考研数学真题错题整理

参考 2026 版《考研数学这十年》

作者：Guangchen Jiang

时间：2025/12/31

版本：4.5

ElegantLATEX Program

目录

第一章 高数

1.1 极限

1. 【P2-1 (24-2)】已知数列 $\{a_n\}$ $(a_n \neq 0)$. 若 $\{a_n\}$ 发散, 则 (　)

A. $\left\{a_n + \frac{1}{a_n}\right\}$ 发散.

B. $\left\{a_n - \frac{1}{a_n}\right\}$ 发散.

C. $\left\{e^{a_n} + \frac{1}{e^{a_n}}\right\}$ 发散.

D. $\left\{e^{a_n} - \frac{1}{e^{a_n}}\right\}$ 发散.

答案 P238；【十年真题】- 考点：极限的概念与性质 - 1

2. 【P2-2 (22-1,2)】设数列 $\{x_n\}$ 满足 $-\frac{\pi}{2} \leqslant x_n \leqslant \frac{\pi}{2}$, 则 (　)

A. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\sin x_n)$ 存在时, $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.

B. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\cos x_n)$ 存在时, $\lim_{n\to\infty} x_n$ 存在.

C. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\sin x_n)$ 存在时, $\lim_{n\to\infty} \sin x_n$ 存在, 但 $\lim_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在.

D. 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\cos x_n)$ 存在时, $\lim_{n\to\infty} \cos x_n$ 存在, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在.

答案 P238；【十年真题】- 考点：极限的概念与性质 - 2

3. 【P4-4 (99-2)】对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$，总存在正整数 N，当 $n \geq N$ 时，恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 (　)

A. 充分条件但非必要条件.

B. 必要条件但非充分条件.

C. 充分必要条件.

D. 既非充分条件又非必要条件.

答案 P238；【真题精选】- 考点：极限的概念与性质 - 4

4. 【P4-2 (23-3)】$\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(2 - x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}\right) =$ ______.

答案 P238；【十年真题】- 考点一：函数极限的计算 - 2

5. 【P4-3 (22-2,3)】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\cot x}=$ ______.

答案 P238；【十年真题】- 考点一：函数极限的计算 - 3

6. 【P4-7 (16-2,3)】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

答案 P239；【十年真题】- 考点一：函数极限的计算 - 7

7. 【P4-2 (25-2)】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\ln\dfrac{1}{n}+2\ln\dfrac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\dfrac{n-1}{n}\right]=$ ______.

答案 P239；【十年真题】- 考点二：数列极限的计算 - 2

8. 【P4-5 (19-1,3)】设 $a_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\dots)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\dots)$;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

答案 P239；【十年真题】- 考点二：数列极限的计算 - 5

9. 【P4-6 (18-1,2,3)】设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0,\ x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1\ (n=1,2,\dots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

答案 P240；【十年真题】- 考点二：数列极限的计算 - 6

10. 【P6-例 1 (2)】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\tan x}}{x\tan^2 x}=$ ______.

答案 P6；【方法探究】- 考点一：函数极限的计算 - 例 1 (2)

11. 【P7-变式 1.1 (97-2)】求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

答案 P240;【方法探究】- 考点一: 函数极限的计算 - 变式 1.1

12. 【P8-变式 3 (98-1)】求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

答案 P240;【方法探究】- 考点二: 数列极限的计算 - 变式 3

13. 【P8-变式 4.1 (96-1)】设 $x_1=10,\ x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\ (n=1,2,\dots)$. 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

答案 P241;【方法探究】- 考点二: 数列极限的计算 - 变式 4.1

14. 【P8-变式 4.2 (11-1, 2)】(1) 证明: 对任意的正整数 n, 都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立;

(2) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n(n=1,2,\dots)$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

注 主要错的是 (2)

答案 P241;【方法探究】- 考点二: 数列极限的计算 - 变式 4.2

1.2 一元函数微分学

1.3 一元函数积分学

1. 【李六-1-1】当 $x\to0$ 时, 无穷小量 $a_1=\displaystyle\int_x^{2\sin x}(e^{t^2}-1)\,\mathrm{d}t,\ a_2=\int_x^{e^x-1}\ln\cos t\,\mathrm{d}t,\ a_3=\int_{x^2}^{x}\frac{\tan^3 t}{t}\,\mathrm{d}t$ 关于 x 的阶数分别为 ( )

A. 2, 3, 4.　　B. 3, 3, 3.　　C. 3, 5, 3.　　D. 3, 4, 3.

1.4 微分方程

1. 【李六-1-3】在 Oxy 平面上, 光滑曲线 L 过 $(1,0)$ 点, 并且曲线上任意一点 $P(x,y)(x \neq 0)$ 处的切线斜率与直线 OP 的斜率之差等于 $ax(a > 0$ 为常数). 如果 L 与直线 $y = ax$ 所围成的平面图形的面积为 8, 则 a 的值为 (　)

A. 2.　　B. 4.　　C. 6.　　D. 8.

2. 【李六-1-11】设 $f(x)$ 是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上以 2π 为周期的二阶可导函数, 且满足等式 $f(x) + 2f'(x + \pi) = \sin x$，则 $f(x) =$ ____________.

1.5 多元函数微分学

1.6 多元函数积分学

1.7 无穷级数

第二章 线代

2.1 行列式

1. 【P146-4 (20-1,2,3)】行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________.

答案 P323；【十年真题】- 考点：具体行列式的计算 - 4

2. 【P148-例 2 (1)】n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & \\ 2 & a & -1 & & & \\ 3 & & a & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ n-1 & & & & a & -1 \\ n & & & & & a \end{vmatrix} =$ ________.

答案 P148；【方法探究】- 考点：具体行列式的计算 - 例 2 (1)

3. 【P149-4 (96-5)】5 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} =$ ________.

答案 P324；【真题精选】- 考点：具体行列式的计算 - 4

2.2 矩阵

1. 【P150-3 (24-1)】设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$. 若对任意实向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,

$$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})^2 \leq \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$$

都成立, 则 a 的取值范围为 ________.

答案 P325;【十年真题】- 考点一: 矩阵的运算 - 3

2. 【P150-4 (22-1)】已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=$ ________.

答案 P325;【十年真题】- 考点一: 矩阵的运算 - 4

3. 【P150-1 (25-2)】下列矩阵中, 可以经过若干初等行变换得到矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的是 ( )

A. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

B. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

C. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

D. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

答案 P325;【十年真题】- 考点二: 矩阵的初等变换与初等矩阵 - 1

4. 【P150-4 (22-2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行和第 3 行, 再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列, 得到 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{-1})=$ ________.

答案 P325;【十年真题】- 考点二: 矩阵的初等变换与初等矩阵 - 4

5. 【P150-2 (24-2)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*)=\boldsymbol{O}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{A}^*$, 则 $r(\boldsymbol{A})$ 取值为 ( )

A. 0 或 1.　　B. 1 或 3.

C. 2 或 3.　　D. 1 或 2.

答案 P325;【十年真题】- 考点三: 矩阵的秩与等价 - 2

6. 【P156-10 (95-1)】设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵), $|\boldsymbol{A}|<0$, 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$ ________.

答案 P327;【真题精选】- 考点一: 矩阵的运算 - 10

7. 【P156-3 (01-3)】设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$ ( )

A. $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　B. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$.

C. $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$.　　D. $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$.

答案 P327;【真题精选】- 考点二: 矩阵的初等变换与初等矩阵 - 3

8. 【P156-5 (08-1)】设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置, $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明:

(1) $r(\boldsymbol{A})\le 2$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $r(\boldsymbol{A})<2$.

答案 P327;【真题精选】- 考点三: 矩阵的秩与等价 - 5

2.3 向量与线性方程组

1. 【P158-5 (23-2,3)】已知线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_3=1, \\ x_1+ax_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ ax_1+bx_2=2 \end{cases}$$

有解, 其中 a,b 为常数. 若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=4$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix}=$ ________.

答案 P328;【十年真题】- 考点一: 线性方程组的解的情况及求解 - 5

2.【P159-1 (18-1,2,3)】已知 a 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

答案 P328;【十年真题】- 考点二: 矩阵方程组的解的情况及求解 - 1

3. 【P159-2 (16-1)】设矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&-1\\2&a&1\\-1&1&a\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}2&2\\1&a\\-a-1&-2\end{pmatrix},$$

当 a 为何值时，方程 $AX=B$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求解此方程.

答案 P328；【十年真题】- 考点二：矩阵方程组的解的情况及求解 - 2

4. 【P160-变式 (04-1)】设有齐次线性方程组

$$\begin{cases}(1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0,\\2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0,\\\vdots\\nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0\end{cases}\quad(n\geq 2),$$

试问 a 为何值时，该方程组有非零解，并求出其通解.

答案 P329；【方法探究】- 考点一：线性方程组的解的情况及求解 - 变式

5. 【P161-3 (98-3)】齐次线性方程组

$$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+\lambda^2x_3=0,\\x_1+\lambda x_2+x_3=0,\\x_1+x_2+\lambda x_3=0\end{cases}$$

的系数矩阵记为 A. 若存在 3 阶矩阵 $B\neq O$ 使得 $AB=O$，则 (　)

A. $\lambda=-2$ 且 $|B|=0$.　　B. $\lambda=-2$ 且 $|B|\neq 0$.

C. $\lambda=1$ 且 $|B|=0$.　　D. $\lambda=1$ 且 $|B|\neq 0$.

答案 P330；【真题精选】- 考点一：线性方程组的解的情况及求解 - 3

6. 【P162-8 (00-2)】设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.
其中 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置, 求解方程

$$2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}.$$

答案 P331;【真题精选】- 考点一:线性方程组的解的情况及求解 - 8

7. 【P162-1 (15-2,3)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&0\\1&a&-1\\0&1&a\end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 求 $\boldsymbol{X}$.

答案 P332;【真题精选】- 考点二:矩阵方程组的解的情况及求解 - 1

8. 【P162-2 (14-1,2,3)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

答案 P332;【真题精选】- 考点二:矩阵方程组的解的情况及求解 - 2

9. 【P163-2 (23-1)】已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵

$$\begin{pmatrix}\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{C}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{E}\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{O}\end{pmatrix}$$

的秩分别为 r_1,r_2,r_3, 则 ( )

A. $r_1\le r_2\le r_3$.

B. $r_1\le r_3\le r_2$.

C. $r_3\le r_1\le r_2$.

D. $r_2\le r_1\le r_3$.

答案 P333;【十年真题】- 考点:向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 2

10. 【P164-4 (22-1,2,3)】设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}.$$

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价, 则 λ 的取值范围是 (　)

A. $\{0,1\}$.

B. $\{\lambda|\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-2\}$.

C. $\{\lambda|\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$.

D. $\{\lambda|\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-1\}$.

答案 P333;【十年真题】- 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 4

11. 【P164-5 (21-1)】已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, 记 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2$.
若 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交, 则 l_1,l_2 依次为 (　)

A. $\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.

B. $-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.

C. $\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.

D. $-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.

答案 P333;【十年真题】- 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 5

12. 【P168-4 (06-1,2,3)】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量, $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 (　)

A. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

B. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

C. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

D. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

答案 P335;【真题精选】- 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 4

13. 【P170-2 (25-2)】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{BA}) + 1$, 则 ( )

A. 方程组 $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

B. 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 均只有零解.

C. 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 没有公共非零解.

D. 方程组 $\boldsymbol{ABAx} = \boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{BABx} = \boldsymbol{0}$ 有公共非零解.

答案 P336;【十年真题】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 2

14. 【P170-3 (22-1)】设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 若方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解, 则 ( )

A. 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

B. 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \end{pmatrix}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

C. 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 同解.

D. 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 同解.

答案 P336;【十年真题】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 3

15. 【P170-4 (21-2)】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出, 则 ( )

A. $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解.

B. $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解.

C. $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

D. $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解.

答案 P336;【十年真题】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 4

16. 【P170-5 (21-3)】设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶正交矩阵. 若矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, k 表示任意常数, 则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=(\quad)$

A. $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$.

B. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$.

C. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$.

D. $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$.

答案 P336;【十年真题】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 5

17. 【P171-9 (25-2)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_4$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$ ________.

答案 P337;【十年真题】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 9

18. 【P172-变式 (07-1,2,3)】设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

答案 P337;【方法探究】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 变式

19. 【P173-1 (11-1,2)】设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为 $(\quad)$

A. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.

B. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.

C. $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.

D. $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

答案 P338;【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 1

20. 【P173-4 (03-1)】设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:
① 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解, 则 $r(\boldsymbol{A})\geq r(\boldsymbol{B})$;
② 若 $r(\boldsymbol{A})\geq r(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解;
③ 若 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解, 则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$;
④ 若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 同解.
以上命题中正确的是 (　)

A. ① ②.　　B. ① ③.　　C. ② ④.　　D. ③ ④.

答案 P338;【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 4

21. 【P173-7 (04-4)】设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{3\times3}$ 是实正交矩阵, 且 $a_{11}=1,\boldsymbol{b}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的解是 ________.

答案 P338;【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 7

22. 【P173-8 (98-1)】已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0\end{cases}$$

的一个基础解系为 $(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^{\mathrm{T}},(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^{\mathrm{T}},\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^{\mathrm{T}}$, 则线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0,\\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0,\\ \quad\cdots\cdots\cdots\\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0\end{cases}$$

的通解为 ________.

答案 P338;【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 8

23. 【P173-9 (93-1)】设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为零, 且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________.

答案 P338;【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 9

24. 【P173-10 (05-1,2)】已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c), a,b,c 不全为零, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$ (k 为常数), 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

答案 P338;【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 10

25. 【P174-12 (94-1)】设四元线性齐次方程组 (I) 为 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0.\end{cases}$ 又已知某线性齐次方程组 (II) 的通解为 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求线性方程组 (I) 的基础解系;

(2) 问线性方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出所有的非零公共解. 若没有, 则说明理由.

答案 P339;【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 12

2.4 矩阵的特征值和特征向量

1. 【P177-1 (24-1)】设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 2 的 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是满足 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$ 的非零向量. 若对满足 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ 的 3 维列向量 $\boldsymbol{\beta}$, 均有 $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{\beta}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{A}^3$ 的迹为 2.

B. $\boldsymbol{A}^3$ 的迹为 5.

C. $\boldsymbol{A}^2$ 的迹为 8.

D. $\boldsymbol{A}^2$ 的迹为 9.

答案 P340;【十年真题】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 1

2. 【P177-3 (24-3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, bmA^* 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵. 若 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$, $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=2$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=$________.

答案 P340;【十年真题】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 3

3. 【P177-5 (18-1)】设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量, 且满足

$$\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2) = \boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2,$$

则 $|\boldsymbol{A}| =$________.

答案 P340;【十年真题】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 5

4. 【P179-变式 1.2】设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 且 $\boldsymbol{A}(1, -1, 1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

答案 P341;【方法探究】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 变式 1.2

5. 【P179-1 (08-1,2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{O}$, 则 (　)

A. $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 不可逆.
B. $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 可逆.
C. $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 可逆.
D. $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 不可逆.

答案 P341;【真题精选】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 1

6. 【P179-3 (02-3)】设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵, 已知 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量, 则矩阵 $\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是 (　)

A. $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.
B. $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.
C. $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$.
D. $\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

答案 P341;【真题精选】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 3

7. 【P179-36 (96-1)】设 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E} - \boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量, $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的转置. 证明:

(1) $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$ 的充分条件是 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 1$

(2) 当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi} = 1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

答案 P341;【真题精选】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 6

8. 【P180-2 (24-2)】设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 2 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$, 则"$\boldsymbol{A}$ 有两个不相等的特征值"是"$\boldsymbol{B}$ 可对角化"的 ( )

A. 充分必要条件.
B. 充分不必要条件.
C. 必要不充分条件.
D. 既不充分也不必要条件.

答案 P341;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 2

9. 【P180-4 (22-1)】下述四个条件中, 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的一个充分但不必要条件是 ( )

A. $\boldsymbol{A}$ 有 3 个互不相等的特征值.
B. $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量.
C. $\boldsymbol{A}$ 有 3 个两两线性无关的特征向量.
D. $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量正交.

答案 P341;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 4

10. 【P180-5 (22-2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\Lambda} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, -1, 0$ 的充分必要条件是 ( )

A. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda Q}$.
B. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.
C. 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$.
D. 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$.

答案 P341;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 5

11. 【P180-8 (17-1,2,3)】已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 ( )

A. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.
B. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.
C. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.
D. $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

答案 P342;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 8

12. 【P181-11 (18-2)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组. 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = -\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为________.

答案 P342;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 11

13. 【P181-15 (20-1,2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} - 6\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

答案 P343;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 15

14. 【P181-17 (16-1,2,3)】已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$, 将 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

答案 P343;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 17

15. 【P184-变式 2 (11-1,2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

答案 P344;【方法探究】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 变式 2

16. 【P185-6 (08-2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3 = \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(2) 令 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

答案 P345;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 6

17. 【P185-7 (07-1,2,3)】设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1, -1, 1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^5 - 4\boldsymbol{A}^3 + \boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

答案 P345;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 7

18. 【P185-9 (04-1,2)】设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

答案 P345;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 9

19. 【P186-10 (02-1)】设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵.

(1) 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似, 试证 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等;

答案 P345;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 10

20. 【P186-12 (00-1)】某试验性生产线每年 1 月份进行熟练工与非熟练工的人数统计, 然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门, 其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工. 设第 n 年 1 月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n, 记成向量 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix};$$

(2) 验证 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量, 并求出相应的特征值;

(3) 当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 时, 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

答案 P346;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 12

21. 【P187-15 (92-4)】设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$.

(1) 求 x, y 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$.

答案 P346;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 12

2.5 二次型

1. 【P188-2 (25-2)】设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 有一个正特征值和两个负特征值, 则 ( )

A. $a > 4, b > 0$.

B. $a < 4, b > 0$.

C. $a > 4, b < 0$.

D. $a < 4, b < 0$.

答案 P347;【十年真题】- 考点一: 化二次型为标准型 - 2

2. 【P189-12 (20-1,3)】设二次型

$$f(x_1,x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$$

经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型

$$g(y_1,y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2,$$

其中 $a \geqslant b$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

答案 P348;【十年真题】- 考点一：化二次型为标准型 - 12

3. 【P189-2 (23-1)】已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3,$$

$$g(y_1,y_2,y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3.$$

(1) 求可逆变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$;

(2) 是否存在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$?

答案 P349;【十年真题】- 考点二：矩阵的合同 - 2

4. 【P190-1 (25-3)】设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -a \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$. 若 $f(x,y) = |x\boldsymbol{A} + y\boldsymbol{B}|$ 是正定二次型, 则 a 的取值范围是 ( )

A. $(0, 2-\sqrt{3})$.

B. $(2-\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$.

C. $(2+\sqrt{3}, 4)$.

D. $(0, 4)$.

答案 P350;【十年真题】- 考点三：正定二次型与正定矩阵 - 1

5. 【P190-2 (21-1)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(1) 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵;

(2) 求正定矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^2=(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

注 主要错的是 (2)

答案 P350;【十年真题】- 考点三: 正定二次型与正定矩阵 - 2

6. 【P193-3 (14-1,2,3)】设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$$

的负惯性指数是 1, 则 a 的取值范围是________.

答案 P351;【真题精选】- 考点一: 化二次型为标准型 - 3

7. 【P193-8 (13-1,2,3)】设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2,$$

记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明二次型 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

注 主要错的是 (2)

答案 P352;【真题精选】- 考点一: 化二次型为标准型 - 8

8. 【P193 (01-3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, $r(\boldsymbol{A})=n$, A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$, 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j$.

(1) 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式, 并证明二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(2) 二次型 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $f(\boldsymbol{x})$ 的规范形是否相同? 说明理由.

答案 P352;【真题精选】- 考点二: 矩阵的合同

9. 【P194-1 (05-3)】设 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 m 阶, n 阶对称矩阵, $\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵.

(1) 计算 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$;

(2) 利用 (1) 的结果判断矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是否为正定矩阵, 并证明你的结论.

注 主要错的是 (2)

答案 P352;【真题精选】- 考点三: 正定二次型与正定矩阵 - 1

第三章 概率

3.1 随机事件和概率

1. 【李六-1-10】一颗陨石等可能地坠落在区域 A_1, A_2, A_3, A_4 后, 有关部门千方百计地要找到它. 根据现有的搜索条件, 如果陨石坠落在 A_i, 则在该区域被找到的概率是 p_i (这里 p_i 是由 A_i 的地貌条件决定的; $i = 1, 2, 3, 4$). 现对 A_1 搜索后没有发现这块陨石, 则陨石坠落在 A_4 的概率为 (　)

A. $\dfrac{1}{3}$.　　B. $\dfrac{1}{4}$.　　C. $\dfrac{1-p_1}{4-p_1}$.　　D. $\dfrac{1}{4-p_1}$.

3.2 随机变量及其分布

1. 【李六-1-8】设连续型随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$, 且 $F(0) = 0$. 则下列函数可作为分布函数的是 (　)

A. $G_1(x) = \begin{cases} 1 + F\left(\frac{1}{x}\right), & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$　　B. $G_2(x) = \begin{cases} 1 - F\left(\frac{1}{x}\right), & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$

C. $G_3(x) = \begin{cases} F(x) - F\left(\frac{1}{x}\right), & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$　　D. $G_4(x) = \begin{cases} F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right), & x > 1, \\ 0, & x \leq 1. \end{cases}$

3.3 多维随机变量及其分布

3.4 随机变量的数字特征

3.5 大数定律与中心极限定理

3.6 数理统计的基本概念

3.7 参数估计

附录 A 答案