



考研数学真题错题整理

参考 2026 版《考研数学这十年》

作者：Guangchen Jiang

时间：2025/12/31

版本：4.5



目录

第一章 高数	1
1.1 极限	1
1.2 一元函数微分学	7
1.3 一元函数积分学	11
1.4 微分方程	11
1.5 多元函数微分学	11
1.6 多元函数积分学	11
1.7 无穷级数	11
第二章 线代	12
2.1 行列式	12
2.2 矩阵	13
2.3 向量与线性方程组	15
2.4 矩阵的特征值和特征向量	22
2.5 二次型	27
第三章 概率	31
3.1 随机事件和概率	31
3.2 随机变量及其分布	32
3.3 多维随机变量及其分布	34
3.4 随机变量的数字特征	37
3.5 大数定律与中心极限定理	40
3.6 数理统计的基本概念	40
3.7 参数估计	40

第一章 高数

1.1 极限

1. 【P2-1 (24-2)】 已知数列 $\{a_n\}$ ($a_n \neq 0$). 若 $\{a_n\}$ 发散, 则 ()

- (A) $\left\{a_n + \frac{1}{a_n}\right\}$ 发散. (B) $\left\{a_n - \frac{1}{a_n}\right\}$ 发散.
(C) $\left\{e^{a_n} + \frac{1}{e^{a_n}}\right\}$ 发散. (D) $\left\{e^{a_n} - \frac{1}{e^{a_n}}\right\}$ 发散.

答案 P238; 【十年真题】 - 考点: 极限的概念与性质 - 1

2. 【P2-2 (22-1,2)】 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $-\frac{\pi}{2} \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$, 则 ()

- (A) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.
(B) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在时, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.
(C) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\sin x_n)$ 存在时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在.
(D) 当 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\cos x_n)$ 存在时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos x_n$ 存在, 但 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 不一定存在.

答案 P238; 【十年真题】 - 考点: 极限的概念与性质 - 2

3. 【P4-4 (99-2)】 对任意给定的 $\varepsilon \in (0, 1)$, 总存在正整数 N , 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$ 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 ()

- (A) 充分条件但非必要条件. (B) 必要条件但非充分条件.
(C) 充分必要条件. (D) 既非充分条件又非必要条件.

答案 P238; 【真题精选】 - 考点: 极限的概念与性质 - 4

4. 【P4-2 (23-3)】 $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left(2 - x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 P238; 【十年真题】 - 考点一: 函数极限的计算 - 2

5. 【P4-3 (22-2,3)】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + e^x}{2} \right)^{\cot x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 P238; 【十年真题】 - 考点一: 函数极限的计算 - 3

6. 【P4-7 (16-2,3)】 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x + 2x \sin x)^{\frac{1}{x^4}}.$

答案 P239; 【十年真题】 - 考点一: 函数极限的计算 - 7

7. 【P4-2 (25-2)】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left[\ln \frac{1}{n} + 2 \ln \frac{2}{n} + \cdots + (n-1) \ln \frac{n-1}{n} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 P239; 【十年真题】 - 考点二: 数列极限的计算 - 2

8. 【P4-5 (19-1,3)】 设 $a_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n = \frac{n-1}{n+2} a_{n-2}$ ($n = 2, 3, \dots$);

(2) 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n-1}}.$

答案 P239; 【十年真题】 - 考点二: 数列极限的计算 - 5

9. 【P4-6 (18-1,2,3)】 设数列 $\{x_n\}$ 满足: $x_1 > 0$, $x_n e^{x_{n+1}} = e^{x_n} - 1$ ($n = 1, 2, \dots$). 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n.$

答案 P240; 【十年真题】 - 考点二: 数列极限的计算 - 6

10. 【P6-例 1 (2)】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1+\tan x}}{x \tan^2 x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 P6; 【方法探究】 - 考点一: 函数极限的计算 - 例 1 (2)

11. 【P7-变式 1.1 (97-2)】 求极限 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4x^2 + x - 1} + x + 1}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$.

答案 P240; 【方法探究】 - 考点一: 函数极限的计算 - 变式 1.1

12. 【P8-变式 3 (98-1)】 求极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n+1} + \frac{\sin \frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}} + \cdots + \frac{\sin \pi}{n+\frac{1}{n}} \right).$$

答案 P240; 【方法探究】 - 考点二: 数列极限的计算 - 变式 3

▲ 13. 【P8-变式 4.1 (96-1)】 设 $x_1 = 10$, $x_{n+1} = \sqrt{6 + x_n}$ ($n = 1, 2, \dots$). 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在, 并求此极限.

答案 P241; 【方法探究】 - 考点二: 数列极限的计算 - 变式 4.1

14. 【P8-变式 4.2 (11-1, 2)】 (1) 证明: 对任意的正整数 n , 都有 $\frac{1}{n+1} < \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) < \frac{1}{n}$ 成立;

(2) 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$ ($n = 1, 2, \dots$), 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

注 主要错的是 (2)

答案 P241; 【方法探究】 - 考点二: 数列极限的计算 - 变式 4.2

15. 【P9-8 (97-1)】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \sin x + x^2 \cos \frac{1}{x}}{(1 + \cos x) \ln(1 + x)} = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 P241; 【真题精选】 - 考点一: 函数极限的计算 - 8

16. 【P9-15 (08-3)】 计算

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln \frac{\sin x}{x}.$$

答案 P242; 【真题精选】 - 考点一: 函数极限的计算 - 15

17. 【P10-1 (12-2)】 设 $a_n > 0$ ($n = 1, 2, \dots$), $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 ()

- (A) 充分必要条件. (B) 充分非必要条件.
(C) 必要非充分条件. (D) 既非充分也非必要条件.

答案 P243; 【真题精选】 - 考点二: 数列极限的计算 - 1

18. 【P10-2 (04-2)】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \left(1 + \frac{2}{n}\right)^2 \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right)^2}$ 等于 ()

- (A) $\int_1^2 \ln^2 x \, dx$. (B) $2 \int_1^2 \ln x \, dx$.
(C) $2 \int_1^2 \ln(1+x) \, dx$. (D) $\int_1^2 \ln^2(1+x) \, dx$.

答案 P243; 【真题精选】 - 考点二: 数列极限的计算 - 2

19. 【P10-4 (02-2)】 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \left[\sqrt{1 + \cos \frac{\pi}{n}} + \sqrt{1 + \cos \frac{2\pi}{n}} + \dots + \sqrt{1 + \cos \frac{n\pi}{n}} \right] = \underline{\hspace{2cm}}.$

答案 P243; 【真题精选】 - 考点二: 数列极限的计算 - 4

20. 【P10-6 (13-2)】 设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

- (1) 求 $f(x)$ 的最小值;
(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$. 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

注 主要错的是 (2)

答案 P243; 【真题精选】 - 考点二: 数列极限的计算 - 6

21. 【P10-8 (99-2)】 设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负连续函数.

$$a_n = \sum_{k=1}^n f(k) - \int_1^n f(x) \, dx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

答案 P243; 【真题精选】 - 考点二: 数列极限的计算 - 8

22. 【P11-3 (23-2)】已知数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 满足 $x_1 = y_1 = \frac{1}{2}$, $x_{n+1} = \sin x_n$, $y_{n+1} = y_n^2$ ($n = 1, 2, \dots$), 则当 $n \rightarrow \infty$ 时 ()

- (A) x_n 是 y_n 的高阶无穷小. (B) y_n 是 x_n 的高阶无穷小.
(C) x_n 与 y_n 是等价无穷小. (D) x_n 与 y_n 是同阶但不等价的无穷小.

答案 P244; 【十年真题】- 考点一: 无穷小的比较 - 3

23. 【P11-6 (20-2)】求曲线 $y = \frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ ($x > 0$) 的斜渐近线方程.

答案 P244; 【十年真题】- 考点二: 平面曲线的渐近线 - 6

24. 【P14-2 (12-1,2,3)】曲线 $y = \frac{x^2 + x}{x^2 - 1}$ 渐近线的条数为 ()

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

答案 P245; 【真题精选】- 考点二: 平面曲线的渐近线 - 2

25. 【P14-3 (07-1,3)】曲线 $y = \frac{1}{x} + \ln(1 + e^x)$ 渐近线的条数为 ()

- (A) 0. (B) 1. (C) 2. (D) 3.

答案 P245; 【真题精选】- 考点二: 平面曲线的渐近线 - 3

26. 【P14-8 (00-3)】求函数 $f(x) = (x-1)e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$ 图形的渐近线.

答案 P246; 【真题精选】- 考点二: 平面曲线的渐近线 - 8

27. 【P14-4 (07-2)】函数 $f(x) = \frac{(e^{\frac{1}{x}} + e) \tan x}{x(e^{\frac{1}{x}} - e)}$ 在区间 $[-\pi, \pi]$ 上的第一类间断点是 $x = (\quad)$

- (A) 0. (B) 1.
(C) $-\frac{\pi}{2}$. (D) $\frac{\pi}{2}$.

答案 P246; 【真题精选】- 考点三: 函数的连续性与间断点 - 4

28. 【P14-6 (95-2)】设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x) \neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则 (\quad)

- (A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点. (B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.
(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点. (D) $\frac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

答案 P246; 【真题精选】- 考点三: 函数的连续性与间断点 - 6

29. 【P14-9 (01-2)】求极限 $\lim_{t \rightarrow x} \left(\frac{\sin t}{\sin x} \right)^{\frac{x}{\sin t - \sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

答案 P247; 【真题精选】- 考点三: 函数的连续性与间断点 - 9

30. 【P15-1 (20-3)】设 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - a}{x - a} = b$, 则 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin f(x) - \sin a}{x - a} = (\quad)$

- (A) $b \sin a$. (B) $b \cos a$.
(C) $b \sin f(a)$. (D) $b \cos f(a)$.

答案 P247; 【十年真题】- 考点一: 已知极限求另一极限 - 1

31. 【P15-2 (16-3)】已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + f(x) \sin 2x} - 1}{e^{3x} - 1} = 2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 P247; 【十年真题】- 考点一: 已知极限求另一极限 - 2

1.2 一元函数微分学

1. 【P18-1 (25-2)】 设函数 $f(x)$ 连续, 给出下列四个条件:

① $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - f(0)}{x}$ 存在;

② $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$ 存在;

③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)|}{x}$ 存在;

④ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|f(x)| - |f(0)|}{x}$ 存在.

其中能得到 “ $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导” 的条件的个数是 ()

- (A) 1. (B) 2. (C) 3. (D) 4.

答案 P249; 【十年真题】 - 考点: 导数与微分的概念 - 1

2. 【P18-7 (16-1)】 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0, \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, n = 1, 2, \dots, \end{cases}$ 则 ()

- (A) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点. (B) $x = 0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.
(C) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续但不可导. (D) $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导.

答案 P250; 【十年真题】 - 考点: 导数与微分的概念 - 7

3. 【P18-8 (25-2,3)】 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{xf(x) - e^{2\sin x} + 1}{\ln(1+x) + \ln(1-x)} = -3$, 证明 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

答案 P250; 【十年真题】 - 考点: 导数与微分的概念 - 8

4. 【P18-9 (22-2)】 已知函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处可导, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(e^{x^2}) - 3f(1 + \sin^2 x)}{x^2} = 2,$$

求 $f'(1)$.

答案 P250; 【十年真题】 - 考点: 导数与微分的概念 - 9

5. 【P20-1 (07-1,2,3)】 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续, 下列命题错误的是 ()

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$. (B) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) + f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0) = 0$.
 (C) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在. (D) 若 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

答案 P250; 【真题精选】 - 考点: 导数与微分的概念 - 1

6. 【P20-3 (05-1,2)】 设函数 $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + |x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内 ()

- (A) 处处可导. (B) 恰有一个不可导点.
 (C) 恰有两个不可导点. (D) 至少有三个不可导点.

答案 P251; 【真题精选】 - 考点: 导数与微分的概念 - 3

7. 【P21-9 (03-3)】 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^\lambda \cos \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 其导函数在 $x = 0$ 处连续, 则 λ 的取值范围是 _____.

答案 P251; 【真题精选】 - 考点: 导数与微分的概念 - 9

8. 【P21-2 (22-2)】 已知函数 $y = y(x)$ 由方程

$$x^2 + xy + y^3 = 3$$

确定, 则 $y''(1) =$ _____.

答案 P251; 【十年真题】 - 考点一: 函数的求导与微分法则 - 2

9. 【P21-1 (21-1)】 设函数 $f(x) = \frac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$, 则 ()

(A) $a=1, b=0, c=-\frac{7}{6}$.

(B) $a=1, b=0, c=\frac{7}{6}$.

(C) $a=-1, b=-1, c=-\frac{7}{6}$.

(D) $a=-1, b=-1, c=\frac{7}{6}$.

答案 P251; 【十年真题】 - 考点二: 高阶导数的计算 - 1

10. 【P21-7 (16-1)】 设函数 $f(x) = \arctan x - \frac{x}{1+ax^2}$, 且 $f'''(0) = 1$, 则 $a =$ _____.

答案 P251; 【十年真题】 - 考点二: 高阶导数的计算 - 7

11. 【P24-例 (2)】 设函数 $y = x^2 \sin 2x$, 则 $y^{(5)}(0) =$ _____.

答案 P24; 【方法探究】 - 考点二: 高阶导数的计算 - 例 (2)

12. 【P25-7 (97-3)】 设 $y = f(\ln x)e^{f(x)}$, 其中 f 可微, 则 $dy =$ _____.

答案 P252; 【真题精选】 - 考点一: 函数的求导与微分法则 - 7

13. 【P26-2 (20-3)】 曲线 $x+y+e^{2xy}=0$ 在点 $(0, -1)$ 处的切线方程为 _____.

答案 P254; 【十年真题】 - 考点一: 平面曲线的切线与法线 - 2

14. 【P26-1 (23-2)】 设函数 $f(x) = (x^2+a)e^x$. 若 $f(x)$ 没有极值点, 但曲线 $y=f(x)$ 有拐点, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $[0, 1)$.

(B) $[1, +\infty)$.

(C) $[1, 2)$

(D) $[2, +\infty)$.

答案 P254; 【十年真题】 - 考点二: 利用导数判断函数的性质 - 1

15. 【P26-2 (22-2)】 设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处具有 2 阶导数, 则 ()

- (A) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时, $f'(x_0) > 0$.
- (B) 当 $f'(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加.
- (C) 当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时, $f''(x_0) > 0$.
- (D) 当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数.

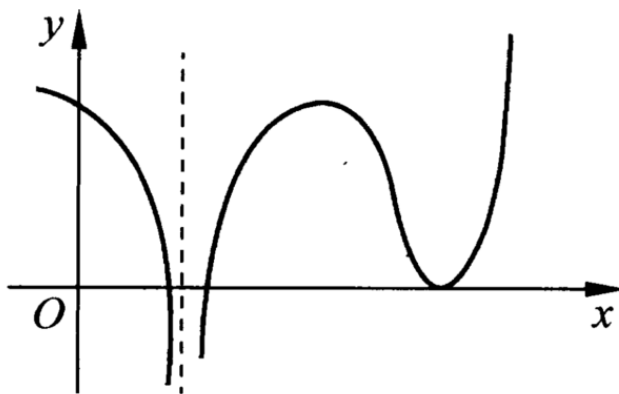
答案 P254; 【十年真题】 - 考点二: 利用导数判断函数的性质 - 2

16. 【P26-4 (19-1)】 设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \leq 0, \\ x \ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 ()

- (A) 可导点, 极值点.
- (B) 不可导点, 极值点.
- (C) 可导点, 非极值点.
- (D) 不可导点, 非极值点.

答案 P254; 【十年真题】 - 考点二: 利用导数判断函数的性质 - 4

17. 【P26-5 (16-2,3)】 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如下图所示, 则 ()



- (A) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.
- (B) 函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点.
- (C) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点.
- (D) 函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.

答案 P254; 【十年真题】 - 考点二: 利用导数判断函数的性质 - 5

18. 【P26-6 (19-2,3)】 曲线 $y = x \sin x + 2 \cos x$ $\left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为 _____.

答案 P254; 【十年真题】 - 考点二: 利用导数判断函数的性质 - 6

19. 【P26-9 (21-2)】 已知函数 $f(x) = \frac{x|x|}{1+x}$, 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间及渐近线.

答案 P254; 【十年真题】 - 考点二: 利用导数判断函数的性质 - 9

20. 【P27-1 (18-3)】 设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导, 其中 Q 为产量. 若产量为 Q_0 时平均成本最小, 则 ()

(A) $C'(Q_0) = 0$.

(B) $C'(Q_0) = C(Q_0)$.

(C) $C'(Q_0) = Q_0 C(Q_0)$.

(D) $Q_0 C'(Q_0) = C(Q_0)$.

答案 P256; 【十年真题】 - 考点五: 导数的经济应用 (仅数学三) - 1

1.3 一元函数积分学

1.4 微分方程

1.5 多元函数微分学

1.6 多元函数积分学

1.7 无穷级数

第二章 线代

2.1 行列式

1. 【P146-4 (20-1,2,3)】行列式
$$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案 P323; 【十年真题】 - 考点: 具体行列式的计算 - 4

2. 【P148-例 2 (1)】 n 阶行列式
$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & & & \\ 2 & a & -1 & & \\ 3 & & a & -1 & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ n-1 & & & a & -1 \\ n & & & a & \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案 P148; 【方法探究】 - 考点: 具体行列式的计算 - 例 2 (1)

3. 【P149-4 (96-5)】5 阶行列式
$$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}.$$

答案 P324; 【真题精选】 - 考点: 具体行列式的计算 - 4

2.2 矩阵

1. 【P150-3 (24-1)】 设实矩阵 $A = \begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$. 若对任意实向量 $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,
 $(\alpha^T A \beta)^2 \leq \alpha^T A \alpha \cdot \beta^T A \beta$

都成立, 则 a 的取值范围为 _____.

答案 P325; 【十年真题】 - 考点一: 矩阵的运算 - 3

2. 【P150-4 (22-1)】 已知矩阵 A 和 $E-A$ 可逆, 其中 E 为单位矩阵. 若矩阵 B 满足 $[E-(E-A)^{-1}]B = A$, 则 $B-A =$ _____.

答案 P325; 【十年真题】 - 考点一: 矩阵的运算 - 4

3. 【P150-1 (25-2)】 下列矩阵中, 可以经过若干初等行变换得到矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的是 ()

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

答案 P325; 【十年真题】 - 考点二: 矩阵的初等变换与初等矩阵 - 1

4. 【P150-4 (22-2,3)】 设 A 为 3 阶矩阵, 交换 A 的第 2 行和第 3 行, 再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列, 得到 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A^{-1} 的迹 $\text{tr}(A^{-1}) =$ _____.

答案 P325; 【十年真题】 - 考点二: 矩阵的初等变换与初等矩阵 - 4

5. 【P150-2 (24-2)】 设 A 为 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 若 $A(A - A^*) = O$, 且 $A \neq A^*$, 则 $r(A)$ 取值为 ()

- (A) 0 或 1. (B) 1 或 3.
(C) 2 或 3. (D) 1 或 2.

答案 P325; 【十年真题】 - 考点三: 矩阵的秩与等价 - 2

6. 【P156-10 (95-1)】 设 A 是 n 阶矩阵, 满足 $AA^T = E$ (E 是 n 阶单位矩阵, A^T 是 A 的转置矩阵), $|A| < 0$, 则 $|A + E| =$ _____.

答案 P327; 【真题精选】 - 考点一: 矩阵的运算 - 10

7. 【P156-3 (01-3)】 设

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix},$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

A 可逆, 则 $B^{-1} =$ ()

- (A) $A^{-1}P_1P_2$. (B) $P_1A^{-1}P_2$.
(C) $P_1P_2A^{-1}$. (D) $P_2A^{-1}P_1$.

答案 P327; 【真题精选】 - 考点二: 矩阵的初等变换与初等矩阵 - 3

8. 【P156-5 (08-1)】 设 α, β 为 3 维列向量, 矩阵 $A = \alpha\alpha^T + \beta\beta^T$, 其中 α^T 为 α 的转置, β^T 为 β 的转置. 证明:

(1) $r(A) \leq 2$;

(2) 若 α, β 线性相关, 则 $r(A) < 2$.

答案 P327; 【真题精选】 - 考点三: 矩阵的秩与等价 - 5

2.3 向量与线性方程组

1. 【P158-5 (23-2,3)】 已知线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$$

有解, 其中 a, b 为常数. 若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 P328; 【十年真题】 - 考点一: 线性方程组的解的情况及求解 - 5

2. 【P159-1 (18-1,2,3)】 已知 a 是常数, 且矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a ;

(2) 求满足 $AP = B$ 的可逆矩阵 P .

答案 P328; 【十年真题】 - 考点二: 矩阵方程组的解的情况及求解 - 1

3. 【P159-2 (16-1)】 设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix},$$

当 a 为何值时, 方程 $\mathbf{AX} = \mathbf{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

答案 P328; 【十年真题】 - 考点二: 矩阵方程组的解的情况及求解 - 2

4. 【P160-变式 (04-1)】 设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \vdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases} \quad (n \geq 2),$$

试问 a 为何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

答案 P329; 【方法探究】 - 考点一: 线性方程组的解的情况及求解 - 变式

5. 【P161-3 (98-3)】 齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵记为 \mathbf{A} . 若存在 3 阶矩阵 $\mathbf{B} \neq \mathbf{O}$ 使得 $\mathbf{AB} = \mathbf{O}$, 则 ()

(A) $\lambda = -2$ 且 $|\mathbf{B}| = 0$.

(B) $\lambda = -2$ 且 $|\mathbf{B}| \neq 0$.

(C) $\lambda = 1$ 且 $|\mathbf{B}| = 0$.

(D) $\lambda = 1$ 且 $|\mathbf{B}| \neq 0$.

答案 P330; 【真题精选】 - 考点一: 线性方程组的解的情况及求解 - 3

6. 【P162-8 (00-2)】 设 $\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, $A = \alpha\beta^T$, $B = \beta^T\alpha$.

其中 β^T 是 β 的转置, 求解方程

$$2B^2A^2x = A^4x + B^4x + \gamma.$$

答案 P331; 【真题精选】 - 考点一: 线性方程组的解的情况及求解 - 8

7. 【P162-1 (15-2,3)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $A^3 = O$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 X 满足 $X - XA^2 - AX + AXA^2 = E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵, 求 X .

答案 P332; 【真题精选】 - 考点二: 矩阵方程组的解的情况及求解 - 1

8. 【P162-2 (14-1,2,3)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为 3 阶单位矩阵.

(1) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

答案 P332; 【真题精选】 - 考点二: 矩阵方程组的解的情况及求解 - 2

9. 【P163-2 (23-1)】 已知 n 阶矩阵 A, B, C 满足 $ABC = O$, E 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵

$$\begin{pmatrix} O & A \\ BC & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} AB & C \\ O & E \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} E & AB \\ AB & O \end{pmatrix}$$

的秩分别为 r_1, r_2, r_3 , 则 ()

(A) $r_1 \leq r_2 \leq r_3$.

(B) $r_1 \leq r_3 \leq r_2$.

(C) $r_3 \leq r_1 \leq r_2$.

(D) $r_2 \leq r_1 \leq r_3$.

答案 P333; 【十年真题】 - 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 2

10. 【P164-4 (22-1,2,3)】 设

$$\alpha_1 = \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \lambda \end{pmatrix}, \alpha_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \end{pmatrix}.$$

若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4$ 等价, 则 λ 的取值范围是 ()

- (A) $\{0, 1\}$. (B) $\{\lambda | \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -2\}$.
(C) $\{\lambda | \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1, \lambda \neq -2\}$. (D) $\{\lambda | \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq -1\}$.

答案 P333; 【十年真题】 - 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 4

11. 【P164-5 (21-1)】 已知 $\alpha_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \alpha_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, 记 $\beta_1 = \alpha_1, \beta_2 = \alpha_2 - k\beta_1, \beta_3 = \alpha_3 - l_1\beta_1 - l_2\beta_2$. 若 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 两两正交, 则 l_1, l_2 依次为 ()

- (A) $\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$. (B) $-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}$.
(C) $\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$. (D) $-\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}$.

答案 P333; 【十年真题】 - 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 5

12. 【P168-4 (06-1,2,3)】 设 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 均为 n 维列向量, A 是 $m \times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ()

- (A) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.
(B) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性相关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.
(C) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性相关.
(D) 若 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 线性无关, 则 $A\alpha_1, A\alpha_2, \dots, A\alpha_s$ 线性无关.

答案 P335; 【真题精选】 - 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 4

13. 【P170-2 (25-2)】 设 3 阶矩阵 A, B 满足 $r(AB) = r(BA) + 1$, 则 ()

- (A) 方程组 $(A + B)x = 0$ 只有零解.
- (B) 方程组 $Ax = 0$ 与方程组 $Bx = 0$ 均只有零解.
- (C) 方程组 $Ax = 0$ 与方程组 $Bx = 0$ 没有公共非零解.
- (D) 方程组 $ABAx = 0$ 与方程组 $BABx = 0$ 有公共非零解.

答案 P336; 【十年真题】 - 考点: 线性方程组的解的结构 - 2

14. 【P170-3 (22-1)】 设 A, B 为 n 阶矩阵, E 为单位矩阵. 若方程组 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则 ()

- (A) 方程组 $\begin{pmatrix} A & O \\ E & B \end{pmatrix} y = 0$ 只有零解.
- (B) 方程组 $\begin{pmatrix} E & A \\ O & AB \end{pmatrix} y = 0$ 只有零解.
- (C) 方程组 $\begin{pmatrix} A & B \\ O & B \end{pmatrix} y = 0$ 与 $\begin{pmatrix} B & A \\ O & A \end{pmatrix} y = 0$ 同解.
- (D) 方程组 $\begin{pmatrix} AB & B \\ O & A \end{pmatrix} y = 0$ 与 $\begin{pmatrix} BA & A \\ O & B \end{pmatrix} y = 0$ 同解.

答案 P336; 【十年真题】 - 考点: 线性方程组的解的结构 - 3

15. 【P170-4 (21-2)】 设 3 阶矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $B = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$. 若向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 可以由向量组 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 线性表出, 则 ()

- (A) $Ax = 0$ 的解均为 $Bx = 0$ 的解.
- (B) $A^T x = 0$ 的解均为 $B^T x = 0$ 的解.
- (C) $Bx = 0$ 的解均为 $Ax = 0$ 的解.
- (D) $B^T x = 0$ 的解均为 $A^T x = 0$ 的解.

答案 P336; 【十年真题】 - 考点: 线性方程组的解的结构 - 4

16. 【P170-5 (21-3)】 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 为 4 阶正交矩阵. 若矩阵 $B = \begin{pmatrix} \alpha_1^T \\ \alpha_2^T \\ \alpha_3^T \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, k 表示任意常数, 则线性方程组 $Bx = \beta$ 的通解 $x = (\quad)$

(A) $\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + k\alpha_1$.

(B) $\alpha_1 + \alpha_3 + \alpha_4 + k\alpha_2$.

(C) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 + k\alpha_3$.

(D) $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + k\alpha_4$.

答案 P336; 【十年真题】 - 考点: 线性方程组的解的结构 - 5

17. 【P171-9 (25-2)】 设矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. 若 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关, 且 $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4$, 则方程组 $Ax = \alpha_1 + 4\alpha_4$ 的通解为 $x = \underline{\hspace{2cm}}$.

答案 P337; 【十年真题】 - 考点: 线性方程组的解的结构 - 9

18. 【P172-变式 (07-1,2,3)】 设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ x_1 + 4x_2 + a^2x_3 = 0 \end{cases}$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

答案 P337; 【方法探究】 - 考点: 线性方程组的解的结构 - 变式

19. 【P173-1 (11-1,2)】 设 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ 是 4 阶矩阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 若 $(1, 0, 1, 0)^T$ 是方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系, 则 $A^*x = 0$ 的基础解系可为 ()

(A) α_1, α_3 .

(B) α_1, α_2 .

(C) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

(D) $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$.

答案 P338; 【真题精选】 - 考点: 线性方程组的解的结构 - 1

20. 【P173-4 (03-1)】设有齐次线性方程组 $Ax = 0$ 和 $Bx = 0$, 其中 A, B 均为 $m \times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:

- ① 若 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解, 则 $r(A) \geq r(B)$;
 ② 若 $r(A) \geq r(B)$, 则 $Ax = 0$ 的解均是 $Bx = 0$ 的解;
 ③ 若 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解, 则 $r(A) = r(B)$;
 ④ 若 $r(A) = r(B)$, 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 同解.

以上命题中正确的是 ()

- (A) ① ②. (B) ① ③. (C) ② ④. (D) ③ ④.

答案 P338; 【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 4

21. 【P173-7 (04-4)】设 $A = (a_{ij})_{3 \times 3}$ 是实正交矩阵, 且 $a_{11} = 1, b = (1, 0, 0)^T$, 则线性方程组 $Ax = b$ 的解是 _____.

答案 P338; 【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 7

22. 【P173-8 (98-1)】已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1,2n}x_{2n} = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2,2n}x_{2n} = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{n,2n}x_{2n} = 0 \end{cases}$$

的一个基础解系为 $(b_{11}, b_{12}, \cdots, b_{1,2n})^T, (b_{21}, b_{22}, \cdots, b_{2,2n})^T, \cdots, (b_{n1}, b_{n2}, \cdots, b_{n,2n})^T$, 则线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}y_1 + b_{12}y_2 + \cdots + b_{1,2n}y_{2n} = 0, \\ b_{21}y_1 + b_{22}y_2 + \cdots + b_{2,2n}y_{2n} = 0, \\ \cdots \cdots \cdots \\ b_{n1}y_1 + b_{n2}y_2 + \cdots + b_{n,2n}y_{2n} = 0 \end{cases}$$

的通解为 _____.

答案 P338; 【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 8

23. 【P173-9 (93-1)】设 n 阶矩阵 A 的各行元素之和均为零, 且 A 的秩为 $n-1$, 则线性方程组 $Ax = 0$ 的通解为_____.

答案 P338; 【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 9

24. 【P173-10 (05-1,2)】已知 3 阶矩阵 A 的第一行是 (a, b, c) , a, b, c 不全为零, 矩阵 $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & k \end{pmatrix}$ (k 为常数), 且 $AB = O$, 求线性方程组 $Ax = 0$ 的通解.

答案 P338; 【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 10

25. 【P174-12 (94-1)】设四元线性齐次方程组 (I) 为 $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0, \\ x_2 - x_4 = 0. \end{cases}$ 又已知某线性齐次方程组 (II) 的通解为 $k_1(0, 1, 1, 0)^T + k_2(-1, 2, 2, 1)^T$.

(1) 求线性方程组 (I) 的基础解系;

(2) 问线性方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出所有的非零公共解. 若没有, 则说明理由.

答案 P339; 【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 12

2.4 矩阵的特征值和特征向量

1. 【P177-1 (24-1)】设 A 是秩为 2 的 3 阶矩阵, α 是满足 $A\alpha = 0$ 的非零向量. 若对满足 $\beta^T \alpha = 0$ 的 3 维列向量 β , 均有 $A\beta = \beta$, 则 ()

(A) A^3 的迹为 2.

(B) A^3 的迹为 5.

(C) A^2 的迹为 8.

(D) A^2 的迹为 9.

答案 P340; 【十年真题】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 1

2. 【P177-3 (24-3)】设 A 为 3 阶矩阵, bmA^* 为 A 的伴随矩阵, E 为 3 阶单位矩阵. 若 $r(2E - A) = 1$, $r(E + A) = 2$, 则 $|A^*| =$ _____.

答案 P340; 【十年真题】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 3

3. 【P177-5 (18-1)】设 2 阶矩阵 A 有两个不同特征值, α_1, α_2 是 A 的线性无关的特征向量, 且满足

$$A^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \alpha_1 + \alpha_2,$$

则 $|A| =$ _____.

答案 P340; 【十年真题】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 5

4. 【P179-变式 1.2】设 3 阶实对称矩阵 A 的秩为 2, $A^2 = A$, 且 $A(1, -1, 1)^T = 0$, 求 A 的特征值与特征向量.

答案 P341; 【方法探究】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 变式 1.2

5. 【P179-1 (08-1,2,3)】设 A 为 n 阶非零矩阵, E 为 n 阶单位矩阵. 若 $A^3 = O$, 则 ()

- (A) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 不可逆. (B) $E - A$ 不可逆, $E + A$ 可逆.
(C) $E - A$ 可逆, $E + A$ 可逆. (D) $E - A$ 可逆, $E + A$ 不可逆.

答案 P341; 【真题精选】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 1

6. 【P179-3 (02-3)】设 A 是 n 阶实对称矩阵, P 是 n 阶可逆矩阵, 已知 n 维列向量 α 是 A 的属于特征值 λ 的特征向量, 则矩阵 $(P^{-1}AP)^T$ 属于特征值 λ 的特征向量是 ()

- (A) $P^{-1}\alpha$. (B) $P^T\alpha$.
(C) $P\alpha$. (D) $(P^{-1})^T\alpha$.

答案 P341; 【真题精选】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 3

7. 【P179-36 (96-1)】 设 $A = E - \xi\xi^T$, 其中 E 是 n 阶单位矩阵, ξ 是 n 维非零列向量, ξ^T 是 ξ 的转置. 证明:

- (1) $A^2 = A$ 的充分条件是 $\xi^T\xi = 1$
 (2) 当 $\xi^T\xi = 1$ 时, A 是不可逆矩阵.

答案 P341; 【真题精选】 - 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 6

8. 【P180-2 (24-2)】 设 A, B 为 2 阶矩阵, 且 $AB = BA$, 则 “ A 有两个不相等的特征值” 是 “ B 可对角化” 的 ()

- (A) 充分必要条件. (B) 充分不必要条件.
 (C) 必要不充分条件. (D) 既不充分也不必要条件.

答案 P341; 【十年真题】 - 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 2

9. 【P180-4 (22-1)】 下述四个条件中, 3 阶矩阵 A 可对角化的一个充分但不必要条件是 ()

- (A) A 有 3 个互不相等的特征值. (B) A 有 3 个线性无关的特征向量.
 (C) A 有 3 个两两线性无关的特征向量. (D) A 的属于不同特征值的特征向量正交.

答案 P341; 【十年真题】 - 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 4

10. 【P180-5 (22-2,3)】 设 A 为 3 阶矩阵, $\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 A 的特征值为 1, -1, 0 的充分必要条件是 ()

- (A) 存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $A = P\Lambda Q$. (B) 存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P\Lambda P^{-1}$.
 (C) 存在正交矩阵 Q , 使得 $A = Q\Lambda Q^{-1}$. (D) 存在可逆矩阵 P , 使得 $A = P\Lambda P^T$.

答案 P341; 【十年真题】 - 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 5

11. 【P180-8 (17-1,2,3)】已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, 则 ()

- (A) A 与 C 相似, B 与 C 相似. (B) A 与 C 相似, B 与 C 不相似.
(C) A 与 C 不相似, B 与 C 相似. (D) A 与 C 不相似, B 与 C 不相似.

答案 P342; 【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 8

12. 【P181-11 (18-2)】设 A 为 3 阶矩阵, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的向量组. 若 $A\alpha_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$, $A\alpha_2 = \alpha_2 + 2\alpha_3$, $A\alpha_3 = -\alpha_2 + \alpha_3$, 则 A 的实特征值为_____.

答案 P342; 【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 11

13. 【P181-15 (20-1,2,3)】设 A 为 2 阶矩阵, $P = (\alpha, A\alpha)$, 其中 α 是非零向量且不是 A 的特征向量.

- (1) 证明 P 为可逆矩阵;
(2) 若 $A^2\alpha + A\alpha - 6\alpha = 0$, 求 $P^{-1}AP$, 并判断 A 是否相似于对角矩阵.

答案 P343; 【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 15

14. 【P181-17 (16-1,2,3)】已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- (1) 求 A^{99} ;
(2) 设 3 阶矩阵 $B = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 满足 $B^2 = BA$. 记 $B^{100} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, 将 $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ 分别表示为 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 的线性组合.

答案 P343; 【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 17

15. 【P184-变式 2 (11-1,2,3)】 设 A 为 3 阶实对称矩阵, A 的秩为 2, 且

$$A \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(1) 求 A 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 A .

答案 P344; 【方法探究】 - 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 变式 2

16. 【P185-6 (08-2,3)】 设 A 为 3 阶矩阵, α_1, α_2 为 A 的分别属于特征值 $-1, 1$ 的特征向量, 向量 α_3 满足 $A\alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3$.

(1) 证明 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关;

(2) 令 $P = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, 求 $P^{-1}AP$.

答案 P345; 【真题精选】 - 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 6

17. 【P185-7 (07-1,2,3)】 设 3 阶实对称矩阵 A 的特征值 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2$, 且 $\alpha_1 = (1, -1, 1)^T$ 是 A 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $B = A^5 - 4A^3 + E$, 其中 E 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 α_1 是矩阵 B 的特征向量, 并求 B 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 B .

答案 P345; 【真题精选】 - 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 7

18. 【P185-9 (04-1,2)】 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & a & 5 \end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 A 是否可相似对角化.

答案 P345; 【真题精选】 - 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 9

19. 【P186-10 (02-1)】 设 A, B 为同阶方阵.

(1) 如果 A, B 相似, 试证 A, B 的特征多项式相等;

答案 P345; 【真题精选】 - 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 10

20. 【P186-12 (00-1)】某试验性生产线每年 1 月份进行熟练工与非熟练工的人数统计,然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门,其缺额由招收新的非熟练工补齐.新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工.设第 n 年 1 月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n ,记成向量 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix};$$

(2) 验证 $\eta_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\eta_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 A 的两个线性无关的特征向量,并求出相应的特征值;

(3) 当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 时,求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

答案 P346;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 12

21. 【P187-15 (92-4)】设矩阵 A, B 相似,其中 $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$.

(1) 求 x, y 的值;

(2) 求可逆矩阵 P , 使 $P^{-1}AP = B$.

答案 P346;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 12

2.5 二次型

1. 【P188-2 (25-2)】设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 有一个正特征值和两个负特征值, 则 ()

(A) $a > 4, b > 0$.

(B) $a < 4, b > 0$.

(C) $a > 4, b < 0$.

(D) $a < 4, b < 0$.

答案 P347;【十年真题】- 考点一: 化二次型为标准型 - 2

2. 【P189-12 (20-1,3)】 设二次型

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 - 4x_1x_2 + 4x_2^2$$

经正交变换 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ 化为二次型

$$g(y_1, y_2) = ay_1^2 + 4y_1y_2 + by_2^2,$$

其中 $a \geq b$.

(1) 求 a, b 的值;

(2) 求正交矩阵 Q .

答案 P348; 【十年真题】 - 考点一: 化二次型为标准型 - 12

3. 【P189-2 (23-1)】 已知二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_3,$$

$$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 + 2y_2y_3.$$

(1) 求可逆变换 $\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3)$;

(2) 是否存在正交变换 $\mathbf{x} = \mathbf{Q}\mathbf{y}$ 将 $f(x_1, x_2, x_3)$ 化为 $g(y_1, y_2, y_3)$?

答案 P349; 【十年真题】 - 考点二: 矩阵的合同 - 2

4. 【P190-1 (25-3)】 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -a \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$. 若 $f(x, y) = |\mathbf{x}\mathbf{A} + \mathbf{y}\mathbf{B}|$ 是正定二次型, 则 a 的取值范围是 ()

(A) $(0, 2 - \sqrt{3})$.

(B) $(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3})$.

(C) $(2 + \sqrt{3}, 4)$.

(D) $(0, 4)$.

答案 P350; 【十年真题】 - 考点三: 正定二次型与正定矩阵 - 1

5. 【P190-2 (21-1)】 设矩阵 $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(1) 求正交矩阵 \mathbf{P} , 使 $\mathbf{P}^T \mathbf{A} \mathbf{P}$ 为对角矩阵;

(2) 求正定矩阵 \mathbf{C} , 使 $\mathbf{C}^2 = (a+3)\mathbf{E} - \mathbf{A}$, 其中 \mathbf{E} 为 3 阶单位矩阵.

注 主要错的是 (2)

答案 P350; 【十年真题】 - 考点三: 正定二次型与正定矩阵 - 2

6. 【P193-3 (14-1,2,3)】 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$$

的负惯性指数是 1, 则 a 的取值范围是_____.

答案 P351; 【真题精选】 - 考点一: 化二次型为标准型 - 3

7. 【P193-8 (13-1,2,3)】 设二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2(a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3)^2 + (b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^2,$$

记 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明二次型 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2$.

注 主要错的是 (2)

答案 P352; 【真题精选】 - 考点一: 化二次型为标准型 - 8

8. 【P193 (01-3)】 设 \mathbf{A} 为 n 阶实对称矩阵, $r(\mathbf{A}) = n$, A_{ij} 是 $\mathbf{A} = (a_{ij})_{n \times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式

$(i, j = 1, 2, \dots, n)$, 二次型 $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{A_{ij}}{|\mathbf{A}|} x_i x_j$.

(1) 记 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, 把 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 写成矩阵形式, 并证明二次型 $f(\mathbf{x})$ 的矩阵为 \mathbf{A}^{-1} ;

(2) 二次型 $g(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ 与 $f(\mathbf{x})$ 的规范形是否相同? 说明理由.

答案 P352; 【真题精选】 - 考点二: 矩阵的合同

9. 【P194-1 (05-3)】 设 $D = \begin{pmatrix} A & C \\ C^T & B \end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 其中 A, B 为 m 阶, n 阶对称矩阵, C 为 $m \times n$ 矩阵.

(1) 计算 $P^T D P$, 其中 $P = \begin{pmatrix} E_m & -A^{-1}C \\ O & E_n \end{pmatrix}$;

(2) 利用 (1) 的结果判断矩阵 $B - C^T A^{-1} C$ 是否为正定矩阵, 并证明你的结论.

注 主要错的是 (2)

答案 P352; 【真题精选】 - 考点三: 正定二次型与正定矩阵 - 1

第三章 概率

3.1 随机事件和概率

1. 【P196-7 (25-1)】 设 A, B 为两个随机事件, 且 A 与 B 相互独立. 已知 $P(A) = 2P(B)$, $P(A \cup B) = \frac{5}{8}$, 则在事件 A, B 至少有一个发生的条件下, A, B 中恰有一个发生的概率为 _____.

答案 P353; 【十年真题】 - 考点一: 概率的五大公式 - 7

2. 【P196-11 (18-3)】 设随机事件 A, B, C 相互独立, 且

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2},$$

则 $P(AC|A \cup B) =$ _____.

答案 P354; 【十年真题】 - 考点一: 概率的五大公式 - 11

3. 【P198-例 (1)】 袋中装有 2 个红球, 3 个黄球, 1 个蓝球. 现有放回地从袋中取 3 次球, 每次取 1 个球, 则恰有 1 次取到蓝球的概率为 _____.

答案 P198; 【方法探究】 - 考点二: 古典概型与几何概型 - 例 (1)

4. 【P198-1 (15-1,3)】 若 A, B 为任意两个随机事件, 则 ()

(A) $P(AB) \leq P(A)P(B)$.

(B) $P(AB) \geq P(A)P(B)$.

(C) $P(AB) \leq \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

(D) $P(AB) \geq \frac{P(A) + P(B)}{2}$.

答案 P354; 【真题精选】 - 考点一: 概率的五大公式 - 1

5. 【P198-11 (97-1)】 袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个是黄球, 30 个是白球, 今有两人依次随机地从袋中各取一球, 取后不放回, 则第二个人取得黄球的概率是 _____.

答案 P354; 【真题精选】 - 考点一: 概率的五大公式 - 11

6. 【P199-14 (89-1)】甲、乙两人独立地对同一目标射击一次, 其命中率分别为 0.6 和 0.5. 现已知目标被命中, 则它是甲射中的概率为 _____.

答案 P355; 【真题精选】- 考点一: 概率的五大公式 - 14

3.2 随机变量及其分布

1. 【P200-2 (16-1)】设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ($\sigma > 0$), 记 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$, 则 ()

- (A) p 随着 μ 的增加而增加. (B) p 随着 σ 的增加而增加.
(C) p 随着 μ 的增加而减少. (D) p 随着 σ 的增加而减少.

答案 P355; 【十年真题】- 考点一: 随机变量的分布 - 2

2. 【P200-3 (24-1,3)】设随机试验每次成功的概率为 p , 现进行 3 次独立重复试验, 在至少成功 1 次的条件下 3 次试验全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$, 则 $p =$ _____.

答案 P355; 【十年真题】- 考点一: 随机变量的分布 - 3

3. 【P200-1 (23-3-局部)】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}$, $-\infty < x < +\infty$, 令 $Y = e^X$.

- (1) 求 X 的分布函数;
(2) 求 Y 的概率密度.

答案 P355; 【十年真题】- 考点二: 随机变量的函数的分布 - 1

4. 【P202-例 3 (90-1)】已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < +\infty$, 则 X 的分布函数 $F(x) =$ _____.

答案 P202; 【方法探究】- 考点一: 随机变量的分布 - 例 3

5. 【P203-4 (02-1)】 设 X_1 和 X_2 是相互独立的连续型随机变量, 它们的密度函数分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 则 ()

- (A) $f_1(x) + f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.
- (B) $f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.
- (C) $F_1(x) + F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.
- (D) $F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

答案 P356; 【真题精选】 - 考点一: 随机变量的分布 - 4

6. 【P204-7 (93-3)】 设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)$, 且 $\varphi(-x) = \varphi(x)$. $F(x)$ 为 X 的分布函数, 则对任意实数 a , 有 ()

- (A) $F(-a) = 1 - \int_0^a \varphi(x) dx$.
- (B) $F(-a) = \frac{1}{2} - \int_0^a \varphi(x) dx$.
- (C) $F(-a) = F(a)$.
- (D) $F(-a) = 2F(a) - 1$.

答案 P356; 【真题精选】 - 考点一: 随机变量的分布 - 7

7. 【P204-11 (89-4)】 设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ A \sin x, & 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}, \end{cases}$$

则 $P\left\{|X| < \frac{\pi}{6}\right\} =$ _____.

答案 P356; 【真题精选】 - 考点一: 随机变量的分布 - 11

8. 【P204-2 (03-3)】 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x \in [1, 8], \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数, 则随机变量 $Y = F(X)$ 的分布函数为 _____.

答案 P357; 【真题精选】 - 考点二: 随机变量的函数的分布 - 2

9. 【P204-3 (13-1)】 设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}x^2, & 0 < x < 3, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$,

令随机变量 $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1, \\ X, & 1 < X < 2, \\ 1, & X \geq 2. \end{cases}$

(1) 求 Y 的分布函数;

(2) 求概率 $P\{X \leq Y\}$.

答案 P357; 【真题精选】 - 考点二: 随机变量的函数的分布 - 3

3.3 多维随机变量及其分布

1. 【P206-1 (24-1,3)】 设随机变量 X, Y 相互独立, 且均服从参数为 λ 的指数分布. 令 $Z = |X - Y|$, 则下列随机变量中与 Z 同分布的是 ()

(A) $X + Y$.

(B) $\frac{X + Y}{2}$.

(C) $2X$.

(D) X .

答案 P358; 【十年真题】 - 考点二: 两个随机变量的函数的分布 - 1

2. 【P206-2 (23-1-局部)】 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) X 与 Y 是否相互独立?

(2) 求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率密度.

答案 P358; 【十年真题】 - 考点二: 两个随机变量的函数的分布 - 2

3. 【P206-3 (20-1)】 设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为 $P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}$. $Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$.

(1) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示;

(2) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

注 主要错的是 (2)

答案 P358; 【十年真题】 - 考点二: 两个随机变量的函数的分布 - 3

4. 【5. (16-1,3)】 设二维随机变量 (X, Y) 在区域

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, x^2 < y < \sqrt{x}\}$$

上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y, \\ 0, & X > Y. \end{cases}$$

(1) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(2) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(3) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

答案 P358; 【十年真题】 - 考点二: 两个随机变量的函数的分布 - 5

5. 【P210-1 (12-1)】 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P\{X < Y\} = (\quad)$

(A) $\frac{1}{5}$.

(B) $\frac{1}{3}$.

(C) $\frac{2}{5}$.

(D) $\frac{4}{5}$.

答案 P360; 【真题精选】 - 考点一: 二维随机变量的分布 - 1

6. 【P210-4 (10-1,3)】 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$, 求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

答案 P360; 【真题精选】 - 考点一: 二维随机变量的分布 - 4

7. 【P211-5 (09-1,3)】袋中有 1 个红球, 2 个黑球与 3 个白球, 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求 $P\{X = 1|Z = 0\}$;

(2) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

答案 P360; 【真题精选】- 考点一: 二维随机变量的分布 - 5

8. 【P211-7 (01-1)】设某班车起点站上车人数 X 服从参数为 λ ($\lambda > 0$) 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为 p ($0 < p < 1$), 且中途下车与否相互独立. 以 Y 表示在中途下车的人数, 求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下, 中途有 m 人下车的概率.

(2) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

答案 P360; 【真题精选】- 考点一: 二维随机变量的分布 - 5

9. 【P211-9 (95-3)】已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

求 X 和 Y 联合分布函数 $F(x, y)$.

答案 P360; 【真题精选】- 考点一: 二维随机变量的分布 - 9

10. 【P212-3 (07-1,3)】设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

(1) 求 $P\{X > 2Y\}$;

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

答案 P361; 【真题精选】- 考点二: 两个随机变量的函数的分布 - 3

11. 【P212-5 (01-3)】设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形 $G = \{(x, y)|1 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq 3\}$ 上的均匀分布, 试求随机变量 $U = |X - Y|$ 的概率密度 $p(u)$.

答案 P361; 【真题精选】- 考点二: 两个随机变量的函数的分布 - 5

3.4 随机变量的数字特征

1. 【P214-1 (24-3)】 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 6x(1-x), & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则 X 的三阶中心矩 $E[(X - EX)^3] = ()$

- (A) $-\frac{1}{32}$. (B) 0. (C) $\frac{1}{16}$. (D) $\frac{1}{2}$.

答案 P362; 【十年真题】 - 考点一: 随机变量的数学期望与方差 - 1

2. 【P214-7 (17-1)】 设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $EX =$ _____.

答案 P362; 【十年真题】 - 考点一: 随机变量的数学期望与方差 - 7

3. 【P214-8 (25-1,3)】 投保人的损失事件发生时, 保险公司的赔付额 Y 与投保人的损失额 X 的关系为

$$Y = \begin{cases} 0, & X \leq 100, \\ X - 100, & X > 100. \end{cases}$$

设损失事件发生时, 投保人的损失额 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2 \times 100^2}{(100+x)^3}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

- (1) 求 $P\{Y > 0\}$ 及 EY ;
- (2) 这种损失事件在一年内发生的次数记为 N , 保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为 M . 假设 N 服从参数为 8 的泊松分布, 在 $N = n$ ($n \geq 1$) 的条件下, M 服从二项分布 $B(n, p)$, 其中 $p = P\{Y > 0\}$. 求 M 的概率分布.

答案 P363; 【十年真题】 - 考点一: 随机变量的数学期望与方差 - 8

4. 【P214-10 (21-1,3)】在区间 $(0, 2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为 X , 较长一段的长度记为 Y . 令 $Z = \frac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度;

(2) 求 Z 的概率密度;

(3) 求 $E\left(\frac{X}{Y}\right)$.

注 主要错的是 (3)

答案 P363; 【十年真题】- 考点一: 随机变量的数学期望与方差 - 10

5. 【P215-1 (25-1)】设二维随机变量 (X, Y) 服从正态分布 $N(0, 0; 1, 1; \rho)$, 其中 $\rho \in (-1, 1)$. 若 a, b 为满足 $a^2 + b^2 = 1$ 的任意实数, 则 $D(aX + bY)$ 的最大值为 ()

(A) 1.

(B) 2.

(C) $1 + |\rho|$.

(D) $1 + \rho^2$.

答案 P363; 【十年真题】- 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 1

6. 【P215-5 (22-1)】设随机变量 $X \sim N(0, 1)$, 在 $X = x$ 的条件下随机变量 $Y \sim N(x, 1)$, 则 X 与 Y 的相关系数为 ()

(A) $\frac{1}{4}$.

(B) $\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

(D) $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

答案 P364; 【十年真题】- 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 5

7. 【P215-8 (20-3)】设随机变量 (X, Y) 服从二维正态分布 $N\left(0, 0; 1, 4; -\frac{1}{2}\right)$, 则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是 ()

(A) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X + Y)$.

(B) $\frac{\sqrt{5}}{5}(X - Y)$.

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X + Y)$.

(D) $\frac{\sqrt{3}}{3}(X - Y)$.

答案 P364; 【十年真题】- 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 8

8. 【P215-10 (23-3)】 设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X \sim B(1, p)$, $Y \sim B(2, p)$, $p \in (0, 1)$, 则 $X + Y$ 与 $X - Y$ 的相关系数为 _____.

答案 P364; 【十年真题】 - 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 10

9. 【P215-12 (20-1)】 设 X 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\text{Cov}(X, Y) =$ _____.

答案 P365; 【十年真题】 - 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 12

10. 【P215-13 (23-1)】 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

- (1) 求 X 与 Y 的协方差;
- (2) X 与 Y 是否相互独立?
- (3) 求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率密度.

答案 P365; 【十年真题】 - 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 13

11. 【P216-15 (19-1,3)】 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为

$$P\{Y = -1\} = p, \quad P\{Y = 1\} = 1 - p \quad (0 < p < 1).$$

令 $Z = XY$.

- (1) 求 Z 的概率密度;
- (2) p 为何值时, X 与 Z 不相关?
- (3) X 与 Z 是否相互独立?

答案 P365; 【十年真题】 - 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 15

12. 【P216-16 (18-1,3)】 设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为

$$P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{2},$$

Y 服从参数为 λ 的泊松分布. 令 $Z = XY$.

(1) 求 $\text{Cov}(X, Z)$;

(2) 求 Z 的概率分布.

答案 P365; 【十年真题】 - 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 16

3.5 大数定律与中心极限定理

3.6 数理统计的基本概念

3.7 参数估计