Analyse numérique matricielle – Feuille de TP n°2

Factorisation de Cholesky

ENSIIE 1A
2017-2018

1 Rappels de cours

La factorisation de Cholesky est une adaptation de la factorisation LU pour les matrices symétriques définies positives. Plus précisément, on cherche une décomposition $A = B\,{}^tB$ où B est une matrice triangulaire inférieure dont les termes diagonaux sont positifs (ce qui assure l'unicité de la décomposition).

L'algorithme de factorisation de Cholesky suit une méthode d'identification successive des éléments en procédant colonne par colonne (de la première à la dernière) où, pour chaque colonne j, on trouve l'élément de la ligne i pour i de j à n à l'aide des éléments précédemment calculés.

2 Algorithme

1. Écrire **sur papier** l'algorithme de factorisation de Cholesky d'une matrice symétrique définie positive $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$.

3 Applications numériques

2. Ecrire une fonction Scilab `[B]=Cholesky(A)` qui renvoie la matrice B (triangulaire inférieure) de la factorisation de Cholesky. Appliquer cette fonction à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 10 & 18 & 12 \\ 10 & 15 & 7 & 13 \\ 18 & 7 & 27 & 7 \\ 12 & 13 & 7 & 22 \end{pmatrix}.$$

3. Écrire une fonction `[x]=ResolutionCholesky(A,b)` qui résout le système $Ax = b$ avec A une matrice symétrique définie positive et b un vecteur donné.
   Appliquer cette fonction à la matrice A donnée précédemment et le vecteur
   $$b = {}^t(53, 72, 26, 97)$$

4. Soit le système tridiagonal $A^2x = b$ où :
   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   On se propose de comparer les temps de calcul de différentes méthodes de résolution en fonction de la taille n du système.

   On testera les méthodes utilisant les décompositions suivantes :
   — LU sur la matrice A^2,
   — LU sur la matrice A,
   — Cholesky sur la matrice A^2,
   — Cholesky sur la matrice A.
   On veillera dans un premier temps à ce que chaque méthode donne la bonne solution (vérification par calcul direct).

   Tracer les temps de calcul en utilisant les fonctions `tic()` et `toc()` pour diverses valeurs de n (par exemple pour n variant de 150 à 250 par pas de 10).