

Projet de Mathématiques

Rapport

Sommaire

I. Introduction & présentation du sujet

II. Mise en place de pricers par la méthode de Cox-Ross-Rubinstein

III. Mise en place de pricers par la méthode de Black Scholes

IV. Comparaison des deux modèles avec étude de la convergence des prix

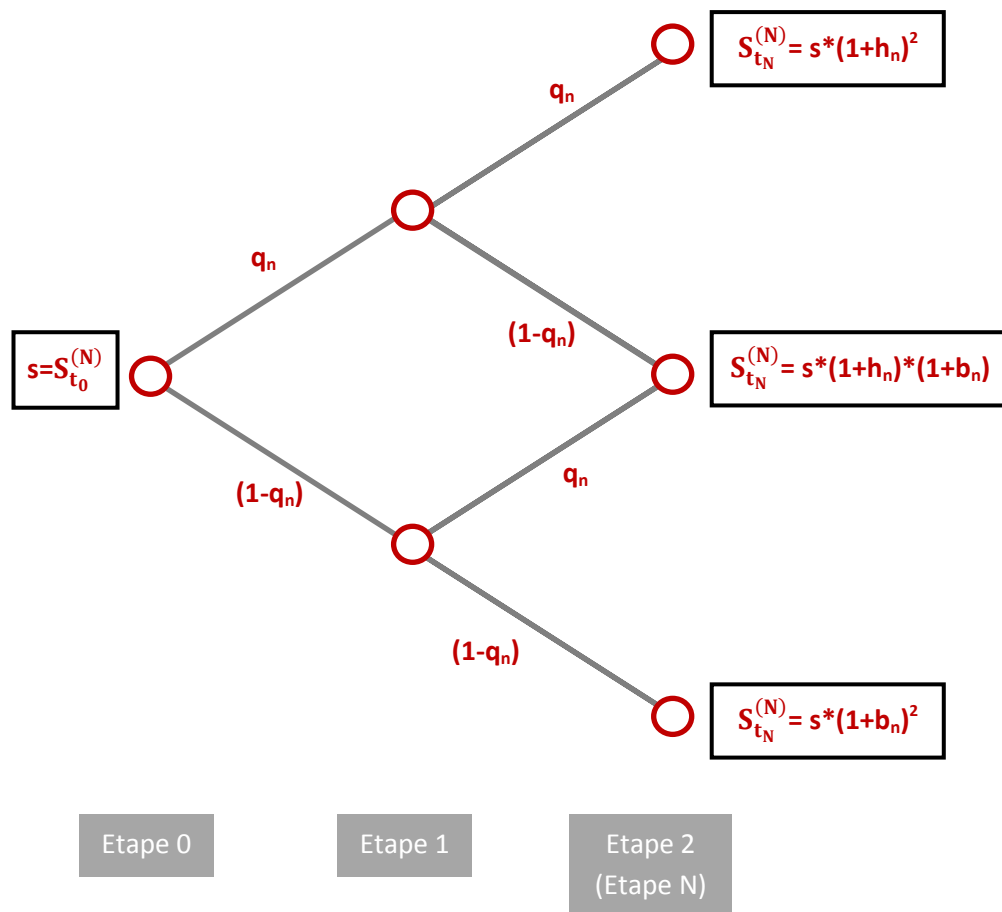
V. EDP de Black Scholes

I. Introduction & présentation du sujet

L'objectif de ce projet est de s'intéresser à la modélisation d'un marché financier par le biais de l'utilisation de modèles connus et de la mise en place de pricers et autres structures mathématiques sous Scilab. Cette modélisation permet notamment de montrer l'utilité et la puissance calculatoire du logiciel.

Pour les questions ayant nécessité une implémentation sous Scilab, les fichiers de code sont disponibles avec la nomenclature : Question X (str) avec X le numéro de la question dans l'énoncé et str le contenu de ce fichier de code en termes de fonctions et de résultats.

Outre les diverses informations utiles déjà fournies dans l'énoncé, voici un arbre résumant la situation qui s'est avéré plusieurs fois pratiques pendant nos recherches.



II. Mise en place de pricers par la méthode de Cox-Ross-Rubinstein

On travaille dans un premier temps sur le modèle de Cox-Ross-Rubinstein présenté dans l'énoncé.

En notant $\Omega := (\omega_i)_{1 \leq i \leq l}$ l'ensemble des événements possibles, on a nécessairement $l = N$.

De plus, $S_{t_N}^{(N)}$ peut prendre les valeurs suivantes :

$$\begin{aligned} & s * (1 + b_N)^0 * (1 + h_N)^N \\ & s * (1 + b_N)^1 * (1 + h_N)^{N-1} \\ & \dots \\ & s * (1 + b_N)^{N-1} * (1 + h_N)^1 \\ & s * (1 + b_N)^N * (1 + h_N)^0 \end{aligned}$$

Question 1 :

Par définition, $q_N = \mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1 + h_N)$.

Or, on sait que $E_{\mathbb{R}}[T_1^{(N)}] = 1 + r_N$. (1)

Et par définition, $E_{\mathbb{R}}[T_1^{(N)}] = \sum_{x \in T_1^{(N)}(\Omega)} x * \mathbb{Q}(T_1^{(N)} = x)$ avec $T_1^{(N)}(\Omega) = \{1 + h_N ; 1 + b_N\}$.

Soit encore :

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{R}}[T_1^{(N)}] &= (1 + h_N) * \mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1 + h_N) + (1 + b_N) * \mathbb{Q}(T_1^{(N)} = 1 + b_N) \\ \Leftrightarrow E_{\mathbb{R}}[T_1^{(N)}] &= (1 + h_N) * q_N + (1 + b_N) * (1 - q_N) \end{aligned} \quad (2)$$

En utilisant (1) et (2) et en isolant q_N , on obtient : $q_N = \frac{r_N - b_N}{h_N - b_N}$

Question 2 :

On cherche maintenant la valeur de p_N .

Par définition, $p(N) = \frac{1}{(1 + r_N)^N} \sum_{x \in S_{t_N}^{(N)}(\Omega)} f(x) * \mathbb{Q}(S_{t_N}^{(N)} = x)$

avec $S_{t_N}^{(N)}$ prenant les différentes valeurs présentées ci-dessus, ce qui nous amène à écrire :

$$p(N) = \frac{1}{(1 + r_N)^N} \sum_{i=0}^N f(s * (1 + h_N)^i * (1 + b_N)^{N-i}) * \mathbb{Q}(S_{t_N}^{(N)} = s * (1 + h_N)^i * (1 + b_N)^{N-i})$$

La situation étant schématisée par l'arbre présenté en amont, on a alors

$$\mathbb{Q}(S_{t_N}^{(N)} = s * (1 + h_N)^i * (1 + b_N)^{N-i}) = \binom{N}{i} * q_N^i * (1 - q_N)^{N-i}$$

Donc on obtient

$$p(N) = \frac{1}{(1 + r_N)^N} \sum_{i=0}^N f(s * (1 + h_N)^i * (1 + b_N)^{N-i}) * \binom{N}{i} * q_N^i * (1 - q_N)^{N-i}$$

On implémente maintenant deux pricers, price1 et price2, puis on les compare.

price1 utilise directement les calculs effectués précédemment alors que price2 est itératif. On souhaite donc vérifier qu'on retrouve le même résultat pour les deux.

Question 3 & 4 :

Le test avec les données de l'énoncé renvoie 0.0049045.

Question 5 & 6 :

Pour mettre en place un algorithme itératif, il est nécessaire de trouver une formule par récurrence. L'énoncé nous fournit les définitions de $v_N(S_{t_N}^{(N)})$ et $v_k(S_{t_k}^{(N)})$. On cherche une expression simplifiée de $v_k(S_{t_k}^{(N)})$:

$$E[v_{k+1}(S_{t_{k+1}}^{(N)}) | S_{t_k}^{(N)}] = \sum_{x \in S_{t_{k+1}}^{(N)}(\Omega)} v_{k+1}(x) * \mathbb{Q}(S_{t_{k+1}}^{(N)} = x)$$

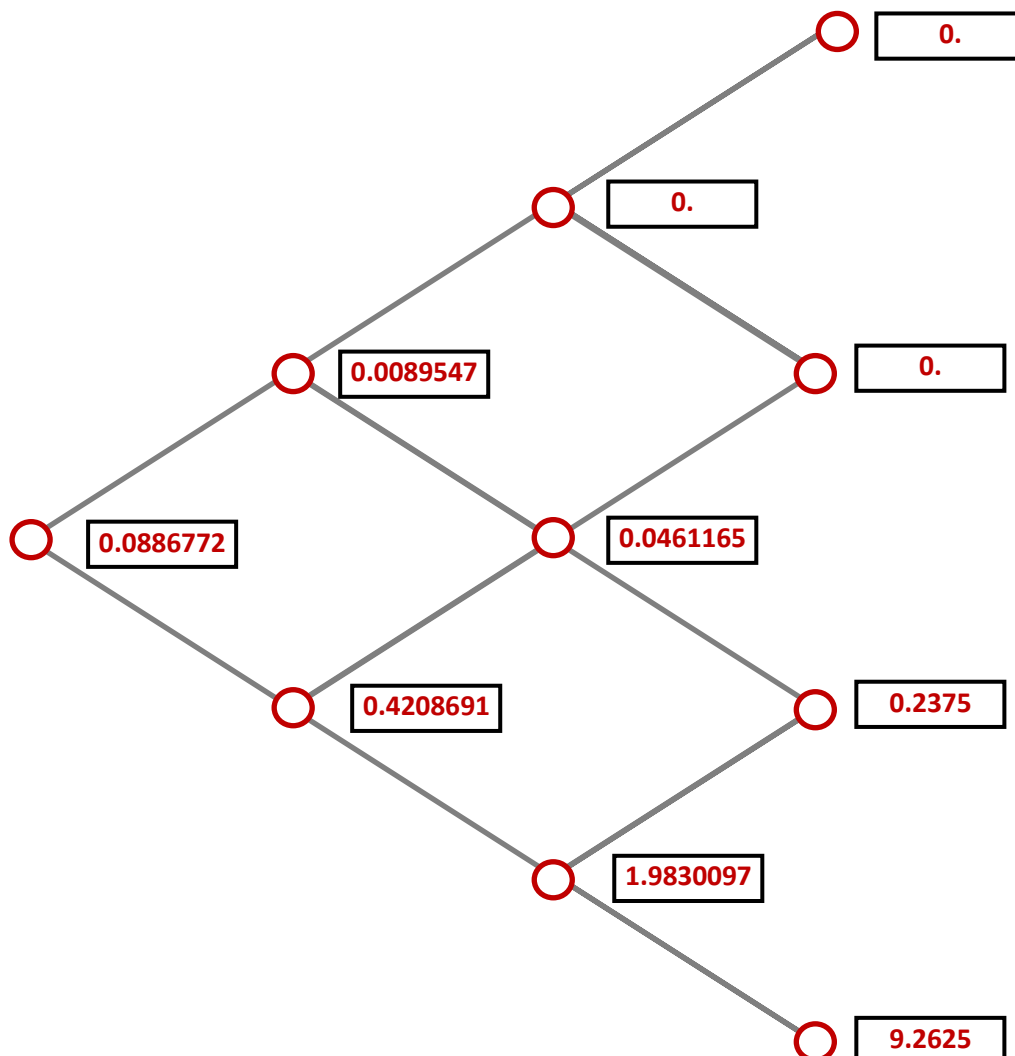
$$\Leftrightarrow E[v_{k+1}(S_{t_{k+1}}^{(N)}) | S_{t_k}^{(N)}] = v_{k+1}(S_{t_k}^{(N)} \cdot (1 + h_N)) * q_N + v_{k+1}(S_{t_k}^{(N)} \cdot (1 + b_N)) * (1 - q_N)$$

$$\text{d'où } v_k(S_{t_k}^{(N)}) = \frac{1}{1+r_N} * (v_{k+1}(S_{t_k}^{(N)} \cdot (1 + h_N)) * q_N + v_{k+1}(S_{t_k}^{(N)} \cdot (1 + b_N)) * (1 - q_N))$$

Le test avec les données de l'énoncé renvoie la matrice :

0.0886772	0.0089547	0.	0.
0.	0.4208691	0.0461165	0.
0.	0.	1.9830097	0.2375
0.	0.	0.	9.2625

On dessine l'arbre présentant les valeurs de v_n pour $n \in [0 ; 3]$ à l'aide de cette matrice.



Question 7 :

On compare désormais les deux pricers avec des entrées similaires. Avec les données de l'énoncé, les deux pricers renvoient la valeur 53.632118.

On constate donc que l'implémentation de price2 est correcte puisqu'il renvoie le même résultat que price1.

On s'intéresse maintenant au calcul de la couverture.

Question 8 :

En posant $x = S_{t_{N-1}}^{(N)}$ et $\gamma = \frac{1+b_N}{1+h_N}$, (uniquement pour la résolution), et étant donné les deux cas $S_{t_N}^{(N)} = (1+h_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}$ et $S_{t_N}^{(N)} = (1+b_N)S_{t_{N-1}}^{(N)}$, on obtient le système suivant :

$$(S) : \begin{cases} \alpha_{N-1}(x) * x(1+h_N) + \beta_{N-1}(x) * S_{t_N}^0 = f((1+h_N) * x) \\ \alpha_{N-1}(x) * x(1+b_N) + \beta_{N-1}(x) * S_{t_N}^0 = f((1+b_N) * x) \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de deux équations à deux inconnues, donc solvable. Le couple de solution est :

$$(S) : \begin{cases} \beta_{N-1}(x) = \frac{1}{((1-\gamma)S_{t_N}^0)} \left(f((1+b_N) * x) - \gamma * f((1+h_N) * x) \right) \\ \alpha_{N-1}(x) = \frac{1}{(x * (1+h_N) * (1-\gamma))} \left(f((1+h_N) * x) - f((1+b_N) * x) \right) \end{cases}$$

Question 9 :

Il s'agit strictement du même raisonnement. Cette fois-ci avec $x = S_{t_{k-1}}^{(N)}$, on a :

$$(S) : \begin{cases} \beta_{k-1}(x) = \frac{1}{((1-\gamma)S_{t_k}^0)} \left(f((1+b_N) * x) - \gamma * f((1+h_N) * x) \right) \\ \alpha_{k-1}(x) = \frac{1}{(x * (1+h_N) * (1-\gamma))} \left(f((1+h_N) * x) - f((1+b_N) * x) \right) \end{cases}$$

Question 10 :

III. Mise en place de pricers par la méthode de Black Scholes

Question 11 :

En appliquant la formule d'Ito à $\ln(S_t)$, on obtient :

$$d\ln(S_t) = \frac{1}{S_t} S_t \underbrace{(r dt + \sigma dB_t)}_{dS_t} - \frac{|\sigma S_t|^2}{2} \frac{1}{S_t^2} dt$$
$$\Leftrightarrow d\ln(S_t) = r dt + \sigma dB_t - \frac{|\sigma|^2}{2} dt$$

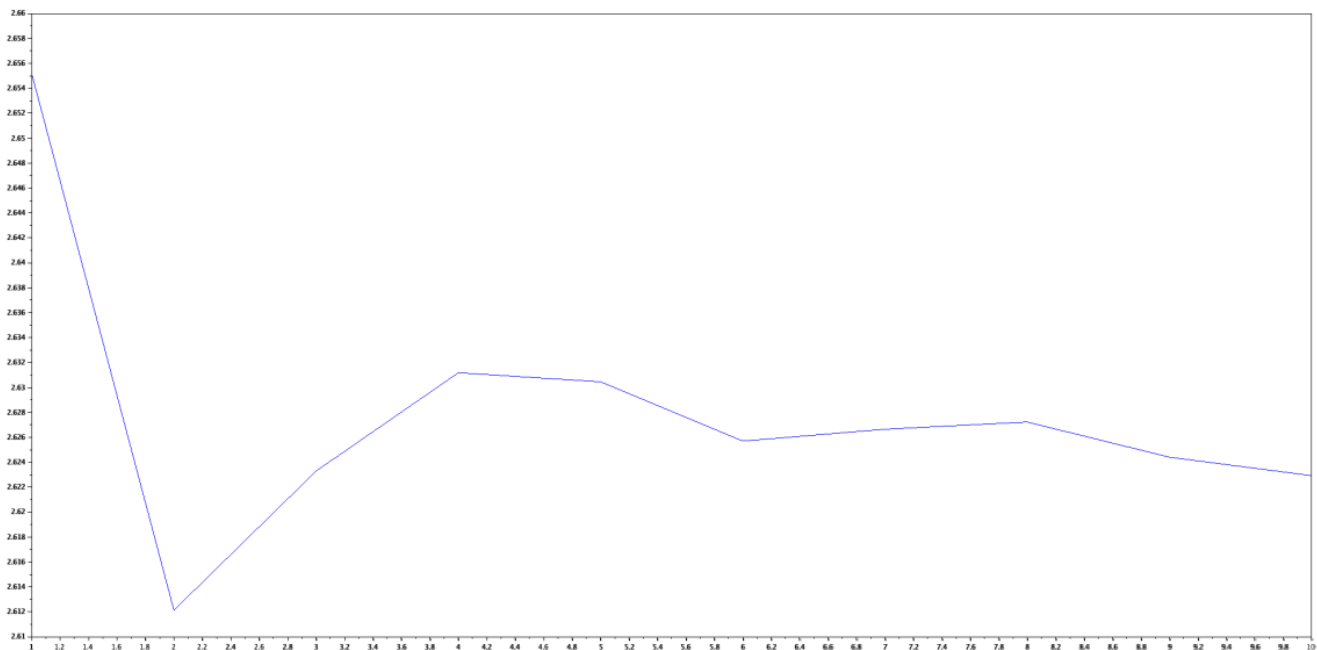
En intégrant, on obtient : $\ln(S_t) = rt + \sigma B_t - \frac{|\sigma|^2}{2} t + C$ avec $C \in \mathbb{R}$

En calculant en $t=0$, on a $C = \ln(s)$, d'où $S_t = s * \exp\left(r - \frac{\sigma^2}{2} T + \sigma B_T\right)$

• Méthode de Monte-Carlo

Question 12 & 13 :

Avec les données de l'énoncé et la fonction price3, on obtient le graphique ci-dessous.



Question 14 :

On a :

$$p = E[e^{-rT}f(S_t)]$$

$$\Leftrightarrow p = E\left[e^{-rT}f\left(s * \exp\left(r - \frac{\sigma^2}{2}T + \sigma B_T\right)\right)\right]$$

Puisque B_T est un mouvement brownien, on a :

$$B_T - B_0 = B_T - 0 = B_T \sim \mathcal{N}(0; T) \text{ d'où } \xi = \frac{B_T}{\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\text{donc } p = E\left[e^{-rT}f\left(s * \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\xi\right)\right)\right]$$

Or, d'après la loi forte des grands nombres : $(\overline{X_n} - \overline{\mu_n}) \xrightarrow{p.s} 0$ avec $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ et $\overline{\mu_n} = E[\overline{X_n}]$

$$\text{Dans notre cas, } X_i = e^{-rT}f\left(s * \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\xi_i\right)\right)$$

et $E[\overline{X_n}] = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right] = \frac{1}{n} (E[X_1] + \dots + E[X_n])$ par linéarité de l'espérance

$$\Leftrightarrow E[\overline{X_n}] = \frac{1}{n} (n * E[X_1]) = E[X_1] \text{ puisque les } X_i \text{ suivent la même loi } \mathcal{N}(0,1)$$

donc

$$\sum_{i=1}^n e^{-rT}f\left(s * \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\sqrt{T}\xi_i\right)\right) - E[X_1] \xrightarrow{p.s} 0$$

soit encore $\hat{p}(n) \xrightarrow{p.s} p$

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|\hat{p}(n) - E[e^{-rT}f(S_t)]| > \varepsilon) < \frac{V(e^{-rT}f(S_t))}{n\varepsilon^2} \quad \text{avec } \varepsilon = 10^{-2}$$

En considérant les données de l'énoncé, on souhaite donc avoir : $\frac{V(e^{-rT}f(S_t))}{n\varepsilon^2} = 0.05$.

On estime informatiquement $V(e^{-rT}f(S_t))$ à 19.860286, et on en déduit **$n = 3\,972\,057$** .

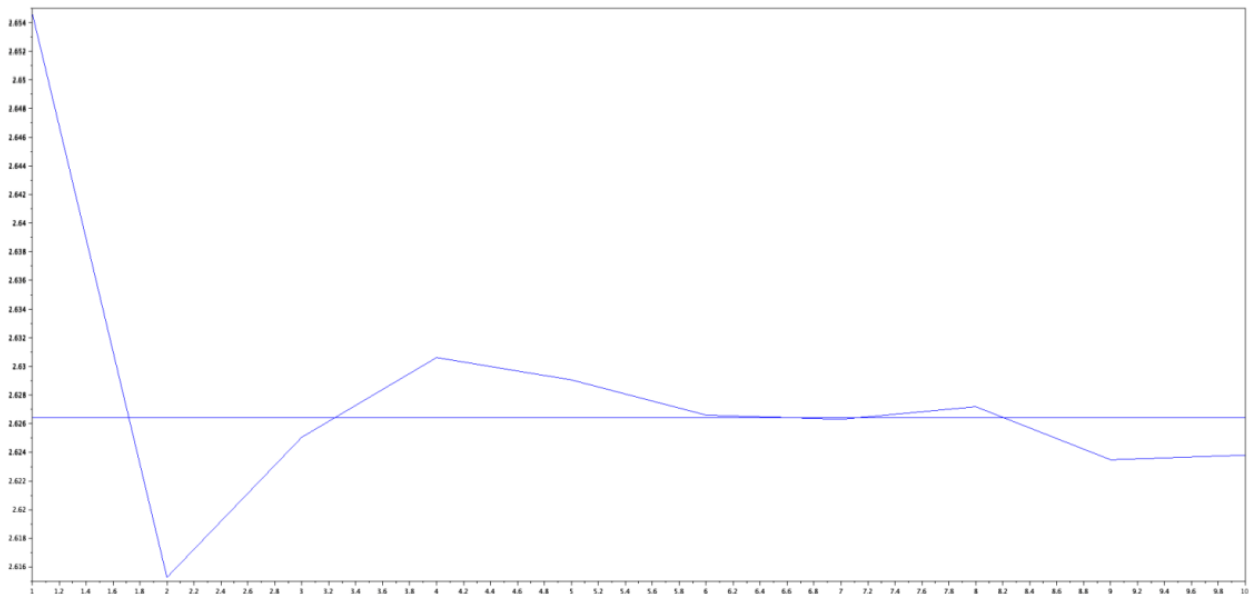
- Formule fermée

Question 15 & 16 :

L'application de la fonction put avec les données de l'énoncé renvoie 2.2574055

Question 17 :

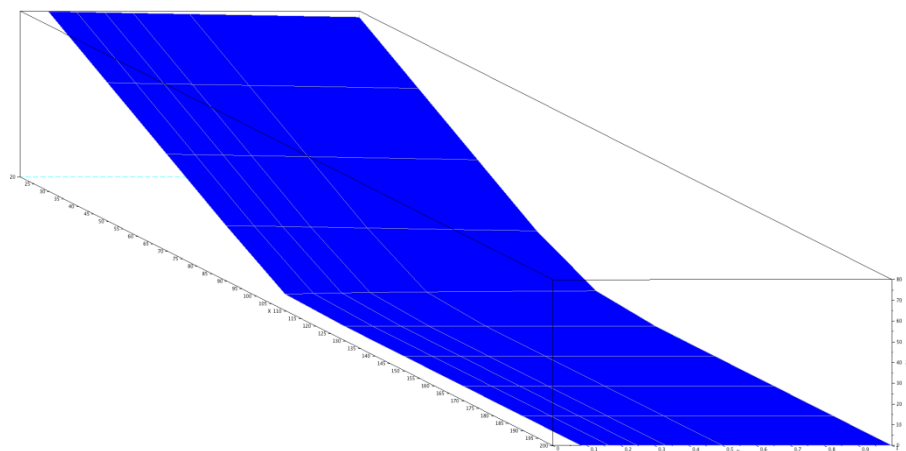
La création de ce graphique à l'aide de la fonction put est réalisée dans le fichier de code ...
Suite à son exécution, on obtient le graphique ci-dessous.



On constate que le pricer semble converger asymptotiquement vers la valeur de put.

Question 18 :

On obtient le graphique 3D ci-dessous.

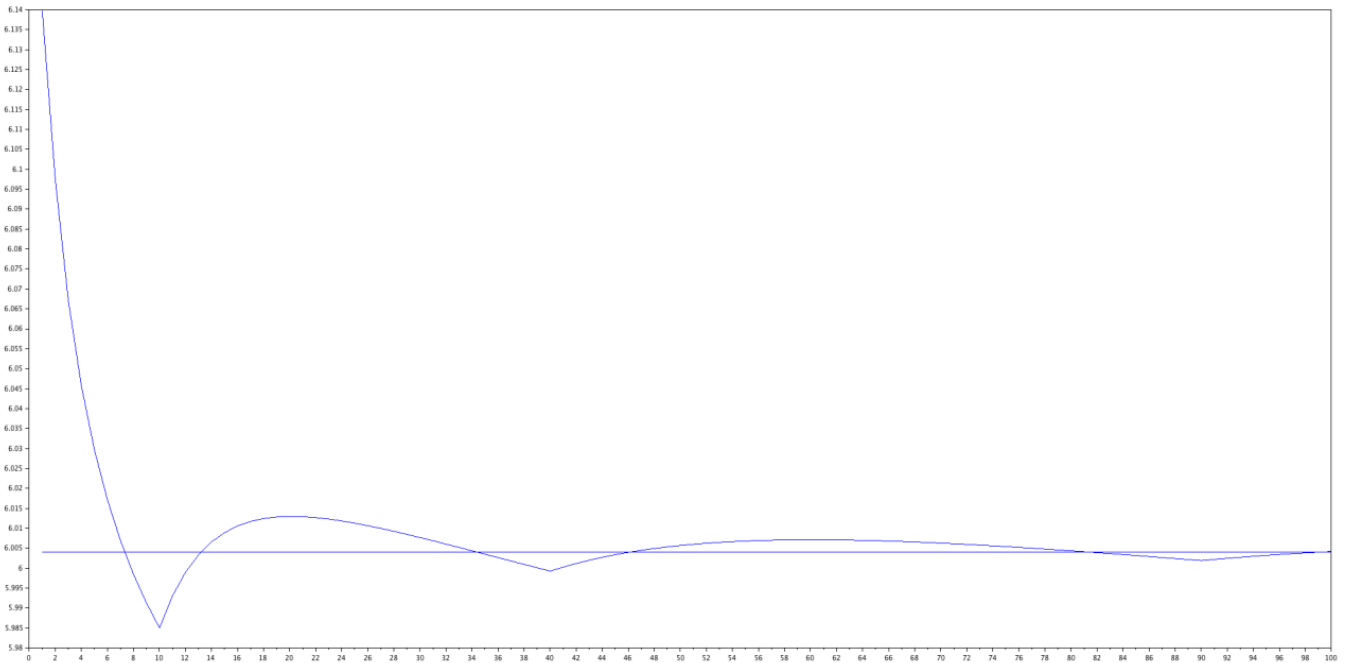


On constate que le prix de l'option calculée avec put change peu en fonction de la valeur de T et donc dépend peu de s. Pour $s \geq 100$, le prix de l'option est presque nul partout, et il décroît de façon linéaire entre $s = 0$ et $s = 100$.

IV. Comparaison des deux modèles avec étude de la convergence des prix

Question 19 :

Avec les données de l'énoncé et en utilisant les fonctions price1 et put définies précédemment, on obtient le graphique ci-dessous.



On constate donc que price1 converge asymptotiquement vers put.