LQR

一、LQR 线性二次型调节器

1.1 LQR 介绍

LQR(linear quadratic regulator) 线性二次型调节器，利用现代控制理论中以状态空间矩阵形式给出的线性系统, 利用目标函数 (能量函数)$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty (x^TQx+u^TRu)dt$（其中 Q 为半正定矩阵，R 为正定矩阵），设计状态反馈控制器 K 使得目标函数的值最小．LQR 控制器可以在系统偏离平衡状态时，尽可能减少消耗的能量保持系统状态各分量仍接近平衡状态. 以一维系统 $X=x(t)$ 为例，则 $x^TQx=Qx^2$, 为了使得 J 最小，那么该函数一定有界，故有下式

$$\lim_{t\to\infty} x(t)=0 \tag{1}$$

这保证了系统的稳定性，类似的 $u(t)$ 小保证了节省能量，控制代价降低.

1.2 LQR 控制器原理性推导

线性系统的状态空间可以描述为

$$\begin{aligned}\dot{X}&=AX+Bu\\ Y&=CX+Du\end{aligned} \tag{2}$$

评价函数为

$$J=\frac{1}{2}\int_0^\infty (x^TQx+u^TRu)dt \tag{3}$$

QR 分别是对状态变量和输入量的加权矩阵，确定误差和能量损耗的相对性.
根据极小值原理，引入 n 维协态矢量 $\lambda(t)$, 构造哈密顿函数

$$H(x,u,\lambda)=\frac{1}{2}[x^TQx+u^TRu]+\lambda^T[Ax+Bu] \tag{4}$$

最优控制使得 H 取极值，即

$$\frac{\partial H}{\partial u}=Ru+B^T\lambda=0 \tag{5}$$

解得

$$u=-R^{-1}B^T\lambda \tag{6}$$

又有

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}=R \tag{7}$$

R 正定，故上式为系统的最优控制律.
设 $\lambda=Px$,P 为 n 阶实对称正定矩阵，且满足黎卡提矩阵代数方程

$$-PA-A^TP+PBR^{-1}B^T-Q_1=0 \tag{8}$$

则最优控制

$$u=-R^{-1}B^T\lambda=-Kx \tag{9}$$

系统最优轨线为

$$\dot{x}(t)=(A-BK)x(t) \tag{10}$$

在 $matlab$ 中可以利用 lqr 函数求得反馈矩阵 K.

1.3 LQR 的系统能控性和能观性分析

对于上面假设的线性系统，状态完全能控制的充要条件是

$$rank[B,AB,A^2B,\dots A^{n-1}B]=n \tag{11}$$

系统状态能够完全观测的充要条件是

$$rank\begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}=n \tag{12}$$

1.4 小车系统权重的选取以及能控性能观性分析

前面得到小车的状态空间方程为

$$\begin{gathered}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}u' \\
\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}u'
\end{gathered} \tag{13}$$

在 $matlab$ 中 (代码见附录) 进行矩阵秩计算可知两个判定矩阵的秩都是 4, 则小车倒立摆系统可控可观测.

1.5 小车倒立摆仿真

首先根据系统的运动微分方程在 *matlab* 中的 *simulink* 进行仿真，由上述矩阵导出参考方程, 为方便，将一些量名称更改如下

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &\rightarrow \dot{x}_1 \\
\ddot{x} &\rightarrow \dot{x}_2 \\
\dot{\varphi} &\rightarrow \dot{x}_3 \\
\ddot{\varphi} &\rightarrow \dot{x}_4
\end{aligned} \tag{14}
$$

则有

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1 = x_2 \\
&\dot{x}_2 = u \\
&\dot{x}_3 = x_4 \\
&\dot{x}_4 = 29.4x_3 + 3u \\
&u = -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 - k_4x_4
\end{aligned} \tag{15}
$$

得到如图 1的仿真

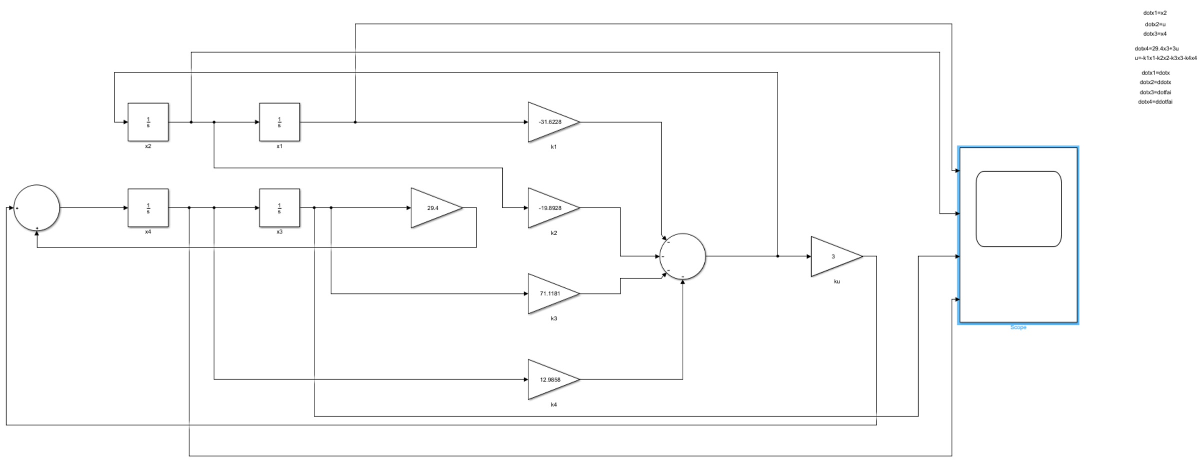

图 1 *LQRsimulink*

这种仿真可以通过给定 x_i 的初始值来模拟脉冲激励

给定小车 5 单位位移，摆杆 5 单位角度, 可以得到如图 3的响应曲线.

可以发现系统可以稳定. 关于修改权重以及关于曲线的比较分析在后面介绍.

此外也可以利用编程来模拟仿真，以 *lsim* 函数模拟的阶跃信号为例，编写代码（见附件）也可以得到响应曲线如图 4

1.6 修改权重分析比较

依次修改 $Q_{11}Q_{22}Q_{33}Q_{44}$ 权重（值见图片），建立如图 5的仿真

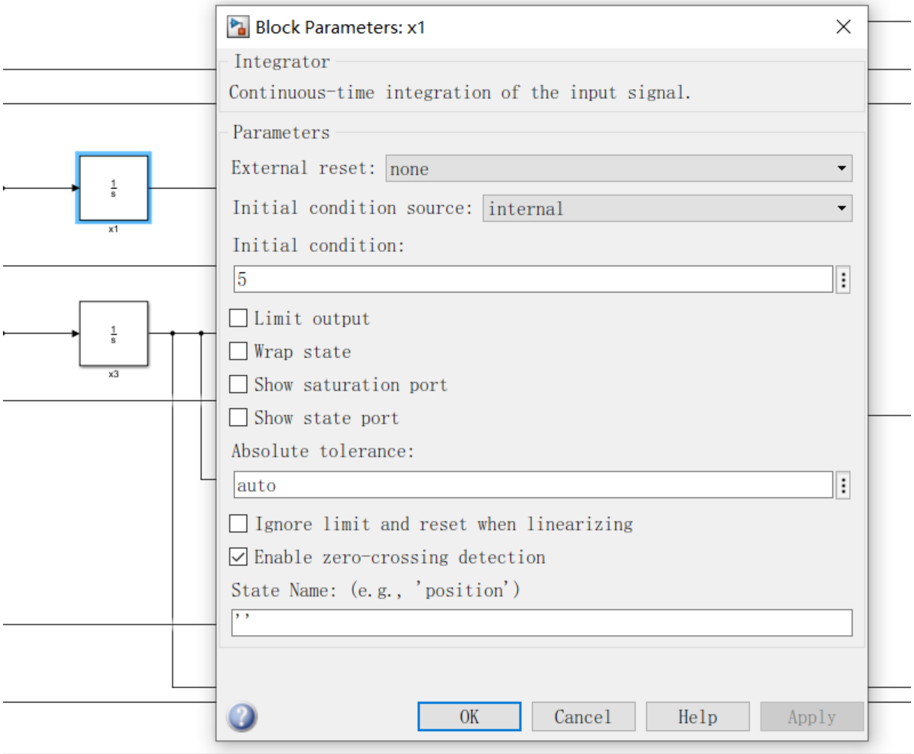

图 2 模拟脉冲激励

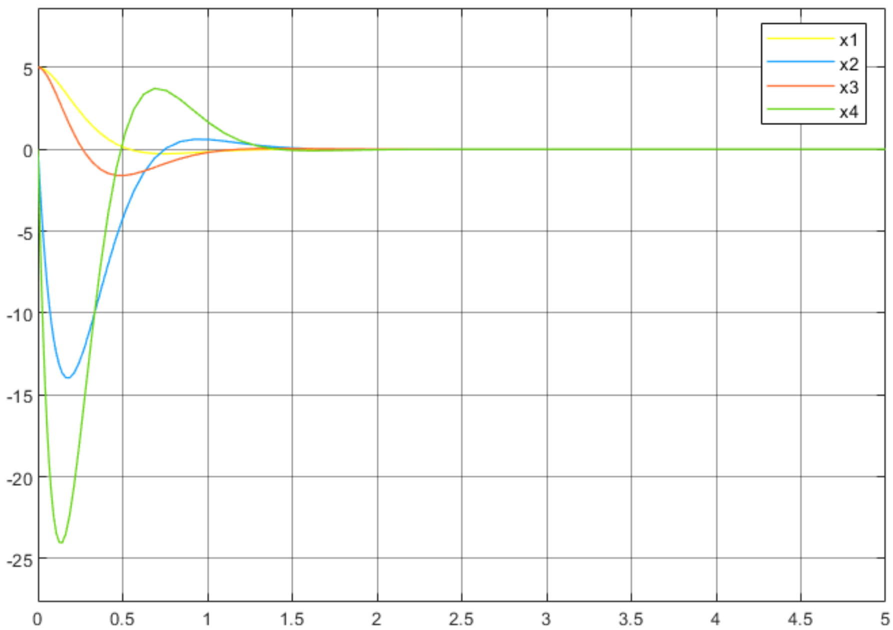

图 3 脉冲激励仿真结果

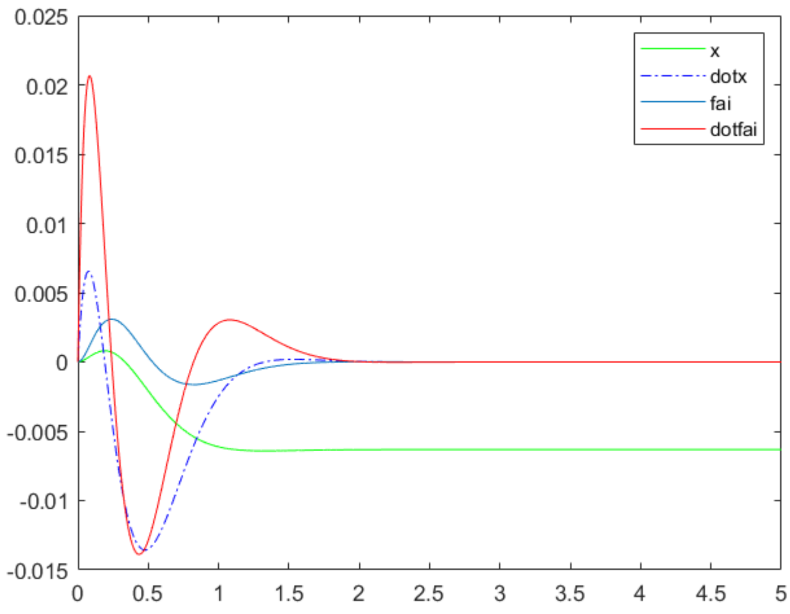

图 4 阶跃激励仿真结果

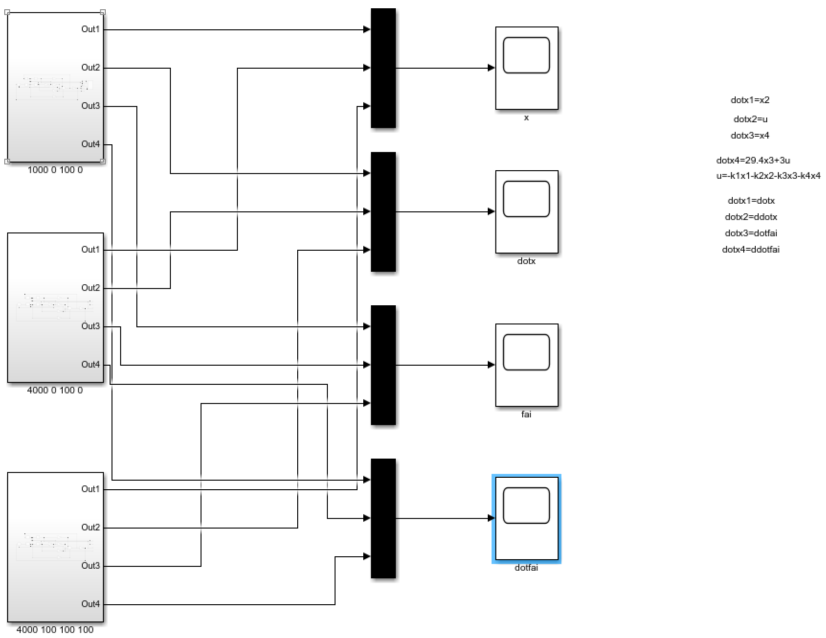

图 5 比较仿真

观察比较仿真结果如图 6

不难发现这三组数据都可以保证小车和摆杆的稳定性，都可以比较快速的达到稳定状态，区别就是随着权重的增大，控制目标变量可以更快的达到稳定，并且超调量变小，但是权重的变大意味着输入的能耗增加（如图 7），不是最经济的选择.

因此，在可以快速的稳定这个前提下，应该尽可能减小权重值. 最终我们选定 $Q11 =$

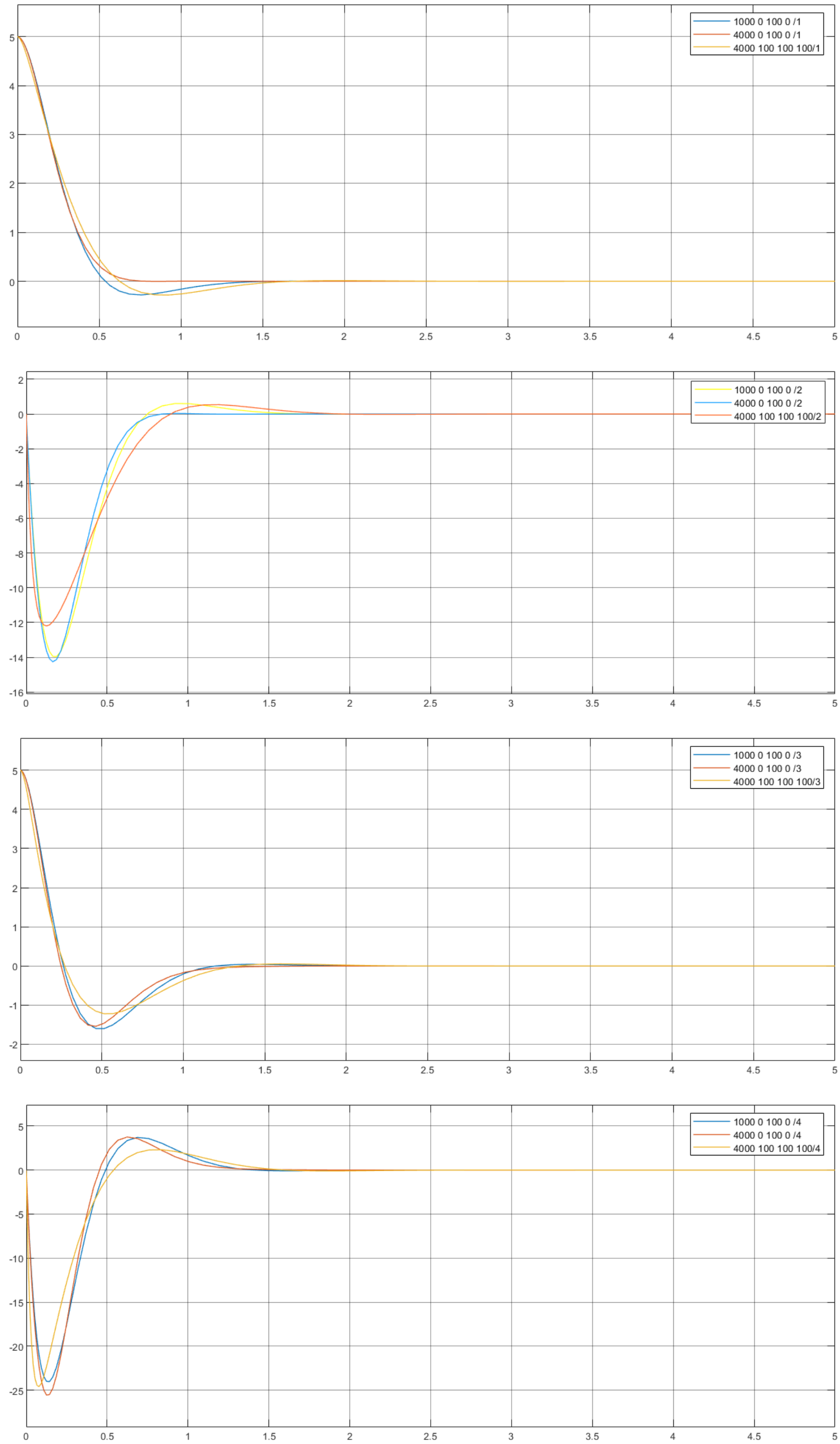
1000 0 100 0 /1
4000 0 100 0 /1
4000 100 100 100/1
1000 0 100 0 /2
4000 0 100 0 /2
4000 100 100 100/2
1000 0 100 0 /3
4000 0 100 0 /3
4000 100 100 100/3
1000 0 100 0 /4
4000 0 100 0 /4
4000 100 100 100/4

图 6 数据比较

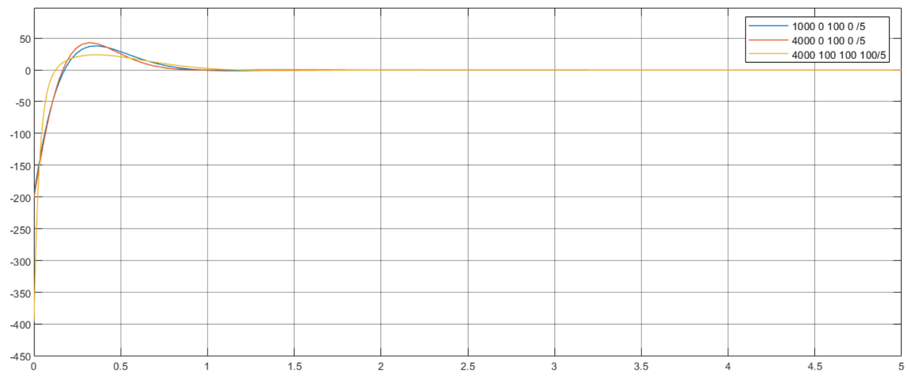

图 7 u

1000, $Q33 = 100$ 这个权重值，其对应 K 矩阵为

$$K = \begin{bmatrix} -31.6228 \\ -19.8928 \\ -71.1181 \\ 12.9858 \end{bmatrix} \tag{16}$$

附 录

```
%系统能控性与能观性判定
A=[0 1 0 0;
   0 0 0 0;
   0 0 0 1;
   0 0 29.4 0];
B=[0 1 0 3]';
C=[1 0 0 0;
   0 0 0 1];
D=[0 0]';
Co=ctrb(A,B);
rank(Co)
Ob=obsv(A,C);
rank(Ob)

%模拟阶跃信号
A=[0 1 0 0;0 0 0 0;0 0 0 1;0 0 29.4 0];
B=[0 1 0 3]';
C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
D=[0 0 ]';
Q11=1000;
Q33=100;%该值可以更改
Q=[Q11 0 0 0;0 0 0 0;0 0 Q33 0;0 0 0 0];
R=1;
K=lqr(A,B,Q,R);
Ac=(A-B*K);
T=0:0.001:5;
U=0.2*ones(size(T));
[Y,X]=lsim(Ac,B,C,D,U,T);%模拟阶跃输入
plot(T,X(:,1),'-g','LineWidth',1);
hold on;
plot(T,X(:,2),'-.b','LineWidth',1);
plot(T,X(:,3),'-','LineWidth',1);
plot(T,X(:,4),'-r','LineWidth',1);
hold off;
legend('x','dotx','fai','dotfai');
```