la valeur $-\infty$ que

$$\liminf_{k\to+\infty} f(x_k) = \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = +\infty > f(x^0)$$

Dans les deux cas, on a démontré que f est s.c.i. en x^0. ■

连续

Remarque : Lorsque f est continue en x^0, on a pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de $\operatorname{dom} f$

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x^0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{k\to+\infty} f(x_k) = f(x^0)$$

只是 下半连续

Supposons à présent que f ne soit que s.c.i. en x^0. Alors si $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\operatorname{dom} f$ convergeant vers x^0, on a par définition du domaine $f(x_k) \in \mathbb{R}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Soit $(x_{k_j})_{j\in\mathbb{N}}$ une sous-suite telle que la suite $(f(x_{k_j}))_{j\in\mathbb{N}}$ soit convergente, de limite ℓ. On peut vérifier que

$$\liminf_{j\to+\infty} f(x_{k_j}) = \lim_{j\to+\infty} f(x_{k_j}) = \ell$$

de sorte que

$$\ell \geq f(x^0)$$

Un exemple important est celui des indicatrices d'ensembles fermés.

闭集 的 指示函数

Proposition 2 闭集的指示函数 都是 下半连续的

Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{X}$ un ensemble **fermé**. Alors la fonction $\chi_{\mathcal{A}}$ est s.c.i.

Démonstration : Soit $x^0 \in \mathcal{X}$ et soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathcal{X}$ convergeant vers x^0. Puisque $\mathcal{X} = \mathcal{A} \cup {}^c\mathcal{A}$, on peut considérer deux cas de figure :

- Si $x^0 \in \mathcal{A}$, alors on a

$$\chi_{\mathcal{A}}(x^0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall\, k \in \mathbb{N}, \quad \chi_{\mathcal{A}}(x_k) \in \{0; +\infty\}$$

ce qui implique en particulier que

$$0 = \chi_{\mathcal{A}}(x^0) \leq \liminf_{n\to+\infty} \chi_{\mathcal{A}}(x_k) \in \{0; +\infty\}$$

La fonction $\chi_{\mathcal{A}}$ est donc semi-continue inférieurement en tout $x^0 \in \mathcal{A}$.

- Si $x^0 \notin \mathcal{A}$, alors on peut vérifier que l'ensemble

$$\Big\{ k \in \mathbb{N} \mid x_k \in \mathcal{A} \Big\}$$

est fini. En effet, dans le cas contraire, on pourrait extraire une sous-suite convergente de $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes appartiennent à $\mathcal{A}$. Puisque $\mathcal{A}$ est supposé fermé, il s'ensuivrait que la limite de cette sous-suite appartient également à $\mathcal{A}$; par unicité de la limite, cela contredit l'hypothèse considérée dans ce cas de figure. Ainsi, il existe un indice $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geq k_0, \qquad x_k \notin \mathcal{A}$$

de sorte que, pour tout $k \geq k_0$, on a $\chi_{\mathcal{A}}(x_k) = +\infty$. Par conséquent,

$$\liminf_{n\to+\infty} \chi_{\mathcal{A}}(x_k) = +\infty = \chi_{\mathcal{A}}(x^0)$$

ce qui assure la semi-continuité inférieure de $\chi_{\mathcal{A}}$ en tout point $x^0 \notin \mathcal{A}$. ■

On peut généraliser ce résultat aux fonctions continues sur leur domaine fermé :

将结果推广到 定义域为闭集的连续函数

Proposition 3 定义域为闭集的连续函数 一定是 下半连续的

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. On suppose que $\operatorname{dom} f$ est **fermé** et que f est **continue sur son domaine**. Alors f est s.c.i.

DÉMONSTRATION : Commençons par remarquer que, pour tout $x^0 \in \operatorname{dom} f$, la fonction f est continue en x^0, donc s.c.i. en x^0 (proposition 1). On s'intéresse donc aux points $x^0 \notin \operatorname{dom} f$. Par hypothèse sur le domaine de f, son complémentaire est ouvert, donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad \|x - x^0\| \leq \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad x \notin \operatorname{dom} f$$

Autrement dit, pour tout tel x, on a $f(x) = +\infty$. Ainsi, pour toute suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathcal{X}$ convergeant vers x^0, il existe un rang $k^0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall\, k \geq k^0, \qquad f(x_k) = +\infty \qquad \text{donc} \qquad \liminf_{k\to+\infty} f(x_k) = +\infty = f(x^0)$$

et f est s.c.i. en x^0. ■

2.2 Propriétés 性质

Établissons quelques résultats sur les fonctions s.c.i. qui nous seront utiles dans la suite du cours. Notons que la notion de semi-continuité **inférieure** est particulièrement adaptée aux fonctions à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. 下半连续性 适应 定义在完备实直线上的函数

Proposition 4 下半连续函数 的 $\operatorname{niv}_{\leq t} f$ 是闭集

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. Alors on a équivalence entre les deux énoncés suivants :

(i) f est s.c.i. ;

(ii) pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'ensemble de niveau inférieur 下层集合

$$\operatorname{niv}_{\leq t} f = \Big\{ x \in \mathcal{X} \mid f(x) \leq t \Big\}$$

est fermé. 闭集

DÉMONSTRATION : On démontre séparément les deux sens de l'équivalence.

- **Sens direct.** Soit $t \in \mathbb{R}$ et $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de $\operatorname{niv}_{\leq t} f$, c'est-à-dire que

$$\forall\, k \in \mathbb{N}, \qquad f(x_k) \leq t$$

On suppose que cette suite est convergente, de limite x^*. Puisque f est s.c.i.,

$$\liminf_{k\to+\infty} f(x_k) \geq f(x^*)$$

Or, par définition de $\liminf_{k\to+\infty} f(x_k)$, on a

$$\liminf_{k\to+\infty} f(x_k) \leq t$$

de sorte que $x^* \in \operatorname{niv}_{\leq t} f$. Ainsi, on prouve que cet ensemble est fermé.

- **Réciproque.** Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite convergente de limite x^0. Par l'absurde, supposons que

$$\underbrace{\liminf_{k\to+\infty} f(x_k)}_{\in\, \mathbb{R}\cup\{-\infty\}} < f(x^0) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

En particulier, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\liminf_{k\to+\infty} f(x_k) < \ell < f(x^0)$$

Il s'ensuit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\inf_{n \geq k} f(x_n) \leq \ell - \varepsilon$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on construit par récurrence une sous-suite $(x_{k_k})_{k \in \mathbb{N}}$ telle que

$$f(x_{n_k}) \leq \ell - \frac{\varepsilon}{2}$$

L'ensemble de niveau inférieur $\ell - \varepsilon/2$ étant fermé, on a

$$\lim_{k \to +\infty} x_{n_k} = x^0 \in \mathrm{niv}_{\leq \ell - \varepsilon/2} f \qquad \text{soit} \qquad f(x^0) \leq \ell - \frac{\varepsilon}{2} < f(x^0)$$

ce qui est absurde. ■
荒谬的

On termine cette section avec un dernier résultat :

Définition 7 (Enveloppe supérieure) 上包络函数

Soit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ et soit $(f_k)_{k \in \mathcal{I}}$ une famille de fonctions $\mathcal{X} \to \mathbb{R} \subset \{+\infty\}$. On appelle *enveloppe supérieure* de la famille de fonctions $\{f_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ la fonction définie par
上包络 函数族

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \mapsto & \sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) \end{array} \right.$$

Proposition 5 (Enveloppe supérieure d'une famille de fonctions s.c.i) s.c.i. 函数族 的 上包络函数 也 s.c.i.

Soit $(f_i)_{i \in \mathcal{I}}$ une famille de fonctions $\mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$. On suppose que, pour tout $i \in \mathcal{I}$, la fonction f_i est s.c.i. en x^0. Alors l'enveloppe supérieure de la famille de fonctions $\{f_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ est s.c.i. en x^0.
上包络（函数）

DÉMONSTRATION : Il suffit de remarquer que

$$\mathrm{niv}_{\leq t} f = \mathcal{X} \setminus \left\{ x \in \mathcal{X} \mid f(x) > t \right\} = \mathcal{X} \setminus \left\{ x \in \mathcal{X} \mid \sup_{i \in \mathcal{I}} f_i(x) > t \right\}$$

Or, on a

$$\left\{ x \in \mathcal{X} \mid \sup_{k \in \mathcal{I}} f_i(x) > t \right\} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \left\{ x \in \mathcal{X} \mid f_i(x) > t \right\} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} \left(\mathcal{X} \setminus \mathrm{niv}_{\leq t} f_i \right)$$

où chaque ensemble de niveau inférieur est fermé d'après la proposition 4, on en déduit, puisque l'union d'ensembles ouverts est ouvert, que l'ensemble de niveau inférieur de f est fermé. ■

3 Convexité 凸性

Dans cette section, on rappelle les principaux résultats concernant les ensembles et fonctions convexes qui nous seront utiles dans ce cours. Pour plus de détails (en particulier les démonstrations), le lecteur est invité à consulter les modules **A3 : Fonctions convexes différentiables** (3MA261) et **B6 : Projection sur un convexe** (3MA261).

3.1 Ensembles convexes 凸集

On commence par quelques rappels sur les ensembles convexes. Les ensembles convexes sont les ensembles stables par combinaison convexe :

Définition 8 (Ensemble convexe) 凸集

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$. On dit que $\mathcal{C}$ est *convexe* si

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{C}^2, \forall \lambda \in [0;1], \qquad \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 \in \mathcal{C}$$

EXEMPLE

Quelques exemples. Les ensembles suivants sont convexes : 都是凸集

- 向量空间 les (sous-)espaces vectoriels ;
- 单元集 les singletons ;
- 向量空间的半空间 les demi-espaces d'un espace vectoriel ;
- 开球 / 闭球 les boules (fermées ou ouvertes).

On va maintenant s'intéresser aux opérations préservant la convexité 保留凸性 qui, combinées avec la liste de l'exemple ci-dessus, permettent de démontrer rapidement qu'un ensemble est convexe :

Proposition 6 以下凸集运算的结果 还是 凸集

Soit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ et $\mathcal{C}_i$ un ensemble convexe de $\mathcal{X}$ pour tout $i \in \mathcal{I}$. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble convexe de $\mathcal{Y}$ et $A : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ une application linéaire. Soit $(i,j) \in \mathcal{I}^2$. Alors

- 和 la somme $\quad \mathcal{C}_i + \mathcal{C}_j = \left\{x_i + x_j \in \mathcal{X} \mid x_i \in \mathcal{C}_i \text{ et } x_j \in \mathcal{C}_j\right\}$
- 笛卡尔乘积 le produit cartésien
$$\mathcal{C}_i \times \mathcal{C} = \left\{(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{Y} \mid x \in \mathcal{C}_i \text{ et } y \in \mathcal{C}\right\}$$
- 交 l'intersection $\quad \bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_i = \left\{x \in U \mid \forall i \in \mathcal{I}, \quad x \in \mathcal{C}_i\right\}$
- 直像 l'image directe $\quad A(\mathcal{C}_i) = \left\{A\,x \in \mathcal{Y} \mid x \in \mathcal{C}_i\right\}$
- 逆像 l'image réciproque $\quad A^{-1}(\mathcal{C}) = \left\{x \in \mathcal{X} \mid A\,x \in \mathcal{C}\right\}$

sont des ensembles convexes.

REMARQUE : En revanche, l'union de deux ensembles convexes n'est pas toujours convexe 两个凸集的并 不一定是 凸集 (il suffit de considérer l'union de deux singletons disjoints).

EXERCICE

Rectangles du plan. Démontrer que tout rectangle du plan est convexe.

EXEMPLE

仿射等式和不等式限制 也是凸集

Contraintes d'égalité et d'inégalité affines. Soit $G : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ une fonction affine. Alors les ensembles suivants

$$\left\{x \in \mathcal{X} \mid G(x) = 0\right\} \qquad \text{et} \qquad \left\{x \in \mathcal{X} \mid G(x) \leq 0\right\}$$

逆像

sont convexes, comme images réciproques par la forme linéaire $x \mapsto \langle a, x \rangle$ du singleton $\{-b\}$ et de l'intervalle fermé $]-\infty\,; -b]$.

单元集 闭区间

Intéressons-nous à l'intérieur d'un convexe. L'intérieur topologique d'un convexe est parfois vide ; on songera par exemple à la plupart des sous-espaces affines. Or, dans de nombreux énoncés relatifs aux ensembles convexes, il est nécessaire de considérer une forme d'intérieur (qui n'est pas nécessairement l'intérieur topologique usuel). Aussi, on introduit la notion suivante :

Définition 9 (Intérieur relatif d'un ensemble convexe) 凸集 的 相对内部

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble convexe non vide. On appelle *intérieur relatif* de $\mathcal{C}$ l'ensemble noté $\mathrm{intr}(\mathcal{C})$ défini par

相对内部

$$\mathrm{intr}(\mathcal{C}) = \Big\{ x \in \mathcal{C} \mid \exists\, V \text{ voisinage de } x \text{ tel que } (V \cap \mathrm{aff}(\mathcal{C})) \subset \mathcal{C} \Big\}$$

où $\mathrm{aff}(\mathcal{C})$ est le *sous-espace affine engendré par* $\mathcal{C}$, c'est-à-dire le plus petit sous-espace affine contenant $\mathcal{C}$.

由 C 生成的 仿射子空间

包含 C 的最小仿射子空间

> Dans la littérature anglophone, l'intérieur relatif de $\mathcal{C}$ est noté $\mathrm{ri}(\mathcal{C})$.

Il découle immédiatement de la définition que l'intérieur topologique est contenu dans l'intérieur relatif. Considérons un exemple moins trivial :

拓扑内部 被包含于

相对内部

EXEMPLE

区间 的 相对内部

Intérieur relatif d'un segment. On considère le segment reliant l'origine et le point $(1, 0)$ dans le plan :

$$\mathcal{C} = [\,0\,; 1\,] \times \{0\}$$

Cet ensemble est visiblement fermé. Son intérieur topologique est vide. En revanche, puisque $\mathrm{aff}(\mathcal{C}) = \mathbb{R} \times \{0\}$ l'axe des abscisses, on a $\mathrm{intr}(\mathcal{C}) = \,]\,0\,; 1\,[\, \times \{0\}$. Autrement dit, il s'agit du même segment privé de ses deux extrémités.

Proposition 7 (Intérieur relatif en dimension finie) 有限维空间 非空凸集 的 相对内部 是 非空的

On suppose que $\mathcal{X}$ *est de dimension finie.* Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble convexe non vide. Alors $\mathrm{intr}(\mathcal{C})$ est non vide.

有限维 非空凸集

相对内部 也非空

DÉMONSTRATION : Admis.

On termine ce paragraphe en rappelant un autres des intérêts des ensembles convexes en optimisation, à savoir la projection :

Définition 10 (Projection sur un ensemble) 集合上的投影

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble et $x^0 \in \mathcal{X}$. On appelle *projection de* x^0 sur $\mathcal{C}$ l'ensemble noté $\mathrm{proj}_{\mathcal{C}}(x^0)$ des points x^* de $\mathcal{C}$ vérifiant

$$\forall\, x \in \mathcal{C}, \qquad \|x^* - x^0\| \leq \|x - x^0\|$$

Lorsque $\mathcal{C}$ est convexe, fermé et non vide, la projection bien définie :
非空闭凸集

Théorème 1 (Projection sur un ensemble convexe fermé non vide) 非空闭凸集上的投影 唯一

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ est un ensemble convexe fermé non vide. Alors la projection de tout point x_0 sur $\mathcal{C}$ contient un unique élément.
所有点在 C 上的投影都只有一个元素

DÉMONSTRATION : Cf. Module **B6 : Projection sur un convexe** (3MA261).

> La démonstration dont la référence est mentionnée ci-dessus utilise des arguments simples de convexité. Dans le module **B1 : Méthodes d'optimisation du premier ordre**, on verra une preuve alternative utilisant des arguments d'optimisation de plus haut niveau.

3.2 Fonctions convexes 凹函数 / 下凸函数

On va à présent s'intéresser aux fonctions convexes, qui occupent une place importante en optimisation, comme on le verra tout au long de ce cours.

Définition 11 (Fonction convexe) 凹函数 / 下凸函数

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. On dit que f est *convexe* si

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2, \forall \lambda \in [\,0\,;1\,], \quad f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) \leq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$

On dit par ailleurs que f est *propre* si son domaine est non vide.
实际定义域非空

> Noter qu'une fonction convexe ne peut prendre la valeur $-\infty$.
> 凹函数不能取值 -∞

EXEMPLE

convexe 函数 例子

Quelques fonctions convexes définies sur un espace de HILBERT. Les fonctions suivantes sont convexes et propres :

- 线性型、仿射 les formes linéaires et affines ;
- 范数 les normes ;
- 范数的平方 les normes au carré.

REMARQUE : Le domaine d'une fonction convexe est nécessairement convexe. En effet, si x_1 et x_2 sont deux points du domaine d'une fonction convexe f, alors $f(x_1)$ et $f(x_2)$ sont finies par définition du domaine, tandis que par définition de la convexité, on a nécessairement $f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) < +\infty$, ce qui implique que toute combinaison convexe de x_1 et x_2 est dans le domaine de f.

Un exemple important de fonctions convexes est donné dans la proposition suivante :

Proposition 8 (Indicatrice d'un ensemble convexe) 凸集的指示函数

Soit $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ un ensemble convexe. Alors $\chi_{\mathcal{C}}$ est une fonction convexe. De plus, si $\mathcal{C}$ est non vide, alors $\chi_{\mathcal{C}}$ est propre.
凸集 下凸函数 非空 定义域非空

指示函数

REMARQUE : Ainsi, si $\mathcal{C}$ est convexe, non vide et fermé, $\chi_{\mathcal{C}}$ est convexe, propre et s.c.i.

凸集 非空 闭的 凹函数 定义域非空 下半连续的

DÉMONSTRATION : Il suffit de vérifier que $\operatorname{dom} \chi_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}$. ■

De la même manière que pour les ensembles convexes, certaines opérations préservent la convexité des fonctions.

保留了函数凹性的运算

Proposition 9 (Combinaison linéaire) 线性组合

Soit $f_1 : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $f_2 : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ deux fonctions convexes. Alors pour tout $\alpha_1 \geq 0$ et $\alpha_2 \geq 0$, la fonction $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$ est convexe.

DÉMONSTRATION : Laissé au lecteur.

前面的命题可以解释为凹函数的线性函数所产生的一些外部组合是凹的。
对于线性（或仿射）映射的内部组合，不需要对A的线性部分进行限制，
如下命题所示:

La proposition précédente peut être interprétée comme le fait que certaines compositions *externes* par une fonction linéaire de fonctions convexes sont convexes. Pour la composition *interne* par une application linéaire (ou affine), aucune restriction n'est nécessaire quant à la partie linéaire de A, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 10 (Composition par une application affine) 凹函数和仿射的复合 还是 凹函数

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et $A : \mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ une application affine. Alors la fonction $f \circ A$ est convexe.

凹函数 仿射

DÉMONSTRATION : Il suffit d'utiliser la linéarité partielle de A et de remarquer que

$$b = \lambda\, b + (1 - \lambda)\, b$$

pour tout $b \in \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in [\,0\,;1\,]$. ■

凹函数和凹函数的复合 不一定是 凹函数

La proposition 10 suggère que certaines compositions de fonctions convexes ne sont pas nécessairement convexes. C'est effectivement le cas : il suffit de considérer par exemple la fonction $-\exp$. De manière générale, si les fonctions en jeu ne sont pas affines, seule la composition *externe* par une fonction convexe croissante d'une fonction convexe est assurée d'être convexe, comme on peut le voir dans l'exemple suivant.

单增凹函数 凹函数

凹函数和单增凹函数的复合 还是 凹函数

EXEMPLE

Composition d'une fonction convexe par une fonction convexe croissante. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe croissante. Alors $g \circ f$ est convexe. En effet, si on suppose que son domaine est non vide (le résultat étant immédiat dans le cas contraire), alors on a pour tout $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2$ et $\lambda \in [\,0\,;1\,]$

$$f\big(\lambda\, x_1 + (1 - \lambda)\, x_2\big) \leq \lambda\, f(x_1) + (1 - \lambda)\, f(x_2)$$

par convexité de f ; par croissance de g, on a alors

$$g \circ f\big(\lambda\, x_1 + (1 - \lambda)\, x_2\big) \leq g\big(\lambda\, f(x_1) + (1 - \lambda)\, f(x_2)\big)$$

On conclut à l'aide de la convexité de g.

On signale enfin une propriété qui nous sera très utile dans la suite de ce cours :

Proposition 11 (Enveloppe supérieure) *凹函数族的 上包络 是 凹函数*

Soit $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$ et $f_i : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe pour tout $i \in \mathcal{I}$. Alors l'*enveloppe supérieure* de la famille de fonctions $\{f_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ est une fonction convexe.

DÉMONSTRATION : Il suffit d'écrire la définition de la convexité des f_i et de passer à la borne supérieure. ■

On termine ce paragraphe avec quelques considérations sur la continuité des fonctions convexes en dimension finie. On va admettre le résultat suivant :

Proposition 12 *凹函数 在 定义域相对内部上的点 是连续的*

On suppose que $\mathcal{X}$ est de dimension finie. Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction convexe. Soit $x^0 \in \operatorname{intr}(\operatorname{dom} f)$. Alors f est continue en x^0.

定义域的相对内部

En particulier, toute fonction convexe de domaine ouvert est continue sur son domaine, puisque son intérieur relatif contient son intérieur topologique qui est son domaine. On rappelle par ailleurs qu'en dimension finie, tout ensemble convexe possède un intérieur relatif non vide, ce qui implique que l'ensemble des points sur lequel une fonction convexe est continue est non vide en dimension finie.

特别是任何开域凹函数在其域上都是连续的，因为它的相对内部包含了它的拓扑内部，即它的域。我们还记得，在有限维中，每个凸集都有一个相对的非空内部，这意味着凹函数连续的点集在有限维中是非空的。

DÉMONSTRATION : Admis. Pour le cas où $\operatorname{dom} f = \mathcal{X}$, la preuve se trouve dans le module **A3 : Fonctions convexes différentiables** (3MA261).

注意：由于拓扑内部包含在相对内部中，因此在前面的命题中，我们可以用int(dom f)替换intr(dom f)。这样的操作的目的是帮助验证假设，因为拓扑内部通常比相对内部更容易获得。然而，所获得的语句较弱，特别是有时域的拓扑内部是空的。当需要证明f是连续的点的存在时，原始语句是有用的（不一定能够确定它），而当域的拓扑内部是非空的时，较弱的语句更可操作并且需要显式地找到f是连续的点。

REMARQUE : Puisque l'intérieur topologique est contenu dans l'intérieur relatif, on peut remplacer dans la proposition précédente $\operatorname{intr}(\operatorname{dom} f)$ par $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f)$. L'intérêt d'une telle manœuvre est de faciliter la vérification des hypothèses, car l'intérieur topologique est généralement plus simple à obtenir que l'intérieur relatif. Cependant, l'énoncé obtenu est plus faible, d'autant plus que, parfois, l'intérieur topologique du domaine est vide. Ainsi, l'énoncé original est utile lorsqu'il s'agit de justifier l'existence d'un point où f est continue (sans pouvoir nécessairement le déterminer), tandis que l'énoncé plus faible est plus exploitable lorsque l'intérieur topologique du domaine est non vide et qu'il est nécessaire de trouver de manière explicite un point où f est continue.

Il est important de considérer des points situés à l'intérieur relatif du domaine, comme le démontre le contre-exemple suivant :

CONTRE-EXEMPLE

Discontinuité au bord. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ définie

边界上的不连续性

par

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \\ +\infty & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Le graphe de cette fonction – discontinue en 0 – est affiché en figure 2. Vérifions qu'elle est convexe. L'inégalité définissant la convexité étant immédiatement vérifiée pour deux points x_1 et x_2 strictement positifs, il reste le cas où $x_1 = 0$ et $x_2 > 0$. Puisque pour tout $\lambda \in \,]\,0\,;1\,[$, on a $\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2 > 0$, et que

$$f\big(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2\big) = 0 \leq \lambda = \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$

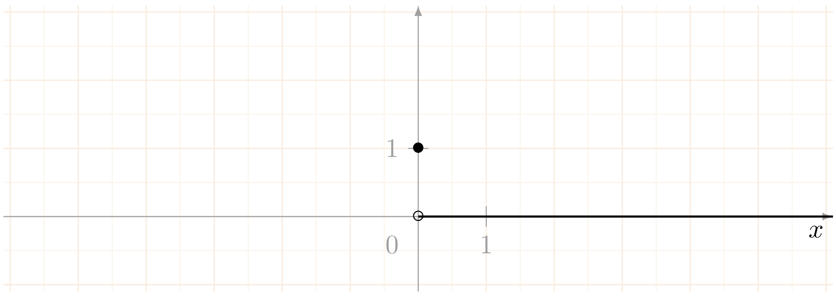

FIGURE 2 – Cas d'une fonction convexe discontinue au bord de son domaine.

3.3 Forte convexité 强凹函数

Parmi les fonctions convexes, deux familles de fonctions jouent un rôle particulier en optimisation :

Définition 12 (Fonction strictement convexe) 严格凹函数

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. On dit que f est *strictement convexe* si

$$\forall\, x_1 \neq x_2 \in \operatorname{dom} f, \forall \lambda \in \,]\,0\,;1\,[\,, \quad f(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2) < \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2)$$

Remarquons que, dans la définition ci-dessus, l'inégalité stricte est imposée aux points distincts dans le domaine.

Définition 13 (Fonction fortement convexe) 强凹函数

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction et soit $\alpha > 0$. On dit que f est *fortement convexe de module* α si

$$\forall\,(x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2, \forall \lambda \in [\,0\,;1\,]\,,$$
$$f\big(\lambda\, x_1 + (1-\lambda)\, x_2\big) \leq \lambda\, f(x_1) + (1-\lambda)\, f(x_2) - \frac{\alpha}{2}\, \lambda\, (1-\lambda)\, \|x_1 - x_2\|^2$$

On dit parfois que f est *α-convexe*. Il est aisé de vérifier qu'une fonction fortement convexe est strictement convexe.

强凹函数 一定是 严格凹函数

EXERCICE

强凹模

Module de forte convexité. Montrer que toute fonction fortement convexe de module α est fortement convexe de module α' pour tout $0 < \alpha' \leq \alpha$.

Considérons un premier exemple important de fonctions fortement convexes :

EXEMPLE

距离的平方 是 强凹函数

Distance au carré. Soit $x^0 \in \mathcal{X}$ et $\alpha > 0$. On pose

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathcal{X} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{\alpha}{2}\, \|x - x^0\|^2 \end{array} \right.$$

Soit $(x_1, x_2) \in \mathcal{X}^2$ et $\lambda \in [0;1]$. En remarquant que $x^0 = \lambda x^0 + (1-\lambda) x^0$ et en développant le premier carré, on obtient que

$$\begin{aligned}\frac{\alpha}{2} \left\|\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2 - x^0\right\|^2 - \frac{\alpha}{2} \lambda \|x_1 - x^0\|^2 - \frac{\alpha}{2} (1-\lambda) \|x_2 - x^0\|^2 \\ = -\frac{\alpha}{2} \lambda (1-\lambda) \big(\|x_1 - x^0\|^2 + \|x_2 - x^0\|^2 - 2 \langle x_1 - x^0, x_2 - x^0 \rangle\big)\end{aligned}$$

En utilisant une identité remarquable pour simplifier le terme entre parenthèses dans l'expression précédente, on prouve que f est une fonction fortement convexe de module α.

强凹函数

La définition de la forte convexité est en général difficile à vérifier. C'est pourquoi les résultats suivants sont utiles pour déterminer la forte convexité d'une fonction.

凹函数和强凹函数的和 是 强凹函数

EXERCICE

Somme d'une fonction convexe et d'une fonction fortement convexe. Montrer que la somme d'une fonction convexe et d'une fonction fortement convexe est fortement convexe.

La réciproque est vraie, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 13 (Caractérisation des fonctions fortement convexes)

强凹函数 减去 距离平方 是 凹函数

Soit $f : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ une fonction. Alors on a l'équivalence entre les énoncés suivants :

(i) f est fortement convexe de module α ;

强凹函数

(ii) pour tout $x^0 \in \mathcal{X}$, la fonction

$$x \mapsto f(x) - \frac{\alpha}{2} \|x - x^0\|^2$$

est une fonction convexe.

凹函数

DÉMONSTRATION : Admis. La preuve se trouve dans le module **A3 : Fonctions convexes différentiables** (3MA261).

Autrement dit, en posant g la fonction apparaissant dans l'énoncé (ii) de la proposition 13, on assure l'existence d'une fonction convexe $g : \mathcal{X} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ telle que

凹函数

$$\forall\, x \in \mathcal{X}, \qquad f(x) = g(x) + \frac{\alpha}{2} \|x - x^0\|^2$$

c'est-à-dire que toute fonction fortement convexe est la somme de d'une fonction convexe et d'une fonction fortement convexe. Notons par ailleurs que f et g ont même domaine.

所有 强凹函数 都是 凹函数 和 强凹函数 的 和

Pour aller plus loin

Enveloppe supérieure d'une famille de fonctions. Cette notion sera utilisée dans le contexte de la dualité min-max (module **A6 : Dualité min-max**). En particulier, on verra qu'il est possible de représenter toute fonction convexe comme l'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions affines, ce qui conduira à la notion de conjuguée convexe (module **A8 : Dualité de Fenchel et conjuguée convexe**).

Généralisation de la notion de différentiabilité. Le gradient d'une fonction convexe possède des propriétés remarquables, que l'on préservera en définissant une généralisation de la différentielle aux fonctions convexes non différentiables, ou encore non convexes et non différentiables (module **A2 : Sous-différentiabilité**). Cette généralisation, appelée *sous-différentiel*, se révélera en particulier très utile pour caractériser les minima globaux d'une fonction convexe (module **B1 : Méthodes d'optimisation du premier ordre**). On verra par ailleurs qu'un des intérêts de l'optimisation convexe réside dans l'absence de minima locaux.

Forte convexité. La forte convexité est une propriété intéressante pour l'optimisation, car elle garantit à la fois l'existence et l'unicité du minimiseur (module **B1 : Méthodes d'optimisation du premier ordre**). De plus, elle permet d'assurer des comportements plus intéressants pour les algorithmes d'optimisation, tant en termes de stabilité qu'en termes de vitesse de convergence (module **B1 : Méthodes d'optimisation du premier ordre**). On verra en outre que la forte convexité est une forme de régularité dans le domaine dual (**A8 : Dualité de Fenchel et conjuguée convexe**).