ensiie

école nationale supérieure d'informatique
pour l'industrie et l'entreprise

Instruments Financiers

Semestre 4 - Option Finance (2010-2011)

Version : 12 mars 2013

Serge Werlé

Allocation d'Actifs et Modèles Financiers

BNP Paribas Cardif

Table des matières

Chapitre 1

Les actions

Dans ce premier chapitre, nous allons aborder la classe d'actifs la plus emblématique des marchés boursiers, à savoir les actions. Vous avez dû avoir une première approche de cette classe d'actifs dans le cours d'Introduction aux marchés financiers. Ici, mon objectif est de vous faire comprendre les mécanismes relatifs aux actions les plus couramment utilisés en Banque.

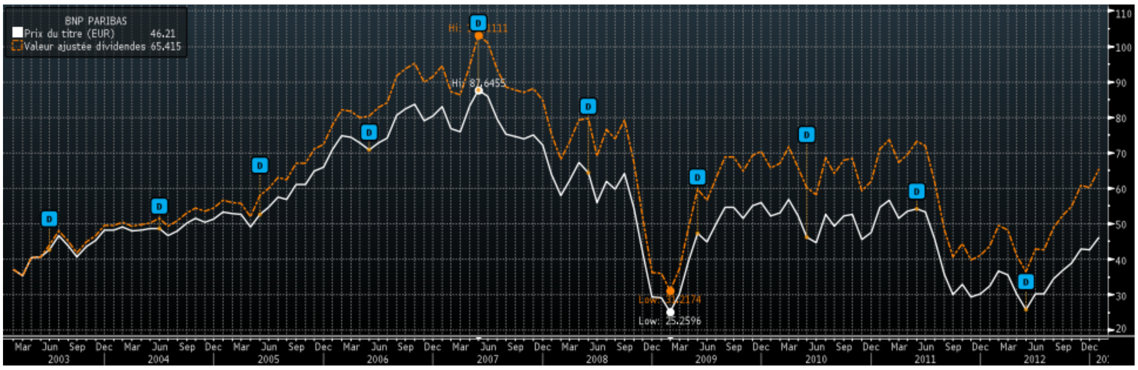
Les actions sont des titres de propriété du capital d'une entreprise. Concrètement, lorsque vous achetez une action d'une entreprise, vous "rentrez au capital" de celle-ci, autrement dit, vous en détenez une part, plus ou moins grande.

Et cela vous donne certains droits, comme celui de participer aux assemblées générales d'actionnaires où vous pourrez avoir un droit de regard (relatif) sur la vie de l'entreprise, connaître les décisions importantes qui y sont prises... Vous aurez même un droit de vote à cet égard, dont le poids sera calculé par rapport à votre contribution au capital de l'entreprise, autrement dit le nombre d'actions que vous y détenez [1] !

Enfin, en achetant des actions d'une entreprise vous aurez droit à une partie des bénéfices de l'entreprise. Vous en avez sans doute déjà entendu parler, il s'agit des fameux dividendes, qui sont distribués aux actionnaires de l'entreprise en fonction des résultats de l'année. Sur le graphique suivant, nous affichons les distributions de dividende sur l'action BNP Paribas (symbolisés par l'icône "D") [2].

---

1. Pour avoir un petit ordre d'idée, il y avait, à fin 2012, plus d'un milliard d'actions BNP Paribas en circulation...
2. Attention, une entreprise peut tout à fait décider de ne pas distribuer de dividende à ses actionnaires, pour préserver sa trésorerie (la décision est prise en Assemblée générale).



Certaines entreprises ne distribuent que très rarement des dividendes, comme Apple par exemple, qui n'a distribué aucun dividende sur la période 1995-2011 !

Cette section vous présentera donc les principales caractéristiques des actions, sous un angle "investissement" : quels sont les critères d'appréciation de la qualité d'un investissement en actions ? Comment calculer le risque de son investissement ? Comment se fait-il que le cours de certaines actions évoluent toujours dans le même sens, et comment le quantifier ? Tout cela sous un angle le plus proche de la pratique possible. Ensuite nous aborderons les instruments financiers les plus courants adossés sur les actions.

1.1 Investissement risqué / non risqué

Un investisseur, lorsqu'il souhaite placer son argent en bourse, a l'embarras du choix. Toutefois, ce choix peut être divisé en deux.

Le premier cas est celui d'un investisseur qui n'est pas enclin à prendre le moindre risque.
Les raisons peuvent être multiples. Par exemple, celui-ci souhaite absolument protéger son capital pour un achat important à venir, ou, proche de la retraite, il ne souhaite pas voir le fruit du travail d'une vie se réduire en cas de baisse des marchés.
Dans ce cas, l'investisseur peut placer son argent sur des actifs dits "sans-risque", en achetant des obligations de l'état Français ("OAT") par exemple. Les actifs "sans risque" n'existent qu'en théorie car en pratique, même les contreparties les plus sûres (ici, l'état Français) peuvent se révéler risquées. Mais nous y reviendrons un peu plus tard dans le cours.
Toujours est-il que les placements sans risque sont ceux qui rapportent le moins. Le moins, certes,

mais de manière sûre.

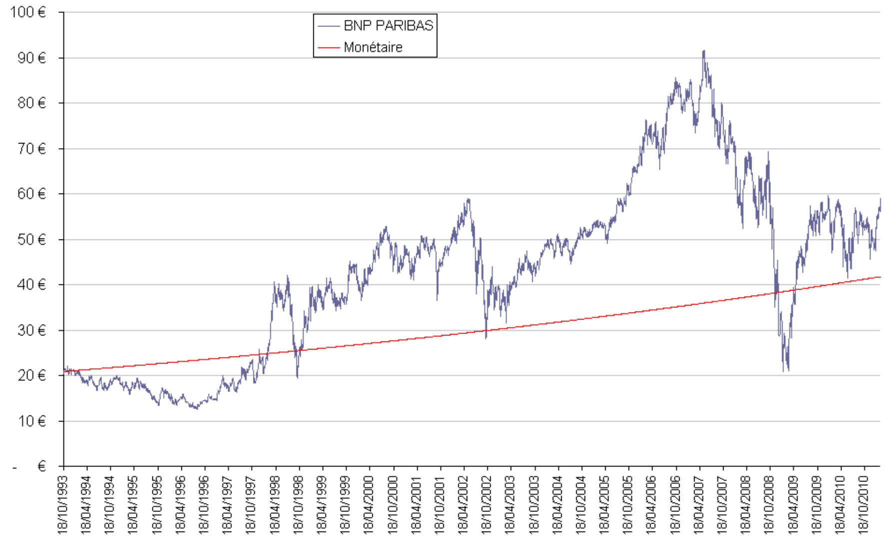
Le deuxième cas est celui d'un investisseur qui peut se permettre de prendre du risque.
Ce genre d'investisseur doit avoir conscience que son capital peut subir de fortes variations au cours du temps. Il aura alors tout une palette de placements possibles, parmi lesquels les actions. Comme vous le savez sans doute, le cours d'une action est sensible à plusieurs paramètres, au premier rang desquels la loi de l'offre et de la demande. Ainsi, le cours d'une action va varier dans le temps : plus la demande est forte, plus le prix aura tendance à monter, et inversement.
Toute personne plaçant son argent sur des actions ne s'attend pas à avoir un taux de rendement équivalent aux placements sans risque évoqués plus haut. Sinon : quel intérêt d'investir dans quelque chose de risqué ? C'est pour cette raison, **qu'en moyenne**, les actions rapportent plus que les placements sans risque.
La différence entre le rendement moyen d'une action et le taux sans risque est appelé la "prime de risque", autrement dit, la rémunération qu'attend l'investisseur pour le risque pris.

Cette différence entre placement "sans risque" et placement risqué, nous allons la mettre en lumière dans la section suivante.

1.2 La performance des actions

1.2.1 BNP Paribas vs Cash

Nous traçons ci-dessous l'évolution du cours de l'action BNP Paribas (bleu) et d'un placement "sans risque" [3], à un rendement annuel de 4% (rouge) [4].



L'exemple de BNP Paribas est intéressant car on peut y voir qu'en moyenne, les performances

3. En pratique, on parle de "cash" ou de placement "monétaire", nous y reviendrons plus tard.
4. En réalité, le rendement des placements sans risque varie au cours du temps, mais les conclusions sont les mêmes.

sont effectivement meilleures que sur le sans risque, globalement. Mais attention car ce n'est pas toujours le cas (entre 1993 et 1997, et pendant la crise des bancaires en 2008).

En moyenne, le rendement est plus intéressant, mais pas toujours. Attention, le terme "en moyenne" est à entendre globalement sur l'ensemble des actions. Cela signifie que certaines actions ne seront jamais plus intéressantes qu'un placement sans risque (et inversement).

Maintenant, quels sont les indicateurs qui nous permettent d'évaluer la performance de BNP Paribas ?

1.2.2 Investissements à court et moyen termes

Nous allons mettre en lumière un critère important dans le choix d'un investissement, à savoir **l'horizon d'investissement**. Nous venons de voir que selon la période d'investissement, BNP Paribas s'avère être plus ou moins intéressant par rapport au placement monétaire.

Si nous calculons le rendement historique de BNP Paribas ($S_{2011}/S_{1993} - 1$), alors oui, cela paraît plus intéressant que le cash. Mais, dans la réalité, les investisseurs vont se porter sur telle ou telle classe d'actif en fonction de leur horizon d'investissement :

- une personne qui a un horizon d'investissement court aura tout intérêt à placer son argent en cash, pour éviter les soubresauts de la bourse ;
- par contre, une personne ayant un horizon d'investissement à moyen-long terme privilégiera les placements en actifs risqués : en moyenne, sur le long-terme, les marchés actions sont plus intéressants que le cash.

Investissement action court-terme : gros risque

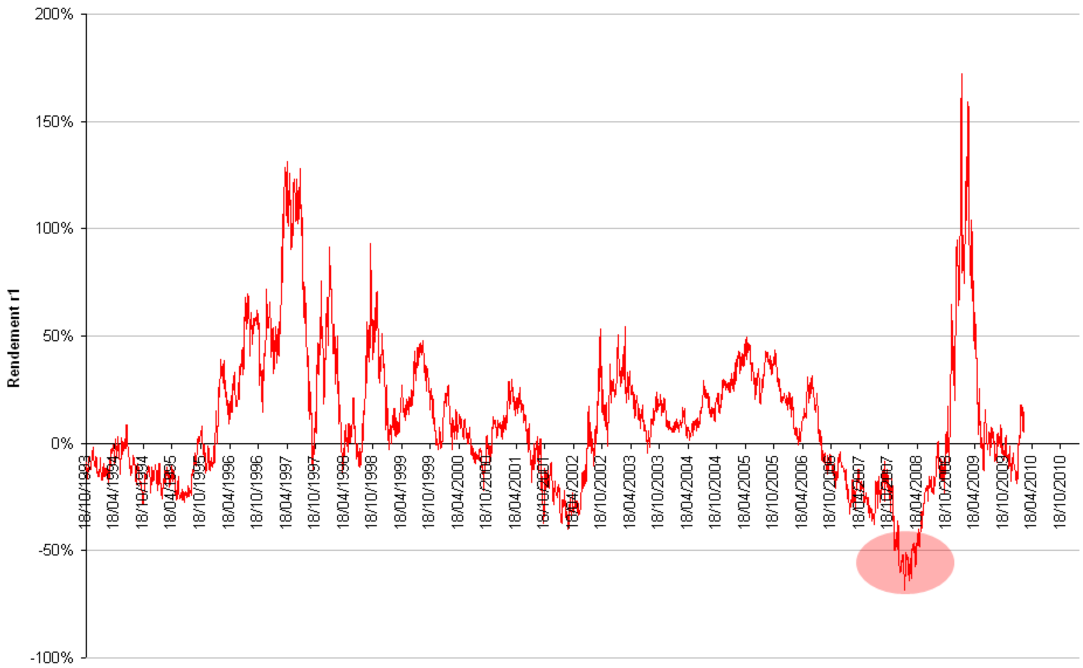
Essayons de mettre cela en pratique dans le cas de BNP Paribas : considérons d'abord un investisseur court-terme (1 an). L'idée est simple (t_0 est la date d'introduction en bourse de BNP Paribas, "Y" = year, "D" = day) :

- calculer le rendement d'un placement entre t_0 et $t_0 + 1Y$: $S_{t_0+1Y}/S_{t_0} - 1$,
- calculer le rendement d'un placement entre $t_0 + 1D$ et $t_0 + 1D + 1Y$,
- ... et ainsi de suite.

Nous parlons de **rendement mobile sur une fenêtre de 1 an** :

- la "fenêtre" désigne le segment de temps de 1Y,
- et "mobile", car cette fenêtre de calcul de 1Y est décalée de 1D, 2D,..., jusqu'à 1Y avant la dernière cotation disponible

Voici le résultat :



Comme vous pouvez le voir, la performance sur 1 an est extrêmement variable ! On dit qu'elle est très **volatile**, caractéristique d'un placement très risqué. **Sur les courtes périodes (1 an), les placements actions sont très risqués.** Nous ne l'avons pas représenté, mais l'investisseur en cash aura lui, un rendement constant de 4%, quelle que soit sa période d'investissement [5].

Si l'on calculait la moyenne des rendements mobiles 1Y sur BNP Paribas, on trouverait autour de 10%. Par rapport à un placement cash qui nous rapporterait 4%, la prime de risque BNP Paribas pourrait donc être estimée autour de 6%.

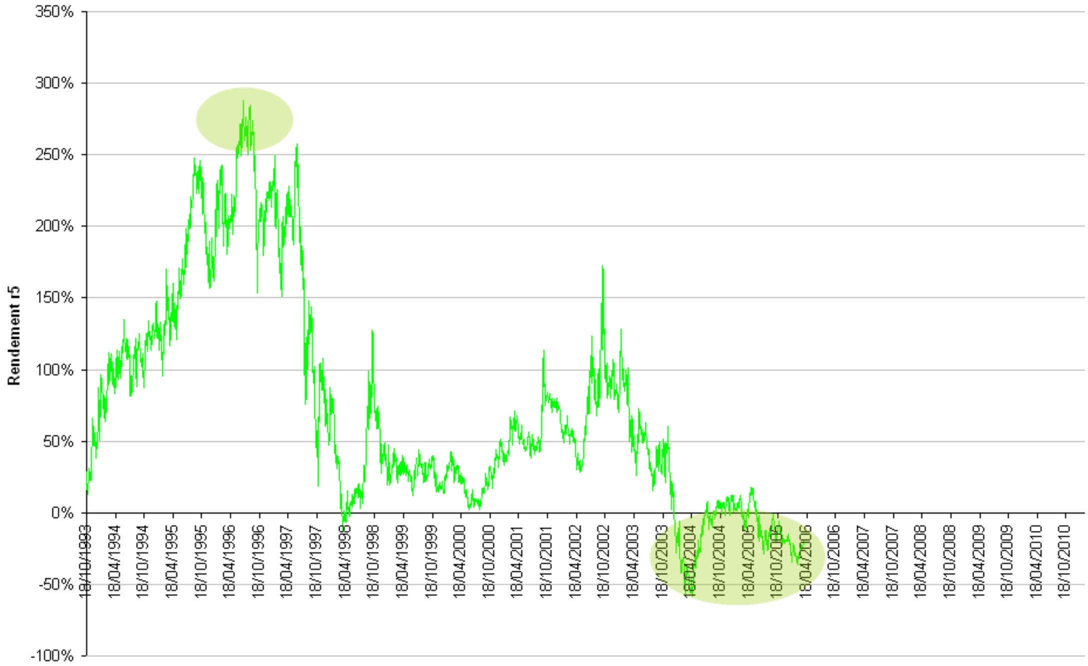
Investissement action moyen-terme : risque contenu

Même exercice en considérant un investissement moyen-terme : 5 ans. Cette fois-ci, l'exercice est le suivant :

- calculer le rendement d'un placement entre t_0 et $t_0 + 5Y$: $S_{t_0+5Y}/S_{t_0} - 1$,
- calculer le rendement d'un placement entre $t_0 + 1D$ et $t_0 + 1D + 5Y$,
- ... et ainsi de suite.

Voici ce que cela nous donne :

5. Avec notre hypothèse de rendement sans risque constant égal à 4%.



Première chose à dire : contrairement aux placements 1Y, ici, sur 5Y, quasiment pas de risque de perte du capital, mis à part un investissement 2004-2009. **Sur du moyen-long terme, l'investissement action devient moins risqué**.
Aussi, nous pouvons voir que sur 5Y, les rendements peuvent atteindre des niveaux très élevés : entre juillet 1996 et juillet 2001, le rendement atteint 287%.

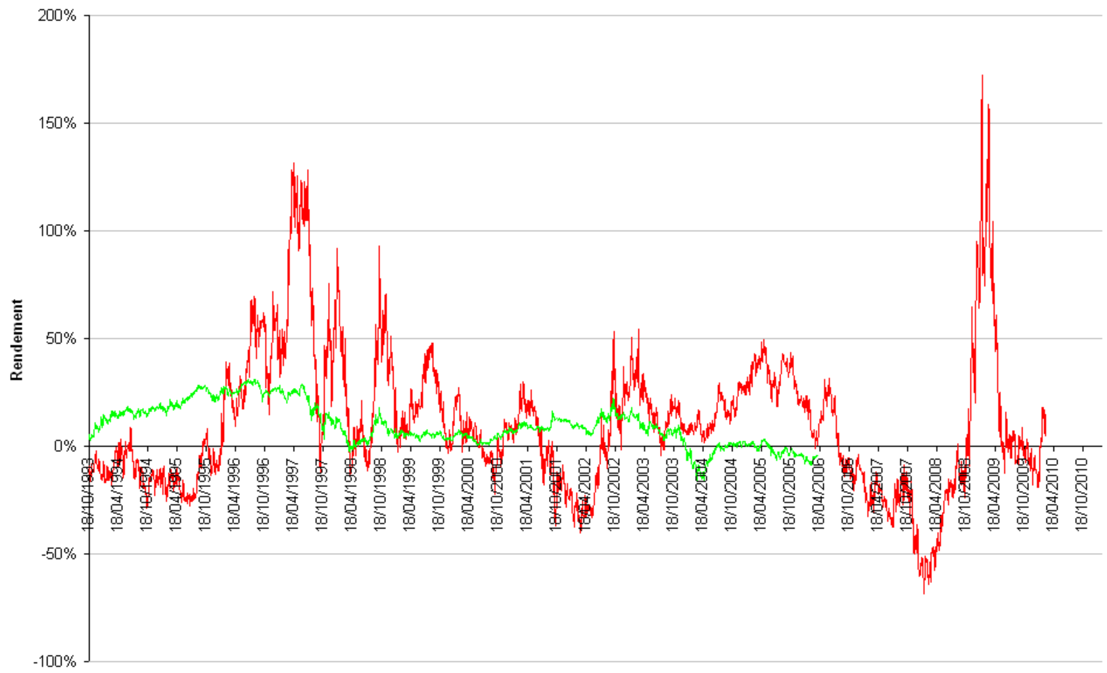
Pour pouvoir comparer ces valeurs de rendement sur 5Y avec celles sur 1Y, il est nécessaire d'**annualiser** les rendements 5Y : si r_5 est le rendement d'un investissement de 5 années, quel est le rendement r annuel qui, capitalisé 5 ans, donnerait r_5 ?

- Placement sur 5 années avec un rendement de r_5 sur l'ensemble des 5 ans : $100 * (1 + r_5)$
- Placement sur 5 années avec un rendement annuel de r : $100 * (1 + r)^5$

Alors : $r = (1 + r_5)^{\frac{1}{5}} - 1$ et de manière générale :

$$r = (1 + r_n)^{\frac{1}{n}} - 1$$

En appliquant cette transformation à la série des rendements 5Y nous obtenons les nouvelles valeurs suivantes (en rouge : le rendement 1Y ; en vert le rendement 5Y annualisé) :



L'analyse de ce dernier graphique nous conduit à la conclusion que les placements actions ne sont vraiment rentables que sur le moyen-long terme. Sur du court terme, le risque de perte est énorme.
Si nous faisions le travail pour des investissements de 10 ans, nous aurions eu des rendements encore plus stables.

Le dividende : un argument supplémentaire pour l'investissement en Action sur le long-terme

Lorsque vous détenez une action, la performance finale de votre investissement dépendra évidemment du niveau de revente du titre... mais pas seulement ! Il faut aussi prendre en compte les éventuels dividendes versés pendant la période de détention.

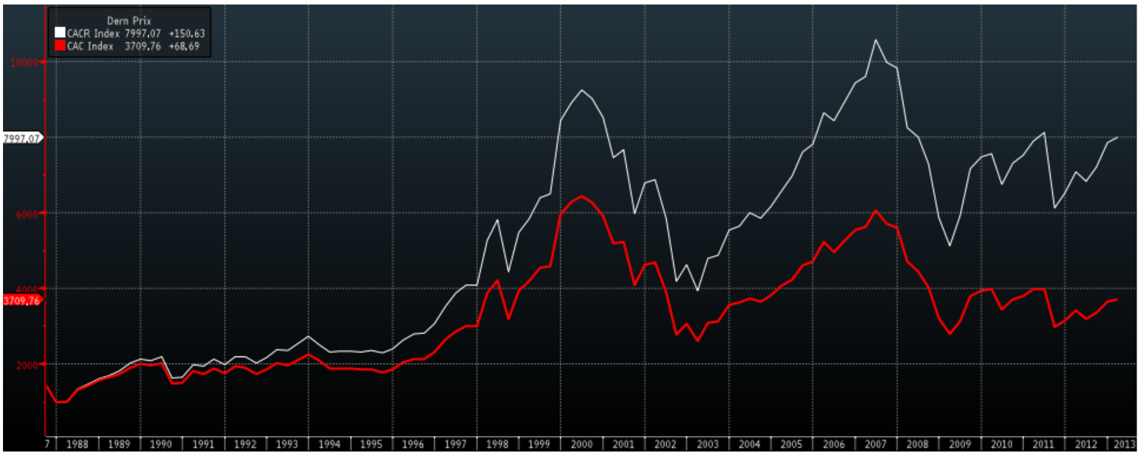
Sur un investissement court-terme (1 an), la performance de votre investissement sera expliquée en très grande partie par le niveau du cours au moment de la revente du titre. Or comme nous venons de le voir, celui-ci peut varier énormément, d'où un risque global qui sera de toute façon très important. Alors qu'une partie infime de votre performance viendra du dividende (éventuel) que vous toucherez. Celui-ci représente en général 3-4% de la valeur du titre quand, sur 1 an, le titre peut perdre ou gagner 40% de sa valeur !

Sur le long-terme, c'est différent. Vous allez accumuler, année après année, des dividendes, qui vont venir gonfler et contribuer à "stabiliser" votre performance. Ces dividendes accumulés représenteront cette fois-ci une part non négligeable de votre performance globale. Ainsi, au bout du compte, sur du long-terme, la performance de votre investissement sera moins dépendante du prix de revente de votre titre, et le risque sera plus faible.

Sur le premier graphique affiché en introduction du chapitre, qui représente l'évolution du titre BNP Paribas, vous pouvez voir deux séries. La première en trait plein représente simplement le cours de l'action depuis 2003. En pointillé, vous pouvez voir la série équivalente, mais "dividendes réinvestis".

Cela signifie simplement que les dividendes versés par BNP Paribas sont automatiquement réinvestis dans l'achat de nouvelles actions. Sur 10 ans, vous pouvez apprécier la surperformance apportée par ces détachements de dividendes : le titre était à 38 EUR en 2003 et à 46 EUR en 2013. Mais avec les dividendes récupérés et réinvestis dans le titre année après année, la valorisation totale atteint 65 EUR !

Si l'on considère le CAC40 depuis sa création (1987, soit environ 25 années), l'importance des dividendes sur du long-terme est encore plus flagrante !



A plusieurs reprises, nous avons parlé du "risque" d'un investissement. Comment pourrait-on quantifier ce risque ? C'est l'objet de la partie qui vient.

1.3 Le risque des actions

1.3.1 La notion de volatilité

Le risque de tout investissement peut être mesuré à l'aide d'un indicateur : la **volatilité** :

la volatilité en finance n'est autre que l'écart type en statistiques, c'est-à-dire la racine carrée de la variance d'une série

En français, la variance d'une série peut se traduire comme l'écart moyen des éléments de cette série (au carré) à la moyenne de la série.

Considérons une série X de $N = 1000$ valeurs X_i, et $\overline{X}$ la moyenne de cette série : $\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N} X_i$. La variance de X s'écrit alors

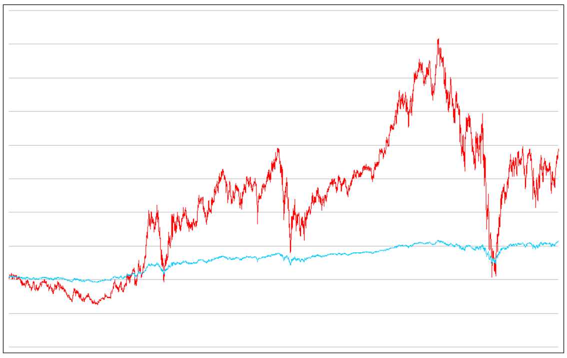
$$V(X) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{i=N}(X_i - \overline{X})^2$$

On en déduit l'écart-type, communément écrit σ :

$$\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2}$$

Interprétation statistique :
une série dont l'écart type est élevé a des valeurs qui s'éloignent fortement de la moyenne
Interprétation financière :
une action dont la volatilité est élevée a des rendements qui s'écartent fortement de la moyenne

Exemple : ci-dessous une action très volatile (en rouge), et une autre peu volatile (en bleu) :



Attention : la volatilité d'une action se calcule sur les rendements, jamais sur les cours bruts

Pourquoi ?
C'est très simple : en calculant la volatilité sur les cours bruts, il devient impossible de comparer le risque d'une action à 200 EUR avec celui d'une action à 20 EUR. Même si les rendements des deux actions sont les mêmes jour après jour, la volatilité de l'action à 200 EUR sera toujours 10 fois supérieure à la volatilité de l'action à 20 EUR, alors que le risque est exactement le même.
En calculant la volatilité sur les rendements, celle-ci devient insensible au niveau du cours action, et les volatilités sont alors comparables entres actions.

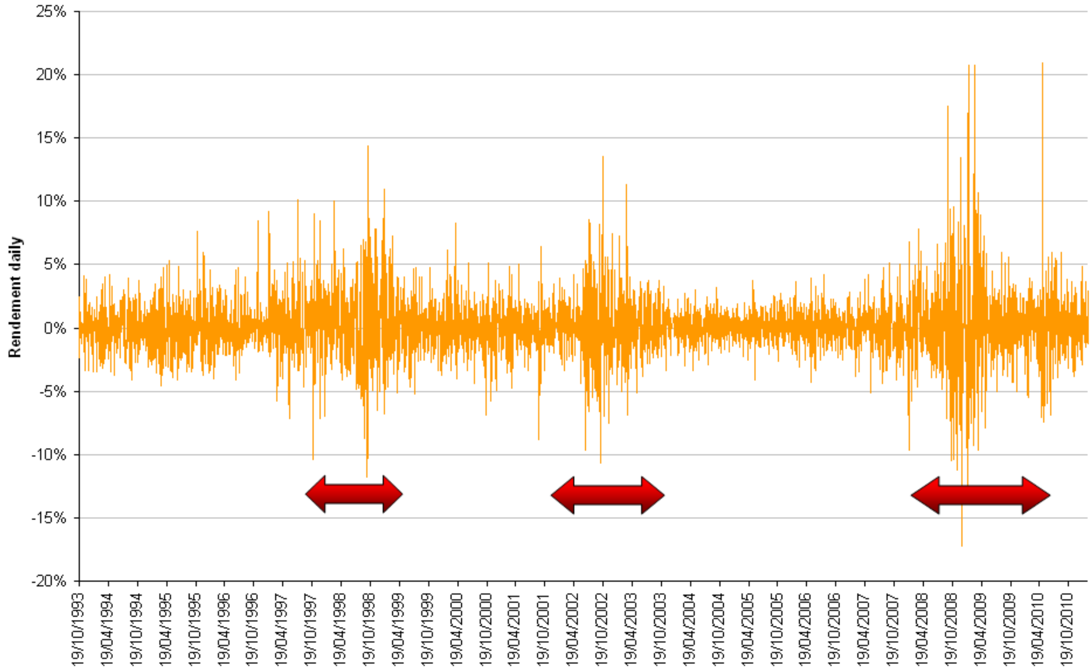
A noter
La volatilité σ se calcule sur toute une série de rendements, contrairement au rendement dont le calcul ne se base que sur deux points. Généralement, le calcul se passe en trois étapes :

1. **calcul des rendements *journaliers* de l'action**, sur une fenêtre de largeur variable (1 année, l'historique entier,...) ;
2. **calcul de la volatilité des rendements sur cette fenêtre** : quelle que soit la période considérée (1 année, l'historique entier,...), cette volatilité σ_D, puisqu'elle a été calculée sur des rendements journaliers, est appelée volatilité journalière (ou quotidienne) [6] ;
3. **annualisation de la volatilité journalière** : $\sigma_Y = \sigma_D * \sqrt{252}$ [7].

6. Sur Excel, utilisez la fonction ECARTYPE
7. Si les rendements avaient été mensuels : $\sigma_Y = \sigma_M * \sqrt{12}$

1.3.2 Application à BNP Paribas

Nous calculons tout d'abord les rendements journaliers du cours BNP Paribas : $r_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$ et voici les résultats :



Ce graphique peut surprendre mais il est tout à fait normal. Comme on peut le voir, les rendements actions sont fortement variables d'un jour sur l'autre. Cela signifie que si l'action a performé de x% un jour, on ne peut absolument rien prévoir de la performance du lendemain. Cela peut paraître une évidence, mais certaines classes d'actifs se comportent différemment : on peut prévoir leur performance du lendemain en connaissant celle d'aujourd'hui.

On distingue très nettement les périodes d'effervescence sur les marchés, pendant lesquelles les rendements s'éloignent anormalement de leur moyenne.

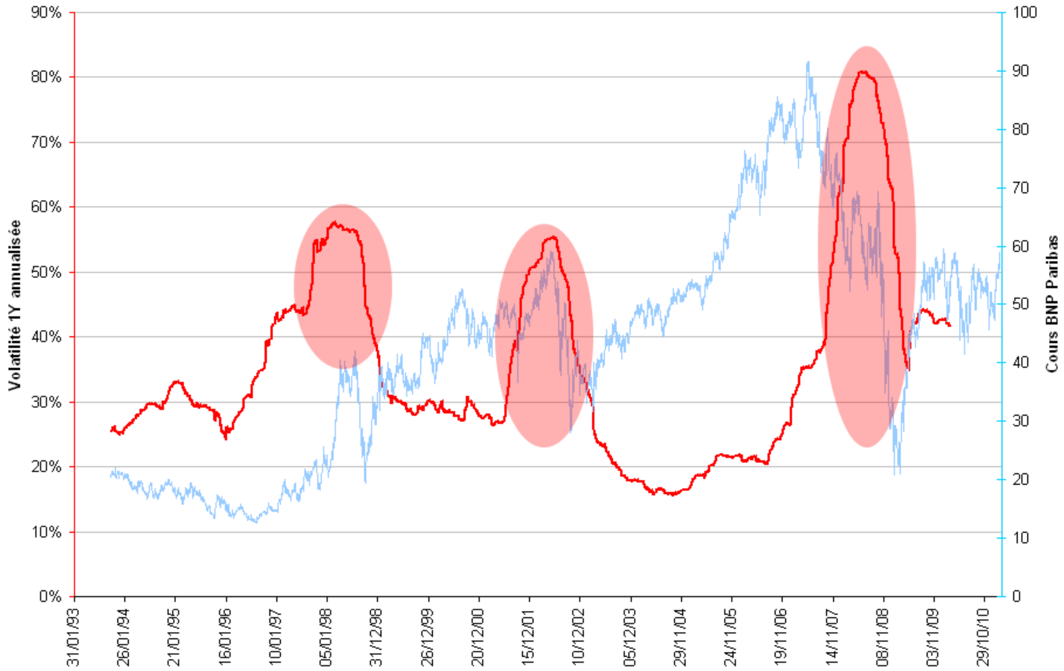
Le calcul de la volatilité annualisée sur l'ensemble de l'historique (1993-2011) donne $\sigma_Y = 38\%$ [8]. Mais si l'on localisait l'étude sur les périodes de crise, quelle serait la volatilité ?

Nous reprenons le processus de calcul des rendements mobiles, pour calculer cette fois-ci des volatilités mobiles annualisées sur une fenêtre de 1Y. Le processus est le suivant :

– calculer la volatilité annualisée des rendements journaliers sur la fenêtre t_0 - $t_0 + 1Y$,
– calculer la volatilité annualisée des rendements journaliers sur la fenêtre $t_0{+}1D$ - $t_0{+}1D{+}1Y$,
– ... et ainsi de suite.

Nous représentons cette volatilité mobile 1Y sur le graphique suivant :

8. Il faut bien garder à l'esprit que les volatilités se donnent toujours en valeur annualisée.



Nous affichons en rouge la volatilité annualisée mobile (échelle de gauche), et en bleu le cours de l'action (échelle de droite). L'analyse de ce graphique montre plusieurs choses :

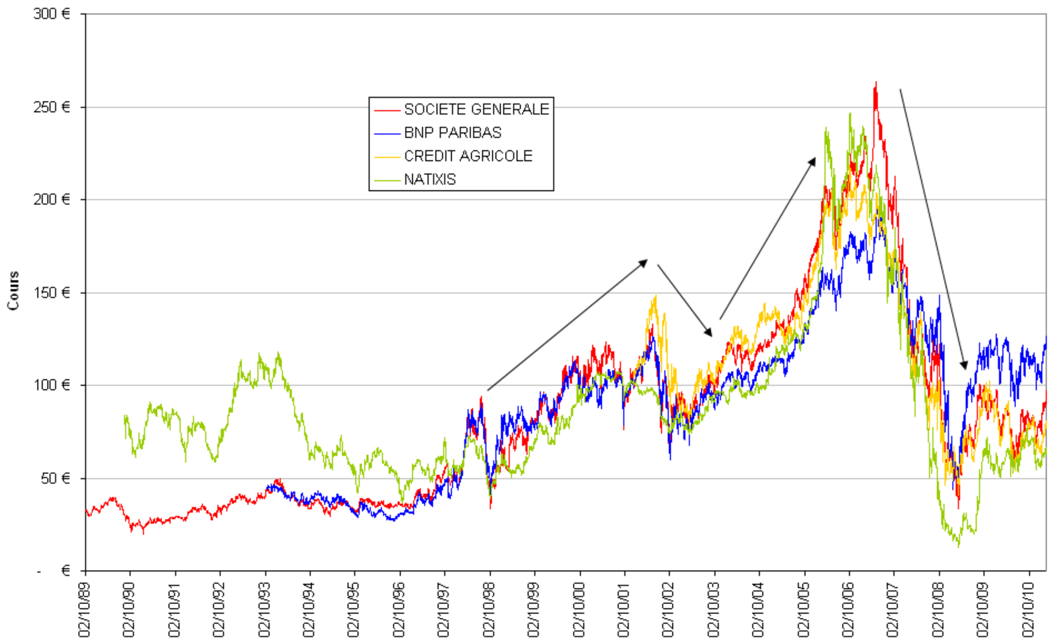
1. la volatilité n'est pas constante dans le temps : elle est faible pendant les périodes calmes et s'intensifie pendant les périodes de stress. Elle est maximale pendant les krachs boursiers.
2. les périodes de forte volatilité sont associées à des fortes chutes des marchés actions ; lorsque les marchés sont tendus, les actions ont tendance à baisser. Certaines classes d'actifs, comme les matières premières, réagissent à l'opposé : les cours augmentent en période de stress.

Dans le cas de BNP Paribas, nous constatons trois périodes de forte volatilité :
– En 1997, BNP Paribas a subi les effets de la crise asiatique. Cette crise a principalement touché les banques.
– En 2001-2002, l'action a subi, mais de façon relativement modérée, le dégonflement de la bulle technologique.
– Enfin, fin 2007, mais surtout fin 2008 avec la faillite de la banque Lehman Brothers (crise bancaire), l'action BNP Paribas a connu une période de volatilité extrême, son cours chutant de près de 70%.

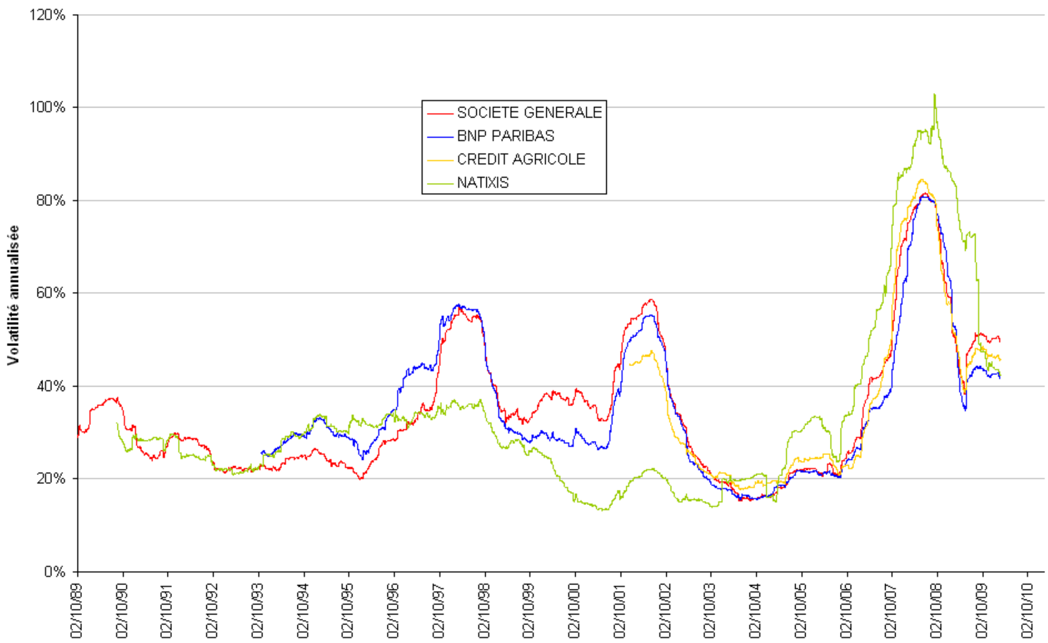
Au contraire, sur la période 2003-2007 pendant laquelle les actions ont bien performé pendant plusieurs années [9], la volatilité était minimale. Rappelez-vous : quand tout va bien, la volatilité est faible.

Pour finir cette partie, nous représentons les cours actions de 4 banques françaises : BNP Paribas, Société Générale, Natixis et Crédit Agricole, rebasés à 100 en décembre 2001.

9. On parle de rallye boursier.



Comme nous pouvons le voir, les 4 cours actions ont connu, peu ou prou, la même évolution, les entreprises appartenant au même secteur. Ainsi les rendements ou les volatilités mobiles sont semblables pour ces 4 titres (cf ci-dessous : graphique des volatilités mobiles). Il est possible de quantifier ce phénomène, avec un indicateur appelé coefficient de corrélation. Nous y reviendrons un peu plus tard.



1.4 Le "profil de rendement" d'une action

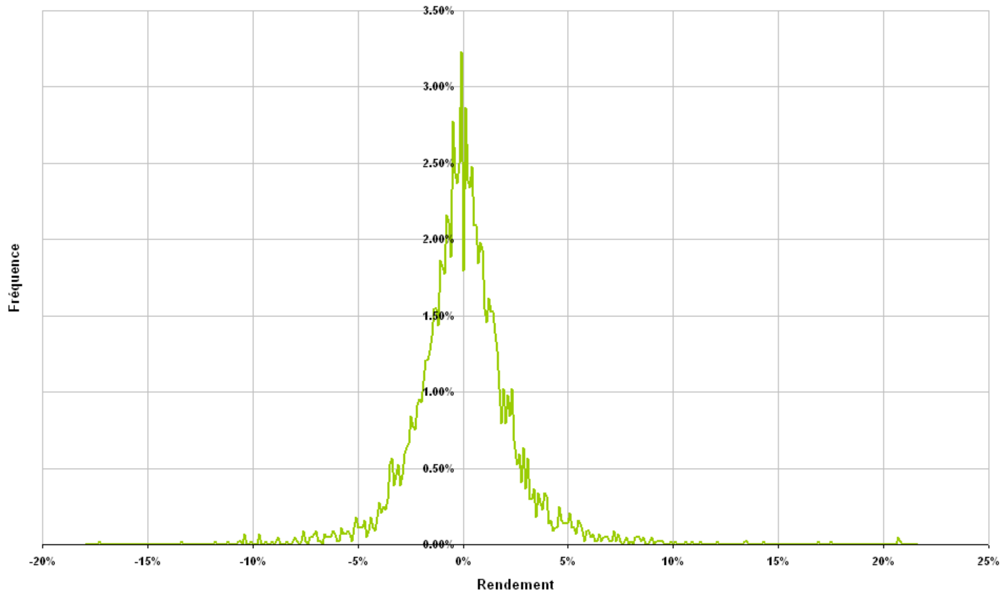
Comment pourrait-on synthétiser, en un seul graphique, les rendements d'une action, qu'ils soient journaliers, mensuels, annuels... ?
Une méthode couramment utilisée en statistique est le calcul de ce que l'on appelle la "densité empirique" des rendements [10]. Mais en français, nous pourrions appeler cela l'histogramme de la fréquence des rendements, ou, de manière plus "commerciale", le profil de rendement d'une action.

L'idée est d'estimer, *sur la base des valeurs observées dans l'historique*, la fréquence d'apparition de chaque rendement. Reprenons les rendements journaliers de BNP Paribas calculés précédemment, il y a, au total, $N = 4397$ rendements : r_1, r_2, ..., r_N.

En calculant la fréquence d'apparition de chaque rendement, nous nous apercevons rapidement d'un problème, à savoir que chaque rendement n'apparaît qu'une fois ou presque (mis à part le rendement 0% qui est plus fréquent). Les résultats ne sont donc pas exploitables.
La solution consiste donc à procéder de la façon suivante :

1. calculer le minimum (m) et le maximum (M) de la série des rendements r_i, par commodité, les arrondir convenablement ;
2. définir des "tranches" de largeur 0.1% [11] : $[m\,;\, m + 0.1\%[$, $[m + 0.1\%\,;\, m + 2 * 0.1\%[$, ... , $[M - 0.1\%\,;\, M]$;
3. calculer le nombre de rendements compris dans chacune des tranches, et en déduire leur fréquence.

Et voici le résultat :



10. En statistique, le terme "empirique" désigne des indicateurs calculés sur la base d'une série réellement observée.
11. Une autre méthode consiste à définir le nombre de tranches T, et à en déduire la largeur des tranches : $\frac{M-m}{T}$

Il existe des méthodes statistiques permettant de lisser la densité empirique. Nous ne les traiterons pas dans ce cours, l'objectif est de comprendre l'idée de base.

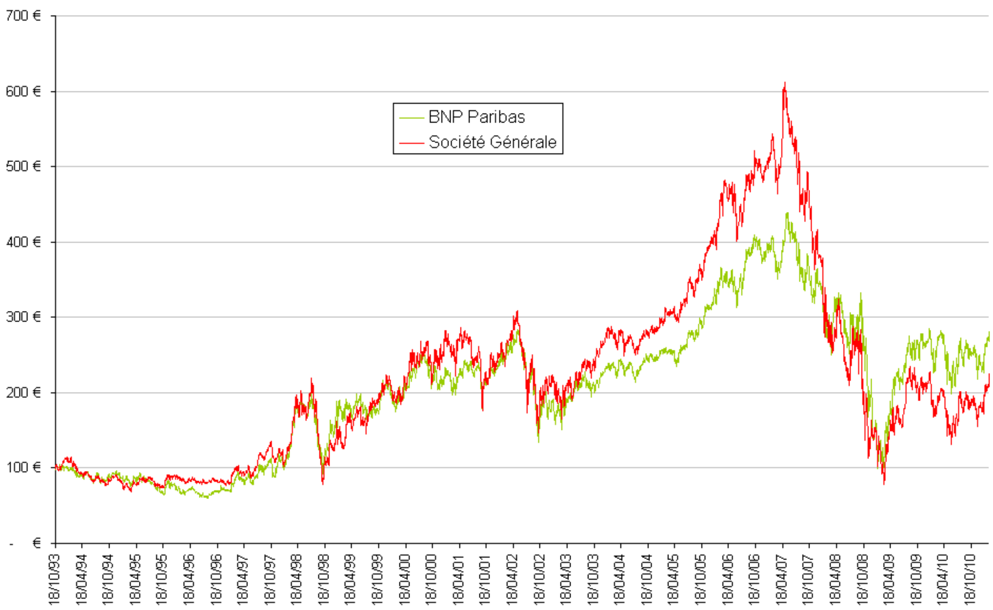
Maintenant, que pouvons-nous dire de ce graphique ? Plusieurs choses.

1. Tout d'abord, la morphologie globale de la densité est "en cloche" : les rendements faibles (positifs ou négatifs) sont très fréquents, tandis que les rendements extrêmes sont de moins en moins fréquents. Cette courbe "en cloche" est très proche de la fameuse loi Normale que vous avez étudiée en Statistiques, connue également sous le nom de loi Gaussienne. C'est une loi capitale en Finance ; c'est elle qui permet d'approximer au mieux le comportement des actions.
2. Ensuite, la courbe semble être symétrique ; en réalité elle ne l'est pas parfaitement, on parle de *skew* (inclinaison en français).
3. Plus la volatilité d'une l'action est élevée, plus sa densité est "large", au contraire les actions peu volatiles présentent une densité très resserrée autour de la moyenne.

Ce type de graphique permet aux analystes d'avoir une vision synthétique du comportement d'une action donnée. Elle sera très utile pour calculer des indicateurs de risque tels que la Value at Risk ("VaR"). Nous l'aborderons lors de notre cours sur la Gestion d'Actifs.

1.5 Les corrélations

Pour comprendre ce que représente la corrélation entre deux titres, un terme très utilisé dans le monde de la Finance, traçons ensemble les cours de BNP Paribas et Société Générale [12].



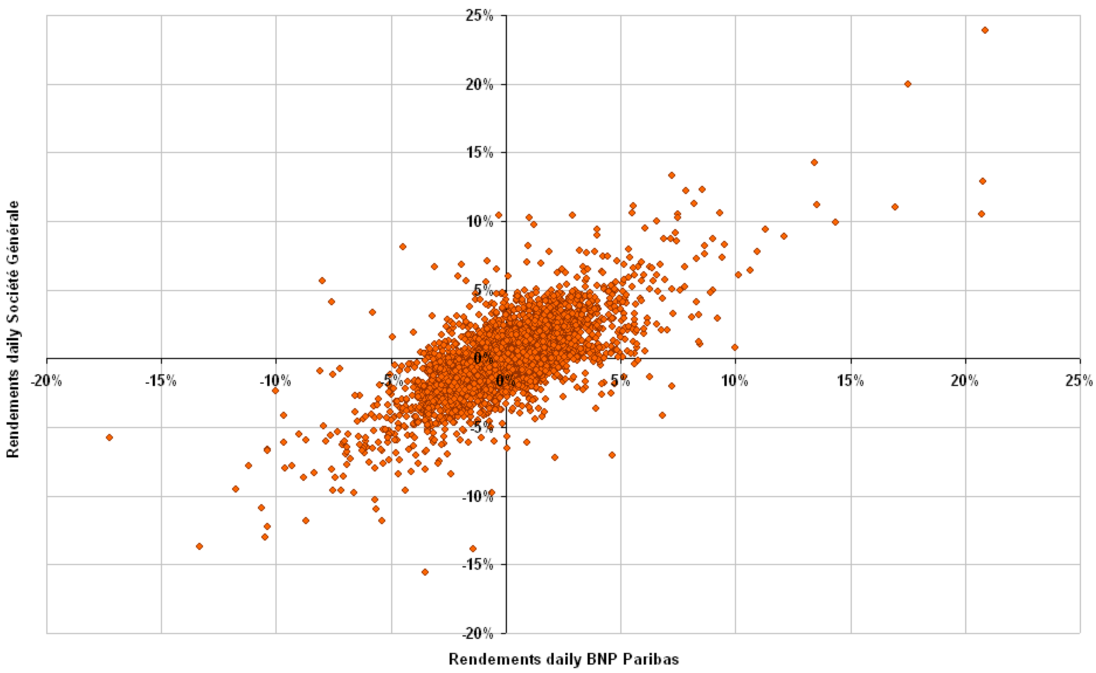
12. Tracés sur l'historique commun aux 2 actions, c'est-à-dire 1993-2011, puis rebasés à 100 à t_0.

Ce qui saute aux yeux est la relative similitude avec laquelle varient les cours des deux sociétés. Ainsi, lorsque l'action BNP Paribas monte, alors l'action Société Générale a de fortes chances de monter également. Et inversement : si BNP Paribas baisse un jour, nous verrons sans doute baisser la Société Générale.

Ce phénomène s'explique principalement par le fait que les deux entreprises appartiennent au même secteur : le secteur bancaire. Ainsi, une news positive concernant BNP Paribas (hausse du chiffre d'affaires, du bénéfice) se répercutera évidemment sur le cours BNP Paribas, mais aussi celui de la Société Générale. L'idée globale étant de dire, de manière simple, que si la banque X va bien, alors tout doit bien aller aussi pour la banque Y. Et inversement bien entendu.

Essayons de trouver un graphique parlant. D'abord nous devons évidemment calculer les rendements journaliers de chacune des deux entreprises. Plutôt que de les afficher avec une abscisse temporelle (ce que nous avons toujours fait jusqu'à présent), nous allons représenter :
– en abscisse, les rendements de BNP Paribas
– et en ordonnée, les rendements de Société Générale.

C'est en effet le meilleur moyen de mettre en valeur les mouvements coordonnés des titres, que nous appelons **corrélation** [13]. Voici le résultat :



Ce que nous observons ci-dessus est le **nuage** des rendements journaliers de BNP Paribas et Société Générale. Analysons-le rapidement.

La première chose que nous pouvons noter est que ce nuage n'est pas diffus, mais concentré

13. En statistiques : coefficient de corrélation de Pearson ; en français : corrélation, tout simplement.

autour de la première bissectrice. Cela veut dire que lorsqu'un jour, BNP Paribas affiche un rendement de +1% (abscisse), alors Société Générale a de fortes chances d'avoir un rendement compris entre -2% et +4%, par lecture sur l'ordonnée.

On peut s'apercevoir également que cette analyse n'est réellement valable que sur les petits rendements, à l'endroit où le nuage est vraiment concentré. Si nous analysons la périphérie du nuage, alors les conclusions sont beaucoup moins précises. Par exemple, les jours où la Société Générale a performé de +10% (ordonnée), BNP Paribas a elle affiché une performance comprise entre 0 et +20% !
Il est tout à fait normal que la périphérie du nuage soit plus diffuse car celle-ci correspond à une zone de turbulence (à forte volatilité), pendant laquelle les cours des deux banques ne se suivent plus.

Un peu de technique maintenant : si X et Y sont des séries de rendement (nécessairement de même longueur N), alors la corrélation entre X et Y, usuellement dénotée ρ, s'écrit comme suit :

$$\rho_{XY} = \frac{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X}) \cdot (Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{N}(X_i - \bar{X})^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{N}(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

Sur Excel, vous pouvez utiliser la fonction COEFFICIENT.CORRELATION.

Il faut bien garder en tête que ce coefficient de corrélation est toujours compris entre -1 et 1 (inclus) :

- si ρ est proche de 1, on dit que X et Y sont fortement corrélés, c'est-à-dire qu'ils bougent ensemble dans le même sens : $Y \approx \alpha X + Z$ avec $\alpha > 0$;
- si ρ est proche de -1, on dit que X et Y sont fortement anti-corrélés, c'est-à-dire qu'ils bougent ensemble, mais dans des sens contraires : $Y \approx \alpha X + Z$ avec $\alpha < 0$;
- enfin, si ρ est proche de 0, on dit que X et Y ne sont pas corrélés, et qu'on ne pourra rien dire de Y en connaissant X (nuage extrêmement diffus).

La corrélation empirique, c'est-à-dire historique, de BNP Paribas avec la Société Générale, s'élève à 74%. Comme l'on pouvait s'y attendre, elle est très proche 100%.

Chapitre 2

Les options sur actions

Maintenant que vous avez une vue plus précise des actions et de leurs caractéristiques les plus importantes (rendement et volatilité), nous pouvons aborder l'univers des **dérivés actions**. Comme son nom l'indique, les produits dérivés sur action sont des instruments financiers dont le "fonctionnement" est intimement lié à la variation d'une action. Nous allons voir comment.

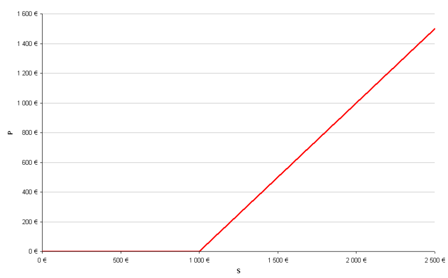
2.1 Présentation générale

Avant de vous présenter les options sur actions les plus simples [1], voici un petit exemple simple qui vous permettra de mieux comprendre leur mécanisme.

Imaginez que vous ayez souscrit une assurance automobile. Votre contrat prévoit que pour tout incident, vous paierez une franchise de $K = 1000$ EUR, contre prise en charge des réparations. En cas d'accident, que va-t-il se passer ? Quelle est la somme d'argent P que vous allez, en quelque sorte, recevoir de votre assurance ? Plusieurs cas se présentent :

- Si le montant des réparations S est inférieur à la franchise, alors vous n'allez pas solliciter votre assurance, car vous auriez à payer la franchise de 1000 EUR pour un sinistre de montant inférieur. Dans ce cas $P = 0$.
- Si le montant des réparations S dépasse 1000 EUR, alors vous allez solliciter votre assurance pour couvrir les frais, et payer la franchise. Alors, d'un certain point de vue, vous recevrez $P = S - 1000$ EUR de la part de votre assurance.

Alors nous pouvons représenter le montant de la subvention de votre assurance en fonction du montant des réparations.



1. On parle d'options "vanilles" ; les options plus complexes étant appelées "exotiques".

Quelle est la formule derrière cette courbe rouge ?
Si $S < K$, alors $P = 0$, sinon $P = S - K$.
Nous pouvons simplifier la formule de la façon suivante : $P = max(0, S - K)$
En Finance, nous utilisons la notion $X^+ = max(0, X)$: $P = (S - K)^+$

Ce petit exemple est une bonne introduction aux options d'achat sur action, appelés plus communément les calls.

2.2 L'option d'achat : le call

Un call (option d'achat en français) est un instrument financier basé sur une action, ou un indice action [2]. Cette option donne le droit, mais pas l'obligation, d'acheter cette action S, à une date future prédéterminée T [3], et à un prix prédéfini K.

On appelle :

- l'action S le **sous-jacent** du call, on écrit S_t le prix de l'action en date t ;
- la date T la **maturité** du call, celle-ci est habituellement déterminée en nombre d'années ;
- le prix K le **strike** du call, ou **prix d'exercice**.

Prenons un exemple pour mieux comprendre.

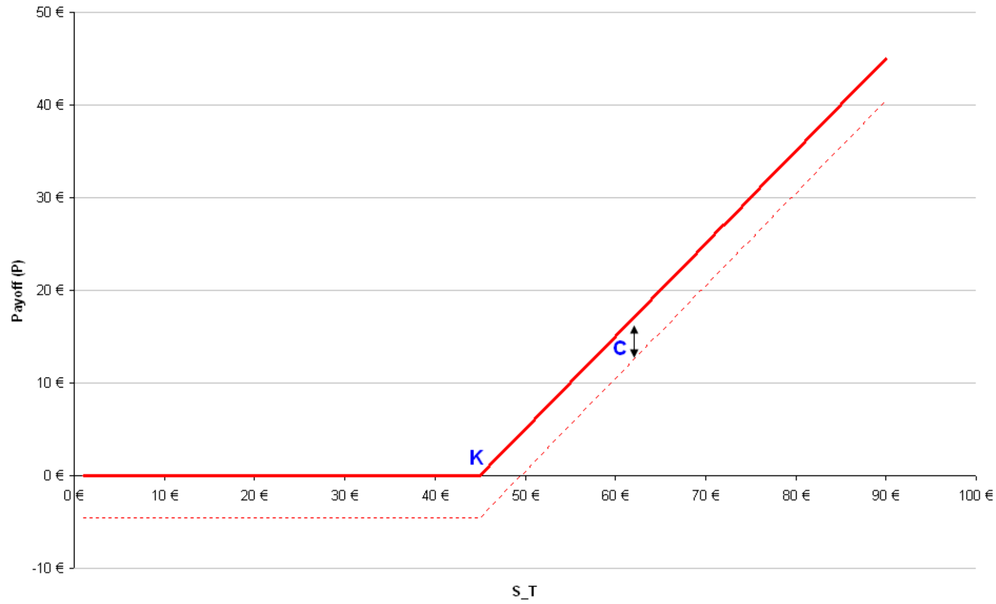
Nous sommes le 01/02/2011. L'action Total cote à $S_0 = 44$ EUR. Nous achetons sur le marché, un call sur l'action Total, de maturité $1Y$ (soit le 01/02/2012), avec un strike de $K = 45$ EUR.

A la "maturité" du call, c'est-à-dire le 01/02/2012, que va-t-il se passer ?
Comme pour l'exemple de l'assurance, deux cas possibles.

- Le cours de l'action n'atteint pas le niveau du strike ($S_T < K$). Alors évidemment vous n'avez aucun intérêt à exercer votre droit d'acheter l'action Total à $K = 45$ EUR : vous l'achèteriez plus cher que sur le marché ! On dit que **vous n'exercez pas votre call**.
- Le cours de l'action dépasse le niveau du strike ($S_T > K$). Dans ce cas précis vous allez effectivement **exercer** votre droit d'acheter l'action Total à $K = 45$ EUR. En achetant donc l'action (à $K = 45$ EUR), puis en la revendant immédiatement sur le marché (au cours S_T), vous obtiendrez un gain net, dit **payoff**, de $S_T - K$ EUR.

Voici le tracé du payoff de l'acheteur du call ($P = (S_T - K)^+$), en fonction du cours de l'action Total à la date d'exercice (S_T).

2. Le CAC40 par exemple, ou le Dow Jones, l'Eurostoxx 50,...
3. Nous parlons d'option **européenne** lorsque l'exercice n'est possible qu'à la date T, d'option **américaine** lorsque l'exercice est possible à tout moment entre aujourd'hui et T, et enfin, d'option **bermudienne** lorsque l'exercice est possible à certaines dates prédéterminées. Dans ce cours, sauf indication contraire, nous considérons des options européennes.



Cette courbe de payoff est brute de la prime du call.
En effet, le call, comme tout instrument financier, a un prix [4], que nous noterons C (pour call). L'acheteur du call va donc payer C au vendeur du call. Le tracé du payoff doit donc être translaté de C EUR vers le bas pour en tenir compte (courbe rouge en pointillés). Dans notre exemple, nous estimons $C = 4.5$ EUR.

Pourquoi acheter un call ?
L'acheteur de call a l'intime conviction que le cours du sous-jacent va augmenter d'ici la maturité de l'option. S'il achetait l'action "nue", il aurait évidemment 100% du rendement de l'action. Par contre, en achetant un call sur cette action, *et dans le cas où l'action dépasse effectivement le strike* (condition d'exercice), alors l'investisseur va bénéficier d'un rendement démultiplié. On appelle cela **l'effet de levier**.

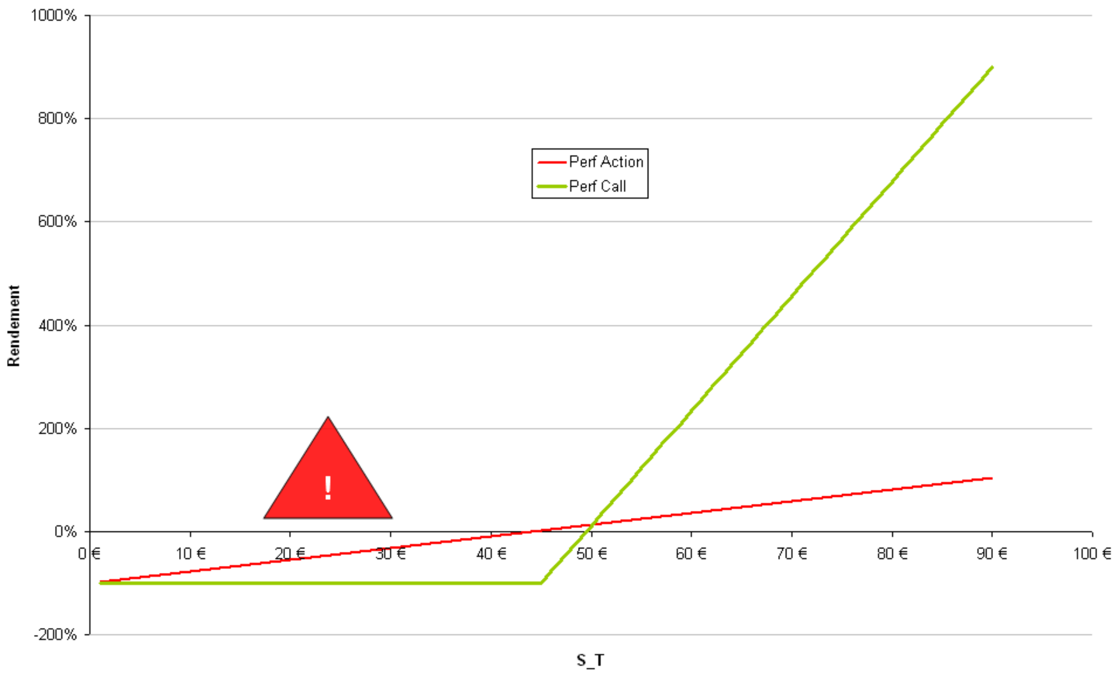
Reprenons notre exemple sur l'action Total, et imaginons qu'à la maturité de l'option, l'action cote à $S_T = 55$ EUR :

1. En 1 an, l'action est passée de $S_0 = 44$ EUR à $S_T = 55$ EUR, soit un rendement de 25%.
2. Mais la personne détentrice du call sur Total, va obtenir un payoff $P = S_T - K = 10$ EUR, pour un investissement initial de $C = 4.5$ EUR, soit un rendement de 122%.
3. Attention : si l'acheteur n'exerce pas son call ($S_T < K$), alors $P = 0$ et l'acheteur aura perdu 100% de son investissement (le montant de la prime). Il n'y a pas de miracle !

Si les actions sont des titres risqués, les dérivés actions, avec leur effet de levier, démultiplient le risque... mais offrent aussi des **perspectives de rendement considérables** en cas de pari gagnant.

4. Prime en français, premium en anglais.

Avec un investissement de $C = 4.5$ EUR, voici le tracé du rendement du call ($r_C = P/C - 1$) et du rendement de l'action Total pendant l'année ($r_S = S_T/S_0 - 1$), en fonction de S_T (le cours de l'action le 01/02/2012).



Comme vous pouvez le constater, acheter un call est un investissement extrêmement risqué, destiné aux personnes convaincues de la hausse du sous-jacent. Mais comment parier sur la baisse d'une action ?

2.3 L'option de vente : le put

L'option de vente, ou put en anglais, est l'exact opposé du call. Cette option donne le droit, mais pas l'obligation, de vendre une action S, à une date future prédéterminée T, et à un prix prédéfini K.

Les investisseurs souhaitant parier sur la baisse d'un titre (une action, ou un indice), peuvent donc acheter un put adéquat pour profiter de l'effet de levier. Reprenons l'exemple de l'action Total.

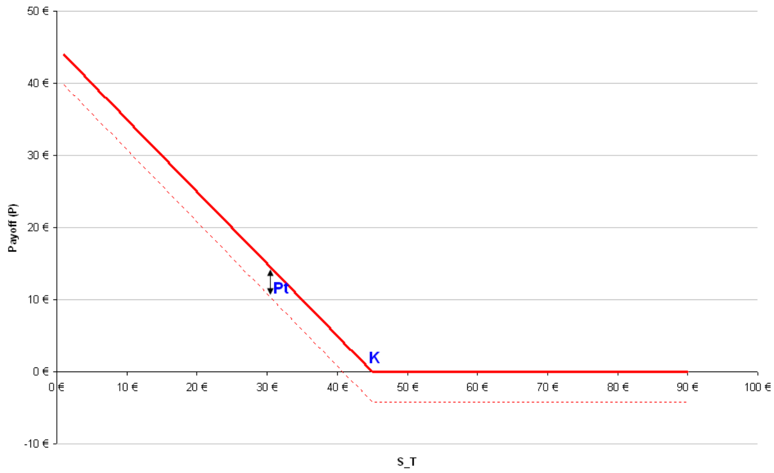
Nous sommes le 01/02/2011. L'action Total cote à $S_0 = 44$ EUR. Nous achetons sur le marché, un put sur l'action Total, de maturité $1Y$ (soit le 01/02/2012), avec un strike de $K = 45$ EUR.

A la "maturité" du put, c'est-à-dire le 01/02/2012, que va-t-il se passer ?

– Le cours de l'action dépasse le niveau du strike ($S_T > K$). Vous n'avez aucun intérêt à exercer votre droit de vendre l'action Total à $K = 45$ EUR : vous la vendriez moins cher que sur le marché. Vous n'exercez donc pas votre put.

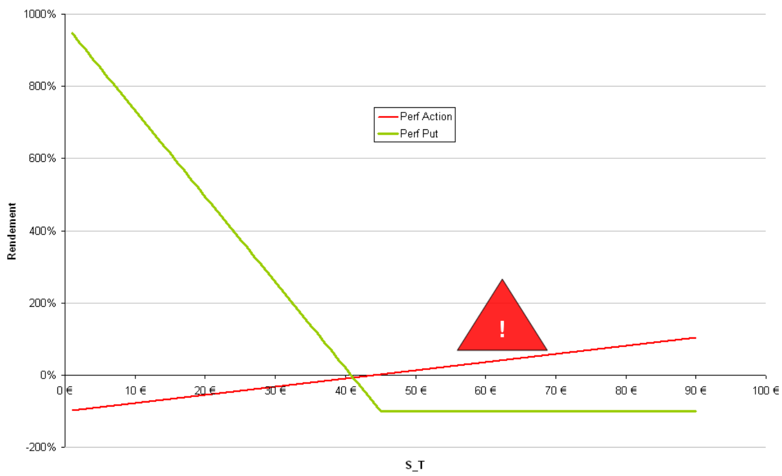
– L'action baisse suffisamment et passe sous le strike ($S_T < K$). Dans ce cas précis vous allez effectivement **exercer** votre droit de vendre l'action Total à $K = 45$ EUR. En achetant l'action sur le marché (au cours S_T), puis en la revendant immédiatement via votre put (au prix d'exercice K), vous obtiendrez un gain net, dit **payoff**, de $K - S_T$ EUR.

Voici le tracé du payoff de l'acheteur du put $P = (K - S_T)^+$, en fonction du cours de l'action Total à la date d'exercice (S_T).



En trait plein : le gain brut de la prime du put ; en pointillés : le gain net de la prime du put ($Pt = 4.20$ EUR).

Le put, à l'opposé du call, est d'autant plus profitable que le prix de l'action est faible à la date d'exercice T. Avec un investissement de $Pt = 4.2$ EUR, voici le tracé du rendement du put ($r_P = P/Pt - 1$) et du rendement de l'action Total pendant l'année ($r_S = S_T/S_0 - 1$), en fonction de S_T (le cours de l'action le 01/02/2012).

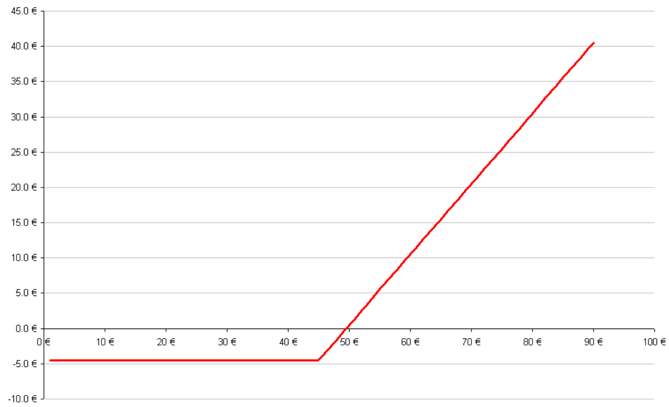


2.4 Call, Put : position acheteur ou vendeur

Lorsqu'un agent souhaite investir dans un call (ou un put), il l'achète au vendeur du call (ou du put), moyennant le paiement de la prime. Il y a donc 4 possibilités, donnant 4 profils de payoffs, à connaître sur le bout des doigts : acheteur de call, vendeur de call, acheteur de put, vendeur de put.

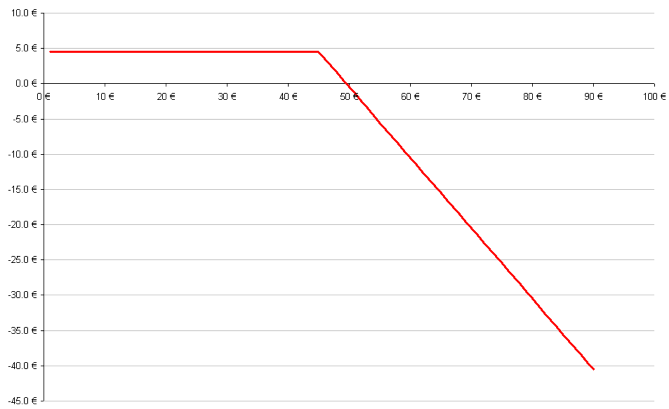
2.4.1 Acheteur de call

A $t = 0$: l'acheteur de call va payer la prime C. A $t = T$, il va recevoir $P = (S_T - K)^+$ de la part du vendeur.
Au pire, il perd son investissement, son gain est maximum si l'action monte fortement.



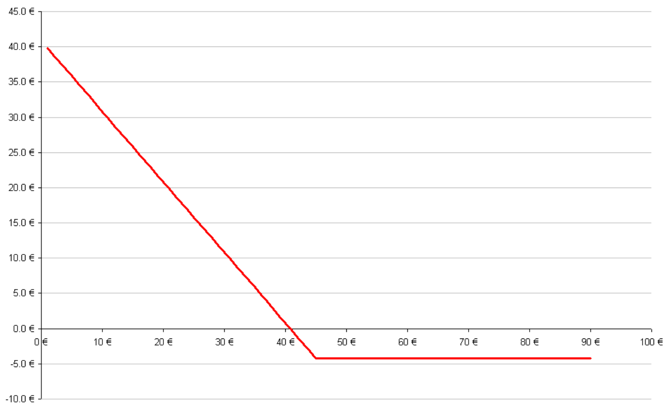
2.4.2 Vendeur de call

A $t = 0$: le vendeur de call va recevoir la prime C. A $t = T$, il va payer à l'acheteur de son call $P = (S_T - K)^+$.
Son gain maximum est le montant de la prime, au pire, il peut devoir un montant conséquent à l'acheteur si l'action monte fortement.



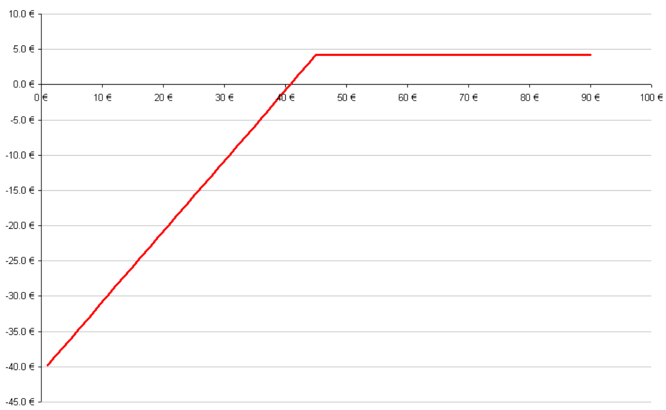
2.4.3 Acheteur de put

A $t = 0$: l'acheteur de put va payer la prime Pt. A $t = T$, il va recevoir $P = (K - S_T)^+$ de la part du vendeur.
Au pire, il perd son investissement, son gain est maximum si le cours chute fortement.



2.4.4 Vendeur de put

A $t = 0$: le vendeur de put va recevoir la prime Pt. A $t = T$, il va payer à l'acheteur de son put $P = (K - S_T)^+$.
Son gain maximum est le montant de la prime, au pire, il peut devoir un montant conséquent à l'acheteur si l'action chute fortement.



2.5 Moneyness

Vous avez à présent une vue générale du fonctionnement des options vanilles. Vous avez en tête que ces instruments financiers donnent un droit d'acheter (call) ou de vendre (put), un titre donné (sous-jacent), à une date donnée (maturité), et à un niveau prédéterminé (strike ou prix d'exercice).

Lorsque vous achetez un call sur le marché, vous avez le choix. Evidemment vous avez le choix du sous-jacent (Total, BNP Paribas, l'indice CAC 40,...), le choix de la maturité de votre option (dans 6 mois, 1 an,...), mais aussi (et surtout), vous avez le choix sur le *niveau de strike* de votre option. Et ce point est absolument essentiel.

Imaginons que l'action BNP Paribas soit à 50 EUR le 1/1/2011, et que vous anticipiez une hausse du cours sur l'année. Fort de votre anticipation, vous allez acheter un call sur BNP Paribas, afin de profiter de l'effet de levier décrit précédemment. Sur le marché vous trouvez 3 calls sur BNP Paribas de maturité 1Y :

1. un premier call, que nous appellerons I, de strike 40 EUR ;
2. un deuxième call, que nous appellerons A, de strike 50 EUR ;
3. et enfin un troisième call, que nous appellerons O, de strike 60 EUR.

Vous comprenez bien que, *quoi qu'il arrive dans 1 an*, le payoff de l'option I sera plus fort que celui de l'option A, lui-même plus fort que l'option O.

Ces trois strikes font apparaître la notion de "moneyness" d'un call. La moneyness d'une option, à une date t de la vie de l'option (M_t) caractérise la position du spot (S_t) par rapport au strike de l'option (K), elle se calcule comme :

$$M_t = \frac{S_t}{K}$$

La moneyness d'une option permet donc de savoir si votre option est **susceptible** de vous rapporter de l'argent le jour de son expiration. Reprenons notre call :

1. le premier call (I) a une moneyness *initiale* de $M_0 = 50/40 = 1.25 > 1$;
2. le deuxième call (A) a une moneyness *initiale* de $M_0 = 50/50 = 1$;
3. le troisième call (O) a une moneyness *initiale* de $M_0 = 50/60 = 0.83 < 1$.

On dit que :

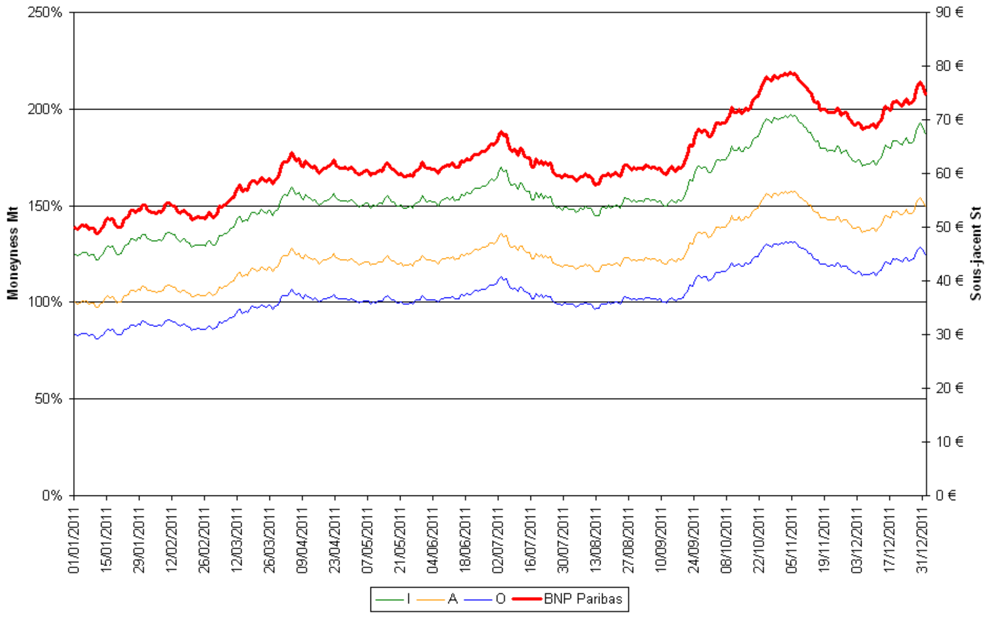
1. le premier call (I) est *initialement* "in the money" ou **ITM** ("dans la monnaie") ;
2. le deuxième call (A) est *initialement* "at the money" ou **ATM** ("à la monnaie") ;
3. le troisième call (O) est *initialement* "out of the money" ou **OTM** ("en dehors de la monnaie").

Ainsi, si vous pouviez exercer votre call maintenant, seul le call I vous donnerait un payoff positif. Bien sûr vous ne pouvez pas exercer aujourd'hui, mais c'est déjà "bon signe". C'est cela que mesure la moneyness. Evidemment, **la moneyness d'une option bouge dans le temps**. Un call acheté en dehors de la monnaie ($M_0 < 1$), peut très bien évoluer à ou dans la monnaie ($M_t = 1$ ou $M_t > 1$) au cours du temps, et inversement !

Pour vous le montrer, nous allons analyser 3 évolutions possibles du cours de BNP Paribas du 1/1/2011 au 1/1/2012 (maturité du call) :

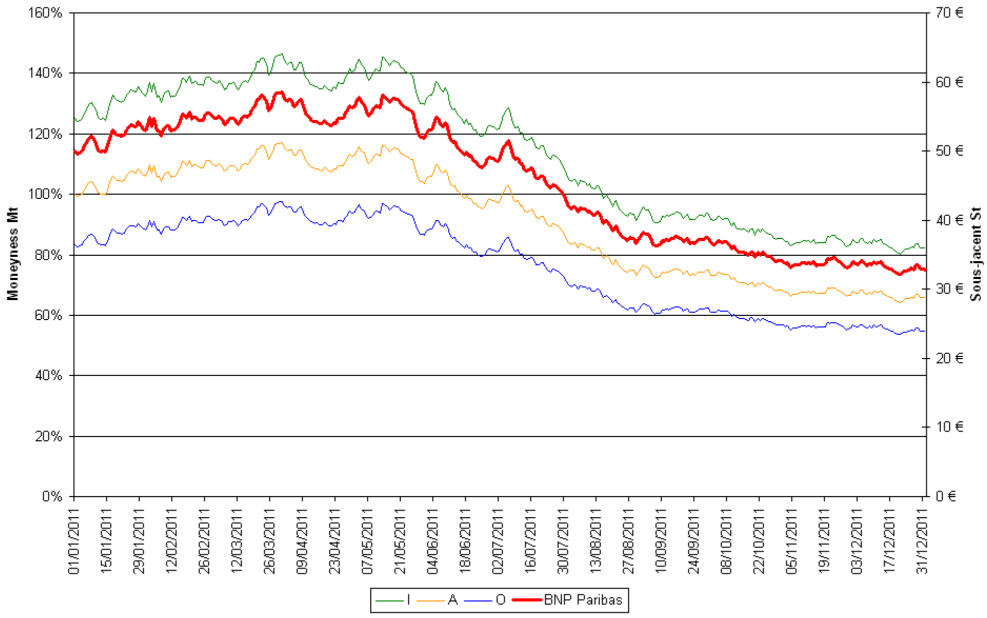
1e cas : forte hausse du cours

En rouge est affichée l'évolution de BNP Paribas (échelle de droite), en vert l'évolution de la moneyness M_t (en %) du call I, en orange, celle du call A, et en bleu, celle du call O.



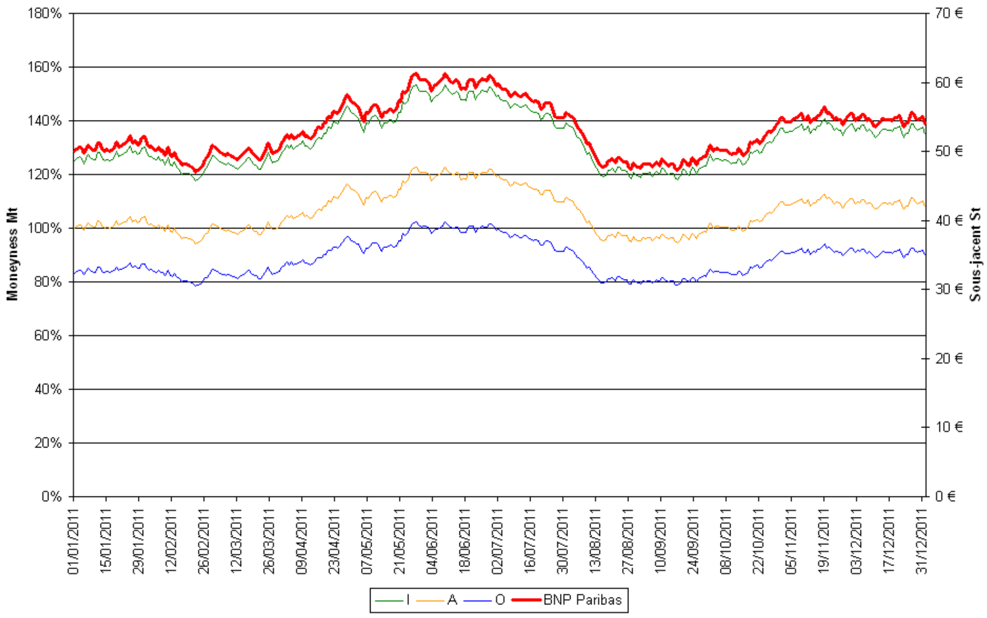
Dans ce cas de figure, le call O, initialement OTM, passe ITM en avril 2011, repasse OTM en septembre, pour finalement arriver ITM à l'échéance. Ce call, que vous avez payé très peu cher à t_0, vous aura finalement rapporté un payoff. Les calls I et A sont eux ITM quasiment 100% du temps.

2e cas : forte baisse du cours



Cette fois-ci, le call O ne passe jamais en terrain ITM, alors que le call A passe rapidement en OTM en juillet. Même le call le plus "safe", I, finit en dehors de la monnaie en août ! Ce call, que vous avez payé cher à t_0 (puisqu'à l'époque il était ITM), ne vaudra plus rien à l'échéance. Pas de chance.

3e cas : stagnation du cours



Dans ce dernier cas, le call I reste en permanence ITM, le call A zigzague dans et hors de la monnaie pour finir ITM. Quant au call O, il reste quasiment OTM sur tout le trajet.

Gardez bien en tête que les options ITM sont les plus chères car vous avez de fortes chances de finir ITM, et que les options OTM sont peu chères pour la raison inverse.

A l'extrême, on parle d'option "Deep In The Money" (**DITM**), ou "Deep Out of The Money" (**DOTM**). Les options DITM sont très chères, quant aux options DOTM, elles ne valent pas grand chose à l'achat, mais si par chance elles finissent ITM l'acheteur va bénéficier d'un effet de levier décuplé.

Attention.
Les calls sont dans la monnaie lorsque $M_t > 1$, mais c'est tout l'inverse pour les puts évidemment :

Moneyness	OTM	ATM	ITM
Call	$M_t < 1$	$M_t = 1$	$M_t > 1$
Put	$M_t > 1$	$M_t = 1$	$M_t < 1$
Prix	\$	\$ \$	\$ \$ \$

Les options les plus liquides, c'est-à-dire celles qui s'échangent le plus massivement (et donc le plus facilement), sont les options ATM.

2.6 Valeur intrinsèque et valeur temps

Dans cette section, nous allons "décomposer" le prix d'une option. Pendant la durée de vie de l'option, on peut splitter le prix de toute option [5] en deux parties distinctes :
- la valeur intrinsèque,
- la valeur temps (ou "extrinsèque").

La **valeur intrinsèque** d'une option, à une date t, est le **payoff de l'option si vous exerciez à cette date** t. C'est une valorisation "spot" de l'option (vue de t).

Imaginons par exemple, un call ATM sur le CAC40, de maturité 1Y, de strike 4000. Avec une volatilité du sous-jacent estimée à 20%, le prix de ce call est de 397 EUR.
A la date d'achat, t_0, la valeur intrinsèque de votre option s'élève à $(S_0 - K)^+ = 0$.
Plaçons nous 6 mois après l'émission du call, et imaginons qu'entre temps le CAC 40 est passé de 4000 points à 4500 points ; à cette date précise, la valeur intrinsèque de votre option sera de $(S_t - K)^+ = 4500 - 4000 = 500$ EUR. Et ainsi de suite.
Mais, le prix de votre option ne sera pas exactement égal à sa valeur intrinsèque.
Comprenez pourquoi : imaginons que notre call passe OTM, alors sa valeur intrinsèque sera *à cette date précise* nulle. Pourtant, si vous souhaitez revendre votre call sur le marché, vous n'allez pas le vendre 0 EUR. Votre call vaut toujours quelque chose ! Il vaut toujours quelque chose **car il se peut très bien qu'il repasse ITM avant l'échéance**.

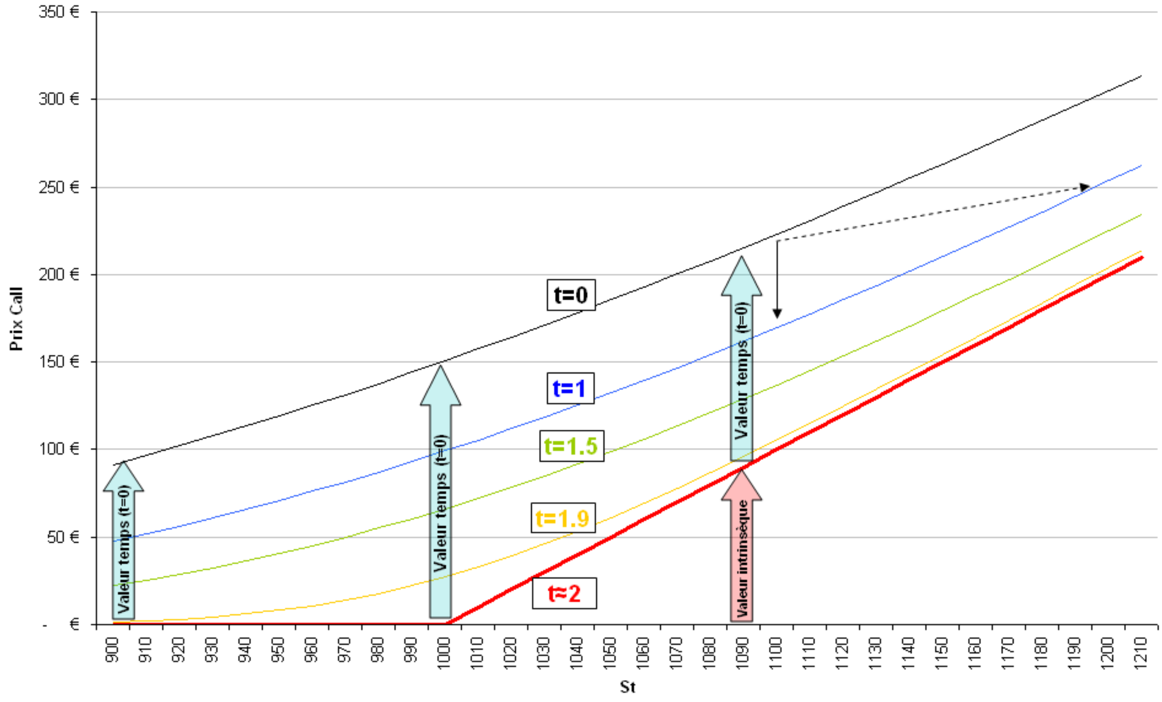
Cette "valeur résiduelle", que nous appelons **valeur temps**, correspond à la *valeur spéculative* de votre option. Elle représente, en quelque sorte, le potentiel de votre option à "**faire (encore) mieux**" d'ici l'échéance [6]. C'est-à-dire passer ITM pour une option OTM, et passer DITM pour une option ITM ; en un mot : passer un peu plus dans la monnaie d'ici la maturité. Et donc, plus la maturité est grande, plus les chances sont grandes, et plus la valeur temps est élevée.

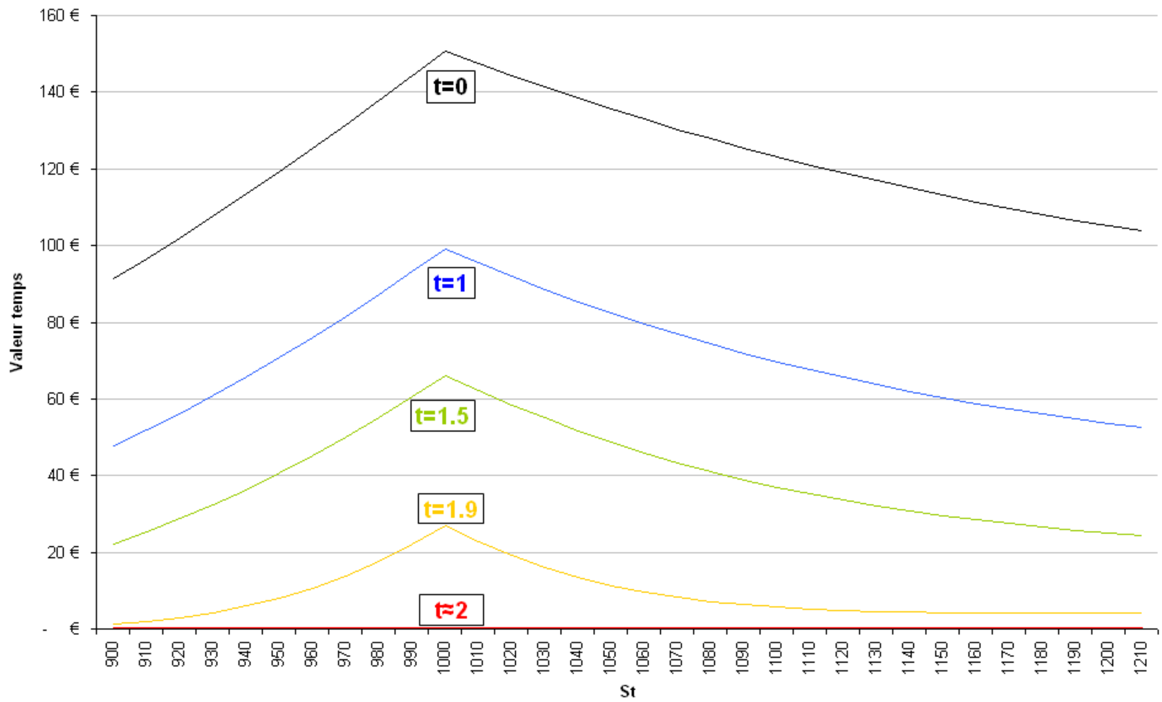
Elle se calcule tout simplement, à une date t, comme le prix de votre option en t, diminué de sa valeur intrinsèque en t. Logique !

Pour résumer, le prix d'une option à une date t de son existence se calcule comme la somme :
- de sa valeur intrinsèque, au vu du niveau du sous-jacent **aujourd'hui** (t)
- et de sa valeur temps, déterminée comme le potentiel du sous-jacent à aller (encore plus) dans la bonne direction **d'ici à la maturité** ($t + 1 \mapsto T$).

Exemple : Considérons un call, et un put, tous deux de maturité 2Y, de strike 1000, sur un sous-jacent X, de volatilité 20%. Le taux sans risque est évalué à 4%.
Nous allons tenter d'exhiber l'évolution du prix de ces deux produits, et décomposer ce prix en "valeur temps + valeur intrinsèque".
En utilisant un pricer d'options de manière itérative (type Black & Scholes [7]), nous pouvons calculer le prix de nos deux options, **dans le temps** (c'est-à-dire en faisant varier T de 2Y à 0.0001Y), et **pour différents niveaux de spots** S_t (nous faisons varier le S_t de 900 à 1210, par pas de 10 [8]). Et voici ce que l'on obtient.

5. On parle bien ici du prix de l'option, c'est-à-dire la prime payée par l'acheteur de l'option, au vendeur. A ne pas confondre avec le *payoff* de l'option.
6. C'est-à-dire, l'espoir que le sous-jacent augmente dans le cas d'un call, et baisse dans le cas d'un put (**c'est donc une vision purement optimiste des choses selon l'option détenue !**)
7. Vous serez sans doute initié aux techniques de pricing dans un autre cours.
8. On imagine qu'à $t > 0$, le spot -le "nouveau" S_0- est passé à 900, 910,..., 1210.


Prix Call
350 €
300 €
250 €
200 €
150 €
100 €
50 €
- €
St
t=0
t=1
t=1.5
t=1.9
t≈2
Valeur temps (t=0)
Valeur temps (t=0)
Valeur temps (t=0)
Valeur intrinsèque


Valeur temps
160 €
140 €
120 €
100 €
80 €
60 €
40 €
20 €
- €
St
t=0
t=1
t=1.5
t=1.9
t≈2

Intéressons-nous d'abord au premier graphique.

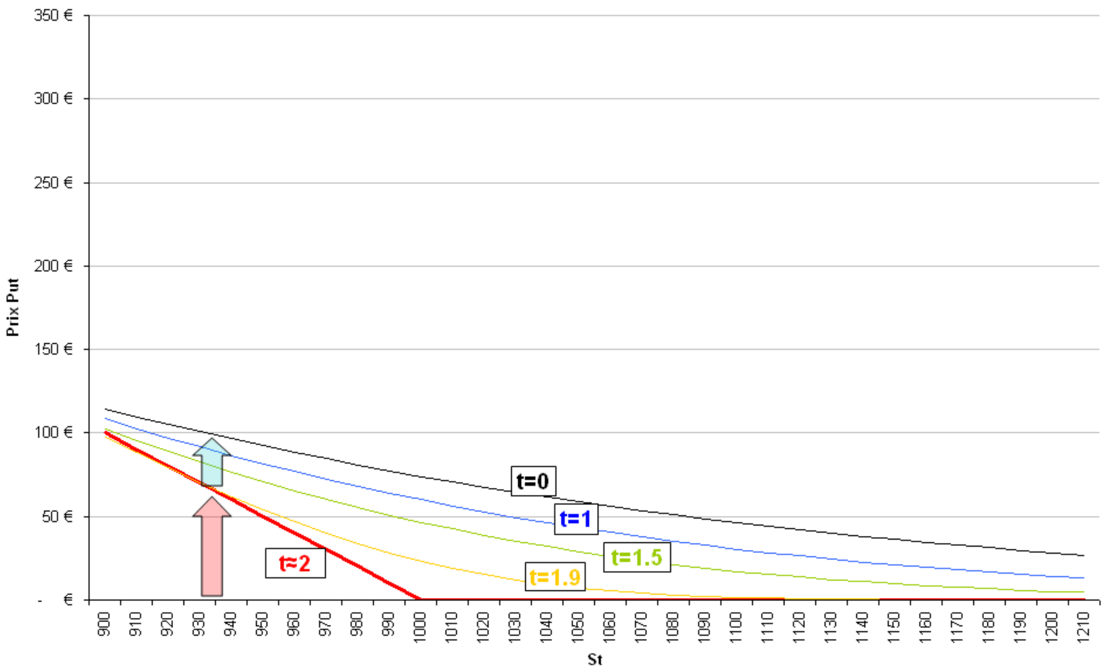
Ce graphique représente le prix du call (ordonnée) en fonction de S_t (abscisse) et ce à plusieurs dates de la vie de l'option.
La courbe noire représente la courbe des prix à t_0 (émission du call), c'est-à-dire lorsque $T = 2$, en bleu, celle à $t = 1$ ($T = 1$), en vert, celle à $t = 1.5$ ($T = 0.5$), en orange, celle à $t = 1.9$ ($T = 0.1$). Enfin, la courbe rouge représente la courbe des prix du call en fonction de S_t, à $t = 1.99999$ ($T = 0.00001$). C'est-à-dire juste avant l'échéance de votre option.

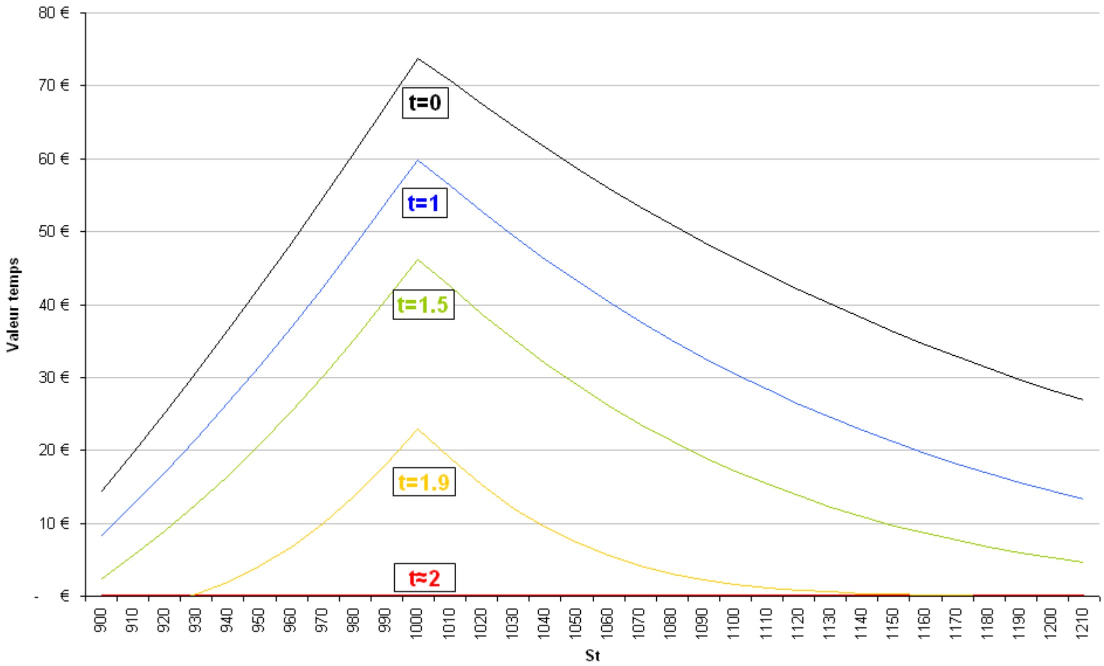
Analysons ce graphique.
A t_0, lorsque vous achetez votre call, plus votre spot (S_0) est élevé, plus votre prix sera élevé. Mais cela, vous le saviez déjà (si tout va bien). Si $S_0 = 1200$ par exemple, vous allez payer votre call dans les 300 EUR. Ce type de call est in the money (ITM), puisque $K < S_0$, il est donc cher ! A l'inverse, si $S_0 = 900$, votre call OTM vaudra dans les 100 EUR, alors que sa valeur intrinsèque est nulle. A t_0 son prix est alors 100% composé de valeur temps.
Avançons dans le temps, à $t = 1$. A cette date, le call a une durée de vie résiduelle de $T = 1$. Première chose que l'on remarque : si entre temps le sous-jacent n'a pas bougé, alors le prix aura baissé ! Par exemple, si à t_0 et à $t = 1$, le sous-jacent est toujours à 1100, et bien le prix du call sera plus faible à $t = 1$ (cf flèche noire). C'est parfaitement normal : une année s'est écoulée, et votre sous-jacent n'a pas bougé ! Sa "marge de progression" est nettement réduite par rapport à la situation à t_0 : *la valeur temps de ce call a diminué*. Il sera donc moins cher puisque sa valeur intrinsèque, elle, reste la même [9]. Attention, si entre t_0 et $t = 1$, la valeur du sous-jacent a changé (99% des cas), les conclusions ne sont pas forcément les mêmes [10].
En avançant encore une fois dans le temps, on peut faire exactement la même analyse, à savoir que **la valeur temps de votre option d'achat va progressivement diminuer avec le temps**. Regardons la situation 1 seconde avant l'échéance de l'option (courbe rouge). Cette fois-ci le prix de votre option suivra exactement le profil du payoff final décrit dans les premières pages du chapitre. **Il n'y a plus aucune valeur temps**. Plus d'espoir d'aller un peu plus dans la monnaie puisque votre call va expirer. Le prix de votre call sera alors égal à sa valeur intrinsèque.

Regardons maintenant le graphique du bas qui représente la valeur temps du call, dans le temps, et pour plusieurs évolutions possibles de S_t. Il y a deux choses à comprendre et retenir.
Le premier point, c'est que **la valeur temps diminue globalement avec le temps**. Nous venons d'en parler, mais c'est le phénomène est très visible sur ce graphique. Elle est donc maximale à l'émission du call, et nulle à l'échéance. On peut voir aussi qu'elle diminue de plus en plus vite : comparez la baisse de la première année, avec celle de l'année suivante.
Le deuxième point, c'est qu'à une date donnée, **la valeur temps est maximale autour de la monnaie**, c'est-à-dire si le sous-jacent est autour du strike. Ce point est un peu plus délicat à comprendre. Prenons la situation à t_0 (courbe noire). Si votre call est très OTM, alors sa valeur temps sera relativement faible, puisque il y a relativement peu de chance que votre call finisse ITM à l'échéance. C'est la même chose si votre call est très ITM, mais pas pour la même raison. Si votre call est très ITM, alors sa valeur intrinsèque sera relativement forte. Pour mieux comprendre : si vous êtes déjà très haut, alors l'essentiel du prix du call viendra de sa valeur intrinsèque.
Alors, "au milieu", c'est-à-dire à la monnaie, la valeur temps est maximale.

En page suivante, nous reprenons notre analyse dans le cas d'un put.

9. Nous avons fait l'hypothèse que le sous-jacent n'avait pas bougé entre t_0 et $t = 1$, donc $(S_0 - K)^+ = (S_1 - K)^+$.
10. Dans l'hypothèse où le spot a bien augmenté entre t_0 et $t = 1$, alors le call peut être plus cher à t_1, si la baisse de la valeur temps est compensée par une hausse suffisante de la valeur intrinsèque, cf. flèche en pointillés.





Les mêmes conclusions s'appliquent ici. Il y a cependant une différence notable : dans certains cas où le put est DITM (très dans la monnaie, c'est-à-dire sous-jacent très bas), la valeur temps peut passer dans le négatif. Nous pouvons interpréter ce phénomène en notant que lorsque le cours action est très faible, son potentiel de baisse supplémentaire est limité. Et qu'alors, dans ce cas précis, le temps joue, à l'inverse du call, **en notre défaveur**.

2.7 Les grecques

Vous connaissez maintenant le fonctionnement global des dérivés vanille. Il est temps à présent d'étudier encore plus en profondeur le mécanisme des options, en estimant leur **sensibilité** aux différents paramètres de marché.

Vous avez acheté ou vendu un call (ou un put) sur le marché de strike K, de maturité T, sur un sous-jacent X, de volatilité σ, dans un marché où le taux sans risque est r. Naturellement vous souhaitez estimer la sensibilité du prix de votre option à des variations du sous-jacent S, de sa volatilité σ, ou du taux sans risque r. A ce stade, vous savez par exemple que, *toute autre chose étant égale par ailleurs*, si la volatilité du sous-jacent augmente demain (de 20% à 22% disons), alors votre option va s'apprécier. Mais vous aimeriez être plus précis et **quantifier cette variation**. Autre exemple : avec le temps qui passe, la valeur temps de votre option va vraisemblablement diminuer. Vous souhaitez donc également quantifier cet effet du temps qui passe sur le prix de votre option.

C'est l'objectif des **grecques**. Les grecques sont des indicateurs de la sensibilité (du prix) de votre option à une variation, au choix, du sous-jacent S, de la volatilité σ, du taux sans risque r ou encore du temps T. Ces indicateurs sont extrêmement utilisés, vous devez les connaître.

Ci-dessous, nous symboliserons par la lettre X, le prix de votre option [11]. Les grecques se définissent généralement par

$$\pi = \frac{\partial X}{\partial Y}$$

où Y est un paramètre de marché.

Dans le cas des options vanilles (calls et puts), des formules fermées permettent de calculer facilement les différentes grecques. Nous n'allons pas aborder ce point dans ce cours. Nous nous contentons d'indiquer au lecteur que les grecques peuvent aussi se calculer par

$$\pi \approx \frac{X(Y+\epsilon) - X(Y)}{\epsilon} \quad \text{avec } \epsilon << 1$$

2.7.1 Le delta (δ)

Le δ est la star des grecques. Elle mesure la variation du prix de l'option à une **variation du prix du sous-jacent** S :

$$\delta = \frac{\partial X}{\partial S} \approx \frac{X(S+\epsilon) - X(S)}{\epsilon}$$

Pour bien comprendre, prenons un call (put) "central" [12] dont les caractéristiques sont les suivantes : $S_0 = 1000$, $K = 1000$, $T = 1$, $\sigma = 20\%$, $r = 4\%$. En s'aidant d'un pricer nous trouvons les prix suivants :

11. $X = C$ ou $X = Pt$; les grecques se calculent aussi bien sur les calls que sur les puts, comme sur tout produit structuré d'ailleurs.

12. Pour les autres grecques, nous "partirons" toujours de ce call/put central.

S	K	T	σ	r	Call	Put
1000	1000	1	20%	4%	99.250	60.040

Pour estimer le δ de notre call (put), prenons $\epsilon = 0.01$ et estimons les nouveaux prix avec ce sous-jacent "shifté" (**toute autre chose égale par ailleurs**)

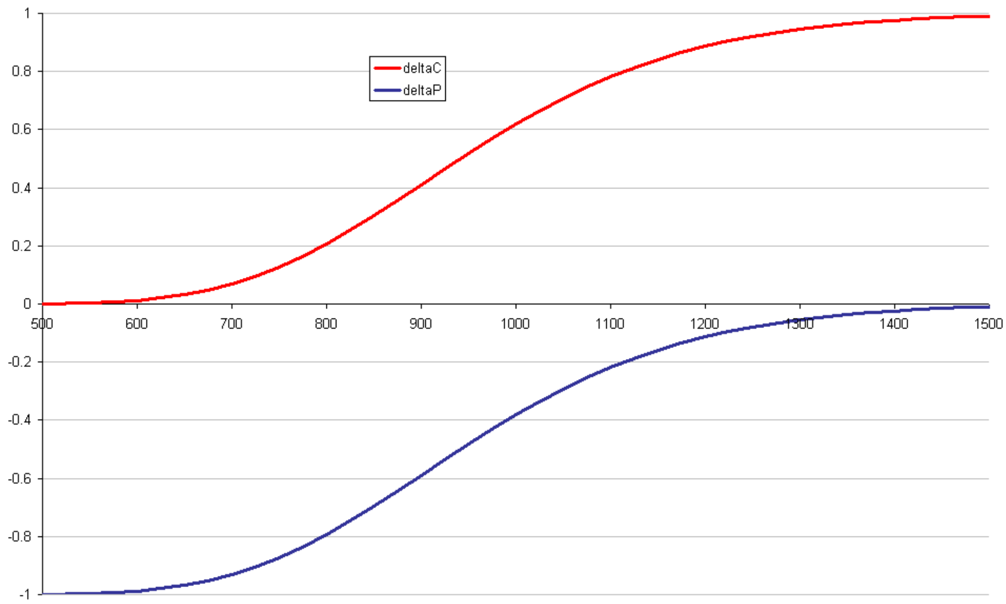
$S+\epsilon$	K	T	σ	r	Call	Put
1000.01	1000	1	20%	4%	99.257	60.036

Avant de nous précipiter sur le calcul du δ, analysons rapidement ce résultat. Si le sous-jacent augmente de ϵ, alors le prix de votre call va augmenter de $99.257 - 99.250 = 0.007$, tandis que le prix de votre put va baisser de 0.004. A ce stade, vous devez être en mesure d'expliquer le sens des variations obtenues. Attention, nous faisons l'hypothèse que le temps s'est figé (T reste à 1) : il s'agit bien d'une mesure de sensibilité à la variation de S **et uniquement à celle-ci**.

Nous avons alors $\delta_C = 0.7$ et $\delta_P = -0.4$. En réalité, en prenant les valeurs exactes, nous avons une mesure plus précise :

$$\delta_C = 0.62 \quad \delta_P = -0.38$$

Mais attention car ces valeurs ne sont valables qu'autour de $S = 1000$ [13]. Si nous réitérons le calcul pour différentes valeurs du sous-jacent, voici ce que l'on obtient :



Comment lire ce graphique ? Si le sous-jacent de votre call (put) est à $S = 800$, nous avons $\delta_C = 0.2$ et $\delta_P = -0.8$. Cela signifie donc que si S augmente de 1, alors le prix de votre call (put) va augmenter de 0.2 (-0.8) : $\Delta X \approx \delta \Delta S$ (pour ΔS faible).

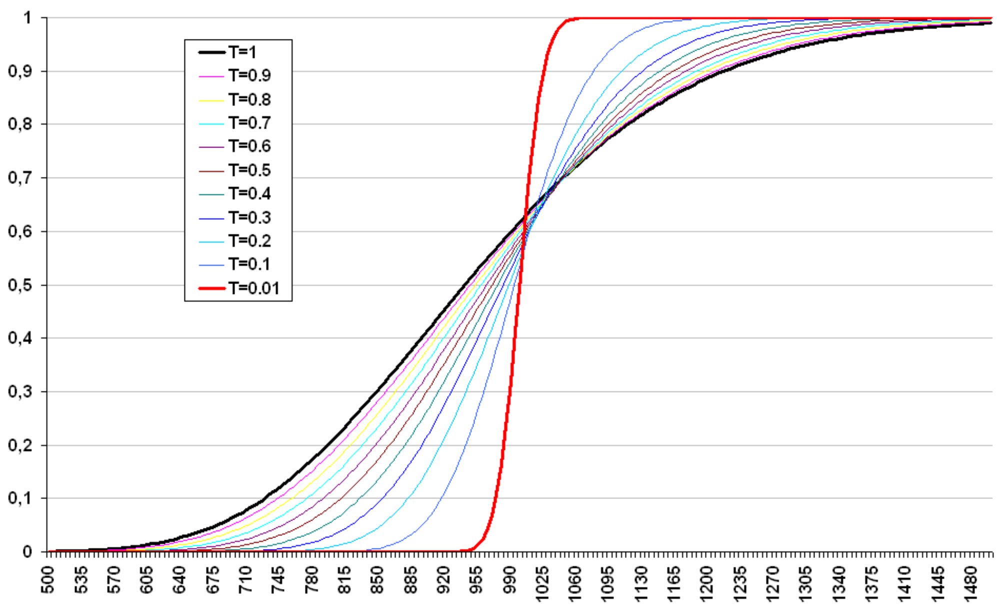
Première chose à dire : le δ d'un call est croissant, ce qui signifie que, plus le sous-jacent augmente, plus le call devient sensible à une *nouvelle* augmentation du sous-jacent.

13. Et avec tous les autres paramètres figés.

Le δ d'un put est croissant lui-aussi, ce qui signifie que plus le sous-jacent baisse, plus le put deviendra sensible à une nouvelle baisse du sous-jacent.

Ensuite, le δ d'un call est toujours compris entre 0 et 1, alors que le δ d'un put est toujours compris entre -1 et 0. Tentons ensemble de comprendre pourquoi.
Référez-vous aux graphiques de prix de call (put) dans la section relative à la Valeur temps/Valeur intrinsèque. Le call (put) que nous considérons ici correspond à la courbe bleue ($T = 1$). Le δ correspond à la pente de la courbe bleue, tout simplement (puisque $\delta_C = \frac{\partial C}{\partial S}$ et $\delta_P = \frac{\partial Pt}{\partial S}$).
Lorsque le call (put) est très OTM, une hausse de ϵ sur S ne va pas impacter le prix de l'option [14], et donc $\delta \approx 0$ si S est faible (élevé). Par contre, lorsque le call (put) est ITM, une hausse de ϵ sur S va se traduire par une hausse (baisse) **quasi identique** sur le prix de l'option [15], et donc $\delta \approx (-)1$ si S est élevé (faible).

Attention, ce graphique représente le delta de notre call/put central, lorsque nous faisons varier S, avec une maturité fixée à 1Y. Mais comment varie la courbe du δ lorsque nous faisons décroître la maturité du call ? Le graphe suivant montre la courbe du δ, toujours en fonction du niveau du sous-jacent S, mais en y superposant les courbes avec $T = 0.9Y, 0.8Y, ..., 0.01Y$.



Comme vous pouvez le constater, le δ se pentifie sérieusement autour du strike au fur et à mesure que la maturité diminue (c'est-à-dire que le call vieillit). Pourquoi le δ devient-il aussi sensible à une variation de S lorsque la maturité restante est courte ? C'est très simple ! Reprenez la justification précédente, mais avec une maturité plus courte (et une valeur temps quasi-nulle). Imaginons que le call mature demain ($T = 0.01Y$). Si S est juste en-dessous du strike, alors le δ sera malgré tout proche de 0 puisqu'il ne reste que quelques heures pour passer ITM... c'est "trop

14. L'option étant fortement OTM, une variation du spot n'a finalement qu'un impact négligeable sur la probabilité de finir ITM.
15. La valeur intrinsèque représente une grande partie d'un call (put) ITM ; or celle-ci va augmenter de ΔS. L'impact sur le prix global est donc important, et proche de 100%.

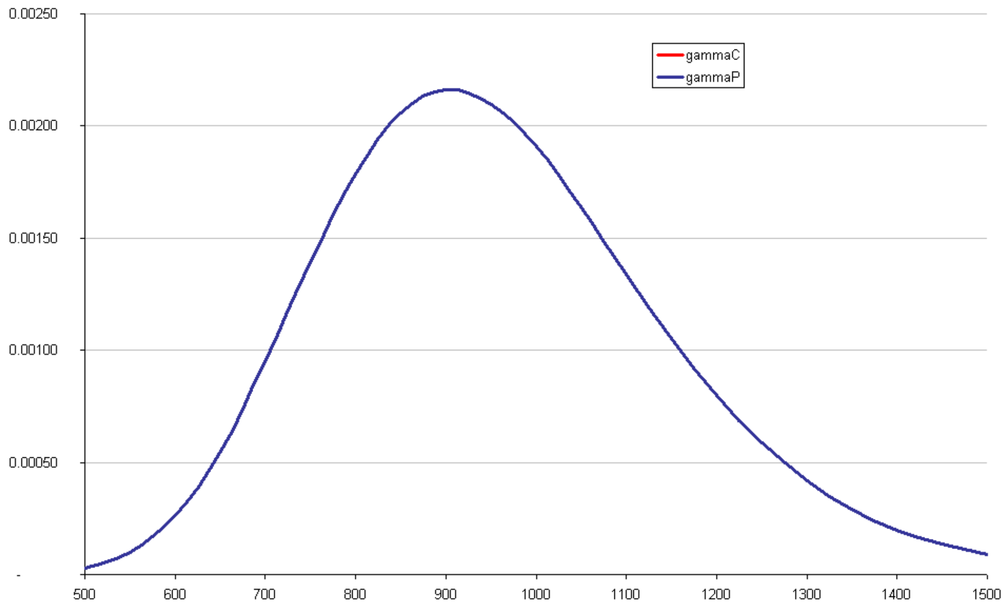
tard" ! A l'inverse, si, la veille de la maturité, le sous-jacent est juste au-dessus du strike, alors le δ sera proche de 1 ! Il n'y a quasiment plus d'incertitude : vous finirez ITM dans quelques heures, et dans cette configuration chaque euro "gagné" sur le sous-jacent se traduira par une augmentation équivalente de votre payoff. Logiquement, le prix de votre call va donc lui aussi augmenter de la hausse du sous-jacent [16], d'où un δ de 1 !

2.7.2 Le gamma (γ)

Le γ quantifie **la variation du δ de l'option pour une variation infinitésimale du sous-jacent** S. Autrement dit, γ est la dérivée seconde du prix de l'option par rapport au sous-jacent :

$$\gamma = \frac{\partial^2 X}{\partial S^2} = \frac{\partial \delta}{\partial S} \approx \frac{X(S+2\epsilon) - 2X(S+\epsilon) + X(S)}{\epsilon^2}$$

Le γ est donc la pente des courbes rouges (call) et bleues (put), affichées précédemment, et représentant le δ.
En appliquant la même méthodologie que pour le calcul du δ, nous pouvons reconstituer l'évolution du γ de notre call (put) central en fonction du sous-jacent S [17].



Première chose qui saute aux yeux : $\gamma_C = \gamma_P > 0$. Cela pouvait se deviner en analysant l'évolution du δ en fonction de S sur le graphique de la page précédente.
Nous voyons donc que le γ d'un call (put) est toujours positif. Il est très important de comprendre ce point : lorsque vous achetez un call, vous êtes ce que l'on appelle "gamma positif" (ou "gamma pos") [18]. Cela signifie que lorsque le prix du spot (S) augmente de 1, le δ de votre position va augmenter lui aussi, du niveau du gamma : $\Delta\delta \approx \gamma\Delta S$

16. Juste avant l'échéance, le prix de l'option n'est composé que de valeur intrinsèque.
17. Nous reprenons donc toutes les caractéristiques du call/put central, et nous calculons le γ pour différentes valeurs de S.
18. A l'inverse, lorsque vous êtes vendeur d'un call (put), vous êtes gamma négatif.

Vous comprendrez toute l'importance du γ lorsque nous aborderons la couverture d'options.

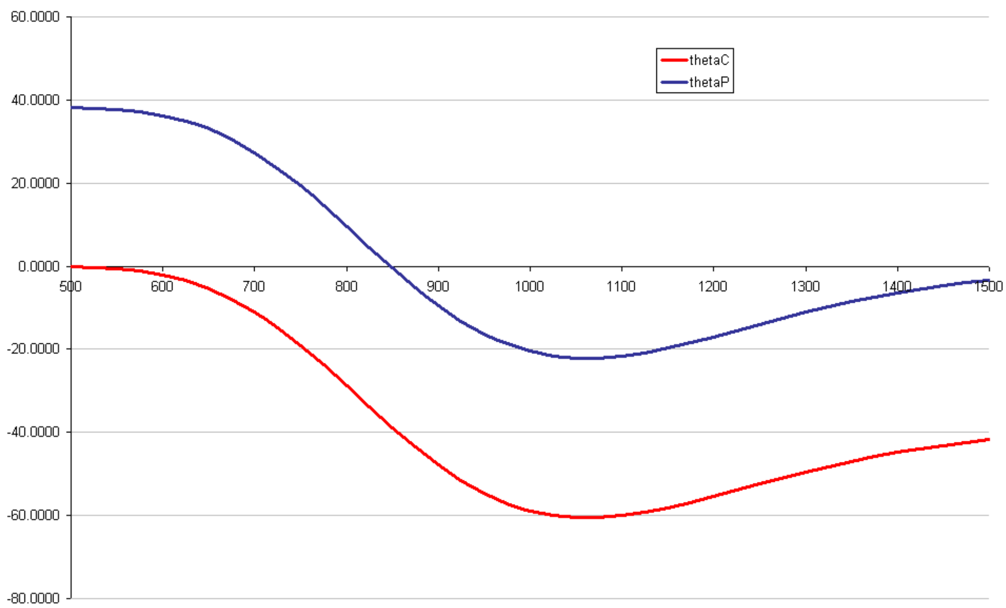
Nous observons donc que le gamma est nul lorsque le call est très ITM, ou très OTM, et il est maximal *autour* de la monnaie (attention : pas *à* la monnaie, mais autour). Vous voyez bien que le prix d'une option (call ou put) "décolle" autour de la monnaie. C'est autour de la monnaie que le γ est maximal car c'est à cet endroit que l'option va passer dans la monnaie, et que son prix va se mettre à "accélérer".

2.7.3 Le theta (θ)

Le θ donne **la sensibilité du prix de votre option au temps qui s'écoule** t :

$$\theta = -\frac{\partial X}{\partial T}$$

Oui, c'est bien l'*opposé* de la dérivée du prix par rapport à la maturité. Pourquoi ? C'est très simple. Lorsque le temps passe (t augmente), et bien d'un certain point de vue la maturité T de votre option **diminue**. On peut donc écrire $\theta = \frac{\partial X}{\partial(-T)} = \frac{\partial X}{\partial t}$



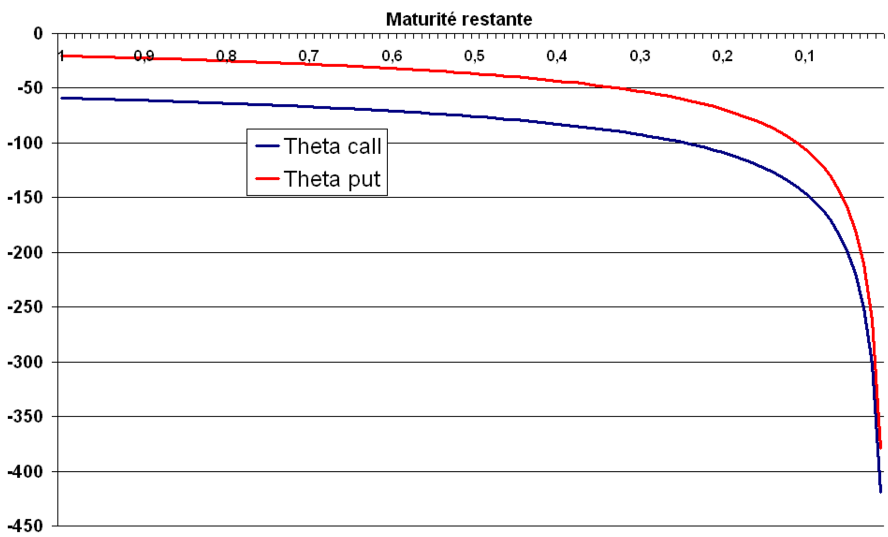
Comme vous pouvez le constater : le θ d'un call est systématiquement négatif. Cela signifie que lorsque vous achetez un call, le temps qui passe joue en votre défaveur, et son prix, *ceteris paribus*, diminue. La faute à la valeur temps du call : reprenez le graphique des prix du call en fonction du temps qui passe, et figez le niveau du spot S : vous voyez bien que le prix de votre call baisse lorsque le temps passe [19]. Donc, si entre t et $t + \Delta t$, rien n'a bougé, et en particulier le spot n'a pas augmenté (alors qu'il *aurait pu* augmenter ! [20]), alors vous êtes dans une configuration plus

19. C'est-à-dire que "$-T$" augmente.
20. "Mais cela aurait pu être pire, il aurait pu baisser aussi !" me direz-vous... Certes, mais rappelez-vous que la valeur temps représente l'espoir que le sous-jacent évolue dans la **bonne** direction, c'est-à-dire une hausse pour un call, et une baisse pour un put.

défavorable qu'à t, et le prix de votre call sera plus faible à $t + \Delta t$.

Par contre, pour un put, les choses sont différentes, mais nous l'avions déjà vu dans le chapitre sur la valeur temps. Lorsque le spot S est assez haut, vous êtes θ négatif car, si rien n'a bougé entre t et $t + \Delta t$ (et notamment le spot S), vous avez en quelque sorte raté une opportunité de baisse du spot, alors que votre option s'est rapprochée de l'échéance. Le prix aura donc baissé, d'où un θ négatif. Par contre, lorsque le spot S est relativement bas et que votre put est donc suffisamment ITM, la situation n'est plus la même. Vous êtes θ positif car, si rien n'a bougé entre t et $t + \Delta t$ (et notamment le spot S), vous avez en quelque sorte *évité* une hausse du spot [21] qui aurait fait baisser le prix de votre option. Sachant que le δ d'un put ITM est proche de -1, vous avez donc évité une belle baisse du prix de votre option si S est effectivement resté constant entre t et $t+\Delta t$. Votre prix à $t + \Delta t$ sera donc plus élevé, d'où le θ positif.

Maintenant, intéressons-nous à l'évolution du θ en fonction du **temps** : **fixons le niveau du sous-jacent à** $S = 1000$, et calculons le θ de notre call/put avec $T = 1Y, 0.9Y, 0.8Y, ..., 0.01Y$.



On observe donc que le θ est négatif comme prévu, mais surtout que celui-ci se met à plonger sur les deux derniers mois de la vie du call/put. Rappelez-vous que la valeur temps "plonge" de plus en plus rapidement [22]. **Donc**, si un jour passe sans que rien ne bouge 1 an avant la maturité, ce n'est pas si grave, et le θ sera donc faiblement négatif. Par contre, 1 semaine avant la maturité, si votre sous-jacent n'a pas bougé par rapport à la veille, votre call va vraiment perdre de sa valeur, d'où un θ très négatif.

Attention, comme pour toutes les grecques, vous pouvez écrire $\Delta X \approx -\theta \Delta T$, mais n'oubliez pas que ΔT doit être exprimé en années ! Ainsi, pour une évolution sur 1 jour ouvré, $\Delta T = -\frac{1}{260}$.

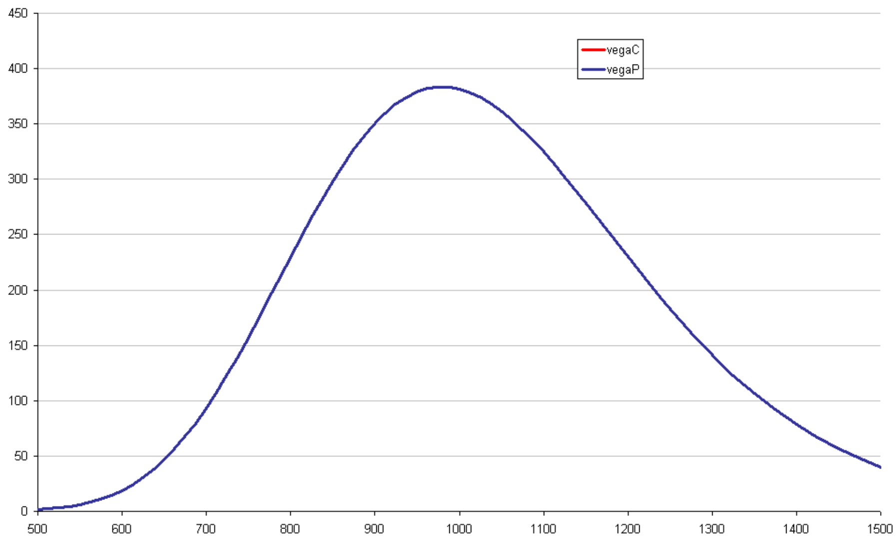
21. Surtout que lorsque le sous-jacent est très bas, il a vraiment peu de chances d'aller encore plus bas...
22. Attention : pour un sous-jacent fixé.

2.7.4 Le véga (ν)

Le ν, dit *véga*, quantifie **la sensibilité de votre option à une variation de la volatilité du sous-jacent** σ :

$$\nu = \frac{\partial X}{\partial \sigma}$$

Voici ce que l'on obtient, toujours par la même méthodologie.



On s'aperçoit que $\nu_C = \nu_P$, et que le ν est positif, ce qui est tout à fait logique. Si le sous-jacent, initialement de volatilité σ, "passe" à une volatilité supérieure $\sigma + \Delta\sigma$, cela signifie que le sous-jacent aura plus de chance de terminer dans la monnaie (pour un put comme pour un call), d'où un prix plus élevé et un $\nu > 0$.

Finalement nous pouvons approximer la variation du prix de l'option par :

$$\Delta X \approx \delta \Delta S + \gamma \frac{(\Delta S)^2}{2} + \nu \Delta\sigma + \theta \Delta t$$

2.7.5 Conseils

La section que vous venez de parcourir n'est pas du tout simple à digérer, pas d'inquiétude. **L'analyse des grecques est un exercice complexe** car plusieurs paramètres rentrent en jeu. Par exemple les graphiques du θ (où l'on a fait varier S) sont valables pour $K = 1000$, $T = 1$, $r = 4\%$ et $\sigma = 20\%$ mais nous aurions pu tracer les courbes de θ en faisant varier T en plus de S, mais aussi K,... et nous aurions eu des courbes légèrement différentes à chaque fois.
Relisez plusieurs fois les analyses pour bien comprendre le signe (c'est le plus important) et l'évolution de chacune des grecques [23]. N'hésitez pas à manipuler vous-même les pricers vus en TP. Posez-vous la question suivante : si **rien** ne change, mais que le paramètre Y est légèrement *shifté*, le prix de l'option va-t-il augmenter ou baisser ? Autrement dit : l'augmentation de Y va-t-elle augmenter (ou diminuer) la probabilité que l'option soit (encore plus) ITM à l'échéance ?

23. NB : il y a beaucoup d'autres grecques, mais celles-ci sont les plus utilisées.

2.8 Couverture delta-neutre

Comme vous le savez, un vendeur d'options doit assumer un risque de perte probable potentiellement très élevé. Certes, au moment de la vente, il récupère le montant de la prime. Mais sa position nette peut être très largement déficitaire en cas d'évolution défavorable du sous-jacent, c'est-à-dire si l'option termine DITM.
En réalité, lorsqu'un vendeur d'option vend un call ou un put, il se couvre (on dit qu'il se *hedge* en anglais). Cela signifie tout simplement qu'il va mettre en place une stratégie qui va consister à immuniser sa position contre les variations du sous-jacent.
Ainsi, s'il suit scrupuleusement cette stratégie, il n'aura plus aucun risque de perte sur sa position : que l'option finisse OTM, ITM, ou DITM, financièrement parlant cela reviendra au même.

La stratégie qu'un vendeur d'option met en place est une technique appelée "**delta hedging**". L'idée est extrêmement simple : **faire en sorte que le δ global de son portefeuille (δ_{Ptf}) soit *constamment* nul** (on dit "*delta neutre*"). Ainsi, son portefeuille global sera complètement insensible à l'évolution du sous-jacent.

Cette opération nécessitera $N+1$ opérations (trades) au cours de la vie de l'option :
- 1 opération à $t=0$,
- et N opérations réparties entre 0 et T^-, à $t=\Delta T, 2\Delta T, ...$ avec $\Delta T = \frac{T}{N}$.

La marche à suivre détaillée.
Plaçons-nous côté vendeur d'options. Imaginons qu'il ait vendu à $t=0$ un call C sur un certain sous-jacent S[24]. Nous noterons $\delta_C(t)$ le δ de ce call à la date t ($t \in [0;T]$) :

$$\delta_C(t) = \delta_C(S_t, K, T-t, r, \sigma)$$

A l'instant initial, le portefeuille du vendeur (constitué de la **vente** "nue" du call) a un $\delta_{Ptf}(0) = -\delta_C(0) < 0$ (position symétrique à celle de l'acheteur de l'option).

Souhaitant delta-hedger son portefeuille, le vendeur va acheter des titres (du même sous-jacent que le call !). Le sous-jacent ayant un δ de $+1$, il suffit d'en acheter une quantité $\delta_C(0)$ pour "delta-neutraliser" son portefeuille[25] :

$$\delta^*_{Ptf}(0) = -\delta_C(0) + \delta_C(0) \times \delta_S = -\delta_C(0) + \delta_C(0) \times 1 = 0$$

Ainsi, en achetant $\delta_C(0)$ titres à $t=0$, le vendeur d'options est effectivement hedgé contre les variations de S. **Sauf qu'il ne sera protégé que très peu de temps**, il ne s'agit que d'un hedge "instantané" qui ne sera plus fonctionnel à $t=\Delta T$.

En effet, à $t=\Delta T$, le δ du portefeuille aura forcément évolué[26] :

$$\delta^*_{Ptf}(\Delta T) = -\delta_C(\Delta T) + \delta_C(0) * 1 = -\delta_C(\Delta T) + \delta_C(0)$$

Il est donc nécessaire de rééquilibrer le portefeuille afin de recaler son δ sur 0. Il suffira donc d'acheter $\delta_C(\Delta T) - \delta_C(0)$ titres[27]. A la date $t=\Delta T$, le portefeuille se décompose ainsi en :

24. Evidemment, la stratégie fonctionne pour un call, un put, ou toute autre options plus ou moins complexe.
25. Le * symbolise le portefeuille couvert.
26. $\delta_C(\Delta T) = \delta_C(S_{\Delta T}, K, T-\Delta T, r, \sigma)$.
27. Ou d'en vendre, si cette quantité est négative.

- $\delta_C(0) + \delta_C(\Delta T) - \delta_C(0) = \delta_C(\Delta T)$ titres
- et 1 call vendu, de $\delta = \delta_C(\Delta T)$

Après cette opération, le δ du portefeuille sera donc neutralisé à nouveau.

Et ainsi de suite, tous les ΔT années... Au n^e rééquilibrage, il faudra acheter

$$\delta_C(n\Delta T) - \delta_C((n-1)\Delta T)$$

titres afin de neutraliser le δ du portefeuille.

A la maturité, deux cas possibles :
- **soit le call termine ITM** ($S_T > K$), et dans ce cas δ_C aura inexorablement convergé vers 1 [28] ; dans ce cas, vous aurez inexorablement acheté des portions de titre jusqu'à en avoir exactement 1 en portefeuille à $t = T^-$. L'acheteur de l'option va vouloir exercer [29], pas de problème : vous empochez K et vous lui donnez le titre que vous avez en portefeuille [30].

- **soit le call termine OTM**, et dans ce cas δ_C aura inexorablement convergé vers 0 ; dans ce cas, vous aurez inexorablement vendu des portions de titre jusqu'à en avoir exactement 0 en portefeuille à $t = T^-$. L'acheteur de l'option ne va pas exercer, donc, rien à signaler...

Trésorerie.
Ce point est très important : la gestion de trésorerie du vendeur d'option (B_t). Il faut imaginer que le vendeur part d'un "compte" vierge : $B_0^- = 0$.
Ce compte, lorsqu'il est excédentaire, rapporte le taux sans risque **annuel** r [31] ; et lorsqu'il est en déficit, celui-ci se creuse au même taux sans risque (comme un emprunt au taux r). Donc, **dans les deux cas**, **avant le rééquilibrage opéré à** $t = n\Delta T$, nous aurons :

$$B^-_{n\Delta T} = B_{(n-1)\Delta T} \times (1 + \Delta T \times r)$$

puis après rééquilibrage :

$$B_{n\Delta T} = B_{(n-1)\Delta T} \times (1 + \Delta T \times r) - [\delta_C(n\Delta T) - \delta_C((n-1)\Delta T)] \times S_{n\Delta T}$$

J'attire votre attention sur deux points cependant :
1. à $t = 0$, **le vendeur récupère** C (le montant de la prime du call) et achète $\delta_C(0)$ titres, donc $B_0 = C - \delta_C(0)$
2. à $t = T^-$, la situation sera la suivante [32] :
   - une trésorerie de B_T
   - $\delta_C(T) = 1_{S_T>K}$ titres en portefeuille, que vous finirez par vendre sur le marché pour récupérer $1_{S_T>K} \times S_T$

   A la maturité (T), il n'y aura plus qu'à payer à l'acheteur $(S_T - K)^+$. Au bout du compte votre trésorerie deviendra, dans le cas général

$$B_T + 1_{S_T>K} \times S_T - (S_T - K)^+ = B_T + 1_{S_T>K} \times S_T - (S_T - K) \times 1_{S_T>K} = B_T + 1_{S_T>K} \times K$$

28. Si vous en doutez, retrouvez le graphique présentant l'évolution du δ d'un call lorsque $T \approx 0$.
29. Exercer son droit d'acheter 1 titre du sous-jacent pour K EUR.
30. Ou bien, vous revendez le titre sur le marché à S_T et vous lui payez son payoff de $S_T - K$ ce qui financièrement reviendra au même, voir la partie *Trésorerie*.
31. Le même que celui utilisé pour pricer le call d'ailleurs...
32. Je remplace T^- par T pour simplifier les formules.

Ainsi, à la maturité :

– **soit le call termine ITM**, et votre trésorerie vaudra $B_T + K$.
– **soit le call termine OTM**, et votre trésorerie vaudra B_T

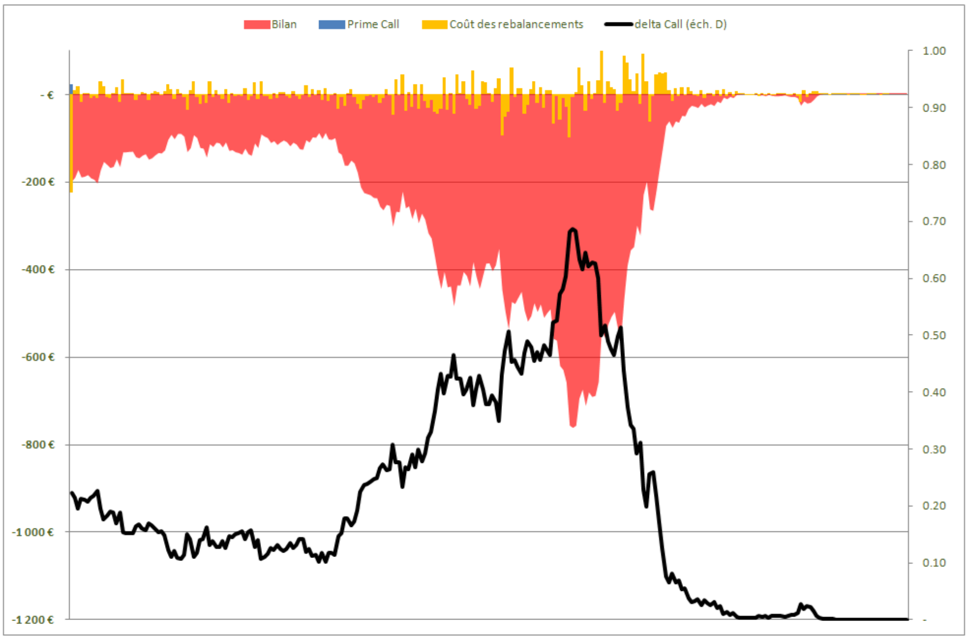
Sauf que, tenez-vous bien, vous observerez en pratique que :
– **lorsque le call termine ITM**, $B_T = -K$
– **lorsque le call termine OTM**, $B_T = 0$

Donc, *in fine*, la vente du call, reviendra, pour le vendeur d'option, à faire une opération blanche ! Pas de gain, pas de perte, quelle que soit l'évolution du sous-jacent. Voici quelques exemples pour vous en convaincre : nous traçons l'évolution dans le temps de la couverture en δ pour le call suivant (1 trade/jour) :

S	K	T	σ	r	Prix
1000	1200	1	20%	1%	23.41

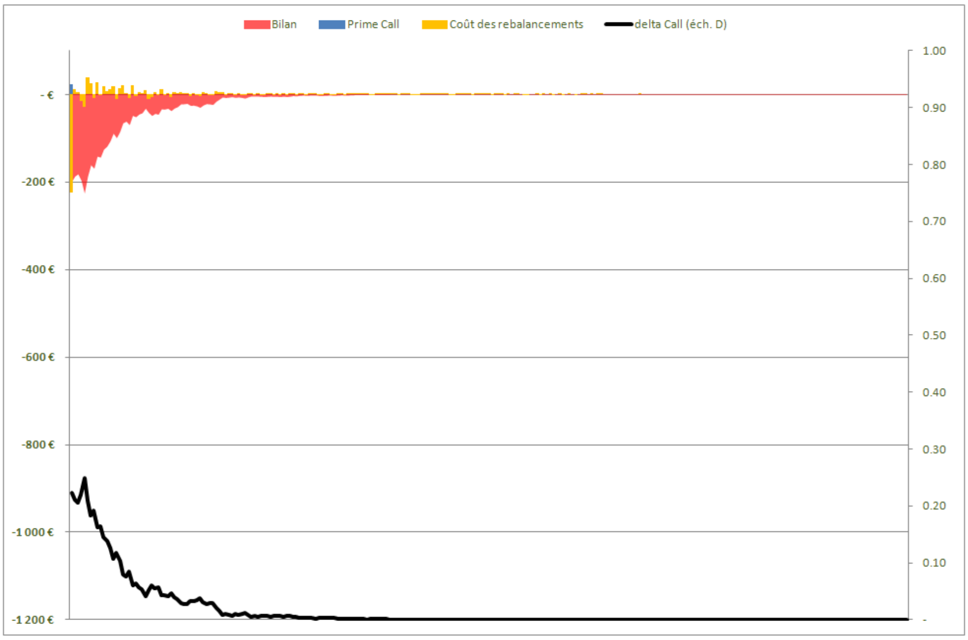
La barre bleue correspond à la prime initiale du call, les barres oranges le coût des trades, l'aire rouge le bilan de votre trésorerie et la courbe noire le δ du call (sur l'échelle de droite) - il permet de suivre à la fois le nombre de titres détenus et la moneyness du call à tout instant.

Simulation 1.



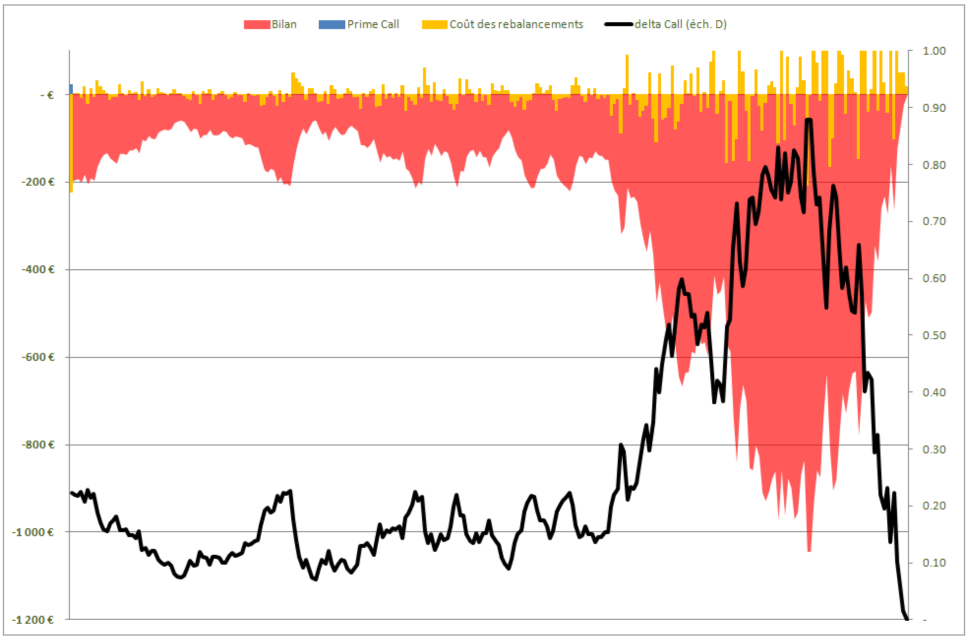
Le call finit OTM et votre trésorerie, proche de 0. A la maturité vous n'avez plus aucun titre en portefeuille. Vous avez commencé à vendre des portions de titre vers le 7e mois lorsque le δ a commencé à converger vers 0, ce qui a donné lieu à des rebalancements excédentaires.

Simulation 2.



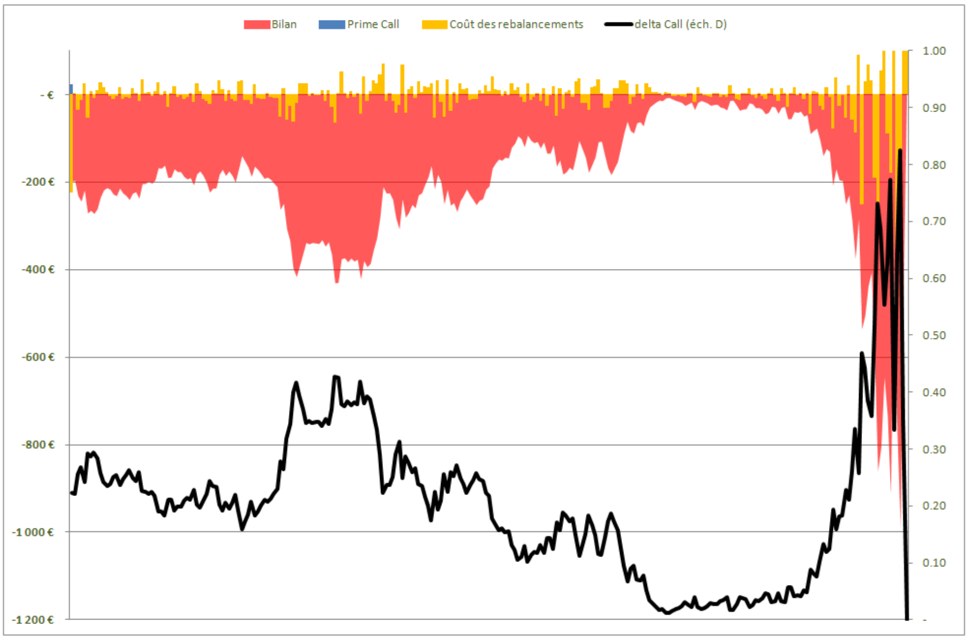
Le δ diminue très rapidement jusqu'à se stabiliser à 0. Rapidement vous vous retrouvez avec 0 titre en portefeuille.

Simulation 3.



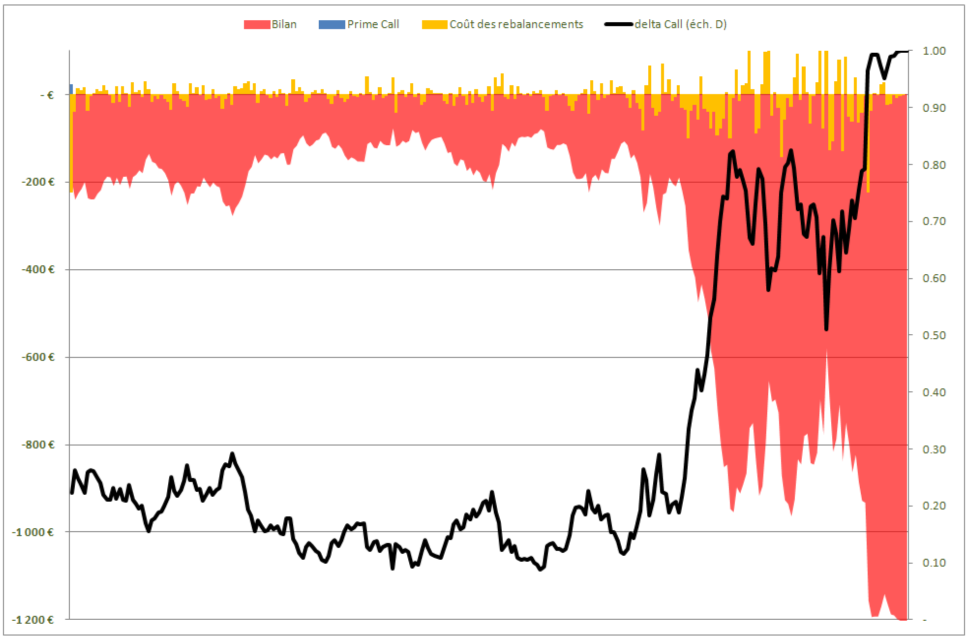
Cette simulation est intéressante : peu de temps avant la maturité, le δ du call augmente puis diminue fortement (rappelez-vous que plus la maturité diminue, plus le δ est sensible). Vous achetez des portions de titre que vous revendez par la suite. Au final,votre trésorerie est nulle : $B_T = 0$.

Simulation 4.



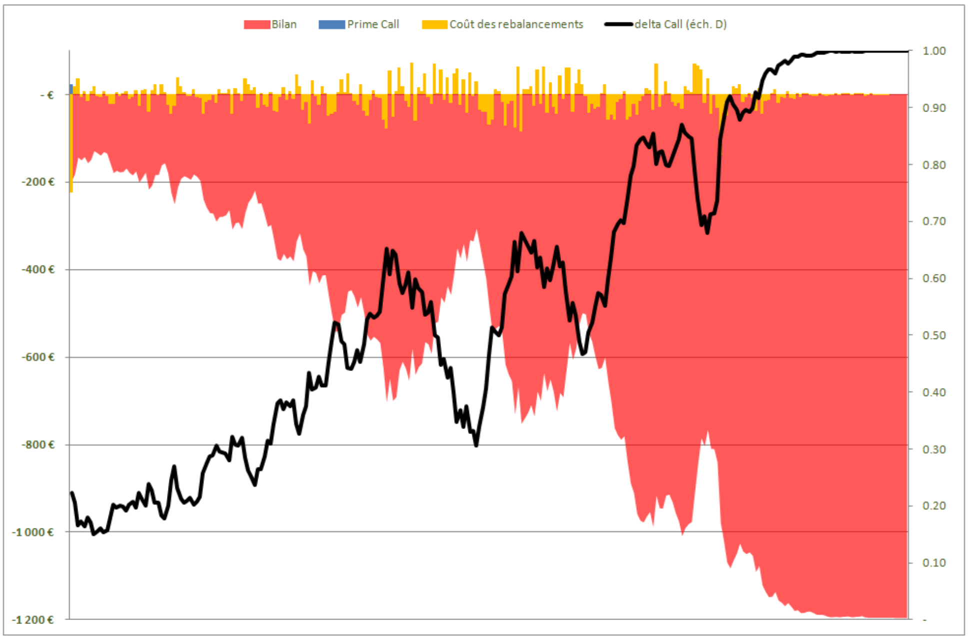
Une simulation équivalente à la précédente, mais au phénomène achat/vente amplifié.

Simulation 5.



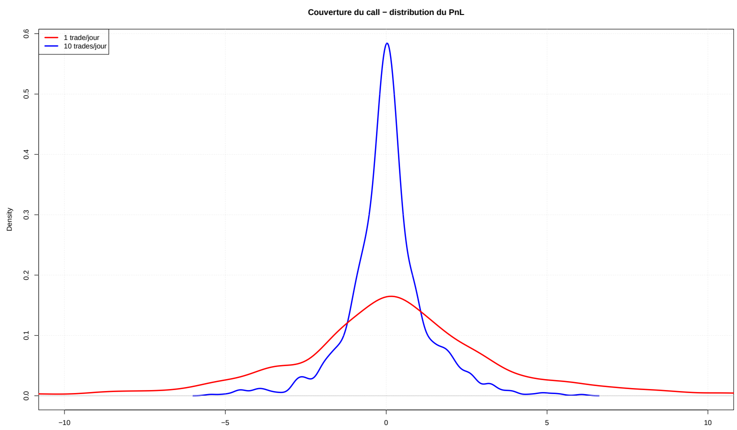
Une simulation (enfin !) qui termine ITM. Le δ converge vers 1 et vous avez donc 1 titre en portefeuille. Remarquez votre bilan final : $B_T^- = -K$!

Simulation 6.



Un autre exemple où l'option termine dans la monnaie...

Ces simulations montrent une couverture effectuée tous les jours (1 trade/jour), c'est-à-dire avec $\Delta T = \frac{1}{260}$. Que se passe-t-il si l'opération de "neutralisation" du δ est effectuée 10 fois par jour ? ($\Delta T = \frac{1}{2600}$) ? Nous représentons ci-dessous la densité des Pertes & Profits (Profit and Loss) du portefeuille (la trésorerie finale B_T après l'exercice éventuel), sur 1000 simulations. La courbe bleue (rouge) représente la densité observée pour la couverture "haute (basse) fréquence".



Alors qu'une couverture haute fréquence donne un PnL franchement centré sur 0 (faible écart

type), une couverture effectuée quotidiennement peut donner lieu à des pertes/profits significatifs (si on les compare au prix de l'option !). Ainsi on observe parfois certaines simulations défavorables où la trésorerie finale est déficitaire de 20 EUR, et d'autres où la situation est meilleure (+20 EUR).
Quoi qu'il en soit, nous tirons de ce graphiques deux conclusions :

1. la vente d'une option, lorsqu'elle est couverte, "ne rapporte rien"
2. plus il y a de trades, moins il y a de chances que la trésorerie finale s'écarte de 0.

Mais alors, **pourquoi faire tout ça si c'est pour ne rien gagner ?** En fait, tout se joue à la vente du call. Le prix du call se calcule selon certains paramètres, notamment la volatilité, qui est la principale inconnue, puisqu'il s'agit de la volatilité effective (ou "réalisée") du sous-jacent sur la durée de vie de l'option. Si tous les paramètres considérés pour le pricing de l'option (et notamment la volatilité) s'avèrent exacts, alors il y aura effectivement opération blanche. Si la volatilité réalisée est plus forte, la couverture coûtera plus cher et le vendeur perdra de l'argent (le call aurait dû être vendu plus cher), et inversement.
Alors, le prix demandé par le vendeur va intégrer une marge. Il va délibérément "gonfler" la volatilité attendue du sous-jacent et demander ainsi un prix plus élevé pour son call [33].
Ainsi, si vous prenez un prix de call sur le marché et tentez de retrouver le niveau de volatilité qui a été intégré dans le pricing [34], alors vous observerez que cette volatilité est supérieure à celle observée sur le sous-jacent par le passé. Il s'agit de la marge du vendeur.

2.9 Composition d'options

Jusqu'à présent nous avons vu les options les plus basiques, les plus vanilles : le call et le put, en version acheteur ou vendeur (soit 4 possibilités). Si vous pensez que le CAC 40 va monter d'ici 1 an par exemple, vous serez tenté d'acheter un call (sur le CAC 40), et un put dans le cas contraire. D'accord. Mais que faire dans les cas suivants :

1. vous pensez que le CAC 40 va monter d'ici 1 an, mais pas de plus de 5% (soit une évolution comprise entre 0 et +5%),
2. vous pensez que le CAC 40 ne va pas varier de plus de 5% en valeur absolue (soit une évolution comprise entre -5% et +5%).

Dans ces cas-là, vous pourriez peut-être acheter un call simple dans le cas 1, mais vous paieriez cher ce call si le CAC 40 connait effectivement une hausse modérée comme vous l'aviez pressenti. Quant au cas 2, et bien vous pensez peut être qu'il n'est pas facile de créer du rendement lorsque les marchés stagnent... et bien détrompez-vous : c'est possible, en composant des options intelligemment.

2.9.1 Le call spread

En achetant un call simple à la monnaie, vous gagnerez 100% de la hausse du sous-jacent sur la période (disons, 1 an). Mais si vous pensez que la hausse du CAC 40 sur l'année sera limitée à +5%, alors il vaut mieux adopter la stratégie suivante :

33. La réalité étant que le marché régule ces gonflements.
34. Utilisation récursive du pricer par dichotomie sur σ par exemple - on parle alors de **volatilité implicite**.

1. **achat** d'un call de strike $K_1 = S_0$ (ATM), de maturité 1Y,
2. **vente** d'un call de strike $K_2 = 1.05 * S_0$, de maturité 1Y.

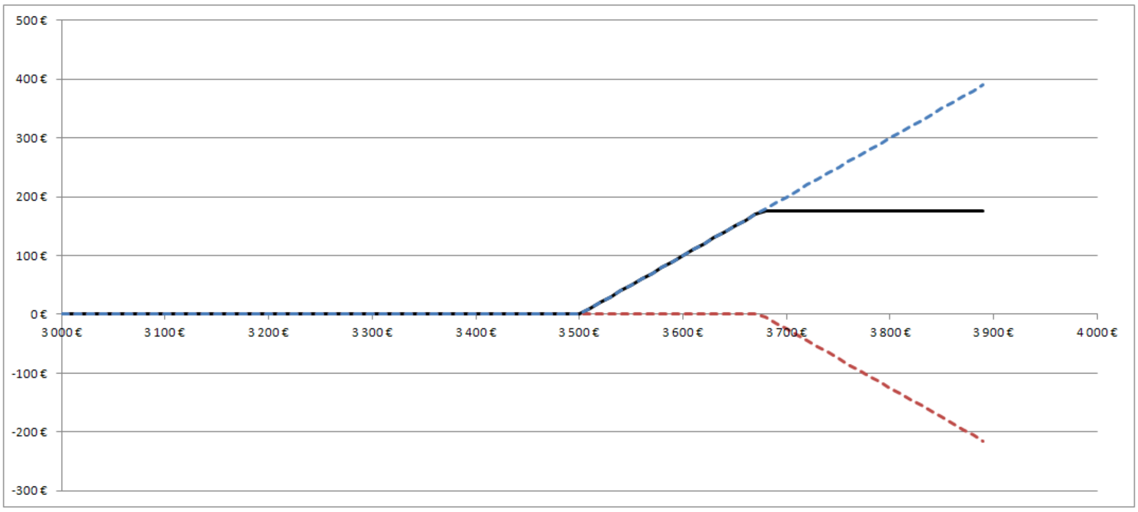
Cette combinaison d'option s'appelle un "call spread". Dans un call spread, vous récupérez la prime de la vente du 2e call, qui fera baisser le coût global de votre stratégie par rapport à un call nu. Dans ce cas :

1. si $S_T < K_1$, alors votre payoff final sera nul,
2. si $K_1 < S_T < K_2$, alors votre payoff final sera $(S_T - K_1)^+$,
3. et si $S_T > 1K_2$, alors votre payoff final sera "cappée" à $K_2 - K_1$.

Ainsi, si le CAC 40 ne monte effectivement pas de plus de 5% en 1 an, alors vous obtiendrez un payoff équivalent à celui d'un call simple, mais avec un coût initial plus faible du fait de la vente du 2e call ! A l'inverse, si la hausse du CAC 40 est supérieure à 5%, alors vous auriez peut être dû opter pour un call simple...

Voici la structure de payoff du call spread (avec $K_1 = 3500$ et $K_2 = 3675$)

1. en bleu, le payoff du call acheté (K_1),
2. en rouge, le payoff du call vendu (K_2),
3. en noir, le payoff du call spread.



Petite précision : un call spread ne se fait pas systématiquement avec $K_1 = S_0$! Tout dépend de votre opinion sur le sous-jacent, si vous anticipez une hausse de +5% à +10% vous choisirez $K_1 = 1.05 * S_0$ et $K_2 = 1.10 * S_0$.

2.9.2 Le butterfly

Alors maintenant, si vous avez la conviction que le CAC 40 va stagner dans l'année qui suit (avec une marge de ±5%), quelle stratégie allez-vous adopter ? En investissant directement sur le

CAC 40, vous aurez un gain quasi nul !

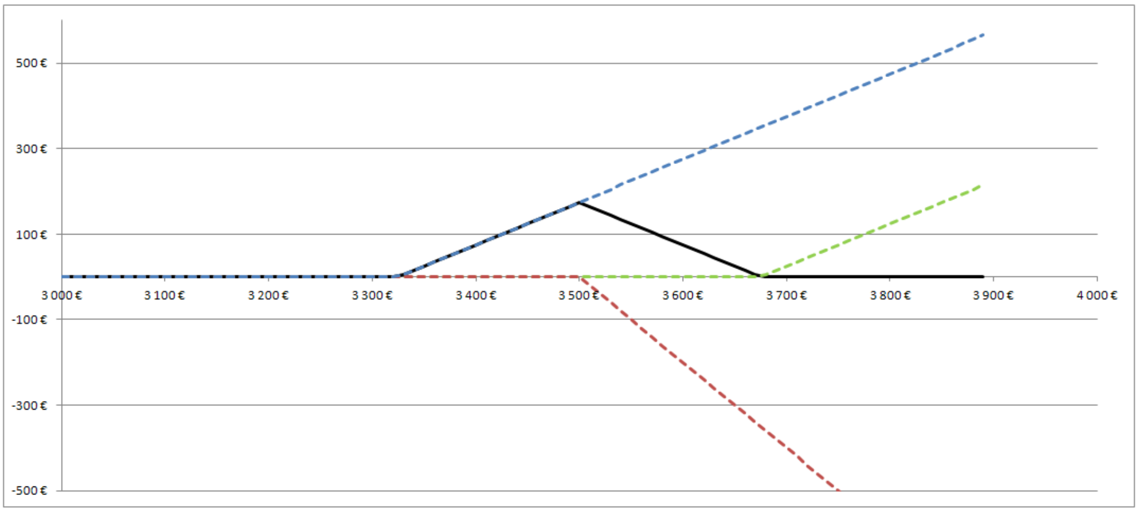
Avec les "briques" que sont les calls et les puts (en version acheteur/vendeur), comment construire une stratégie dont le payoff serait maximal pour $S_T = S_0$? La solution est l'option "butterfly", qui se construit de la façon suivante :

1. **achat** d'un call de strike $K_1 = 0.95 * S_0$, de maturité 1Y,
2. **vente** de deux calls de strike $K = S_0$, de maturité 1Y,
3. **achat** d'un call de strike $K_2 = 1.05 * S_0$, de maturité 1Y.

Ainsi, si le CAC 40 stagne effectivement sur une année ($S_T = S_0$), alors votre gain sera maximal, et égal à $K - K_1 = 0.05 * S_0$. Dans le cas où le CAC 40 monte ou baisse de plus de 5% dans l'année, alors, par contre, votre payoff sera nul.

Voici la structure de payoff du butterfly (avec $K_1 = 3325$, $K = 3500$ et $K_2 = 3675$)

1. en bleu, le payoff du call acheté (K_1),
2. en rouge, le payoff des deux calls vendus (K),
3. en vert, le payoff du call acheté (K_2),
4. en noir, le payoff du butterfly.



Il est ainsi possible de construire une option "synthétique", composée de ces briques que sont les calls/puts, et adaptée "sur-mesure" à votre anticipation de l'évolution du sous-jacent.

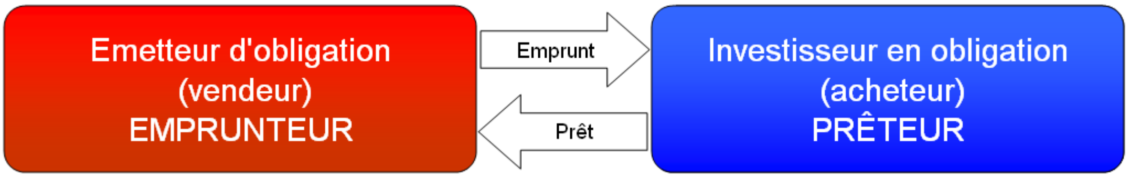
Chapitre 3

Les obligations

Dans ce chapitre, nous allons découvrir une deuxième classe d'actifs : les obligations. Les obligations sont des instruments financiers qui se différencient totalement des actions puisqu'elles procurent à leurs détenteurs des revenus fixes. Nous allons voir comment fonctionnent ces instruments, quels sont les organismes vendeurs d'obligations, et quels sont les risques liés à leur détention. Enfin nous établirons un lien entre obligation et courbe de taux d'intérêts (une notion primordiale), le tout agrémenté de quelques considérations macro-économiques pour y voir plus clair.
Dans le chapitre suivant, nous parlerons des instruments dérivés adossés sur les obligations.

3.1 Mécanisme des obligations

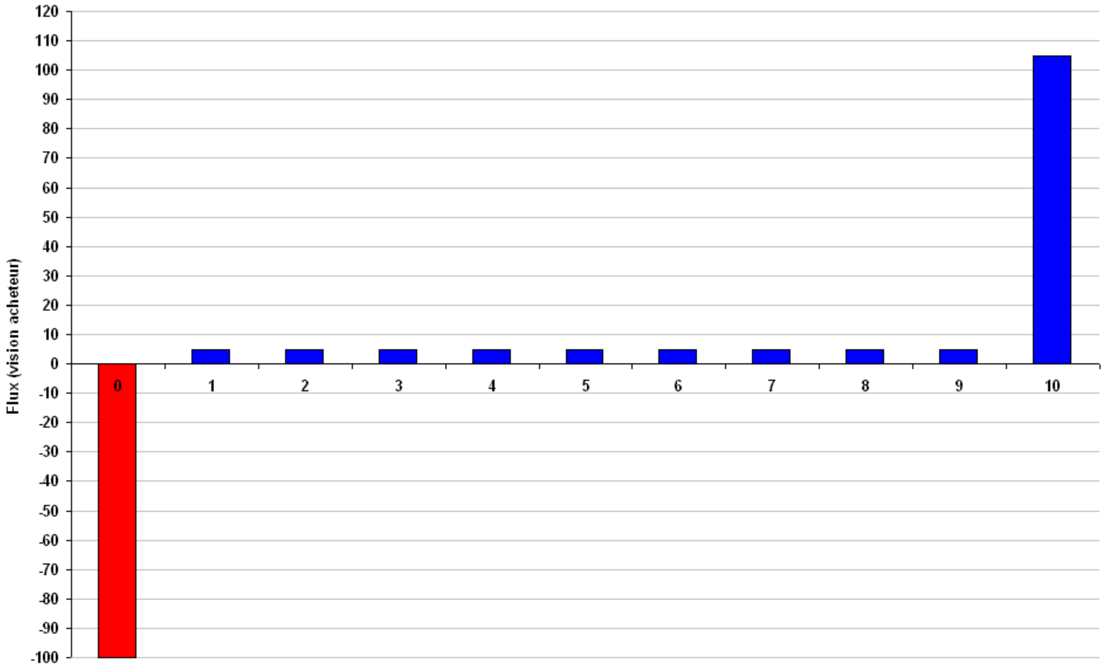
Une obligation est un instrument financier qui matérialise **une dette d'un organisme (le vendeur d'obligation) envers un autre organisme (l'acheteur d'obligation).**



Alors comment fonctionne une obligation ?
Pour comprendre, prenons le cas de deux personnes : la personne V ("vendeur") souhaite emprunter de l'argent à une personne A ("acheteur"). V aimerait emprunter $N = 100$ EUR, sur une période de $T = 10Y$. V et A se sont mis d'accord pour que chaque année, V paie $C = 10$ EUR à A, au titre d'intérêt. Evidemment, à $t = T$, V paiera les intérêts annuels (C), plus le montant du prêt N à A [1].
A $t = 0$, le prêteur va donner $N = 100$ EUR à V. A la date initiale, V récupère donc exactement le montant du prêt ($N = 100$ EUR), mais nous verrons plus loin que cela n'est pas toujours le cas.

Voyons maintenant l'échéancier des flux de paiement en vision acheteur (un flux positif désigne une rentrée d'argent pour A).

1. S'il est en mesure de rembourser, mais nous en parlerons plus tard.



Ce petit exemple est une bonne introduction au mécanisme des obligations. Si nous transposons cette situation sur les marchés, alors cela revient à dire que **A a acheté une obligation à B** :

– l'organisme vendeur de l'obligation ("l'emprunteur") est appelé **émetteur**,
– le montant du prêt N est appelé le **nominal** (ou le **principal**) de l'obligation,
– la durée du prêt T est appelée l'**échéance** (ou la **maturité**) de l'obligation,
– et enfin les intérêts C sont appelés les **coupons**, ils sont annuels ou semi-annuels la plupart du temps, et peuvent être nuls (on parle alors d'obligation *zéro-coupon*). Les taux de coupons c sont eux exprimés en pourcentage du nominal.

Comme tout actif financier s'échangeant sur les marchés, les obligations ont un **prix** P. Celui-ci est également exprimé en pourcentage du nominal. Il varie au cours de la vie de l'obligation, nous verrons comment.

Vous pouvez noter que les obligations sont des actifs complètement différents des actions :

1. les obligations rapportent un revenu fixe, annuel ou semi-annuel, tandis que les actions ne rapportent rien d'autre qu'un dividende annuel, qui peut être très variable d'une année sur l'autre ;
2. les obligations ont une durée de vie fixée à l'avance (T), au bout de laquelle le détenteur récupère le nominal de l'obligation, alors que les actions n'ont aucune durée de vie propre.

C'est pour cette raison que l'univers des obligations (*bonds* en anglais) est appelé le **Fixed Income**, pour "revenus fixes" [2], par opposition aux actions (**Equities**).

2. Cette dénomination est en fait inappropriée car certaines obligations apportent un revenu variable.

3.2 Qui sont les émetteurs d'obligations ?

Les obligations sont des titres de dettes, et les émetteurs d'obligations sont des organismes ayant besoin d'emprunter de l'argent sur les marchés. Alors qu'un particulier souhaitant faire un prêt (pour l'achat d'une voiture ou d'un appartement) fera appel à sa banque vu les faibles montants engagés (quelques centaines de milliers d'euros au maximum), les emprunteurs dont nous parlons ici souhaitent s'endetter sur des montants bien supérieurs.
Ils n'ont pas d'autre choix que de se tourner vers les marchés.

Il y a deux émetteurs principaux d'obligations sur les marchés : les Etats et les entreprises.

3.2.1 Les Etats

Les plus gros émetteurs d'obligations sont, et de loin, les **Etats**, on parle alors d'**obligations gouvernementales** ("govies")[3]. Les Etats ont besoin de s'endetter sur les marchés (on dit aussi qu'ils se "refinancent") pour pouvoir assurer leur fonctionnement au sens le plus global : rémunération des fonctionnaires, paiement des retraites[4], sécurité sociale, enseignement,...
Les Etats émettent donc régulièrement des obligations, dont les dénominations diffèrent suivant les maturités.

La **France** émet principalement trois types d'obligations :
- les **OAT** (Obligation Assimilable du Trésor), obligations de **long-terme** (7 à 50 ans), émises les premiers jeudis du mois. Ce sont les principaux titres de dettes français.
- les **BTAN** (Bon du Trésor à intérêts annuels), obligations de **moyen-terme** (2 à 5 ans), émis les troisièmes jeudis du mois.
- les **BTF**, (Bons du Trésor à taux fixe et à intérêt précompté), obligations de **court-terme** (moins d'un an).

La France est un pays très endetté, à tel point qu'en 2011, le coût de la dette française est devenu le premier poste du budget, devant celui de l'Education Nationale.

L'**Allemagne** émet également trois grands types d'obligations sur le même schéma :
- les ***Bunds***, obligations de **long-terme** (10 à 30 ans). Ce sont les principaux titres de dettes allemands.
- les ***Schatz*** et les ***Bobl***, obligations de **moyen-terme** (respectivement 2 et 5 ans).
- les ***Bubill***, obligations de **court-terme** .

Les **Etats-Unis** émettent eux des **Treasuries** :
- les **T-Bonds** (*Treasury Bonds*), obligations de **long-terme** (10 à 30 ans).
- les **T-Notes** (*Treasury Notes*), obligations de **moyen-terme** (2, 5 et 10 ans). Ce sont les principaux titres de dettes américains.
- les **T-Bills**, (*Treasury Bills*), obligations de **court-terme** (moins d'un an).

Le **Royaume-Uni** émet lui des **Gilts** et l'**Italie** des **BTP** (*Buono del Tesoro Poliennale*).

Les obligations d'un même Etat (OAT, BTAN et BTF pour la France par exemple) se différencient par leur fonctionnement (présence ou non d'un coupon principalement). En général les obligations court-terme n'ont pas de coupon, elles sont alors émises en dessous du pair.

3. On parle aussi d'obligation **souveraine** ("sovereign") lorsque l'obligation est libellée dans une devise étrangère.
4. En 2010, 1 retraite sur 10 n'était pas financée et devait faire l'objet d'un emprunt sur les marchés financiers !

3.2.2 Les entreprises

Les entreprises aussi émettent des obligations, de façon très ponctuelle (contrairement aux Etats), notamment pour financer l'innovation, développer un marché à l'étranger,... Dans ce cas on parle d'**obligations corporates**.
Ainsi, au mois de juin 2009, EDF a lancé une campagne de promotion pour l'émission d'obligations :

- de nominal $N = 1000$ EUR,
- de maturité $T = 5$Y,
- avec un taux de coupon annuel de $c = 4.5\%$ (soit un coupon annuel de $C = 45$ EUR)
- au prix initial $P = 1000$ EUR par obligation (soit 100%).

Emprunt EDF 4.50% 2014

Caractéristiques Emprunt EDF 4.50% 2014	
Obligation :	**Emprunt EDF 4.50% 2014**
Code ISIN :	**FR0010758888**
Emetteur :	**EDF**
Actionnariat principal :	**Etat Français à 84,40 %**
Notation de l'émetteur :	**Aa3 (Moody's) / A+ (Standard & Poor's) (Détails rating obligation)**
Période d'émission :	**17/06/2009 au 06/07/2009**
Echéance de l'obligation :	**17 juillet 2014**
Coupon (Taux actuariel) :	**4.50 %**
Périodicité des coupons :	**Annuel**
Montant total emprunt :	**3 000 000 000,00 €**
Valeur d'une part à l'émission :	**1 000,00 €**
Informations complémentaires :	**Souscription possible auprès de toute banque durant la période d'émission.**

FIGURE 3.1 – source : www.francetransactions.com

Ces obligations ont été émises pour lever 3 milliards d'euros sur les marchés. Vous comprenez bien qu'EDF ne pouvait pas passer par une banque commerciale pour emprunter autant ! D'après les documents de l'époque, EDF avait besoin de fonds pour pouvoir financer ses développements dans le domaine des énergies sans CO2.

3.3 Trois types d'émissions

Dans l'exemple du début de ce chapitre, nous avions considéré le cas d'une obligation de nominal $N = 100$, payée $P = 100$. Cette situation n'est pourtant pas systématique. Deux phases sont à distinguer.

A l'émission de l'obligation, il est effectivement courant d'avoir un prix d'achat P égal au nominal N : on parle d'émission au pair. C'était par exemple le cas lors de l'émission obligataire d'EDF en 2009. A ce stade on parle de marché *primaire*, c'est-à-dire le marché sur lequel les investisseurs achètent des titres aux **émetteurs** (qu'il s'agisse d'obligations, d'actions, ou d'autres).

Une fois la période d'émission achevée s'ouvre alors un marché *secondaire*, sur lequel les investisseurs peuvent acheter et vendre **entre eux** : l'émetteur initial des titres n'intervient plus. Selon la loi de l'offre et de la demande, le prix de notre obligation EDF va alors fluctuer dans le temps.

Lors de l'**émission** d'une obligation, trois cas peuvent se présenter :

1. si le prix de l'obligation est égal au nominal ($P = 100$), on dit que l'obligation est émise au pair (*at par*), c'est un cas très courant ;
2. si le prix de l'obligation est supérieur au nominal ($P > 100$), on dit que l'obligation est émise au-dessus du pair (*at a premium*) ;
3. si le prix de l'obligation est inférieur au nominal ($P < 100$), on dit que l'obligation est émise en dessous du pair (*at a discount*), c'est un moyen d'inciter à l'achat.

L'obligation à 4.5% d'EDF (à maturité 5Y) a donc été émise **au pair**.

3.4 Rendement à l'échéance

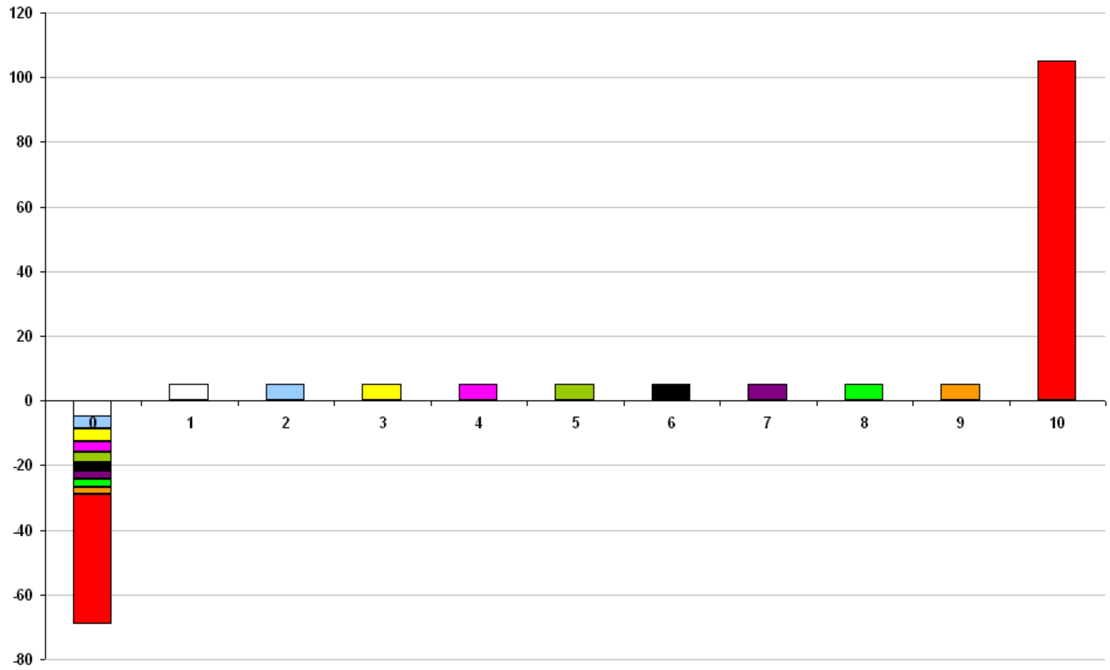
3.4.1 Principe

Nous allons maintenant parler de la manière de calculer le rendement d'un investissement en obligation. Un indicateur couramment utilisé est le rendement à l'échéance, ou *yield-to-maturity* (YTM), ou "taux" tout simplement.
Le YTM quantifie le rendement de votre investissement : vous avez acheté une obligation au prix P à une date t, **vous allez la conserver jusqu'à échéance** et vous allez recevoir des coupons à des dates prédéterminées, de manière *certaine* ; le rendement de votre investissement est donc parfaitement calculable à l'avance.
Vous n'avez pas besoin d'attendre l'échéance de votre obligation pour connaître la performance de votre investissement puisque toutes vos rentrées futures sont connues.

Considérons une obligation de nominal N, de maturité T, de coupon annuel C (constant), que vous avez achetée sur le marché au prix P. Le rendement a l'échéance de votre investissement, pour un achat à cet instant t précis, est donc r tel que

$$P = \sum_{i=1}^{i=T} \frac{C}{(1+r)^{i-t}} + \frac{N}{(1+r)^{T-t}}$$

Pendant le cours, nous avions vu le cas du calcul du YTM à l'émission de l'obligation, c'est-à-dire quand $t = 0$. Mais il faut bien garder en tête que, 6 mois après l'émission ($t = 0.5$), le prix ne reflète plus l'échéancier de paiement initial, mais un nouvel échéancier raccourci de 6 mois ! Le premier coupon ne tombera pas dans 1 an mais dans 6 mois, et ainsi de suite. Pour $t > 0$, la formule est donc un peu plus compliquée, mais le principe reste le même [5].



Ce taux r (**annuel**) désigne bien le rendement de votre investissement de départ P, comme le montre le graphique ci-dessus.

Ce schéma représente l'échéancier des flux pour une obligation de nominal $N = 100$, de coupon $C = 5$, et de maturité $T = 10Y$ (prochain coupon dans 1 an). Cette obligation payée $P = 69.30$, a un rendement à l'échéance $r = 10\%$. En découpant le prix d'achat de votre obligation en parts $\frac{C}{(1+r)^i}(i = 1, ..., T-1)$ et $\frac{N}{(1+r)^T}$, capitalisés au taux annuel r pendant $t = 1, ..., 10$ Y, alors vous pouvez retrouver vos coupons reçus année après année.

r est donc le rendement de votre obligation, sous condition de paiement effectif de l'ensemble des flux (coupons et nominal).

Alors bien sûr, plus le prix d'achat de votre obligation sera faible, plus votre rendement à l'échéance sera élevé [6]. Celui-ci est d'ailleurs *locké* **dès la date d'achat de l'obligation** et ne variera plus [7]. Mais attention : il n'est valable qu'à deux conditions :

1. l'obligation est détenue jusqu'à sa maturité,

5. Dans le cas le plus général, elle est d'ailleurs encore plus complexe, par exemple si l'on considère des coupons semi-annuels.
6. Toute autre chose étant égale par ailleurs.
7. Mais un investisseur qui achètera la même obligation le lendemain aura un YTM différent.

2. l'intégralité des coupons est payée, ainsi que le nominal (pas de défaut de l'émetteur).

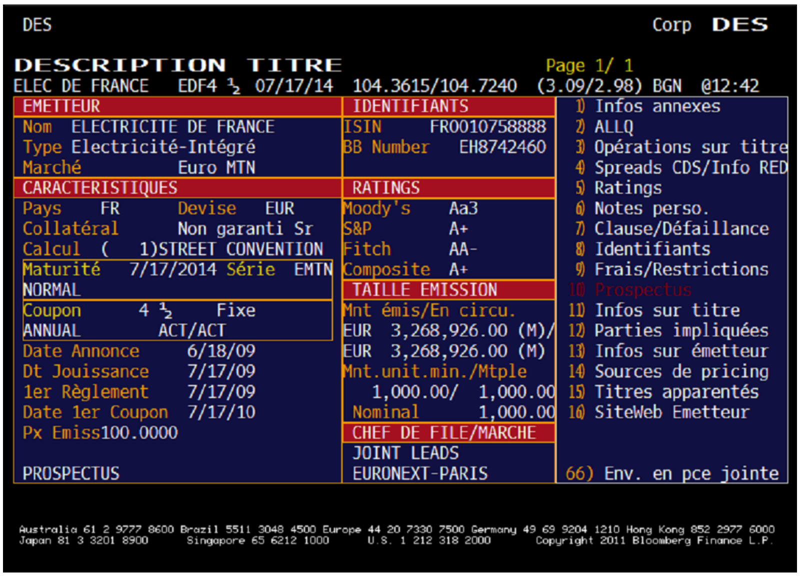
Le YTM est fortement utilisé puisqu'il permet de comparer entre elles les performances des obligations, quelles que soient leurs caractéristiques. Alors bien sûr, si deux obligations ont des YTM différents, cela n'est en général pas "gratuit"... Nous en parlerons dans la section sur le risque de crédit.

3.4.2 Lien entre prix et YTM

Maintenant que le concept de YTM a été présenté, on peut dire que :

1. les obligations émises au pair ont un YTM égal au taux de coupon ;
2. les obligations émises au-dessus du pair ont un YTM inférieur au taux de coupon ;
3. les obligations émises en-dessous du pair ont un YTM supérieur au taux de coupon.

Reprenons notre obligation EDF émise au pair. Dans ce cas précis, nous venons de le dire, *pour des titres achetés à l'émission*, le rendement à l'échéance est égal au taux de coupon. Regardons plus précisément les caractéristiques de cette obligation :



On peut lire sur cette page l'ensemble des informations sur l'obligation EDF de juin 2009. Le montant total de l'émission, le nominal, le taux de coupon, le rating de l'émetteur... et le prix d'émission : 100. Attention ! **Le prix d'une obligation est toujours côté en pourcentage du nominal** : il faut donc lire 100%. L'obligation a donc bien été émise au pair.

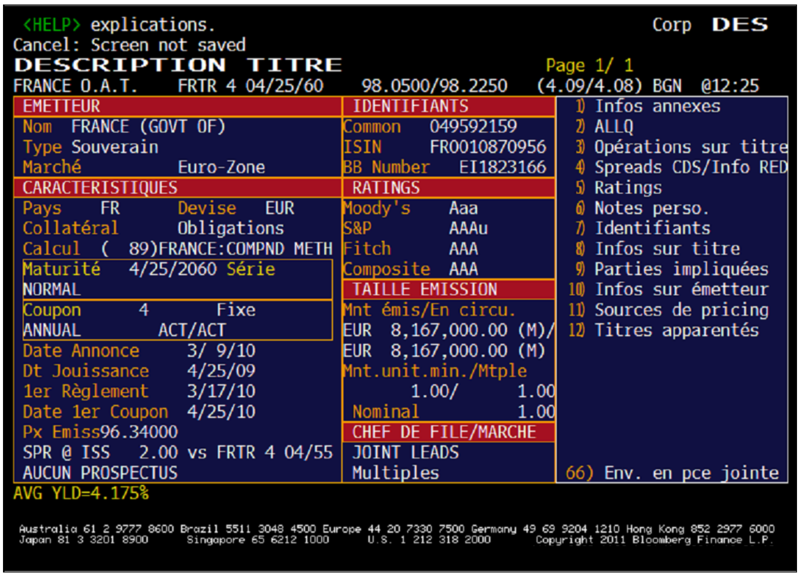
Le YTM le jour de l'émission était donc de 4%. Maintenant, cette même obligation s'échange autour de 104.5 sur le marché, soit un YTM à cet instant précis autour de 3%. L'obligation EDF est donc, aujourd'hui (et aujourd'hui seulement) moins rentable que le jour de son émission [8].

8. Sous réserve qu'EDF ne fasse pas défaut bien sûr, voir plus loin.

Le rendement à l'échéance d'une obligation décroît quand le prix de l'obligation augmente. Il y a deux cas possibles.
Si vous souhaitez revendre votre obligation en cours de vie (gestion active), alors bien sûr autant la revendre à un moment où son prix est le plus élevé. A l'inverse, un acheteur attendra un moment où le prix de l'obligation est le plus faible pour maximiser son YTM.
Mais attention : si vous conservez votre obligation jusqu'à l'échéance (gestion passive : "buy and hold"), vous serez totalement insensible aux variations du prix de votre obligation. En effet, quelles que soient les fluctuations de son prix, votre obligation vous permettra toujours de toucher les coupons et le principal à maturité.

En page suivante, vous pouvez retrouver l'évolution du prix de marché de l'obligation EDF au cours du temps (sur un historique qui ne remonte pas jusqu'à l'émission malheureusement). Vous pouvez voir le lien très étroit qui lie le prix d'une obligation à son rendement.

Intéressons-nous maintenant à la toute dernière OAT de maturité 50Y (échéance en 2060 !) :



On voit que le taux de coupon, annuel, est de 4%, et que l'obligation a été émise (sur le marché **primaire** donc) à un prix de 96.34. Pour "attirer" les investisseurs, l'obligation a été émise en dessous du pair.

Mais attention : ceci était le prix d'émission, le 17/03/2010. Une fois émise, l'OAT s'est échangée sur le marché secondaire, et son prix a fluctué. L'obligation est aujourd'hui cotée à 98.05 (prix de vente ou *bid*) / 98.225 (prix d'achat ou *ask*). Cela donne un YTM actuel d'environ 4.09%. Mais on ne peut pas dire si l'obligation, achetée aujourd'hui, serait plus rentable qu'à l'émission (il faudrait pour cela faire le calcul de l'YTM à l'émission).
Pour répondre à cette question, on peut se référer au 2e graphique de la page suivante, représentant l'évolution dans le temps du prix de l'obligation ainsi que du YTM. En fait on s'aperçoit que le YTM d'un investissement aujourd'hui est quasiment similaire au YTM en vigueur à l'émission.

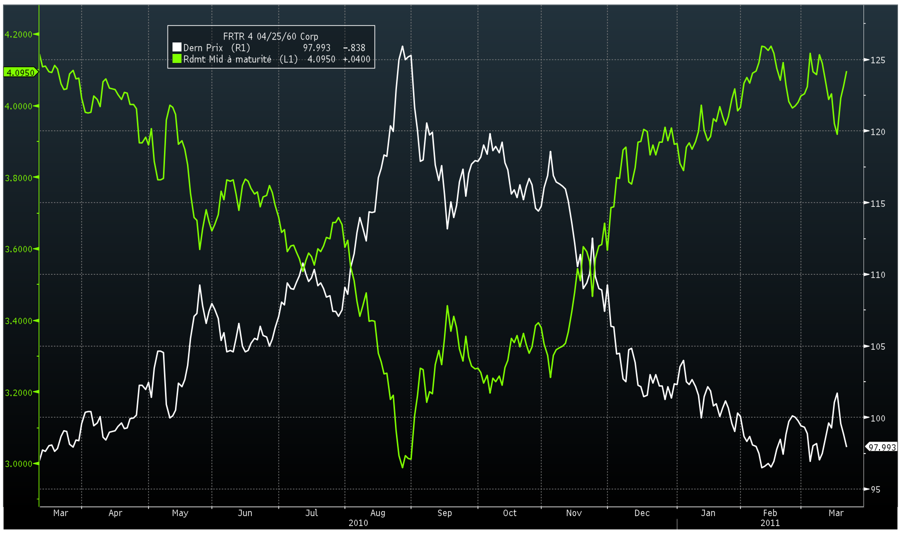
Bloomberg

EH874246 Corp (EDF 4 1/2 07/17/14)
EH874246 Corp (EDF 4 1/2 07/17/14)

Bloomberg ®Charts 1 - 1

Bloomberg

EI182316 Corp (FRTR 4 04/25/60)
EI182316 Corp (FRTR 4 04/25/60)



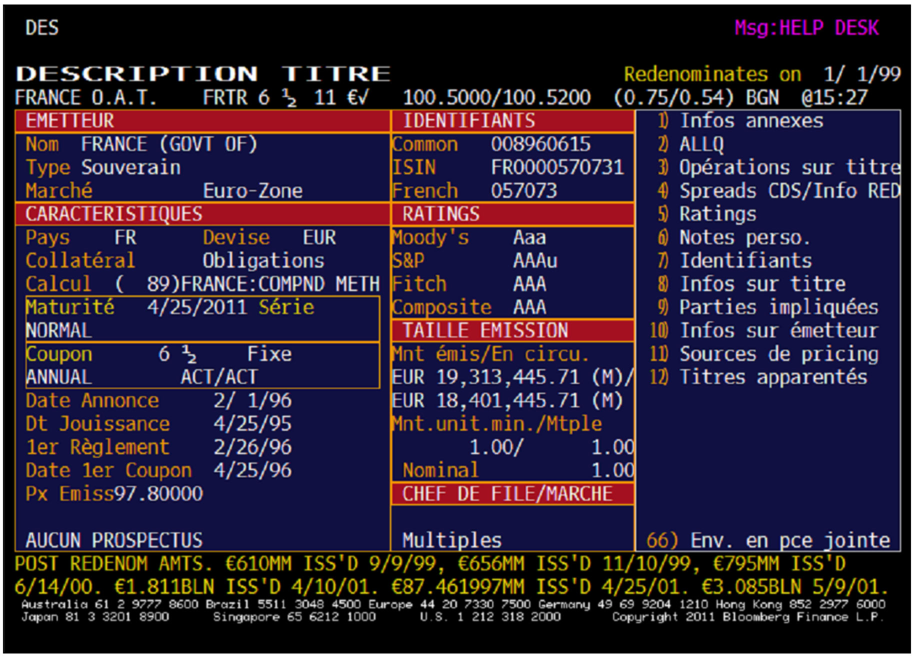
Bloomberg ®Charts 1 - 1

3.5 Clean price, dirty price

Les obligations sont généralement cotées en prix "pied de coupon", c'est-à-dire net du "coupon couru". Il faut rajouter à cette valeur cotée le "coupon couru" pour obtenir le prix réel de l'obligation :

Valeur de l'obligation = Valeur cotée + Valeur du coupon couru

Pour comprendre ce mécanisme, prenons l'OAT 15Y suivante, émise en 1996 :



Profitons-en pour expliciter certains termes présents sur cette fiche descriptive.

- la **maturité** est la date d'échéance de l'obligation (paiement du dernier coupon et du nominal) ;
- le **coupon** est, en pourcentage, le taux de coupon payé annuellement (ANNUAL) ;
- la **convention de calcul des dates** (ACT/ACT) indique la façon de calculer le nombre d'années entre deux dates, notamment pour calculer le coupon couru (pour plus d'informations, consulter **Wikipedia**) ;
- la **date de jouissance** représente la date à partir de laquelle commencent à courir les intérêts (coupons), dans le cas d'EDF (page précédente), elle est égale à la date de règlement ;
- la **date de règlement** est la date de versement des fonds par l'acheteur de l'obligation ;
- la **date du 1e coupon** est indiquée : ici, c'est exactement 1 an après la date de jouissance ;
- le **prix d'émission** est le montant à débourser par l'investisseur pour devenir propriétaire de l'obligation, il est toujours exprimé en pourcentage du nominal ;
- les **ratings** de l'émetteurs sont rappelés (ceux des 3 agences principales ainsi qu'un rating "synthétique") ;
- enfin la **fourchette de prix** actuelle est affichée en haut de la fiche.

Le "coupon couru" représente **la fraction du coupon correspondant à la durée écoulée depuis le paiement du dernier coupon** (ou, à défaut, la **date de jouissance** de l'obligation).

Il est calculé conformément à la convention de calcul en vigueur, et affiché avec 3 décimales. Ici, la convention "ACT/ACT" définit le nombre d'années entre deux dates comme :

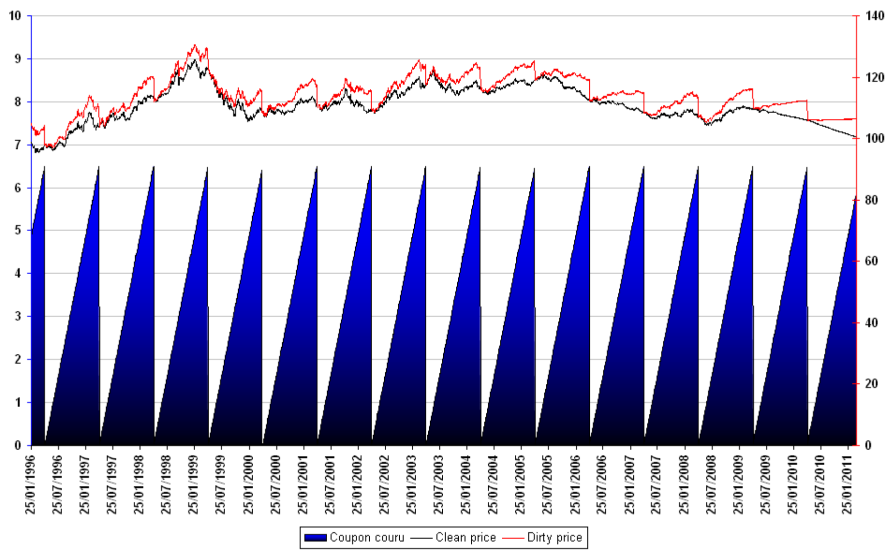
$$\frac{\text{Nombre de jours dans les années non-bissextiles}}{365} + \frac{\text{Nombre de jours dans les années bissextiles}}{366}$$

Ainsi, à la date de règlement, le 26/02/1996, le coupon couru depuis la date de jouissance est calculé comme :

$$6.5\%*\left(\frac{31/12/1995 - 25/04/1995}{365} + \frac{26/02/1996 - 01/01/1996}{366}\right) = 6.5\%*\left(\frac{250}{365} + \frac{56}{366}\right) = 5.447\%$$

La valeur "réelle" de l'obligation, à la date de versement, est donc de 97.8 (prix d'émission) + 5.447 (coupon couru). **C'est à ce prix que vous paierez l'obligation en réalité**. Dans le cas d'EDF, étant donné que la date de règlement est aussi la date de jouissance, le prix "réel" à l'émission sera de 100, car à ce moment là le coupon couru sera nul.
Nous affichons ci-dessous, pour notre OAT 15Y :

- en noir, le *clean price*, c'est-à-dire le prix de l'obligation hors coupon couru (ou "pied de coupon"), les obligations étant toujours cotées en "clean price" ;
- en rouge, le *dirty price*, c'est-à-dire le prix "réel" de l'obligation, incluant le coupon couru depuis le détachement du dernier coupon (ou, à défaut, la date de jouissance) ;
- en bleu, la valeur du coupon couru.

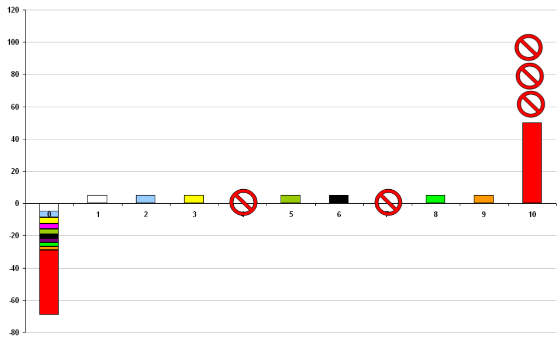


Attention, dans le cas de notre OAT 15Y, le fait qu'il faille pour l'acheteur débourser 5.45 supplémentaires à cause du coupon couru[9] n'est absolument pas un inconvénient, ou une perte, puisqu'il ne s'agit que de la valeur au *prorata temporis* du prochain coupon, qui sera versé, dans notre cas, 2 mois plus tard.
Les obligations sont, en pratique, toujours cotées en clean price pour cette raison : le dirty price n'est en effet pas aisément interprétable car le coupon couru a tendance à "polluer" le cours de l'obligation.

9. En faisant l'hypothèse d'un achat à la date d'émission.

3.6 La notion de risque de crédit

Vous le savez, le risque d'une action est matérialisé par sa volatilité et le risque de forte baisse du cours. Pour une obligation le risque est ailleurs : le principal risque lorsque vous achetez une obligation est le **risque de non-paiement**, c'est-à-dire le risque que l'émetteur soit incapable de payer certains coupons ou, pire, le principal, ou, pire encore, les deux. On appelle ce risque le **risque de crédit** de l'émetteur.



Lorsqu'un investisseur souhaite acheter une obligation (govies ou corporate), il va s'intéresser de très près à la **solidité financière** de la contrepartie.

3.6.1 Le rôle des agences de notation

Pour ce faire, il existe des entreprises spécialisées dans ce domaine, les **agences de notation**, dont l'objectif est d'évaluer le risque de toute opération financière. Elles vont alors attribuer une notation (ou *rating* en anglais) à l'Etat, à l'entreprise, ou à l'opération en question. A la lumière de ce rating, l'investisseur est donc censé être pleinement informé du risque pris.

Les trois principales agences de notation sont **Standard & Poor's, Moody's et Fitch Ratings**. Elles attribuent des ratings pour les opérations de long-terme (les plus courantes), mais aussi celles de court-terme (horizon 1 an).

Le tableau des ratings, pour chaque agence, est affiché en page suivante (source : Wikipedia). Chaque rating est accompagné d'un commentaire sur le risque encouru pour l'investisseur.

On distingue les obligations ***Investment Grade***, émises par les organismes BBB- au pire, des obligations ***Speculative Grade*** de rating inférieur. On parle aussi de "junk bond", ou encore d'obligation "pourrie" ou "high yield" pour désigner ces titres à risque de crédit élevé.

Ces agences de notation ont un rôle de première importance pour les émetteurs, comme pour les investisseurs. Et pour cause : un émetteur mal noté aura du mal à se refinancer sur les marchés [10], tandis qu'un émetteur bien noté pourra s'endetter "à bon prix". Nous y reviendrons dans la section suivante.

10. Entendez par là : elle se refinancera à un taux désavantageux. Dans certains cas extrêmes comme celui de la Grèce en 2010, il est même devenu -temporairement- impossible de se refinancer sur les marchés vu la dégradation de son rating. En urgence, elle a alors dû faire appel à l'aide de l'Eurogroupe et du FMI.

Principales notations financières

Moody's		Standard & Poor's		Fitch Ratings		Commentaire
Long terme	Court terme	Long terme	Court terme	Long Terme	Court terme	
Aaa	P-1	AAA	A-1+	AAA	F1+	*Prime*. Sécurité maximale.
Aa1		AA+		AA+		*High Grade*. Qualité haute ou bonne.
Aa2		AA		AA		
Aa3		AA-		AA-		
A1		A+	A-1	A+	F1	*Upper Medium Grade*. Qualité moyenne.
A2		A		A		
A3	P-2	A-	A-2	A-	F2	
Baa1		BBB+		BBB+		*Lower Medium Grade*. Qualité moyenne inférieure.
Baa2	P-3	BBB	A-3	BBB	F3	
Baa3		BBB-		BBB-		
Ba1	*Not Prime*	BB+	B	BB+	B	*Non Investment Grade*. Spéculatif.
Ba2		BB		BB		
Ba3		BB-		BB-		
B1		B+		B+		Hautement spéculatif.
B2		B		B		
B3		B-		B-		
Caa		CCC+	C	CCC	C	Risque substantiel. En mauvaise condition.
Ca		CCC				Extrêmement spéculatif.
C		CCC-				Peut être en défaut.
/		D	D	DDD	D	En défaut.
				DD		
				D		

En page suivante, vous trouverez les ratings de tous les pays analysés par S&P en date du 15 mars 2011.

Les ratings s'échelonnent de AAA [11] à B-. La France, très endettée, a fort intérêt à conserver son rating AAA. Imaginons que la notation de la France soit un jour dégradée (*downgradée*) d'un cran (*notch*) : alors à partir de ce jour, elle se refinancera sur les marchés à des conditions moins avantageuses, puisque les investisseurs, ayant un petit doute sur la capacité de la France à rembourser, exigeront en retour un rendement plus important, creusant davantage le coût de la dette française.

Vous pouvez constater que certains pays de l'Union Européenne (France, Allemagne, Italie, UK,...) portent une mention "Unsolicited Ratings". C'est une longue histoire.

Tout d'abord il faut savoir que le fonctionnement classique est le suivant : les Etats mandatent les agences de notation pour se faire évaluer. Ce service est payant et l'analyse, d'une durée de plusieurs semaines, est faite sur une large base de documents financiers. Ce processus donne lieu à l'attribution d'un rating, considéré comme robuste et fiable. Cependant, les autres Etats font tout de même l'objet d'une analyse, mais celle-ci, basée exclusivement sur les documents publics du pays, est forcément beaucoup plus légère. Les ratings sont alors estampillés *Unsolicited.*

En 2009, les agences de notation ont été tenues pour responsable de la crise des *subprimes*, puisqu'elles ont noté comme très sûres les opérations de titrisation adossées sur les prêts immobiliers américains. Ces instruments financiers ultra-complexes et relativement peu onéreux rapportaient de l'argent de manière sûre (selon les agences de notation), tant que les particuliers américains parvenaient à payer les mensualités de leur prêt immobilier. Malheureusement, les taux d'intérêts ont fortement augmenté entre 2003 et 2007 et de nombreux foyers américains n'ont pas pu payer leur prêt. Au final ces produits complexes se sont révélés extrêmement risqués, et ont donné lieu à la crise des subprimes en 2007, qui a elle-même déclenché la crise financière et économique en 2008.

L'Union Européenne a donc décidé de réagir et de réglementer l'activité des agences de notation. On peut notamment lire :

"De l'avis général, les agences de notation de crédit ont échoué, d'une part, à refléter suffisamment tôt la dégradation des conditions du marché dans leurs notations de crédit et, d'autre part, à adapter à temps leurs notations de crédit alors que la crise sur le marché s'était aggravée." (EU Regulation 1060/2009)

Mais il semblerait que cette résolution de fortement responsabiliser les agences de notation s'est retournée contre certains pays. En effet, la France, l'Allemagne ou l'Italie ne fournissent visiblement pas les informations suffisantes sur leur situation financière pour permettre à S&P de faire une analyse complète de leur solvabilité. Les ratings de ces pays ont donc été estampillés "Unsolicited"...

On mesure là toute la dimension politique, **et extrêmement sensible**, de la notation des emprunts d'Etats.

11. A l'oral, on parle de rating "triple A" (AAA), "double A" (AA) ou "single A" (A), et ainsi de suite.

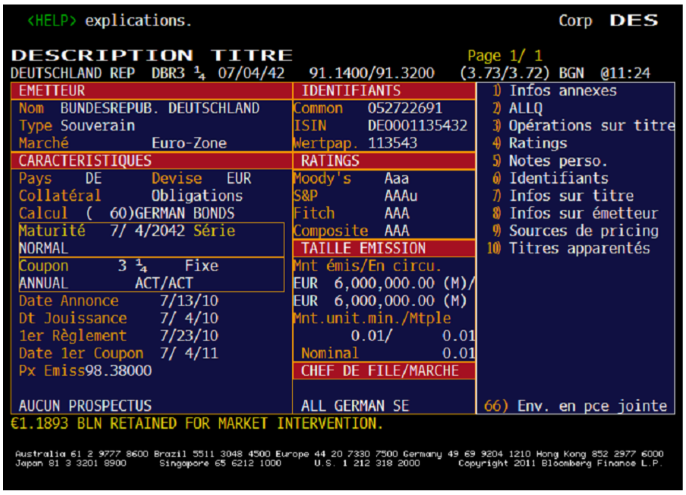
A		J	
Abu Dhabi (Emirate of)	AA	Jamaica	B-
Andorra (Principality of)	A	Japan (Unsolicited Ratings)	AA-
Argentina (Republic of)	B	Jordan (Hashemite Kingdom of)	BB+
Aruba	A-	K	
Australia (Commonwealth of) (Unsolicited Ratings)	AAA	Kazakhstan (Republic of)	BBB+
Austria (Republic of)	AAA	Kenya (Republic of)	B+
Azerbaijan (Republic of)	BB+	Korea (Republic of)	A+
B		Kuwait (State of)	AA-
Bahamas (The Commonwealth of The)	BBB+	L	
Bahrain (Kingdom of)	A-	Latvia (Republic of)	BB+
Bangladesh (People's Republic of)	BB-	Lebanon (Republic of)	B
Barbados	BBB-	Liechtenstein (Principality of)	AAA
Belarus (Republic of)	B+	Lithuania (Republic of)	BBB
Belgium (Kingdom of) (Unsolicited Ratings)	AA+	Luxembourg (Grand Duchy of)	AAA
Belize	B	M	
Benin (Republic of)	B	Macedonia (Republic of)	BB+
Bermuda	AA	Malaysia	A+
Bolivia (Plurinational State of)	B	Malta (Republic of)	A
Bosnia and Herzegovina	B+	Mongolia	BB-
Botswana (Republic of)	A	Montenegro (Republic of)	BB
Brazil (Federative Republic of)	BBB+	Montserrat	BBB-
Bulgaria (Republic of)	BBB	Morocco (Kingdom of)	BBB+
Burkina Faso	B	Mozambique (Republic of)	B+
C		N	
Cambodia (Kingdom of) (Unsolicited Ratings)	B+	Netherlands (State of The) (Unsolicited Ratings)	AAA
Cameroon (Republic of)	B	New Zealand	AAA
Canada	AAA	Nigeria (Federal Republic of)	B+
Cape Verde (Republic of)	B+	Norway (Kingdom of)	AAA
Chile (Republic of)	AA	O	
China (People's Republic of)	AA-	Oman (Sultanate of)	A
Colombia (Republic of)	BBB+	P	
Cook Islands	BB-	Pakistan (Islamic Republic of)	B-
Costa Rica (Republic of)	BB+	Panama (Republic of)	BBB-
Croatia (Republic of)	BBB-	Papua New Guinea (Independent State of)	BB-
Cyprus (Republic of)	A	Paraguay (Republic of)	B+
Czech Republic	A+	Peru (Republic of)	BBB+
D		Philippines (Republic of)	BB+
Denmark (Kingdom of)	AAA	Poland (Republic of)	A
Dominican Republic	B	Portugal (Republic of)	A-
E		Q	
Ecuador (Republic of)	B-	Qatar (State of)	AA
Egypt (Arab Republic of)	BB+	R	
El Salvador (Republic of)	BB-	Republic of Albania	B+
Emirate of Ras Al Khaimah	A	Republic of Angola	B+
Estonia (Republic of)	A	Romania	BBB-
F		Russian Federation	BBB+
Fiji Islands (Republic of)	B	S	
Finland (Republic of)	AAA	Saudi Arabia (Kingdom of)	AA-
France (Republic of) (Unsolicited Ratings)	AAA	Senegal (Republic of)	B+
G		Serbia (Republic of)	BB
Gabonese Republic	BB-	Singapore (Republic of) (Unsolicited Ratings)	AAA
Georgia (Government of)	B+	Slovak Republic	A+
Germany (Federal Republic of) (Unsolicited Ratings)	AAA	Slovenia (Republic of)	AA
Ghana (Republic of)	B	South Africa (Republic of)	A
Grenada	B-	Spain (Kingdom of)	AA
Guatemala (Republic of)	BB+	Sri Lanka (Democratic Socialist Republic of)	BB-
G		Suriname (The Republic of)	BB-
Guernsey	AAA	Sweden (Kingdom of)	AAA
H		Swiss Confederation (Unsolicited Ratings)	AAA
Hellenic Republic	BB+	T	
Honduras (Republic of)	B	Taiwan (Republic of China) (Unsolicited Ratings)	AA-
Hong Kong (Special Administrative Region)	AAA	Thailand (Kingdom of)	A-
Hungary (Republic of)	BBB-	Trinidad and Tobago (Republic of)	A+
I		Tunisia (Republic of)	BBB
Iceland (Republic of)	BBB	Turkey (Republic of)	BB+
India (Republic of) (Unsolicited Ratings)	BBB-	U	
Indonesia (Republic of)	BB+	Uganda (Republic of)	B+
Ireland (Republic of)	A-	Ukraine	BB-
Isle of Man	AAA	United Kingdom (Unsolicited Ratings)	AAA
Israel (State of)	AA-	United Mexican States	A
Italy (Republic of) (Unsolicited Ratings)	A+	United States of America (Unsolicited Ratings)	AAA
		Uruguay (Oriental Republic of)	BB
		V	
		Venezuela (Bolivarian Republic of)	BB-
		Vietnam (Socialist Republic of)	BB

3.6.2 Impact de la notation sur le YTM

Considérons deux pays souhaitant se refinancer sur les marchés :
- l'Allemagne, notée AAA (un pays réputé très solide financièrement, dont la notation est excellente)
- et la Jamaïque, notée B- (rating le plus défavorable de la liste).

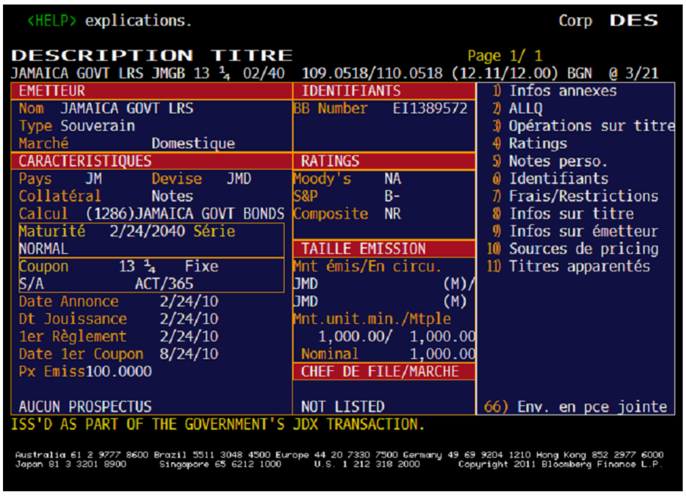
Ces deux Etats ont tous deux émis des obligations de maturité 30Y au premier trimestre 2010. Voyons à quel taux ces Etats ont pu emprunter sur les marchés.

Commençons par l'Allemagne :



L'Allemagne a émis en juillet 2010 une obligation 32Y à un taux de coupon de 3.25%, au prix de 98.38, soit un refinancement à un taux annuel de 3.30% environ [12]. Notée AAA, l'Allemagne peut donc emprunter à moindre frais.

Maintenant, lorsque la Jamaïque, très mal notée, souhaite se refinancer sur le marché, voici ce que cela donne :



La Jamaïque a émis en février 2010 une obligation 30Y, au pair, a un taux de coupon de 13.25%. Le rendement à l'échéance de cette obligation sera donc de 13.25% ! Côté investisseur, cette obliga-

12. Il s'agit là du rendement à l'échéance de l'obligation, *mais*, du côté **vendeur**, cela ne correspond plus un rendement mais un coût annuel d'emprunt ! Plus le YTM est faible, plus c'est bénéfique pour le vendeur d'obligation.

tion a l'air tout à fait profitable. Mais de l'autre côté, côté vendeur, c'est tout à fait désavantageux pour la Jamaïque qui emprunte à un taux annuel de 13.25% !

Vous percevez là toute l'importance de la notation des Etats. La notation d'un Etat est un enjeu crucial qui va avoir un impact fort sur le coût (à venir) de sa dette :

- le downgrade d'un pays va augmenter le rendement à l'échéance des obligations émises, représentant un surcoût sur les emprunts ;
- l'upgrade d'un pays va baisser le rendement à l'échéance des obligations émises, représentant une baisse du coût de ses emprunts.

Attention : le changement de notation d'un Etat n'aura d'effet sur le coût de sa dette que sur les obligations nouvellement émises. Rappelez-vous : tous les emprunts d'Etats déjà émis vont voir leur YTM baisser (augmenter) en cas d'upgrade (downgrade), mais cela ne concernera que les investisseurs du marché **secondaire**. Les Etats, eux, figent le coût de leur dette (le YTM) une fois pour toute lors de l'émission au marché primaire.

3.6.3 No free lunch

Alors entre ces deux obligations, pensez-vous que les investisseurs vont se ruer sur les obligations jamaïcaines et délaisser les obligations allemandes ? Bien sûr que non !

Lorsque l'on parle de rendement à l'échéance, l'hypothèse est faite que l'obligation est détenue jusqu'à maturité, d'accord, mais surtout que l'émetteur parvienne à honorer ses paiements !

Or, si le YTM jamaïcain est très alléchant à première vue, le risque pour l'acheteur de rencontrer des problèmes, surtout sur 30Y, est très élevé. Alors certes, *si tout se passe bien*, au final l'investisseur en obligations jamaïcaines aura eu un rendement 4 fois plus élevé qu'avec des titres allemands. Mais le risque encouru aura été énorme.
A l'inverse, avec des *Bunds* allemands, vous allez de toute vraisemblance recevoir tous vos coupons sans problème. Mais votre YTM sera bien plus faible.

Tout est une question d'aversion au risque. Il n'y a pas de miracle, plus de rendement, c'est aussi un risque de crédit plus élevé : *no free lunch* !

3.7 Le risque de taux d'intérêt

Le risque de crédit (downgrade ou upgrade d'un rating) est le principal risque lié à l'achat d'une obligation, qu'elle soit govies ou corporate. Mais il y a un deuxième risque, indépendant de la solidité financière de l'émetteur : le risque de taux d'intérêt.

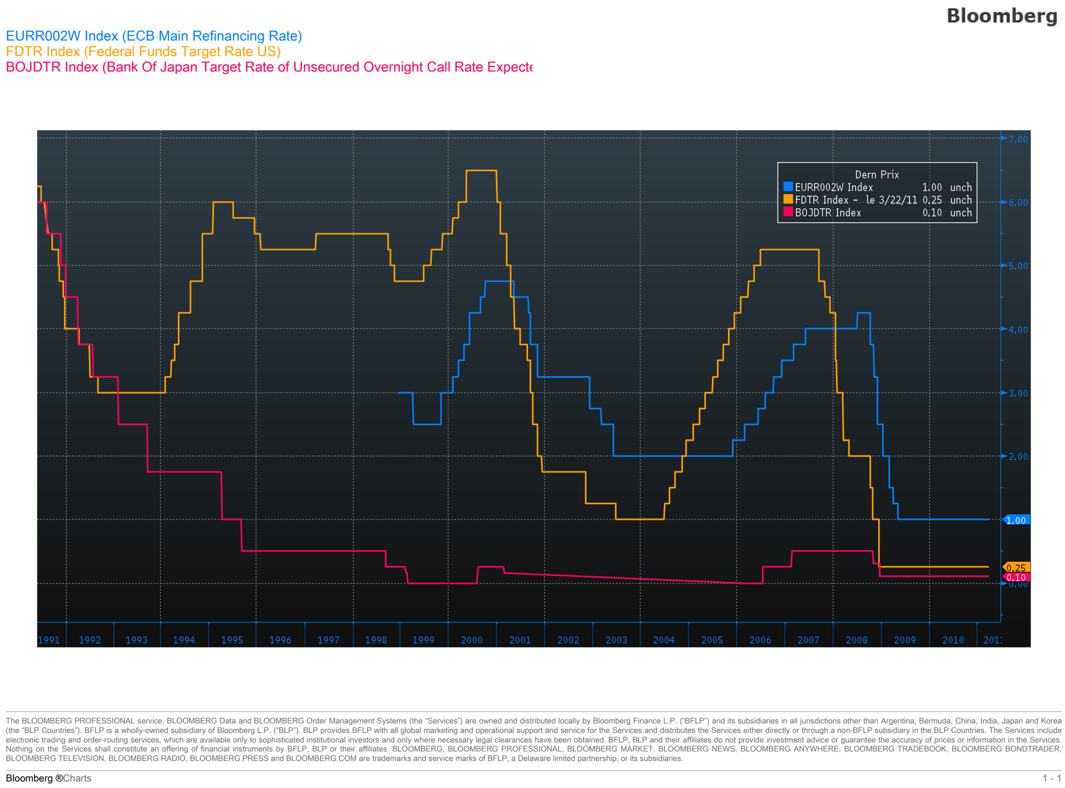
Il faut savoir que chaque zone monétaire est régie par une Banque Centrale :
- aux Etats-Unis : c'est la Réserve fédérale des Etats-Unis (la *Fed*), gouvernée par Ben Bernanke,
- dans la Zone Euro, c'est la Banque Centrale Européenne (la BCE), gouvernée par Jean-Claude Trichet [13],

13. Depuis le 1e novembre 2011, le gouverneur de la BCE est l'italien Mario Draghi.

– au Royaume-Uni, c'est la Bank of England (BoE),
– au Japon, c'est la Bank of Japan (BoJ),...

Les Banques Centrales ont un pouvoir **énorme** sur les taux d'intérêts (les YTM) dans la zone en question. En effet, les Banques Centrales fixent ce que l'on appelle le **taux directeur** en vigueur dans la zone monétaire [14]. C'est le taux d'intérêt auquel les banques commerciales de la zone vont pouvoir se refinancer (emprunter) sur du très court-terme auprès de la Banque Centrale. La Banque Centrale d'une zone se réunit fréquemment pour mettre à jour le niveau du taux directeur, et ses décisions sont attendues fébrilement par les opérateurs de marché.

Voici tracée ci-dessous l'évolution des taux directeurs de la BCE, de la Fed et de la BoJ (en %).

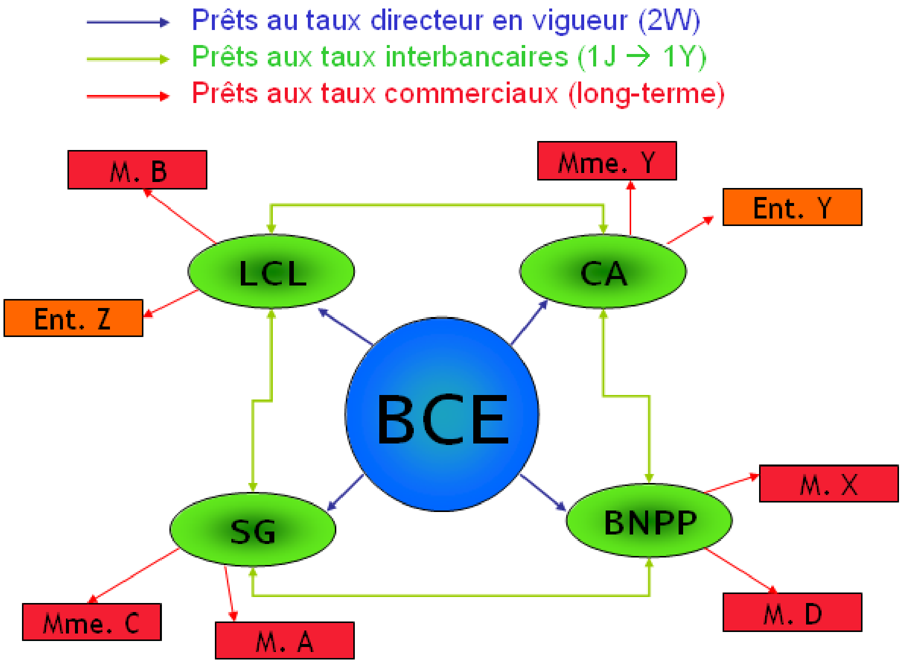


Comme son nom l'indique, le taux *directeur* va fortement impacter les taux d'intérêts de l'ensemble de la zone monétaire. Voyons comment.

Il faut tout d'abord comprendre le mécanisme des banques : les banques commerciales prêtent à leurs clients, qu'ils soient particuliers ou entreprises, sur le long-terme (prêts immobiliers,...) et financent ces prêts par des opérations d'emprunts successifs court-terme auprès de la Banque Centrale (entre autres).

14. On parle aussi de taux de refinancement.

Le schéma suivant explique le lien entre la Banque Centrale, les banques commerciales, et les clients finaux (particuliers et entreprises).



Alors, comment lit-on ce schéma ? Ce schéma se lit du centre vers l'extérieur.

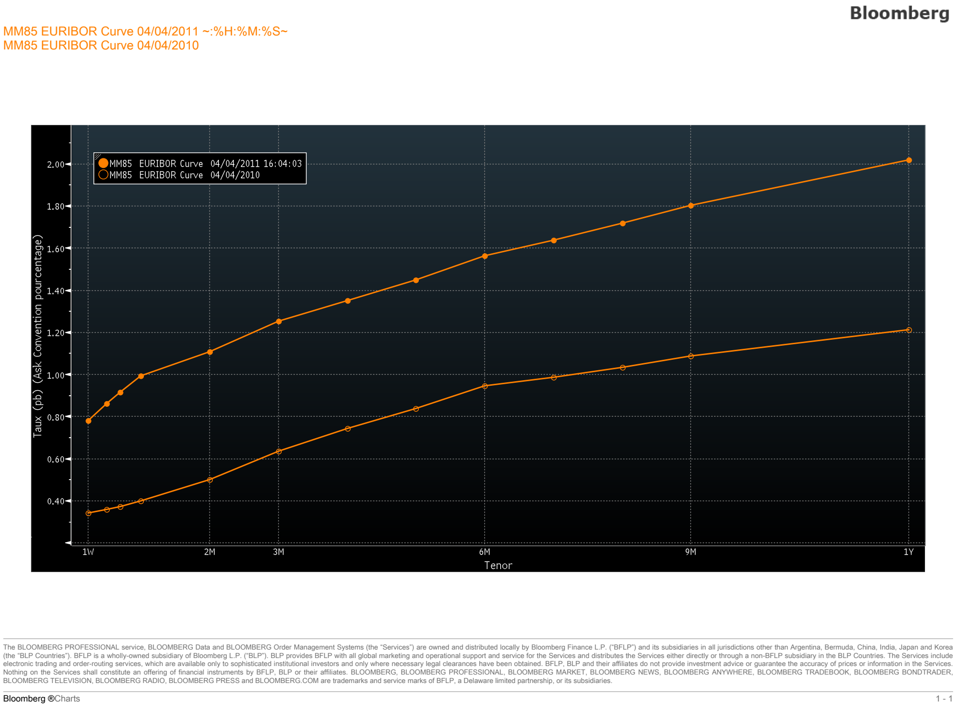
Au niveau de la BCE.
Dans notre exemple, nous prenons le cas de la Zone Euro. Tout part donc de la Banque Centrale Européenne (BCE), la "banque des banques". Régulièrement, la BCE prête aux banques commerciales (Société Générale, BNP Paribas,... et toutes les banques de la Zone Euro), sur une durée de deux semaines, et à un taux d'intérêt égal au taux directeur ("taux de refinancement"). Au mois de mars 2011, les banques se refinancent auprès de la BCE à un taux de 1% [15].

Au niveau des banques commerciales.
Les banques commerciales se prêtent également **entre elles**. Les prêts-emprunts se font sur des périodes allant de la journée (prêt à t et remboursement à $t+1$), à 12M. Le taux d'intérêt appliqué est évidemment différent suivant les banques, mais :

- les prêts *overnight* se font à un taux moyen dit "EONIA" (Euro OverNight Index **Average**) : c'est le taux moyen des prêts overnight ;
- les autres prêts interbancaires ont des échéances de 1W, 2W, 3W, 1M,..., 12M. Le taux d'intérêt *moyen* appliqué est appelé l'EURIBOR (Euro interbank offered rate) : EURIBOR 1W,..., EURIBOR 12M.

Le graphique suivant montre la courbe des taux EURIBOR en vigueur au 4/4/2011 et au 4/4/2010, pour des maturités allant de 1 semaine (1W) à 12 mois (12M).

15. Attention ce taux est annuel.

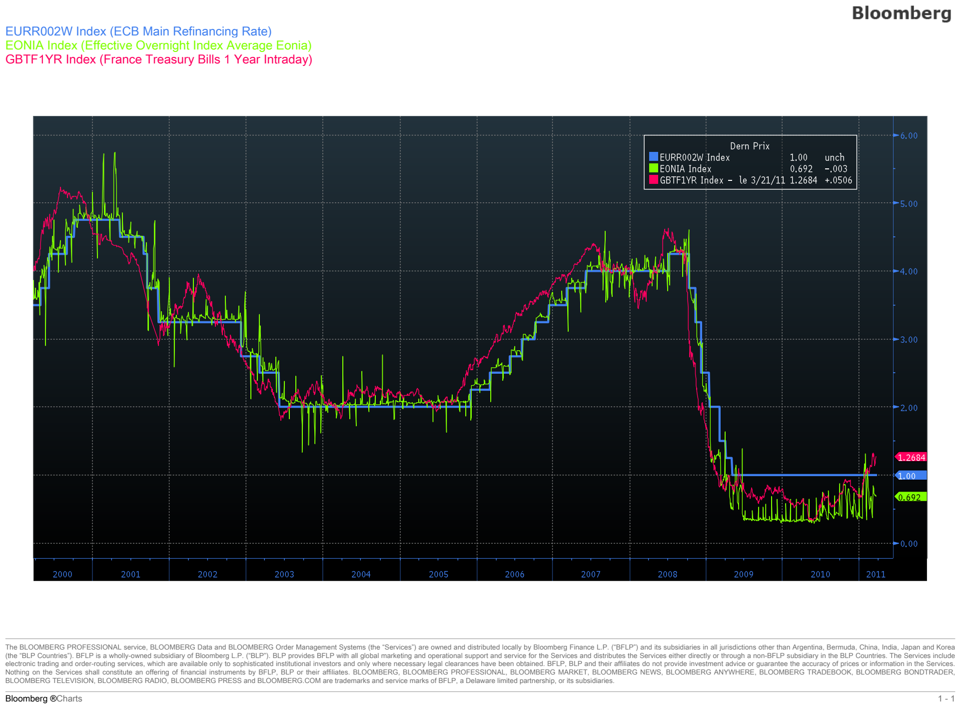


Au niveau des clients.
Enfin, les banques commerciales vont prêter aux clients finaux, c'est-à-dire très concrètement les particuliers, et les entreprises. Alors que les banques empruntent sur du court-terme (auprès de la BCE et des autres banques), elles vont prêter sur du long-terme, à des taux plus élevés, afin de se constituer une marge. Bien évidemment, les particuliers ne peuvent pas emprunter directement auprès de la BCE.

Ainsi :
Si la Banque Centrale décide de baisser son taux directeur, alors les banques vont pouvoir emprunter à moindre frais auprès d'elle, et elles auront alors tendance à répercuter cette baisse du coût de l'argent auprès de leurs clients qui, à leur tour, pourront emprunter pour moins cher. On dit que la Banque Centrale "ouvre les vannes du crédit", cela a pour conséquence de rendre l'investissement moins cher, et de relancer l'économie quand elle va mal. Le point négatif étant que l'inflation risque d'augmenter.
A l'inverse, lorsqu'une Banque Centrale augmente son taux directeur, le coût de l'argent augmente dans sa globalité. L'objectif recherché est alors de calmer les pressions inflationnistes.

Ainsi, par effet de propagation, l'*ensemble* des rendements obligataires va évoluer dans le même sens que le taux directeur. Pour le montrer, voici le graphique représentant :

1. en bleu : le taux de refinancement de la BCE ;
2. en vert : l'EONIA, c'est-à-dire le taux auquel les banques commerciales se prêtent **entre elles** sur 1 jour ;
3. en rose : le taux (YTM) de l'emprunt d'état 1Y (BTF).



Il faut bien comprendre que le taux qui entraîne tous les autres est bien le taux directeur de la BCE. Vous imaginez donc à quel point les décisions de Jean-Claude Trichet sont importantes : le taux de la BCE va driver l'ensemble des taux obligataires. Les taux court-terme vont être très fortement impactés comme vous pouvez le voir (le BTF1Y suit parfaitement l'évolution du taux directeur). Mais au final ce sont tous les emprunts d'Etats qui vont voir leurs taux modifiés.

Prenons le cas d'une hausse du taux directeur de 1% à 1.25%. **Quel va être l'impact sur l'ensemble de la courbe des taux des OAT ?**
Immédiatement, les emprunts français de court-terme vont voir leur rendement augmenter (cf graphique précédent). Cela aura donc pour effet de créer un déséquilibre de la demande sur les obligations moyen-terme : les investisseurs vont délaisser leurs obligations moyen-terme pour des bons de court-terme, plus profitables qu'avant. La demande en obligations de moyen-terme étant moins forte, leur prix va diminuer, et leur rendement à l'échéance (pour les nouveaux investisseurs évidemment) va finir par augmenter.
Le même effet va se produire (mais de manière plus modérée), pour les obligations de long-terme, qui vont être délaissées pour des obligations de court et moyen-terme : leur rendement va également suivre une tendance haussière.

Ainsi, un changement du taux directeur va se répercuter sur l'ensemble des obligations de la zone monétaire en question. Notamment, si la BCE augmente son taux directeur, cette hausse va se propager, entre autres, sur la courbe des taux des OAT [16].

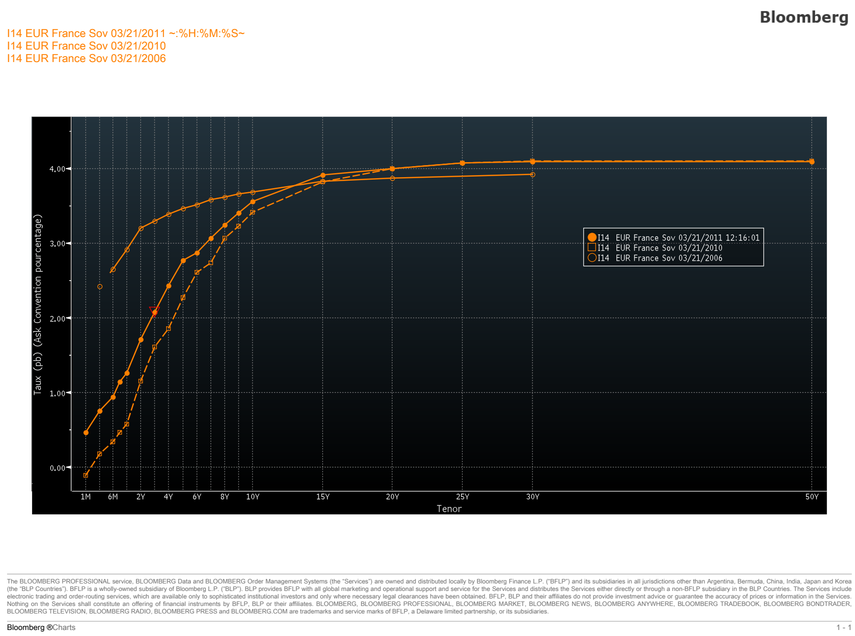
16. Mais aussi sur les autres obligations govies (allemandes, italiennes,...) et corporate de la zone monétaire. L'impact est donc très fort.

Tout cela pour dire que si vous détenez une obligation (govies/corporate) en Zone Euro, alors bien sûr vous êtes exposé au risque d'une dégradation du rating de l'émetteur (risque de crédit), mais aussi à un risque de taux d'intérêt.
C'est-à-dire que si la BCE augmente son taux directeur, alors le prix de votre obligation va être impacté : il va baisser. Alors bien sûr, si vous ne souhaitez pas revendre votre obligation et faire du buy and hold, c'est-à-dire conserver votre obligation jusqu'à maturité, cela ne change rien pour vous. Par contre, de nouveaux investisseurs pourraient se porter acquéreur de votre obligation à un prix préférentiel, à la seconde suivant l'annonce de la hausse du taux directeur. Ils auraient alors un rendement à l'échéance plus intéressant qu'avant l'annonce.
Evidemment, si la BCE baisse son taux directeur, le prix de votre obligation va augmenter, peu ou prou. Le YTM de l'obligation, pour de nouveaux acquéreurs, va subitement diminuer à l'annonce de la baisse du taux directeur

3.8 Courbe des taux d'intérêts

Dans ce chapitre, nous avons analysé l'OAT 50Y de maturité avril 2060, et nous avons vu que son taux était aujourd'hui autour de 4.09%. Nous pouvons également faire la même analyse sur les OAT 30Y, 20Y,..., 1M et "récolter" ainsi, pour chacune de ces obligations, le taux d'intérêt (ou YTM).
Il est alors intéresser de tracer ce que l'on appelle simplement **la courbe des taux** (des emprunts français dans ce cas-ci). Il s'agit de tracer le rendement à l'échéance en fonction de la maturité de l'obligation : YTM=f(T).
Bien sûr, nous pouvons aussi reconstituer la courbe des taux d'hier (avec les YTM en vigueur hier), d'avant-hier (avec les YTM en vigueur avant-hier), et ainsi de suite.

Voici ce que nous obtenons dans le cas de la France (OAT) : nous représentons la courbe des taux aujourd'hui, celle d'il y a 1 an, et celle d'il y a 5 ans.



Analysons ce graphique.
Tout d'abord, le point à bien saisir est que chaque abscisse représente une obligation *différente*. Le point 10Y représente donc le YTM des OAT10Y aujourd'hui, il y a 1 an, et il y a 5 ans. Et le point 10Y n'est pas du tout un "rendement de long-terme" du taux 1Y, comme j'ai pu le lire dans certains comptes-rendus de TP. Ce sont des titres différents.

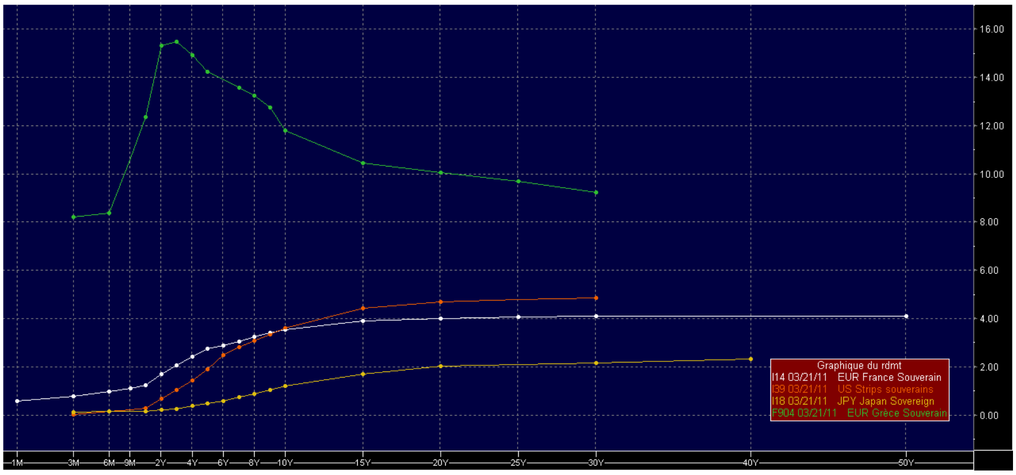
Prenons la situation actuelle. On observe que la courbe des taux est croissante, concave. C'est la forme standard de la courbe des taux. En effet, plus vous vous placez sur des maturités longues, plus vous allez cumuler les deux risques principaux décrits précédemment, à savoir le risque **d'ici là** d'une dégradation de la notation de l'émetteur d'une part, et le risque de hausse des taux par la Banque Centrale, qui ferait baisser le prix de votre obligation d'autre part [17].
On comprend aisément qu'une obligation française de maturité 1Y est moins risquée qu'une obligation 50Y... D'où un rendement plus faible.

Si nous analysons la courbe d'il y a 5 ans, on peut noter qu'elle était nettement moins pentue à l'époque. En effet, entre 2006 et 2011, les taux directeurs de la BCE ont fortement chuté, entraînant :
– une forte chute des taux court-terme,
– une chute modérée des taux moyen-terme,
– une faible chute des taux long-terme, voire une insensibilité.

En réalité les taux de très long-terme sont même plus élevés en 2011 qu'en 2006 ! On pourrait donner une explication en disant qu'en 2011, la France est moins solide financièrement qu'en 2006 sur le long-terme.

Ce graphique montre bien que les taux courts sont très volatils car fortement reliés aux taux directeurs de la BCE, et que le phénomène de "propagation" s'atténue pour les maturités longues (voyez comme les taux longs sont stables dans le temps).

Maintenant, comparons les courbes de taux govies à une date t pour 4 pays : France, Grèce, USA, Japon :



17. Rappel : en cas de stratégie *buy and hold*, vous êtes insensible à ce deuxième risque, mais si vous souhaitez un jour revendre votre obligation, alors une remontée des taux de la Banque Centrale vous sera défavorable.

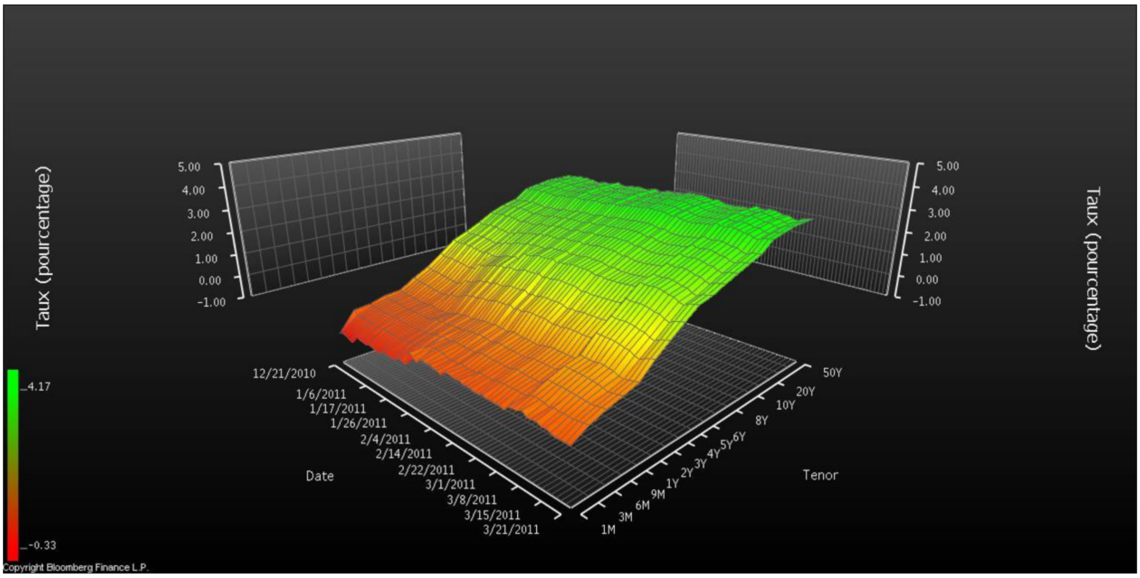
Vous pouvez remarquer que la France est le seul pays, parmi les 4, à émettre des obligations de maturité 50Y. Ces obligations d'ultra long-terme sont émises depuis 2005 seulement, afin de répondre aux besoins d'investissement long des fonds de retraite ou fonds de pension.

A propos de ce graphique, la chose à ne surtout pas dire est : "les taux japonais sont plus bas que les taux américains, donc les obligations japonaises sont moins risquées". En effet, le Japon et les Etats-Unis font parties de zones monétaires *distinctes*. Retournez voir le graphique des taux directeurs : les taux directeurs sont plus bas au Japon qu'aux Etats-Unis. Votre analyse n'est donc pas correcte car deux Etats identiquement notés peuvent avoir des taux complètement différents si les taux directeurs diffèrent.

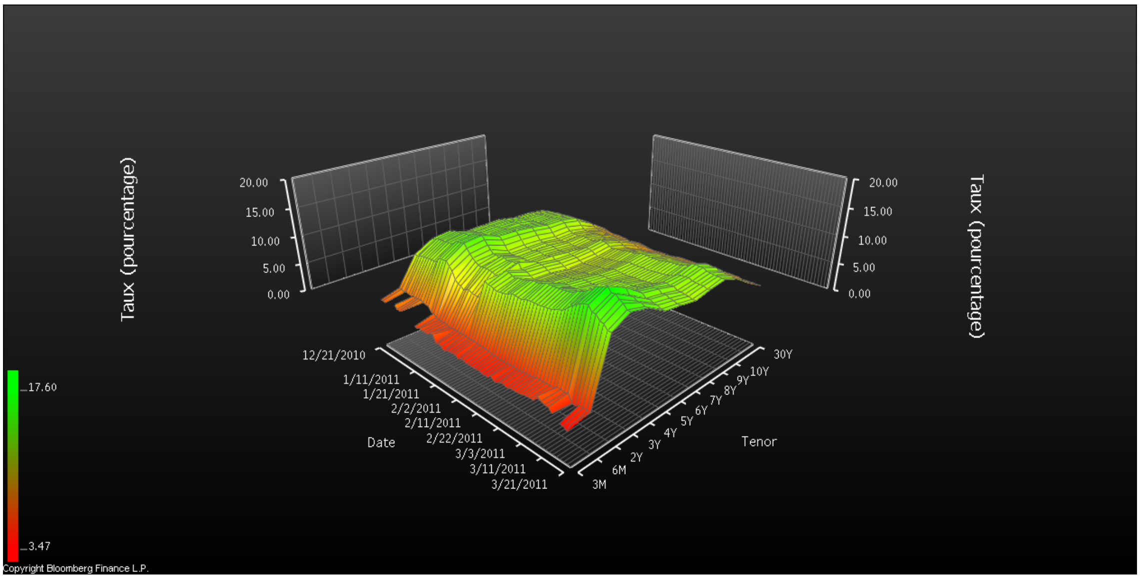
Par contre, vous pouvez tout à fait dire : "les taux français sont plus bas que les taux grecs, donc les obligations françaises sont moins risquées". Cette fois-ci vous comparez des choses comparables.

Pour finir, nous pouvons représenter l'évolution des courbes de taux de ces 4 pays dans le temps : l'axe "Date" représente la date, l'axe "Tenor" représente les maturités, et la cote représente le niveau du taux d'intérêt.

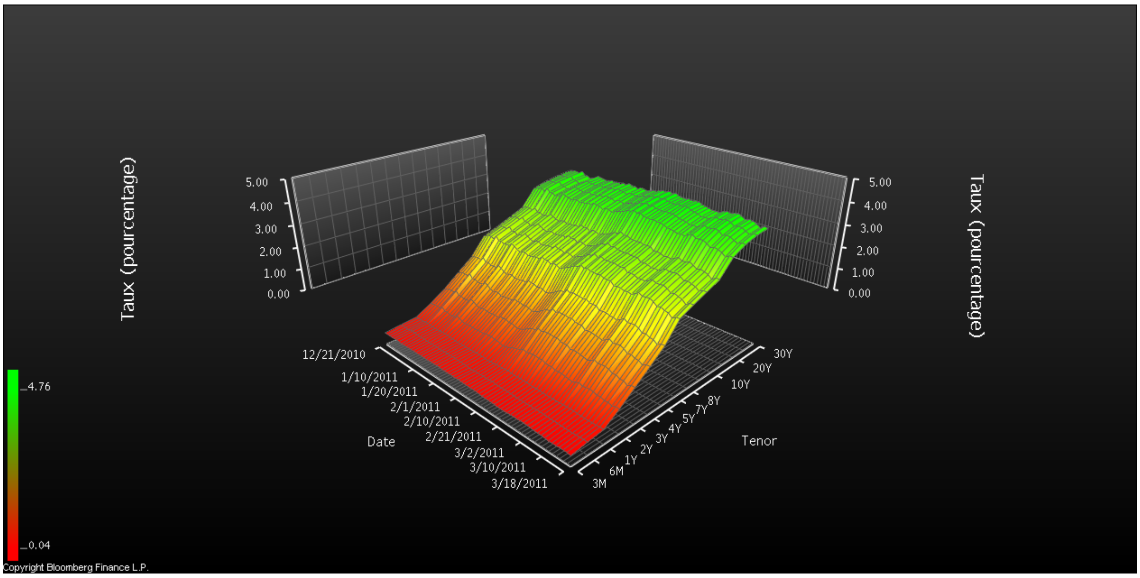
Evolution de la courbe des taux d'emprunts français sur 3M



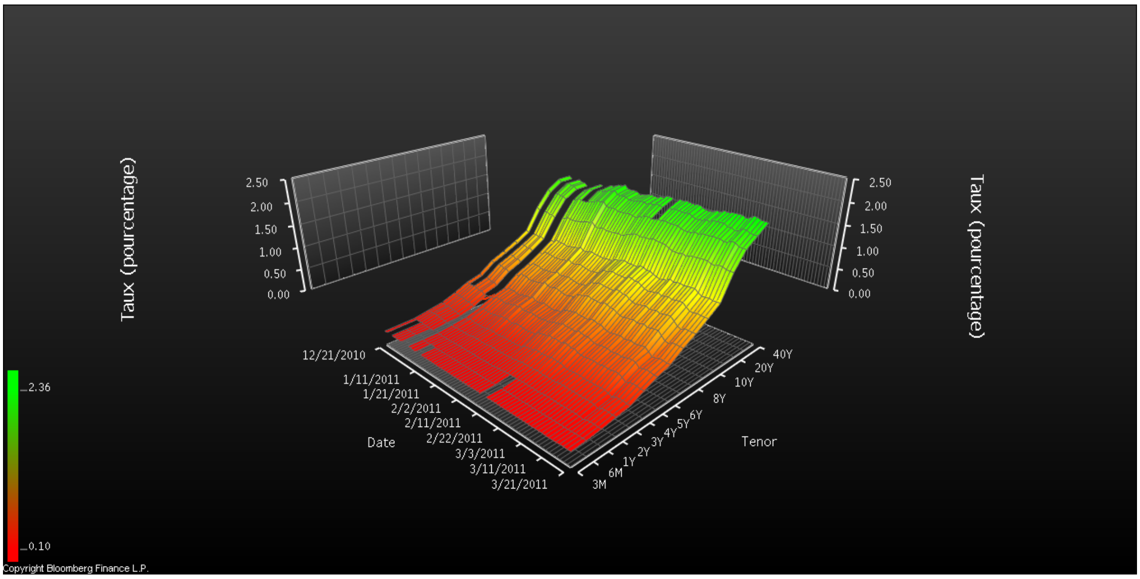
Evolution de la courbe des taux d'emprunts grecs sur 3M



Evolution de la courbe des taux d'emprunts américains sur 3M



Evolution de la courbe des taux d'emprunts japonais sur 3M



Chapitre 4

Les dérivés de taux d'intérêt

A présent que vous avez une idée plus précise sur les obligations, nous pouvons passer aux produits dérivés sur taux d'intérêt. De la même façon que nous avons parcouru précédemment les principaux produits financiers adossés sur les actions (calls et puts), nous allons maintenant voir quels sont les instruments liés aux taux d'intérêts à disposition des investisseurs.

Nous allons nous intéresser à deux grandes familles de produits :
- les produits de couverture contre la hausse (ou la baisse) des taux d'intérêts : les caps, floors et collars ;
- les produits permettant de transformer une dette à taux variable contre une dette à taux fixe (et inversement) : les swaps de taux d'intérêt.

4.1 Protection à la hausse (baisse) des taux d'intérêts

Nous avons évoqué dans le chapitre précédent les **obligations à taux fixe** : les émetteurs de ces obligations paient des coupons fixes, 4.5% par an par exemple, sur toute la durée de vie de l'obligation.

Ces émetteurs sont donc totalement immunisés (insensibles) à une hausse des taux d'intérêts [1]. Par contre, si un émetteur s'endette à taux fixe à une date t, et que les taux baissent juste après, l'émetteur ne profitera de la baisse des taux qu'à la prochaine émission.
Aussi, en cas de forte déflation, l'émetteur paiera des coupons fixes, dont la valeur "réelle", c'est-à-dire *ajustée de l'inflation*, va augmenter, ce qui lui sera défavorable. A l'inverse, en cas de forte inflation, les coupons fixes vont valoir moins "cher" pour l'émetteur en valeur réelle.

Du côté acheteur d'obligation, la même analyse vaut (inversée bien sûr). Ainsi, si les taux montent ou si l'inflation augmente fortement, le détenteur d'une obligation à taux fixe (TF) sera lésé.

De nouvelles obligations sont alors arrivées : les obligations à taux variable (TV). Voyons maintenant comment elles fonctionnent.

1. Rappel : si les taux montent, ce sont les obligations *nouvellement émises* qui deviendront moins favorables à l'émetteur.

4.1.1 Obligations à taux variable

Mécanisme

Contrairement aux obligations à TF, dans les obligations à TV, l'échéancier des flux de paiement n'est pas connu parfaitement à l'avance.

En effet, les coupons ne sont plus fixes, mais variables : leur valeur est **indexée** sur un taux de référence, généralement court-terme. En Zone Euro, ce sont principalement les EURIBOR qui sont utilisés comme taux de référence, cela peut être l'EURIBOR 3M ou l'EURIBOR 6M par exemple.

Les caractéristiques d'une obligation à TV sont les suivantes :
- le nominal N de l'obligation, sur lequel seront calculés les coupons ;
- le taux de référence L, par exemple l'EURIBOR 6M ;
- la périodicité des coupons α (en années), elle est souvent liée au taux de référence : $\alpha = 0.5$ si le taux de référence est l'EURIBOR 6M, $\alpha = 0.25$ pour un EURIBOR 3M,... ;
- la maturité T de l'obligation, nécessairement multiple de α, au passage.

L'échéancier des flux sera le suivant, pour un achat à l'émission de l'obligation :

1. $t = 0$: achat de l'obligation,
2. $t = \alpha, 2\alpha, ..., T - \alpha$: détachement des coupons variables,
3. $t = T$: paiement du nominal (fixe) et du dernier coupon (variable).

Les coupons ont ceci de particulier que leur montant en $t = k\alpha$ n'est pas calculé selon le niveau du taux de référence en vigueur à $t = k\alpha$, mais à $t = (k - 1)\alpha$.

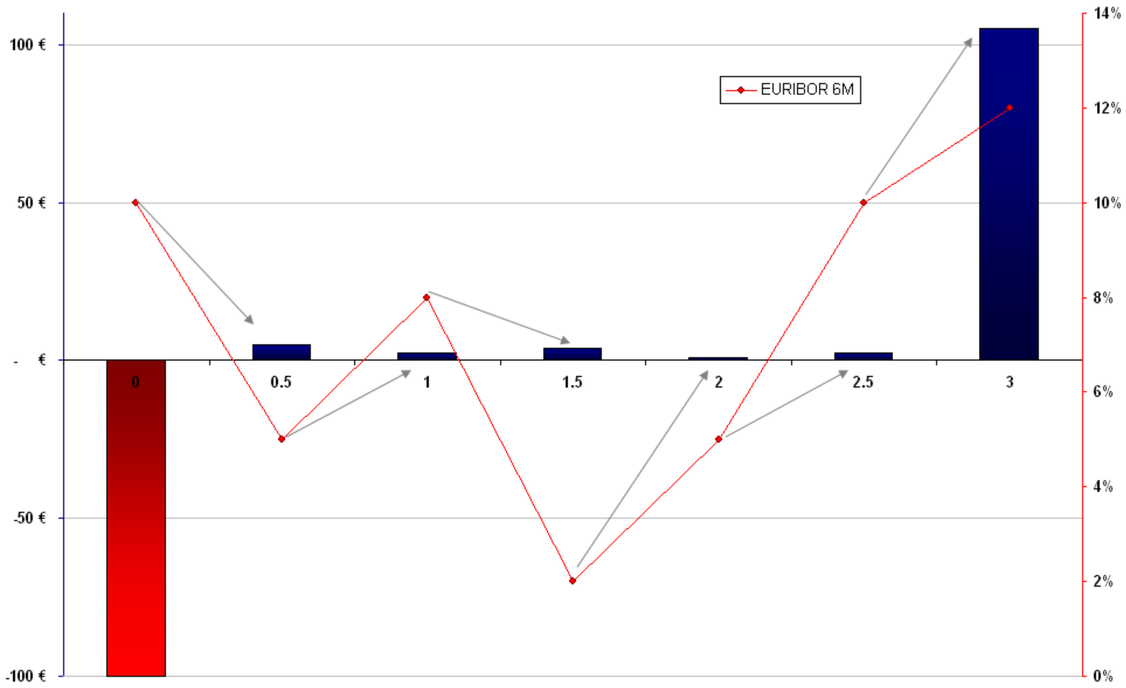
Le montant du coupon à $t = k\alpha$ vaut $C_{k\alpha} = N * \alpha * L_{(k-1)\alpha}$ [2].

Ainsi pour être plus précis, le taux de référence *enregistré* à la date $t = (k - 1)\alpha$ déterminera le coupon en $t = k\alpha$:
- les dates $t = 0, \alpha, ..., T - \alpha$ sont des **dates de constatation** (du taux de référence), encore appelées **dates de fixing** ;
- les dates $t = \alpha, 2\alpha, ..., T$ sont des **dates de paiement**.

Cela permet entre autre de pouvoir calculer le montant du coupon couru entre $t = (k - 1)\alpha$ et $t = k\alpha$. D'ailleurs dans la pratique, c'est un peu différent puisque le coupon pour la période allant de $t = (k-1)\alpha$ à $t = k\alpha$, n'est pas exactement fixé en $t = (k-1)\alpha$, mais quelques jours ouvrés avant.

Voici un petit exemple pour mieux comprendre, de l'échéancier des flux d'une obligation à TV, de nominal 100, de maturité 3Y, délivrant des coupons semestriels indexés sur l'EURIBOR 6M ($\alpha = 0.5$). Les valeurs de l'EURIBOR 6M ont volontairement été exagérées.

2. Correspondant à un coupon *annuel* reconstitué de $N * L_{(k-1)\alpha}$



Notez le *lag* entre la date de fixing du taux de référence et le paiement du coupon (flèches grises). Le premier coupon (à t=0.5) est connu.

Les OAT à taux variable

La France émet deux types d'obligations à taux variables :
- les OAT TEC10, dont le taux de référence est le TEC 10Y [3], ses coupons sont trimestriels ;
- les OATi, dont les coupons sont indexés à un indice d'inflation.

Les obligations à TV sont nettement moins populaires que les obligations à TF : voyez la répartition de la dette de l'Etat, les OAT à taux variables sont à la ligne "titres indexés" (source : Agence France Trésor) :

Dette négociable de l'État - encours, durée de vie et détention par les non-résidents

Valeurs en fin d'année	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009
Encours de dette (en millions d'euros)	**560 161**	**583 045**	**616 259**	**653 285**	**717 191**	**787 741**	**832 859**	**877 350**	**876 590**	**920 724**	**1 016 645**	**1 147 985**
dont titres indexés (1)	*4 340*	*9 937*	*12 827*	*19 431*	*29 502*	*46 589*	*71 089*	*90 352*	*110 485*	*131 848*	*152 411*	*147 831*
OAT	363 443	395 087	419 119	442 471	477 787	511 530	551 955	593 197	609 915	640 700	680 561	718 847
BTAN	149 524	154 270	154 126	158 374	151 227	167 514	183 832	188 830	200 429	201 568	197 803	215 018
BTF	47 194	33 688	43 014	52 440	88 177	108 697	97 072	95 323	66 247	78 456	138 281	214 120

Notez au passage le montant de la dette de l'Etat français... : 1150 milliards d'euros à fin 2009, soit environ 18000 euros par personne.

3. *Taux à Echéance Constante* de maturité 10 ans, calculé par interpolation des taux de rendement à l'échéance des deux OAT qui encadrent au plus près la maturité 10 ans.

Intérêt des obligations à taux variable

L'intérêt de ces obligations, pour l'acheteur d'obligations (le prêteur), est double :
- pouvoir profiter d'une hausse des taux d'intérêts au cours de la vie de l'obligation : si la banque centrale augmente son taux directeur, alors les taux vont globalement monter, et particulièrement le taux de référence. Les coupons vont alors suivre cette hausse (contrairement à une obligation à TF).
- rendre (quasi) insensible les coupons à l'inflation. En effet, en cas de hausse de l'inflation, la banque centrale aura tendance à augmenter son taux directeur.

L'intérêt de ces obligations, pour le vendeur d'obligations (l'emprunteur), est double :
- pouvoir profiter d'une baisse des taux d'intérêts au cours de la vie de l'obligation : si la banque centrale baisse son taux directeur, alors les taux vont globalement baisser, et particulièrement le taux de référence. Les coupons vont alors suivre cette baisse et l'emprunteur paiera des coupons plus faibles.
- pouvoir profiter d'une baisse de l'inflation. Si l'inflation baisse, les coupons deviennent en réalité plus chers *en valeur réelle*. Mais, en cas de baisse de l'inflation, la banque centrale aura tendance à baisser son taux directeur. L'émetteur paiera donc des coupons plus faibles sur les périodes de faible inflation.

De par son mécanisme, le prix des obligations à TV est relativement peu sensible aux variations de taux d'intérêts.

Ces obligations, dont les performances sont fortement liées aux variations de taux d'intérêts, présentent un risque :
- un risque de hausse des taux d'intérêts pour l'émetteur,
- un risque de baisse des taux d'intérêts pour l'acheteur.

Pour maîtriser ce risque, des instruments financiers existent. Nous allons vous les présenter.

4.1.2 Protection à la hausse des taux : le cap

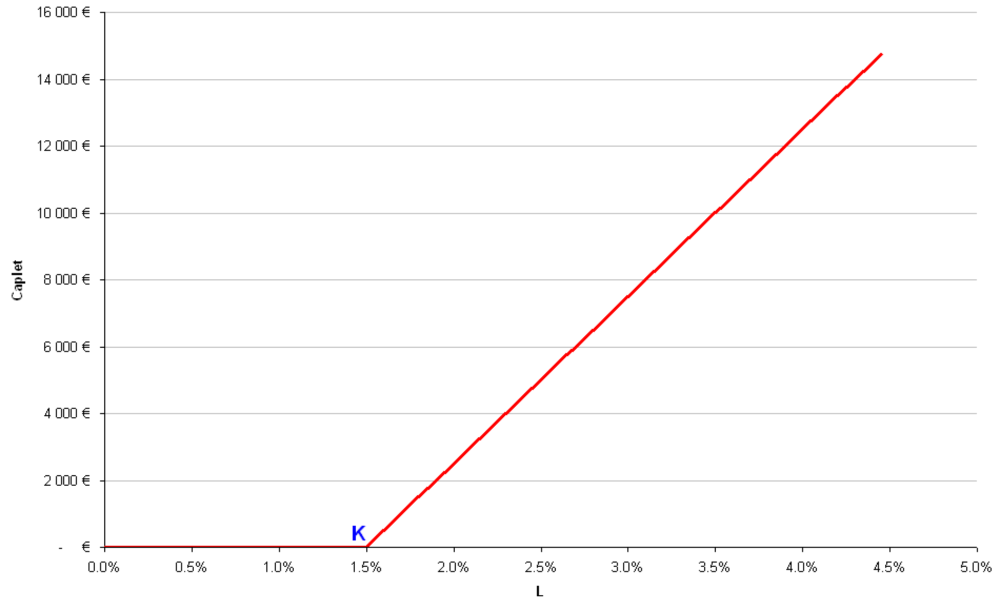
Les instruments permettant de se protéger contre une hausse des taux d'intérêts sont les **caps**. Comment fonctionnent-ils ?

Un cap est une option dont les caractéristiques sont les suivantes :
- un nominal N ;
- un taux de référence L ;
- une périodicité des paiements α ;
- une maturité T ;
- et un strike K, homogène à un taux d'intérêt.

L'investisseur qui achète un cap recevra, aux dates $t = \alpha, 2\alpha, ..., T$, des flux, positifs ou nuls, appelés caplets :

$$Caplet_{k\alpha} = N * \alpha * (L_{(k-1)\alpha} - K)^+$$

Soit, avec $N = 1000000$, $\alpha = 0.5$ et $K = 1.5\%$:



Lorsqu'à une date de fixing, le taux de référence L dépasse le niveau de strike K, l'acheteur du cap recevra (de la part du vendeur, **et à la prochaine date de paiement**) le différentiel de taux $L_{(k-1)\alpha} - K$, appliqué au nominal N, calculé au prorata annuel α.
Si L ne dépasse jamais K, alors l'investisseur aura acheté un cap "pour rien". Attention : cela s'entend **aux dates de fixing** (entre deux dates de fixing, la position de L par rapport à K n'a aucune importance).

Considérons un investisseur endetté sur un nominal N, à un taux de référence L, de périodicité α, sur une maturité T. Il **paiera** aux dates $t = \alpha, 2\alpha, ..., T$, les coupons

$$C_{k\alpha} = N * \alpha * L_{(k-1)\alpha}$$

Cet investisseur, anticipant une hausse du taux de référence L, a acheté, **à la même date**, un cap **de caractéristiques strictement similaires**, dont le strike est égal à K. Il **recevra** aux dates $t = \alpha, 2\alpha, ..., T$, les caplets

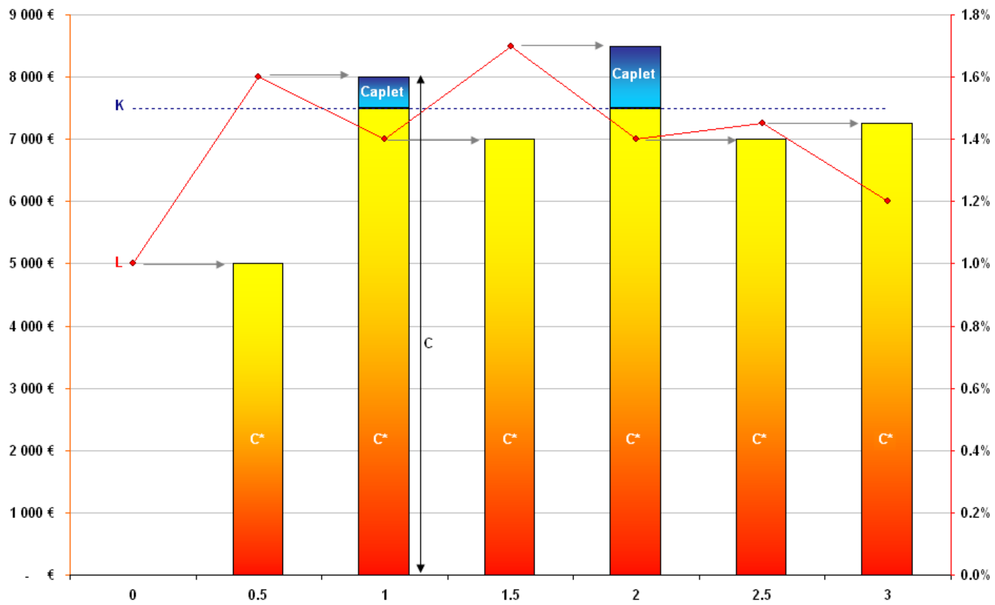
$$Caplet_{k\alpha} = N * \alpha * (L_{(k-1)\alpha} - K)^+$$

Au final, ses coupons **nets** seront donc *capés* au niveau de taux K :

$$C^*_{k\alpha} = N * \alpha * min(L_{(k-1)\alpha}, K)$$

Le cap est donc un moyen de caper son taux d'endettement à un niveau choisi K. Evidemment, plus K est faible, plus la prime du cap sera élevée.

Prenons le cas d'une entreprise qui s'est endettée à taux variable, disons sur l'EURIBOR 6M, sur une période de 4 ans, sur un nominal de 1000000 EUR. Quelques mois plus tard, cette entreprise anticipe une prochaine montée des taux, qui lui serait défavorable. Un an après, alors que son emprunt a une échéance résiduelle de $T = 3$ ans, elle se résout à acheter un cap de mêmes caractéristiques que son emprunt (de maturité $T = 3Y$), à un niveau de strike $K = 1.5\%$ [4]. Alors, l'échéancier des flux de paiement est le suivant [5] :



La courbe rouge en trait plein représente le niveau de l'EURIBOR 6M, et en pointillés bleus, le strike du cap. Les bâtons entiers représentent les coupons *payés* par l'emprunteur, et les caplets *reçus* apparaissent en bleu (lorsqu'ils ne sont pas nuls). Les coupons nets sont affichés en orange.

On voit nettement l'effet du cap, puisque les coupons sont capés à $K = 1.4\%$ annuels soit $\alpha * K = 0.75\%$ tous les 6 mois. La valeur **maximale** du coupon net est donc de $N * \alpha * K = 7500$, quelle que soit l'évolution du taux de référence : l'entreprise est couverte contre une hausse des taux d'intérêts au delà de 1.5%, et peut toujours profiter d'une baisse éventuelle.

Au final, en incluant le prix du cap P_C [6], l'emprunteur couvert sera endetté à un taux annuel maximum de $K + \frac{P_C}{T}$.

Ainsi, dans notre exemple, si la prime du cap est de $P_C = 0.3\%$ (soit un paiement initial de 3000 EUR), alors l'emprunteur couvert se sera endetté à un taux annuel maximum de $K + \frac{P_C}{T} = 1.6\%$.

4. Le cap (comme le floor) sont des produits totalement indépendants de l'opération d'emprunt : l'achat d'un cap par l'emprunteur est sans conséquence pour le prêteur.

5. Pour rendre le graphique plus lisible, nous avons "inversé" le graphique, c'est-à-dire que les coupons *payés* ne sont pas négatifs mais positifs. Aussi, nous n'avons pas représenté la réception du nominal à $t = 0$, ni son remboursement à $t = T$, pour ne pas écraser l'histogramme.

6. Le prix d'un cap est toujours exprimé en pourcentage du nominal, et traditionnellement payé en une seule fois (on parle de prime *flat*). Ainsi, si la prime est de P_C pour une couverture sur T années, le surcoût annuel de l'emprunt couvert sera de $\frac{P_C}{T}$.

4.1.3 Protection à la baisse des taux : le floor

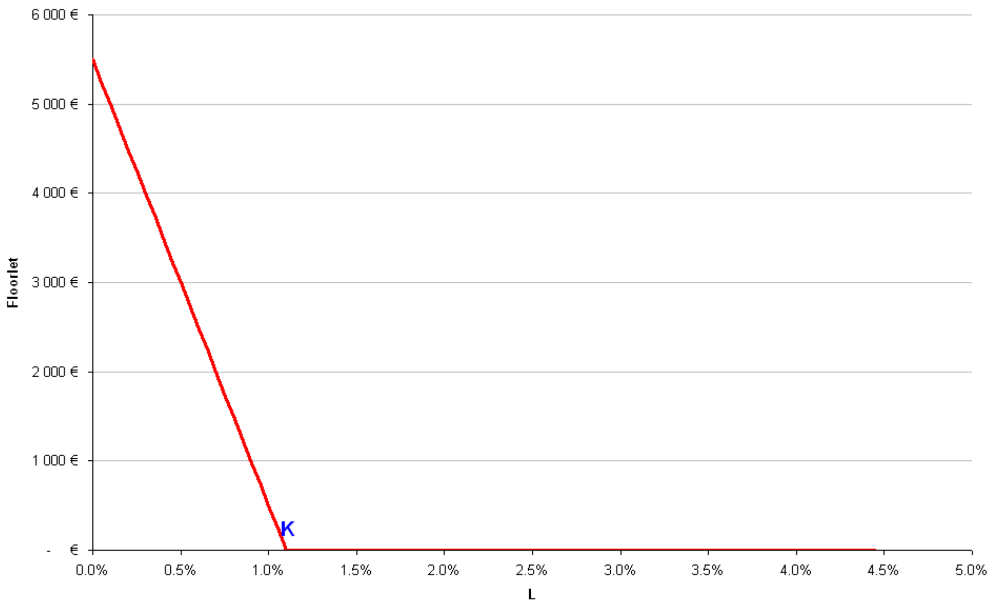
Les instruments permettant de se protéger contre une baisse des taux d'intérêts sont les **floors**. Comment fonctionnent-ils ?

Un floor est une option dont les caractéristiques sont les suivantes :
- un nominal N ;
- un taux de référence L ;
- une périodicité des paiements α ;
- une maturité T ;
- et un strike K, homogène à un taux d'intérêt.

L'investisseur qui achète un floor recevra, aux dates $t = \alpha, 2\alpha, ..., T$, des flux, positifs ou nuls, appelés floorlets :

$$Floorlet_{k\alpha} = N * \alpha * (K - L_{(k-1)\alpha})^+$$

Soit, avec $N = 1000000$, $\alpha = 0.5$ et $K = 1.1\%$:



Lorsqu'à une date de fixing, le taux de référence L passe sous le niveau de strike K, l'acheteur du floor recevra (de la part du vendeur, **et à la prochaine date de paiement**) le différentiel de taux $K - L_{(k-1)\alpha}$, appliqué au nominal N, calculé au prorata annuel α.
Si L ne passe jamais sous K, alors l'investisseur aura acheté un floor "pour rien".

Un investisseur a acheté une obligation à TV de nominal N, à un taux de référence L, de périodicité α, sur une maturité T. Il **recevra** aux dates $t = \alpha, 2\alpha, ..., T$, les coupons

$$C_{k\alpha} = N * \alpha * L_{(k-1)\alpha}$$

Cet investisseur, anticipant une baisse du taux de référence L, a acheté, **à la même date**, un floor **de caractéristiques strictement similaires**, dont le strike est égal à K. Il **recevra** aux dates

$t = \alpha, 2\alpha, ..., T$, les floorlets

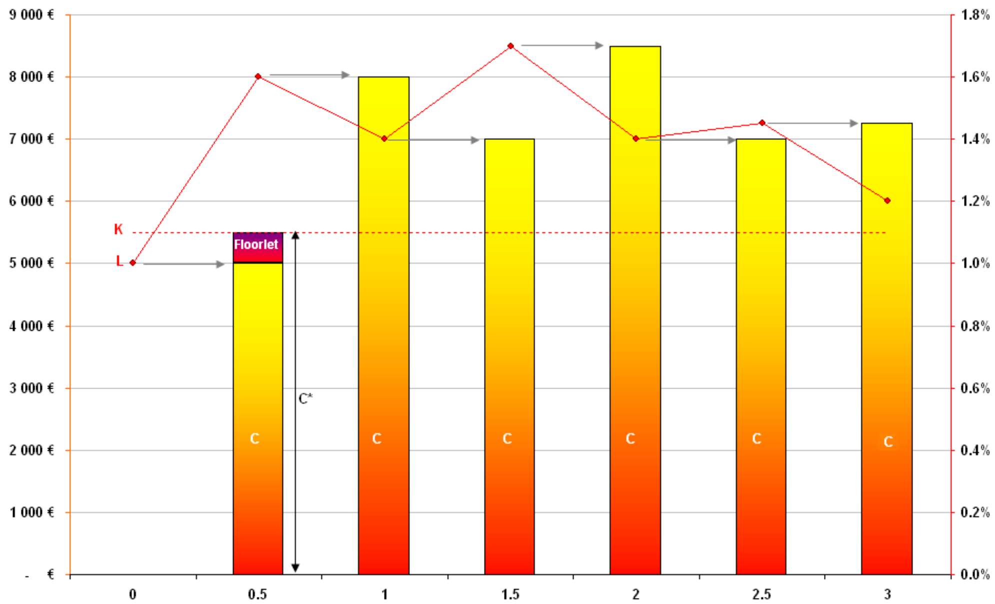
$$Floorlet_{k\alpha} = N * \alpha * (K - L_{(k-1)\alpha})^+$$

Au final, ses coupons **nets** seront donc *floorés* au niveau de taux K :

$$C^*_{k\alpha} = N * \alpha * max(L_{(k-1)\alpha}, K)$$

Le floor est donc un moyen de floorer le montant de ses coupons à un niveau choisi K. Evidemment, plus K est élevé, plus la prime du floor sera élevée.

Prenons le cas de l'organisme ayant *prêté* à l'entreprise citée précédemment. Un an après le début du prêt (échéance résiduelle de $T = 3$ ans), anticipant une baisse du taux de référence qui lui serait défavorable, le prêteur décide d'acheter un floor de mêmes caractéristiques que son prêt, de maturité $T = 3Y$, à un niveau de strike $K = 1.1\%$.
Alors, l'échéancier des flux de paiement est le suivant [7] :



La courbe rouge en trait plein représente le niveau de l'EURIBOR 6M, et en pointillés rouges, le strike du floor. Les bâtons oranges représentent les coupons *reçus* par le prêteur, et les floorlets *reçus* apparaissent en violet (lorsqu'ils ne sont pas nuls). Les bâtons complets représentent les coupons totaux.

Cette fois-ci les coupons sont floorés à $K = 1.1\%$ annuels soit $\alpha * K = 0.55\%$ tous les 6 mois. La valeur **minimale** du coupon semestriel est donc de $N * \alpha * K = 5500$, quelle que soit l'évolution du taux de référence : le créancier est couvert contre une baisse des taux d'intérêts en deçà de 1.1%, et peut toujours profiter d'une hausse éventuelle.

7. Nous n'avons pas représenté le paiement du nominal à $t = 0$, ni son remboursement à $t = T$, pour ne pas écraser l'histogramme.

Au final, en incluant le prix du floor P_F, le créancier couvert prêtera à un taux annuel minimum de $K - \frac{P_F}{T}$.

4.1.4 Protection à la hausse des taux (bis) : le collar

Un investisseur persuadé de la hausse des taux d'intérêts aura tout intérêt à acheter une protection via l'achat d'un cap.
Un investisseur persuadé d'une hausse durable des taux d'intérêts aura tout intérêt à acheter une protection via l'achat d'un **collar**.

Qu'est ce qu'un collar ? Un collar est tout simplement la combinaison :
- de l'**achat d'un cap** de strike K_C,
- et de la **vente d'un floor** de mêmes caractéristiques (N, L, α, T), de strike K_F, avec $K_C > K_F$.

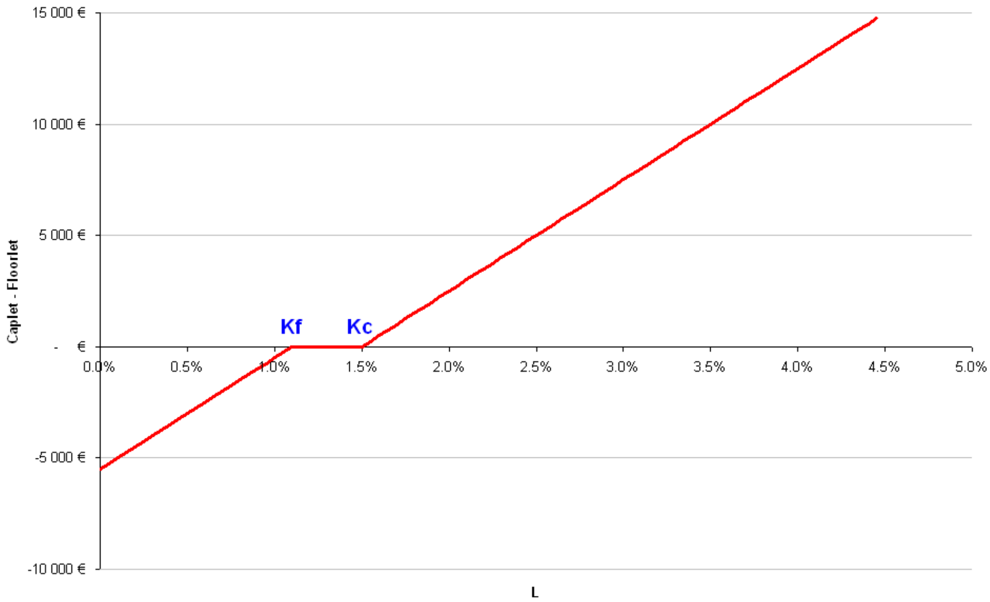
Ainsi :
- l'achat du cap va fournir une protection à la hausse des taux d'intérêts,
- la vente du floor va vous rapporter une prime (en contrepartie de laquelle vous paierez des flux si L baisse en dessous de K_F).

Cela permet à l'investisseur de se couvrir contre la hausse des taux, à coût réduit grâce à la vente du floor. Attention car si les taux baissent durablement, la stratégie peut se révéler perdante.

L'investisseur qui achète un collar "recevra", aux dates $t = \alpha, 2\alpha, ..., T$, des flux positifs (partie cap si $L_{(k-1)\alpha} > K_C$), négatifs (partie floor si $L_{(k-1)\alpha} < K_F$), ou nuls (si $K_F \leq L_{(k-1)\alpha} \leq K_C$) :

$$X_{k\alpha} = N * \alpha * \left[(K_C - L_{(k-1)\alpha})^+ - (L_{(k-1)\alpha} - K_F)^+ \right]$$

Soit, avec $N = 1000000$, $\alpha = 0.5$, $K_C = 1.5\%$ et $K_F = 1.1\%$:

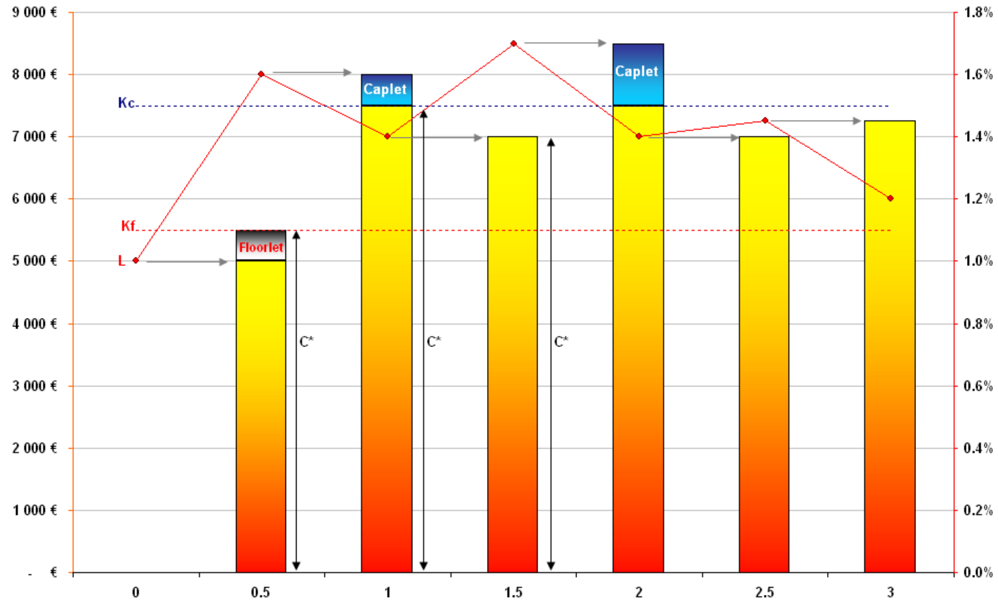


Cela concerne le collar seul. Pour un organisme ayant contracté un emprunt, le taux d'intérêt net sera alors capé à K_C, mais flooré à K_F : les coupons nets des flux du collar vaudront :

$$C^*_{k\alpha} = N * \alpha * min(max(L_{(k-1)\alpha}, K_F), K_C)$$

Ainsi l'opération d'emprunt couverte par un collar permettra de caper le taux d'emprunt à K_C, mais de le floorer à K_F : il ne profitera de la baisse du taux de référence que jusqu'à K_F, pas plus.

Reprenons l'exemple de l'entreprise qui s'est endettée à taux variable. Plutôt que d'acheter un cap, elle décide finalement d'acheter un collar pour minimiser le coût de sa couverture. Le strike du cap est égal à $K_C = 1.5\%$ et celui du floor $K_F = 1.1\%$. Au final, l'échéancier (inversé) de ses **paiements** est le suivant :



Le cap est activé deux fois, et le floor une fois.
A $t = 0.5$, l'acheteur du collar va devoir payer un floorlet : à cette date tout se passe comme si le taux de référence avait été égal à K_F.
A $t = 1$ et $t = 2$, l'acheteur du collar va recevoir un caplet : à ces dates tout se passe comme si le taux de référence avait été égal à K_C.

Un "zero-cost collar" est un collar dont la prime du cap est exactement compensée par la vente du floor. Cela permet de se couvrir contre une hausse des taux à coût nul (à t=0).

4.1.5 Protection à la baisse des taux (bis) : le reverse collar

Le reverse collar est l'exact opposé du collar. C'est la combinaison
- de la **vente d'un cap** de strike K_C,
- et de l'**achat d'un floor** de mêmes caractéristiques (N, L, α, T), de strike K_F, avec $K_C > K_F$.

Il est destiné aux acheteurs d'obligations à taux variables craignant une baisse durable des taux d'intérêts. Si le taux de référence est inférieur à K_F [8], il touchera des floorlets ramenant le taux de prêt à K_F. Si le taux passe au dessus de K_C, alors il devra payer des caplets (mais si l'investisseur a acheté un reverse collar plutôt qu'un simple floor, c'est qu'il n'envisage pas cette possibilité). Il ne profitera donc pas à 100% de la hausse du taux de référence.

Un "zero-cost reverse collar" est un reverse collar dont la prime du floor est exactement compensée par la vente du cap. Cela permet de se couvrir contre une baisse des taux à coût nul (à t=0).

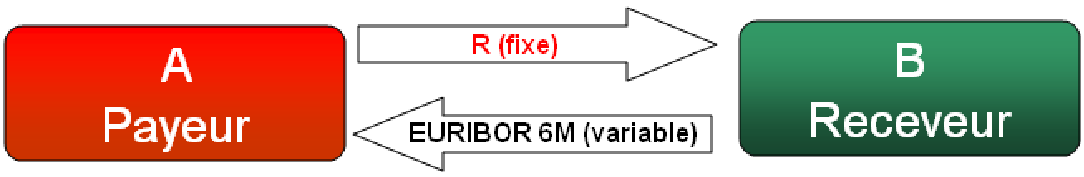
4.2 Passer d'un endettement variable à un endettement fixe : le swap

Un organisme s'étant endetté à taux variable peut changer d'avis à tout moment. Ainsi, s'il souhaite transformer son endettement à TV en endettement à TF, il peut conclure un **swap de taux d'intérêt** avec une contrepartie désireuse de faire l'opération inverse.

Reprenons le cas de l'entreprise s'étant endettée à TV :
- nominal $N = 1000000$,
- taux de référence L : EURIBOR 6M,
- coupons semestriels $\alpha = 0.5$,
- maturité de $4Y$.

Imaginons qu'un an après, l'entreprise souhaite figer son endettement. Elle va donc conclure un swap de mêmes caractéristiques, de maturité $T = 3Y$, avec une contrepartie.

L'entreprise (**A**) va alors payer un montant **fixe** égal à $N * \alpha * R$ à la contrepartie **B**, tous les 6 mois ($\alpha = 0.5$). On dit que A **paie la jambe fixe** du swap : il est le "payeur".
La contrepartie (**B**) va payer un montant **variable** égal à $N * \alpha * L_t$ à **A**, tous les 6 mois. On dit que B **paie la jambe variable** du swap : il est le "receveur".
Le nominal N n'est pas échangé, il sert simplement de base de calcul pour le paiement des flux ("jambes").
Ainsi, au final, A transformera son endettement à taux variable en endettement à taux fixe R.



Le taux d'intérêt fixe R payé en contrepartie du taux variable EURIBOR 6M est appelé le **taux de swap**. Il est déterminé par le marché, de telle sorte qu'à $t = 0$, ni A ni B n'aient de prime à payer : la valeur d'un swap est nulle à $t = 0$. En effet le *taux de swap* est déterminé de telle sorte qu'en moyenne sur toute la durée de vie du swap, les paiements de A compensent exactement ceux de B.

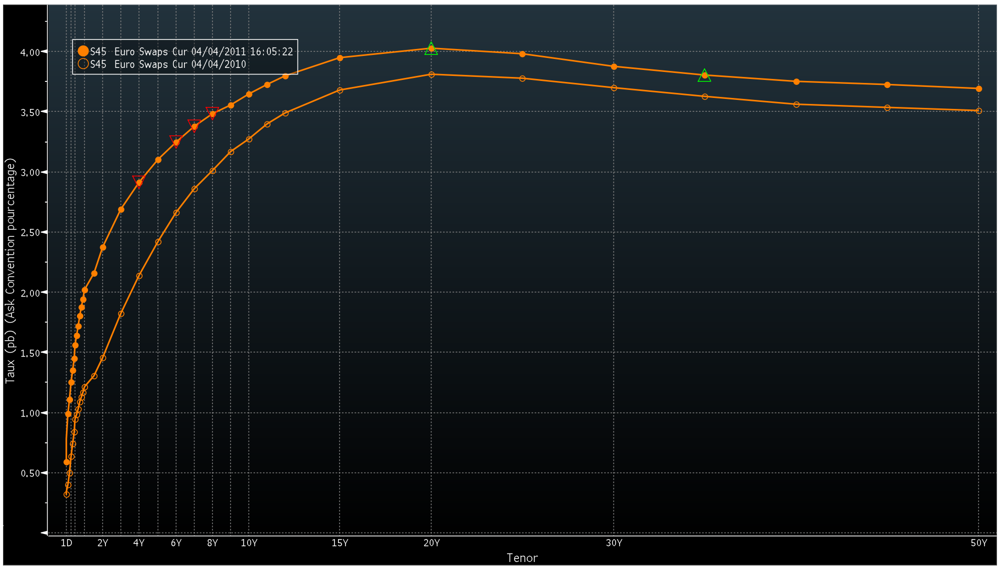
8. Tout ceci s'entend aux dates de fixing, comme toujours.

Dans le graphique suivant, nous affichons la courbe des taux swaps en vigueur au 4/4/2011 (et au 4/4/2010). Cette courbe se décompose en réalité en 3 parties :

- le taux EONIA (*overnight*) ;
- la courbe des taux EURIBOR ($T = 1W \to T = 12M$), déjà introduite précédemment ;
- et la **courbe des taux swaps contre EURIBOR 6M**, pour des maturités de swaps s'étalant de 1.5 à 50 ans.

Bloomberg

S45 Euro Swaps Cur 04/04/2011 ~:%H:%M:%S~
S45 Euro Swaps Cur 04/04/2010



Ainsi, aujourd'hui, vous pourriez entrer dans un swap de maturité $T = 3Y$, payer la jambe variable indexée sur l'EURIBOR 6M (*aujourd'hui* autour de 1.60%), et recevoir la jambe fixe du swap au taux $R \approx 2.70\%$.

Les swaps sont des instruments financiers très courants et extrêmement variés : il existe des swaps de devises, des swaps de performances, des swaps de volatilité... adaptés aux besoins des opérateurs de marché. Mais l'idée de base est toujours la même : échanger des flux financiers prédéterminés avec une contrepartie.