

# 同济大学

## 控制工程基础课程设计

### 一级倒立摆系统



机械与能源工程学院

2020 年 5 月

指导老师 李晶

## 目录

一、 倒立摆系统概述 .....	2
1. 直线一级倒立摆系统 .....	2
2. 物理参数符号及其说明 .....	2
二、 建立直线型一级倒立摆系统的数学模型 .....	3
1. 物理模型 .....	3
2. 微分方程 .....	3
3. 系统传递函数 .....	4
4. 建立状态空间方程 .....	5
三、 根轨迹控制设计 .....	6
1. 根轨迹控制分析 .....	6
2. 根轨迹控制器设计 .....	7
2.1. 确定希望主导极点 .....	7
2.2. 确定校正装置 .....	8
2.3. 设计校正装置 .....	8
2.4. 验证校正后的系统性能 .....	9
3. 设计结论 .....	10
四、 PID 控制设计 .....	11
1. PID 控制器概述 .....	11
2. PID 控制器设计 .....	11
3. 设计结论 .....	15
五、 基于频率响应法的设计及仿真 .....	15
1. 设计目标 .....	15
2. 频率响应分析 .....	15
3. 基于频响法的设计与仿真 .....	16
3.1. 选择控制器 .....	16
3.2. 计算增益 .....	17
3.3. 根据相位裕量计算 $\alpha$ .....	17
3.4. 计算零极点 .....	17
3.5. 确定校正装置 .....	18
六、 线性二次最优控制 LQR .....	19
1. LQR 控制器原理 .....	19
2. 系统能控性和能观性分析 .....	21
3. LQR 控制器设计 .....	22
4. LQR 控制器设计结论 .....	25
七、 Simulink 物理系统建模与仿真 .....	25
1. PID 控制器部分 .....	25
2. LQR 控制器部分 .....	26
八、 设计经验总结 .....	26
九、 心得与体会 .....	27
参考文献 .....	27

## 一、 倒立摆系统概述

### 1. 直线一级倒立摆系统

倒立摆是进行控制理论研究的典型实验平台。许多抽象的控制理论概念如系统稳定性、可控性和系统抗干扰能力等，都在倒立摆系统中有直观的体现，所以其对基础的控制理论和算法的学习有很大的帮助。由于倒立摆系统本身所具有的高阶次、不稳定、多变量、非线性和强耦合性的特点，所以许多研究人员一直将其作为典型的试验平台，不断从中探索新的控制策略和算法与控制方法，并在火箭飞行器的姿态控制以及机器人的控制等领域中有着广泛的应用。

本次课程设计的研究对象是固高科技公司的直线一级倒立摆，主要由摆杆、导轨、小车、伺服电机、角度编码器等构成。

倒立摆系统的控制，可采用经典 PID 控制方法、LQR 控制方法、模糊控制法、人工神经网络控制算法等。针对本次课设的研究对象——一级倒立摆系统的控制，拟采用根轨迹控制法、PID 控制法、频率响应控制法、LQR 控制法等四种方法进行控制器的设计。

### 2. 物理参数符号及其说明

表 1-1 系统参数

参数	意义	数值
<b>M</b>	小车质量	<b>1.096kg</b>
<b>m</b>	摆杆质量	<b>0.109kg</b>
<b>l</b>	摆杆质心到转动轴心的长度	<b>0.25m</b>
<b>b</b>	摩擦比例系数	<b>0.1N·s/m</b>
<b>I</b>	摆杆对质心的转动惯量	<b>0.0034kg·m<sup>2</sup></b>
<b>T</b>	采样时间	<b>0.005s</b>

$\phi$  摆杆与竖直向上方向间的夹角 —

$\theta$  摆杆与竖直向下方向间的夹角 —

## 二、建立直线型一级倒立摆系统的数学模型

### 1. 物理模型

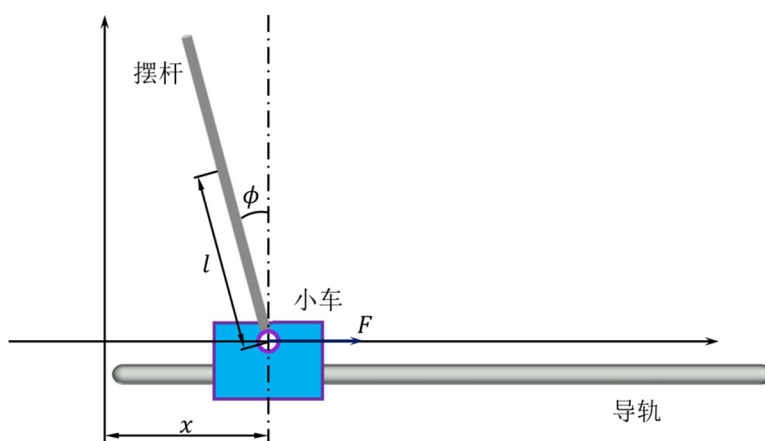


图 2-1 倒立摆系统物理模型示意图

### 2. 微分方程

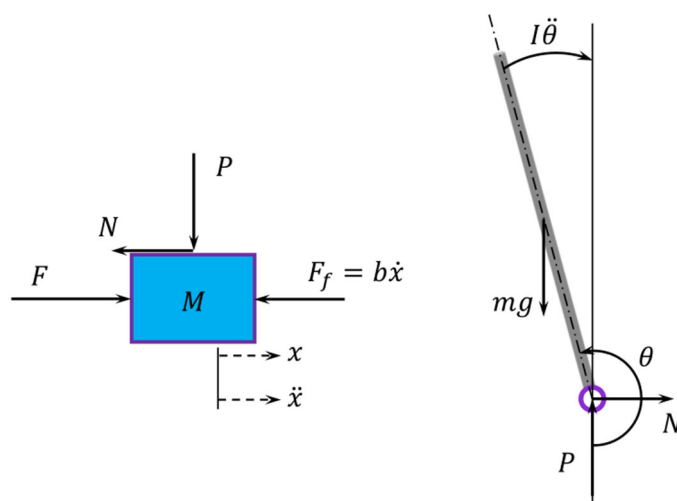


图 2-2 倒立摆系统受力分析图示

如图对小车做受力分析，在水平方向依据牛顿第二定律列写运动方程：

$$M\ddot{x} = F - b\dot{x} - N \quad (2-1)$$

对摆杆，水平方向上，由牛顿第二定律：

$$N = m \frac{d^2}{dt^2} (x + l \sin \theta) \quad (2-2)$$

将上式中二阶导数展开，整理得：

$$N = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta \quad (2-3)$$

(2-1) 式和(2-3)式联立消去中间参量 $N$ ，得系统第一个运动方程：

$$(M + m)\ddot{x} + b\dot{x} + ml\ddot{\theta} \cos \theta - ml\dot{\theta}^2 \sin \theta = F \quad (2-4)$$

再构建系统第二个运动方程。对摆杆，沿竖直方向列写牛顿第二定律方程：

$$P - mg = m \frac{d^2}{dt^2} (l \cos \theta) \quad (2-5)$$

将二阶导数展开并整理

$$P - mg = -ml\ddot{\theta} \sin \theta - ml\dot{\theta}^2 \cos \theta \quad (2-6)$$

另外，对摆杆的转动中心，由力矩平衡方程

$$-Pl \sin \theta - Nl \cos \theta = I\ddot{\theta} \quad (2-7)$$

将式(2-3)、(2-6)和(2-7)联立，消去中间量 $N$ 、 $P$ ，可得

$$\begin{aligned} -mgl \sin \theta + ml^2\ddot{\theta} \sin^2 \theta + ml^2\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta - ml\ddot{x} \cos \theta - ml^2\ddot{\theta} \cos^2 \theta \\ + ml^2\dot{\theta}^2 \sin \theta \cos \theta = I\ddot{\theta} \end{aligned} \quad (2-8)$$

考虑到摆杆的摆幅很小，即 $\phi \rightarrow 0$ ，且角度关系有 $\theta = \pi + \phi$ ，故根据泰勒级数

有 $\cos \theta = -\cos \phi = -1$ ， $\sin \theta = -\sin \phi = -\phi$ ，且 $\dot{\theta}^2$ 为高阶无穷小量，可直接略去，据此可对式(2-8)进行化简

$$(I + ml^2)\ddot{\theta} + mgl \sin \theta = -ml\ddot{x} \cos \theta \quad (2-9)$$

上式即为系统第二个运动微分方程。将式(2-4)和(2-9)中 $x$ 各阶导数替换为的各阶导数，以 $u$ 代表力 $F$ ，并写成方程组的形式

$$\begin{cases} (M + m)\ddot{x} + b\dot{x} - ml\ddot{\phi} = u \\ (I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x} \end{cases} \quad (2-10)$$

### 3. 系统传递函数

假定系统为零初始条件，对(2-10)式进行拉氏变换得

$$\begin{cases} (M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\Phi(s)s^2 = U(s) \\ (I + ml^2)\Phi(s)s^2 - mgl\Phi(s) = mlX(s)s^2 \end{cases} \quad (2-11)$$

考虑摆杆角度与小车加速度间的传递函数，令 $v$ 等于小车加速度 $\ddot{x}$ ，则有

$$V(s) = X(s)s^2 \quad (2-12)$$

故而可得出摆杆角度对小车加速度的传递函数为

$$\frac{\Phi(s)}{V(s)} = \frac{ml}{(I + ml^2)s^2 - mgl}$$

代入实际参数值得

$$\frac{\Phi(s)}{V(s)} = \frac{0.2725}{0.0102125s^2 - 0.26705} \quad (2-13)$$

但是若考察摆杆摆角与小车驱动力间的关系，则需对(2-11)整体变形，消去其中 $X(s)$ ，并引入记号 $\delta$ ：

$$\delta = [(M + m)(I + ml^2) - (ml)^2] \quad (2-14)$$

则有

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{\frac{ml}{\delta} s^2}{s^4 + \frac{b(I + ml^2)}{\delta} s^3 - \frac{(M + m)mgl}{\delta} s^2 - \frac{bmgl}{\delta} s}$$

代入实际参数得

$$\frac{\Phi(s)}{U(s)} = \frac{2.35655s}{s^3 + 0.0883167s^2 - 27.9169s - 2.30942} \quad (2-15)$$

上式即为摆杆摆角与小车驱动力间的传递函数。

#### 4. 建立状态空间方程

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + Bu \\ y = CX + Du \end{cases} \quad (2-16)$$

根据方程组(2-10)求解代数方程可得如下方程组：

$$\begin{cases} \dot{x} = \dot{x} \\ \ddot{x} = \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} \dot{x} + \frac{m^2 gl^2}{I(M + m) + Mml^2} \phi + \frac{I + ml^2}{I(M + m) + Mml^2} u \\ \dot{\phi} = \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} = \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2} \dot{x} + \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2} \phi + \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2} u \end{cases} \quad (2-17)$$

整理得系统状态空间方程：

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-(I + ml^2)b}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{m^2 gl^2}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{I(M + m) + Mml^2} & \frac{mgl(M + m)}{I(M + m) + Mml^2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I + ml^2}{I(M + m) + Mml^2} \\ 0 \\ \frac{ml}{I(M + m) + Mml^2} \end{bmatrix} u \\ y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned} \quad (2-18)$$

由(2-10)式，

$$(I + ml^2)\ddot{\phi} - mgl\phi = ml\ddot{x}$$

根据平行移轴公式，可将上式化简为

$$\ddot{\phi} = \frac{3g}{4l}\phi + \frac{3}{4l}\ddot{x} \quad (2-19)$$

设 $u' = \ddot{x}$ ，则可得：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g}{4l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix} u'$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u' \quad (2-20)$$

将式(2-18)和(2-20)，根据表 1-1 代入系统参数，即可得系统状态空间方程：

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0883 & 0.6293 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -0.2357 & 27.8285 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.8832 \\ 0 \\ 2.3566 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (2-21)$$

此处的输入 $u$ 表示小车受到的外界施加的力。

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u'$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u' \quad (2-22)$$

与(2-21)式不同，这里输入 $u'$ 表示小车的加速度。

### 三、根轨迹控制设计

#### 1. 根轨迹控制分析

根据上面计算已得出本系统以小车加速度为输入、摆杆角度为输出的开

环传递函数，即(2-13)

$$\frac{\Phi(s)}{V(s)} = \frac{0.02725}{0.0102125s^2 - 0.26705}$$

在MATLAB中编写代码求系统零极点分布，并画出系统闭环根轨迹图像，如图 3-2。由根轨迹图像可以看出系统总是不稳定的，故需设计控制器对其进行校正以期获良好的稳定性和响应的迅速性。

```
1 - num=[0 0 0.02725];
2 - den=[0.0102125 0 -0.26705];
3 - rlocus(num,den)
4 - z=roots(num)
5 - n=roots(den)
```

图 3-1 求系统零极点分布程序截图

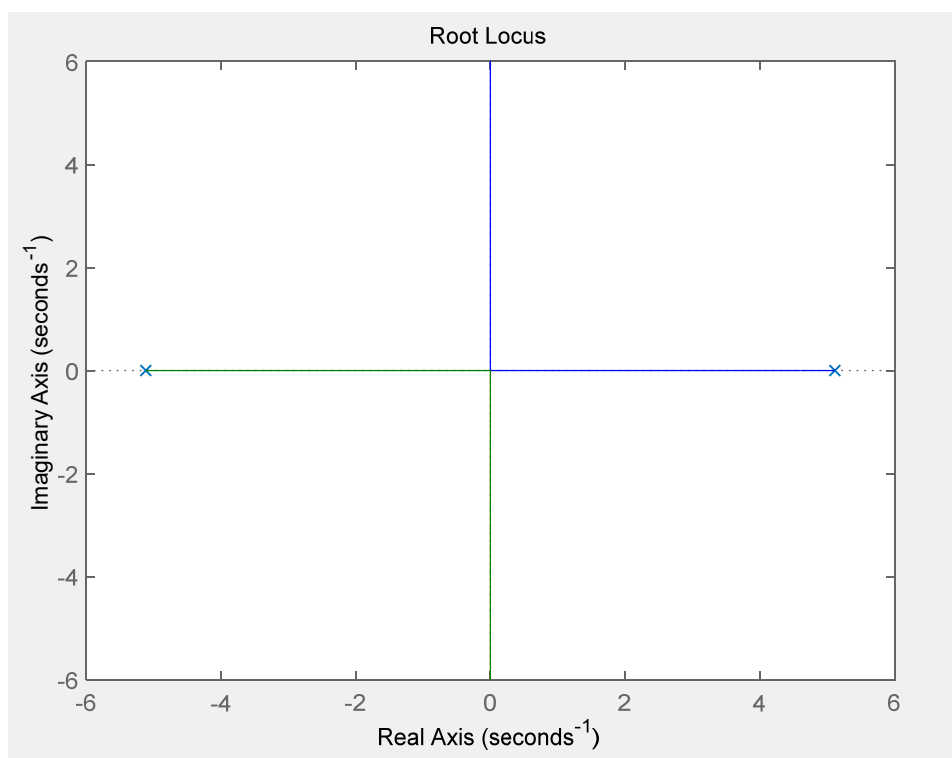


图 3-2 原系统闭环根轨迹图

## 2. 根轨迹控制器设计

### 2.1. 确定希望主导极点

取最大超调量  $M_p \leq 10\%$ ，由最大超调量计算公式

$$M_p = e^{-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \leq 10\%$$

可以求得：  $\zeta = 0.6$ ，从而  $\theta = \arccos \zeta = 0.938306 \text{ (rad)}$ ，它表示极点与 O 点连线和负实轴方向的夹角。

取调整时间  $t_s = 0.5s$ ，当系统进入  $\pm 2\%$  的误差范围时，调整时间为



$$t_s \approx \frac{-\ln 0.02}{\zeta \omega_n} \approx \frac{4}{\zeta \omega_n}$$

从而可求得 $\omega_n = 13.5328$ ，于是希望主导极点可表示为：

$$13.5328(-\cos \theta \pm j \sin \theta)$$

## 2.2. 确定校正装置

对系统选用串联超前校正器：

$$\alpha G_c(s) = \frac{T_1 s + 1}{\frac{T_1}{\alpha} s + 1}$$

$$G_c(s) = a \frac{T_1 s + 1}{a T_1 s + 1} = \frac{s + z_c}{s + p_c}$$

其中 $a \leq 1$ 。

求串联校正器应提供的相位角

$$\begin{aligned} G(s_d) &= -\left( \tan^{-1} \left( \frac{13.5328 \sin \theta}{13.5328 \cos \theta - 5.1136} \right) - \tan^{-1} \left( \frac{13.5328 \sin \theta}{13.5328 \cos \theta + 5.1136} \right) \right. \\ &\quad \left. + 6.28 \right) \\ &= -4.27676 \end{aligned}$$

因此校正装置提供的相位角为： $\phi = -3.14 - (-4.27676) = 1.13517$

## 2.3. 设计校正装置

由前面计算可知 $\theta = 0.938306$ ，计算对应于最大 $a$ 值的 $\gamma$ 角度：

$$\gamma = \frac{1}{2}(\pi - \theta - \phi) = 0.534059$$

进而根据作图法求出超前校正装置的零点和极点，分别为：

$$z_c = -6.92214; z_p = -26.4568$$

该校正装置与原系统串联，故可得校正后的系统开环传递函数为：

$$G_c(s) \frac{\Phi(s)}{V(s)} = \frac{K(s + 6.92214)}{s + 26.4568} \frac{0.02725}{0.0102125s^2 - 0.26705}$$

设为单位反馈系统，根据幅值条件可得增益 $K = 141.137$ ，于是校正装置为

$$G_c(s) = \frac{141.137(s + 6.92214)}{s + 26.4568}$$

## 2.4. 验证校正后的系统性能

在Simulink中搭建系统模型如下图

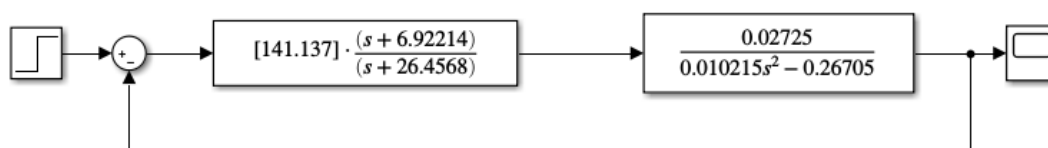


图 3-3 系统 Simulink 模型

运行仿真，可得系统阶跃响应输出如下图

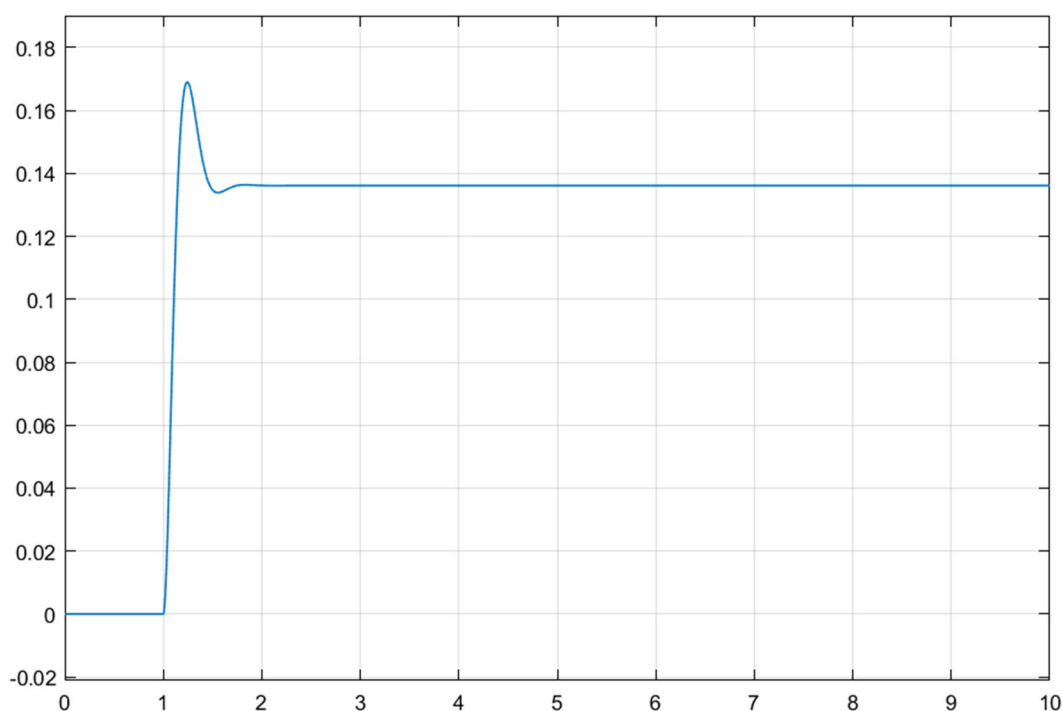


图 3-4 校正后系统阶跃响应输出曲线

从阶跃响应曲线可以看出系统在1s内即可快速稳定，响应迅速，存在一定超调，且有一定稳态误差。编写MATLAB程序画出系统校正后的根轨迹图像和脉冲响应曲线如图 3-6。

```
1 - num = [0.02725];
2 - den = [0.0102125 0 -0.26705];
3 - numlead = -6.92214;
4 - denlead = -26.4568;
5 - [Z, P, K] = tf2zp(num, den);
6 - Za = [Z; numlead];
7 - Pa = [P; denlead];
8 - [num2, den2] = zp2tf(Za, Pa, K);
9 - sys = tf(num2, den2);
10 - subplot(2, 1, 1);
11 - rlocus(sys); grid;
12 - Kk = 141.137;
13 - sys2 = zpk(Za, Pa, Kk*K);
14 - sysc = sys2/(1+sys2);
15 - t = 0:0.005:5;
16 - subplot(2, 1, 2);
17 - impulse(sysc, t); grid;
```

图 3-5 系统校正后的根轨迹求解程序截图

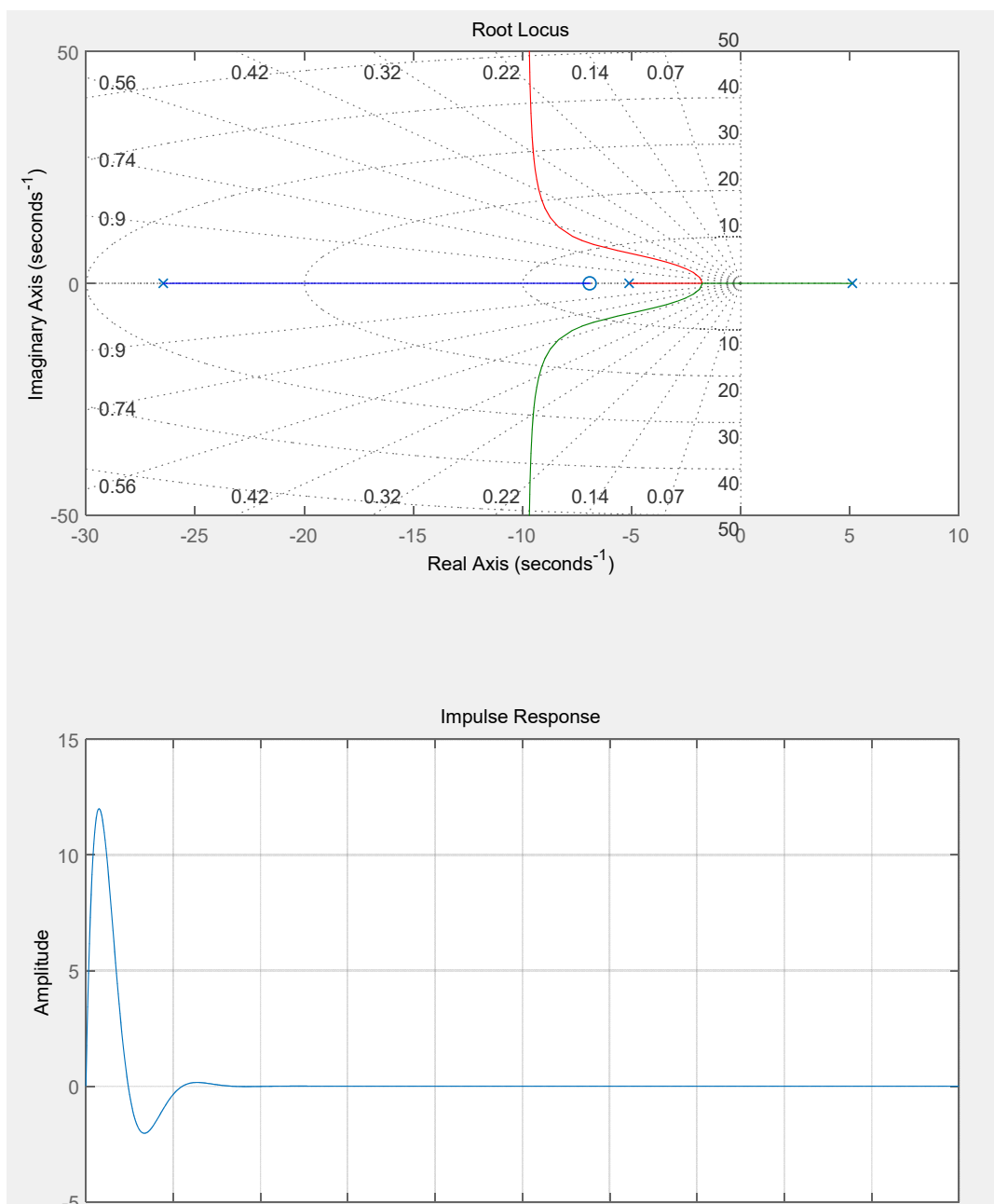


图 3-6 校正后系统根轨迹图和闭环阶跃响应图

### 3. 设计结论

选用串联超前校正

$$G_c(s) = \frac{141.137(s + 6.92214)}{s + 26.4568}$$

校正后的系统虽存在一定稳态误差，但其稳定性和响应的快速性均已达到设计初衷。

## 四、PID 控制设计

### 1. PID 控制器概述

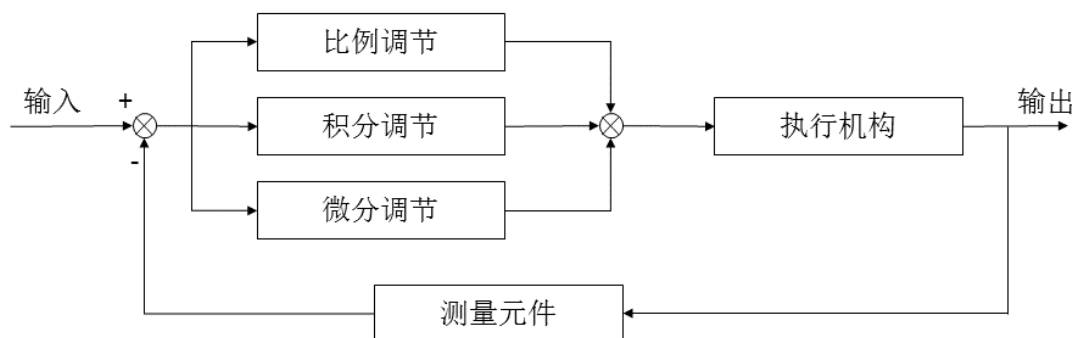


图 4-1 PID 原理图

PID 控制器由比例单元(proportion)、积分单元(integral)和微分单元(derivative)组成。其输入  $e(t)$  与输出  $u(t)$  的关系为

$$u(t) = K_P \left( e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(t) + T_D \frac{de(t)}{dt} \right)$$

对上式进行拉氏变换得其传递函数为

$$G(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_P \left( 1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s \right)$$

其中,  $K_P e(t)$  为比例环节, 其作用是实时监控偏差信号的产生, 是 PID 控制的基础环节。

$\frac{K_P}{T_I} \int_0^t e(t)$  为积分环节, 其作用主要是消除系统静态误差, 作用的强弱取决于积分时间常数  $T_I$ ,  $T_I$  越大, 积分作用越弱, 反之则越强。但是, 积分环节也可能增大系统超调量。

$K_P T_D \frac{de(t)}{dt}$  为微分环节, 其作用主要是预计偏差信号的变化趋势, 并在其发生较大变化之前引入一个修正信号与之抵消, 从而减小系统的调节时间。

### 2. PID 控制器设计

在 MATLAB Simulink 中搭建系统模型, 其框图如图 4-2, 控制器输出为小车加速度信号, 经过两个积分环节输出为小车位移。

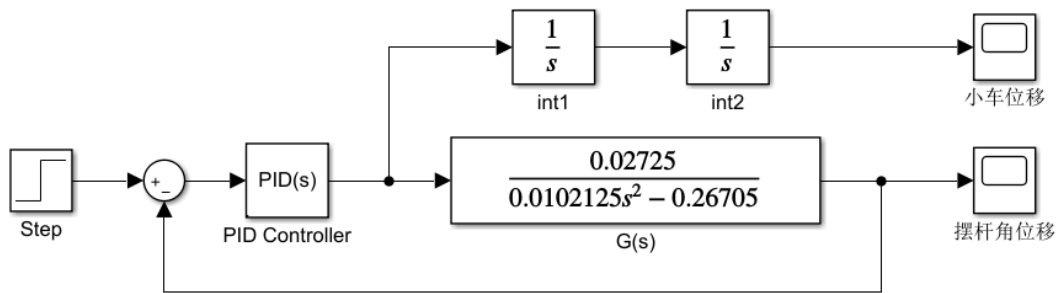


图 4-2 PID 控制系统Simulink模型

调整 PID 参数，初选 $K_P = 6$ ， $K_I = 0$ ， $K_D = 0$ 。得摆杆角位移图像如图 4-3 所示

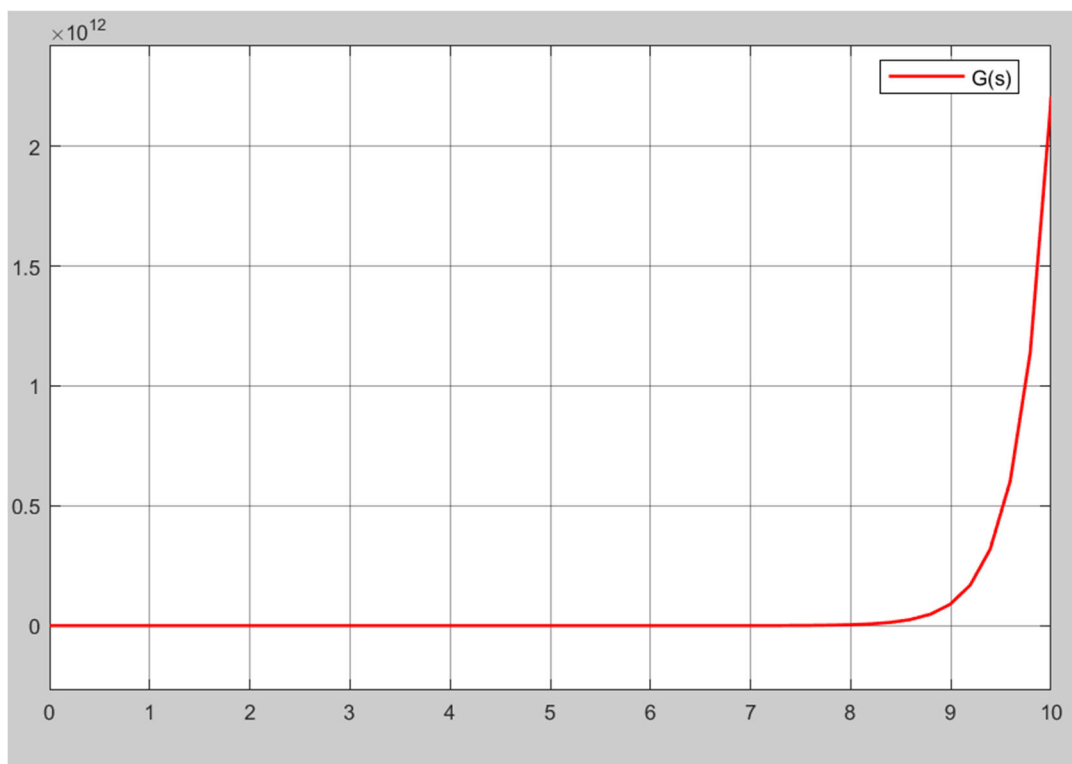


图 4-3 取 $K_P = 6$ ， $K_I = 0$ ， $K_D = 0$

不难看出曲线是发散的，故需增大比例系数，选取 $K_P = 50$ ， $K_I = 0$ ， $K_D = 0$ ，得响应曲线如图 4-4，此时闭环系统持续震荡。

引入微分环节，取 PID 参数为 $K_P = 50$ ， $K_I = 0$ ， $K_D = 6$ 。得系统响应曲线为图 4-5，此时系统在较短的时间内即可趋于稳定，且没有振荡，在快速性和稳定性方面较为良好，但存在较大的静态偏差，故需引入积分环节。

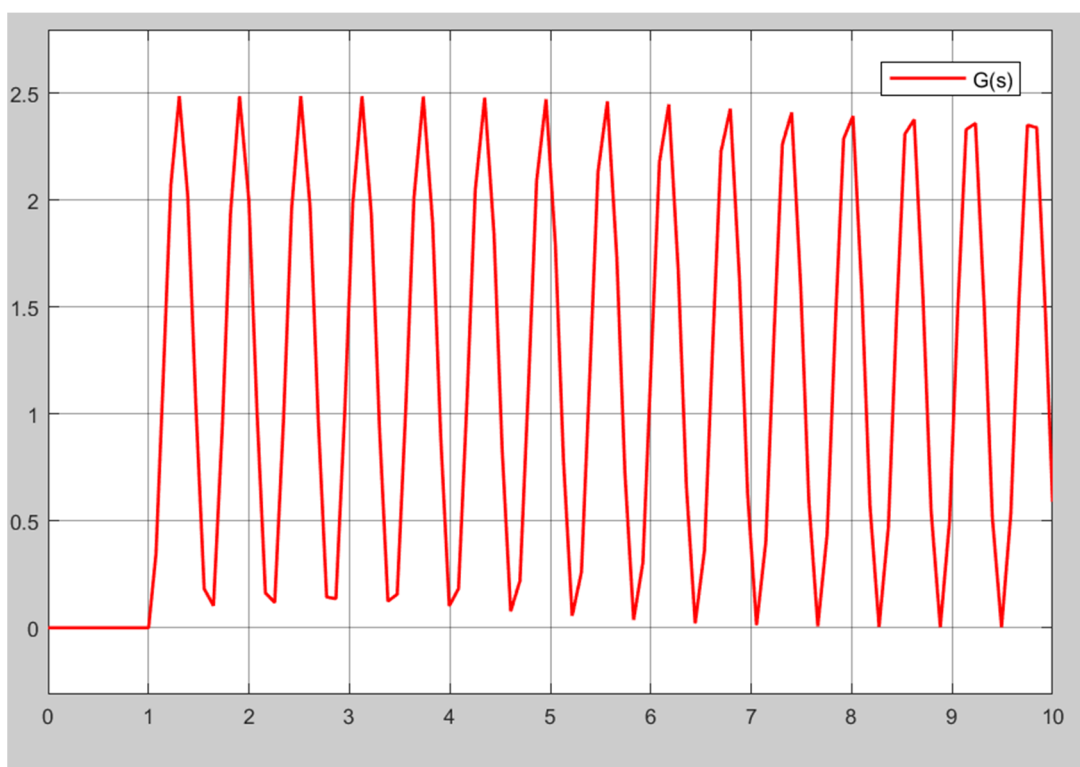


图 4-4 取 $K_p = 50$ ,  $K_i = 0$ ,  $K_d = 0$

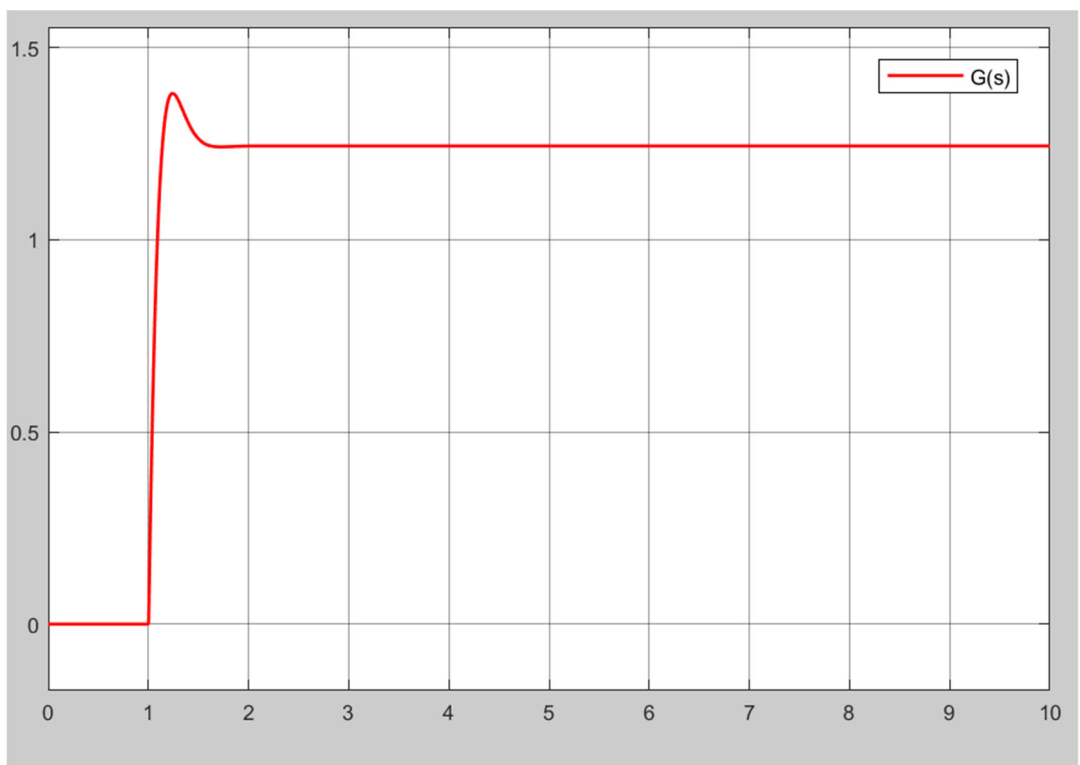


图 4-5 取 $K_p = 50$ ,  $K_i = 0$ ,  $K_d = 6$

取 PID 参数为 $K_P = 50$ ,  $K_I = 40$ ,  $K_D = 10$ 。响应曲线为图 4-6

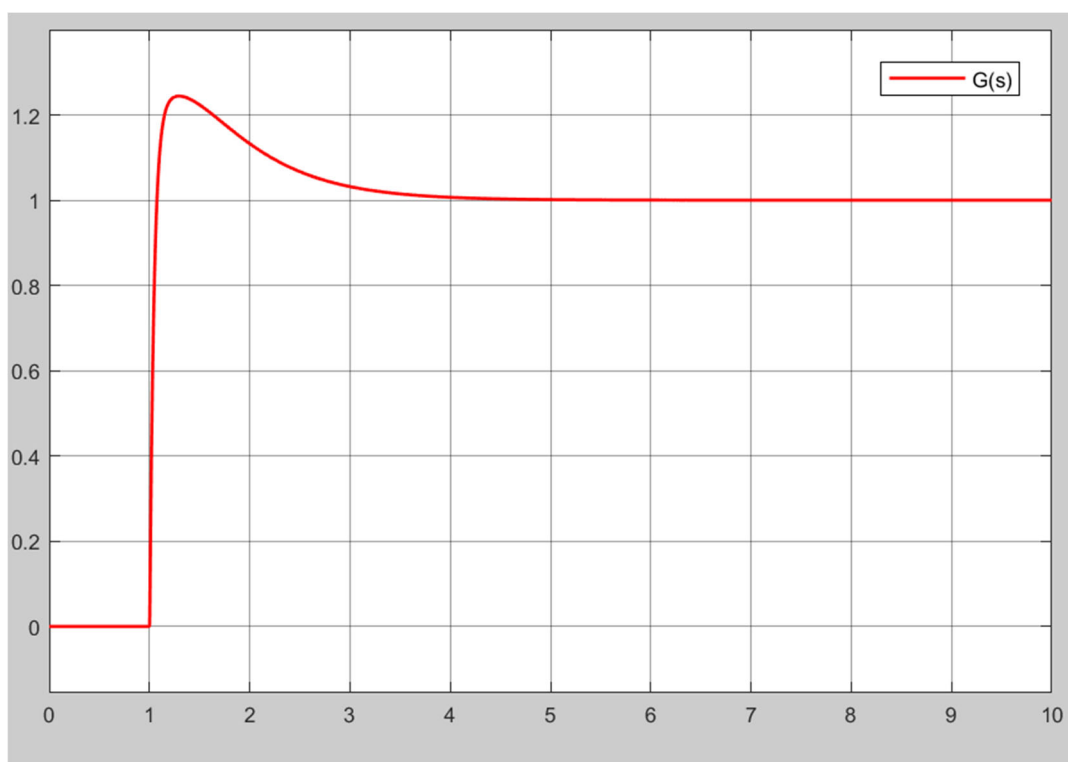


图 4-6 取 $K_P = 50$ ,  $K_I = 40$ ,  $K_D = 10$

由图可见在经历一段时间后系统达到稳定状态, 且不存在静态偏差, 但由于积分环节的引入, 使得系统的调整时间变长。

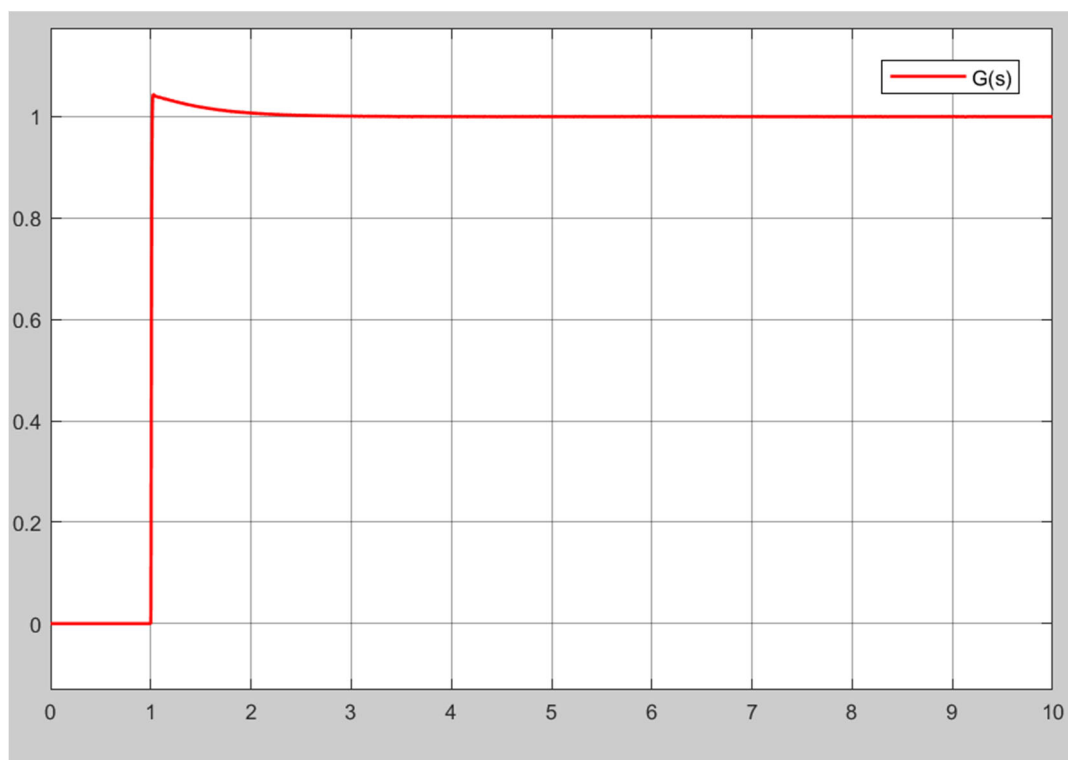


图 4-7 取 $K_P = 400$ ,  $K_I = 550$ ,  $K_D = 60$

按照前述步骤，反复调整 PID 控制器的参数直至阶跃响应曲线如图 4-7，此时 PID 参数为  $K_p = 400$ ， $K_I = 550$ ， $K_D = 60$ 。由图可见，此时系统没有静态偏差；响应速度快，调整时间  $t_s < 1.5 \text{ s}$ ；且超调量小， $M_p < 5\%$ 。

### 3. 设计结论

根据设计结果，取 PID 控制器的参数为  $K_p = 400$ ， $K_I = 550$ ， $K_D = 60$ ，此时系统具有较好的动态性能。

## 五、基于频率响应法的设计及仿真

### 1. 设计目标

静态位置误差系数  $K_p = 10$ ，相位裕量  $\gamma = 60^\circ$ ，幅值裕量  $K_g \geq 10$ 。

### 2. 频率响应分析

前面已求得以小車加速度为输入、以摆杆角度为输出的系统开环传递函数为

$$\frac{\Phi(s)}{V(s)} = \frac{0.02725}{0.0102125s^2 - 0.26705}$$

在 MATLAB 中编写程序绘制系统的伯德图和奈奎斯特图

```

1 - num = [0.02725];
2 - den = [0.0102125 0 -0.26705];
3
4 - z = roots(num);
5 - p = roots(den);
6
7 - subplot(2, 1, 1)
8 - bode(num, den);
9 - grid;
10 - axis([-inf inf, -200, -90])
11 - subplot(2, 1, 2)
12 - nyquist(num, den);
13 - grid;
```

图 5-1 MATLAB 编程绘制系统伯德图和奈氏图  
得如图 5-2 所示图像。



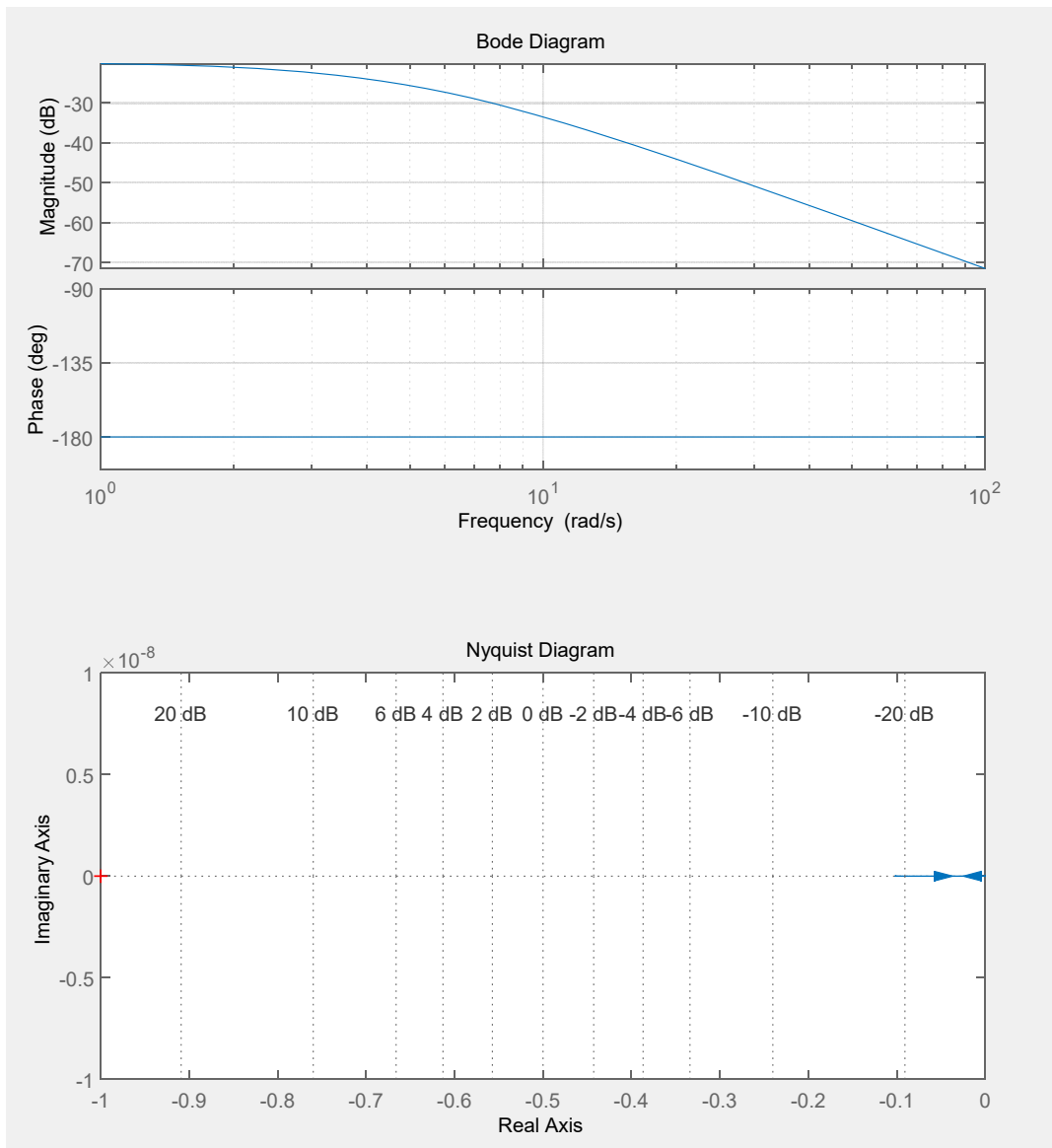


图 5-2 系统伯德图和奈氏图

奈奎斯特稳定性判据：一个闭环反馈控制系统稳定的充要条件是其开环奈氏图逆时针包围 $(-1, j0)$ 点的圈数等于其开环右极点的个数。由图可见系统开环传递函数有一个右极点，所以要使系统稳定，则需其奈奎斯特图逆时针绕 $(-1, j0)$ 点一圈，故而从图像可以看出，系统不稳定，需要设计控制器使之稳定。

### 3. 基于频响法的设计与仿真

#### 3.1. 选择控制器

根据伯德图可知，可通过增加超前校正环节来满足设计要求，设该超前校

正环节为

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1}$$

则校正后系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \times \frac{0.02725}{0.0102125s^2 - 0.26705}$$

### 3.2. 计算增益

静态位置误差系数

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} G(s)G_c(s) = \lim_{s \rightarrow 0} K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \times \frac{0.02725}{0.0102125s^2 - 0.26705} = 10$$

即

$$\frac{K_c \alpha \times 0.02725}{0.26705} = 10$$

$$K_c \alpha = 98$$

### 3.3. 根据相位裕量计算 $\alpha$

设计目标为相位裕量 $\gamma = 50^\circ$ ，考虑到引入超前校正环节会使得幅值穿越频率增大，为使校正后系统相位裕量达到设计目标，取超前校正环节提供的最大超前角为 $60^\circ$ ，于是有：

$$\phi_m = \arcsin \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} = 60^\circ$$

求得 $\alpha = 0.0718$ 。进而可得

$$K_c = 98/\alpha = 1364.9025$$

### 3.4. 计算零极点

根据控制工程基础所学，超前网络所提供的最大超前角在其频率特性上位于几何中点，其对应的角频率为

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{\alpha}T}$$

在 $\omega_m$ 处，由于串联超前校正环节的影响，幅值变化为

$$\left| \frac{j\omega + \frac{1}{T}}{j\omega + \frac{1}{\alpha T}} \right|_{\omega=\omega_m} = \left| \frac{j + \sqrt{\alpha}}{j\alpha + \sqrt{\alpha}} \right| = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{0.0718}} = 3.732 \text{ dB}$$

令 $|K_c \alpha G(j\omega)| = -3.732 \text{ dB}$ ，可求得 $\omega = 19.3829 \text{ rad/s}$ ，以此作为校正之后的幅值穿越频率，相当于 $\omega_m = 1/(\sqrt{\alpha}T)$ ，则有

$$\frac{1}{T} = \sqrt{\alpha} \omega_m = 5.1937$$

$$\frac{1}{\alpha T} = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}} = 72.3363$$

### 3.5. 确定校正装置.

由前面计算可得

$$G_c(s) = K_c \alpha \frac{Ts + 1}{\alpha Ts + 1} = K_c \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} = 1364.9025 \frac{s + 5.1937}{s + 72.3363}$$

校正之后系统的开环传递函数为

$$G(s)G_c(s) = 1364.9025 \times \frac{s + 5.1937}{s + 72.3363} \times \frac{0.02725}{0.0102125s^2 - 0.26705}$$

根据设计结果，在MATLAB中编程验证，得校正后的系统伯德图和奈氏图如图 5-4 所示。

```

1 - num = 98*[0.02725];
2 - den = [0.0102125 0 -0.26705];
3
4 - z = roots(num);
5 - p = roots(den);
6
7 - za = [z; -5.1937];
8 - pa = [p; -72.3363];
9 - k = 1364.9025;
10
11 - sys = zpk(za, pa, k);
12
13 - figure
14 - subplot(2, 1, 1)
15 - bode(sys);          grid;
16 - subplot(2, 1, 2)
17 - nyquist(sys);      grid;

```

图 5-3 编程绘制系统伯德图和奈氏图

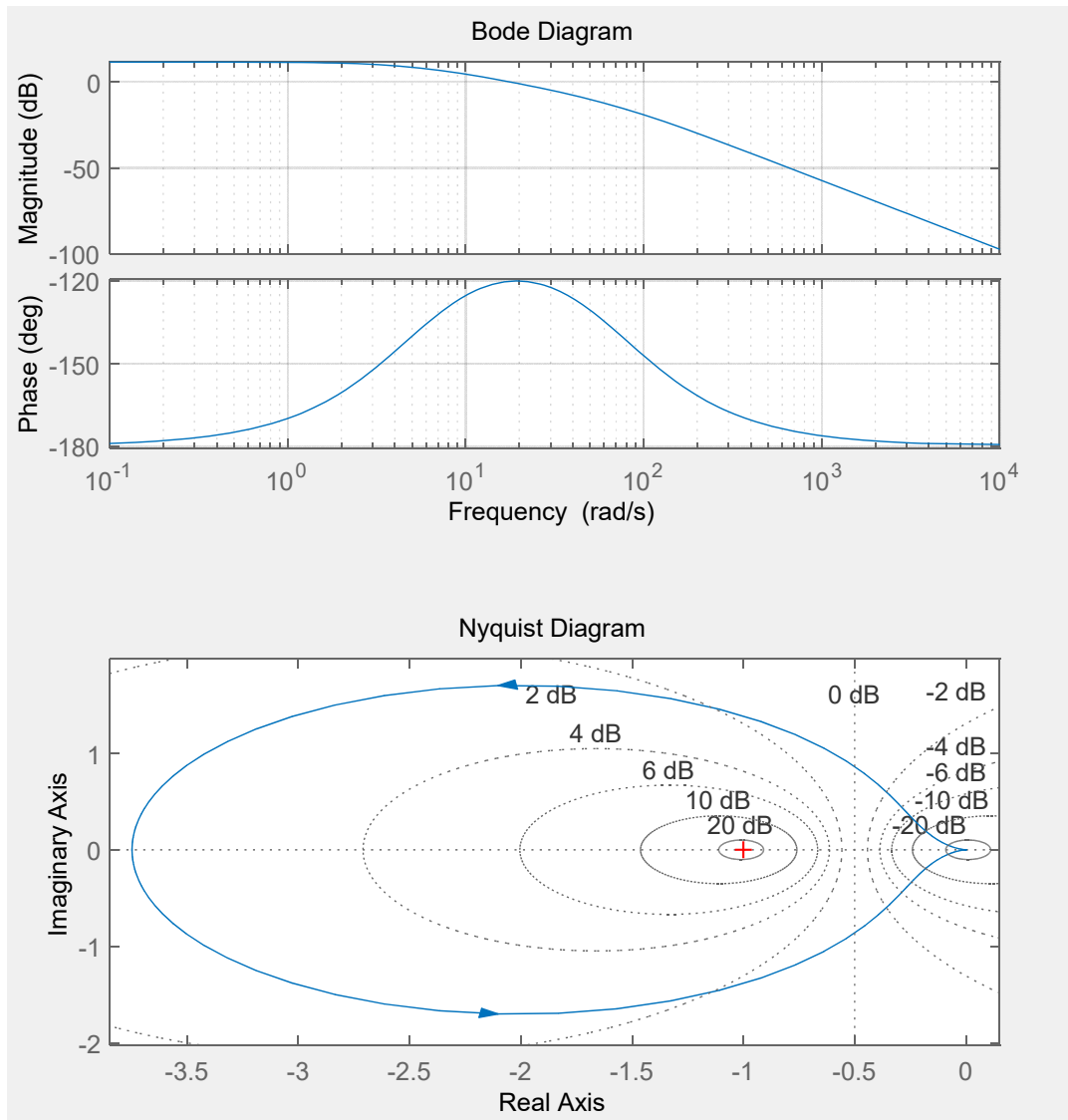


图 5-4 校正后系统伯德图和奈氏图

从校正后的伯德图和奈氏图不难看出，系统是稳定的，且有 $60^\circ$ 的相位裕量，初步满足了设计初衷。

## 六、线性二次最优控制 LQR

### 1. LQR 控制器原理

LQR (linear quadratic regulator)即线性二次型调节器，其对象是现代控制理论中以状态空间形式给出的线性系统，而目标函数为对象状态和控制输入的二次型函数。LQR 最优设计是指设计出的状态反馈控制器  $K$  要使二次型目标函数  $J$  取最小值，而  $K$  由权矩阵  $Q$  与  $R$  唯一决定，故此  $Q$ 、 $R$  的选择尤为重要。LQR 理论是现代控制理论中发展最早也最为成熟的一种状态空间设计法。特别可贵的是，LQR 可得到状态线性反馈的最优控制规律，易于构成闭环最优控制。而且 MATLAB 的应用为 LQR 理论仿真提供了条件，更为我们

实现稳、准、快的控制目标提供了方便。

LQR 控制器是应用线性二次型最优控制原理设计的控制器。它的任务在于,当系统状态由于任何原因偏离了平衡状态时,能在不消耗过多能量的情况下,保持系统状态各分量仍接近于平衡状态。线性二次型最优控制研究的系统是线性的或可线性化的,并且性能指标是状态变量和控制变量的二次型函数的积分。它的解很容易获得,并且可以达到非常好的控制效果,因此在工程上有广泛的应用。下面介绍具有普遍性的无限时间状态调节器的设计。

设线性系统的空间状态描述为:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases} \quad (6-1)$$

最优控制的思想是找到一反馈控制律  $\mathbf{u}$ , 在时间区间内  $[t_0, \infty]$ , 将系统从非平衡状态转移到零点(平衡状态)附近, 并使给定的性能指标函数:

$$J = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt \quad (6-2)$$

取到极值。

其中控制向量  $\mathbf{u}(t)$  不受限制,  $\mathbf{Q}$  是半正定常数矩阵,  $\mathbf{R}$  是正定常数矩阵。 $\mathbf{Q}$  和  $\mathbf{R}$  分别是对状态变量和输入量的加权阵, 确定了误差和能量损耗的相对重要性。

根据极小值原理, 引入  $n$  维协态矢量  $\lambda(t)$ , 构造哈密尔顿函数

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \lambda) = \frac{1}{2} [\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}] + \lambda^T [\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}] \quad (6-3)$$

最优控制应使  $H$  取极值。因  $\mathbf{u}$  不受限制, 则有下列式成立

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R}\mathbf{u} + \mathbf{B}^T \lambda = 0 \quad (6-4)$$

解得:

$$\hat{\mathbf{u}} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \lambda \quad (6-5)$$

由于

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} = \mathbf{R} \quad (6-6)$$

正定, 故上式即是系统的最优控制律。

为了使由  $\hat{\mathbf{u}}$  状态变量构造, 设  $\lambda = \mathbf{P}\mathbf{x}$ 。  $\mathbf{P}$  为  $n \times n$  维实对称正定矩阵且满足下面的黎卡提矩阵代数方程  $-\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P} - \mathbf{Q}_1 = 0$ 。

则最优控制  $\hat{\mathbf{u}} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \lambda = -\mathbf{K}\mathbf{x}$ ; 系统最优轨线为  $\dot{\mathbf{x}}(t) = [\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K}]\mathbf{x}(t)$ 。

在 *MATLAB* 中, 利用命令 *lqr* 即可求得反馈矩阵  $\mathbf{K}$  的值

$$\mathbf{K} = \text{lqr}(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{Q}, \mathbf{R})$$

改变矩阵  $\mathbf{Q}$  的值, 可以得到不同的响应效果,  $\mathbf{Q}$  值越大, 系统抵抗干扰的能力越强, 调整时间越短, 但  $\mathbf{Q}$  不能过大。

## 2. 系统能控性和能观性分析

能控性是控制器设计的前提，故在设计 LQR 控制器之前应先进行系统的能控性分析。

对于系统

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{u} \end{cases}$$

状态完全能控的充要条件是其能控性矩阵

$$\mathbf{Q}_k = [\mathbf{B} : \mathbf{A}\mathbf{B} : \dots : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}]$$

满秩，即

$$\text{rank}[\mathbf{B} : \mathbf{A}\mathbf{B} : \dots : \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}] = n \quad (6-7)$$

状态完全能观测的充要条件是其能观测性矩阵

$$\mathbf{Q}_g = [\mathbf{C}^T : \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T : \dots : (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T]$$

满秩，即

$$\mathbf{Q}_g^T = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A} \\ \vdots \\ \mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1} \end{bmatrix} \quad (6-8)$$

满秩。

前已求得以小车加速度作为输入的系统状态空间方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\phi} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u'$$

$$y = \begin{bmatrix} x \\ \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \phi \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u'$$

故得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

在MATLAB中利用`ctrb`命令和`obsv`命令计算系统的能控性矩阵和可观性矩阵。代码及结果如图 6-1

```

1 - A = [ 0 1 0 0;
2       0 0 0 0;
3       0 0 0 1;
4       0 0 29.4 0 ];
5 - B = [ 0 1 0 3 ]';
6 - C = [ 1 0 0 0;
7       0 0 1 0 ];
8 - D = [ 0 0 ]';
9 - Co = ctrb(A,B);
10 - rank(Co);
11 - Ob = obsv(A,C);
12 - rank(Ob);

```

Co =

0	1.0000	0	0
1.0000	0	0	0
0	3.0000	0	88.2000
3.0000	0	88.2000	0

>> rank(Co)

ans =

4

Ob =

1.0000	0	0	0
0	0	1.0000	0
0	1.0000	0	0
0	0	0	1.0000
0	0	0	0
0	0	29.4000	0
0	0	0	0
0	0	0	29.4000

>> rank(Ob)

ans =

4

图 6-1 编程验证系统的能控能观性

由以上结果不难看出，系统的能控性矩阵和能观测性矩阵均是满秩矩阵，故系统状态完全能控，且四个状态量都是可观测的。

### 3. LQR 控制器设计

四个状态变量 $x$ ， $\dot{x}$ ， $\phi$ ， $\dot{\phi}$ 分别表示小车位移，小车速度，摆杆角度和摆杆角速度。利用MATLAB中的`lqr`函数可以找出最优控制器对应的 $K$ 。

$lqr$ 函数允许选择两个参数 $R$ 和 $Q$ ，用于平衡输入量和状态量的权重。假定 $R = 1$ ,  $Q = C' * C$ ，其中， $Q_{11}$ 代表小车位置权重，而 $Q_{33}$ 表示摆杆角度的权重。

将LQR控制器加入到系统中，利用MATLAB中 $lsim$ 函数进行仿真，程序如图 6-2

```

1 - A = [ 0 1 0 0; 0 0 0 0; 0 0 0 1; 0 0 29.4 0 ];
2 - B = [ 0 1 0 3 ]';
3 - C = [ 1 0 0 0; 0 0 1 0 ];
4 - D = [ 0 0 ]';
5 - Q11 = 1000; Q33 = 100; % 为Q阵赋初值
6 - Q = [Q11 0 0 0; 0 0 0 0; 0 0 Q33 0; 0 0 0 0 ];
7 - R = 1;
8 - K = lqr(A,B,Q,R) ; % lqr控制器的反馈增益矩阵
9 - Ac = (A-B*K); % 定义新矩阵
10 - T = 0:0.001:5; % 确定T值
11 - U = 0.2*ones(size(T)); % 确定U值
12 - figure();
13 - [Y,X] = lsim(Ac,B,C,D,U,T); % 得到连续时间内作用于系统的零状态响应
14 - plot(T,X(:,1),'-g','LineWidth',1);hold on; % 绘制阶跃响应曲线
15 - plot(T,X(:,2),'-b','LineWidth',1);hold on;
16 - plot(T,X(:,3),'-','LineWidth',1);hold on;
17 - plot(T,X(:,4),'-r','LineWidth',1);
18 - title('一阶倒立摆阶跃响应曲线'); grid;
19 - legend('小车位置','小车速度','摆杆角位移','摆杆角速度') % 图例

```

图 6-2 LQR控制器仿真求解

取 $Q_{11} = 1$ ;  $Q_{33} = 2$ ; 可求出

$$K = [-1.0000, -1.7880, 25.4652, 4.6892]$$

得到阶跃响应曲线如图 6-3。

从图中不难看出，响应的超调量比较小，但调整时间偏长，小车的位置并未跟踪输入，而是正向运动很小位移之后，沿反方向移动。

为此调整权重，取 $Q_{11} = 4000$ ;  $Q_{33} = 100$ ; 可由程序求出

$$K = [-63.2456, -34.7901, 103.5731, 19.0125]$$

得到阶跃响应曲线和此时的脉冲响应曲线如图 6-4 和 6-5。

从图中可以看出，此时系统的超调量更小，调整时间变短，系统抵抗干扰的能力显著增强。



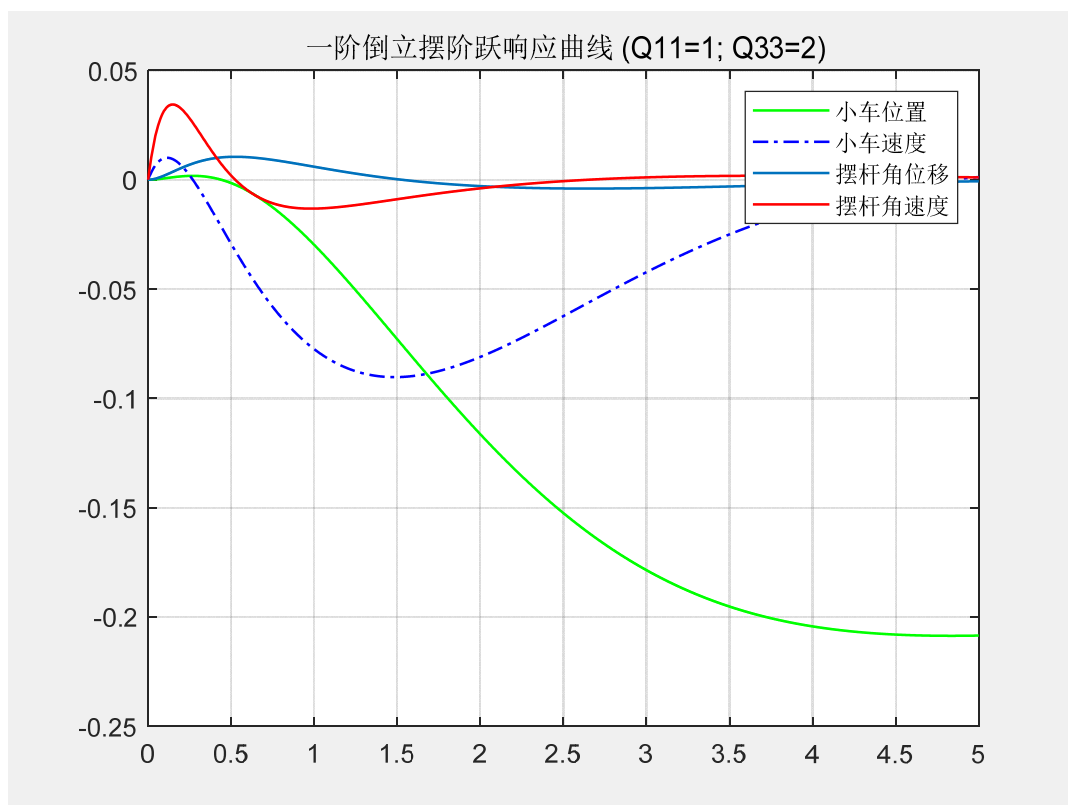


图 6-3  $Q_{11} = 1$ ;  $Q_{33} = 2$ 阶跃响应曲线

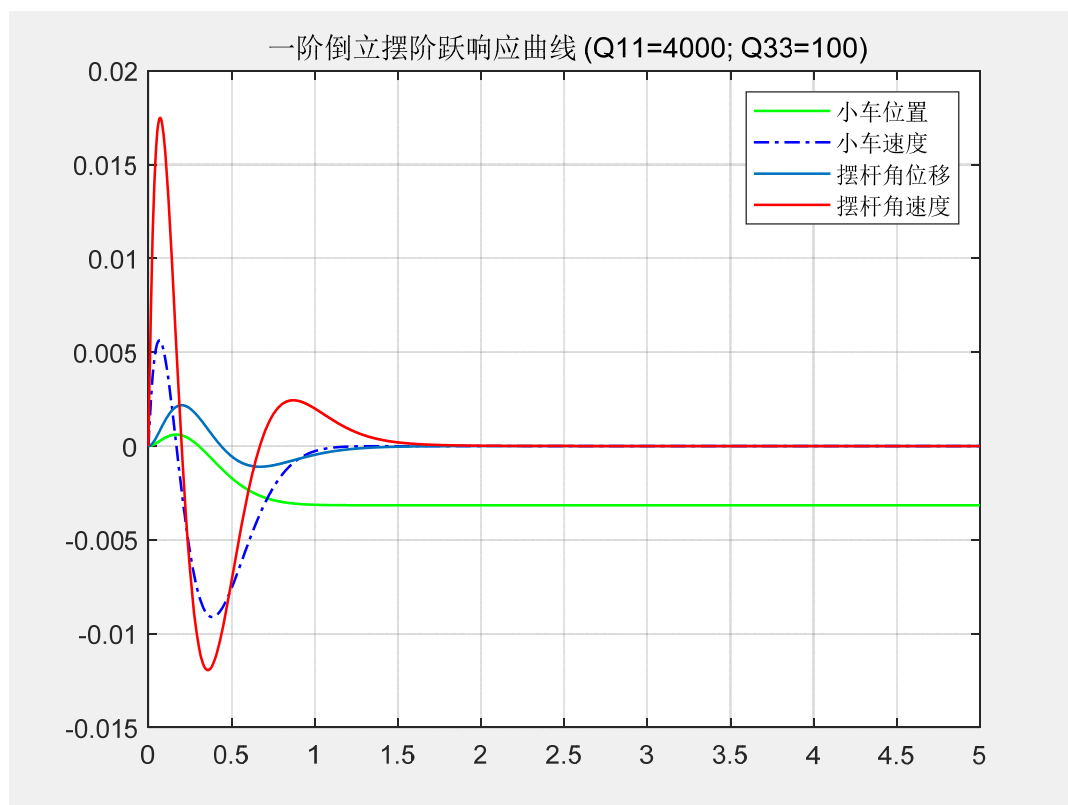


图 6-4  $Q_{11} = 4000$ ;  $Q_{33} = 100$ 阶跃响应曲线

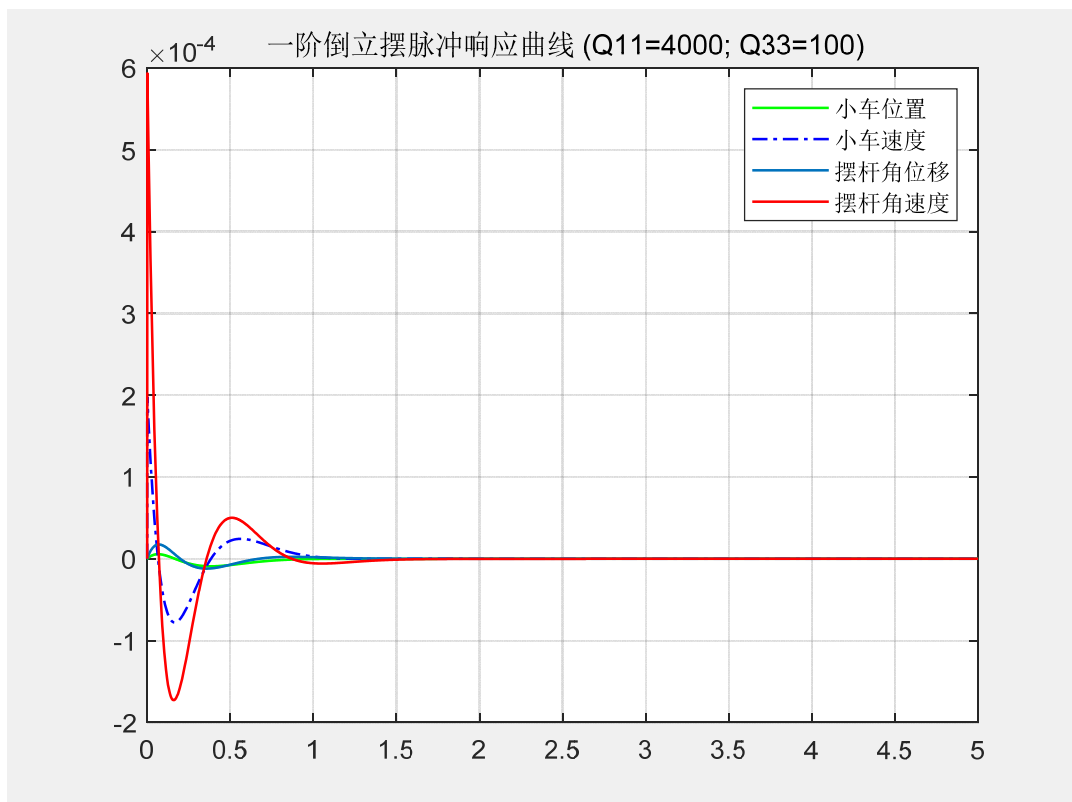


图 6-5  $Q_{11} = 4000$ ;  $Q_{33} = 100$  阶跃响应曲线

#### 4. LQR 控制器设计结论

最终取反馈增益矩阵为

$$K = [-63.2456, -34.7901, 103.5731, 19.0125]$$

此时系统具有良好的动态性能，抗干扰能力较强。

### 七、Simulink 物理系统建模与仿真

现对前面设计的PID控制器和LQR控制器进行Simulink物理系统建模，验证系统动态性能。

#### 1. PID 控制器部分

在Simulink里面搭建系统模型，如图 7-1 所示，其脉冲响应情况已导出为视频文件 InvertedPendulmPID.mp4。

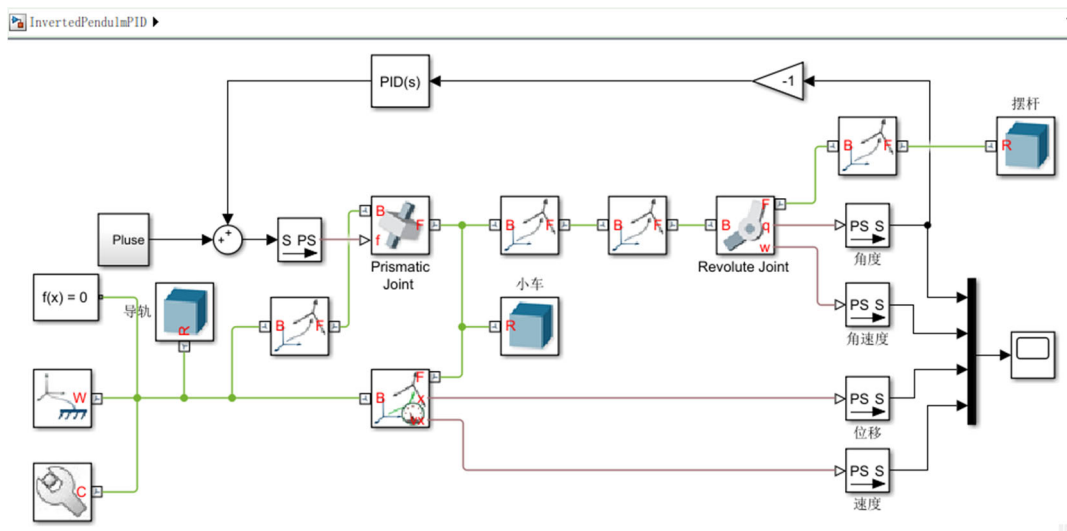


图 7-1 PID控制器系统物理模型

## 2. LQR控制器部分

在Simulink里面搭建系统模型，如图 7-2 所示，此时系统脉冲响应情况也另导出为视频文件 InvertedPendulmLQR.mp4。

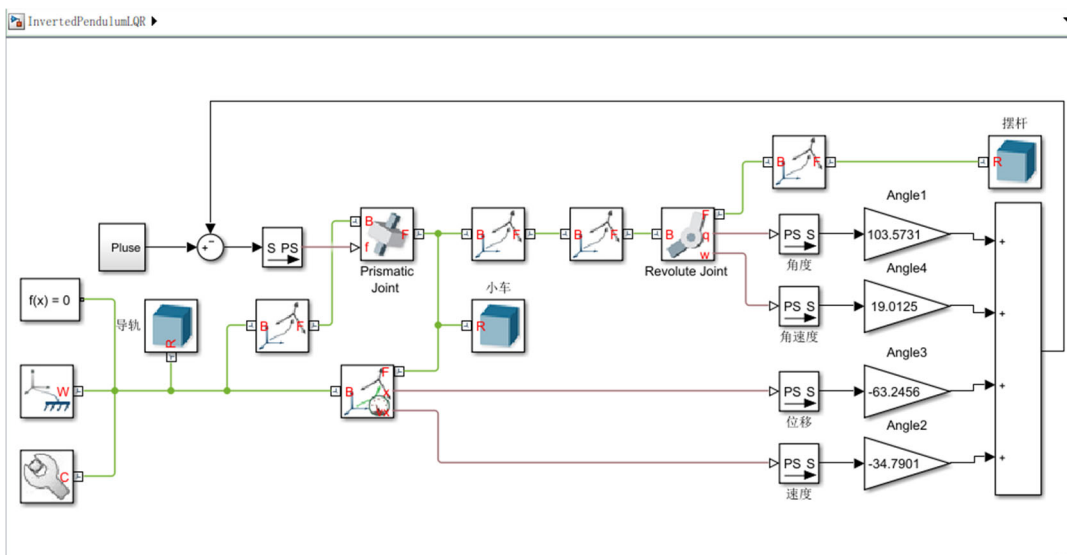


图 7-2 LQR控制器系统物理模型

## 八、设计经验总结

在 PID 参数选择过程中，要先对三个参数各自有什么意义有一定程度的理解，然后通过不断调整三个参数来实现所需要实现的控制系统性能，试凑过程较为繁复，需要不断尝试，耐心寻找最为适宜的控制器参数。但也要意识到

参数选择绝不是盲目地试选，而是有一定方法与技巧。

*LQR* 控制器的设计过程中，权重矩阵也是要通过多次尝试，才能找到较为适宜的值。

此次设计过程中尝试了多种控制方法，这些方法各有特点，在控制系统设计的时候要灵活选用，方能较好地达到控制目标。

## 九、心得与体会

通过此次课程设计，我对上学期所学的控制工程基础课程内容有了更进一步的理解。通过系统建模、控制器设计、建模仿真等步骤，我对控制工程基础所学的知识有了初成体系化的理解，同时也对系统的一些性能参数有了更为形象的认识。

借着此次课设的机会，我还学到了上学期课内没有学到的知识，即现代控制理论方面的基础知识。通过建立系统的状态空间方程以及*LQR*控制器的设计，我对多输入多输出系统有了初步的认识，也算是颇有收获。

贯穿整个课程设计的，是编程软件 *MATLAB* 的使用，起初由于我对 *MATLAB* 不太熟悉，编程起来略有难度，但随着学习的深入，逐渐可以利用软件解决一些问题，还有 *Simulink* 工具箱的使用，这是一个图形化编程软件，功能强大，掌握好它的使用必将对后续的学习有极大的帮助。

最后要感谢老师全程的跟进与指导，没有老师的帮助，我很难在这么有限的时间内完成课程设计。

## 参考文献

[1] 董景新, 赵长德, 郭美凤, 陈志勇, 李冬梅. 控制工程基础(第 3 版), 北京: 清华大学出版社, 2009.6

[2] 于长官主编. 现代控制理论. 第 2 版. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 1997

[3] 于长官等. 现代控制理论及其应用. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2005.1

[4] 韩帮华. PID 控制器参数整定方法及应用研究[D]. 青岛科技大学, 2009.

[5] 王正林等. *Matlab Simulink* 与控制系统仿真(第 2 版), 北京: 电子工业出版社, 2008.07

[6] 唐欣, 彭康. 线性系统稳定性的判断[J]. 中国科技信息, 2013(11):93.

[7] 严雪莉, 江汉红. 单级倒立摆控制方法的仿真对比研究[J]. 测控技术, 2005(07):37-39.

[8] 刘璟, 梁昔明. *LQR* 控制与 *PID* 控制在单级倒立摆中的对比研究[J]. 自动化技术与应用, 2007(01):13-14+17.