同濟大學

机械振动课程大作业（一）

学院　　机械与能源工程学院

专业　　机械设计制造及其自动化

学号　　1853154

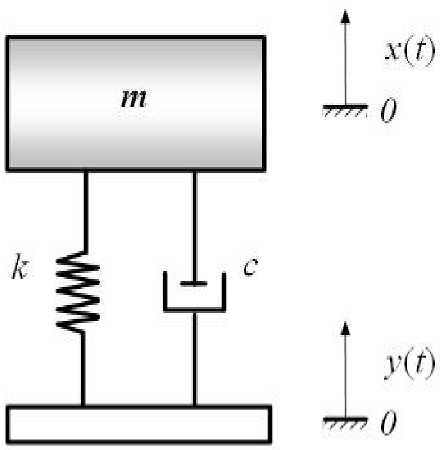
姓名　　郭小宇

指导教师　　秦仙蓉

完成日期　2020 年 11 月 07 日

如图所示是一个小客车行走过程中悬挂系统隔振效果的单自由度分析模型。其中 m 为车身及乘客质量，k 是悬挂系统的刚度，c 是悬挂系统的阻尼，$y(t)$代表汽车在行走时由于路面不平顺引起的强迫位移激励。模型中的相关参数如下：

$m = 1200 + 200N_1$ kg， $k = 50000{+}5000N_2$ N/m， $c = 4000{+}300N_3$ N.s/m 。



(1)列出系统的运动方程，并求系统的固有频率ωn 和阻尼比ζ ；

解：利用数学工具计算：

N_1=mod(1853154,5)=4　　m=1200+200 N_1=2000kg

N_2=mod(1853154,7)=2　　k =50000+5000 N_2=60000N/m

N_3=mod(1853154,9)= 0　　c=4000+200 N_3=4000 N.s/m

N_4=mod(1853154,11)=6

应用牛顿定律可以得到系统的运动方程：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=ky(t)+c\dot{y}(t)$$

代入数据得：

$$2000\ddot{x}+4000\dot{x}+60000x=60000y(t)+4000\dot{y}(t)$$

则系统的固有频率 $\omega_n=\sqrt{\frac{K}{M}}=\sqrt{\frac{60000}{2000}}$rad/s=5.4772rad/s

则系统的阻尼比$\xi=\frac{C}{2\sqrt{MK}}=\frac{4000}{2\sqrt{2000X60000}}$=0.1825

(2) 求解稳态响应 x(t)的表达式，并通过电算画出 0~2 s 内激励 y(t)、稳态响应 x(t)及其它们对应的加速度 $\ddot{y}$（t） 和 $\ddot{x}$(t) 的时间历程图形；

解：有题意激励为：

$y(t)=[(N_3+5)\sin(2\pi t)+(N_2+4)\sin(4\pi t+\frac{\pi}{2})+(N_1+3)\sin(8\pi t+\frac{\pi}{3})]\times 10^{-3}$ m

代入数据得：

$y(t)=[(0+5)\sin(2\pi t)+(2+4)\sin(2\pi t)+(4+3)\sin(2\pi t)]\times 10^{-3}$ m

$=[5\sin(2\pi t)+6\sin(4\pi t+\frac{\pi}{2})+7\sin(8\pi t+\frac{\pi}{3})]\times 10^{-3}$ m

把激励分为三个激励的叠加，分别计算单个激励下的响应：

1. 第一个激励：$y=5\sin(2\pi t)$

$\dot{y}=10\pi\cos(2\pi t)$

输入函数：

$p(t)1=60000\times 5\sin(2\pi t)+4000\times 10\pi\cos(2\pi t)$

$=300000\sin(2\pi t)+40000\pi\cos(2\pi t)$

强迫振动比 $\lambda 1=\frac{\omega}{\omega n}=\frac{2\pi}{5.477}=1.1472$

$$x_{u1}=\frac{f_u}{k\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}=\frac{300000}{60000*\sqrt{(1-1.1472^2)^2+(2*0.1825*1.1472)^2}}=9.5306\times 10^{-3}\ \text{m}$$

$$\Theta_1=-tg^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}=-tg^{-1}\frac{2*0.1825*1.1472}{1-1.1472^2}=-127.05°=-2.2174\text{rad/s}$$

$$x_{u2}=\frac{f_u}{k\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}=\frac{40000*\pi}{60000*\sqrt{(1-1.1472^2)^2+(2*0.1825*1.1472)^2}}=3.9920\times 10^{-3}\ \text{m}$$

$$\Theta_2=-tg^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}=-tg^{-1}\frac{2*0.1825*1.1472}{1-1.1472^2}=-127.05°=-2.2174\text{rad/s}$$

则响应函数:

$x1(t)=9.5306\times\sin(2\pi t-2.2174)+3.9920\times\cos(2\pi t-2.2174)\ (10^{-3}\ \text{m})$

2. 第二个激励： $y=6\sin(4\pi t+\frac{\pi}{2})$

$\dot{y}=24\pi\cos(\pi/2+4\pi t)$

输入函数:

$p(t)2=60000\times 6\sin(4\pi t+\pi/2)+4000\times 24\pi\cos(\pi/2+4\pi t)$

=360000sin(Π/2 + 4Πt) + 96000Πcos(Π/2 + 4Πt)

强迫振动比 $\lambda 2=\frac{\omega}{\omega n}=\frac{4\pi}{5.477}$=2.2944

$x_{u1}=\frac{f_u}{k\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}=\frac{360000}{60000*\sqrt{(1-2.2944^2)^2+(2*0.1825*2.2944)^2}}$=1.3807x$10^{-3}$ m

$\Theta_1=-tg^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}=-tg^{-1}\frac{2*0.1825*2.2944}{1-2.2944^2}$=-168.89°=-2.9477rad/s

$x_{u2}=\frac{f_u}{k\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}=\frac{96000*\pi}{60000*\sqrt{(1-2.2944^2)^2+(2*0.1825*2.2944)^2}}$=1.1567x$10^{-3}$ m

$\Theta_2=-tg^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}=-tg^{-1}\frac{2*0.1825*2.2944^2}{1-2.2944^2}$=-168.89°=-2.9477rad/s

则响应函数:

x2(t)=1.3807sin(4Πt+Π/2-2.9477)+1.1567cos(4Πt+Π/2-2.9477) (10^{-3} m)

3. 第三个激励: $y=7\sin(8\pi t+\frac{\pi}{3})$

$\dot{y}$=56Πcos(Π/3 + 8Πt)

输入函数:

p(t)3=60000x7sin(8Πt+Π/3)+ 4000x56Πcos(Π/3 + 8Πt)

=380000sin(8Πt+Π/3)+ 224000Πcos(Π/3 + 8Πt)

强迫振动比 $\lambda 3=\frac{\omega}{\omega n}=\frac{8\pi}{5.477}$=4.5888

$x_{u1}=\frac{f_u}{k\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}=\frac{380000}{60000*\sqrt{(1-4.5888^2)^2+(2*0.1825*4.5888)^2}}$=0.3478x$10^{-3}$ m

$\Theta_1=-tg^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}=-tg^{-1}\frac{2*0.1825*4.5888}{1-4.5888^2}$=-175.23°=-3.0583rad/s

$x_{u2}=\frac{f_u}{k\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}=\frac{224000*\pi}{60000*\sqrt{(1-4.5888^2)^2+(2*0.1825*4.5888)^2}}$=0.5827x$10^{-3}$ m

$\Theta_2=-tg^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}=-tg^{-1}\frac{2*0.1825*4.5888}{1-4.5888^2}$=-175.23°=-3.0583rad/s

则响应函数:

$x3(t)=0.3478\sin(8\pi t+\pi/3-3.0583)+0.5827\cos(8\pi t+\pi/3-3.0583)\ (10^{-3}\ m)$

则总响应函数：

$$x(t)=x1(t)+x2(t)+x3(t)$$

代入数据得：

$x(t)=9.5306\sin(2\pi t-2.2174)+3.9920\cos(2\pi t-2.2174)+$

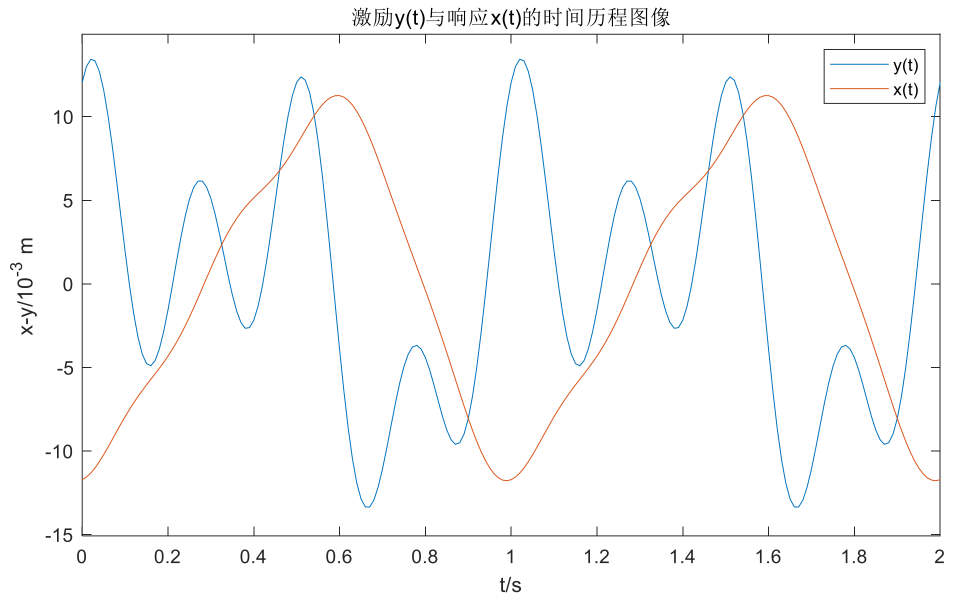
$1.3807\sin(4\pi t+\pi/2-2.9477)+1.1567\cos(4\pi t+\pi/2-2.9477)+$

$0.3478\sin(8\pi t+\pi/3-3.0583)+0.5827\cos(8\pi t+\pi/2-3.0583)$

化简得：$x(t)=10.3329\sin(2\pi t-1.8207)+1.8012\ \sin(4\pi t-$

$0.6796)+0.6786\sin(8\pi t-0.9784)\quad(10^{-3}\ m)$

得到响应与激励的图像:



则激励的加速度：

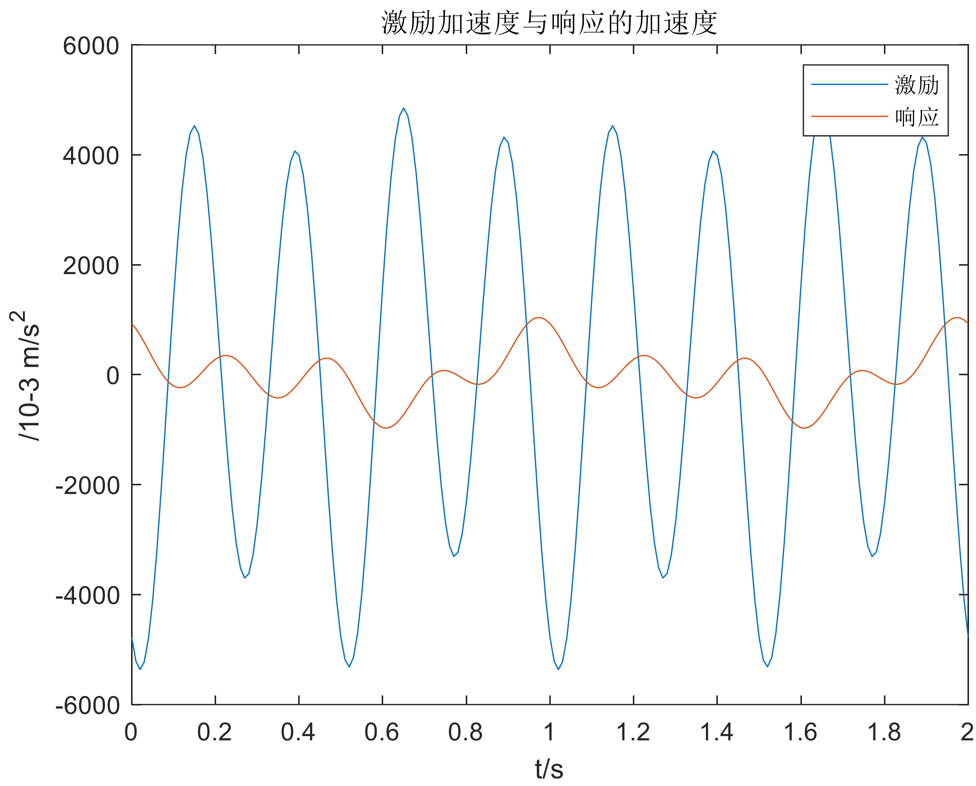
$\ddot{y}(t)=-20\pi^2\sin(2\pi t)-96\pi^2\sin(\pi/2+4\pi t)-448\pi^2\sin(8\pi t+\frac{\pi}{3})\quad(10^{-3}\ m/s^2)$

对应的响应的加速度：

$\ddot{x}(t)=-10.3329x4\pi^2\sin(2\pi t-1.8207)-1.8012x16\pi^2\sin(4\pi t-$

$0.6796)+0.6786x64\pi^2\sin(8\pi t-0.9784)\quad(10^{-3}m/s^2)$

图像：



(3)推导 ， Hy，x(ω)的表达式，并通过电算画出,Hy，x(ω)在 0~10π rad/s 以内的幅频特性和相频特性曲线；

解： 由振动的运动方程：

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=ky(t)+c\dot{y}(t)$$

其输入为：$p(t)= ky(t)+c\dot{y}(t)$

其输出为：$v(t)=x(t)-y(t)$

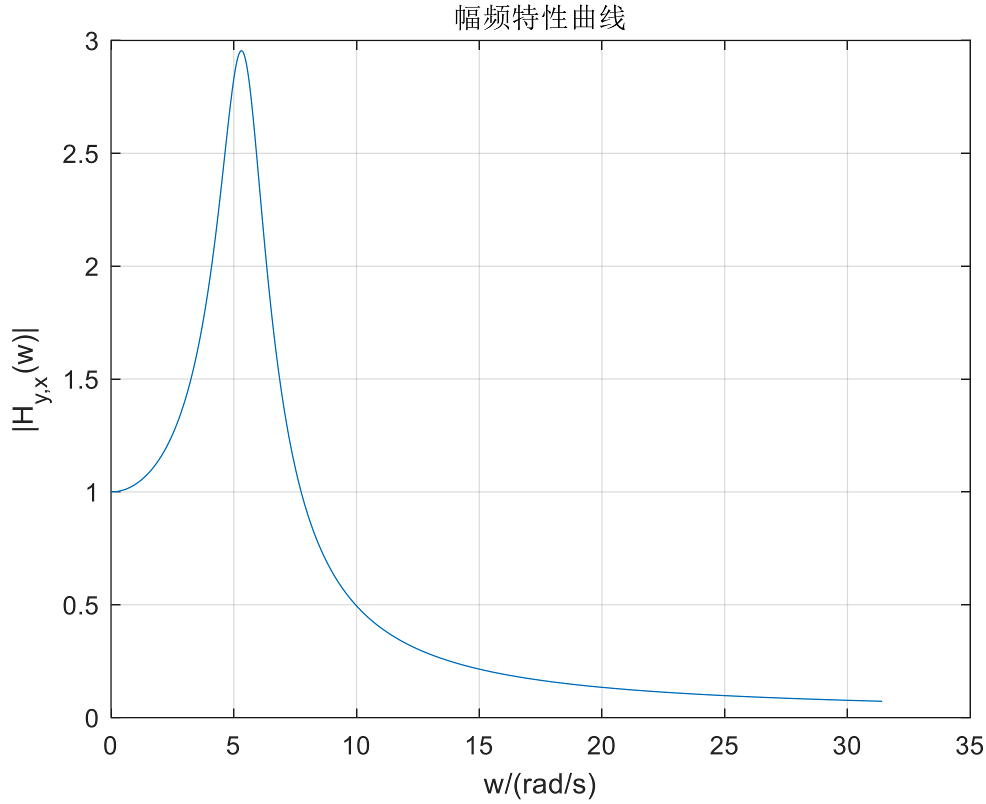
则频率响应函数为：

$$H_{y,x}(\omega)=\frac{X(\omega)}{Y(\omega)}=\frac{X(\omega)}{P(\omega)}X\frac{P(\omega)}{Y(\omega)}=H_{p,x}(\omega)X(k+c\omega j)=\frac{k+j\omega c}{(k-\omega^2 m)+j\omega c}$$

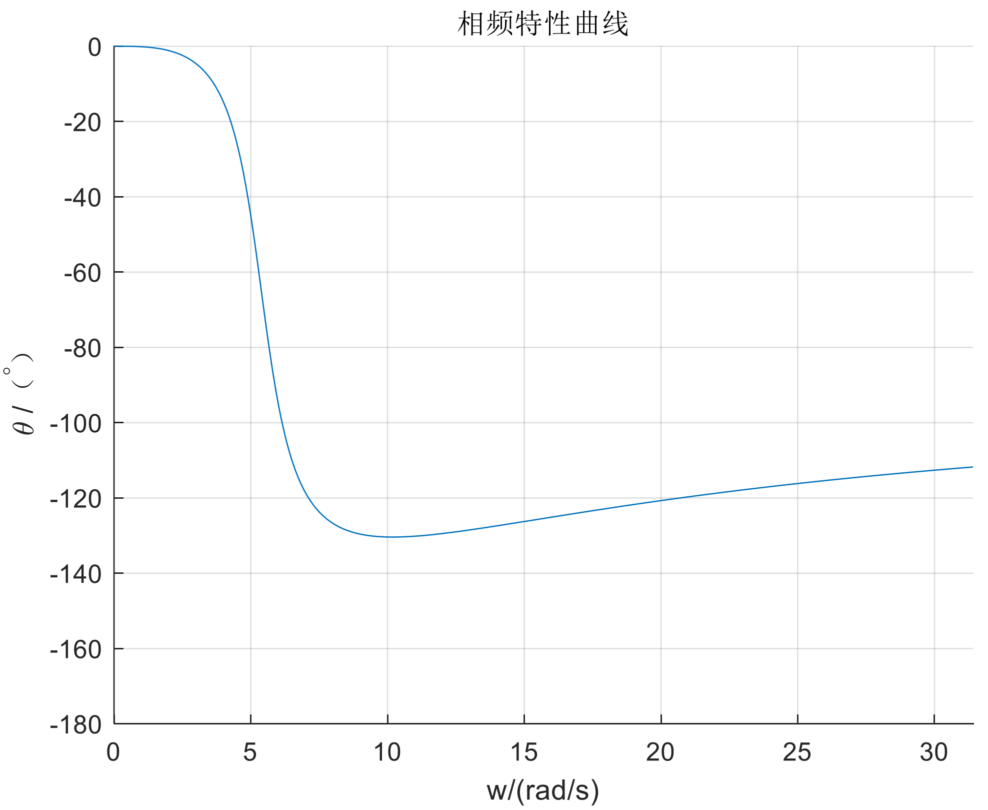
代入数据得：

$$H_{y,x}(\omega)=\frac{60000+j\omega 4000}{(60000-\omega^2 2000)+j\omega 4000}=\frac{30+j\omega 2}{(30-\omega^2)+j\omega 2}$$

幅频特性图：

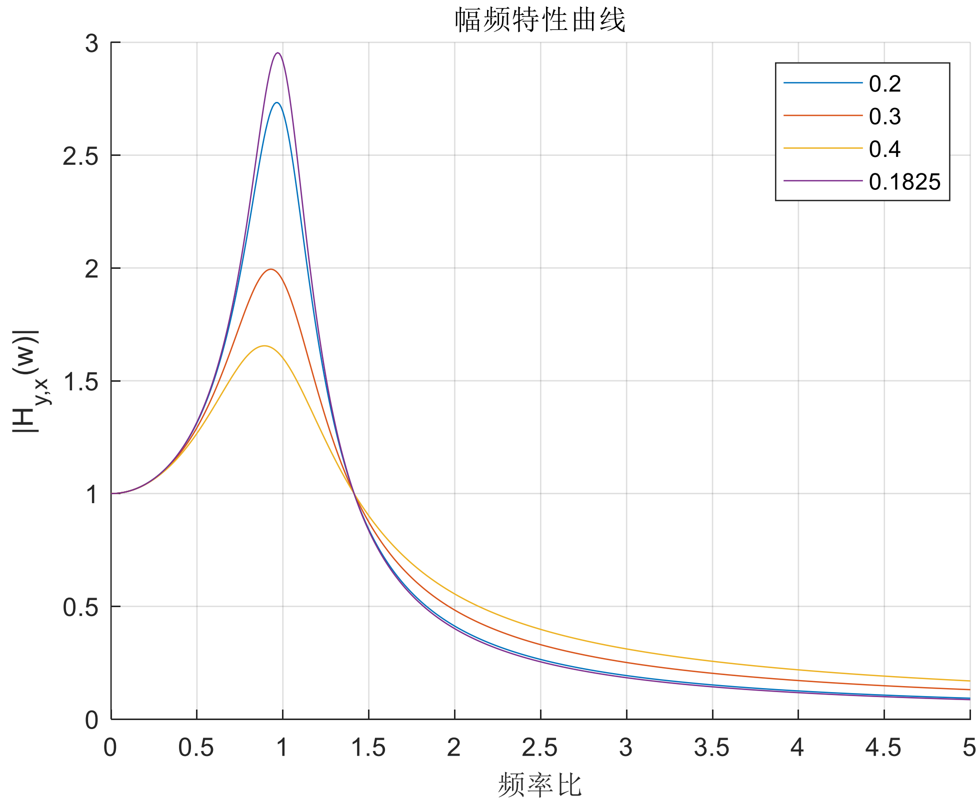

幅频特性曲线
3
2.5
2
1.5
1
0.5
0
0
5
10
15
20
25
30
35
w/(rad/s)
|H_{y,x}(w)|

相频特性图：


相频特性曲线
0
-20
-40
-60
-80
-100
-120
-140
-160
-180
0
5
10
15
20
25
30
w/(rad/s)
θ / (°)

(4)通过 ,Hy x （ω ）的幅频特性曲线，分析讨论作为一般的小客车悬挂系统，其固有频率ωn 和阻尼比ζ 的取值是否合理。

解：改变 k 和 c,使得阻尼比ξ分别为 0.1825、0.2、0.3、0.4，再画入同一图中得：



从图中可以分析出当阻尼比越小时，在共振区对峰值的扼制越不明显，对减小最大振幅不利，但能在隔振区使隔振的效果放大，减小振幅的高度。小客车的阻尼比一般为 0.2-0.4,能满足在外来激励复杂时，其减震系统在共振区与非共振区都有好的减振效果即在共振区能使最大幅度偏小，在隔振区也能保持较小的振幅。值得注意的是当只有频率比 λ 大于$\sqrt{2}$时系统的隔振效果才有，即客车的固有频率 w_n满足 $w/w_n>\sqrt{2}$时，客车的减振最佳。

(5)） 在保持质量不变的前提下，讨论 k 和 c 的改进建议，并重新作出改进后的 ，Hy,x(ω)的幅频特性曲线和（2）中稳态响应加速度 $\ddot{x}$ (t) 的时间历程图形。

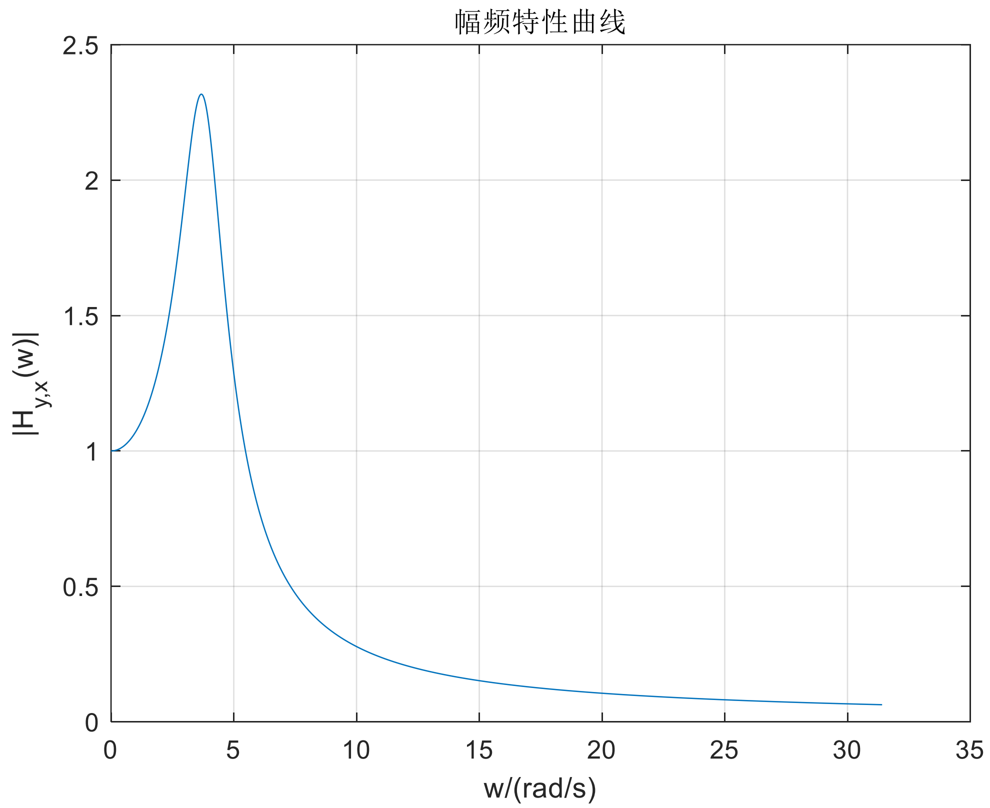
解： 由于 w_n=5.4772，激励频率与固有频率的比值 λ1、 λ2、 λ3 都大于$\sqrt{2}$，都有隔振的效果，考虑到在隔振区的效果，和在共振区的幅值，阻尼比偏小，

应取大最佳，同时又有人体的不舒适度的频率为3-17Hz,要避免系统的固有频率与之相近，从而可以使在人体不舒适的激励下，系统处于隔振区，振幅处于较小值。即 wn 在 1Hz 附近，阻尼比在 0.2-0.4 之间取较大值。可以使 k 减小，c 也可适当增大。

即：ξ=0.25　　此时取 m =2000kg　　k =30000N/m　　c=3800 N.s/m

则频率响应函数为：$H_{y,x}(\omega)=\dfrac{30000+j\omega 3800}{(30000-\omega^2 2000)+j\omega 3800}$

图像：



计算稳态响应加速度 $\ddot{x}$（t）：

则系统的阻尼比ξ=0.25　　　　　ωn=3.8730(rad/s)

把激励分为三个激励的叠加，分别计算单个激励下的响应：

1. 第一个激励：y=5sin(2πt)

$\dot{y}$=10πcos(2πt)

输入函数：

p(t)1=30000x5sin(2πt)+3800x10πcos(2πt)

强迫振动比λ1=$\frac{\omega}{\omega n}$=$\frac{2\pi}{3.8730}$=1.6223

$x_u=\frac{f_u}{k\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$ ==3.5196x10^{-3} m

Θ=$-tg^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}$=$-tg^{-1}\frac{2*0.2*1.6223}{1-1.6223^2}$=-127.05°=-2.6878rad/s

则响应函数:

x1(t)=3.5196sin(2πt-2.6878) (10^{-3} m)

2. 第二个激励: y=6sin(4πt+$\frac{\pi}{2}$)

$\dot{y}$=24πcos(4πt+$\frac{\pi}{2}$)

输入函数:

p(t)2=30000x6sin(4πt+π/2)+3800x24πcos(π/2+4πt)

强迫振动比λ2=$\frac{\omega}{\omega n}$=$\frac{4\pi}{3.8730}$=3.2446

$x_u=\frac{f_u}{k\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$=1.1676x$10^{-3}$ m

Θ=$-tg^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}+\frac{\pi}{2}$=$-tg^{-1}\frac{2*0.2*3.2446}{1-3.2446^2}+\frac{\pi}{2}$=-168.56°+$\frac{\pi}{2}$=-1.4053rad/s

则响应函数:

x2(t)=1.1676sin(4πt-1.4053) (10^{-3} m)

3. 第三个激励: y=7sin(8πt+$\frac{\pi}{3}$)

$\dot{y}$=56πcos(π/3 + 8πt)

输入函数:

p(t)3=30000x7sin(8πt+$\frac{\pi}{3}$)+ 3800x56πcos(8πt+$\frac{\pi}{3}$)

强迫振动比λ3=$\frac{\omega}{\omega n}$=$\frac{8\pi}{3.8730}$=6.4892

$x_u=\frac{f_u}{k\sqrt{(1-\lambda^2)^2+(2\xi\lambda)^2}}$ ==0.5664x10^{-3} m

$\Theta=-tg^{-1}\frac{2\xi\lambda}{1-\lambda^2}+\frac{\pi}{3}=-tg^{-1}\frac{2*0.2*6.4892}{1-6.4892^2}+\frac{\pi}{3}=-175.01°+\frac{\pi}{3}=-2.0171rad/s$

则响应函数:

$x3(t)=0.5664\sin(8\pi t-2.0171)$ (10^{-3} m)

则总响应函数:

$$x(t)=x1(t)+x2(t)+x3(t)$$

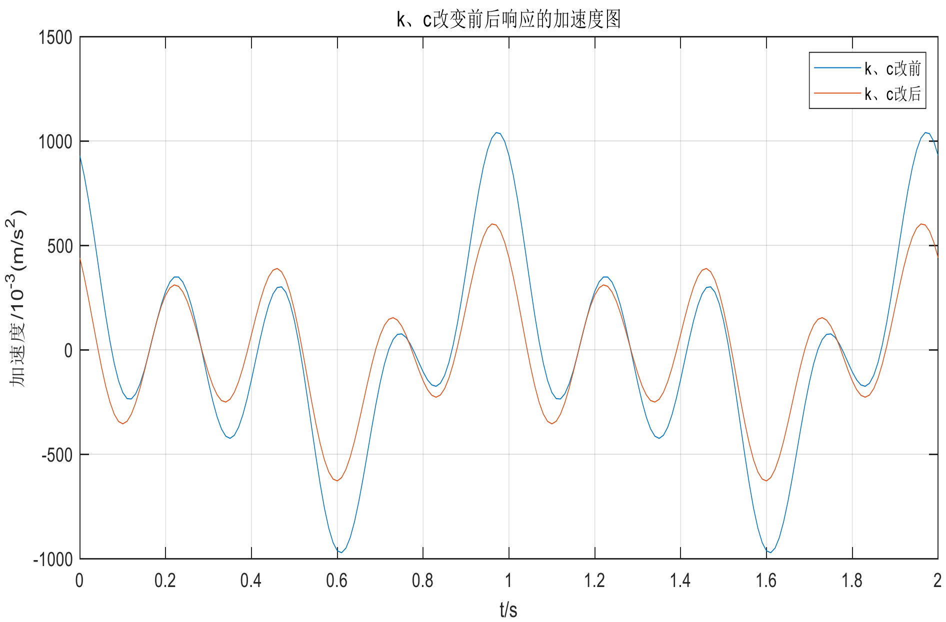
$x(t)= 3.5196\sin(2\pi t-2.6878)+ 1.1676\sin(4\pi t-1.4053)+$

$0.5664\sin(8\pi t-2.0171)$ (10^{-3} m)

则$\ddot{x}(t)=-138.9\sin(2\pi t-2.6878)- 184.4\sin(4\pi t-1.4053)-357.8\sin(8\pi t-$

$2.0171)$ (10^{-3} m)

前后加速度对比图像为:



明显改后的加速度幅值减小了百分之四十左右，k、c 取的值比较合理。

注：程序见附件。