《机械振动》课程大作业（三）

姓名：邵良靖

学号：1854123

学院：机械与能源工程学院

专业：机械设计制造及其自动化

指导教师：朱传敏

2020 年 1 月

目录

1 系统运动方程

1.1 模型及相关参数的确定

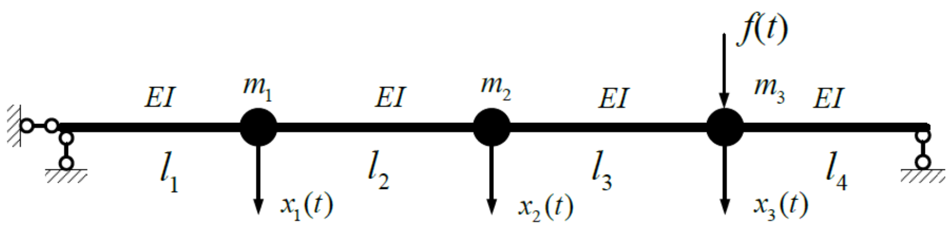


图 1 系统模型示意图

模型如图 1.1 所示，相关参数如表 1.1 所示，其中：

$$N_1 = mod(1854123{,}5) = 3$$
$$N_2 = mod(1854123{,}7) = 5$$
$$N_3 = mod(1854123{,}9) = 6$$
$$N_4 = mod(1854123{,}11) = 7$$

参数	数值
m_1	$3 + N_1 = 6kg$
m_2	$4 + N_2 = 9kg$
m_3	$5 + N_3 = 11kg$
l_1	$1 + \frac{N_2}{4} = 2.25m$
l_2	$1 + \frac{N_3}{4} = 2.5m$
l_3	$1 + \frac{N_1}{4} = 1.75m$
l_4	$1 + \frac{N_4}{4} = 2.75m$
EI	$30000N/m^2$
x_{10}	$0.02m$
$\dot{x}_{20}$	$0.3m/s$

表 1.1 各参数数值表

1.2 系统运动方程的推导

如图 1 所示系统为一简支梁，据材料力学相关知识可知，当如图 2 简支梁收到集中力 P 作用时，其上各位置的挠度由下列公式确定：

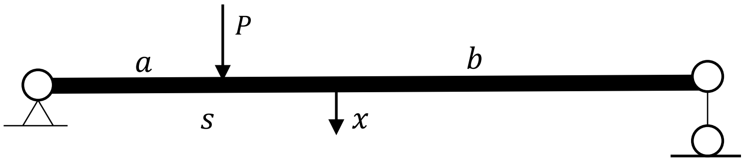


图 2

$$x=\begin{cases}\dfrac{Pbx}{6EIl}(l^2-s^2-b^2) & ,0\le s\le a\\ \dfrac{Pb}{6EIl}\left[(l^2-b^2)s-s^3+\dfrac{l}{b}(x-a)^3\right] & ,a\le s\le l\end{cases}$$

其中$a=l-b, l=l_1+l_2+l_3+l_4=9.25m$

于是，假定在m_1上作用单位力，即$P=1$，$b=l_2+l_3+l_4=7m$, 可得：

$$x_1=a_{11}=2.9797\times10^{-4}m$$
$$x_2=a_{21}=3.6639\times10^{-4}m$$
$$x_3=a_{31}=2.7105\times10^{-4}m$$

于是，假定在m_2上作用单位力，即$P=1$，$b=l_3+l_4=4.5m$，可得：

$$x_1=a_{12}=3.6639\times10^{-4}m$$
$$x_2=a_{22}=5.4882\times10^{-4}m$$
$$x_3=a_{23}=4.3493\times10^{-4}m$$

于是，假定在m_1上作用单位力，即$P=1$，$b=l_4=2.75m$，可得：

$$x_1=a_{13}=2.7105\times10^{-4}m$$
$$x_2=a_{23}=4.3493\times10^{-4}m$$
$$x_3=a_{33}=3.8380\times10^{-4}m$$

由上所述可得系统得柔度矩阵：

$$a=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{23}&a_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2.9797&3.6639&2.7105\\3.6639&5.4882&4.3493\\2.7105&4.3493&3.8380\end{pmatrix}\times10^{-4}$$

系统得刚度矩阵为：

$$K=a^{-1}=\begin{pmatrix}2.2801&-2.4134&1.1246\\-2.4134&4.3415&-3.2154\\1.1246&-3.2154&3.1101\end{pmatrix}\times10^{4}$$

以上结果由附录 MATLAB 代码 PART 1 算出，如图 3 所示

```
命令行窗口
>> solution1854123
>> a

a =

   1.0e-03 *

    0.2980    0.3664    0.2711
    0.3664    0.5488    0.4349
    0.2711    0.4349    0.3838

>> K

K =

   1.0e+04 *

    2.2801   -2.4134    1.1246
   -2.4134    4.3415   -3.2154
    1.1246   -3.2154    3.1101
```

图 3

综上所述，可得系统无阻尼运动方程为：

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{pmatrix} + 10^4 \times \begin{pmatrix} 2.2801 & -2.4134 & 1.1246 \\ -2.4134 & 4.3415 & -3.2154 \\ 1.1246 & -3.2154 & 3.1101 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ f_3(t) \end{pmatrix}$$

2 系统固有频率，振型矩阵及振型图

系统固有频率由以下特征方程确定：

$$|K - \omega_n^2 M| = 0$$

振型矩阵u满足下面方程：

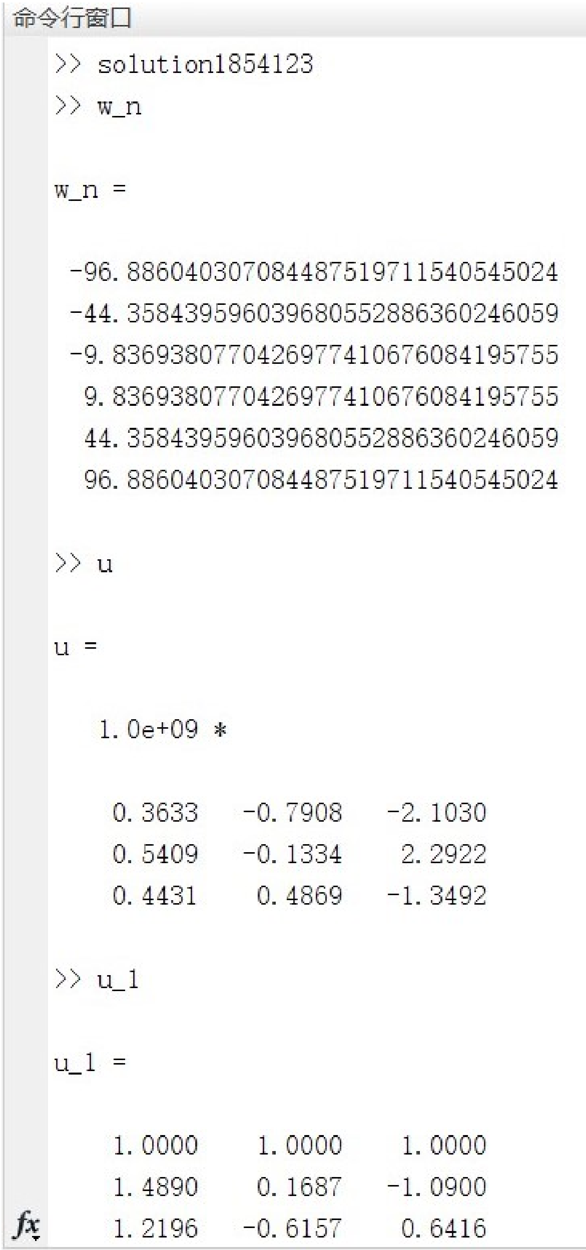
$$(K - \omega_n^2 M)u = 0$$

由以上两个方程可得：

$$U_r = adj(K - \omega_{nr}^2 M)$$

对于每个固有频率ω_{nr}，特征向量u_r取U_r中绝对值最大的一列，且U_r中各列元素对应成比例，因此只需比较某一行的绝对值。

通过以上分析，通过**附录 MATLAB 代码** PART 2 计算可得图 4：



```
命令行窗口
>> solution1854123
>> w_n

w_n =

 -96.88604030708448751971154054502
 -44.35843959603968055288636024605
 -9.83693807704269774106760841957
  9.83693807704269774106760841957
  44.35843959603968055288636024605
  96.88604030708448751971154054502

>> u

u =

   1.0e+09 *

    0.3633   -0.7908   -2.1030
    0.5409   -0.1334    2.2922
    0.4431    0.4869   -1.3492

>> u_1

u_1 =

    1.0000    1.0000    1.0000
    1.4890    0.1687   -1.0900
    1.2196   -0.6157    0.6416
```

图 4

系统固有频率：

$$\omega_{n1} = 9.837\ rad/s$$
$$\omega_{n2} = 44.358\ rad/s$$
$$\omega_{n3} = 96.886\ rad/s$$

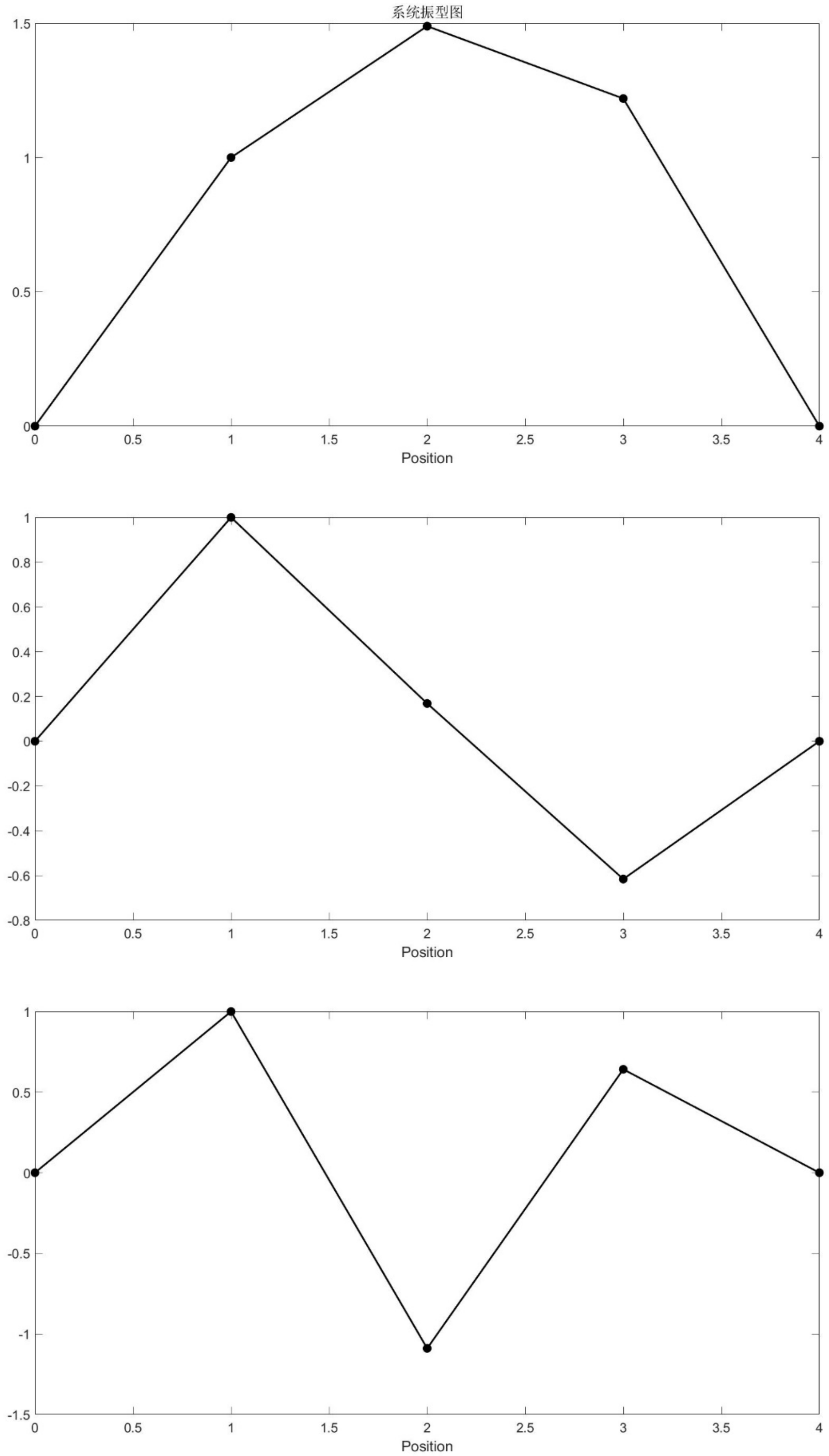
系统振型矩阵：

$$u = 10^8 \times \begin{pmatrix} 3.633 & -7.908 & -21.030 \\ 5.409 & -1.334 & 22.922 \\ 4.431 & 4.869 & -13.492 \end{pmatrix}$$

归一化后系统模态矩阵为

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1.4890 & 0.1687 & -1.0900 \\ 1.2196 & -0.6157 & 0.6416 \end{pmatrix}$$

振型图如图 5 所示：



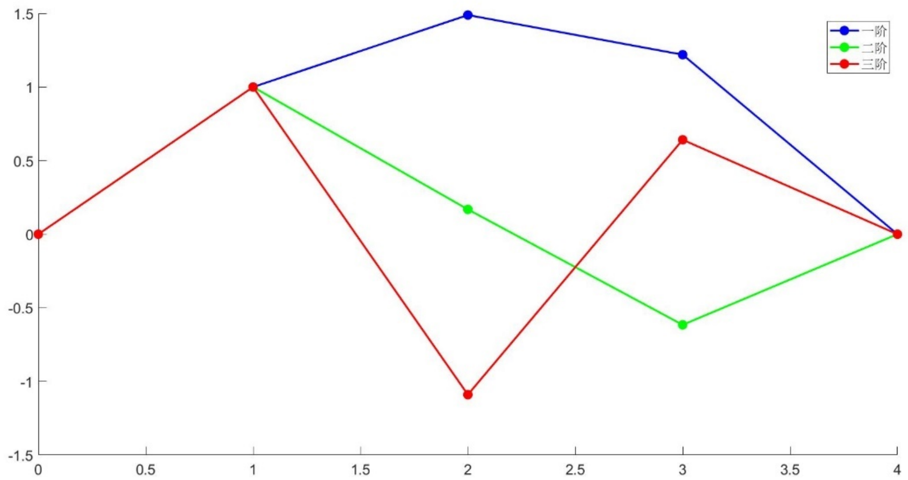


图 5

正则振型向量可以表示为

$$u_{Nr}=\frac{1}{\sqrt{M_{pr}}}u_r$$

其中，

$$M_{pr}=\sum_{i=1}^{3}M_{ii}u_{ir}^2$$

由此，通过附录 MATLAB 代码 PART 2 计算可得该系统正则振型矩阵，如图 6 所示：

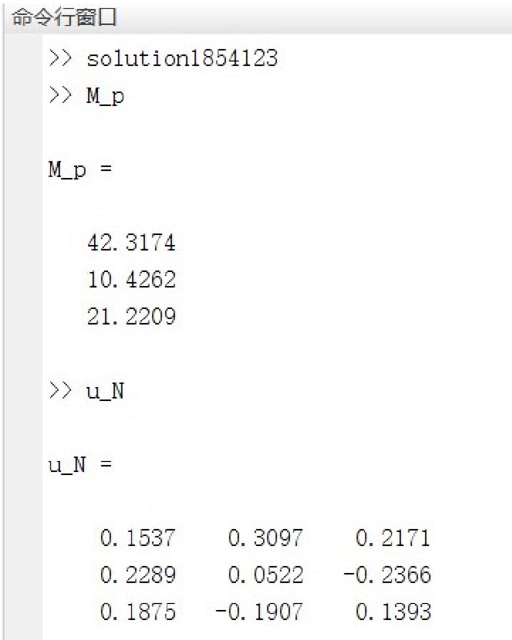


图 6

$$u_N=\begin{pmatrix}0.1537 & 0.3097 & 0.2171\\ 0.2289 & 0.0522 & -0.2366\\ 0.1875 & -0.1907 & 0.1393\end{pmatrix}$$

3 有阻尼情况关于正则坐标的系统运动方程

对于有阻尼多自由度系统，强迫振动运动微分方程可表示为：

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = f(t)$$

依题意该系统阻尼比：

$$\zeta_1 = 0.05$$
$$\zeta_2 = 0.03$$
$$\zeta_3 = 0.02$$

因此可将该简支梁横向振动系统看作为一弱阻尼系统，且符合模态阻尼矩阵要求，即对于上述正则矩阵有：

$$C_N = u_N^T C u_N$$

进行如下正则坐标变换：

$$x = u_N x_N$$

代入原运动微分方程则得：

$$M u_N \ddot{x}_N + C u_N \dot{x}_N + K u_N x_N = f(t)$$

两边同时左乘u_N^T得

$$\ddot{x}_N + C_N \dot{x}_N + \Lambda x_N = u_N^T f(t)$$
$$\Lambda = u_N^T K u_N$$

上式可表示为

$$\ddot{x}_{Nr} + 2\zeta_r \omega_{nr} \dot{x}_{Nr} + \omega_{nr}^2 x_{Nr} = u_{Nr}^T f(t)$$

由此编写并运行 MATLAB 代码 PART 3 可得图 7

```
命令行窗口
>> solution1854123
>> C_N

C_N =

[ 0.984,     0,     0]
[     0,  2.66,     0]
[     0,     0,  3.88]

>> K_N

K_N =

   1.0e+03 *

    0.0968   -0.0000    0.0000
   -0.0000    1.9677   -0.0000
    0.0000   -0.0000    9.3869
```

图 7

而对于初始条件，由$x = u_N x_N$可得

$$x_0 = u_N x_{N0}$$
$$\dot{x}_0 = u_N \dot{x}_{N0}$$

编写并运行 MATLAB 代码 PART 3 可得图 8：

```
>> x_N0

x_N0 =

    0.0184
    0.0372
    0.0260

>> v_N0

v_N0 =

    0.6180
    0.1410
   -0.6389
```

图 8

综上所述，可得考虑阻尼时关于正则坐标的系统运动方程（包含初始条件）：

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}_{N1}\\ \ddot{x}_{N2}\\ \ddot{x}_{N3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.984 & 0 & 0\\ 0 & 2.66 & 0\\ 0 & 0 & 3.88\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_{N1}\\ \dot{x}_{N2}\\ \dot{x}_{N3}\end{pmatrix}+10^8\times\begin{pmatrix}0.0968 & 0 & 0\\ 0 & 1.9677 & 0\\ 0 & 0 & 9.3869\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{N1}\\ x_{N2}\\ x_{N3}\end{pmatrix}=u_N^T\begin{pmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\\ f_3(t)\end{pmatrix}$$

初始条件：

$$x_{N0}=\begin{pmatrix}0.0184\\ 0.0372\\ 0.0260\end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_{N0}=\begin{pmatrix}0.6180\\ 0.1410\\ -0.6389\end{pmatrix}$$

4 有阻尼系统自由振动解

由上所述可得有阻尼系统自由振动时关于正则坐标的系统运动方程：

$$\begin{pmatrix}\ddot{x}_{N1}\\ \ddot{x}_{N2}\\ \ddot{x}_{N3}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0.984 & 0 & 0\\ 0 & 2.66 & 0\\ 0 & 0 & 3.88\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot{x}_{N1}\\ \dot{x}_{N2}\\ \dot{x}_{N3}\end{pmatrix}+10^8\times\begin{pmatrix}0.0968 & 0 & 0\\ 0 & 1.9677 & 0\\ 0 & 0 & 9.3869\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_{N1}\\ x_{N2}\\ x_{N3}\end{pmatrix}=\mathbf{0}$$

初始条件：

$$x_{N0}=\begin{pmatrix}0.0184\\ 0.0372\\ 0.0260\end{pmatrix}$$

$$\dot{x}_{N0}=\begin{pmatrix}0.6180\\ 0.1410\\ -0.6389\end{pmatrix}$$

由此可得以下微分方程组：

$$
\begin{cases}
\ddot{x}_{N1} + 0.984\dot{x}_{N1} + 0.0968 \times 10^{8} x_{N1} = 0 \\
\ddot{x}_{N2} + 2.66\dot{x}_{N2} + 1.9677 \times 10^{8} x_{N2} = 0 \\
\ddot{x}_{N3} + 3.88\dot{x}_{N3} + 9.3869 \times 10^{8} x_{N3} = 0 \\
x_{N10} = 0.0184 \\
x_{N20} = 0.0372 \\
x_{N30} = 0.0260 \\
\dot{x}_{N10} = 0.6180 \\
\dot{x}_{N20} = 0.1410 \\
\dot{x}_{N30} = -0.6389 \\
\ddot{x}_{N0} = 0 \\
X_N(t) = \begin{pmatrix} x_{N1}(t) \\ x_{N2}(t) \\ x_{N3}(t) \end{pmatrix} \\
X(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = u_N X_N(t)
\end{cases}
$$

利用 MATLAB **代码** PART 4 解此方程组可得图 9：

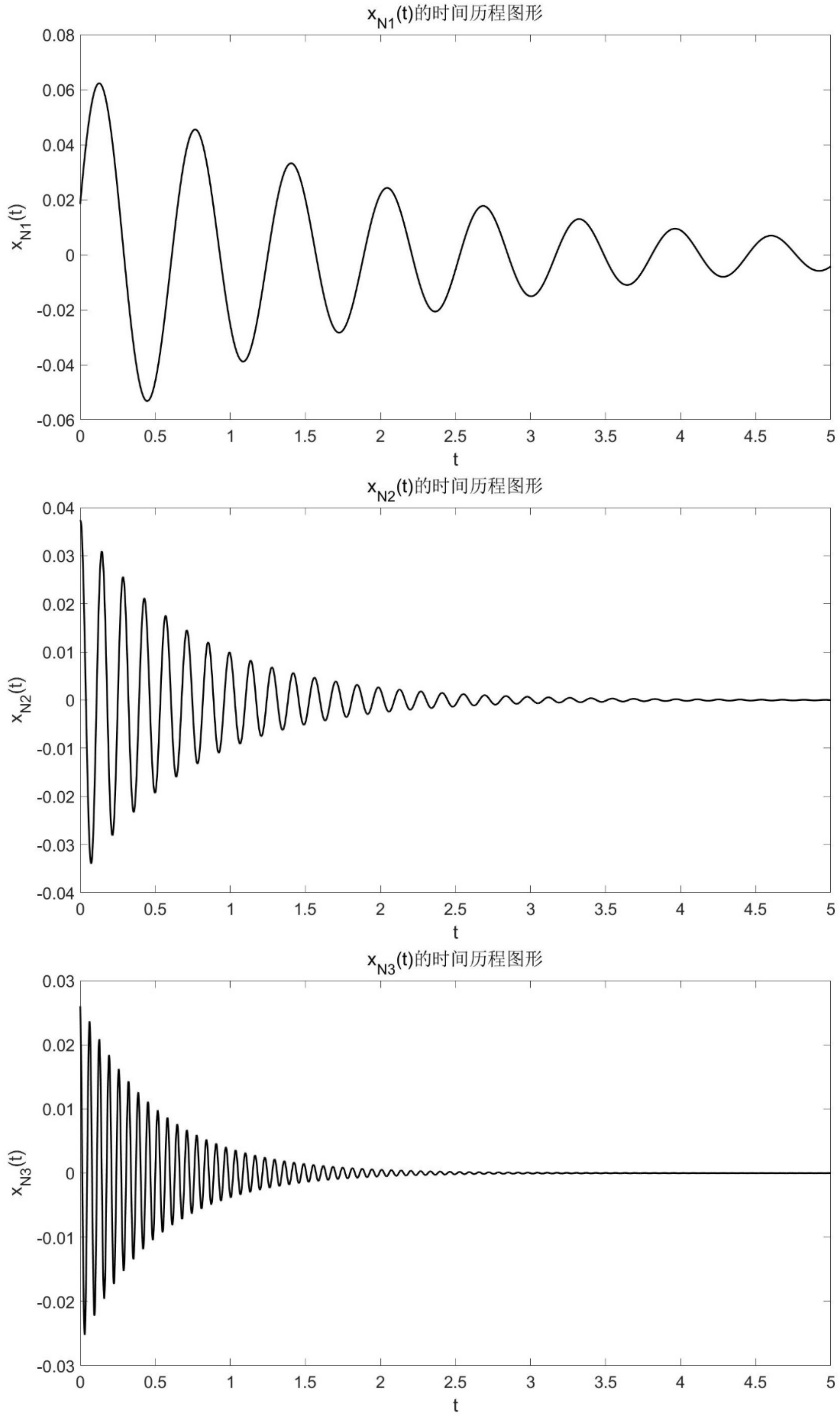
```
命令行窗口
>> solution1854123
>> x_N

x_N =

 0.0184*exp(-0.492*t)*cos(9.83*t) + 0.0638*exp(-0.492*t)*sin(9.83*t)
   0.0372*exp(-1.33*t)*cos(44.3*t) + 0.0043*exp(-1.33*t)*sin(44.3*t)
   0.026*exp(-1.94*t)*cos(96.9*t) - 0.00608*exp(-1.94*t)*sin(96.9*t)

>> x

x =

 0.012*exp(-1.3*t)*cos(44.0*t) + 1.3e-3*exp(-1.3*t)*sin(44.0*t) + 2.8e-3*exp(-0.49*t)*cos(9
 1.9e-3*exp(-1.3*t)*cos(44.0*t) + 2.2e-4*exp(-1.3*t)*sin(44.0*t) + 4.2e-3*exp(-0.49*t)*cos(
 3.4e-3*exp(-0.49*t)*cos(9.8*t) - 8.2e-4*exp(-1.3*t)*sin(44.0*t) - 7.1e-3*exp(-1.3*t)*cos(4
```

图 9

则有阻尼系统在给定初始条件下自由振动解为：

$$
\begin{cases}
x_1(t) = \mathbf{0.012}e^{-1.3t}\cos(44t) + \mathbf{0.0013}e^{-1.3t}\sin(44t) \\
+\mathbf{0.0028}e^{-0.49t}\cos(9.8t) + \mathbf{0.0098}e^{-0.49t}\sin(9.8t) \\
+\mathbf{0.0056}e^{-1.9t}\cos(97t) - \mathbf{0.0013}e^{-1.9t}\sin(97t) \\
x_2(t) = \mathbf{0.0019}e^{-1.3t}\cos(44t) + \mathbf{0.00022}e^{-1.3t}\sin(44t) \\
+\mathbf{0.0042}e^{-0.49t}\cos(9.8t) + \mathbf{0.015}e^{-0.49t}\sin(9.8t) \\
-\mathbf{0.0062}e^{-1.9t}\cos(97t) + \mathbf{0.0014}e^{-1.9t}\sin(97t) \\
x_3(t) = \mathbf{0.0034}e^{-1.3t}\cos(44t) - \mathbf{0.00082}e^{-1.3t}\sin(44t) \\
-\mathbf{0.0071}e^{-0.49t}\cos(9.8t) + \mathbf{0.012}e^{-0.49t}\sin(9.8t) \\
+\mathbf{0.0036}e^{-1.9t}\cos(97t) - \mathbf{0.00085}e^{-1.9t}\sin(97t)
\end{cases}
$$

利用 MATLAB 代码 PART 4 绘制 0~5s 内时间历程图形如图 10 所示



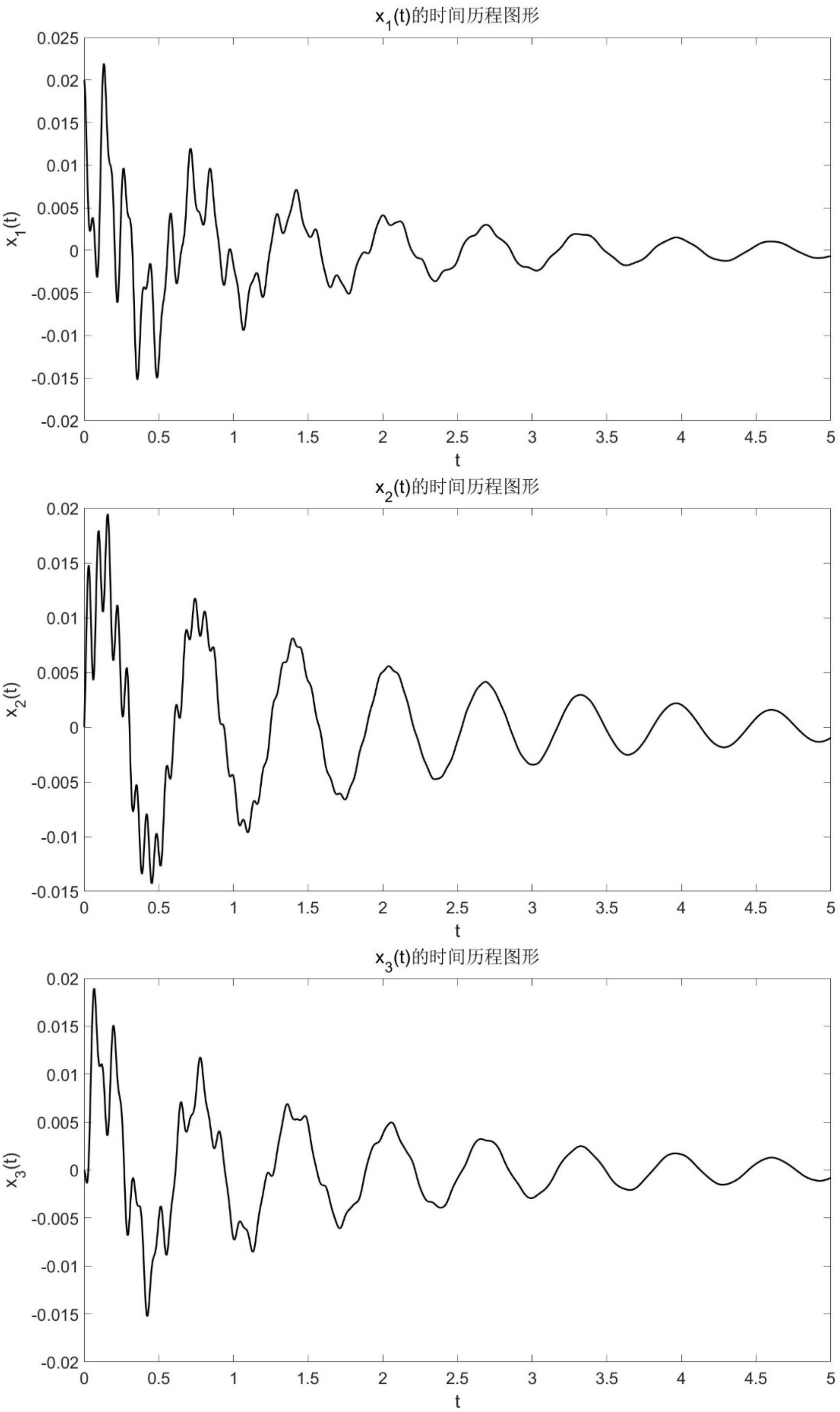

x1(t)的时间历程图形
x1(t)
t
0.025
0.02
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
-0.02
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
x2(t)的时间历程图形
x2(t)
t
0.02
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
x3(t)的时间历程图形
x3(t)
t
0.02
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
-0.02

图 10

5 基于杜哈美积分方法求有阻尼系统强迫振动解

依题意，激励力为脉冲力：

$$f(t)=\begin{cases}50 & t\le 2 \quad s\\ 0 & t>2 \quad s\end{cases} \quad \mathrm{N}$$

在$t\le 2s$时，在非零初始条件下，可将系统的瞬态响应看作由激励产生的强迫振动响应与由初始条件产生的自由振动响应的叠加。

$$x(t)=x_h(t)+\tilde{x}(t)$$

其中，由初始条件产生自由振动$x_h(t)$已算出。

由杜哈美积分方法，激励力产生的瞬态响应为：

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{M\omega_d}\int_0^t f(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}sin\omega_d(t-\tau)d\tau$$

对于本题来说，激励力产生的瞬态响应为

$$\tilde{x}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{M\omega_d}\displaystyle\int_0^t p(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}sin\omega_d(t-\tau)d\tau & t\le 2s\\ \dfrac{1}{M\omega_d}\displaystyle\int_0^2 p(\tau)e^{-\zeta\omega_n(t-\tau)}sin\omega_d(t-\tau)d\tau & t>2s\end{cases}$$

由前所述，在正则坐标下：

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\tau})=\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{0}\\ \mathbf{50}\end{pmatrix}(\boldsymbol{t}\le \mathbf{2}\boldsymbol{s})$$

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{\tau})=\boldsymbol{u}_N^T\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\tau})$$

$$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}$$

$$\zeta_1=0.05$$

$$\zeta_2=0.03$$

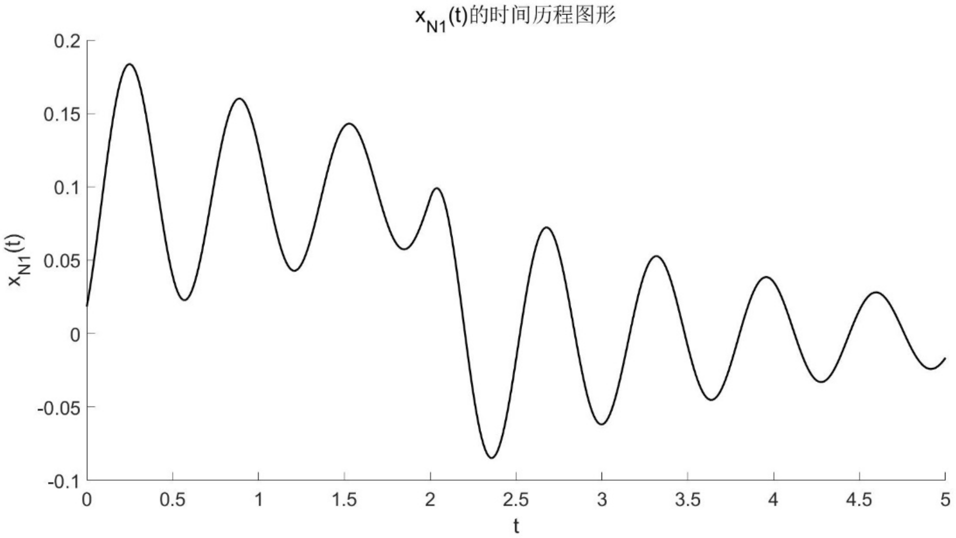
$$\zeta_3=0.02$$

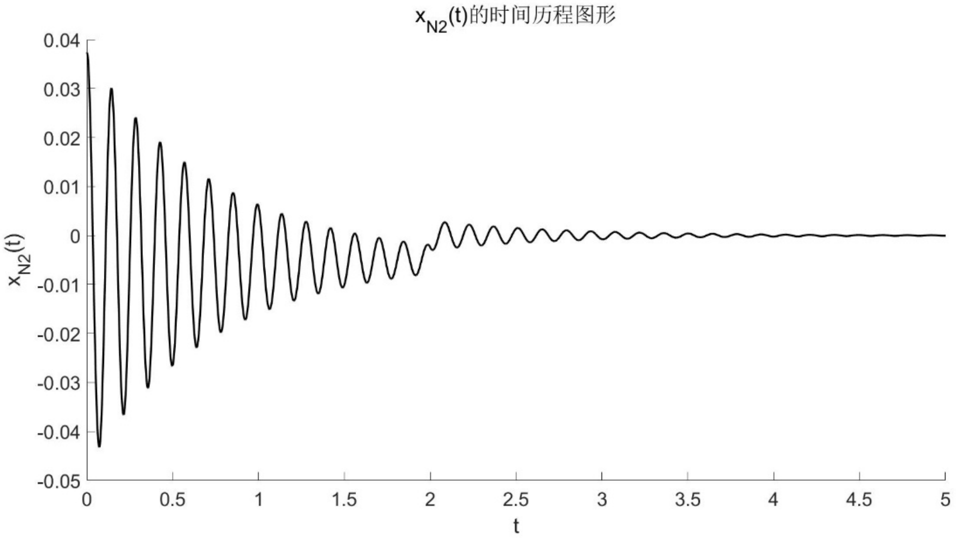
$$\omega_{dr}=\omega_{nr}\sqrt{1-\zeta_r^2}$$

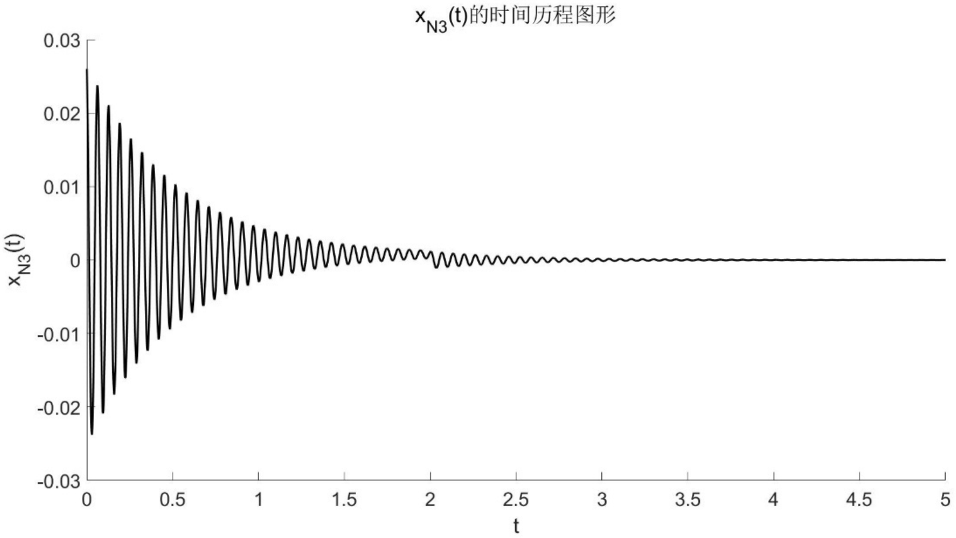
又正则坐标和原始坐标存在如下关系：

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{u_N}\boldsymbol{x_N}$$

由此编写 MATLAB **代码** PART 5 并运行得图 11：


x_N1(t)的时间历程图形
0.2
0.15
0.1
0.05
0
-0.05
-0.1
x_N1(t)
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5
t


x_N2(t)的时间历程图形
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
-0.02
-0.03
-0.04
-0.05
x_N2(t)
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5
t


x_N3(t)的时间历程图形
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
-0.02
-0.03
x_N3(t)
0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5
t

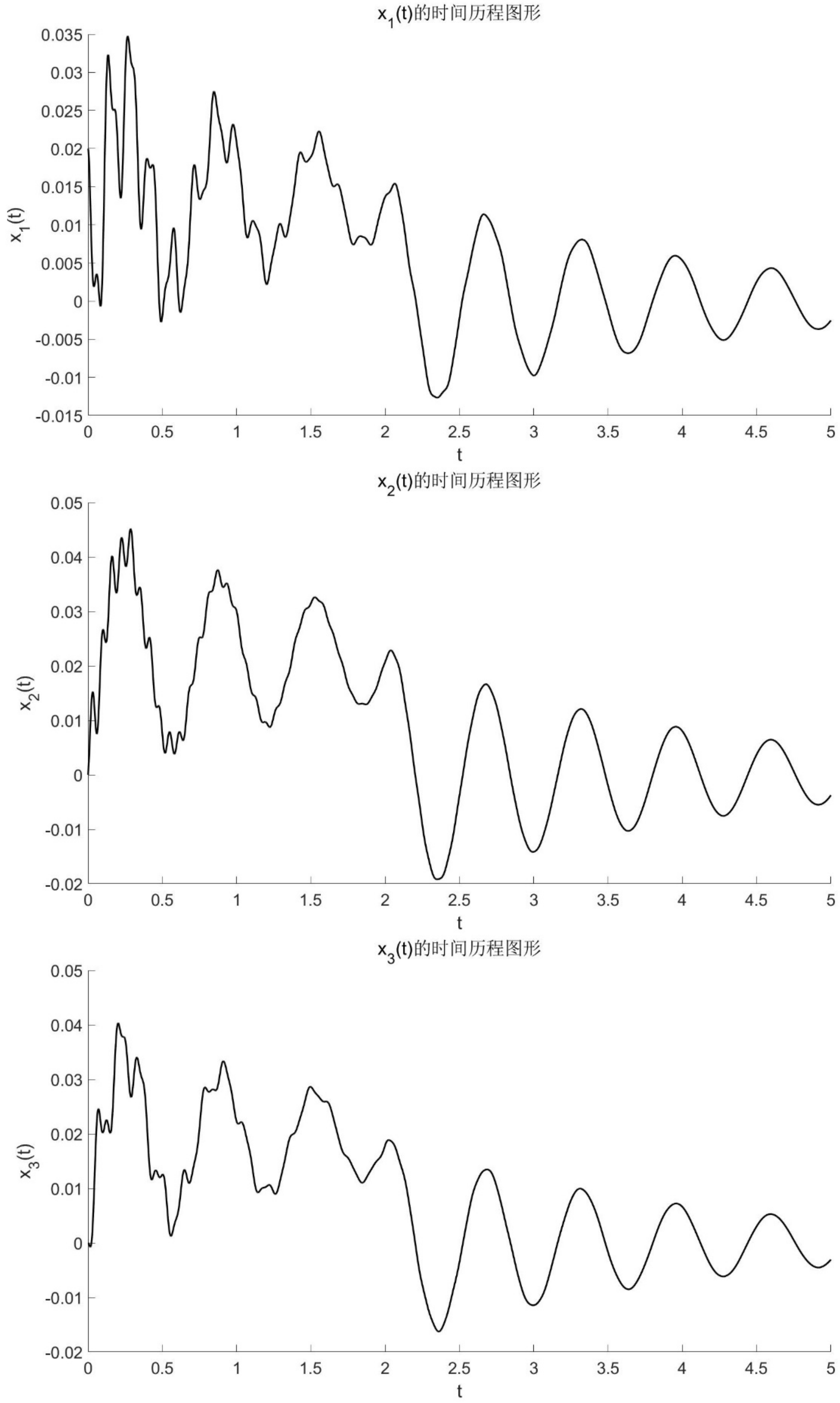


图 11

$\tilde{x}(t)$如图 12 所示

命令行窗口

```
>> vpa(xb_t(1),2)

ans =

8.3 - 1.9e-16*exp(-0.49*t)*(4.4e16*cos(9.8*t) + 2.2e15*sin(9.8*t))

>> vpa(xb_0(1),2)

ans =

1.9e-16*exp(0.98 - 0.49*t)*(4.4e16*cos(9.8*t - 20.0) + 2.2e15*sin(9.8*t - 20.0)) - 1.9e-16*exp(-0.49*t)*(4.4e16*cos(9.8*t) + 2.2e15*sin(9.8*t))

>> vpa(xb_t(2),2)

ans =

5.6 - 2.8e-17*exp(-1.3*t)*(2.0e17*cos(44.0*t) + 6.0e15*sin(44.0*t))

>> vpa(xb_0(2),2)

ans =

2.8e-17*exp(2.7 - 1.3*t)*(2.0e17*cos(44.0*t - 89.0) + 6.0e15*sin(44.0*t - 89.0)) - 2.8e-17*exp(-1.3*t)*(2.0e17*cos(44.0*t) + 6.0e15*sin(44.0*t))

>> vpa(xb_t(3),2)

ans =

4.5 - 1.0e-17*exp(-1.9*t)*(4.4e17*cos(97.0*t) + 8.7e15*sin(97.0*t))
```

图 12

由于解析结果过于复杂，不在作业中书面列出。

附录 MATLAB 代码