考研数学真题错题整理

参考 2026 版《考研数学这十年》

作者：Guangchen Jiang

时间：2025/12/31

版本：4.5

ElegantLaTeX Program

目录

第一章 高数

1.1 极限

1. 【P2-1 (24-2)】已知数列 $\{a_n\}$ $(a_n \neq 0)$. 若 $\{a_n\}$ 发散, 则 (　　)

(A) $\left\{a_n + \dfrac{1}{a_n}\right\}$ 发散.

(B) $\left\{a_n - \dfrac{1}{a_n}\right\}$ 发散.

(C) $\left\{e^{a_n} + \dfrac{1}{e^{a_n}}\right\}$ 发散.

(D) $\left\{e^{a_n} - \dfrac{1}{e^{a_n}}\right\}$ 发散.

答案 P238;【十年真题】- 考点: 极限的概念与性质 - 1

2. 【P2-2 (22-1,2)】设数列 $\{x_n\}$ 满足 $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x_n \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, 则 (　　)

(A) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\sin x_n)$ 存在时, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

(B) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\cos x_n)$ 存在时, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在.

(C) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\sin x_n)$ 存在时, $\lim\limits_{n\to\infty} \sin x_n$ 存在, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在.

(D) 当 $\lim\limits_{n\to\infty} \sin(\cos x_n)$ 存在时, $\lim\limits_{n\to\infty} \cos x_n$ 存在, 但 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 不一定存在.

答案 P238;【十年真题】- 考点: 极限的概念与性质 - 2

3. 【P4-4 (99-2)】对任意给定的 $\varepsilon \in (0,1)$, 总存在正整数 N, 当 $n \geq N$ 时, 恒有 $|x_n - a| \leq 2\varepsilon$” 是数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的 (　　)

(A) 充分条件但非必要条件.

(B) 必要条件但非充分条件.

(C) 充分必要条件.

(D) 既非充分条件又非必要条件.

答案 P238;【真题精选】- 考点: 极限的概念与性质 - 4

4. 【P4-2 (23-3)】$\lim\limits_{x\to\infty} x^2\left(2 - x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}\right) =$ ______.

答案 P238;【十年真题】- 考点一: 函数极限的计算 - 2

5. 【P4-3 (22-2,3)】$\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\mathrm{e}^x}{2}\right)^{\cot x}=$______.

答案 P238；【十年真题】- 考点一：函数极限的计算 - 3

6. 【P4-7 (16-2,3)】求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos 2x+2x\sin x)^{\frac{1}{x^4}}$.

答案 P239；【十年真题】- 考点一：函数极限的计算 - 7

7. 【P4-2 (25-2)】$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\left[\ln\dfrac{1}{n}+2\ln\dfrac{2}{n}+\cdots+(n-1)\ln\dfrac{n-1}{n}\right]=$______.

答案 P239；【十年真题】- 考点二：数列极限的计算 - 2

8. 【P4-5 (19-1,3)】设 $a_n=\displaystyle\int_0^1 x^n\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\dots)$.

(1) 证明: 数列 $\{a_n\}$ 单调减少, 且 $a_n=\dfrac{n-1}{n+2}a_{n-2}\ (n=2,3,\dots)$;

(2) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

答案 P239；【十年真题】- 考点二：数列极限的计算 - 5

9. 【P4-6 (18-1,2,3)】设数列 $\{x_n\}$ 满足：$x_1>0$, $x_n\mathrm{e}^{x_{n+1}}=\mathrm{e}^{x_n}-1\ (n=1,2,\dots)$. 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

答案 P240；【十年真题】- 考点二：数列极限的计算 - 6

10. 【P6-例 1 (2)】$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1+\tan x}}{x\tan^2 x}=$______.

答案 P6；【方法探究】- 考点一：函数极限的计算 - 例 1 (2)

11. 【P7-变式 1.1 (97-2)】求极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2+x-1}+x+1}{\sqrt{x^2+\sin x}}$.

答案 P240；【方法探究】- 考点一：函数极限的计算 - 变式 1.1

12. 【P8-变式 3 (98-1)】求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{n+1}+\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{n+\frac{1}{2}}+\cdots+\frac{\sin\pi}{n+\frac{1}{n}}\right).$$

答案 P240；【方法探究】- 考点二：数列极限的计算 - 变式 3

13. 【P8-变式 4.1 (96-1)】设 $x_1=10,\ x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\ (n=1,2,\ldots)$. 试证数列 $\{x_n\}$ 极限存在，并求此极限.

答案 P241；【方法探究】- 考点二：数列极限的计算 - 变式 4.1

14. 【P8-变式 4.2 (11-1, 2)】(1) 证明：对任意的正整数 n，都有 $\dfrac{1}{n+1}<\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{n}$ 成立；

(2) 设 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n\,(n=1,2,\ldots)$，证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

注 主要错的是 (2)

答案 P241；【方法探究】- 考点二：数列极限的计算 - 变式 4.2

15. 【P9-8 (97-1)】$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3\sin x+x^2\cos\frac{1}{x}}{(1+\cos x)\ln(1+x)}=$ ________.

答案 P241；【真题精选】- 考点一：函数极限的计算 - 8

16. 【P9-15 (08-3)】计算

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x^2}\ln\frac{\sin x}{x}.$$

答案 P242；【真题精选】- 考点一：函数极限的计算 - 15

17. 【P10-1 (12-2)】设 $a_n > 0\ (n = 1, 2, \dots)$, $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则数列 $\{S_n\}$ 有界是数列 $\{a_n\}$ 收敛的 (　)

(A)　充分必要条件.　　(B)　充分非必要条件.

(C)　必要非充分条件.　　(D)　既非充分也非必要条件.

答案 P243;【真题精选】- 考点二: 数列极限的计算 - 1

18. 【P10-2 (04-2)】$\lim\limits_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2\left(1+\frac{2}{n}\right)^2\cdots\left(1+\frac{n}{n}\right)^2}$ 等于 (　)

(A)　$\int_1^2 \ln^2 x \,\mathrm{d}x$.　　(B)　$2\int_1^2 \ln x \,\mathrm{d}x$.

(C)　$2\int_1^2 \ln(1+x) \,\mathrm{d}x$.　　(D)　$\int_1^2 \ln^2(1+x) \,\mathrm{d}x$.

答案 P243;【真题精选】- 考点二: 数列极限的计算 - 2

19. 【P10-4 (02-2)】$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\sqrt{1+\cos\frac{\pi}{n}} + \sqrt{1+\cos\frac{2\pi}{n}} + \dots + \sqrt{1+\cos\frac{n\pi}{n}}\right] = $ ________.

答案 P243;【真题精选】- 考点二: 数列极限的计算 - 4

20. 【P10-6 (13-2)】设函数 $f(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

(1) 求 $f(x)$ 的最小值;

(2) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $\ln x_n + \frac{1}{x_{n+1}} < 1$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 存在, 并求此极限.

注 主要错的是 (2)

答案 P243;【真题精选】- 考点二: 数列极限的计算 - 6

21. 【P10-8 (99-2)】设 $f(x)$ 是区间 $[0, +\infty)$ 上单调减少且非负的连续函数.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} f(k) - \int_1^n f(x) \,\mathrm{d}x \ (n = 1, 2, \dots),$$

证明数列 $\{a_n\}$ 的极限存在.

答案 P243;【真题精选】- 考点二: 数列极限的计算 - 8

22. 【P11-3 (23-2)】已知数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 满足 $x_1=y_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\sin x_n$，$y_{n+1}=y_n^2\ (n=1,2,\ldots)$，则当 $n\to\infty$ 时 (　)

(A) x_n 是 y_n 的高阶无穷小.　　(B) y_n 是 x_n 的高阶无穷小.

(C) x_n 与 y_n 是等价无穷小.　　(D) x_n 与 y_n 是同阶但不等价的无穷小.

答案 P244；【十年真题】- 考点一：无穷小的比较 - 3

23. 【P11-6 (20-2)】求曲线 $y=\dfrac{x^{1+x}}{(1+x)^x}\ (x>0)$ 的斜渐近线方程.

答案 P244；【十年真题】- 考点二：平面曲线的渐近线 - 6

24. 【P14-2 (12-1,2,3)】曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为 (　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

答案 P245；【真题精选】- 考点二：平面曲线的渐近线 - 2

25. 【P14-3 (07-1,3)】曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 渐近线的条数为 (　)

(A) 0.　　(B) 1.　　(C) 2.　　(D) 3.

答案 P245；【真题精选】- 考点二：平面曲线的渐近线 - 3

26. 【P14-8 (00-3)】求函数 $f(x)=(x-1)\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 图形的渐近线.

答案 P246；【真题精选】- 考点二：平面曲线的渐近线 - 8

27. 【P14-4 (07-2)】函数 $f(x)=\dfrac{(e^{\frac{1}{x}}+e)\tan x}{x(e^{\frac{1}{x}}-e)}$ 在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的第一类间断点是 $x=$ (　)

(A) 0. (B) 1. (C) $-\dfrac{\pi}{2}$. (D) $\dfrac{\pi}{2}$.

答案 P246;【真题精选】- 考点三：函数的连续性与间断点 - 4

28. 【P14-6 (95-2)】设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有定义, $f(x)$ 为连续函数, 且 $f(x)\neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点, 则 (　)

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点. (B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点. (D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

答案 P246;【真题精选】- 考点三：函数的连续性与间断点 - 6

29. 【P14-9 (01-2)】求极限 $\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{\sin t}{\sin x}\right)^{\frac{x}{\sin t-\sin x}}$, 记此极限为 $f(x)$, 求函数 $f(x)$ 的间断点并指出其类型.

答案 P247;【真题精选】- 考点三：函数的连续性与间断点 - 9

30. 【P15-1 (20-3)】设 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-a}{x-a}=b$, 则 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin f(x)-\sin a}{x-a}=$ (　)

(A) $b\sin a$. (B) $b\cos a$.

(C) $b\sin f(a)$. (D) $b\cos f(a)$.

答案 P247;【十年真题】- 考点一：已知极限求另一极限 - 1

31. 【P15-2 (16-3)】已知函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin 2x}-1}{e^{3x}-1}=2$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$ ________.

答案 P247;【十年真题】- 考点一：已知极限求另一极限 - 2

1.2 一元函数微分学

1. 【P18-1 (25-2)】设函数 $f(x)$ 连续, 给出下列四个条件:

① $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-f(0)}{x}$ 存在;

② $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ 存在;

③ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|}{x}$ 存在;

④ $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|f(x)|-|f(0)|}{x}$ 存在.

其中能得到 “$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导” 的条件的个数是 (　　)

(A) 1.　　(B) 2.　　(C) 3.　　(D) 4.

答案 P249;【十年真题】- 考点: 导数与微分的概念 - 1

2. 【P18-7 (16-1)】已知函数 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\le\dfrac{1}{n}, n=1,2,\dots, \end{cases}$ 则 (　　)

(A) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

(B) $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

(C) $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导.

(D) $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导.

答案 P250;【十年真题】- 考点: 导数与微分的概念 - 7

3. 【P18-8 (25-2,3)】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-e^{2\sin x}+1}{\ln(1+x)+\ln(1-x)}=-3$, 证明 $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$.

答案 P250;【十年真题】- 考点: 导数与微分的概念 - 8

4. 【P18-9 (22-2)】已知函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导, 且

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}=2,$$

求 $f'(1)$.

答案 P250;【十年真题】- 考点: 导数与微分的概念 - 9

5. 【P20-1 (07-1,2,3)】设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续, 下列命题错误的是 (　)

(A) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$.

(B) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f(0)=0$.

(C) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

(D) 若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在, 则 $f'(0)$ 存在.

答案 P250;【真题精选】- 考点: 导数与微分的概念 - 1

6. 【P20-3 (05-1,2)】设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内 (　)

(A) 处处可导.

(B) 恰有一个不可导点.

(C) 恰有两个不可导点.

(D) 至少有三个不可导点.

答案 P251;【真题精选】- 考点: 导数与微分的概念 - 3

7. 【P21-9 (03-3)】设函数 $f(x)=\begin{cases} x^{\lambda}\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 其导函数在 $x=0$ 处连续, 则 λ 的取值范围是 ________.

答案 P251;【真题精选】- 考点: 导数与微分的概念 - 9

8. 【P21-2 (22-2)】已知函数 $y=y(x)$ 由方程

$$x^2+xy+y^3=3$$

确定, 则 $y''(1)=$ ________.

答案 P251;【十年真题】- 考点一: 函数的求导与微分法则 - 2

9. 【P21-1 (21-1)】设函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 处的 3 次泰勒多项式为 $ax+bx^2+cx^3$, 则 (　)

(A) $a=1,b=0,c=-\dfrac{7}{6}$.　　(B) $a=1,b=0,c=\dfrac{7}{6}$.

(C) $a=-1,b=-1,c=-\dfrac{7}{6}$.　　(D) $a=-1,b=-1,c=\dfrac{7}{6}$.

答案 P251;【十年真题】- 考点二: 高阶导数的计算 - 1

10. 【P21-7 (16-1)】设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$, 且 $f'''(0)=1$, 则 $a=$ ________.

答案 P251;【十年真题】- 考点二: 高阶导数的计算 - 7

11. 【P24-例 (2)】设函数 $y=x^2\sin 2x$, 则 $y^{(5)}(0)=$ ________.

答案 P24;【方法探究】- 考点二: 高阶导数的计算 - 例 (2)

12. 【P25-7 (97-3)】设 $y=f(\ln x)\mathrm{e}^{f(x)}$, 其中 f 可微, 则 $\mathrm{d}y=$ ________.

答案 P252;【真题精选】- 考点一: 函数的求导与微分法则 - 7

13. 【P26-2 (20-3)】曲线 $x+y+\mathrm{e}^{2xy}=0$ 在点 $(0,-1)$ 处的切线方程为 ________.

答案 P254;【十年真题】- 考点一: 平面曲线的切线与法线 - 2

14. 【P26-1 (23-2)】设函数 $f(x)=(x^2+a)\mathrm{e}^x$. 若 $f(x)$ 没有极值点, 但曲线 $y=f(x)$ 有拐点, 则 a 的取值范围是 (　)

(A) $[0,1)$.　　(B) $[1,+\infty)$.　　(C) $[1,2)$　　(D) $[2,+\infty)$.

答案 P254;【十年真题】- 考点二: 利用导数判断函数的性质 - 1

15. 【P26-2 (22-2)】设函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处具有 2 阶导数, 则 (　　)

(A)　当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时, $f'(x_0) > 0$.

(B)　当 $f'(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加.

(C)　当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时, $f''(x_0) > 0$.

(D)　当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数.

答案 P254;【十年真题】- 考点二: 利用导数判断函数的性质 - 2

16. 【P26-4 (19-1)】设函数 $f(x) = \begin{cases} x|x|, & x \le 0, \\ x\ln x, & x > 0, \end{cases}$ 则 $x = 0$ 是 $f(x)$ 的 (　　)

(A)　可导点, 极值点.

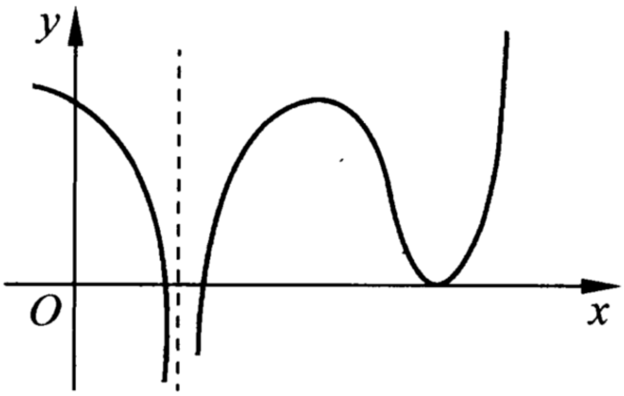
(B)　不可导点, 极值点.

(C)　可导点, 非极值点.

(D)　不可导点, 非极值点.

答案 P254;【十年真题】- 考点二: 利用导数判断函数的性质 - 4

17. 【P26-5 (16-2,3)】设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内连续, 其导函数的图形如下图所示, 则 (　　)



(A)　函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.

(B)　函数 $f(x)$ 有 2 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 3 个拐点.

(C)　函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 1 个拐点.

(D)　函数 $f(x)$ 有 3 个极值点, 曲线 $y = f(x)$ 有 2 个拐点.

答案 P254;【十年真题】- 考点二: 利用导数判断函数的性质 - 5

18. 【P26-6 (19-2,3)】曲线 $y = x\sin x + 2\cos x \left(-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{3\pi}{2}\right)$ 的拐点坐标为 ________.

答案 P254；【十年真题】- 考点二：利用导数判断函数的性质 - 6

19. 【P26-9 (21-2)】已知函数 $f(x) = \dfrac{x|x|}{1+x}$, 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间及渐近线.

答案 P254；【十年真题】- 考点二：利用导数判断函数的性质 - 9

20. 【P27-1 (18-3)】设某产品的成本函数 $C(Q)$ 可导, 其中 Q 为产量. 若产量为 Q_0 时平均成本最小, 则 (　)

(A) $C'(Q_0) = 0$.

(B) $C'(Q_0) = C(Q_0)$.

(C) $C'(Q_0) = Q_0 C(Q_0)$.

(D) $Q_0 C'(Q_0) = C(Q_0)$.

答案 P256；【十年真题】- 考点五：导数的经济应用（仅数学三）- 1

1.3 一元函数积分学

1.4 微分方程

1.5 多元函数微分学

1.6 多元函数积分学

1.7 无穷级数

第二章 线代

2.1 行列式

1. 【P146-4 (20-1,2,3)】行列式$\begin{vmatrix} a & 0 & -1 & 1 \\ 0 & a & 1 & -1 \\ -1 & 1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 & a \end{vmatrix} =$ ________.

答案 P323;【十年真题】- 考点: 具体行列式的计算 - 4

2. 【P148-例 2 (1)】n 阶行列式$\begin{vmatrix} 1 & -1 & & & & \\ 2 & a & -1 & & & \\ 3 & & a & -1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \\ n-1 & & & & a & -1 \\ n & & & & & a \end{vmatrix} =$ ________.

答案 P148;【方法探究】- 考点: 具体行列式的计算 - 例 2 (1)

3. 【P149-4 (96-5)】5 阶行列式$\begin{vmatrix} 1-a & a & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1-a & a & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1-a & a & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1-a & a \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1-a \end{vmatrix} =$ ________.

答案 P324;【真题精选】- 考点: 具体行列式的计算 - 4

2.2 矩阵

1. 【P150-3 (24-1)】设实矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a+1 & a \\ a & a \end{pmatrix}$. 若对任意实向量 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$,

$$(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta})^2 \leq \boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{\beta}$$

都成立, 则 a 的取值范围为 ________.

答案 P325;【十年真题】- 考点一: 矩阵的运算 - 3

2.【P150-4 (22-1)】已知矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 若矩阵 $\boldsymbol{B}$ 满足 $[\boldsymbol{E}-(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{-1}]\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$, 则 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{A}=$ ________.

答案 P325;【十年真题】- 考点一: 矩阵的运算 - 4

3. 【P150-1 (25-2)】下列矩阵中, 可以经过若干初等行变换得到矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的是 (　　)

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.　(C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

答案 P325;【十年真题】- 考点二: 矩阵的初等变换与初等矩阵 - 1

4. 【P150-4 (22-2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, 交换 $\boldsymbol{A}$ 的第 2 行和第 3 行, 再将第 2 列的 -1 倍加到第 1 列, 得到 $\begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 的迹 $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^{-1})=$ ________.

答案 P325;【十年真题】- 考点二: 矩阵的初等变换与初等矩阵 - 4

5. 【P150-2 (24-2)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}^*)=\boldsymbol{O}$, 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{A}^*$, 则 $r(\boldsymbol{A})$ 取值为 (　　)

(A) 0 或 1.　　(B) 1 或 3.　　(C) 2 或 3.　　(D) 1 或 2.

答案 P325;【十年真题】- 考点三: 矩阵的秩与等价 - 2

6. 【P156-10 (95-1)】设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$ ($\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵), $|\boldsymbol{A}|<0$, 则 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=$ ________.

答案 P327;【真题精选】- 考点一: 矩阵的运算 - 10

7. 【P156-3 (01-3)】设

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix},\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}a_{14}&a_{13}&a_{12}&a_{11}\\a_{24}&a_{23}&a_{22}&a_{21}\\a_{34}&a_{33}&a_{32}&a_{31}\\a_{44}&a_{43}&a_{42}&a_{41}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{A}$ 可逆, 则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$ (　　)

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$.　　(B) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　　(C) $\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}$.　　(D) $\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$.

答案 P327;【真题精选】- 考点二: 矩阵的初等变换与初等矩阵 - 3

8. 【P156-5 (08-1)】设 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 为 3 维列向量, 矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置, $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置. 证明:

(1) $r(\boldsymbol{A})\leq 2$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关, 则 $r(\boldsymbol{A})<2$.

答案 P327;【真题精选】- 考点三: 矩阵的秩与等价 - 5

2.3 向量与线性方程组

1. 【P158-5 (23-2,3)】已知线性方程组

$$\begin{cases} ax_1 + x_3 = 1, \\ x_1 + ax_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0, \\ ax_1 + bx_2 = 2 \end{cases}$$

有解, 其中 a, b 为常数. 若 $\begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = 4$, 则 $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 1 & 2 & a \\ a & b & 0 \end{vmatrix} =$ ________.

答案 P328;【十年真题】- 考点一: 线性方程组的解的情况及求解 - 5

2. 【P159-1 (18-1,2,3)】已知 a 是常数, 且矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 1 & 3 & 0 \\ 2 & 7 & -a \end{pmatrix}$ 可经初等列变换化为矩阵 $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(1) 求 a;

(2) 求满足 $\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{B}$ 的可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$.

答案 P328;【十年真题】- 考点二: 矩阵方程组的解的情况及求解 - 1

3. 【P159-2 (16-1)】设矩阵

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix},$$

当 a 为何值时, 方程 $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ 无解、有唯一解、有无穷多解? 在有解时, 求解此方程.

答案 P328;【十年真题】- 考点二: 矩阵方程组的解的情况及求解 - 2

4. 【P160-变式 (04-1)】设有齐次线性方程组

$$\begin{cases} (1+a)x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0, \\ 2x_1 + (2+a)x_2 + \cdots + 2x_n = 0, \\ \vdots \\ nx_1 + nx_2 + \cdots + (n+a)x_n = 0 \end{cases} \quad (n \geq 2),$$

试问 a 为何值时, 该方程组有非零解, 并求出其通解.

答案 P329;【方法探究】- 考点一: 线性方程组的解的情况及求解 - 变式

5. 【P161-3 (98-3)】齐次线性方程组

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + \lambda^2 x_3 = 0, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = 0 \end{cases}$$

的系数矩阵记为 $\boldsymbol{A}$. 若存在 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{O}$ 使得 $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{O}$, 则 (　　)

(A) $\lambda = -2$ 且 $|\boldsymbol{B}| = 0$.　　(B) $\lambda = -2$ 且 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$.

(C) $\lambda = 1$ 且 $|\boldsymbol{B}| = 0$.　　(D) $\lambda = 1$ 且 $|\boldsymbol{B}| \neq 0$.

答案 P330;【真题精选】- 考点一: 线性方程组的解的情况及求解 - 3

6. 【P162-8 (00-2)】设 $\boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$. 其中 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置, 求解方程

$$2\boldsymbol{B}^2\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}^4\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\gamma}.$$

答案 P331;【真题精选】- 考点一: 线性方程组的解的情况及求解 - 8

7. 【P162-1 (15-2,3)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & a & -1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$, 且 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$.

(1) 求 a 的值;

(2) 若矩阵 $\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{X}-\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{X}\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵, 求 $\boldsymbol{X}$.

答案 P332;【真题精选】- 考点二: 矩阵方程组的解的情况及求解 - 1

8. 【P162-2 (14-1,2,3)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 求方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系;

(2) 求满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$ 的所有矩阵 $\boldsymbol{B}$.

答案 P332;【真题精选】- 考点二: 矩阵方程组的解的情况及求解 - 2

9. 【P163-2 (23-1)】已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{O}$, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 记矩阵

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \end{pmatrix}$$

的秩分别为 r_1,r_2,r_3, 则 (　　)

(A) $r_1 \le r_2 \le r_3$.

(B) $r_1 \le r_3 \le r_2$.

(C) $r_3 \le r_1 \le r_2$.

(D) $r_2 \le r_1 \le r_3$.

答案 P333;【十年真题】- 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 2

10. 【P164-4 (22-1,2,3)】设

$$\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}\lambda\\1\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\1\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\\lambda\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\alpha}_4=\begin{pmatrix}1\\\lambda\\\lambda^2\end{pmatrix}.$$

若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 与 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_4$ 等价, 则 λ 的取值范围是 ( )

(A) $\{0,1\}$.

(B) $\{\lambda|\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-2\}$.

(C) $\{\lambda|\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-1,\lambda\neq-2\}$.

(D) $\{\lambda|\lambda\in\mathbb{R},\lambda\neq-1\}$.

答案 P333;【十年真题】- 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 4

11. 【P164-5 (21-1)】已知 $\boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}3\\1\\2\end{pmatrix}$, 记 $\boldsymbol{\beta}_1=\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2=\boldsymbol{\alpha}_2-k\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_3-l_1\boldsymbol{\beta}_1-l_2\boldsymbol{\beta}_2$. 若 $\boldsymbol{\beta}_1$, $\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\beta}_3$ 两两正交, 则 l_1,l_2 依次为 ( )

(A) $\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.

(B) $-\frac{5}{2},\frac{1}{2}$.

(C) $\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.

(D) $-\frac{5}{2},-\frac{1}{2}$.

答案 P333;【十年真题】- 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 5

12. 【P168-4 (06-1,2,3)】设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 均为 n 维列向量, $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 下列选项正确的是 ( )

(A) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(B) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性相关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

(C) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性相关.

(D) 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关, 则 $\boldsymbol{A\alpha}_1,\boldsymbol{A\alpha}_2,\ldots,\boldsymbol{A\alpha}_s$ 线性无关.

答案 P335;【真题精选】- 考点: 向量组的线性相关性、线性表示及秩 - 4

13. 【P170-2 (25-2)】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 满足 $r(\boldsymbol{AB}) = r(\boldsymbol{BA}) + 1$, 则 ( )

(A) 方程组 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

(B) 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 均只有零解.

(C) 方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 没有公共非零解.

(D) 方程组 $\boldsymbol{ABAx} = \boldsymbol{0}$ 与方程组 $\boldsymbol{BABx} = \boldsymbol{0}$ 有公共非零解.

答案 P336;【十年真题】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 2

14. 【P170-3 (22-1)】设 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 为 n 阶矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为单位矩阵. 若方程组 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 同解, 则 ( )

(A) 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{E} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

(B) 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{E} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{AB} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 只有零解.

(C) 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 同解.

(D) 方程组 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{AB} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{A} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 与 $\begin{pmatrix} \boldsymbol{BA} & \boldsymbol{A} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \end{pmatrix} \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$ 同解.

答案 P336;【十年真题】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 3

15. 【P170-4 (21-2)】设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3)$, $\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3)$. 若向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 可以由向量组 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \boldsymbol{\beta}_3$ 线性表出, 则 ( )

(A) $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解.

(B) $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解.

(C) $\boldsymbol{Bx} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{0}$ 的解.

(D) $\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解均为 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ 的解.

答案 P336;【十年真题】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 4

16. 【P170-5 (21-3)】设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 为 4 阶正交矩阵. 若矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{\alpha}_1^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_2^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\alpha}_3^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, k 表示任意常数, 则线性方程组 $\boldsymbol{Bx}=\boldsymbol{\beta}$ 的通解 $\boldsymbol{x}=$ (　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_1$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_2$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_4+k\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3+k\boldsymbol{\alpha}_4$.

答案 P336;【十年真题】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 5

17. 【P171-9 (25-2)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$. 若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_4$, 则方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\alpha}_1+4\boldsymbol{\alpha}_4$ 的通解为 $\boldsymbol{x}=$ ________.

答案 P337;【十年真题】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 9

18. 【P172-变式 (07-1,2,3)】设线性方程组

$$\begin{cases}x_1+x_2+x_3=0,\\ x_1+2x_2+ax_3=0,\\ x_1+4x_2+a^2x_3=0\end{cases}$$

与方程

$$x_1+2x_2+x_3=a-1$$

有公共解, 求 a 的值及所有公共解.

答案 P337;【方法探究】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 变式

19. 【P173-1 (11-1,2)】设 $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4)$ 是 4 阶矩阵, $\boldsymbol{A}^*$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵. 若 $(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$ 是方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的一个基础解系, 则 $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系可为 (　　)

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(B) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$.

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$.　　(D) $\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$.

答案 P338;【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 1

20. 【P173-4 (03-1)】设有齐次线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 和 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵, 现有 4 个命题:
① 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解, 则 $r(\boldsymbol{A})\geq r(\boldsymbol{B})$;
② 若 $r(\boldsymbol{A})\geq r(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解均是 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解;
③ 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解, 则 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$;
④ 若 $r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})$, 则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解.
以上命题中正确的是 (   )

(A) ① ②.   (B) ① ③.   (C) ② ④.   (D) ③ ④.

答案 P338;【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 4

21. 【P173-7 (04-4)】设 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{3\times 3}$ 是实正交矩阵, 且 $a_{11}=1, \boldsymbol{b}=(1,0,0)^{\mathrm{T}}$, 则线性方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解是 ________.

答案 P338;【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 7

22. 【P173-8 (98-1)】已知线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,2n}x_{2n}=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,2n}x_{2n}=0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,2n}x_{2n}=0 \end{cases}$$

的一个基础解系为 $\left(b_{11},b_{12},\cdots,b_{1,2n}\right)^{\mathrm{T}},\left(b_{21},b_{22},\cdots,b_{2,2n}\right)^{\mathrm{T}},\cdots,\left(b_{n1},b_{n2},\cdots,b_{n,2n}\right)^{\mathrm{T}}$, 则线性方程组

$$\begin{cases} b_{11}y_1+b_{12}y_2+\cdots+b_{1,2n}y_{2n}=0, \\ b_{21}y_1+b_{22}y_2+\cdots+b_{2,2n}y_{2n}=0, \\ \quad \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}y_1+b_{n2}y_2+\cdots+b_{n,2n}y_{2n}=0 \end{cases}$$

的通解为 ________.

答案 P338;【真题精选】- 考点: 线性方程组的解的结构 - 8

23. 【P173-9 (93-1)】设 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的各行元素之和均为零, 且 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 $n-1$, 则线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为________.

答案 P338；【真题精选】- 考点：线性方程组的解的结构 - 9

24. 【P173-10 (05-1,2)】已知 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第一行是 (a,b,c), a,b,c 不全为零, 矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{pmatrix}$ (k 为常数), 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$, 求线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解.

答案 P338；【真题精选】- 考点：线性方程组的解的结构 - 10

25. 【P174-12 (94-1)】设四元线性齐次方程组 (I) 为 $\begin{cases}x_1+x_2=0,\\x_2-x_4=0.\end{cases}$ 又已知某线性齐次方程组 (II) 的通解为 $k_1(0,1,1,0)^{\mathrm{T}}+k_2(-1,2,2,1)^{\mathrm{T}}$.

(1) 求线性方程组 (I) 的基础解系；

(2) 问线性方程组 (I) 和 (II) 是否有非零公共解? 若有, 则求出所有的非零公共解. 若没有, 则说明理由.

答案 P339；【真题精选】- 考点：线性方程组的解的结构 - 12

2.4 矩阵的特征值和特征向量

1. 【P177-1 (24-1)】设 $\boldsymbol{A}$ 是秩为 2 的 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}$ 是满足 $\boldsymbol{A\alpha}=\boldsymbol{0}$ 的非零向量. 若对满足 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=0$ 的 3 维列向量 $\boldsymbol{\beta}$, 均有 $\boldsymbol{A\beta}=\boldsymbol{\beta}$, 则 (　)

(A) $\boldsymbol{A}^3$ 的迹为 2.　　(B) $\boldsymbol{A}^3$ 的迹为 5.

(C) $\boldsymbol{A}^2$ 的迹为 8.　　(D) $\boldsymbol{A}^2$ 的迹为 9.

答案 P340；【十年真题】- 考点：矩阵的特征值和特征向量 - 1

2. 【P177-3 (24-3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, bmA^* 为 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵. 若 $r(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=1$, $r(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})=2$, 则 $|\boldsymbol{A}^*|=$________.

答案 P340;【十年真题】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 3

3. 【P177-5 (18-1)】设 2 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 有两个不同特征值, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的线性无关的特征向量, 且满足

$$\boldsymbol{A}^2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)=\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,$$

则 $|\boldsymbol{A}|=$________.

答案 P340;【十年真题】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 5

4. 【P179-变式 1.2】设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$, 且 $\boldsymbol{A}(1,-1,1)^{\mathrm{T}}=\mathbf{0}$, 求 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量.

答案 P341;【方法探究】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 变式 1.2

5. 【P179-1 (08-1,2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\boldsymbol{A}^3=\boldsymbol{O}$, 则 (   )

(A) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.
(B) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 不可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.
(C) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 可逆.
(D) $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 可逆, $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}$ 不可逆.

答案 P341;【真题精选】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 1

6. 【P179-3 (02-3)】设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{P}$ 是 n 阶可逆矩阵, 已知 n 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于特征值 λ 的特征向量, 则矩阵 $\left(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\right)^{\mathrm{T}}$ 属于特征值 λ 的特征向量是 (   )

(A) $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\alpha}$.
(B) $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.
(C) $\boldsymbol{P}\boldsymbol{\alpha}$.
(D) $\left(\boldsymbol{P}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$.

答案 P341;【真题精选】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 3

7. 【P179-36 (96-1)】设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵, $\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维非零列向量, $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的转置. 证明:

(1) $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$ 的充分条件是 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$

(2) 当 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 是不可逆矩阵.

答案 P341;【真题精选】- 考点: 矩阵的特征值和特征向量 - 6

8. 【P180-2 (24-2)】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 2 阶矩阵, 且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, 则 "$\boldsymbol{A}$ 有两个不相等的特征值" 是 "$\boldsymbol{B}$ 可对角化" 的 ( )

(A) 充分必要条件. (B) 充分不必要条件.

(C) 必要不充分条件. (D) 既不充分也不必要条件.

答案 P341;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 2

9. 【P180-4 (22-1)】下述四个条件中, 3 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$ 可对角化的一个充分但不必要条件是 ( )

(A) $\boldsymbol{A}$ 有 3 个互不相等的特征值. (B) $\boldsymbol{A}$ 有 3 个线性无关的特征向量.

(C) $\boldsymbol{A}$ 有 3 个两两线性无关的特征向量. (D) $\boldsymbol{A}$ 的属于不同特征值的特征向量正交.

答案 P341;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 4

10. 【P180-5 (22-2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\Lambda}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1,-1,0$ 的充分必要条件是 ( )

(A) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P},\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda Q}$. (B) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}$.

(C) 存在正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{Q\Lambda Q}^{-1}$. (D) 存在可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{\mathrm{T}}$.

答案 P341;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 5

11. 【P180-8 (17-1,2,3)】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$, 则 (　)

(A) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 相似.

(D) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似, $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{C}$ 不相似.

答案 P342;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 8

12. 【P181-11 (18-2)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为线性无关的向量组. 若 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2=\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=-\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, 则 $\boldsymbol{A}$ 的实特征值为________.

答案 P342;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 11

13. 【P181-15 (20-1,2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha})$, 其中 $\boldsymbol{\alpha}$ 是非零向量且不是 $\boldsymbol{A}$ 的特征向量.

(1) 证明 $\boldsymbol{P}$ 为可逆矩阵;

(2) 若 $\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{\alpha}+\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}-6\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$, 并判断 $\boldsymbol{A}$ 是否相似于对角矩阵.

答案 P343;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 15

14. 【P181-17 (16-1,2,3)】已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\2&-3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$.

(1) 求 $\boldsymbol{A}^{99}$;

(2) 设 3 阶矩阵 $\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 满足 $\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. 记 $\boldsymbol{B}^{100}=(\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3)$, 将 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\boldsymbol{\beta}_3$ 分别表示为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的线性组合.

答案 P343;【十年真题】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 17

15. 【P184-变式 2 (11-1,2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实对称矩阵, $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2, 且

$$\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 0\\-1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\0 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}.$$

(1) 求 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{A}$.

答案 P344;【方法探究】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 变式 2

16. 【P185-6 (08-2,3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的分别属于特征值 $-1,1$ 的特征向量, 向量 $\boldsymbol{\alpha}_3$ 满足 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$.

(1) 证明 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关;

(2) 令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$, 求 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$.

答案 P345;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 6

17. 【P185-7 (07-1,2,3)】设 3 阶实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2$, 且 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_1 的一个特征向量. 记 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}^5-4\boldsymbol{A}^3+\boldsymbol{E}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1) 验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的特征向量, 并求 $\boldsymbol{B}$ 的全部特征值与特征向量;

(2) 求矩阵 $\boldsymbol{B}$.

答案 P345;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 7

18. 【P185-9 (04-1,2)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 2 & -3\\-1 & 4 & -3\\1 & a & 5\end{pmatrix}$ 的特征方程有一个二重根, 求 a 的值, 并讨论 $\boldsymbol{A}$ 是否可相似对角化.

答案 P345;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 9

19. 【P186-10 (02-1)】设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为同阶方阵.

(1) 如果 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 相似, 试证 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 的特征多项式相等;

答案 P345;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 10

20. 【P186-12 (00-1)】某试验性生产线每年 1 月份进行熟练工与非熟练工的人数统计, 然后将 $\frac{1}{6}$ 熟练工支援其他生产部门, 其缺额由招收新的非熟练工补齐. 新、老非熟练工经过培训及实践至年终考核有 $\frac{2}{5}$ 成为熟练工. 设第 n 年 1 月份统计的熟练工和非熟练工所占百分比分别为 x_n 和 y_n, 记成向量 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

(1) 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ 的关系式并写成矩阵形式:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \boldsymbol{A} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix};$$

(2) 验证 $\boldsymbol{\eta}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{\eta}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的两个线性无关的特征向量, 并求出相应的特征值;

(3) 当 $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 时, 求 $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix}$.

答案 P346;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 12

21. 【P187-15 (92-4)】设矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 相似, 其中 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 2 & x & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & y \end{pmatrix}$.

(1) 求 x, y 的值;

(2) 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}$.

答案 P346;【真题精选】- 考点: 矩阵的相似和相似对角化 - 12

2.5 二次型

1. 【P188-2 (25-2)】设矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ 有一个正特征值和两个负特征值, 则 (   )

(A) $a > 4, b > 0$.

(B) $a < 4, b > 0$.

(C) $a > 4, b < 0$.

(D) $a < 4, b < 0$.

答案 P347;【十年真题】- 考点一: 化二次型为标准型 - 2

2. 【P189-12 (20-1,3)】设二次型

$$f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+4x_2^2$$

经正交变换 $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\boldsymbol{Q}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$ 化为二次型

$$g(y_1,y_2)=ay_1^2+4y_1y_2+by_2^2,$$

其中 $a\geqslant b$.

(1) 求 a,b 的值;

(2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{Q}$.

答案 P348;【十年真题】- 考点一:化二次型为标准型 - 12

3. 【P189-2 (23-1)】已知二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_2^2+2x_3^2+2x_1x_2-2x_1x_3,$$
$$g(y_1,y_2,y_3)=y_1^2+y_2^2+y_3^2+2y_2y_3.$$

(1) 求可逆变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$;

(2) 是否存在正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}\boldsymbol{y}$ 将 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化为 $g(y_1,y_2,y_3)$?

答案 P349;【十年真题】- 考点二:矩阵的合同 - 2

4. 【P190-1 (25-3)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\-2&-a\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\1&a\end{pmatrix}$. 若 $f(x,y)=|x\boldsymbol{A}+y\boldsymbol{B}|$ 是正定二次型, 则 a 的取值范围是 (　)

(A) $(0,2-\sqrt{3})$.　　(B) $(2-\sqrt{3},2+\sqrt{3})$.

(C) $(2+\sqrt{3},4)$.　　(D) $(0,4)$.

答案 P350;【十年真题】- 考点三:正定二次型与正定矩阵 - 1

5. 【P190-2 (21-1)】设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a & 1 & -1 \\ 1 & a & -1 \\ -1 & -1 & a \end{pmatrix}$.

(1) 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$ 为对角矩阵;

(2) 求正定矩阵 $\boldsymbol{C}$, 使 $\boldsymbol{C}^2=(a+3)\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$, 其中 $\boldsymbol{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

注 主要错的是 (2)

答案 P350;【十年真题】- 考点三: 正定二次型与正定矩阵 - 2

6. 【P193-3 (14-1,2,3)】设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$$

的负惯性指数是 1, 则 a 的取值范围是________.

答案 P351;【真题精选】- 考点一: 化二次型为标准型 - 3

7. 【P193-8 (13-1,2,3)】设二次型

$$f(x_1,x_2,x_3)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2,$$

记 $\boldsymbol{\alpha}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{\beta}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$.

(1) 证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$;

(2) 若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 正交且均为单位向量, 证明二次型 f 在正交变换下的标准形为 $2y_1^2+y_2^2$.

注 主要错的是 (2)

答案 P352;【真题精选】- 考点一: 化二次型为标准型 - 8

8. 【P193 (01-3)】设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶实对称矩阵, $r(\boldsymbol{A})=n$, A_{ij} 是 $\boldsymbol{A}=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式 $(i,j=1,2,\cdots,n)$, 二次型 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{A_{ij}}{|\boldsymbol{A}|}x_ix_j$.

(1) 记 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 把 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 写成矩阵形式, 并证明二次型 $f(\boldsymbol{x})$ 的矩阵为 $\boldsymbol{A}^{-1}$;

(2) 二次型 $g(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 与 $f(\boldsymbol{x})$ 的规范形是否相同? 说明理由.

答案 P352;【真题精选】- 考点二: 矩阵的合同

9. 【P194-1 (05-3)】设 $\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{C}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{B}\end{pmatrix}$ 为正定矩阵, 其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 m 阶, n 阶对称矩阵, $\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 矩阵.

(1) 计算 $\boldsymbol{P}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{D}\boldsymbol{P}$, 其中 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{E}_m & -\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{E}_n\end{pmatrix}$;

(2) 利用 (1) 的结果判断矩阵 $\boldsymbol{B}-\boldsymbol{C}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{C}$ 是否为正定矩阵, 并证明你的结论.

注 主要错的是 (2)

答案 P352;【真题精选】- 考点三：正定二次型与正定矩阵 - 1

第三章 概率

3.1 随机事件和概率

1. 【P196-7 (25-1)】设 A, B 为两个随机事件, 且 A 与 B 相互独立. 已知 $P(A) = 2P(B)$, $P(A \cup B) = \dfrac{5}{8}$, 则在事件 A, B 至少有一个发生的条件下, A, B 中恰有一个发生的概率为 ________.

答案 P353;【十年真题】- 考点一: 概率的五大公式 - 7

2. 【P196-11 (18-3)】设随机事件 A, B, C 相互独立, 且

$$P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{2},$$

则 $P(AC|A \cup B) =$ ________.

答案 P354;【十年真题】- 考点一: 概率的五大公式 - 11

3. 【P198-例 (1)】袋中装有 2 个红球, 3 个黄球, 1 个蓝球. 现有放回地从袋中取 3 次球, 每次取 1 个球, 则恰有 1 次取到蓝球的概率为 ________.

答案 P198;【方法探究】- 考点二: 古典概型与几何概型 - 例 (1)

4. 【P198-1 (15-1,3)】若 A, B 为任意两个随机事件, 则 (　　)

(A) $P(AB) \le P(A)P(B)$.　　(B) $P(AB) \ge P(A)P(B)$.

(C) $P(AB) \le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.　　(D) $P(AB) \ge \dfrac{P(A)+P(B)}{2}$.

答案 P354;【真题精选】- 考点一: 概率的五大公式 - 1

5. 【P198-11 (97-1)】袋中有 50 个乒乓球, 其中 20 个是黄球, 30 个是白球, 今有两人依次随机地从袋中各取一球, 取后不放回, 则第二个人取得黄球的概率是 ________.

答案 P354;【真题精选】- 考点一: 概率的五大公式 - 11

6. 【P199-14 (89-1)】甲、乙两人独立地对同一目标射击一次，其命中率分别为 0.6 和 0.5. 现已知目标被命中，则它是甲射中的概率为 ________.

答案 P355；【真题精选】- 考点一：概率的五大公式 - 14

3.2 随机变量及其分布

1. 【P200-2 (16-1)】设随机变量 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ $(\sigma > 0)$，记 $p = P\{X \leq \mu + \sigma^2\}$，则 (　)

(A) p 随着 μ 的增加而增加.

(B) p 随着 σ 的增加而增加.

(C) p 随着 μ 的增加而减少.

(D) p 随着 σ 的增加而减少.

答案 P355；【十年真题】- 考点一：随机变量的分布 - 2

2. 【P200-3 (24-1,3)】设随机试验每次成功的概率为 p，现进行 3 次独立重复试验，在至少成功 1 次的条件下 3 次试验全部成功的概率为 $\frac{4}{13}$，则 $p =$ ________.

答案 P355；【十年真题】- 考点一：随机变量的分布 - 3

3. 【P200-1 (23-3-局部)】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}, -\infty < x < +\infty$，令 $Y = e^X$.

(1) 求 X 的分布函数;

(2) 求 Y 的概率密度.

答案 P355；【十年真题】- 考点二：随机变量的函数的分布 - 1

4. 【P202-例 3 (90-1)】已知随机变量 X 的概率密度函数 $f(x) = \dfrac{1}{2}e^{-|x|}, -\infty < x < +\infty$，则 X 的分布函数 $F(x) =$ ________.

答案 P202；【方法探究】- 考点一：随机变量的分布 - 例 3

5. 【P203-4 (02-1)】设 X_1 和 X_2 是相互独立的连续型随机变量, 它们的密度函数分别为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$, 分布函数分别为 $F_1(x)$ 和 $F_2(x)$, 则 (　　)

(A)　$f_1(x)+f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(B)　$f_1(x)f_2(x)$ 必为某一随机变量的概率密度.

(C)　$F_1(x)+F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

(D)　$F_1(x)F_2(x)$ 必为某一随机变量的分布函数.

答案 P356;【真题精选】- 考点一: 随机变量的分布 - 4

6. 【P204-7 (93-3)】设随机变量 X 的概率密度为 $\varphi(x)$, 且 $\varphi(-x)=\varphi(x)$. $F(x)$ 为 X 的分布函数, 则对任意实数 a, 有 (　　)

(A)　$F(-a)=1-\displaystyle\int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.　　(B)　$F(-a)=\dfrac{1}{2}-\displaystyle\int_0^a \varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

(C)　$F(-a)=F(a)$.　　(D)　$F(-a)=2F(a)-1$.

答案 P356;【真题精选】- 考点一: 随机变量的分布 - 7

7. 【P204-11 (89-4)】设随机变量 X 的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ A\sin x, & 0\le x\le \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2},\end{cases}$$

则 $P\left\{|X|<\dfrac{\pi}{6}\right\}=$ ________.

答案 P356;【真题精选】- 考点一: 随机变量的分布 - 11

8. 【P204-2 (03-3)】设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, & x\in[1,8],\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

$F(x)$ 是 X 的分布函数, 则随机变量 $Y=F(X)$ 的分布函数为 ________.

答案 P357;【真题精选】- 考点二: 随机变量的函数的分布 - 2

9. 【P204-3 (13-1)】设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{9}x^2, & 0<x<3,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$,

令随机变量 $Y=\begin{cases}2, & X\le 1,\\ X, & 1<X<2,\\ 1, & X\ge 2.\end{cases}$.

(1) 求 Y 的分布函数;

(2) 求概率 $P\{X\le Y\}$.

答案 P357;【真题精选】- 考点二: 随机变量的函数的分布 - 3

3.3 多维随机变量及其分布

1. 【P206-1 (24-1,3)】设随机变量 X,Y 相互独立, 且均服从参数为 λ 的指数分布. 令 $Z=|X-Y|$, 则下列随机变量中与 Z 同分布的是 ( )

(A) $X+Y$. (B) $\dfrac{X+Y}{2}$. (C) $2X$. (D) X.

答案 P358;【十年真题】- 考点二: 两个随机变量的函数的分布 - 1

2. 【P206-2 (23-1-局部)】设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}(x^2+y^2), & x^2+y^2\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

(1) X 与 Y 是否相互独立?

(2) 求 $Z=X^2+Y^2$ 的概率密度.

答案 P358;【十年真题】- 考点二: 两个随机变量的函数的分布 - 2

3. 【P206-3 (20-1)】设随机变量 X_1, X_2, X_3 相互独立, 其中 X_1 与 X_2 均服从标准正态分布, X_3 的概率分布为 $P\{X_3 = 0\} = P\{X_3 = 1\} = \frac{1}{2}$. $Y = X_3X_1 + (1 - X_3)X_2$.

(1) 求二维随机变量 (X_1, Y) 的分布函数, 结果用标准正态分布函数 $\Phi(x)$ 表示;

(2) 证明随机变量 Y 服从标准正态分布.

注 主要错的是 (2)

答案 P358;【十年真题】- 考点二: 两个随机变量的函数的分布 - 3

4. 【P207-5 (16-1,3)】设二维随机变量 (X, Y) 在区域

$$D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1,\ x^2 < y < \sqrt{x}\}$$

上服从均匀分布, 令

$$U = \begin{cases} 1, & X \leq Y, \\ 0, & X > Y. \end{cases}$$

.

(1) 写出 (X, Y) 的概率密度;

(2) 问 U 与 X 是否相互独立? 并说明理由;

(3) 求 $Z = U + X$ 的分布函数 $F(z)$.

答案 P358;【十年真题】- 考点二: 两个随机变量的函数的分布 - 5

5. 【P210-1 (12-1)】设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布, 则 $P\{X < Y\} = (\quad)$

(A) $\frac{1}{5}$.　　(B) $\frac{1}{3}$.　　(C) $\frac{2}{5}$.　　(D) $\frac{4}{5}$.

答案 P360;【真题精选】- 考点一: 二维随机变量的分布 - 1

6. 【P210-4 (10-1,3)】设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为 $f(x, y) = Ae^{-2x^2+2xy-y^2}, -\infty < x < +\infty, -\infty < y < +\infty$, 求常数 A 及条件概率密度 $f_{Y|X}(y|x)$.

答案 P360;【真题精选】- 考点一: 二维随机变量的分布 - 4

7. 【P211-5 (09-1,3)】袋中有 1 个红球, 2 个黑球与 3 个白球, 现有放回地从袋中取两次, 每次取一个球. 以 X, Y, Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(1) 求 $P\{X = 1|Z = 0\}$;

(2) 求二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

答案 P360;【真题精选】- 考点一: 二维随机变量的分布 - 5

8. 【P211-7 (01-1)】设某班车起点站上车人数 X 服从参数为 λ $(\lambda > 0)$ 的泊松分布, 每位乘客在中途下车的概率为 p $(0 < p < 1)$, 且中途下车与否相互独立. 以 Y 表示在中途下车的人数, 求:

(1) 在发车时有 n 个乘客的条件下, 中途有 m 人下车的概率.

(2) 二维随机变量 (X, Y) 的概率分布.

答案 P360;【真题精选】- 考点一: 二维随机变量的分布 - 5

9. 【P211-9 (95-3)】已知随机变量 X 和 Y 的联合概率密度为

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 4xy, & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

求 X 和 Y 联合分布函数 $F(x, y)$.

答案 P360;【真题精选】- 考点一: 二维随机变量的分布 - 9

10. 【P212-3 (07-1,3)】设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 - x - y, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求 $P\{X > 2Y\}$;

(2) 求 $Z = X + Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

答案 P361;【真题精选】- 考点二: 两个随机变量的函数的分布 - 3

11. 【P212-5 (01-3)】设随机变量 X 和 Y 的联合分布是正方形 $G = \{(x, y)|1 \le x \le 3, 1 \le y \le 3\}$ 上的均匀分布, 试求随机变量 $U = |X - Y|$ 的概率密度 $p(u)$.

答案 P361;【真题精选】- 考点二: 两个随机变量的函数的分布 - 5

3.4 随机变量的数字特征

1. 【P214-1 (24-3)】设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}6x(1-x), & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

则 X 的三阶中心矩 $E[(X-EX)^3]=(\quad)$

(A) $-\dfrac{1}{32}$.　　(B) 0.　　(C) $\dfrac{1}{16}$.　　(D) $\dfrac{1}{2}$.

答案 P362；【十年真题】- 考点一：随机变量的数学期望与方差 - 1

2. 【P214-7 (17-1)】设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.5\Phi(x)+0.5\Phi\left(\dfrac{x-4}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 $EX=$ ________.

答案 P362；【十年真题】- 考点一：随机变量的数学期望与方差 - 7

3. 【P214-8 (25-1,3)】投保人的损失事件发生时, 保险公司的赔付额 Y 与投保人的损失额 X 的关系为

$$Y=\begin{cases}0, & X\le 100,\\ X-100, & X>100.\end{cases}$$

设损失事件发生时, 投保人的损失额 X 的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2\times 100^2}{(100+x)^3}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

(1) 求 $P\{Y>0\}$ 及 EY;

(2) 这种损失事件在一年内发生的次数记为 N, 保险公司在一年内就这种损失事件产生的理赔次数记为 M. 假设 N 服从参数为 8 的泊松分布, 在 $N=n\ (n\ge 1)$ 的条件下, M 服从二项分布 $B(n,p)$, 其中 $p=P\{Y>0\}$. 求 M 的概率分布.

答案 P363；【十年真题】- 考点一：随机变量的数学期望与方差 - 8

4. 【P214-10 (21-1,3)】在区间 $(0,2)$ 上随机取一点, 将该区间分成两段, 较短一段的长度记为 X, 较长一段的长度记为 Y. 令 $Z=\dfrac{Y}{X}$.

(1) 求 X 的概率密度;

(2) 求 Z 的概率密度;

(3) 求 $E\left(\dfrac{X}{Y}\right)$.

注 主要错的是 (3)

答案 P363;【十年真题】- 考点一: 随机变量的数学期望与方差 - 10

5. 【P215-1 (25-1)】设二维随机变量 (X,Y) 服从正态分布 $N(0,0;1,1;\rho)$, 其中 $\rho\in(-1,1)$. 若 a,b 为满足 $a^2+b^2=1$ 的任意实数, 则 $D(aX+bY)$ 的最大值为 ( )

(A) 1. (B) 2. (C) $1+|\rho|$. (D) $1+\rho^2$.

答案 P363;【十年真题】- 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 1

6. 【P215-5 (22-1)】设随机变量 $X\sim N(0,1)$, 在 $X=x$ 的条件下随机变量 $Y\sim N(x,1)$, 则 X 与 Y 的相关系数为 ( )

(A) $\dfrac{1}{4}$. (B) $\dfrac{1}{2}$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. (D) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

答案 P364;【十年真题】- 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 5

7. 【P215-8 (20-3)】设随机变量 (X,Y) 服从二维正态分布 $N\left(0,0;1,4;-\dfrac{1}{2}\right)$, 则下列随机变量中服从标准正态分布且与 X 独立的是 ( )

(A) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}(X+Y)$. (B) $\dfrac{\sqrt{5}}{5}(X-Y)$. (C) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(X+Y)$. (D) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}(X-Y)$.

答案 P364;【十年真题】- 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 8

8. 【P215-10 (23-3)】设随机变量 X 与 Y 相互独立, 且 $X\sim B(1,p)$, $Y\sim B(2,p)$, $p\in(0,1)$, 则 $X+Y$ 与 $X-Y$ 的相关系数为 ________.

答案 P364;【十年真题】- 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 10

9. 【P215-12 (20-1)】设 X 服从区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的均匀分布, $Y = \sin X$, 则 $\mathrm{Cov}(X, Y) =$ ________.

答案 P365;【十年真题】- 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 12

10. 【P215-13 (23-1)】设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi}(x^2 + y^2), & x^2 + y^2 \leq 1, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

(1) 求 X 与 Y 的协方差;

(2) X 与 Y 是否相互独立?

(3) 求 $Z = X^2 + Y^2$ 的概率密度.

答案 P365;【十年真题】- 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 13

11. 【P216-15 (19-1,3)】设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 服从参数为 1 的指数分布, Y 的概率分布为

$$P\{Y = -1\} = p, \quad P\{Y = 1\} = 1 - p \quad (0 < p < 1).$$

令 $Z = XY$.

(1) 求 Z 的概率密度;

(2) p 为何值时, X 与 Z 不相关?

(3) X 与 Z 是否相互独立?

答案 P365;【十年真题】- 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 15

12. 【P216-16 (18-1,3)】设随机变量 X 与 Y 相互独立, X 的概率分布为

$$P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{2},$$

Y 服从参数为 λ 的泊松分布. 令 $Z = XY$.

(1) 求 $\mathrm{Cov}(X, Z)$;

(2) 求 Z 的概率分布.

答案 P365;【十年真题】- 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 16

13. 【P216-例 2】设随机变量 $X \sim N(0,1), Y \sim N(1,4)$, 且 $U = aX + Y, V = aX - Y(a > 0)$. 若 U, V 不相关, 则 $a =$ ________.

答案 P219;【方法探究】- 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 例 2

14. 【P219-2 (09-1)】设随机变量 X 的分布函数为 $F(x) = 0.3\Phi(x) + 0.7\Phi\left(\dfrac{x-1}{2}\right)$, 其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数, 则 EX = ( )

(A) 0. (B) 0.3. (C) 0.7. (D) 1.

答案 P366;【真题精选】- 考点一: 随机变量的数学期望与方差 - 2

15. 【P219-3 (13-3)】设随机变量 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, 则 $E(Xe^{2X}) =$ ________.

答案 P366;【真题精选】- 考点一: 随机变量的数学期望与方差 - 3

16. 【P219-9 (99-3)】设随机变量 X_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n;\ n \geq 2)$ 独立同分布, $EX_{ij} = 2$, 则行列式

$$Y = \begin{vmatrix} X_{11} & X_{12} & \ldots & X_{1n} \\ X_{21} & X_{22} & \ldots & X_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ X_{n1} & X_{n2} & \ldots & X_{nn} \end{vmatrix}$$

的数学期望 $EY =$ ________.

答案 P366;【真题精选】- 考点一: 随机变量的数学期望与方差 - 9

17. 【P219-12 (15-1,3)】设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2^{-x}\ln 2, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

对 X 进行独立重复的观测, 直到第 2 个大于 3 的观测值出现时停止, 记 Y 为观测次数.

(1) 求 Y 的概率分布;

(2) 求 EY.

答案 P366;【真题精选】- 考点一: 随机变量的数学期望与方差 - 12

18. 【P220-14 (03-1)】已知甲、乙两箱中装有同种产品, 其中甲箱中装有 3 件合格品和 3 件次品, 乙箱中仅装有 3 件合格品. 从甲箱中任取 3 件产品放入乙箱后, 求:

(1) 乙箱中次品件数 X 的数学期望;

(2) 从乙箱中任取一件产品是次品的概率.

答案 P366;【真题精选】- 考点一: 随机变量的数学期望与方差 - 14

19. 【P221-5 (06-3)】设随机变量 X 的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & -1 < x < 0, \\ \frac{1}{4}, & 0 < x < 2, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

令 $Y = X^2$, $F(x, y)$ 为二维随机变量 (X, Y) 的分布函数. 求:

(1) Y 的概率密度 $f_Y(y)$;

(2) $\mathrm{Cov}(X, Y)$;

(3) $F\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$.

答案 P367;【真题精选】- 考点二: 随机变量的协方差与相关系数 - 5

3.5 大数定律与中心极限定理

3.6 数理统计的基本概念

3.7 参数估计