



同濟大學  
TONGJI UNIVERSITY

硕士学位论文

基于MATLAB的  
直线一级倒立摆控制系统的设计

姓 名 : 第一组

姓 名 : 李奇澳, 安泓宇, 覃栋鹏,  
郑光泽

学 号 : 1853474, 1853255, 1850540,  
1851960

所在院系 : 机械与能源工程学院

学科门类 : 工学

学科专业 : 机械设计制造及其自动化

指导教师 : 于颖

二〇二〇年十二月





同濟大學  
TONGJI UNIVERSITY

A dissertation submitted to  
Tongji University in conformity with the requirements for  
the degree of Master of Science

## **A Simple Sample of Tongji Thesis Using TONGJITHESIS**

(Supported by the Natural Science Foundation of China for  
Distinguished Young Scholars, Grant No.123456789)

Candidate :	Tongji Ren
Student Number :	1853474, 1853255, 1850540, 1851960
School/Department :	TONGJILUG
Discipline :	Gong Xue
Major :	DianziControlComputerScience
Supervisor :	Prof. Jie Chen
Associate Supervisor :	Prof. Gang Pei (XiaoWai)

December, 2020



# 学位论文版权使用授权书

本人完全了解同济大学关于收集、保存、使用学位论文的规定，同意如下各项内容：按照学校要求提交学位论文的印刷本和电子版；学校有权保存学位论文的印刷本和电子版，并采用影印、缩印、扫描、数字化或其它手段保存论文；学校有权提供目录检索以及提供本学位论文全文或者部分的阅览服务；学校有权按有关规定向国家有关部门或者机构送交论文的复印件和电子版；在不以盈利为目的的前提下，学校可以适当复制论文的部分或全部内容用于学术活动。

学位论文作者签名：

年 月 日



# 同济大学学位论文原创性声明

本人郑重声明：所呈交的学位论文，是本人在导师指导下，进行研究工作所取得的成果。除文中已经注明引用的内容外，本学位论文的研究成果不包含任何他人创作的、已公开发表或者没有公开发表的作品的内容。对本论文所涉及的研究工作做出贡献的其他个人和集体，均已在文中以明确方式标明。本学位论文原创性声明的法律责任由本人承担。

学位论文作者签名：

年 月 日





## 摘要

本文对直线一级倒立摆建立控制系统模型，根据技术参数和指标要求进行控制系统设计。首先对直线一级倒立摆进行动力学模型的建立，通过??方法对系统进行分析，从而得到系统状态空间方程。然后利用MATLAB分析系统的内在特性。本文利用LQR控制法和模糊控制法对直线一级倒立摆进行校正，从而得到了理想的输出结果，并进行了对比得出结论。

**关键词：**直线一级倒立摆，LQR，模糊控制，MATLAB

## ABSTRACT

An abstract of a dissertation is a summary and extraction of research work and contributions. Included in an abstract should be description of research topic and research objective, brief introduction to methodology and research process, and summarization of conclusion and contributions of the research. An abstract should be characterized by independence and clarity and carry identical information with the dissertation. It should be such that the general idea and major contributions of the dissertation are conveyed without reading the dissertation.

An abstract should be concise and to the point. It is a misunderstanding to make an abstract an outline of the dissertation and words “the first chapter”, “the second chapter” and the like should be avoided in the abstract.

Key words are terms used in a dissertation for indexing, reflecting core information of the dissertation. An abstract may contain a maximum of 5 key words, with semi-colons used in between to separate one another.

**Key Words:** T<sub>E</sub>X, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X, CJK, template, thesis

## 目录

主要符号对照表 .....	V
插图索引 .....	VI
表格索引 .....	VII
第1章 引言 .....	1
第2章 前期准备与相关工作 .....	2
2.1 前期准备 .....	2
2.1.1 LQR（线性二次型调节器） .....	2
2.1.2 模糊控制 .....	2
2.1.3 神经网络 .....	3
2.1.4 PID控制 .....	3
2.2 题目数据 .....	3
第3章 物理模型的建立和状态空间公式的推导 .....	4
3.1 模型假设与分析 .....	4
3.1.1 受力分析 .....	4
3.1.2 加速度分析 .....	4
3.1.3 传递函数求解 .....	5
3.2 状态空间求解 .....	6
第4章 用PID算法校正直线一级倒立摆系统 .....	8
4.1 PID控制分析 .....	8
4.1.1 PID介绍 .....	8
4.1.2 PID控制器原理性推导 .....	8
4.2 实验分析 .....	9
第5章 LQR .....	10
5.1 LQR线性二次型调节器 .....	10
5.1.1 LQR介绍 .....	10
5.1.2 LQR控制器原理性推导 .....	10
5.1.3 LQR的系统能控性和能观性分析 .....	11
5.1.4 小车系统权重的选取以及能控性能观性分析 .....	12
5.1.5 小车倒立摆仿真 .....	12
5.1.6 修改权重分析比较 .....	13
致谢 .....	17
附录 A 外文资料原文 .....	18
A.1 Single-Objective Programming .....	18
A.1.1 Linear Programming .....	19
A.1.2 Nonlinear Programming .....	20

A.1.3 Integer Programming .....	21
附录 B 外文资料的调研阅读报告或书面翻译 .....	22
B.1 单目标规划 .....	22
B.1.1 线性规划 .....	22
B.1.2 非线性规划 .....	23
B.1.3 整数规划 .....	23
附录 C 其它附录 .....	24
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果 .....	25

## 主要符号对照表

$M$	小车质量
$m$	摆杆质量
$l$	摆杆质心到转动轴心的长度
$b$	摩擦比例系数
$I$	摆杆对质心的转动惯量
$T$	采样时间
$\phi$	摆杆与竖直向上方向间的夹角
$\theta$	摆杆与竖直向下方向间的夹角

## 插图索引

图 1.1	倒立摆系统 .....	1
图 2.1	任务计划甘特图 .....	2
图 3.1	小车受力分析 .....	4
图 3.2	摆杆受力分析 .....	5
图 4.1	PID原理图 .....	8
图 4.2	实验室倒立摆控制系统结构图 .....	9
图 5.1	<i>LQRsimulink</i> .....	13
图 5.2	模拟脉冲激励 .....	14
图 5.3	脉冲激励仿真结果 .....	14
图 5.4	阶跃激励仿真结果 .....	15

## 表格索引

表 2.1	题目参数.....	3
-------	-----------	---





## 第1章 引言

倒立摆系统是一个非线性自然不稳定系统，是进行控制理论教学及开展各种控制实验的理想实验平台。许多抽象的控制概念如控制系统的稳定性、可控性、系统收敛速度和系统抗干扰能力等，都可以通过倒立摆系统直观的表现出来。对其基础的理论控制以及算法的学习都有十分巨大的帮助。由于倒立摆本身所具有的高阶次，不稳定，多变量。非线性，和强耦合性，许多现代控制理论的研究人员一直将它作为典型的研究对象，不断从中发掘新的控制策略和控制算法，相关的科研成果在航天科技和机器人学方面获得广阔的应用。

本文通过两种不同的控制方法，即LQR控制方法与模糊控制方法，对直线一级倒立摆实现对手动的加速度脉冲输入的稳定性。其中，实验所用的倒立摆为固高科技公司的直线一级摆：直线倒立摆在直线运动模块（小车）上装有摆杆和角度编码器，直线运动模块有一个自由度，在伺服电机的驱动下可以沿导轨水平运动,如图 1.1所示。通过相关方法的处理，倒立摆能够通过调节位移和角度，保证对一定范围内扰动的鲁棒性，并最终实现摆杆竖直位置的保持。通过两种方法实验结果的比较，我们进一步得出了两种方法的优劣，并分析出了产生差异的原因。本文的主要贡献有：

- 分别利用LQR控制方法和模糊控制方法建立了直线一级倒立摆的控制系统；
- 通过比较LQR控制方法和模糊控制方法的效果，分析了两者的优劣。

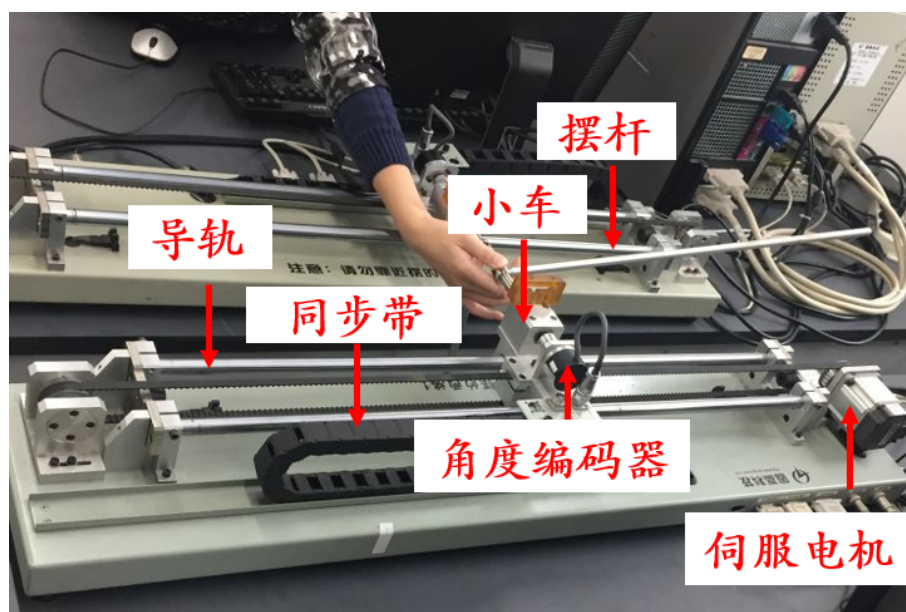


图 1.1 倒立摆系统

## 第2章 前期准备与相关工作

### 2.1 前期准备

倒立摆系统的控制，可以采用经典的PID控制方法，LQR控制，模糊控制法，神经网络控制算法，根轨迹控制算法等，我们组搜集了LQR，模糊算法，神经网络算法，以及PID相关方面的资料，进行比较整理，从四种方法中选取了LQR和模糊控制算法进行研究设计。并对研究内容，进度规划，报告，答辩进行了细致的分工，按照计划甘特图推进课程设计，如图 2.1所示。

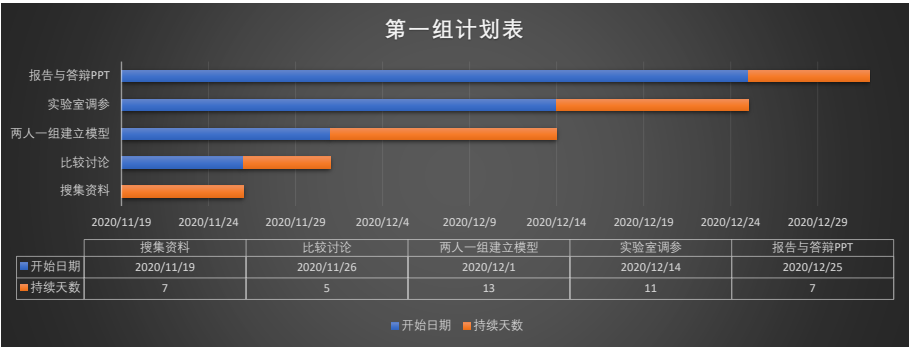


图 2.1 任务计划甘特图

根据查找的文献资料，我们简单总结了四种控制方法的优缺点，现罗列如下

#### 2.1.1 LQR（线性二次型调节器）

LQR具有较好的控制住摆杆，并且响应速度较快，具有超调量。该方法可以使目标函数达到最优，可以对能控系统进行任意的极点配置来满足所设计系统的性能要求，提高闭环系统的相对稳定性或者使不稳定系统得以镇定，同时具有较强的鲁棒性。但对小车的控制效果稍差，并且LQR需要调整两个矩阵，要求解Riccati方程确定Q和R权矩阵，算法复杂。

#### 2.1.2 模糊控制

基于模糊控制的方法使用语言方法，可不需要过程的精确数学模型；鲁棒性强，适于解决过程控制中的非线性、强耦合时变、滞后等问题；有较强的容错能力。具有适应受控对象动力学特征变化、环境特征变化和动行条件变化的能力。但是模糊控制的设计尚缺乏系统性，这对复杂系统的控制是难以奏效的。

难以建立一套系统的模糊控制理论，以解决模糊控制的机理、稳定性分析、系统化设计方法等一系列问题；如何获得模糊规则及隶属函数即系统的设计办法，完全凭经验进行；信息简单的模糊处理将导致系统的控制精度降低和动态品质变差。若要提高精度就必然增加量化级数，导致规则搜索范围扩大，降低决策速度，甚至不能进行实时控制。

### 2.1.3 神经网络

基于神经网络的算法属于非线性映射，能以任意精度逼近任何非线性连续函数，适合求解内部机制复杂问题。而且输入输出变量数目是任意的，具有自学习和自适应的能力，能过学习获取输出数据间的对应关系，将学习内容存储到网络权值中，具有容错能力，部分神经元受损对全局训练结果不会有很大影响。但是该方法存在实时性和自适应性相互矛盾的问题，不能保证快速性和有效性；并且权值容易收敛到局部最小点，收敛速度慢，隐含层数目难以确定，训练依赖样本数据，样本数据有采集难度。

### 2.1.4 PID控制

基于PID原理的控制系统结构简单，易于实现，使用方便，PID各参数相互独立，可以根据过程的动态特性及时调节；适用性强，可通过适当简化将非线性的、时变的被控对象变成基本线性和动态特性不随时间变化的系统，应用范围十分广泛，理论成熟。棒性较好，即其控制品质对被控对象特性的变化不太敏感。但是该方法稳定性差，在控制非线性、时变、耦合及参数和结构不确定的复杂过程时，效果不好。

## 2.2 题目数据

将题目的数据整理如表 2.1所示。

参数	意义	数值
$M$	小车质量	$1.096kg$
$m$	摆杆质量	$0.109kg$
$l$	摆杆质心到转动轴心的长度	$0.25m$
$b$	摩擦比例系数	$0.1N.s/m$
$I$	摆杆对质心的转动惯量	$0.0034kg.m^2$
$T$	采样时间	$0.005s$

表 2.1 题目参数

## 第3章 物理模型的建立和状态空间公式的推导

### 3.1 模型假设与分析

#### 3.1.1 受力分析

为了建立物理模型，现有如下假设：1、摆杆质量均匀，质心位于其几何中心处 2、忽略除 $b$ 以外的所有摩擦力

如图3.1对小车进行受力分析，以摆杆和小车交点为原点，以水平向右和竖直向下为正方向建立坐标系，沿 $x$ 轴有牛顿第二定律

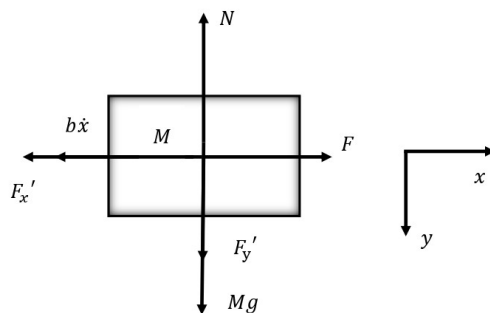


图 3.1 小车受力分析

$$F - b\dot{x} - N_x' = M\ddot{x} \quad (3.1)$$

如图3.2对摆杆进行受力分析，沿 $x, y$ 轴有牛顿第二定律和沿 $\theta$ 向动量矩定理摆杆质心 $c$ 点

$$\begin{aligned} x_c &= x + l\sin\theta \\ y_c &= l\cos\theta \end{aligned} \quad (3.2)$$

#### 3.1.2 加速度分析

求导可得质心加速度

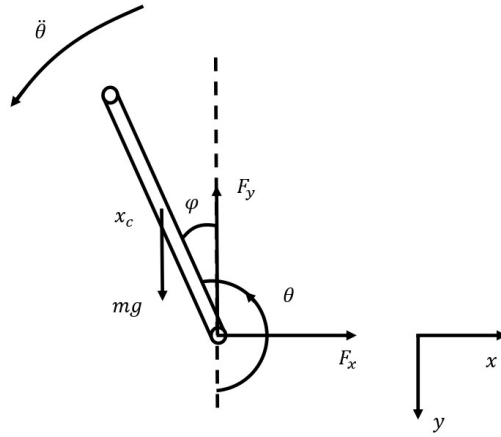


图 3.2 摆杆受力分析

$$\begin{aligned}\ddot{x}_c &= \ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y}_c &= -l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}N_y - mg &= -m\ddot{y}_c \\ N_x &= m\ddot{x}_c \\ N_y l \sin\varphi + N_x l \cos\varphi &= I\ddot{\varphi}\end{aligned}\quad (3.4)$$

应用小量近似  $\sin x \doteq x, \cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$  以及  $\theta = \varphi + \pi$  这个关系整理以上各式, 可得倒立摆系统物理方程组

$$\begin{aligned}F &= (M + m)\ddot{x} - ml\ddot{\varphi} + b\dot{x} \\ (I + ml^2)\ddot{\varphi} &= ml\ddot{x} + mgl\varphi\end{aligned}\quad (3.5)$$

### 3.1.3 传递函数求解

拉氏变换可得

$$\begin{aligned}(M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\varphi(s)s^2 &= F(s) \\ (I + ml^2)\varphi(s)s^2 - mgl\varphi(s) &= mlX(s)s^2\end{aligned}\quad (3.6)$$

注意到小车加速度  $A(s) = X(s)s^2$

可得从小车角速度输入到摆杆角度输出的传递函数

$$\frac{\varphi(s)}{A(s)} = \frac{ml}{(I + ml^2)s^2 - mgl}\quad (3.7)$$

进一步整理,可以得到力输入到摆杆角度和小车位移的传递函数

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(s)}{F(s)} &= \frac{m l s^2}{[(I + m l^2)(M + m) - m^2 l^2] s^4 + b(I + m l^2) s^3 - (M + m) m g l s^2 - b m g l s} \\ \frac{X(s)}{F(s)} &= \frac{(I + m l^2) s^2 - m g l}{[(I + m l^2)(M + m) - m^2 l^2] s^4 + b(I + m l^2) s^3 - (M + m) m g l s^2 - b m g l s}\end{aligned}\quad (3.8)$$

### 3.2 状态空间求解

将物理方程组进行等价变形, 可以得到

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{bI + bml^2}{\Delta} \dot{x} + \frac{m^2 g l^2}{\Delta} \varphi + \frac{I + ml^2}{\Delta} F \\ \ddot{\varphi} &= \frac{-mlb}{\Delta} \dot{x} + \frac{mg(M+m)l}{\Delta} \varphi + \frac{ml}{\Delta} F\end{aligned}\quad (3.9)$$

其中,  $\Delta = I(M + m) + Mml^2$ .

基于此, 取  $z_1 = x, z_2 = \dot{x}, z_3 = \varphi, z_4 = \dot{\varphi}$  为状态空间变量, 以力  $F$  作为输入  $u$ , 建立状态空间矩阵

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\dot{x}} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\dot{\varphi}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{bI+bml^2}{\Delta} & \frac{m^2 g l^2}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{\Delta} & \frac{mg(M+m)l}{\Delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml^2}{\Delta} \\ 0 \\ \frac{ml}{\Delta} \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}\quad (3.10)$$

注意到该状态空间矩阵较为复杂, 若取小车加速度作为输入  $u'$ , 可以简化该状态空间矩阵

根据转动惯量的定义式, 并认为摆件质地均匀, 有下式

$$I = \frac{1}{12} m (2l)^2 \quad (3.11)$$

带入整理, 得

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\phi + \frac{3}{4l}\ddot{x} \quad (3.12)$$

则可得较为简单的状态空间矩阵

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g}{4l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix} u' \\ \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u' \end{aligned} \quad (3.13)$$

代入数据可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u' \\ \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u' \end{aligned} \quad (3.14)$$

## 第4章 用PID算法校正直线一级倒立摆系统

### 4.1 PID控制分析

#### 4.1.1 PID介绍

PID控制就是用线性组合的方式，把偏差的比例 $P$ 、积分 $I$ 、微分 $D$ 组合构成控制量。对被控对象展开控制的方法。在PID控制器中，通过比例单元 $P$ 将偏差进行比例放大得到输出，但通过这一过程无法消除余差，因此加以积分单元 $I$ ，积分依照偏差累计，只要当偏差不为0时，积分值就不为0，考虑到偏差变化有速度快慢之分，加以微分单元 $D$ ，计算偏差变化的速率，PID控制就是综合使用这三个单元来控制被控变量。其原理控制示意图如图 4.1所示。

#### 4.1.2 PID控制器原理性推导

PID控制器是一种线性控制器，其根据给定值 $r(t)$ 与实际输出值 $y(t)$ 构成的控制偏差 $e(t)$ 为：

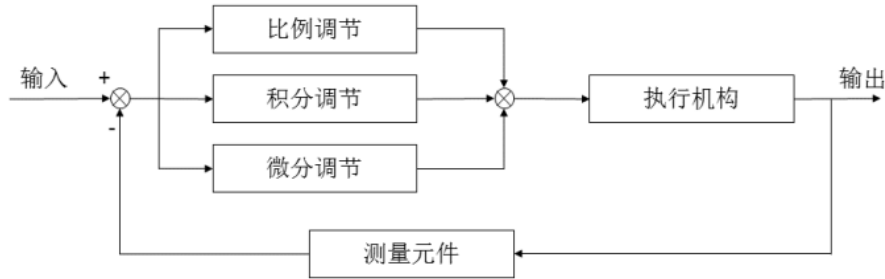


图 4.1 PID原理图

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (4.1)$$

其输入控制偏差 $e(t)$ 与输出控制结果 $u(t)$ 的关系为：

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (4.2)$$

上式进行拉氏变换，得其传递函数为：



$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{U(s)}{E(s)} \\
&= K_p + \frac{1}{K_I s} + K_D s \\
&= \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中， $K_p e(t)$ 为比例环节，随着 $K_p$ 的增加，可以更好地减小偏差，但同时 $K_p$ 还影响系统的稳定性， $K_p$ 增加通常导致系统的稳定性下降，过大的 $K_p$ 往往使系统产生剧烈的震荡和不稳定。

$K_I \int_0^t e(t)dt$ 为积分环节，消除系统静态误差，作用的强弱由 $K_I$ 决定， $K_I$ 越大，积分作用越强，反之则越弱，但同时积分环节也可能增大系统超调量。

$K_D \frac{de(t)}{dt}$ 为微分环节，针对被测量的变化速率来进行调节，预测偏差信号的变化趋势，在其出现较大变化之前引入修正信号与之低效，从而减小系统的调节时间。

## 4.2 实验分析

实验室倒立摆控制系统结构图如图 4.2所示。

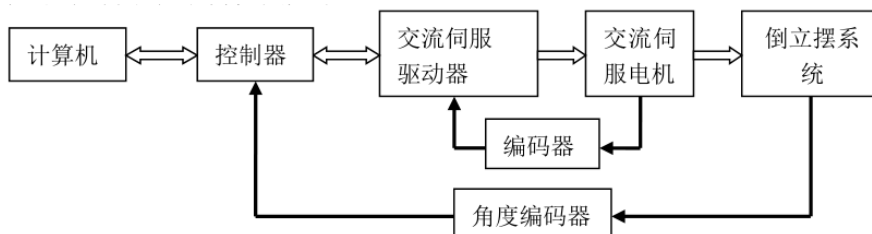


图 4.2 实验室倒立摆控制系统结构图

修改PID各项参数，通过角度编码器测量摆杆的摆动角度，通过伺服电机控制小车的位移速度和加速度，通过控制器利用摆杆的惯性力控制摆杆的位移速度和加速度，从而控制摆杆的角度，最终可以实现直线倒立摆的竖直稳定。

当其受到外界干扰时，在干扰停止作用后，系统能够很快地回到平衡位置。但是，整个控制系统中并无小车位移的反馈，只能通过角度编码器获取摆杆的角度，通过传动比转换近似得到小车的位移。因此PID控制器无法对小车的位置偏差进行修正，不能对小车的位置进行控制，当受到扰动时，小车会沿滑轨一直向扰动方向运动，撞到滑轨边缘，无法恢复到初始平衡位置。后续考虑使用其它控制方法，既能实现直线倒立摆的竖直稳定，又可以控制小车位置的稳定不变。

## 第5章 LQR线性二次型调节器

### 5.1 LQR介绍

LQR(linear quadratic regulator)线性二次型调节器, 利用现代控制理论中以状态空间矩阵形式给出的线性系统,利用目标函数(能量函数) $J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru)dt$  (其中 $Q$ 为半正定矩阵,  $R$ 为正定矩阵), 设计状态反馈控制器 $K$ 使得目标函数的值最小。LQR控制器可以在系统偏离平衡状态时, 尽可能减少消耗的能量保持系统状态各分量仍接近平衡状态.以一维系统 $X = x(t)$ 为例, 则 $x^T Qx = Qx^2$ ,为了使得 $J$ 最小, 那么该函数一定有界, 故有下式

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (5.1)$$

这保证了系统的稳定性, 类似的 $u(t)$ 小保证了节省能量, 控制代价降低。

### 5.2 LQR控制器原理性推导与分析

#### 5.2.1 LQR控制器原理性推导

线性系统的状态空间可以描述为

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ Y &= CX + Du \end{aligned} \quad (5.2)$$

评价函数为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru)dt \quad (5.3)$$

$Q \Delta R$ 分别是对状态变量和输入量的加权矩阵, 确定误差和能量损耗的相对性。

根据极小值原理, 引入 $n$ 维协态矢量 $\lambda(t)$ ,构造哈密顿函数

$$H(x, u, \lambda) = \frac{1}{2} [x^T Qx + u^T Ru] + \lambda^T [Ax + Bu] \quad (5.4)$$

最优控制使得 $H$ 取极值，即

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T \lambda = 0 \quad (5.5)$$

解得

$$u = -R^{-1} B^T \lambda \quad (5.6)$$

又有

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = R \quad (5.7)$$

$R$ 正定，故上式为系统的最优控制律。

设 $\lambda = Px$ ,  $P$ 为 $n$ 阶实对称正定矩阵，且满足黎卡提矩阵代数方程

$$-PA - A^T P + PBR^{-1}B^T - Q_1 = 0 \quad (5.8)$$

则最优控制

$$u = -R^{-1} B^T \lambda = -Kx \quad (5.9)$$

系统最优轨线为

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (5.10)$$

在 $matlab$ 中可以利用 $lqr$ 函数求得反馈矩阵 $K$ 。

### 5.2.2 LQR的系统能控性和能观性分析

对于上面假设的线性系统，状态完全能控制的充要条件是

$$\text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (5.11)$$

系统状态能够完全观测的充要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (5.12)$$

### 5.2.3 小车系统权重的选取以及能控性能观性分析

前面得到小车的状态空间方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u' \quad (5.13)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u'$$

在 $matlab$ 中(代码见附录)进行矩阵秩计算可知两个判定矩阵的秩都是4,则小车倒立摆系统可控可观测。

### 5.2.4 小车倒立摆仿真

首先根据系统的运动微分方程在 $matlab$ 中的 $simulink$ 进行仿真, 由上述矩阵导出参考方程,为方便, 将一些量名称更改如下

$$\begin{aligned} \dot{x} &\rightarrow \dot{x}_1 \\ \ddot{x} &\rightarrow \dot{x}_2 \\ \dot{\varphi} &\rightarrow \dot{x}_3 \\ \ddot{\varphi} &\rightarrow \dot{x}_4 \end{aligned} \quad (5.14)$$

则有

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= u \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= 29.4x_3 + 3u \\
 u &= -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 - k_4x_4
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

得到如图 5.1 的仿真

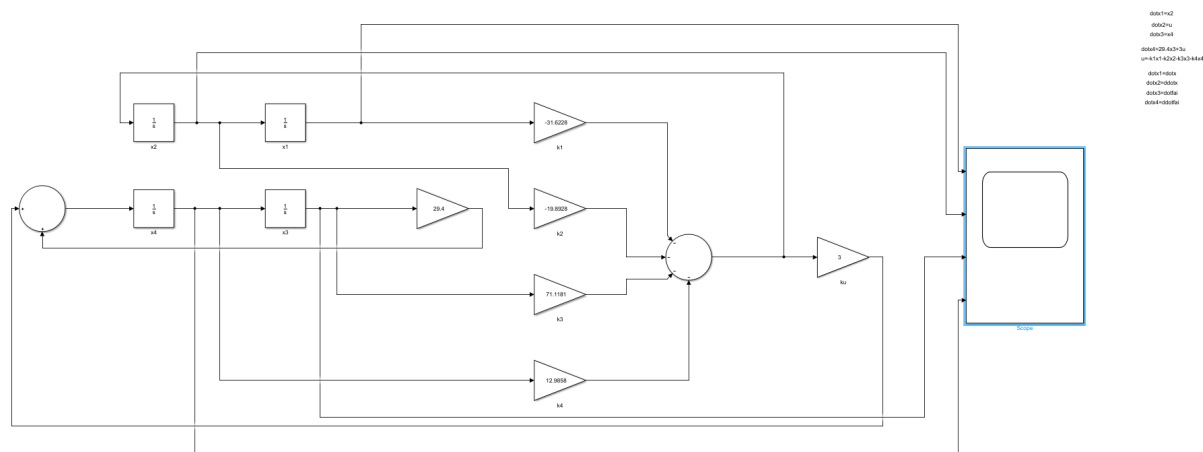


图 5.1 *LQRsimulink*

这种仿真可以通过给定 $x_i$ 的初始值来模拟脉冲激励

给定小车5单位位移，摆杆5单位角度,可以得到如图5.3的响应曲线。

可以发现系统可以稳定。关于修改权重以及关于曲线的比较分析在后面介绍。

此外也可以利用编程来模拟仿真，以`lsim`函数模拟的阶跃信号为例，编写代码（见附件）也可以得到响应曲线如图5.4。

### 5.2.5 修改权重分析比较

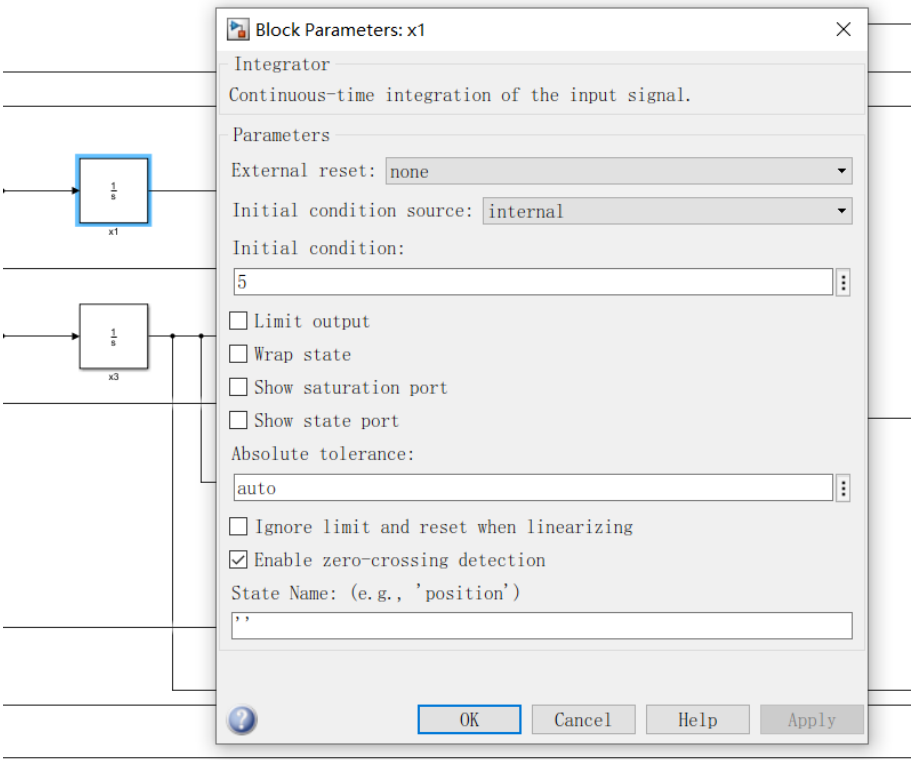


图 5.2 模拟脉冲激励

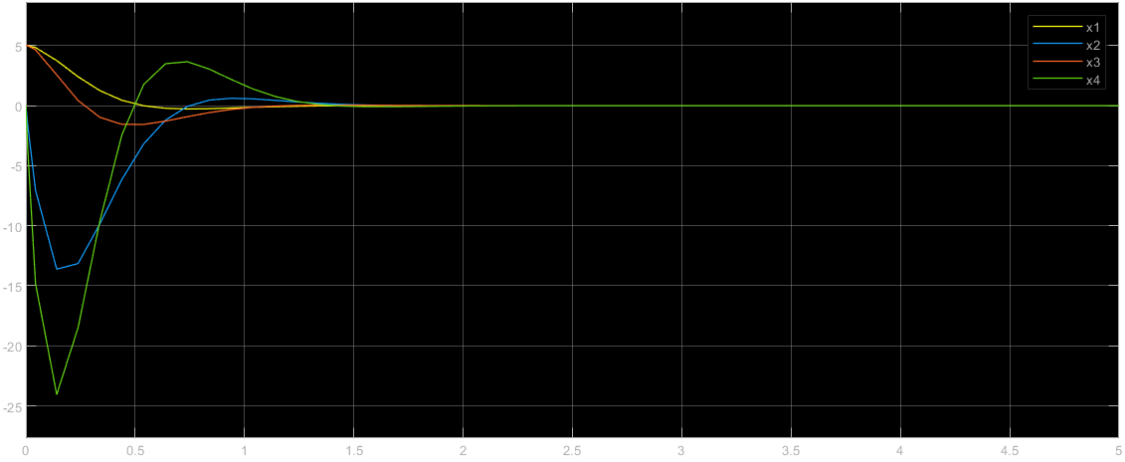


图 5.3 脉冲激励仿真结果

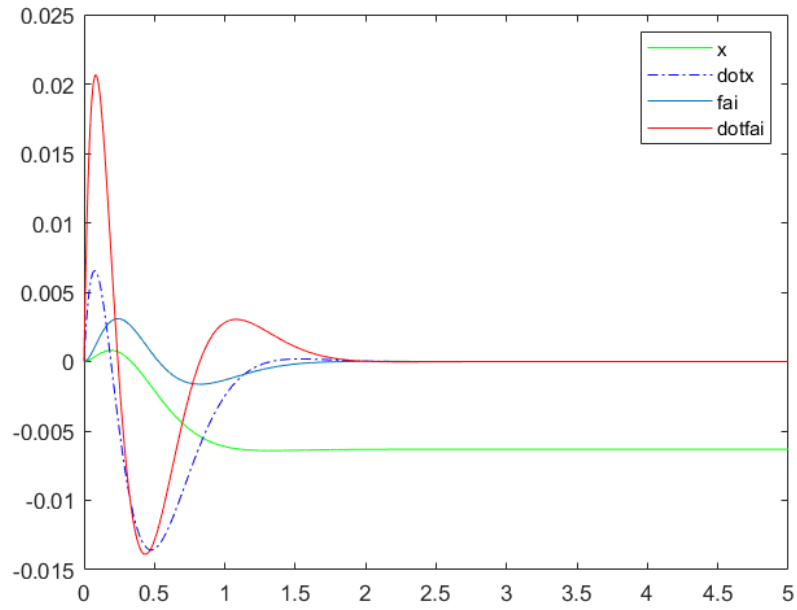


图 5.4 阶跃激励仿真结果

## 附 录

```

1  A=[0 1 0 0;
2      0 0 0 0;
3      0 0 0 1;
4      0 0 29.4 0];
5  B=[0 1 0 3]';
6  C=[1 0 0 0;
7      0 0 0 1];
8  D=[0 0]';
9  Co=ctrb(A,B);
10 rank(Co)
11 Ob=obsv(A,C);
12 rank(Ob)
    
```

```

1  A=[0 1 0 0;0 0 0 0;0 0 0 1;0 0 29.4 0];
2  B=[0 1 0 3]';
3  C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
4  D=[0 0]';
5  Q11=1000;
6  Q33=100;
7  Q=[Q11 0 0 0;0 0 0 0;0 0 Q33 0;0 0 0 0];
8  R=1;
9  K=lqr(A,B,Q,R);
10 Ac=(A-B*K);
11 T=0:0.001:5;
12 U=0.2*ones(size(T));
    
```

```
13 [Y,X]=lsim(Ac,B,C,D,U,T);
14 plot(T,X(:,1),'-g','LineWidth',1);
15 hold on;
16 plot(T,X(:,2),'-.b','LineWidth',1);
17 plot(T,X(:,3),'-', 'LineWidth',1);
18 plot(T,X(:,4),'-r','LineWidth',1);
19 hold off;
20 legend('x','dotx','fai','dotfai');
```



## 致谢

衷心感谢导师 xxx 教授和物理系 xxx 副教授对本人的精心指导。他们的言传身教将使我终生受益。

在美国麻省理工学院化学系进行九个月的合作研究期间，承蒙 xxx 教授热心指导与帮助，不胜感激。感谢 xx 实验室主任 xx 教授，以及实验室全体老师和同学们的热情帮助和支持！本课题承蒙国家自然科学基金资助，特此致谢。

感谢 TONGJITHESIS，它的存在让我的论文写作轻松自在了许多，让我的论文格式规整漂亮了许多。

## 附录 A 外文资料原文

As one of the most widely used techniques in operations research, *mathematical programming* is defined as a means of maximizing a quantity known as *objective function*, subject to a set of constraints represented by equations and inequalities. Some known subtopics of mathematical programming are linear programming, nonlinear programming, multiobjective programming, goal programming, dynamic programming, and multilevel programming<sup>[1]</sup>.

It is impossible to cover in a single chapter every concept of mathematical programming. This chapter introduces only the basic concepts and techniques of mathematical programming such that readers gain an understanding of them throughout the book<sup>[2,3]</sup>.

### A.1 Single-Objective Programming

The general form of single-objective programming (SOP) is written as follows,

$$\begin{cases} \max f(x) \\ \text{subject to:} \\ g_j(x) \leq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \end{cases} \quad (123)$$

which maximizes a real-valued function  $f$  of  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  subject to a set of constraints.

**Definition A.1:** In SOP, we call  $x$  a decision vector, and  $x_1, x_2, \dots, x_n$  decision variables. The function  $f$  is called the objective function. The set

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0, j = 1, 2, \dots, p\} \quad (456)$$

is called the feasible set. An element  $x$  in  $S$  is called a feasible solution.

**Definition A.2:** A feasible solution  $x^*$  is called the optimal solution of SOP if and only if

$$f(x^*) \geq f(x) \quad (\text{A.1})$$

for any feasible solution  $x$ .

One of the outstanding contributions to mathematical programming was known as the Kuhn-Tucker conditions A.2. In order to introduce them, let us give some definitions.

An inequality constraint  $g_j(x) \leq 0$  is said to be active at a point  $x^*$  if  $g_j(x^*) = 0$ . A point  $x^*$  satisfying  $g_j(x^*) \leq 0$  is said to be regular if the gradient vectors  $\nabla g_j(x)$  of all active constraints are linearly independent.

Let  $x^*$  be a regular point of the constraints of SOP and assume that all the functions  $f(x)$  and  $g_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  are differentiable. If  $x^*$  is a local optimal solution, then there exist Lagrange multipliers  $\lambda_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  such that the following Kuhn-Tucker conditions hold,

$$\begin{cases} \nabla f(x^*) - \sum_{j=1}^p \lambda_j \nabla g_j(x^*) = 0 \\ \lambda_j g_j(x^*) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, p \\ \lambda_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, p. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

If all the functions  $f(x)$  and  $g_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  are convex and differentiable, and the point  $x^*$  satisfies the Kuhn-Tucker conditions (A.2), then it has been proved that the point  $x^*$  is a global optimal solution of SOP.

### A.1.1 Linear Programming

If the functions  $f(x)$ ,  $g_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  are all linear, then SOP is called a *linear programming*.

The feasible set of linear is always convex. A point  $x$  is called an extreme point of convex set  $S$  if  $x \in S$  and  $x$  cannot be expressed as a convex combination of two points in  $S$ . It has been shown that the optimal solution to linear programming corresponds to an extreme point of its feasible set provided that the feasible set  $S$  is bounded. This fact is the basis of the *simplex algorithm* which was developed by Dantzig as a very efficient method for solving linear programming.

Table 1 This is an example for manually numbered table, which would not appear in the list of tables

Network Topology		# of nodes	# of clients			Server
GT-ITM	Waxman	600	2%	10%	50%	Max. Connectivity
	Transit-Stub					
Inet-2.1		6000				
Xue	Rui	Ni	TONGJITHESIS			
	ABCDEF					

Roughly speaking, the simplex algorithm examines only the extreme points of the feasible set, rather than all feasible points. At first, the simplex algorithm selects an

extreme point as the initial point. The successive extreme point is selected so as to improve the objective function value. The procedure is repeated until no improvement in objective function value can be made. The last extreme point is the optimal solution.

### A.1.2 Nonlinear Programming

If at least one of the functions  $f(x)$ ,  $g_j(x)$ ,  $j = 1, 2, \dots, p$  is nonlinear, then SOP is called a *nonlinear programming*.

A large number of classical optimization methods have been developed to treat special-structural nonlinear programming based on the mathematical theory concerned with analyzing the structure of problems.



Figure 1 This is an example for manually numbered figure, which would not appear in the list of figures

Now we consider a nonlinear programming which is confronted solely with maximizing a real-valued function with domain  $\mathcal{R}^n$ . Whether derivatives are available or not, the usual strategy is first to select a point in  $\mathcal{R}^n$  which is thought to be the most likely place where the maximum exists. If there is no information available on which to base such a selection, a point is chosen at random. From this first point an attempt is made to construct a sequence of points, each of which yields an improved objective function value over its predecessor. The next point to be added to the sequence is chosen by analyzing the behavior of the function at the previous points. This construction continues until some termination criterion is met. Methods based upon this strategy are called *ascent methods*, which can be classified as *direct methods*, *gradient methods*, and *Hessian methods* according to the information about the behavior of objective function  $f$ . Direct methods require only that the function can be evaluated at each point. Gradient methods require the evaluation of first derivatives of  $f$ . Hessian methods require the evaluation of second derivatives. In fact, there is no superior method for all problems. The efficiency of a method is very much dependent upon the objective function.

### A.1.3 Integer Programming

*Integer programming* is a special mathematical programming in which all of the variables are assumed to be only integer values. When there are not only integer variables but also conventional continuous variables, we call it *mixed integer programming*. If all the variables are assumed either 0 or 1, then the problem is termed a *zero-one programming*. Although integer programming can be solved by an *exhaustive enumeration* theoretically, it is impractical to solve realistically sized integer programming problems. The most successful algorithm so far found to solve integer programming is called the *branch-and-bound enumeration* developed by Balas (1965) and Dakin (1965). The other technique to integer programming is the *cutting plane method* developed by Gomory (1959).

*Uncertain Programming* (BaoDing Liu, 2006.2)

#### References

*NOTE: these references are only for demonstration, they are not real citations in the original text.*

- [1] Donald E. Knuth. The  $\text{\TeX}$ book. Addison-Wesley, 1984. ISBN: 0-201-13448-9
- [2] Paul W. Abrahams, Karl Berry and Kathryn A. Hargreaves.  $\text{\TeX}$  for the Impatient. Addison-Wesley, 1990. ISBN: 0-201-51375-7
- [3] David Salomon. The advanced  $\text{\TeX}$ book. New York : Springer, 1995. ISBN:0-387-94556-3

附录 B 外文资料的调研阅读报告或书面翻译

B.1 单目标规划

北冥有鱼，其名为鲲。鲲之大，不知其几千里也。化而为鸟，其名为鹏。鹏之背，不知其几千里也。怒而飞，其翼若垂天之云。是鸟也，海运则将徙于南冥。南冥者，天池也。

$$p(y|\mathbf{x}) = \frac{p(\mathbf{x}, y)}{p(\mathbf{x})} = \frac{p(\mathbf{x}|y)p(y)}{p(\mathbf{x})} \tag{123}$$

吾生也有涯，而知也无涯。以有涯随无涯，殆已！已而为知者，殆而已矣！为善无近名，为恶无近刑，缘督以为经，可以保身，可以全生，可以养亲，可以尽年。

B.1.1 线性规划

庖丁为文惠君解牛，手之所触，肩之所倚，足之所履，膝之所倚，砉然响然，奏刀騞然，莫不中音，合于桑林之舞，乃中经首之会。

表 1 这是手动编号但不出现在索引中的一个表格例子

Network Topology		# of nodes	# of clients			Server
GT-ITM	Waxman	600	2%	10%	50%	Max. Connectivity
	Transit-Stub					
Inet-2.1		6000				
Xue	Rui	Ni	TONGJITHESIS			
	ABCDEF					

文惠君曰：“嘻，善哉！技盖至此乎？”庖丁释刀对曰：“臣之所好者道也，进乎技矣。始臣之解牛之时，所见无非全牛者；三年之后，未尝见全牛也；方今之时，臣以神遇而不以目视，官知止而神欲行。依乎天理，批大郤，导大窾，因其固然。技经肯綮之未尝，而况大圜乎！良庖岁更刀，割也；族庖月更刀，折也；今臣之刀十九年矣，所解数千牛矣，而刀刃若新发于硎。彼节者有间而刀刃者无厚，以无厚入有间，恢恢乎其于游刃必有余地矣。是以十九年而刀刃若新发于硎。虽然，每至于族，吾见其难为，怵然为戒，视为止，行为迟，动刀甚微，謦然已解，如土委地。提刀而立，为之而四顾，为之踌躇满志，善刀而藏之。”

文惠君曰：“善哉！吾闻庖丁之言，得养生焉。”

### B.1.2 非线性规划

孔子与柳下季为友，柳下季之弟名曰盗跖。盗跖从卒九千人，横行天下，侵暴诸侯。穴室枢户，驱人牛马，取人妇女。贪得忘亲，不顾父母兄弟，不祭先祖。所过之邑，大国守城，小国入保，万民苦之。孔子谓柳下季曰：“夫为人父者，必能诏其子；为人兄者，必能教其弟。若父不能诏其子，兄不能教其弟，则无贵父子兄弟之亲矣。今先生，世之才士也，弟为盗跖，为天下害，而弗能教也，丘窃为先生羞之。丘请为先生往说之。”



图 1 这是手动编号但不出现索引中的图片的例子

柳下季曰：“先生言为人父者必能诏其子，为人兄者必能教其弟，若子不听父之诏，弟不受兄之教，虽今先生之辩，将奈之何哉？且跖之为人也，心如涌泉，意如飘风，强足以距敌，辩足以饰非。顺其心则喜，逆其心则怒，易辱人以言。先生必无往。”

孔子不听，颜回为馭，子贡为右，往见盗跖。

### B.1.3 整数规划

盗跖乃方休卒徒大山之阳，脍人肝而舖之。孔子下车而前，见谒者曰：“鲁人孔丘，闻将军高义，敬再拜谒者。”谒者入通。盗跖闻之大怒，目如明星，发上指冠，曰：“此夫鲁国之巧伪人孔丘非邪？为我告之：尔作言造语，妄称文、武，冠枝木之冠，带死牛之胁，多辞缪说，不耕而食，不织而衣，摇唇鼓舌，擅生是非，以迷天下之主，使天下学士不反其本，妄作孝弟，而侥幸于封侯富贵者也。子之罪大极重，疾走归！不然，我将以子肝益昼舖之膳。”

## 附录 C 其它附录

其它附录的内容可以放到这里，当然如果你愿意，可以把这部分也放到独立的文件中，然后将其\input 到主文件中。



## 个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果

### 个人简历:

xxxx 年 xx 月 xx 日出生于 xx 省 xx 县。

xxxx 年 9 月考入 xx 大学 xx 系 xx 专业, xxxx 年 7 月本科毕业并获得 xx 学士学位。

xxxx 年 9 月免试进入 xx 大学 xx 系攻读 xx 学位至今。

### 发表论文:

- [1] Yang Y, Ren T L, Zhang L T, et al. Miniature microphone with silicon- based ferroelectric thin films. *Integrated Ferroelectrics*, 2003, 52:229-235. (SCI 收录, 检索号:758FZ.)
- [2] 杨轶, 张宁欣, 任天令, 等. 硅基铁电微声学器件中薄膜残余应力的研究. *中国机械工程*, 2005, 16(14):1289-1291. (EI 收录, 检索号:0534931 2907.)
- [3] 杨轶, 张宁欣, 任天令, 等. 集成铁电器件中的关键工艺研究. *仪器仪表学报*, 2003, 24(S4):192-193. (EI 源刊.)
- [4] Yang Y, Ren T L, Zhu Y P, et al. PMUTs for handwriting recognition. In press. (已被 *Integrated Ferroelectrics* 录用. SCI 源刊.)
- [5] Wu X M, Yang Y, Cai J, et al. Measurements of ferroelectric MEMS microphones. *Integrated Ferroelectrics*, 2005, 69:417-429. (SCI 收录, 检索号 :896KM.)
- [6] 贾泽, 杨轶, 陈兢, 等. 用于压电和电容麦克风的体硅腐蚀相关研究. *压电与声光*, 2006, 28(1):117-119. (EI 收录, 检索号:06129773469.)
- [7] 伍晓明, 杨轶, 张宁欣, 等. 基于MEMS技术的集成铁电硅微麦克风. *中国集成电路*, 2003, 53:59-61.

### 研究成果:

- [1] 任天令, 杨轶, 朱一平, 等. 硅基铁电微声学传感器畴极化区域控制和电极连接的方法: 中国, CN1602118A. (中国专利公开号.)
- [2] Ren T L, Yang Y, Zhu Y P, et al. Piezoelectric micro acoustic sensor based on ferroelectric materials: USA, No.11/215, 102. (美国发明专利申请号.)