线代错题（乱序版）

1. 【P186-12 (00-1)】某试验性生产线每年 1 月份进行熟练工与非熟练工的人数统计, 然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门, 其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工. 设第 n 年 1 月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n, 记成向量 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix};$$

(2) 验证 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量, 并求出相应的特征值;

(3) 当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 时, 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

答案 P346;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 12

2. 【P179-3 (02-3)】设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵, 已知 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量, 则矩阵 $\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是 (　)

(A) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.

(B) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

(C) $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$.

(D) $\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

答案 P341;【真题精选】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 3

3. 【P179-变式 1.2】设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$, 且 $\boldsymbol{A}(1,-1,1)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

答案 P341;【方法探究】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 变式 1.2

4. 【P193-8 (13-1,2,3)】设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)^2+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)^2,$$

记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix},\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$.

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明二次型 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

注 主要错的是 (2)

答案 P352;【真题精选】- 考点一: 化二次型为标准型 - 8

5. 【P173-4 (03-1)】设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 和 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:

① 若 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解, 则 $r(\boldsymbol{A})\geq r(\boldsymbol{B})$;

② 若 $r(\boldsymbol{A})\geq r(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 的解;

③ 若 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解, 则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$;

④ 若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{Ax}=\mathbf{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx}=\mathbf{0}$ 同解.

以上命题中正确的是 (　)

(A) ① ②.　　(B) ① ③.　　(C) ② ④.　　(D) ③ ④.

答案 P338;【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 4

6. 【P156-5 (08-1)】设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置, $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明:

(1) $r(\boldsymbol{A})\leq 2$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $r(\boldsymbol{A})<2$.

答案 P327;【真题精选】- 考点三: 矩阵的秩与等价 - 5

7. 【P170-4 (21-2)】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出, 则 (　　)

(A) $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(C) $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的解.

(D) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解.

答案 P336;【十年真题】- 考点：线性方程组的解的结构 - 4

8. 【P187-15 (92-4)】设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似, 其中 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-2&0&0\\2&x&2\\3&1&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&2&0\\0&0&y\end{pmatrix}$.

(1) 求 x,y 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$.

答案 P346;【真题精选】- 考点：矩阵的相似和相似对角化 - 12

9. 【P150-1 (25-2)】下列矩阵中, 可以经过若干初等行变换得到矩阵 $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\0&0&1&2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$ 的是 (　　)

(A) $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&2&1&3\\2&3&1&4\end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix}1&1&0&1\\1&1&2&5\\1&1&1&3\end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&3\\0&1&0&0\end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix}1&1&2&3\\1&2&2&3\\2&3&4&6\end{pmatrix}$.

答案 P325;【十年真题】- 考点二：矩阵的初等变换与初等矩阵 - 1

10. 【P180-8 (17-1,2,3)】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则 (　)

(A)　$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

(B)　$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(C)　$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

(D)　$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

答案 P342；【十年真题】- 考点：矩阵的相似和相似对角化 - 8

11. 【P149-4 (96-5)】5 阶行列式 $\begin{vmatrix}1-a&a&0&0&0\\-1&1-a&a&0&0\\0&-1&1-a&a&0\\0&0&-1&1-a&a\\0&0&0&-1&1-a\end{vmatrix}=$ ________.

答案 P324；【真题精选】- 考点：具体行列式的计算 - 4

12. 【P173-8 (98-1)】已知线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0,\\a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0,\\\quad\cdots\cdots\cdots\\a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0\end{cases}$$

的一个基础解系为 $(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n})^{\mathrm{T}},(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n})^{\mathrm{T}},\cdots,(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n})^{\mathrm{T}}$, 则线性方程组

$$\begin{cases}b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0,\\b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0,\\\quad\cdots\cdots\cdots\\b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0\end{cases}$$

的通解为 ________.

答案 P338；【真题精选】- 考点：线性方程组的解的结构 - 8

13. 【P173-10 (05-1,2)】已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c), a,b,c 不全为零, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$ (k 为常数), 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

答案 P338;【真题精选】- 考点：线性方程组的解的结构 - 10

14. 【P190-2 (21-1)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a&1&-1\\1&a&-1\\-1&-1&a\end{pmatrix}$.

(1) 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵;

(2) 求正定矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^2=(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

注 主要错的是 (2)

答案 P350;【十年真题】- 考点三：正定二次型与正定矩阵 - 2

15. 【P156-3 (01-3)】设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{B}^{-1}=(\quad)$

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.

(B) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$.

(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$.

(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$.

答案 P327;【真题精选】- 考点二：矩阵的初等变换与初等矩阵 - 3

16. 【P172-变式 (07-1,2,3)】设线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0, \\ x_1+2x_2+ax_3=0, \\ x_1+4x_2+a^2x_3=0 \end{cases}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

答案 P337;【方法探究】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 变式

17. 【P162-8 (00-2)】设 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma}=\begin{pmatrix}0\\0\\8\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{B}=\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.
其中 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置, 求解方程

$$2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\gamma}.$$

答案 P331;【真题精选】- 考点一: 线性方程组的解的情况及求解 - 8

18. 【P180-5 (22-2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,0$ 的充分必要条件是 ( )

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}$.
(B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}$.
(C) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{Q}^{-1}$.
(D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}$.

答案 P341;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 5

19. 【P150-4 (22-1)】已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=$ ________.

答案 P325;【十年真题】- 考点一: 矩阵的运算 - 4

20. 【P171-9 (25-2)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$, 则方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_4$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$ ________.

答案 P337;【十年真题】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 9

21. 【P193 (01-3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, $r(\boldsymbol{A})=n$, A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$, 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_i x_j$.

(1) 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式, 并证明二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(2) 二次型 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $f(\boldsymbol{x})$ 的规范形是否相同? 说明理由.

答案 P352;【真题精选】- 考点二: 矩阵的合同

22. 【P162-2 (14-1,2,3)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-2&3&-4\\0&1&-1&1\\1&2&0&-3\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

答案 P332;【真题精选】- 考点二: 矩阵方程组的解的情况及求解 - 2

23. 【P158-5 (23-2,3)】已知线性方程组

$$\begin{cases}ax_1+x_3=1,\\x_1+ax_2+x_3=0,\\x_1+2x_2+ax_3=0,\\ax_1+bx_2=2\end{cases}$$

有解, 其中 a,b 为常数. 若 $\begin{vmatrix}a&0&1\\1&a&1\\1&2&a\end{vmatrix}=4$, 则 $\begin{vmatrix}1&a&1\\1&2&a\\a&b&0\end{vmatrix}=$ ________.

答案 P328;【十年真题】- 考点一: 线性方程组的解的情况及求解 - 5

24. 【P185-7 (07-1,2,3)】设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

答案 P345;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 7

25. 【P148-例 2 (1)】n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & \\ 2 & a & -1 & & & \\ 3 & & a & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ n-1 & & & & a & -1 \\ n & & & & & a \end{vmatrix}=$ ________.

答案 P148;【方法探究】- 考点: 具体行列式的计算 - 例 2 (1)

26. 【P162-1 (15-2,3)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 求 $\boldsymbol{X}$.

答案 P332;【真题精选】- 考点二: 矩阵方程组的解的情况及求解 - 1

27. 【P188-2 (25-2)】设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 有一个正特征值和两个负特征值, 则 (　)

(A) $a>4,b>0$.　　(B) $a<4,b>0$.

(C) $a>4,b<0$.　　(D) $a<4,b<0$.

答案 P347;【十年真题】- 考点一: 化二次型为标准型 - 2

28. 【P150-3 (24-1)】设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$. 若对任意实向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,

$$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})^2 \leq \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$$

都成立, 则 a 的取值范围为 ________.

答案 P325;【十年真题】- 考点一: 矩阵的运算 - 3

29. 【P189-2 (23-1)】已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3,$$
$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3.$$

(1) 求可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$;

(2) 是否存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$?

答案 P349;【十年真题】- 考点二: 矩阵的合同 - 2

30. 【P168-4 (06-1,2,3)】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量, $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ( )

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\dots,\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关.

答案 P335;【真题精选】- 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 4

31. 【P181-15 (20-1,2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

答案 P343;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 15

32. 【P174-12 (94-1)】设四元线性齐次方程组 (I) 为 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$ 又已知某线性齐次方程组 (II) 的通解为 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}} + k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求线性方程组 (I) 的基础解系;

(2) 问线性方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出所有的非零公共解. 若没有, 则说明理由.

答案 P339;【真题精选】- 考点:线性方程组的解的结构 - 12

33. 【P179-1 (08-1,2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{O}$, 则 ( )

(A) $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 不可逆.

(B) $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 可逆.

(C) $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 可逆.

(D) $\boldsymbol{E} - \boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E} + \boldsymbol{A}$ 不可逆.

答案 P341;【真题精选】- 考点:矩阵的特征值和特征向量 - 1

34. 【P170-5 (21-3)】设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶正交矩阵. 若矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}} \\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, k 表示任意常数, 则线性方程组 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{x} =$ ( )

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 + k\boldsymbol{\alpha}_1$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_3 + \boldsymbol{\alpha}_4 + k\boldsymbol{\alpha}_2$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_4 + k\boldsymbol{\alpha}_3$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3 + k\boldsymbol{\alpha}_4$.

答案 P336;【十年真题】- 考点:线性方程组的解的结构 - 5

35. 【P177-1 (24-1)】设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 2 的 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{0}$ 的非零向量. 若对满足 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha} = 0$ 的 3 维列向量 $\boldsymbol{\beta}$, 均有 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}$, 则 ( )

(A) $\boldsymbol{A}^3$ 的迹为 2.

(B) $\boldsymbol{A}^3$ 的迹为 5.

(C) $\boldsymbol{A}^2$ 的迹为 8.

(D) $\boldsymbol{A}^2$ 的迹为 9.

答案 P340;【十年真题】- 考点:矩阵的特征值和特征向量 - 1

36. 【P159-1 (18-1,2,3)】已知 a 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2&a\\1&3&0\\2&7&-a\end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&a&2\\0&1&1\\-1&1&1\end{pmatrix}$.

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP}=\boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

答案 P328;【十年真题】- 考点二: 矩阵方程组的解的情况及求解 - 1

37. 【P190-1 (25-3)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&a\end{pmatrix}$. 若 $f(x,y)=|x\boldsymbol{A}+y\boldsymbol{B}|$ 是正定二次型, 则 a 的取值范围是 (　)

(A) $(0,2-\sqrt{3})$.

(B) $(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$.

(C) $(2+\sqrt{3},4)$.

(D) $(0,4)$.

答案 P350;【十年真题】- 考点三: 正定二次型与正定矩阵 - 1

38. 【P185-6 (08-2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$.

答案 P345;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 6

39. 【P161-3 (98-3)】齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$. 若存在 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$ 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 则 (　　)

(A) $\lambda = -2$ 且 $|\boldsymbol{B}| = 0$.

(B) $\lambda = -2$ 且 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$.

(C) $\lambda = 1$ 且 $|\boldsymbol{B}| = 0$.

(D) $\lambda = 1$ 且 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$.

答案 P330；【真题精选】- 考点一：线性方程组的解的情况及求解 - 3

40. 【P164-4 (22-1,2,3)】设

$$\boldsymbol{\alpha}_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \boldsymbol{\alpha}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_4$ 等价, 则 λ 的取值范围是 (　　)

(A) $\{0, 1\}$.

(B) $\{\lambda | \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -2\}$.

(C) $\{\lambda | \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$.

(D) $\{\lambda | \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1\}$.

答案 P333；【十年真题】- 考点：向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 4

41. 【P173-1 (11-1,2)】设 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的基础解系可为 (　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_3$.

(B) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$.

(D) $\boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$.

答案 P338；【真题精选】- 考点：线性方程组的解的结构 - 1

42. 【P156-10 (95-1)】设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 满足 $\boldsymbol{AA}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵), $|\boldsymbol{A}| < 0$, 则 $|\boldsymbol{A} + \boldsymbol{E}| =$ ________.

答案 P327；【真题精选】- 考点一：矩阵的运算 - 10

43. 【P146-4 (20-1,2,3)】行列式 $\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________.

答案 P323；【十年真题】- 考点：具体行列式的计算 - 4

44. 【P159-2 (16-1)】设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix},$$

当 a 为何值时, 方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

答案 P328；【十年真题】- 考点二：矩阵方程组的解的情况及求解 - 2

45. 【P194-1 (05-3)】设 $\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 m 阶, n 阶对称矩阵, $\boldsymbol{C}$ 为 $m \times n$ 矩阵.

(1) 计算 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n \end{pmatrix}$;

(2) 利用 (1) 的结果判断矩阵 $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是否为正定矩阵, 并证明你的结论.

注 主要错的是 (2)

答案 P352；【真题精选】- 考点三：正定二次型与正定矩阵 - 1

46. 【P189-12 (20-1,3)】设二次型

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$$

经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{Q}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型

$$g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2,$$

其中 $a \geqslant b$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

答案 P348；【十年真题】- 考点一：化二次型为标准型 - 12

47. 【P160-变式 (04-1)】设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \vdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases} \quad (n \geq 2),$$

试问 a 为何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

答案 P329；【方法探究】- 考点一：线性方程组的解的情况及求解 - 变式

48. 【P173-9 (93-1)】设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为零, 且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________.

答案 P338；【真题精选】- 考点：线性方程组的解的结构 - 9

49. 【P185-9 (04-1,2)】设矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

答案 P345；【真题精选】- 考点：矩阵的相似和相似对角化 - 9

50. 【P186-10 (02-1)】设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为同阶方阵.

(1) 如果 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似, 试证 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等;

答案 P345；【真题精选】- 考点：矩阵的相似和相似对角化 - 10

51. 【P193-3 (14-1,2,3)】设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$$

的负惯性指数是 1, 则 a 的取值范围是________.

答案 P351；【真题精选】- 考点一：化二次型为标准型 - 3

52. 【P177-3 (24-3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, bmA^* 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵. 若 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$, $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=2$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=$________.

答案 P340;【十年真题】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 3

53. 【P170-2 (25-2)】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $r(\boldsymbol{AB})=r(\boldsymbol{BA})+1$, 则 (　)

(A) 方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

(B) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 均只有零解.

(C) 方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{0}$ 没有公共非零解.

(D) 方程组 $\boldsymbol{ABAx}=\boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{BABx}=\boldsymbol{0}$ 有公共非零解.

答案 P336;【十年真题】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 2

54. 【P180-4 (22-1)】下述四个条件中, 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的一个充分但不必要条件是 (　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 有 3 个互不相等的特征值.

(B) $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量.

(C) $\boldsymbol{A}$ 有 3 个两两线性无关的特征向量.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量正交.

答案 P341;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 4

55. 【P164-5 (21-1)】已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, 记 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交, 则 l_1,l_2 依次为 (　)

(A) $\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.

(B) $-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.

(D) $-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.

答案 P333;【十年真题】- 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 5

56. 【P150-2 (24-2)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*)=\boldsymbol{O}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{A}^*$, 则 $r(\boldsymbol{A})$ 取值为 (　　)

(A)　0 或 1.　　(B)　1 或 3.

(C)　2 或 3.　　(D)　1 或 2.

答案 P325;【十年真题】- 考点三: 矩阵的秩与等价 - 2

57. 【P181-17 (16-1,2,3)】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

答案 P343;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 17

58. 【P170-3 (22-1)】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 若方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解, 则 (　　)

(A)　方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{O}\\\boldsymbol{E}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

(B)　方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 只有零解.

(C)　方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 同解.

(D)　方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}&\boldsymbol{B}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{A}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}&\boldsymbol{A}\\\boldsymbol{O}&\boldsymbol{B}\end{pmatrix}\boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}$ 同解.

答案 P336;【十年真题】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 3

59. 【P179-36 (96-1)】设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量, $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的转置. 证明:

(1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分条件是 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$

(2) 当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

答案 P341；【真题精选】- 考点：矩阵的特征值和特征向量 - 6

60. 【P184-变式 2 (11-1,2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

答案 P344；【方法探究】- 考点：矩阵的相似和相似对角化 - 变式 2

61. 【P180-2 (24-2)】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 2 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则 “$\boldsymbol{A}$ 有两个不相等的特征值” 是 “$\boldsymbol{B}$ 可对角化” 的 (　)

(A) 充分必要条件.　　(B) 充分不必要条件.

(C) 必要不充分条件.　　(D) 既不充分也不必要条件.

答案 P341；【十年真题】- 考点：矩阵的相似和相似对角化 - 2

62. 【P177-5 (18-1)】设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量, 且满足

$$\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

答案 P340；【十年真题】- 考点：矩阵的特征值和特征向量 - 5

63. 【P150-4 (22-2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行和第 3 行, 再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列, 得到 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{-1}) =$ ________.

答案 P325;【十年真题】- 考点二: 矩阵的初等变换与初等矩阵 - 4

64. 【P163-2 (23-1)】已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{ABC} = \boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{BC} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

的秩分别为 r_1, r_2, r_3, 则 (　　)

(A) $r_1 \le r_2 \le r_3$.

(B) $r_1 \le r_3 \le r_2$.

(C) $r_3 \le r_1 \le r_2$.

(D) $r_2 \le r_1 \le r_3$.

答案 P333;【十年真题】- 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 2

65. 【P181-11 (18-2)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组. 若 $\boldsymbol{A\alpha}_1 = 2\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A\alpha}_2 = \boldsymbol{\alpha}_2 + 2\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A\alpha}_3 = -\boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为________.

答案 P342;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 11

66. 【P173-7 (04-4)】设 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{3\times 3}$ 是实正交矩阵, 且 $a_{11} = 1, \boldsymbol{b} = (1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解是 ________.

答案 P338;【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 7