同濟大學

机械振动课程大作业（三）

学院　机械与能源工程学院

专业　机械设计制造及其自动化

学号　1851960

姓名　郑光泽

指导教师　朱传敏

完成日期 2020 年 12 月 31 日

目录

一、题目要求

如图是一个由无质量梁和集中质量构成的三自由度系统。l_1、l_2、l_3、l_4 代表梁长，EI 代表梁的抗弯刚度，m_1、m_2、m_3 代表集中质量的质量，在 m_3 处作用有集中激振力 $f(t)$。系统的初始条件为：$x(0)=(x_{10}\ \ 0\ \ 0)^T$，$\dot{x}(0)=(0\ \ \dot{x_{20}}\ \ 0)^T$。该系统振动模型中的相关参数如下：

$$m_1 = 3 + N_1\ kg$$

$$m_2 = 4 + N_2\ kg$$

$$m_3 = 5 + N_3\ \ kg$$

$$l_1 = 1 + \frac{N_2}{4}\ m$$

$$l_2 = 1 + \frac{N_3}{4}\ m$$

$$l_3 = 1 + \frac{N_1}{4}\ m$$

$$l_4 = 1 + \frac{N_4}{4}\ m$$

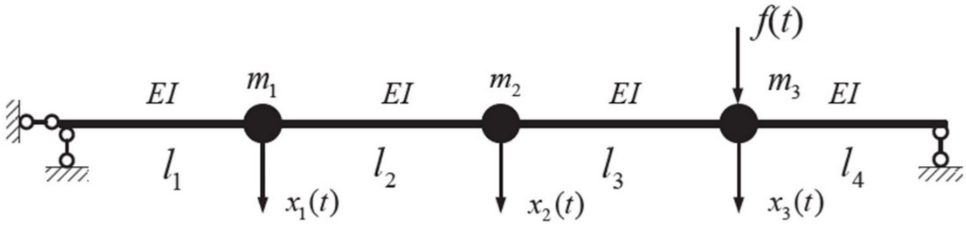
$$EI = 30000\ N/m^2$$

$$x_{10} = 0.02\ m$$

$$\dot{x_{20}} = 0.3\ m/s$$

激励力的函数表达式为

$$f(t) = \begin{cases} 50 & t \le 2\ s \\ 0 & t > 2s \end{cases} \qquad N$$



图一：题目要求示意图

作业要求：

1. 在忽略阻尼的情况下列出系统的运动方程，需表示为矩阵形式；
2. 求解系统固有频率 ω_n 和振型矩阵 u，并计算对应的正则振型矩阵 u_N，画出振型图；
3. 假设已知系统的模态阻尼比为 $\zeta_1 = 0.05$，$\zeta_2 = 0.03$，$\zeta_3 = 0.02$，试利用正则交换对运动

方程进行解耦，列出在考虑阻尼时关于正则坐标的系统运动方程（包含初始条件）；

4. 求出上述有阻尼系统在给定初始条件下自由振动的解，并分别作出系统正则坐标 $x_{N1}(t)$、$x_{N2}(t)$、$x_{N3}(t)$和原始坐标 $x_1(t)$、 $x_2(t)$、 $x_3(t)$ 自由振动时在 0~5 s 内的时间历程图线；
5. 试用杜哈美积分方法求出上述有阻尼系统在给定初始条件和激励力 $f(t)$ 作用下的瞬态响应解，并分别作出正则解 $x_{N1}(t)$、$x_{N2}(t)$、$x_{N3}(t)$和原始坐标 $x_1(t)$、 $x_2(t)$、 $x_3(t)$ 的瞬态响应在 0~5 s 内的时间历程图线。

二、确定初始参数

计算得N_1、N_2、N_3、N_4 参数如下：

$$N_1 = mod(1851960,5) = 0$$

$$N_2 = mod(1851960,7) = 5$$

$$N_3 = mod(1851960,9) = 3$$

$$N_4 = mod(1851960,11) = 0$$

模型中的相关参数计算如下：

$$m_1 = (3 + N_1)\text{kg} = (3 + 0)\text{kg} = 3\text{kg}$$

$$m_2 = (4 + N_2)\text{kg} = (4 + 5)\text{kg} = 9\text{kg}$$

$$m_3 = (5 + N_3)\text{kg} = (5 + 3)\text{kg} = 8\text{kg}$$

$$l_1 = \left(1 + \frac{N_2}{4}\right)m = \left(1 + \frac{5}{4}\right)m = 2.25\ m$$

$$l_2 = \left(1 + \frac{N_3}{4}\right)m = \left(1 + \frac{3}{4}\right)m = 1.75\ m$$

$$l_3 = \left(1 + \frac{N_1}{4}\right)m = \left(1 + \frac{0}{4}\right)m = 1\ m$$

$$l_4 = \left(1 + \frac{N_4}{4}\right)m = \left(1 + \frac{0}{4}\right)m = 1\ m$$

$$EI = 30000\ N/m^2$$

$$f(t) = \begin{cases} 50N & t \le 2s \\ 0N & t > 2s \end{cases}$$

$$x_{10} = 0.02m$$

$$\dot{x}_{20} = 0.3m/s$$

三、题目解答

3.1 题目一

首先计算系统柔度的影响系数。

根据材料力学相关知识可知，当如图 2 简支梁受到集中力 P 时，其上各位置的挠度可由如下公式确定：

$$y=\begin{cases}\dfrac{Pbx}{6EIl}(l^2-x^2-b^2) & 0\le x\le a\\ \dfrac{Pa(l-x)}{6EIl}(2lx-x^2-a^2) & a\le x\le l\end{cases}$$

其中，$a=l-b$，$l=l_1+l_2+l_3+l_4=6m$。

在 m_1 处施加单位载荷，$b=l_2+l_3+l_4=3.75\ m$，可得：

$$a_{11}=\frac{l_1(l-l_1)}{6EIl}(2\times l\times l_1-2l_1^2)=1.318\times10^{-4}\ m$$

$$a_{21}=\frac{l_1(l_3+l_4)}{6EIl}[2l(l_1+l_2)-(l_1+l_2)^2-l_1^2]=\ 1.122\times10^{-4}\ m$$

$$a_{31}=\frac{l_1l_4}{6EIl}\left[2l(l-l_4)-(l-l_4)^2-{l_1}^2\right]=6.237\times10^{-5}\ m$$

在 m_2 处施加单位载荷，$b=l_3+l_4=2\ m$，可得：

$$a_{12}=\frac{l_1(l_3+l_4)}{6EIl}[l^2-l_1^2-(l_3+l_4)^2]=1.122\times10^{-4}\ m$$

$$a_{22}=\frac{(l_1+l_2)(l_3+l_4)}{6EIl}[2(l_1+l_2)(l_3+l_4)]=1.185\times10^{-4}\ m$$

$$a_{32}=\frac{l_4(l_1+l_2)}{6EIl}[2l(l-l_4)-(l-l_4)^2-(l_1+l_2)^2]=7.037\times10^{-5}\ m$$

在 m_3 处施加单位载荷，$b=l_4=1\ m$，可得：

$$a_{13}=\frac{l_1l_4}{6EIl}[l^2-l_1^2-l_4^2]=6.237\times10^{-5}\ m$$

$$a_{23}=\frac{l_4(l_1+l_2)}{6EIl}[l^2-(l_1+l_2)^2-l_4^2]=7.037\times10^{-5}\ m$$

$$a_{33}=\frac{l_4(l-l_4)}{6EIl}\left[l^2-(l-l_4)^2-{l_4}^2\right]=4.630\times10^{-5}\ m$$

由此可得，系统的柔度矩阵

$$a=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1.318&1.122&0.6237\\1.122&1.185&0.7037\\0.6237&0.7037&0.4630\end{bmatrix}\times10^{-4}\ m$$

刚度矩阵：

$$K = a^{-1} = \begin{bmatrix} 4.651 & -7.019 & 4.403 \\ -7.019 & 19.246 & -19.798 \\ 4.403 & -19.798 & 26.321 \end{bmatrix} \times 10^4\ m$$

质量矩阵：

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

广义力矩阵为：

$$p(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

而系统的运动方程为：

$$M\ddot{x} + Kx = p(t)$$

由此可得系统的运动方程：

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + 10^4 \times \begin{bmatrix} 4.651 & -7.019 & 4.403 \\ -7.019 & 19.246 & -19.798 \\ 4.403 & -19.798 & 26.321 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

3.2 题目二

特征方程：

$$|-\omega_n^2[M] + [K]| = 0$$

即：

$$\begin{bmatrix} 4.651 \times 10^4 - 3\omega_n^2 & -7.019 \times 10^4 & 4.403 \times 10^4 \\ -7.019 \times 10^4 & 19.246 \times 10^4 - 9\omega_n^2 & -19.798 \times 10^4 \\ 4.403 \times 10^4 & -19.798 \times 10^4 & 26.321 \times 10^4 - 8\omega_n^2 \end{bmatrix} = 0$$

从而可以得到固有频率：

$$\omega_{n1} = 24.019\ rad/s$$

$$\omega_{n2} = 110.672\ rad/s$$

$$\omega_{n3} = 238.674\ rad/s$$

求得无阻尼系统特征方程为：

$$Z(\omega_{nr}) = -\omega_{nr}^2 M + K = \begin{bmatrix} 4.651 \times 10^4 - 3\omega_{nr}^2 & -7.019 \times 10^4 & 4.403 \times 10^4 \\ -7.019 \times 10^4 & 19.246 \times 10^4 - 9\omega_{nr}^2 & -19.798 \times 10^4 \\ 4.403 \times 10^4 & -19.798 \times 10^4 & 26.321 \times 10^4 - 8\omega_{nr}^2 \end{bmatrix}$$

则系统归一化后模态振型矩阵：

$$u=\begin{bmatrix}1.6335 & -2.4921 & 0.8021\\ 1.6695 & 0.2804 & -0.7904\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

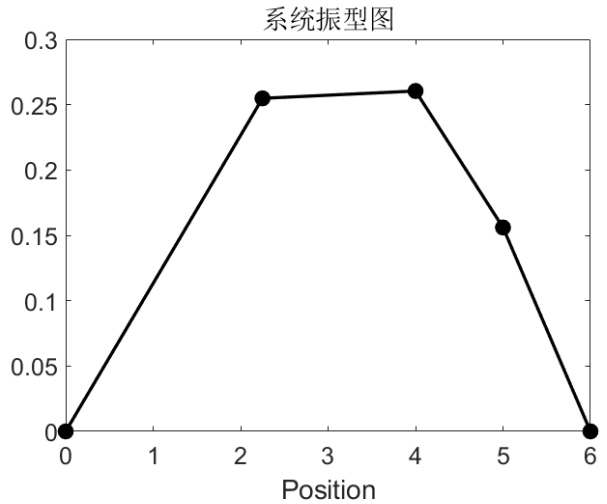
从而可得系统的模态质量为：

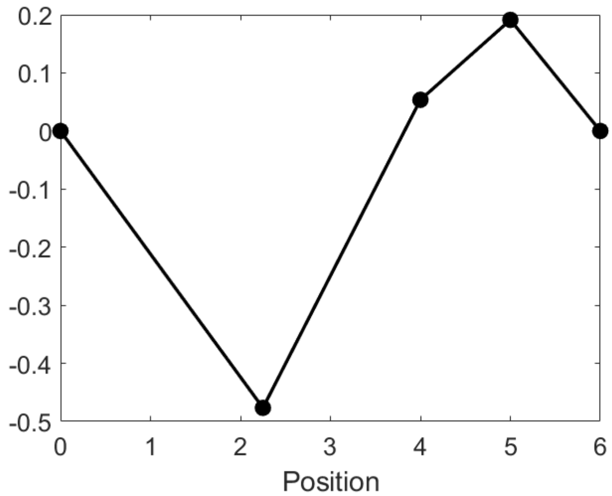
$$M_{p1}=u_1^T[M]u_1=41.0892$$

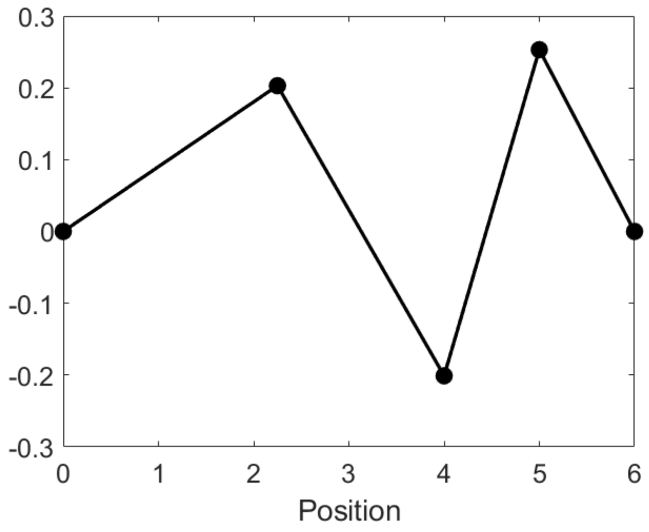
$$M_{p2}=u_2^T[M]u_2=27.3390$$

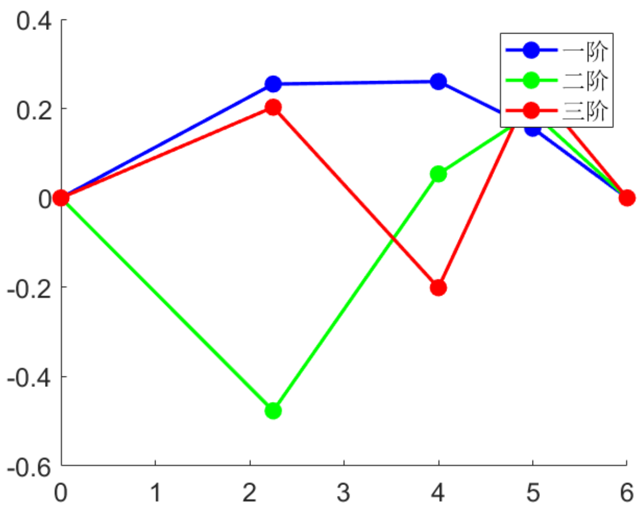
$$M_{p3}=u_3^T[M]u_3=15.6043$$

得到振型图如下：









图二：系统振型图

则由振型向量正则化公式：

$$u_{Nr}=\frac{1}{\sqrt{M_{Pr}}}u_r$$

得到正则化振型矩阵：

$$u_N=\begin{bmatrix}0.2548 & -0.4766 & 0.2030\\ 0.2604 & 0.0536 & -0.2010\\ 0.1560 & 0.1913 & 0.2532\end{bmatrix}$$

3.3 题目三

（1）解耦运动方程

对于有阻尼多自由度系统，强迫振动的微分方程可表示为：

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = p(t)$$

根据题意，系统的阻尼比为：

$$\xi_1 = 0.05$$

$$\xi_2 = 0.03$$

$$\xi_3 = 0.02$$

因此可将该简支梁横向振动系统看作为一弱阻尼系统，且符合模态阻尼矩阵的要求。即对于上述正则矩阵$[u_N]$，有：

$$C_N = {u_N}^T C u_N$$

进行如下正则坐标变换：

$$x = u_N x_N$$

代入原运动微分方程中，得：

$$M u_N \ddot{x}_N + C u_N \dot{x}_N + K u_N x_N = p(t)$$

两边同时左乘$[u_N]^T$，得：

$$M_N \ddot{x}_N + C\dot{x}_N + K x_N = {u_N}^T p(t)$$

于是，解耦后得系统正则运动方程可表示为：

$$\ddot{x}_{Nr} + 2\xi_r w_{nr} \dot{x}_{Nr} + w_{nr}^2 x_{Nr} = {u_{Nr}}^T \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

（2）列出关于正则坐标得系统运动方程

由（1）可知，系统正则方程的矩阵形式为：

$$M_N \ddot{x}_N + C\dot{x}_N + K x_N = {u_N}^T p(t)$$

其中，正则质量矩阵：

$$M_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

正则刚度矩阵：

$$K_N=\begin{bmatrix} w_{n1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & w_{n2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & w_{n3}^2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.0577 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2248 & 0 \\ 0 & 0 & 5.6965 \end{bmatrix}\times 10^4$$

正则阻尼矩阵：

$$C_N=\begin{bmatrix} 2\xi_1 w_{n1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\xi_2 w_{n2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\xi_3 w_{n3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2.4019 & 0 & 0 \\ 0 & 6.6403 & 0 \\ 0 & 0 & 9.5469 \end{bmatrix}$$

由此可得运动方程为：

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{N1} \\ \ddot{x}_{N2} \\ \ddot{x}_{N3} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2.4019 & 0 & 0 \\ 0 & 6.6403 & 0 \\ 0 & 0 & 9.5469 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_{N1} \\ \dot{x}_{N2} \\ \dot{x}_{N3} \end{bmatrix}+10^4\times\begin{bmatrix} 0.0577 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2248 & 0 \\ 0 & 0 & 5.6965 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{N1} \\ x_{N2} \\ x_{N3} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 0.1560 \\ -0.1913 \\ 0.2532 \end{bmatrix}f(t)$$

由$x_{N0}=u_N^{-1}x$可得，系统的初始条件为：

$$x_{N0}=u_N^{-1}x_0=\begin{bmatrix} 0.0153 \\ -0.0286 \\ 0.0122 \end{bmatrix}m$$

$$\dot{x}_{N0}=u_N^{-1}\dot{x}_0=\begin{bmatrix} 0.7032 \\ 0.1448 \\ -0.5427 \end{bmatrix}m/s$$

综上所述，系统的运动方程为：

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_{N1} \\ \ddot{x}_{N2} \\ \ddot{x}_{N3} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 2.4019 & 0 & 0 \\ 0 & 6.6403 & 0 \\ 0 & 0 & 9.5469 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{x}_{N1} \\ \dot{x}_{N2} \\ \dot{x}_{N3} \end{bmatrix}+10^4\times\begin{bmatrix} 0.0577 & 0 & 0 \\ 0 & 1.2248 & 0 \\ 0 & 0 & 5.6965 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{N1} \\ x_{N2} \\ x_{N3} \end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix} 0.1560 \\ -0.1913 \\ 0.2532 \end{bmatrix}f(t)$$

初始条件：

$$x_{N0}=\begin{bmatrix} 0.0153 \\ -0.0286 \\ 0.0122 \end{bmatrix}m$$

$$\dot{x}_{N0}=\begin{bmatrix} 0.7032 \\ 0.1448 \\ -0.5427 \end{bmatrix}m/s$$

3.4 题目四

由第三问可得，有阻尼系统自由振动时关于正则坐标得系统运动方程为：

$$\begin{bmatrix}\ddot{x}_{N1}\\ \ddot{x}_{N2}\\ \ddot{x}_{N3}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2.4019 & 0 & 0\\ 0 & 6.6403 & 0\\ 0 & 0 & 9.5469\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{x}_{N1}\\ \dot{x}_{N2}\\ \dot{x}_{N3}\end{bmatrix}+10^4\times\begin{bmatrix}0.0577 & 0 & 0\\ 0 & 1.2248 & 0\\ 0 & 0 & 5.6965\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{N1}\\ x_{N2}\\ x_{N3}\end{bmatrix}=0$$

初始条件：

$$x_{N0}=\begin{bmatrix}0.0153\\ -0.0286\\ 0.0122\end{bmatrix}m$$

$$\dot{x}_{N0}=\begin{bmatrix}0.7032\\ 0.1448\\ -0.5427\end{bmatrix}m/s$$

从而可得以下方程组：

$$\ddot{x}_{Nr}+2\xi_r w_{nr}\dot{x}_{Nr}+w_{nr}^2 x_{Nr}=0 \qquad (r=1,2,3)$$

上述微分方程得通解为：

$$x_{Nr}(t)=Ae^{-\xi_r w_n t}\sin\left(\sqrt{1-{\xi_r}^2}w_{nr}t+\theta\right) \qquad (r=1,2,3)$$

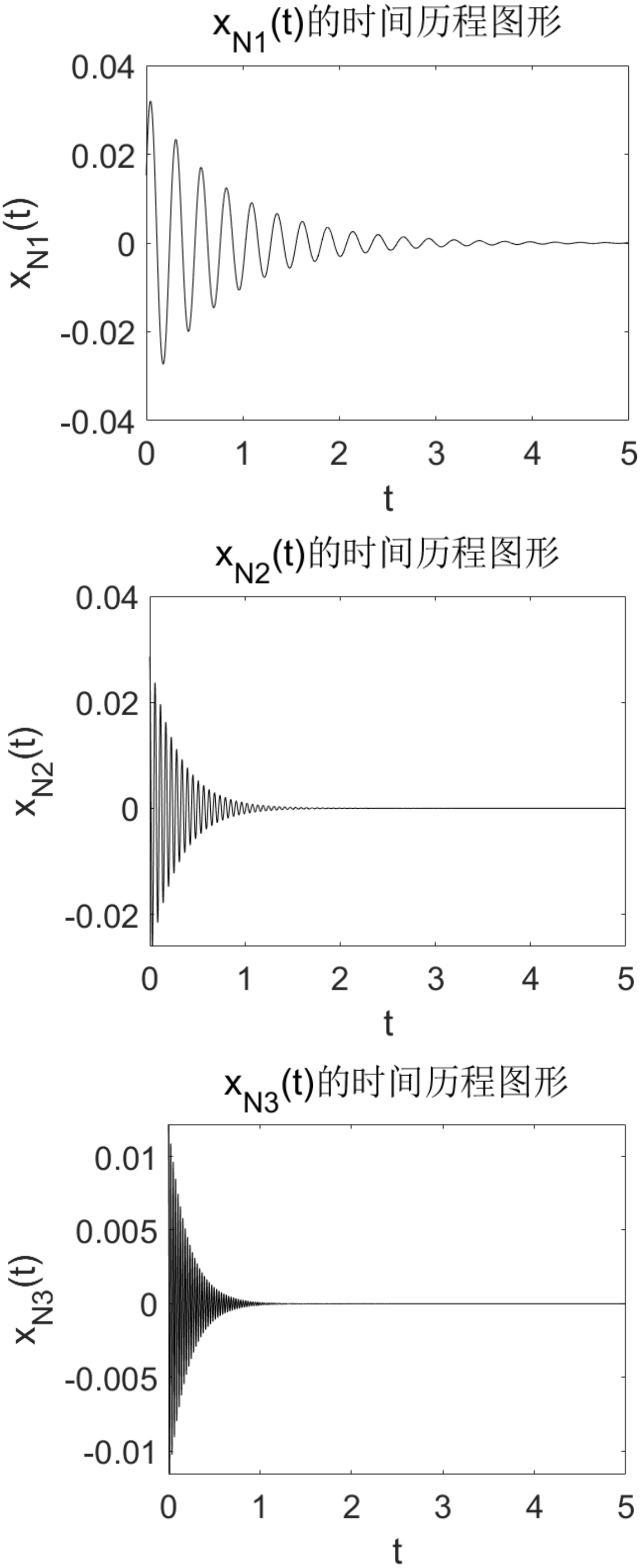
代入初始条件，可得：

$$x_{N1}(t)=A_1e^{-\xi_1 w_{n1} t}\sin\left(\sqrt{1-{\xi_1}^2}w_{n1}t+\theta_1\right)=0.03374e^{-1.201t}sin(23.989t+0.4703)$$

$$x_{N2}(t)=A_2e^{-\xi_2 w_{n2} t}\sin\left(\sqrt{1-{\xi_2}^2}w_{n2}t+\theta_2\right)=\ -0.02860e^{-3.320t}sin(110.62t-1.555)$$

$$x_{N3}(t)=A_3e^{-\xi_3 w_{n3} t}\sin\left(\sqrt{1-{\xi_3}^2}w_{n3}t+\theta_3\right)=\ -0.01235e^{-4.774t}sin(238.63t-1.406)$$

曲线绘制如下：



图三：系统正则坐标 $x_{N1}(t)$、$x_{N2}(t)$、$x_{N3}(t)$自由振动时在 0~5 s 内的时间历程图线

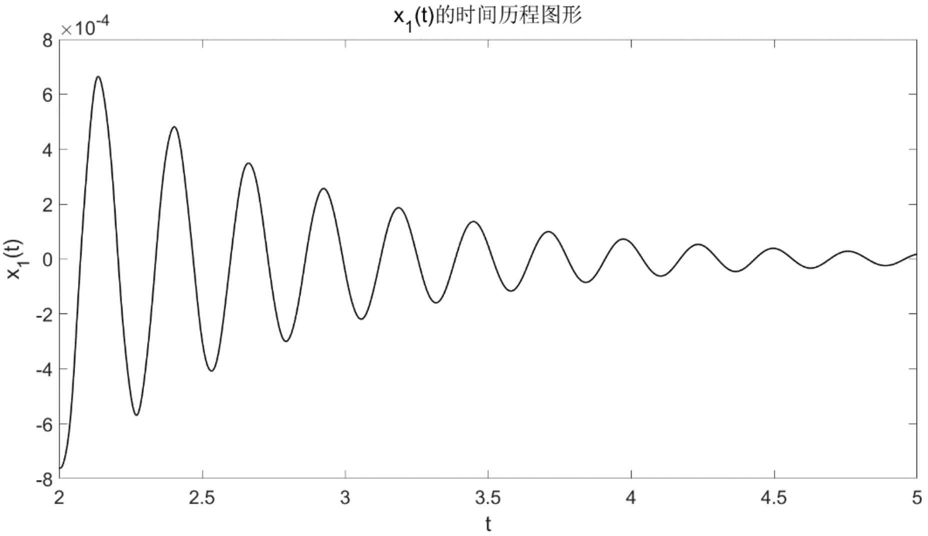
根据$x = u_N x_N$，转换到原始坐标，得；

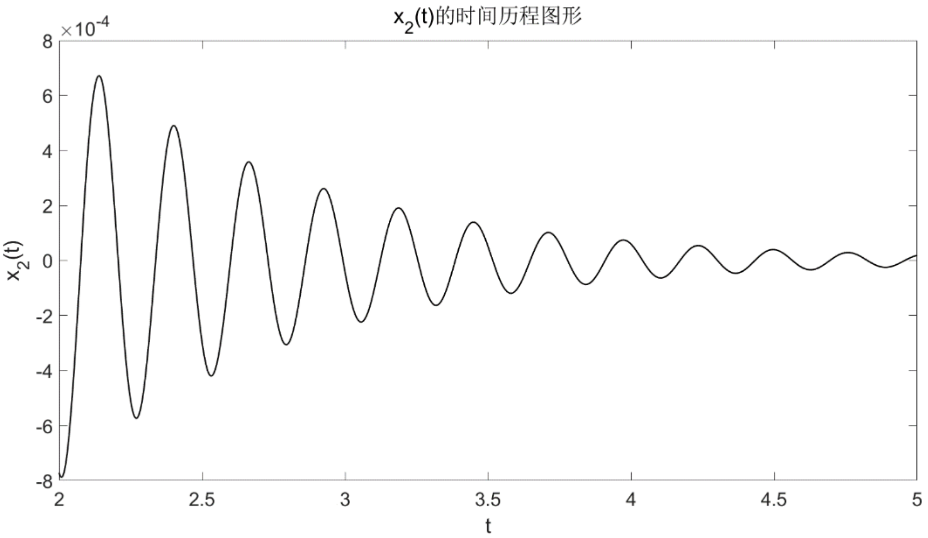
$$x_1(t) = 0.0085986e^{-1.201t}sin(23.989t + 0.4703) - 0.0025077e^{-4.774t}sin(238.63t - 1.406) + 0.013632e^{-3.320t}sin(110.62t - 1.555)$$

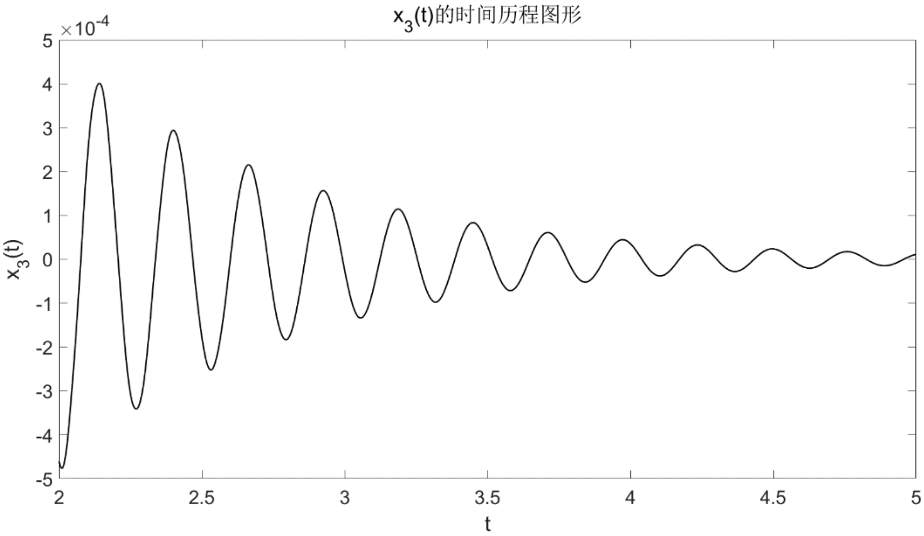
$$x_2(t) = 0.0024826e^{-4.774t}sin(238.63t - 1.406) + 0.0087879e^{-1.201t}sin(23.989t + 0.4703) - 0.0015336e^{-3.320t}sin(110.62t - 1.555)$$

$$x_3(t) = 0.0052639e^{-1.201t}sin(23.989t + 0.4703) - 0.0031265e^{-4.774t}sin(238.63t - 1.406) - 0.00547e^{-3.320t}sin(110.62t - 1.555)$$

曲线绘制如下：







图四：原始坐标 $x_1(t)$、$x_2(t)$、$x_3(t)$自由振动时在 0~5 s 内的时间历程图线

3.5 题目五

激励力的函数表达式为：

$$f(t)=\begin{cases}50 & t\le 2\,s \\ 0 & t>2s\end{cases}\quad N$$

在$t\le 2\ s$时，可将系统的瞬态响应看作由激励产生的强迫振动响应与由初始条件产生的自由振动响应的叠加。则由杜哈美积分方法，激励力产生的瞬态响应为：

$$\tilde{x}(t)=\frac{1}{M\omega_d}\int_0^t p(t)e^{-a\zeta\omega_n(t-\tau)}\ sin\omega_d(t-\tau)d\tau$$

则根据题意，可得激励力产生的瞬态响应：

$$\tilde{x}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{M\omega_d}\displaystyle\int_0^t p(\tau)e^{-a\zeta\omega_n(t-\tau)}\ sin\omega_d(t-\tau)d\tau & t\le 2s \\ \dfrac{1}{M\omega_d}\displaystyle\int_0^2 p(\tau)e^{-a\zeta\omega_n(t-\tau)}\ sin\omega_d(t-\tau)d\tau & t>2s\end{cases}$$

解得：

$$\tilde{x}_{N1}(t)=\begin{cases}0.01352\ -\ 0.013537e^{-1.201t}\,cos(0.050021\ -\ 23.989t) & t\le 2s \\ -0.032516e^{-1.201t}(3.2585cos(23.989t)+\ 3.635sin(23.989t)) & t>2s\end{cases}$$

$$\tilde{x}_{N2}(t)=\begin{cases}0.00078\ -\ 0.00019e^{-3.3202t}(4.045cos(110.62t)\ +\ 0.121sin(110.62t)) & t\leq 2s\\ 0.069156e^{-3.3202t}(1.7782cos(110.62t)\ +\ 8.4565sin(110.62t)) & t>2s\end{cases}$$

$$\tilde{x}_{N3}(t)=\begin{cases}0.000222\ -0.000118e^{-4.7735t}(1.878cos(238.63t)\ +\ 0.0376in(238.63t)) & t\leq 2s\\ 1.0609e^{-4.7735t}(2.8418cos(238.63t)\ -\ 0.072606sin(238.63t)) & t>2s\end{cases}$$

又由于自由振动情况下的相应：

$$\tilde{x}_{h1}(t)=0.03374e^{-1.201t}sin(23.989t+0.4703)$$

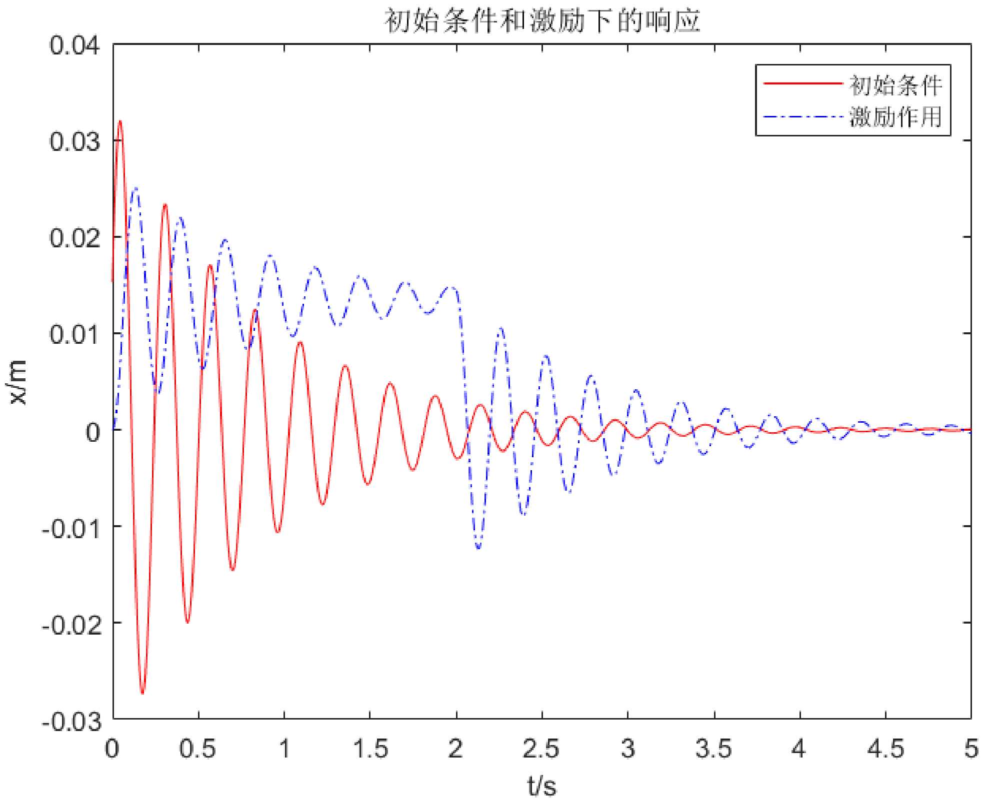
$$\tilde{x}_{h2}(t)=-0.02860e^{-3.320t}sin(110.62t-1.555)$$

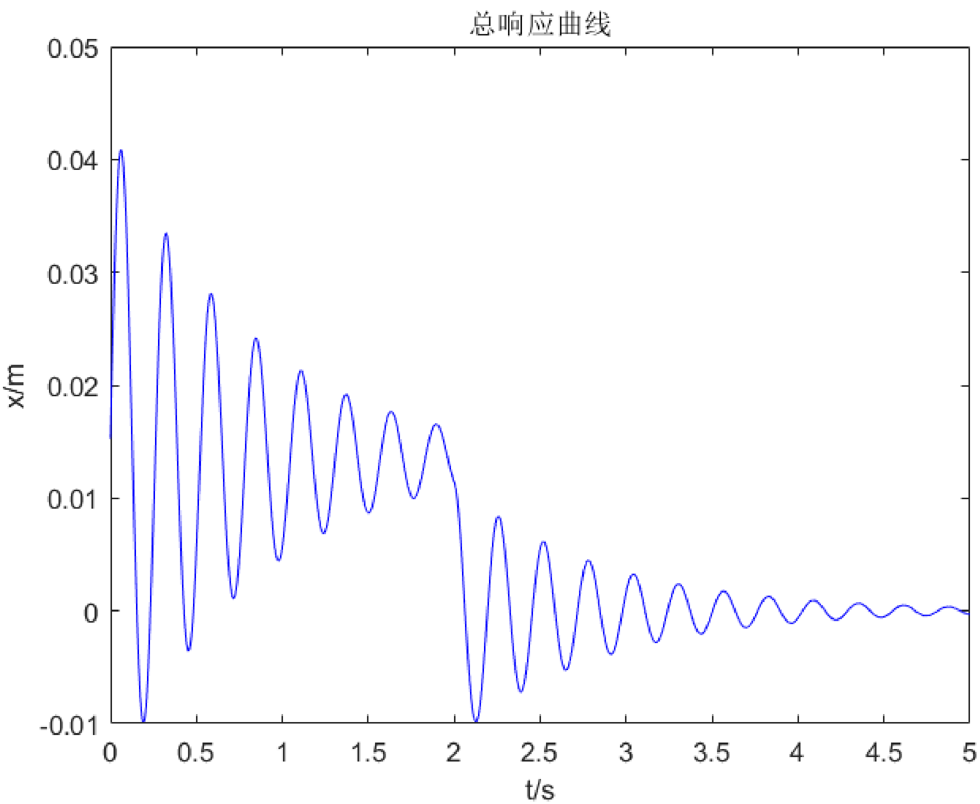
$$\tilde{x}_{h3}(t)=-0.01235e^{-4.774t}sin(238.63t-1.406)$$

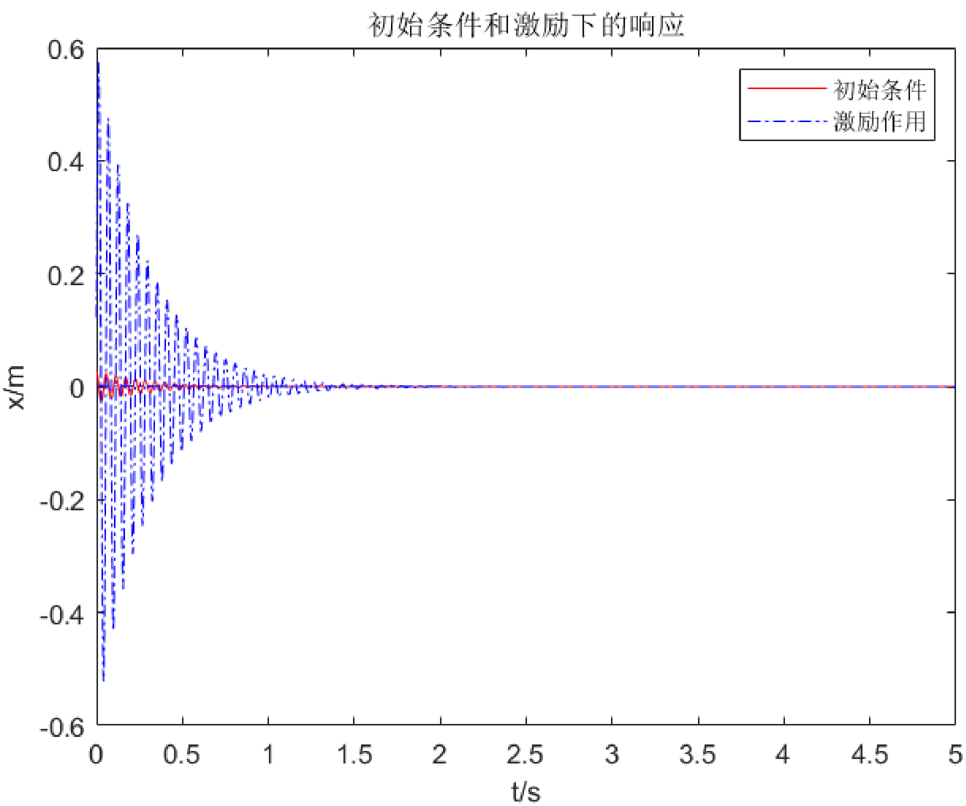
根据：

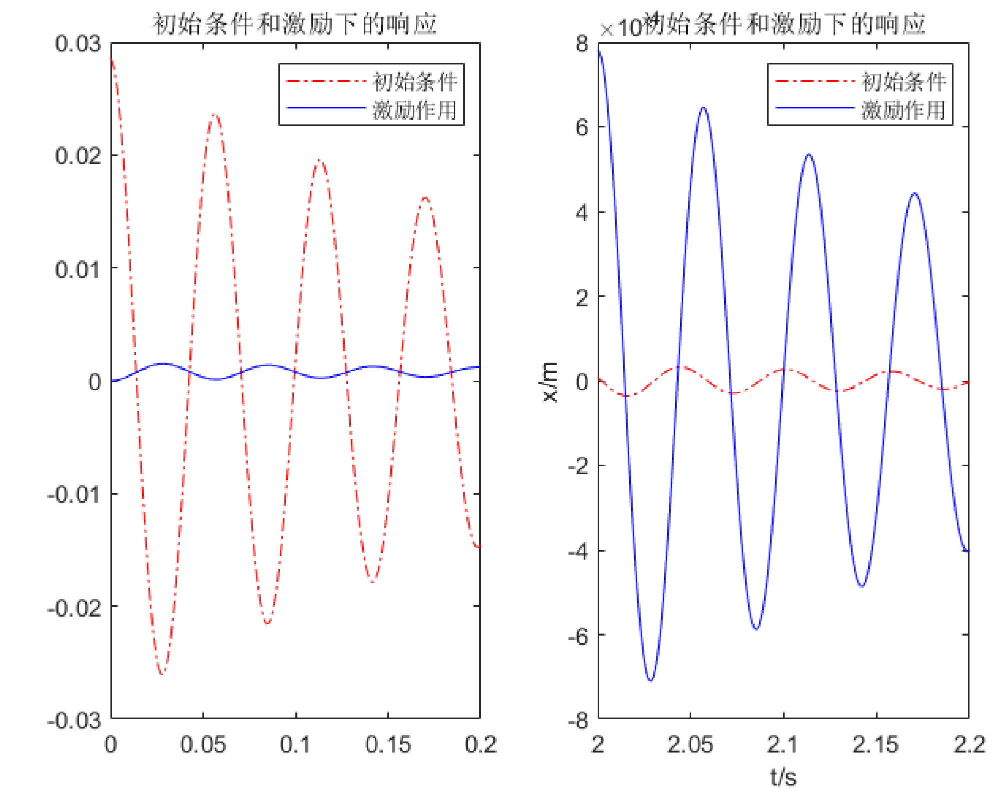
$$x_N(t)=\tilde{x}_N(t)+\tilde{x}_h(t)$$

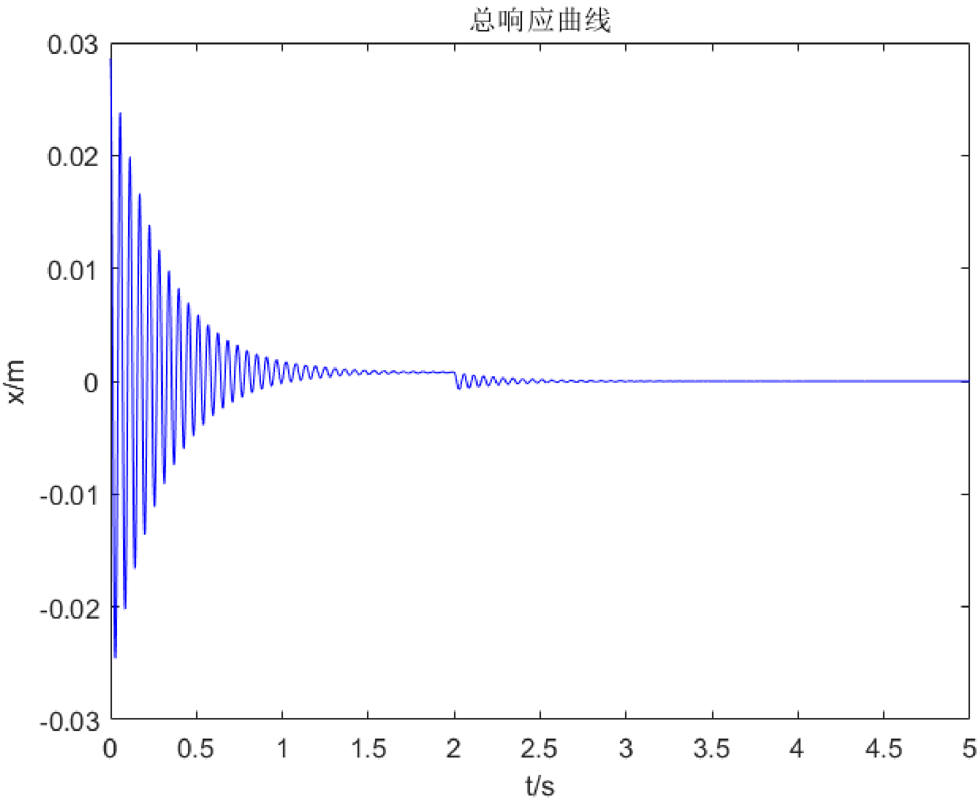
绘制出对应的曲线：

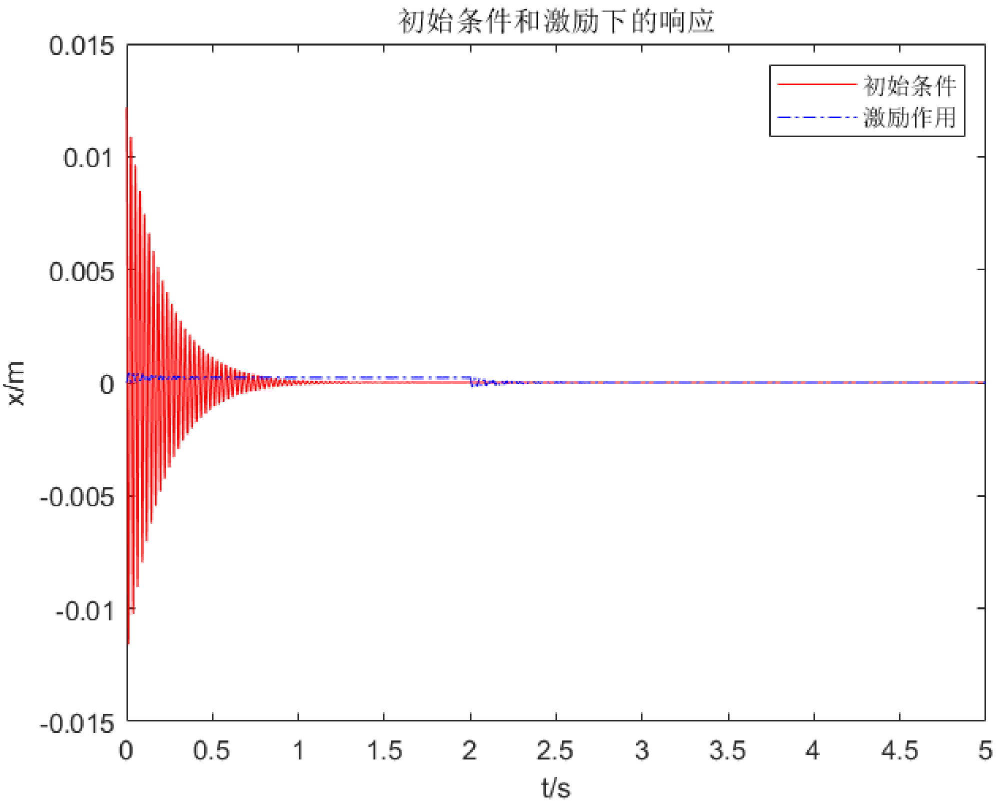


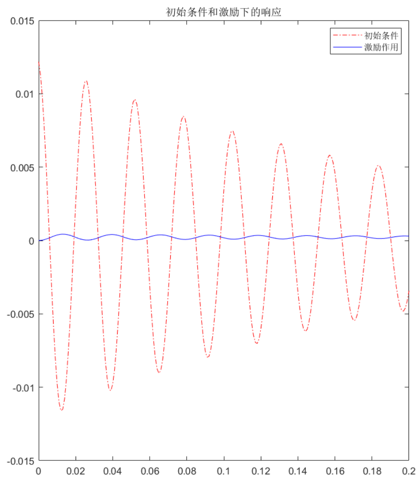

总响应曲线
0.05
0.04
0.03
0.02
0.01
0
-0.01
x/m
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
t/s

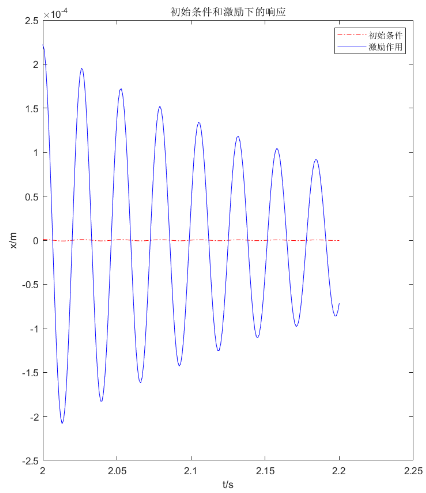

初始条件和激励下的响应
初始条件
激励作用
0.6
0.4
0.2
0
-0.2
-0.4
-0.6
x/m
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
t/s

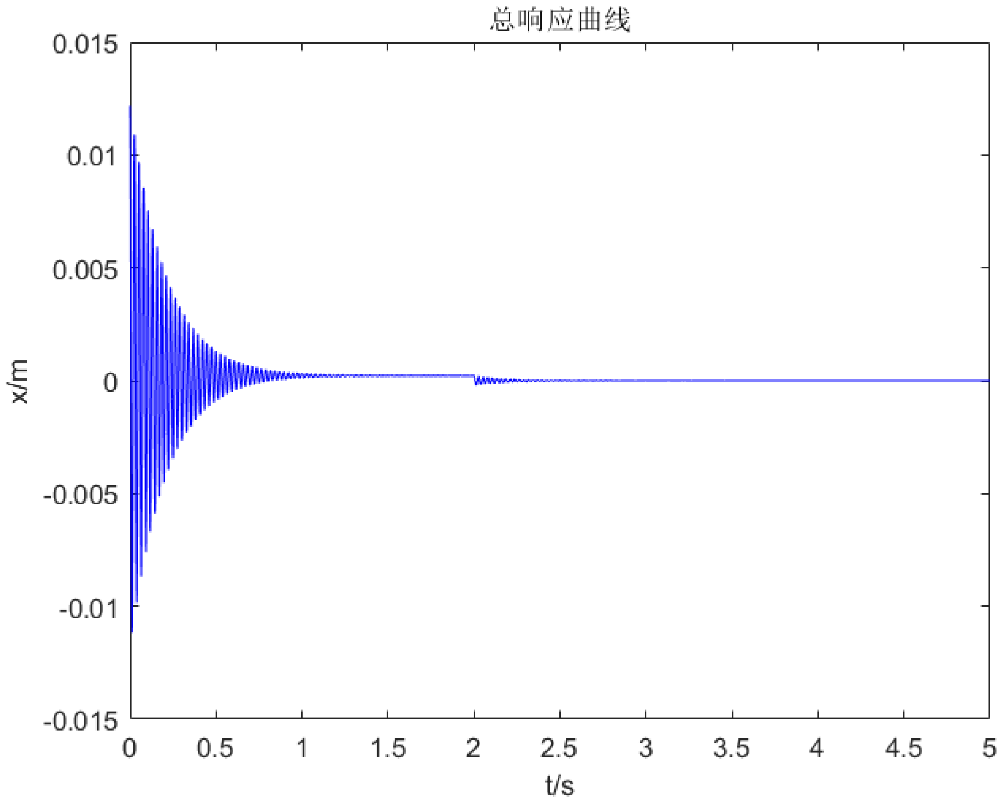

初始条件和激励下的响应
初始条件
激励作用
初始条件和激励下的响应
初始条件
激励作用
x/m
t/s


总响应曲线
x/m
t/s


初始条件和激励下的响应
初始条件
激励作用
x/m
t/s
0.015
0.01
0.005
0
-0.005
-0.01
-0.015
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5


初始条件和激励下的响应
初始条件
激励作用


初始条件和激励下的响应
初始条件
激励作用
x/m
t/s



图五：响应曲线图

又由原始坐标和正则坐标的关系：

$$x = u_N x_N$$

对于 $x_1(t)$，有在受迫振动情况下的响应：

$$\tilde{x}_1(t) = 0.000372e^{-3.3202t}\cos(0.0300 - 110.62t)$$

$$-0.00345e^{-1.201t}\cos(0.050021 - 23.989t)$$

$$-0.0000451e^{-4.7735t}\cos(0.0200 - 238.63t) + 0.0031185$$

$$(t \leq 2s)$$

$$\tilde{x}_1(t) = 0.6318e^{-4.7735t}(\cos(0.2501 - 238.63t))$$

$$-0.2848e^{-3.3202t}(\cos(1.3635 - 110.62t))$$

$$-0.0405e^{-1.201t}(cos(0.8400 - 23.989t))$$

$$(t \geq 2s)$$

自由振动情况下的响应：

$$x_{h1}(t) = 0.0085986e^{-1.201t}sin(23.989t + 0.4703)$$

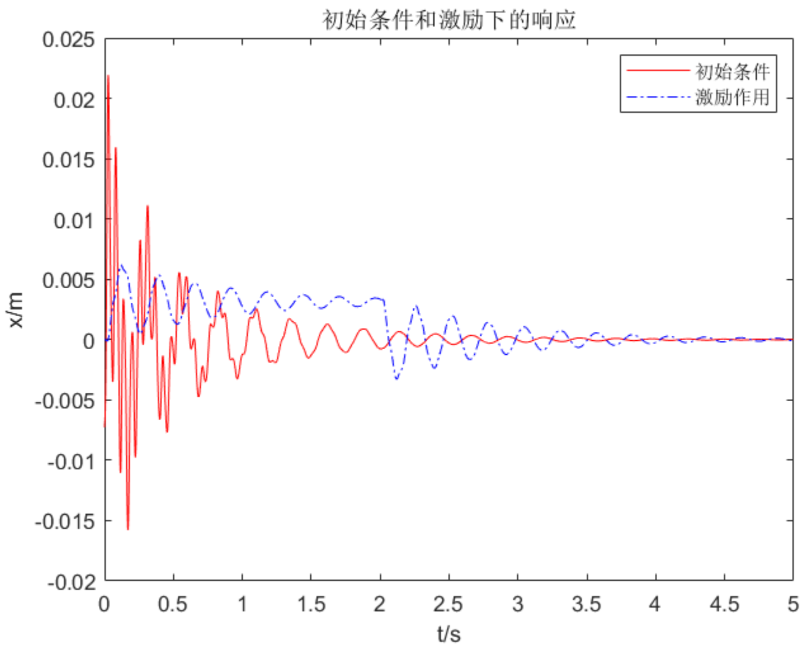
$$-0.0025077e^{-4.774t}sin(238.63t-1.406)$$

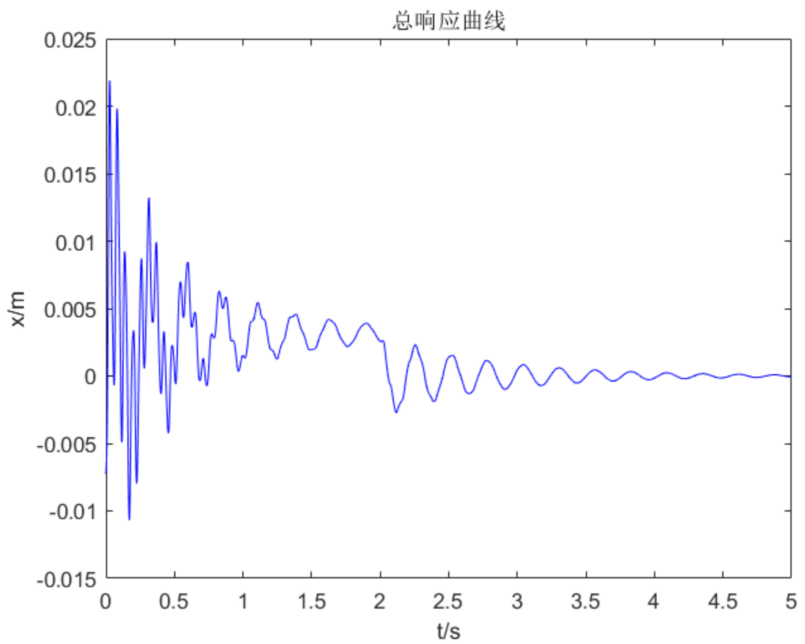
$$+0.013632e^{-3.320t}sin(110.62t-1.555)$$

从而，根据：

$$x_1(t)=\tilde{x}_1(t)+x_{h1}(t)$$

绘制出对应的曲线：





图六：$x_1(t)$ 响应曲线图

对于 $x_2(t)$ ，有在受迫振动情况下的响应：

$$\tilde{x}_2(t) = 0.000044671e^{-4.774t}\cos(0.0200 - 238.63t)$$

$$-0.0035257\,e^{-1.201t}\cos(0.050021 - 23.989t)$$

$$-0.000041884e^{-3.320t}\cos(0.0300 - 110.62t)$$

$$+0.0035185$$

$$(t \le 2s)$$

$$\tilde{x}_2(t) = 0.0320e^{-3.320t}\cos(1.3635 - 110.62t)$$

$$-0.6255e^{-4.774t}\cos(0.2501 - 238.63t)$$

$$-0.0413e^{-1.201t}cos(0.8400 - 23.989t)$$

$$(t \ge 2s)$$

自由振动情况下的响应：

$$x_{h2}(t) = 0.0024826e^{-4.774t}sin(238.63t - 1.406)$$

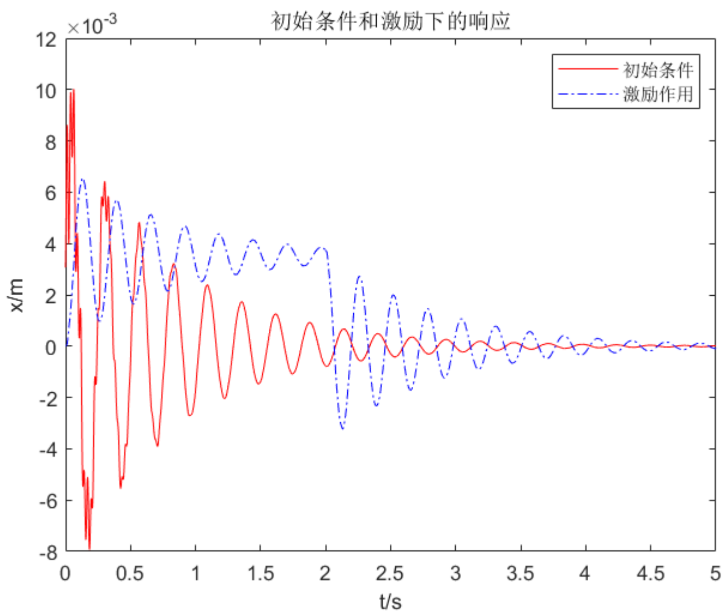
$$+0.0087879e^{-1.201t}sin(23.989t + 0.4703)$$

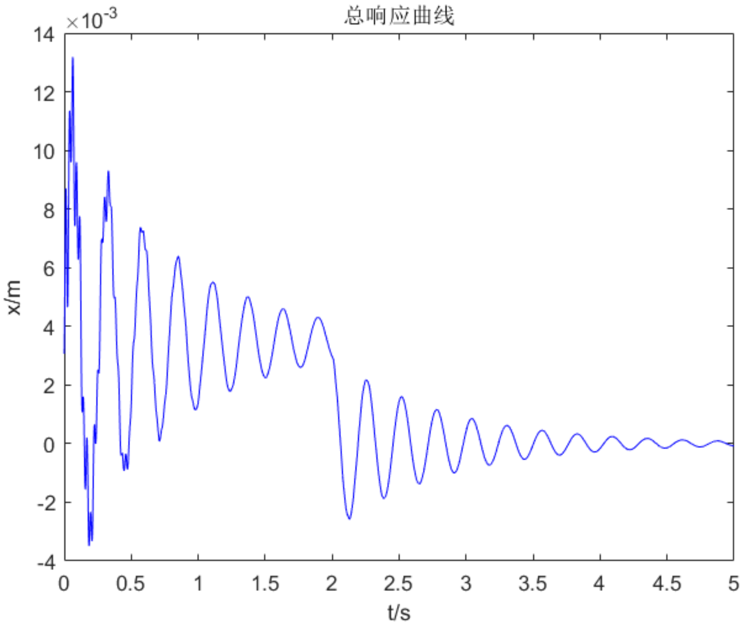
$$-0.0015336e^{-3.320t}sin(110.62t - 1.555)$$

从而，根据：

$$x_2(t) = \tilde{x}_2(t) + x_{h2}(t)$$

绘制出对应的曲线：





图七：$x_2(t)$ 响应曲线图

对于 $x_3(t)$，有在受迫振动情况下的响应：

$$\tilde{x}_3(t) = 0.0023148 - 0.0021119e^{-1.201t}\cos(0.050021 - 23.989 * t)$$

$$-0.000056259e^{-4.774t}\cos(0.0200 - 238.63t)$$

$$-0.00014939e^{-3.320t}\cos(0.0300 - 110.62t)$$

$$(t \le 2s)$$

$$\tilde{x}_3(t) = 0.1143e^{-3.320t}\cos(1.3635 - 110.62 * t)$$

$$+0.7877e^{-4.774t}\cos(0.2501 - 238.63 * t)$$

$$-0.0248e^{-1.201t}\cos(0.8400 - 23.989 * t)$$

$$(t \ge 2s)$$

自由振动情况下的响应：

$$x_{h3}(t) = 0.0052639e^{-1.201t}sin(23.989t + 0.4703)$$

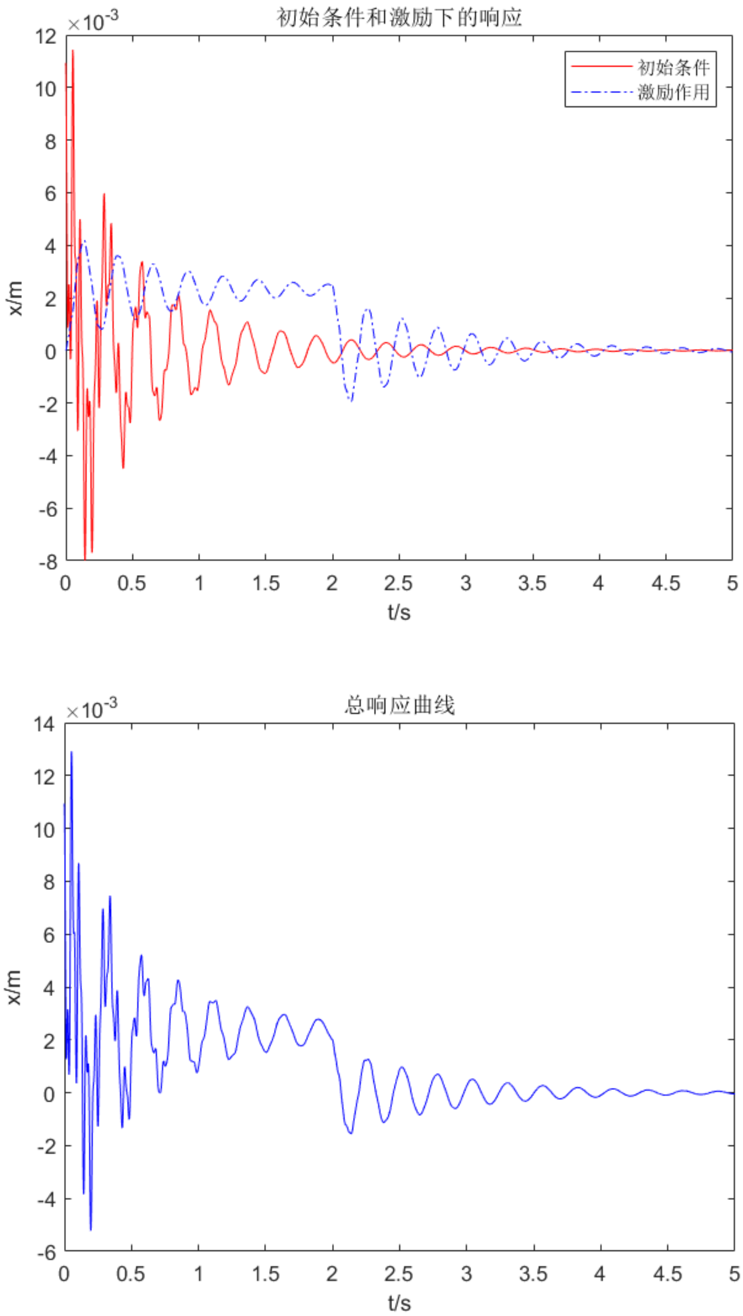
$$-0.0031265e^{-4.774t}sin(238.63t - 1.406)$$

$$-0.00547e^{-3.320t}sin(110.62t - 1.555)$$

从而，根据：

$$x_3(t) = \tilde{x}_3(t) + x_{h3}(t)$$

绘制出对应的曲线：



图八：$x_3(t)$ 响应曲线图

四、参考资料

[1] 机械振动（第二版） 同济大学出版社

[2] 控制工程基础（第四版） 清华大学出版社