ENSIIE **2ème année**
2$^{\text{ème}}$ semestre 2017/2018 **Calcul stochastique**

Examen
Durée: 2h
Calculatrice, téléphone et documents non autorisés

Dans tous les exercices, B est un mouvement brownien standard et $\mathbb{F}$ sa filtration naturelle.

Exercice 1. (Mouvement Brownien)

a) Le processus $(U_t)_{t\geq 0} = (B_t - tB_1)_{t\geq 0}$ est-il un mouvement brownien?

b) Le processus $(Z_t)_{t\geq 0} = ((1+t)U_{t/(t+1)})_{t\geq 0}$ est-il un mouvement brownien?

c) Calculer $\mathbb{E}\Big[\exp\big(a(1+t)B_{t/(t+1)}\big)\Big]$.

Exercice 2. (Martingales)

a) Pour quelles valeurs de a et b, les processus suivants sont-ils des martingales (locales)?

$$\left(e^{B_t^2 + aB_t + b\int_0^t B_s^2 ds}\right)_{t\geq 0} \quad \text{et} \quad \left(e^{at}\sin(B_t)\right)_{t\geq 0}$$

b) Soit θ un processus continu et borné. En utilisant le théorème de Girsanov, calculer

$$\mathbb{E}\left(B_t^2 \exp\left(\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right)\right)$$

Exercice 3. (Résolution d'une EDS et calcul d'espérance)
Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et X le processus solution de l'équation suivante:

$$dX_t = \mu X_t^2 dt + \sigma X_t dB_t, \quad X_0 = x \in]0,1[.$$

a) Déterminer les fonctions d'échelle de X, c'est à dire les fonctions f telles que le processus $(f(X_t))_{t\geq 0}$ soit une martingale.

b) Pour $t \geq 0$, on pose $Y_t = \frac{1}{X_t}$. Quelle est l'équation différentielle satisfaite par Y?

c) Calculer $m(t) = \mathbb{E}[Y_t]$.
indication: Montrer que m est solution d'une d'équation différentielle ordinaire.

c) Soit Z le processus solution de l'EDS suivante

$$dZ_t = Z_t\left(\sigma^2 dt + \sigma dB_t\right); \qquad Z_0 = 1.$$

Donner une expression explicite de Z et la décomposition du processus d'Itô $\frac{Y}{Z}$.

c) Vérifier le résultat de la question c) et déduire les expressions explicites de X_t et Y_t en fonction de t et B_t.

d) Déterminer une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ telle que Y soit une $\mathbb{Q}$-martingale et vérifier le résultat de la question c).