机械振动课程大作业（一）

学院 机械与能源工程学院

专业 机械设计制造及其自动化

学号 1852951

姓名 李腾

指导教师 刘钊

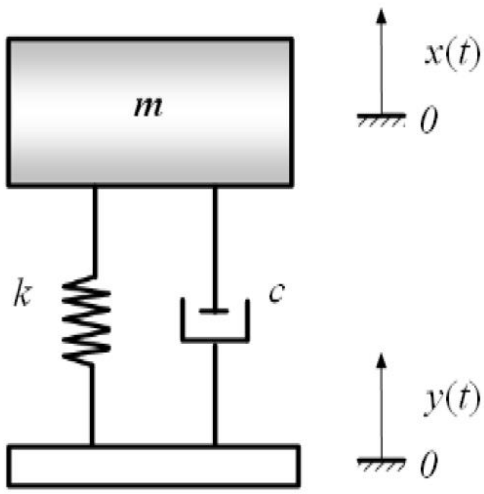
完成日期 2020 年 11 月 05 日

目录

一、题目要求

如图所示是一个小客车行走过程中悬挂系统隔振效果的单自由度分析模型。其中m为车身及乘客质量，k是悬挂系统的刚度，c是悬挂系统的阻尼，$y(t)$代表汽车在行走时由于路面不平顺引起的强迫位移激励。模型中的相关参数如下：

$m = 1200 + 200N_1\ kg$，$k = 50000 + 5000N_2\ \ N/m$，$C = 4000 + 300N_3\ \ N.s/m$。



作业要求：

1. 列出系统的运动方程，并求系统的固有频率w_n和阻尼比ξ；
2. 如果激励为：

$$y(t) = \left[(N_3+5)(\sin 2\pi t) + (N_2+4)\sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + (N_1+3)\sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right] \times 10^{-3} m$$

求解稳态响应$x(t)$的表达式，并通过电算画出$0\sim 2\ s$内激励$y(t)$、稳态响应$x(t)$及其它们对应的加速度$\ddot{y}(t)$和$\ddot{x}(t)$的时间历程图形；

3. 推导$H_{y,x}(w)$的表达式，并通过电算画出$H_{y,x}(w)$在$0\sim 10 rad/s$以内的幅频特性和相频特性曲线；
4. 通过$H_{y,x}(w)$的幅频特性曲线，分析讨论作为一般的小客车悬挂系统，其固有频率w_n和阻尼比ξ的取值是否合理；
5. 在保持质量不变的前提下，讨论k和c的改进建议，并重新作出改进后的$H_{y,x}(w)$ 的幅频特性

曲线和（2）中稳态响应加速度$x(t)$的时间历程图形。

二、确定初始参数

根据学号，可计算N_1、N_2、N_3、N_4 参数如下：

$$N_1 = mod(1852951,5) = 1$$

$$N_2 = mod(1852951,7) = 2$$

$$N_3 = mod(1852951,9) = 4$$

$$N_4 = mod(1852951,11) = 1$$

进一步地，模型中的相关参数计算如下：

$$m = (1200 + 200N_1)\ kg = (1200 + 200 \times 1)kg = 1400\ kg$$

$$k = (50000 + 5000N_2)N/m = (50000 + 5000 \times 2)N/m = 60000\ N/m$$

$$c = (4000 + 300N_3)N.s/m = (4000 + 300 \times 4)N.s/m = 5200\ N.s/m$$

三、题目解答

3.1 第一问

应用牛顿定律，可得运动方程：

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = ky(t) + c\dot{y}(t)$$

将初始参数代入，可得：

$$1400\ddot{x}(t) + 5200\dot{x}(t) + 60000x(t) = 60000y(t) + 5200\dot{y}(t)$$

因此，系统的固有频率：

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{60000}{1400}} = 6.547\ rad/s$$

阻尼比：

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{5200}{2\sqrt{1400 \times 60000}} = 0.284$$

3.2 第二问

由题意知：

$$y(t)=\left[(N_3+5)(sin\,2\pi t)+(N_2+4)\,sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+(N_1+3)\,sin\left(8\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\right]\times 10^{-3}$$

将初始参数代入，可得：

$$y(t)=\left[9(sin\,2\pi t)+6\,sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+4\,sin\left(8\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\right]\times 10^{-3}$$

求导得：

$$\dot{y}(t)=\left[18\pi(cos\,2\pi t)+24\pi\,cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+32\pi\,cos\left(8\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\right]\times 10^{-3}$$

进一步，系统的运动方程为：

$$\begin{aligned}&1400(t)+5200\dot{x}(t)+60000x(t)\\&=60\left[9(sin\,2\pi t)+6\,sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+4\,sin\left(8\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\right]\\&\quad+5.2\left[18\pi(cos\,2\pi t)+24\pi\,cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+32\pi\,cos\left(8\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\right]\\&=548.052\,sin(2\pi t+0.172)+381.018\,sin(4\pi t+1.904)+292.043\,sin(8\pi t+1.653)\end{aligned}$$

上式中，激励部分包含三个频率成分，可用叠加原理三个频率成分分别进行求解：

1）计算频率比：

$$\lambda_1=\frac{w_1}{w_n}=\frac{2\pi}{6.547}=0.960$$
$$\lambda_2=\frac{w_2}{w_n}=\frac{4\pi}{6.547}=1.919$$
$$\lambda_3=\frac{w_3}{w_n}=\frac{8\pi}{6.547}=3.839$$

2）计算三个激励对应的稳态响应幅值x_{u1}，x_{u2}，x_{u3}：

$$x_{u1}=\frac{f_{u1}}{k\sqrt{\left(1-{\lambda_1}^2\right)^2+(2\xi\lambda_1)^2}}=\frac{548.052}{60000\times\sqrt{(1-0.960^2)^2+(2\times0.284\times0.960)^2}}=0.0166$$

$$x_{u2}=\frac{f_{u2}}{k\sqrt{\left(1-{\lambda_2}^2\right)^2+(2\xi\lambda_2)^2}}=\frac{381.018}{60000\times\sqrt{(1-1.919^2)^2+(2\times0.284\times1.919)^2}}=0.00219$$

$$x_{u3}=\frac{f_{u3}}{k\sqrt{\left(1-{\lambda_3}^2\right)^2+(2\xi\lambda_3)^2}}=\frac{292.043}{60000\times\sqrt{(1-3.839^2)^2+(2\times0.284\times3.839)^2}}=0.000350$$

3）计算稳态响应与激励之间的相位差：

$$\theta_1 = -tan^{-1}\frac{2\xi\lambda_1}{1-{\lambda_1}^2} + 0.172 = -tan^{-1}\frac{2\times 0.284\times 0.960}{1-0.960^2} + 0.172 = -1.256$$

$$\theta_2 = -tan^{-1}\frac{2\xi\lambda_2}{1-{\lambda_2}^2} + 1.904 = -tan^{-1}\frac{2\times 0.284\times 1.919}{1-1.919^2} + 1.904 = -0.852$$

$$\theta_3 = -tan^{-1}\frac{2\xi\lambda_3}{1-{\lambda_3}^2} + 1.653 = -tan^{-1}\frac{2\times 0.284\times 3.839}{1-3.839^2} + 1.653 = -1.331$$

由此可得，运动方程的稳态解为：

$$x(t) = 0.0166\,sin(2\pi t - 1.256) + 0.00219\,sin(4\pi t - 0.852) + 0.000350\,sin(8\pi t - 1.331)$$

而

$$y(t) = \left[9(sin\,2\pi t) + 6\,sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) + 4\,sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)\right] \times 10^{-3}$$

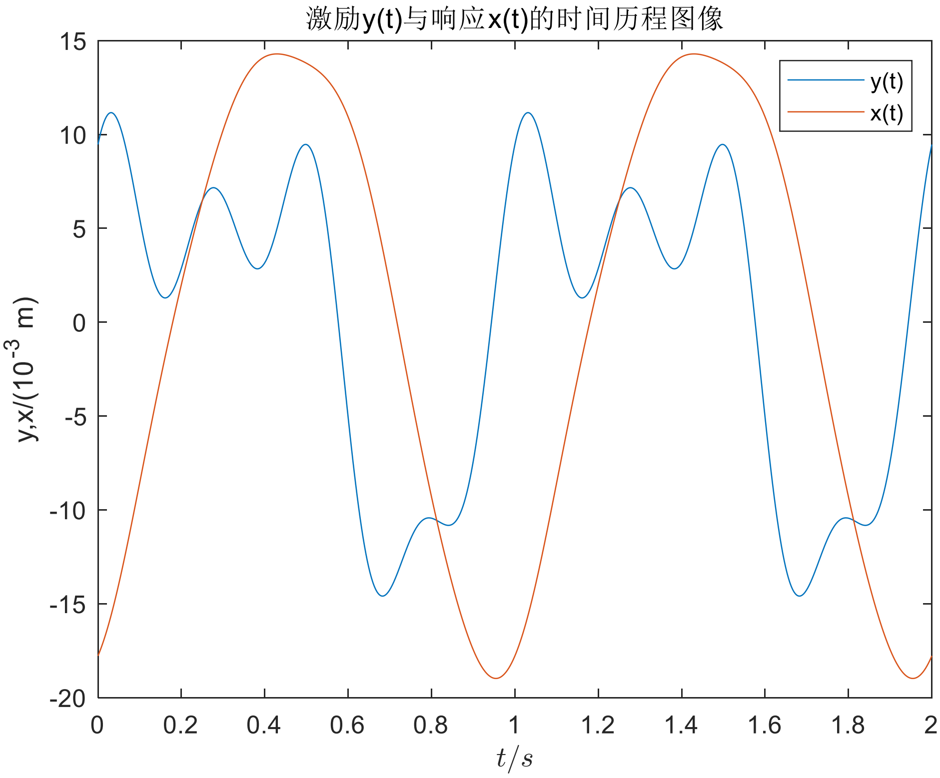
可得$\ddot{x}(t)$和$\ddot{y}(t)$表达式：

$$\ddot{x}(t) = -0.655\,sin(2\pi t - 1.256) - 0.346\,sin(4\pi t - 0.852) - 0.221\,sin(8\pi t - 1.331)$$

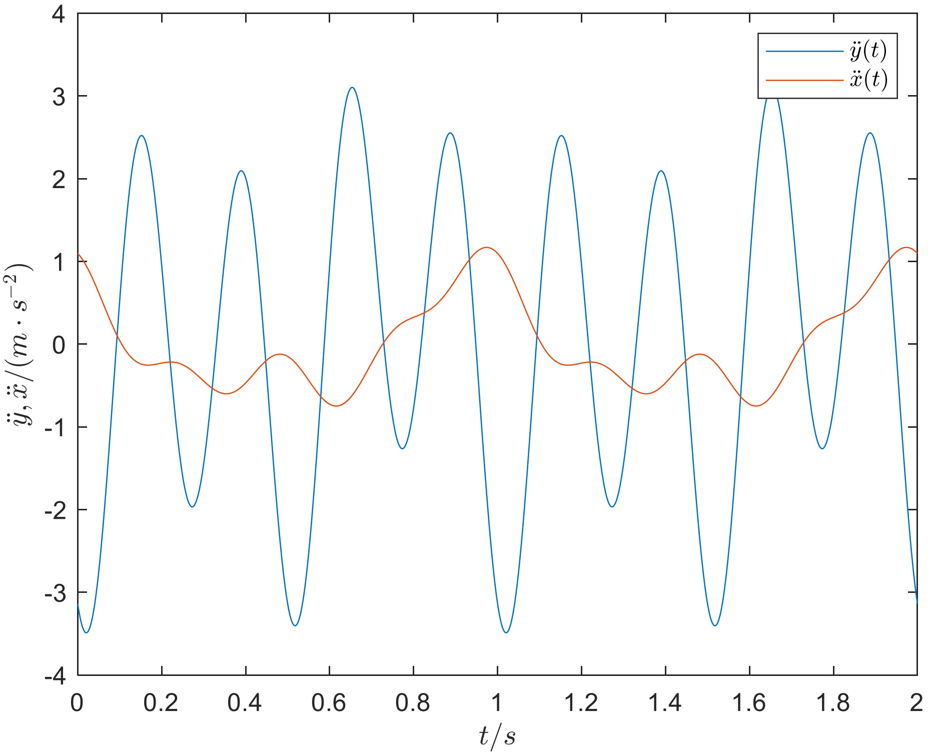
$$\ddot{y}(t) = [-36\times\pi^2\,sin(2\pi t) - 96\times\pi^2\,sin\left(4\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - 256\times\pi^2\,sin\left(8\pi t + \frac{\pi}{3}\right)] \times 10^{-3}$$

对应的函数图像如下：

$y(t)$、$x(t)$图像：



$\ddot{y}(t)$、$\ddot{x}(t)$图像：



3.3 第三问

将基础的强制运动位移$y(t)$为系统的输入，质量m的位移$x(t)$为系统的输出，则输出关于输入的频率响应函数为：

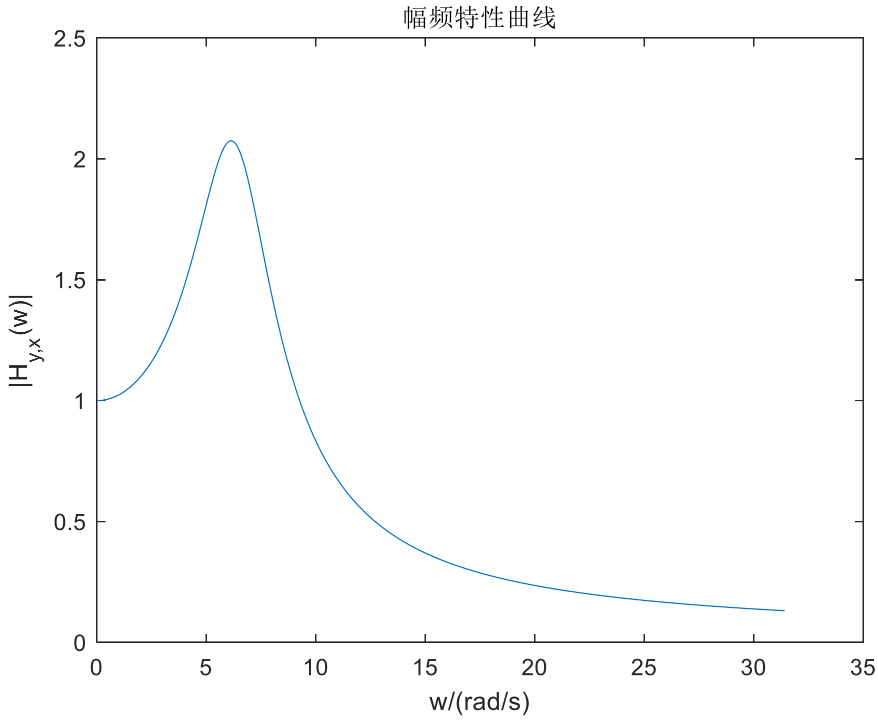
$$H_{y,x}(w) = \frac{X(w)}{Y(w)} = \frac{X(w)}{P(w)} \times \frac{P(w)}{Y(w)} = \frac{k + jwc}{(k - w^2 m) + jwc}$$

$H_{y,x}(w)$的幅频特性函数为：

$$\left|H_{y,x}(w)\right| = \frac{|k + jwc|}{|(k - w^2 m) + jwc|} = \frac{\sqrt{1 + (2\,\xi\,\lambda)^2}}{\sqrt{(1 - \lambda^2)^2 + (2\,\xi\,\lambda)^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{1 + \left(2 \times 0.284 \times \frac{w}{6.547}\right)^2}}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{w}{6.547}\right)^2\right)^2 + \left(2 \times 0.284 \times \frac{w}{6.547}\right)^2}}$$

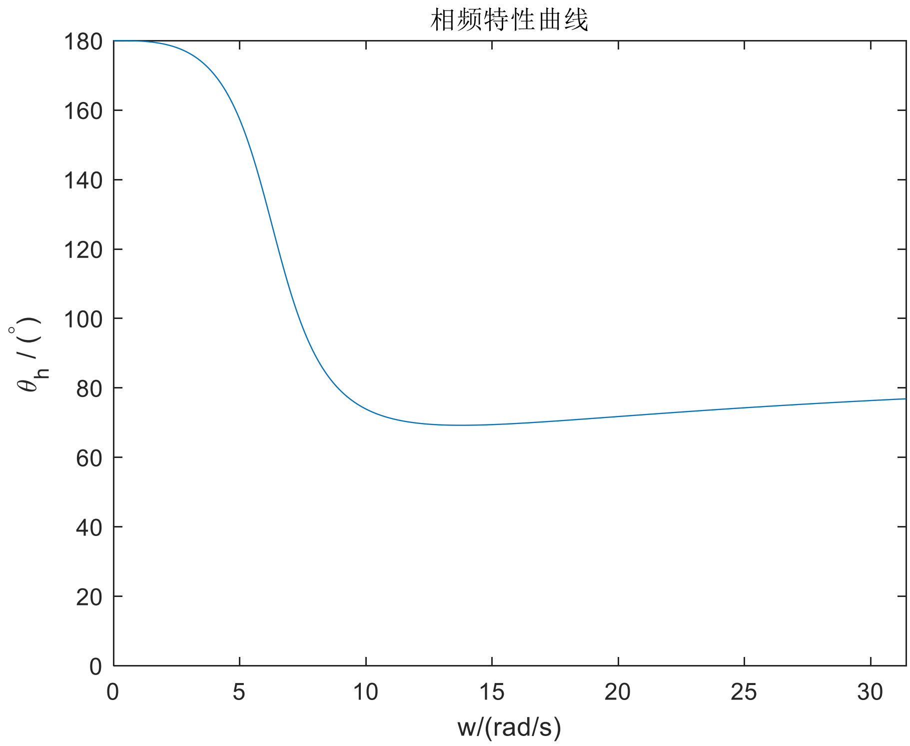
幅频特性曲线：



$H_{y,x}(w)$的相频特性函数为：

$$\theta = \left(tan^{-1}\frac{cw}{k} - tan^{-1}\frac{cw}{k-w^2m}\right) \div \pi \times 180^{\circ}$$
$$= \left(tan^{-1}\frac{5200w}{60000} - tan^{-1}\frac{5200w}{60000-1400w^2}\right) \div \pi \times 180^{\circ}$$

相频特性曲线：



3.4 第四问

3.4.1 固有频率分析

根据已知条件，结合$H_{y,x}(w)$的幅频曲线，隔振区的临界激励频率为：

$$w = \sqrt{2}w_n = \sqrt{2} \times 6.547rad/s = 9.259rad/s$$

满足$w > 2\pi, w < 4\pi, 8\pi$。故激励的三个频率成分中，只有两个频率成分在隔振区工作，仍有一个成分在隔振区外，故不合理。

3.4.2 阻尼比分析

根据参考资料[3]，小型客车的阻尼比一般为0.2~0.4，这样既能保证较好的隔振性，汽车在行驶过程中也能保证较好的平顺性（即振动方向上加速度的响应幅值不会过大）。而题中阻尼比为 0.284，结合$H_{y,x}(w)$曲线，在$w > \sqrt{2}w_n$时，响应幅值较小，故满足要求。

3.5 第五问

由第四问分析可知，应满足

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} < \frac{2\pi}{\sqrt{2}}$$

$$0.2 < \xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}} < 0.4$$

在满足m不变的情况下，可取 $k = 25000, c = 3000$ 满足上述条件。

此时，

$$w_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25000}{1400}} = 4.226rad/s$$

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{mk}} = \frac{3000}{2\sqrt{1400 \times 25000}} = 0.254$$

频率响应函数为：

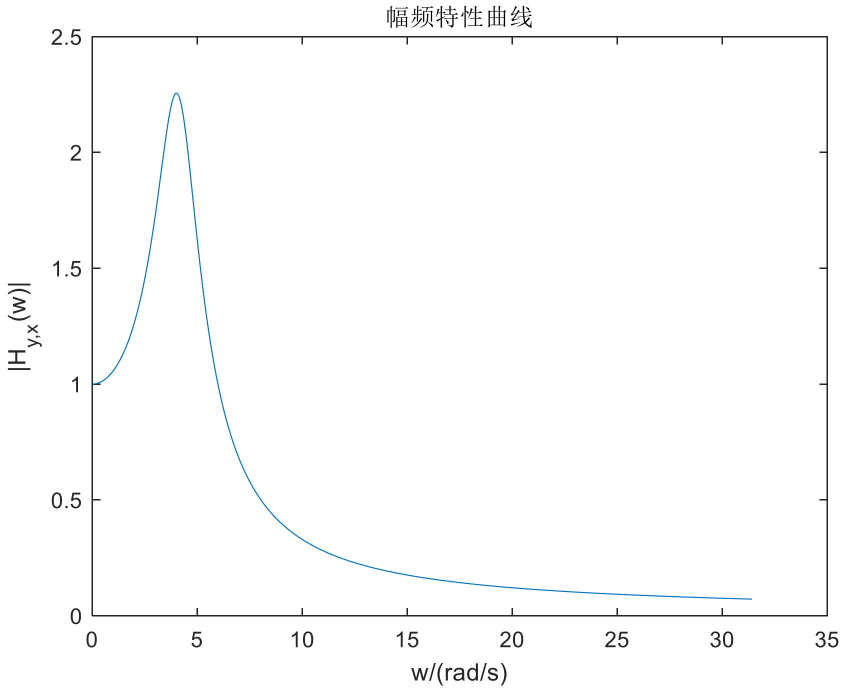
$$H_{y,x}(w)=\frac{k+jwc}{(k-w^2m)+jwc}$$

$H_{y,x}(w)$的幅频特性函数为：

$$\left|H_{y,x}(w)\right|=\frac{|k+jwc|}{|(k-w^2m)+jwc|}=\frac{\sqrt{1+(2\,\xi\,\lambda)^2}}{\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\,\xi\,\lambda)^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{1+\left(2\times 0.254\times\frac{w}{4.226}\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{w}{4.226}\right)^2\right)^2+\left(2\times 0.254\times\frac{w}{4.226}\right)^2}}$$

幅频特性曲线：



系统的运动方程为：

$$1400(t)+3000\dot{x}(t)+25000x(t)$$

$$=25\left[9(sin\,2\pi t)+6\,sin\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+4\,sin\left(8\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$+3\left[18\pi(cos\,2\pi t)+24\pi\,cos\left(4\pi t+\frac{\pi}{2}\right)+32\pi\,cos\left(8\pi t+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=231.389\,sin(2\pi t+0.236)+166.385\,sin(4\pi t+2.018)+138.622\,sin(8\pi t+1.812)$$

上式中，激励部分包含三个频率成分，可用叠加原理三个频率成分分别进行求解：

1）计算频率比：

$$\lambda_1=\frac{w_1}{w_n}=\frac{2\pi}{4.226}=1.487$$
$$\lambda_2=\frac{w_2}{w_n}=\frac{4\pi}{4.226}=2.974$$
$$\lambda_3=\frac{w_3}{w_n}=\frac{8\pi}{4.226}=5.947$$

2）计算三个激励对应的稳态响应幅值x_{u1}，x_{u2}，x_{u3}：

$$x_{u1}=\frac{f_{u1}}{k\sqrt{\left(1-{\lambda_1}^2\right)^2+(2\xi\lambda_1)^2}}=\frac{231.389}{25000\times\sqrt{(1-1.487^2)^2+(2\times0.254\times1.487)^2}}=0.00648$$
$$x_{u2}=\frac{f_{u2}}{k\sqrt{\left(1-{\lambda_2}^2\right)^2+(2\xi\lambda_2)^2}}=\frac{166.385}{25000\times\sqrt{(1-2.974^2)^2+(2\times0.254\times2.974)^2}}=0.000833$$
$$x_{u3}=\frac{f_{u3}}{k\sqrt{\left(1-{\lambda_3}^2\right)^2+(2\xi\lambda_3)^2}}=\frac{138.622}{25000\times\sqrt{(1-5.947^2)^2+(2\times0.254\times5.947)^2}}=0.000161$$

3）计算稳态响应与激励之间的相位差：

$$\theta_1=-tan^{-1}\frac{2\xi\lambda_1}{1-{\lambda_1}^2}+0.236=-tan^{-1}\frac{2\times0.254\times1.487}{1-1.487^2}+0.236=-2.348$$

$$\theta_2=-tan^{-1}\frac{2\xi\lambda_2}{1-{\lambda_2}^2}+2.018=-tan^{-1}\frac{2\times0.254\times2.974}{1-2.974^2}+2.018=-0.933$$

$$\theta_3=-tan^{-1}\frac{2\xi\lambda_3}{1-{\lambda_3}^2}+1.812=-tan^{-1}\frac{2\times0.254\times5.947}{1-5.947^2}+1.812=-1.242$$

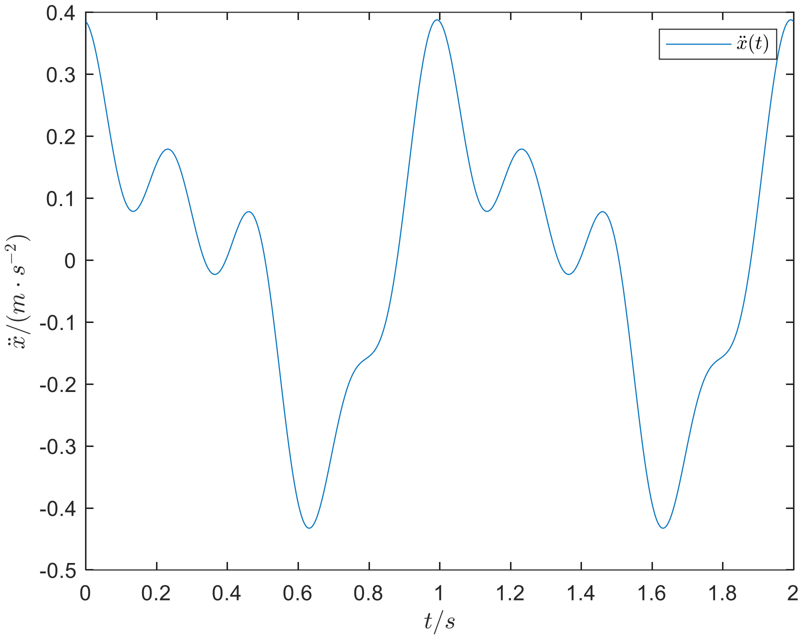
由此可得，运动方程的稳态解为：

$$x(t)=0.00648\,sin(2\pi t-2.348)+0.000833\,sin(4\pi t-0.933)+0.000161\,sin(8\pi t-1.242)$$

可得$\ddot{x}(t)$表达式：

$$\ddot{x}(t)=-0.256\,sin(2\pi t-2.348)-0.132\,sin(4\pi t-0.933)-0.102\,sin(8\pi t-1.242)$$

$\ddot{x}(t)$的函数图像如下：



四、参考资料

[1] 机械振动（第二版） 同济大学出版社

[2] 控制工程基础（第四版） 清华大学出版社

[3] 汽车理论（第六版） 机械工业出版社