

# 控制工程基础

《控制工程基础》教学组

2016年版

# 目 录

- 概述
- **控制系统的动态数学模型**
- 时域瞬态响应分析
- 控制系统的频率特性
- 控制系统的稳定性分析
- 控制系统的误差分析和计算
- 控制系统的综合与校正
- 根轨迹法
- 控制系统的非线性问题
- 计算机控制系统

## 第2章 控制系统的动态数学模型

- 2.1 系统数学模型的基本概念
- 2.2 控制系统的运动微分方程
- 2.3 非线性系统数学模型的线性化
- 2.4 拉氏变换和拉氏反变换
- 2.5 传递函数及典型环节的传递函数
- 2.6 系统函数方框图和信号流图
- 2.7 控制系统传递函数推导举例

本章要熟悉下列内容：

- 建立基本环节（质量-弹簧-阻尼系统、电路网络和电机）的数学模型及模型的线性化
- 重要的分析工具：拉氏变换及反变换
- 经典控制理论的数学基础：传递函数
- 控制系统的图形表示：方块图及信号流图
- 建立实际机电系统的传递函数及方块图

建立控制系统的数学模型，并在此基础上对控制系统进行分析、综合，是机电控制工程的基本方法。如果将物理系统在信号传递过程中的动态特性用数学表达式描述出来，就得到了组成物理系统的数学模型。

经典控制理论采用的数学模型主要以传递函数为基础。而现代控制理论采用的数学模型主要以状态空间方程为基础。以物理定律及实验规律为依据的微分方程是最基本的数学模型，是列写传递函数和状态空间方程的基础。

### 2.1 数学模型的基本概念

#### ● 系统的数学模型

数学模型是描述系统输入、输出量以及内部各变量之间关系的数学表达式，它揭示了实际系统结构及其组成要素参数与其性能之间的内在关系。

**静态数学模型：**静态条件（变量各阶导数为零）下描述变量之间关系的代数方程。反映系统处于稳态时，系统状态有关属性变量之间关系的数学模型。

## 2.1 数学模型的基本概念

**动态数学模型**：描述变量各阶导数之间关系的微分方程。描述动态系统瞬态与过渡态特性的模型。也可定义为描述**实际**系统各物理量随时间演化的数学表达式。动态系统的输出信号不仅取决于同时刻的激励信号，而且与它过去的工作状态有关。微分方程或差分方程常用作动态数学模型。

对于给定的动态系统，**数学模型表达不唯一**。工程上常用的数学模型包括：**微分方程，传递函数和状态方程**。对于线性系统，它们之间是等价的。

- 建立数学模型的方法

- 解析法

依据系统及元件各变量之间所遵循的物理或化学规律列写出相应的数学关系式，建立模型的方法。

- 实验法

人为地对系统施加某种测试(激励)信号，记录其输出响应，并用适当的数学模型对它们之间的关系进行逼近。这种方法也称为系统辨识。

数学模型应能反映系统内在的本质特征，同时应对模型的简洁性和精确性进行折衷考虑。



### ● 数学模型的形式

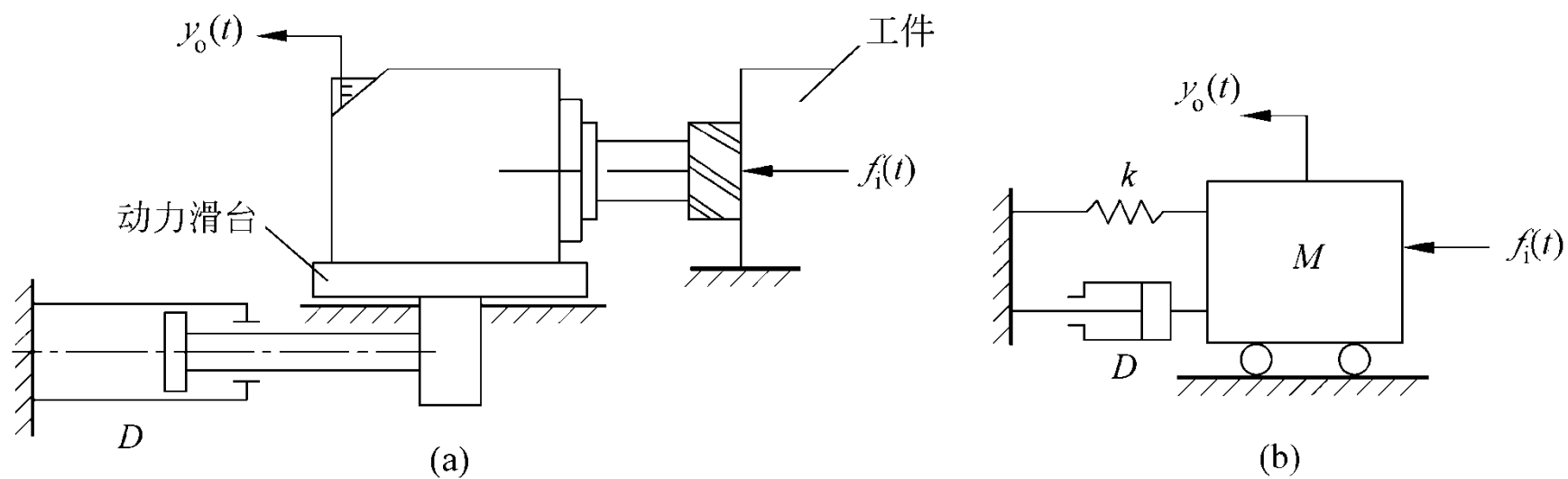
- 时间域：微分方程  
差分方程  
状态方程（一阶微分方程组）
- 复数域：传递函数  
结构图
- 频率域：频率特性

### 2.2 控制系统的运动微分方程

机电控制系统的受控对象是机械系统。在机械系统中，有些构件具有较大的惯性和刚度，有些构件则惯性较小、柔度较大。

在集中参数法中，我们将前一类构件的弹性忽略，将其视为**质量块**，而把后一类构件的惯性忽略，而将其视为**无质量的弹簧**。这样受控对象的机械系统可抽象为质量-弹簧-阻尼系统。

### 组合机床动力滑台及其力学模型

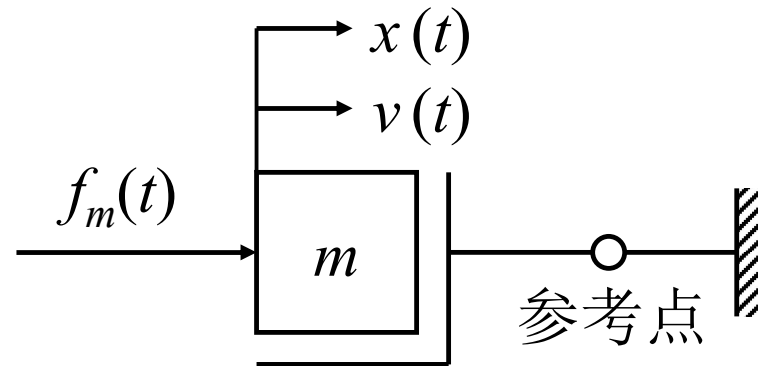


### ● 控制系统微分方程的列写

#### ➤ 机械系统

机械系统中以各种形式出现的物理现象，都可简化为质量、弹簧和阻尼三个要素：

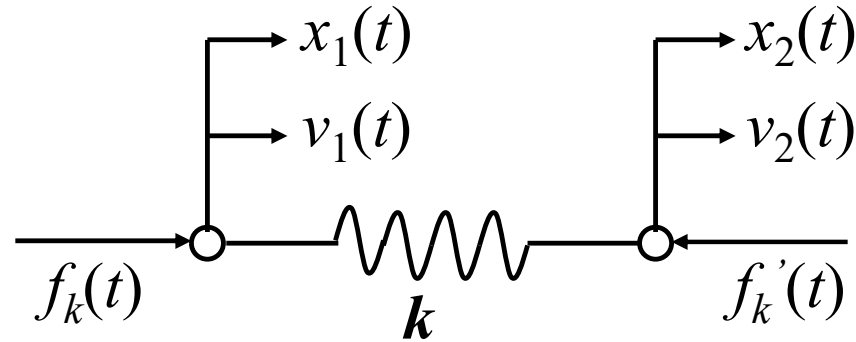
#### ✓ 质量



$$f_m(t) = ma(t) = m \frac{d}{dt} v(t) = m \frac{d^2}{dt^2} x(t)$$

## 2.2 控制系统的运动微分方程

✓ 弹簧

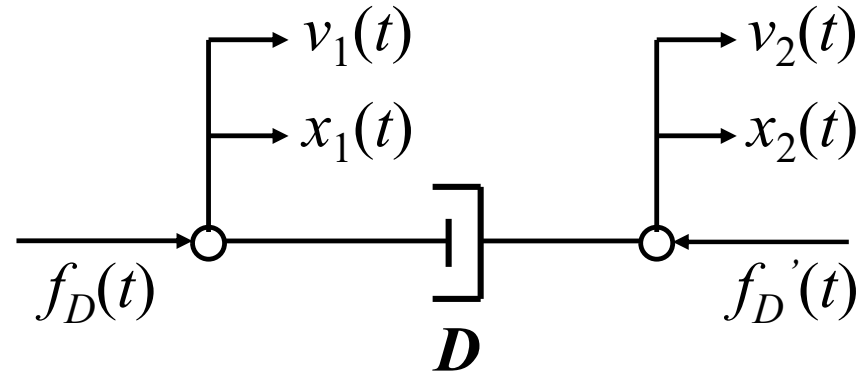


对于弹簧，  
受力相同(大  
小相同方向  
相反)，变  
形量(两端位  
移量)不同。

$$\begin{aligned} f_k(t) &= k[x_1(t) - x_2(t)] = kx(t) \\ &= k \int_{-\infty}^t [v_1(t) - v_2(t)] dt \\ &= k \int_{-\infty}^t v(t) dt \end{aligned}$$

## 2.2 控制系统的运动微分方程

✓ 阻尼

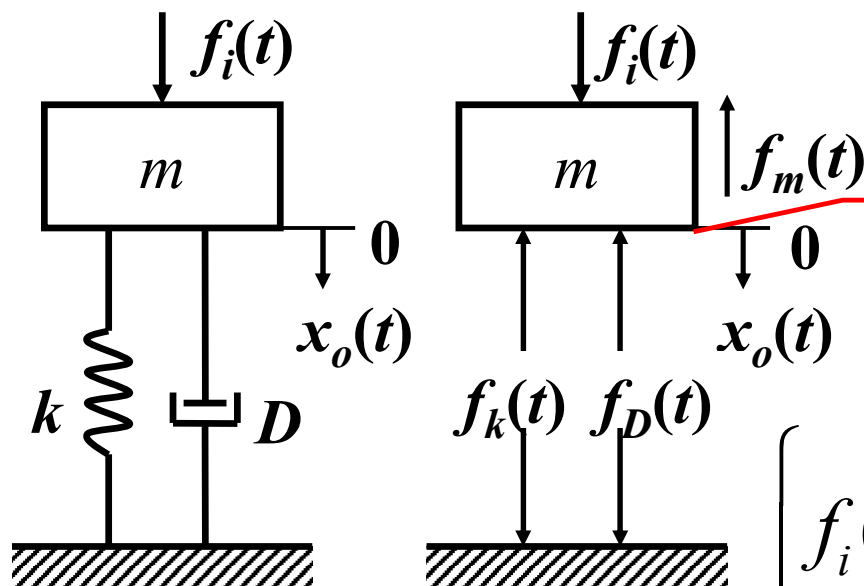


$$\begin{aligned} f_D(t) &= D[v_1(t) - v_2(t)] = Dv(t) \\ &= D\left(\frac{dx_1(t)}{dt} - \frac{dx_2(t)}{dt}\right) \\ &= D\frac{dx(t)}{dt} \end{aligned}$$

对于阻尼，  
受力相同  
(大小相同  
方向相反)，  
两端速度不同。

## 2.2 控制系统的运动微分方程

### □ 机械平移系统



静止（平衡）工作点作为  
零点，以消除重力的影响

机械平移系统  
及其力学模型

$$\begin{cases} f_i(t) - f_D(t) - f_k(t) = m \frac{d^2}{dt^2} x_o(t) \\ f_k(t) = kx_o(t) \\ f_D(t) = D \frac{d}{dt} x_o(t) \end{cases}$$

## 2.2 控制系统的运动微分方程

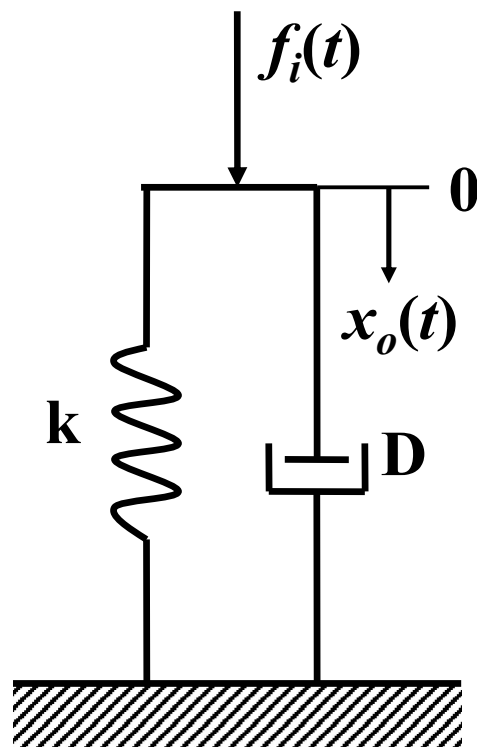
$$m \frac{d^2}{dt^2} y_o(t) + D \frac{d}{dt} y_o(t) + k y_o(t) = f_i(t)$$

式中， $m$ 、 $D$ 、 $k$ 通常均为常数，故机械平移系统可以由二阶常系数微分方程描述。

显然，微分方程的系数取决于系统的结构参数，而阶次等于系统中**独立**储能元件（惯性质量、弹簧）的数量。



### □ 弹簧—阻尼系统



弹簧-阻尼系统

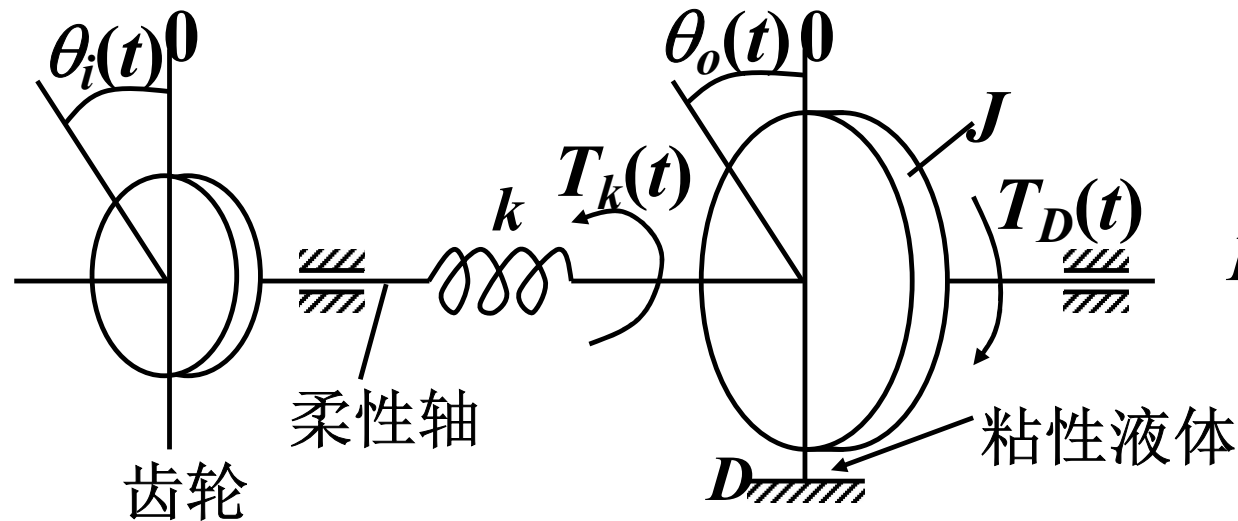
$$f_i(t) = f_D(t) + f_k(t)$$

$$D \frac{d}{dt} x_o(t) + kx_o(t) = f_i(t)$$

系统运动方程为一阶常系数微分方程。

## 2.2 控制系统的运动微分方程

### □ 机械旋转系统



$J$ —旋转体转动惯量;  
 $k$ —扭转刚度系数;  
 $D$ —粘性阻尼系数

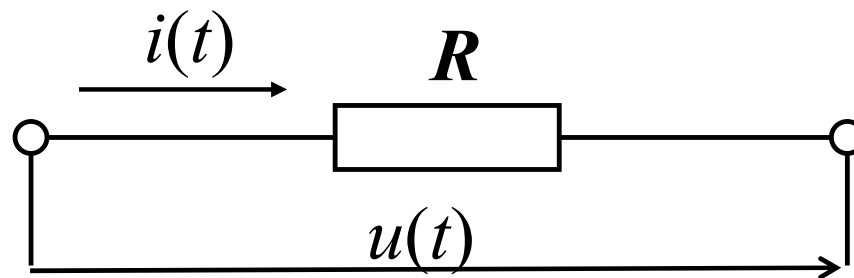
$$\begin{cases} T_k(t) = k [\theta_i(t) - \theta_o(t)] \\ T_D(t) = D \frac{d}{dt} \theta_o(t) \\ J \frac{d^2}{dt^2} \theta_o(t) = T_k(t) - T_D(t) \end{cases}$$

$$J \frac{d^2}{dt^2} \theta_o(t) + D \frac{d}{dt} \theta_o(t) + k \theta_o(t) = k \theta_i(t)$$

### ➤ 电路系统

电路系统三个基本元件：电阻、电容和电感。

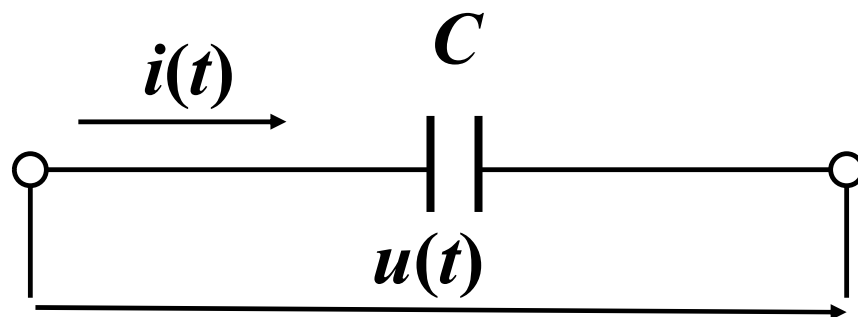
#### ✓ 电阻



$$u(t) = R \cdot i(t)$$

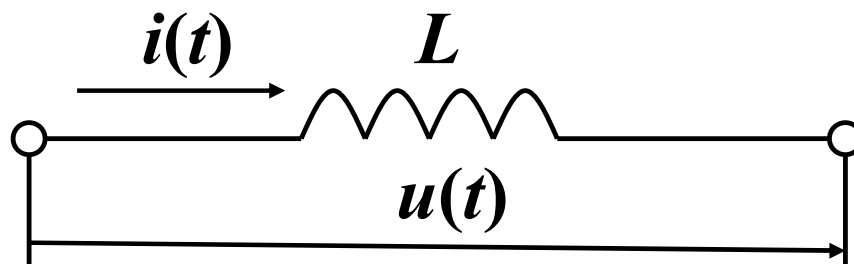
## 2.2 控制系统的运动微分方程

✓ 电容



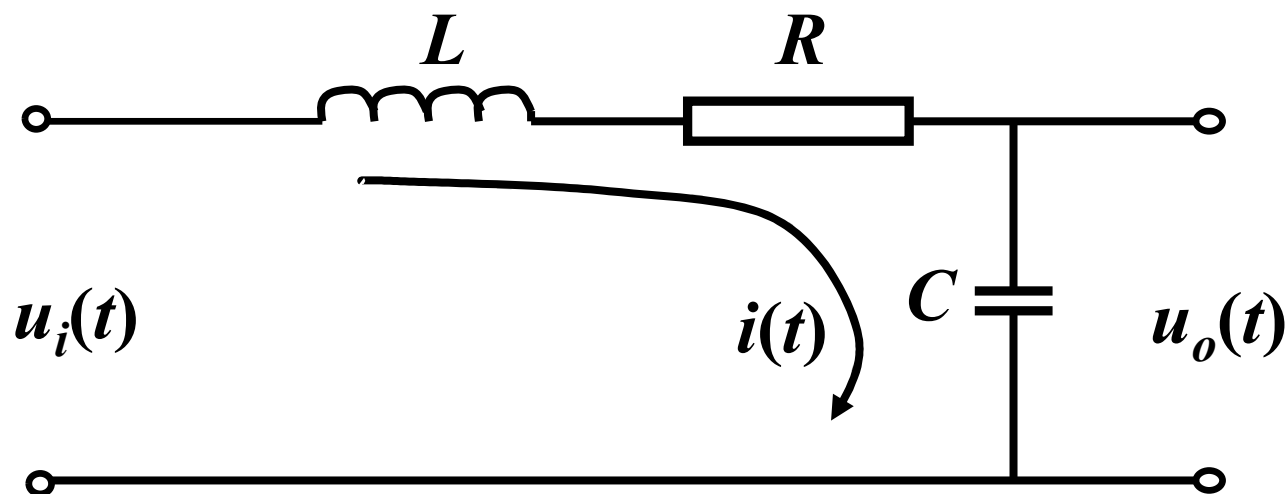
$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

✓ 电感



$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

### □ R-L-C无源电路网络



### R-L-C无源电路网络

$$\begin{cases} u_i(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt}i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt \\ u_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \end{cases}$$

## 2.2 控制系统的运动微分方程

$$LC \frac{d^2}{dt^2} u_o(t) + RC \frac{d}{dt} u_o(t) + u_o(t) = u_i(t)$$

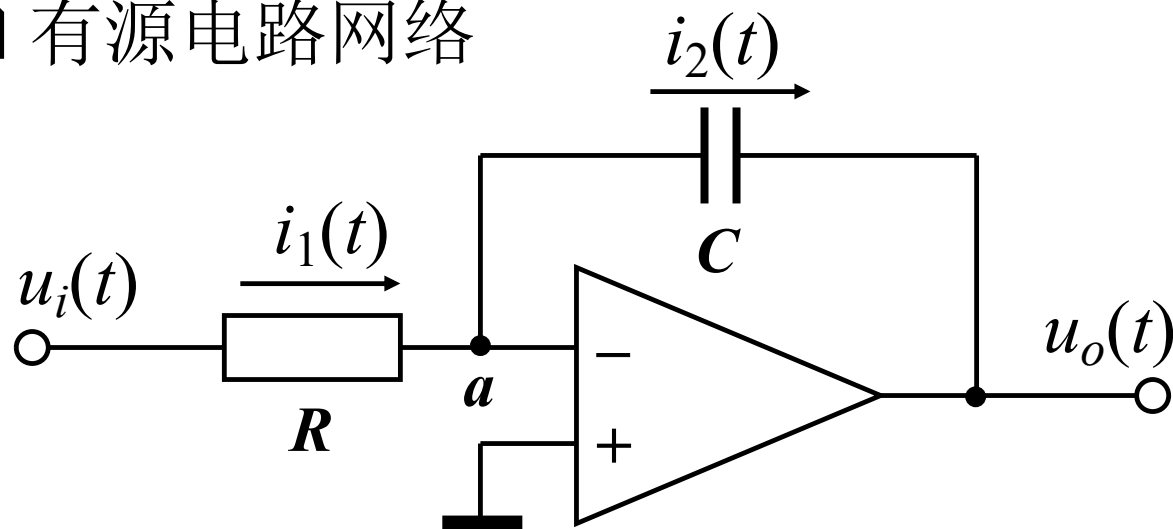
一般 $R$ 、 $L$ 、 $C$ 均为常数，上式为二阶常系数微分方程。

若 $L=0$ ，则系统简化为：

$$RC \frac{d}{dt} u_o(t) + u_o(t) = u_i(t)$$

## 2.2 控制系统的运动微分方程

□ 有源电路网络



$$\begin{cases} u_a(t) \approx 0 \\ i_1(t) \approx i_2(t) \end{cases} \Rightarrow \frac{u_i(t)}{R} = -C \frac{du_o(t)}{dt}$$

$$\text{即: } RC \frac{du_o(t)}{dt} = -u_i(t)$$

### ● 建立数学模型的一般步骤

- 分析系统工作原理和信号传递变换的过程，确定系统和各元件的输入、输出量；
- 从输入端开始，按照信号传递变换过程，依据各变量遵循的物理学定律，依次列写出各元件、部件的动态微分方程；
- 消去中间变量，得到描述元件或系统输入、输出变量之间关系的微分方程；
- 标准化：右端输入，左端输出，导数降幂排列



### ➤ 小结

- ✓ 物理本质不同的系统，可以有相同的数学模型，从而可以抛开系统的物理属性，用同一方法进行具有普遍意义的分析研究（信息方法）。
- ✓ 从动态性能看，在相同形式的输入作用下，数学模型相同而物理本质不同的系统其输出响应相似。相似系统是控制理论中进行实验模拟的基础。

## 2.2 控制系统的运动微分方程

- ✓ 通常情况下，元件或系统微分方程的阶次等于元件或系统中所包含的**独立**储能元件（惯性质量、弹性要素、电感、电容等）的个数；因为系统每增加一个独立储能元件，其内部就多一层能量（信息）的交换。
- ✓ 系统的动态特性是系统的**固有特性**，仅取决于系统的结构及其参数，**与系统的输入无关**。

### 2.3 非线性系统数学模型的线性化

#### ➤ 线性系统与非线性系统

##### □ 线性系统

可以用线性微分方程描述的系统。如果方程的系数为常数，则为**线性定常系统**；如果方程的系数是时间  $t$  的函数，则为**线性时变系统**；

**线性**是指系统满足**叠加原理**，即：

✓ 可加性：  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

✓ 齐次性：  $f(\alpha x) = \alpha f(x)$

或：  $f(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha f(x_1) + \beta f(x_2)$

### □ 非线性系统

用非线性微分方程描述的系统。非线性系统不满足叠加原理。

实际的系统通常都是非线性的，线性只在一定的工作范围内成立。

对于某些非线性系统，为分析方便，**可以通常在合理的条件下，将非线性系统简化为线性系统处理。**

### □ 线性时不变系统微分方程的一般形式

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dt^n} x_o(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x_o(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} x_o(t) + a_n x_o(t) \\ &= b_0 \frac{d^m}{dt^m} x_i(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x_i(t) + \cdots + b_{m-1} \frac{d}{dt} x_i(t) + b_m x_i(t) \end{aligned}$$

式中,  $a_1, a_2, \dots, a_n$  和  $b_0, b_1, \dots, b_m$  为由系统结构参数决定的实常数,  $m \leq n$ 。

### ● 线性化问题的提出

- 非线性现象：机械系统中的高速阻尼器，阻尼力与速度的平方有关；齿轮啮合系统由于间隙的存在导致的非线性传输特性；具有铁芯的电感，电流与电压的非线性关系等。
- 线性化：对某些非线性系统，在一定条件下作某种近似或缩小系统工作范围，将非线性微分方程近似为线性微分方程进行处理。

### ➤ 线性化的提出

- ❑ 线性系统是有条件存在的，只在一定的工作范围内具有线性特性；
- ❑ 非线性系统的分析和综合是非常复杂的；
- ❑ 对于实际系统而言，在一定条件下，采用线性化模型近似代替非线性模型进行处理，能够满足实际需要。

### ● 非线性系统数学模型的线性化

#### ➤ 泰勒级数展开法

函数 $y=f(x)$ 在其平衡点  $(x_0, y_0)$  附近的泰勒级数展开式为：

$$y = f(x) = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2!} \left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2 + \frac{1}{3!} \left. \frac{d^3 f(x)}{dx^3} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^3 + \dots$$



## 2.3 非线性系统数学模型的线性化

略去含有高于一次的增量 $\Delta x = x - x_0$ 的项，则：

$$y = f(x_0) + \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} (x - x_0)$$

$$\text{或： } y - y_0 = \Delta y = K \Delta x, \quad \text{其中： } K = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0}$$

上式即为非线性系统的线性化模型，称为**增量方程**。 $y_0 = f(x_0)$ 称为系统的**静态方程**；

由于反馈系统不允许出现大的偏差，因此，这种线性化方法对于闭环控制系统具有实际意义。

## 2.3 非线性系统数学模型的线性化

增量方程的数学含义就是将参考坐标的原点移到系统或元件的平衡工作点上，对于实际系统就是以正常工作状态为研究系统运动的起始点，这时，系统所有的初始条件均为零。

对多变量系统，如： $y = f(x_1, x_2)$ ，同样可采用泰勒级数展开获得线性化的增量方程。

## 2.3 非线性系统数学模型的线性化

$$y = f(x_{10}, x_{20}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} (x_1 - x_{10}) + \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}} (x_2 - x_{20}) + \cdots$$

增量方程:  $y - y_0 = \Delta y = K_1 \Delta x_1 + K_2 \Delta x_2$

静态方程:  $y_0 = f(x_{10}, x_{20})$

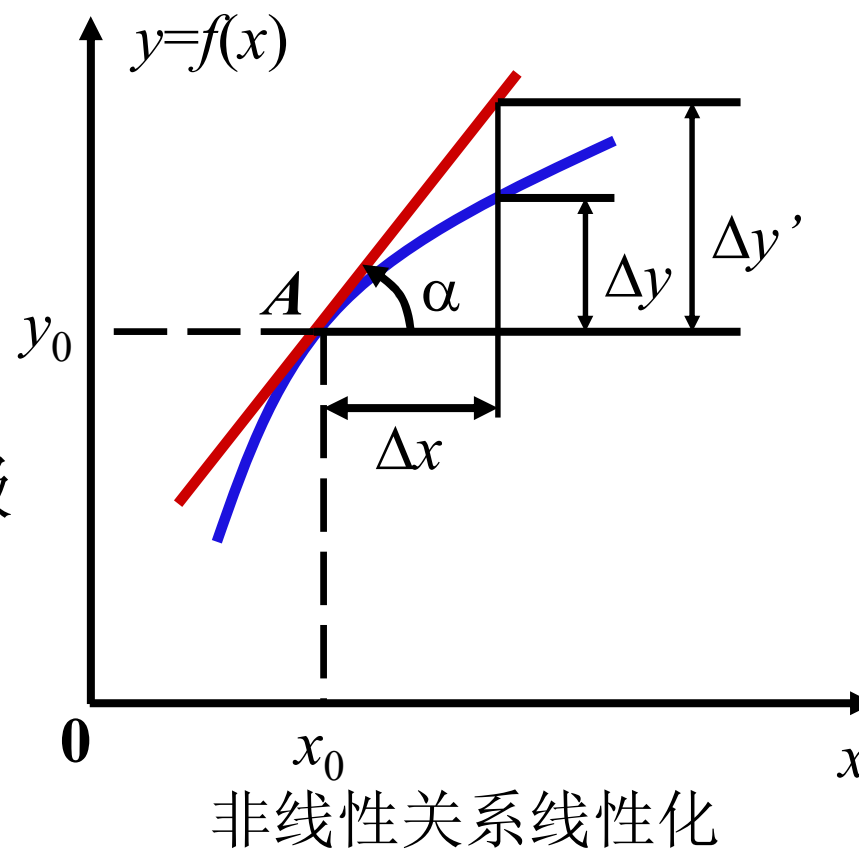
其中:  $K_1 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_1} \right|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}}, \quad K_2 = \left. \frac{\partial f}{\partial x_2} \right|_{\substack{x_1=x_{10} \\ x_2=x_{20}}}$

### ➤ 滑动线性化——切线法

线性化增量方程为：

$$\Delta y \approx \Delta y' = \Delta x \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

切线法是泰勒级数法的特例。



### ● 系统线性化微分方程的建立

#### ➤ 步骤

- 确定系统各组成元件在平衡态的工作点；
- 列出各组成元件在工作点附近的增量方程；
- 消除中间变量，得到以增量表示的线性化微分方程；

## 2.3 非线性系统数学模型的线性化

### ➤ 实例：单摆运动线性化

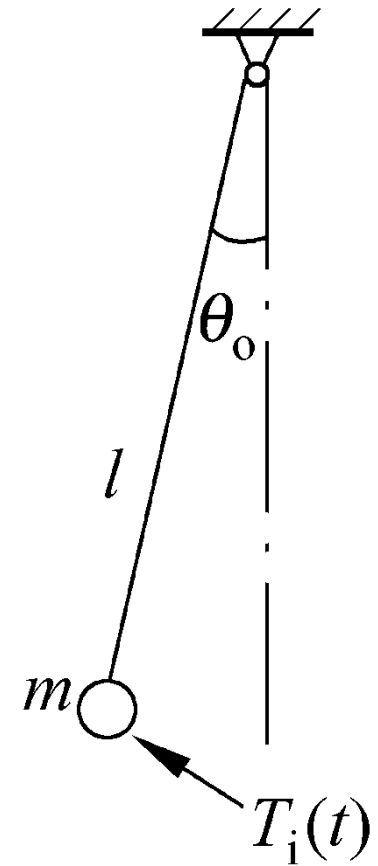
解：根据牛顿第二定律：

$$T_i(t) - mgl \sin \theta_o(t) = ml^2 \ddot{\theta}_o(t)$$

将非线性项  $\sin \theta_o$

在  $\theta_o = 0$  点附近泰勒展开(当  $|\theta_o| \rightarrow 0$ )

$$ml^2 \ddot{\theta}_o(t) + mgl \theta_o(t) = T_i(t)$$



**线性化方法：**假设变量相对于某一工作状态（平衡点）偏差很小。设系统的函数关系为

$$y(t) = f(x(t))$$

简写为  $y = f(x)$ 。如果系统的工作平衡点为  $\bar{x}, \bar{y}$ ，则方程可以在  $\bar{x}$  点附近台劳展开

$$y = f(x) = f(\bar{x}) + \frac{df(\bar{x})}{dx}(x - \bar{x}) + \frac{1}{2} \frac{d^2 f(\bar{x})}{dx^2}(x - \bar{x})^2 + \dots$$

如果  $x - \bar{x}$  很小，可以忽略其高阶项，因此上述方程可写成增量方程形式

$$\Delta y = K \Delta x$$

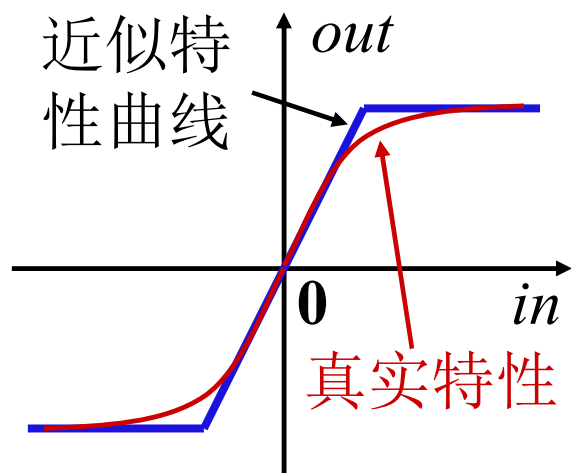
其中， $\Delta y = y - \bar{y} = y - f(\bar{x})$ ， $\Delta x = x - \bar{x}$   $K = \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=\bar{x}}$

### ● 线性化处理的注意事项

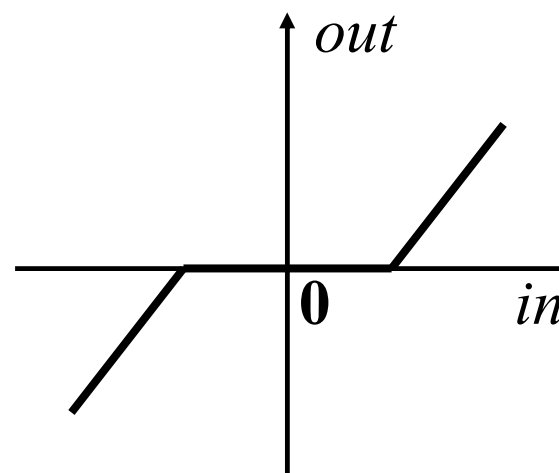
- 线性化方程的系数与平衡工作点的选择有关；
- 线性化是有条件的，必须注意线性化方程适用的工作范围；
- 某些典型的本质非线性，如继电器特性、间隙、死区、摩擦等，由于存在不连续点，不能通过泰勒展开进行线性化，只有当它们对系统影响很小时才能忽略不计，否则只能作为非线性问题处理。



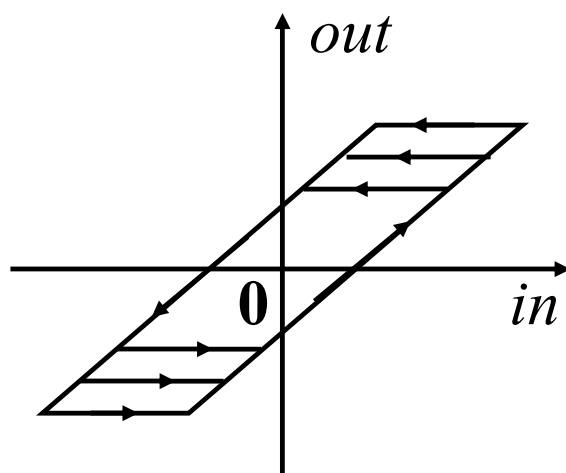
## 2.3 非线性系统数学模型的线性化



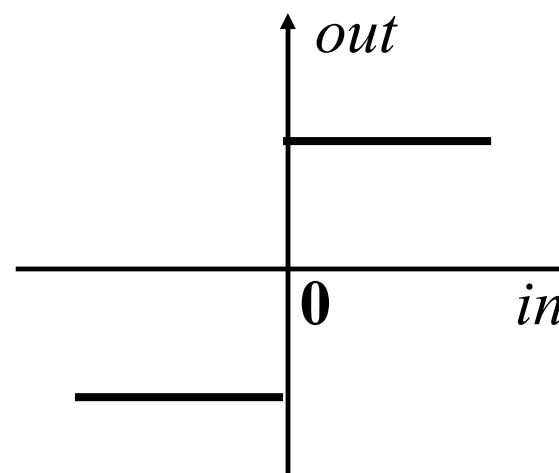
饱和非线性



死区非线性



间隙非线性



继电器非线性

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

## ● 拉氏变换

设函数 $f(t)$  ( $t \geq 0$ )在任一有限区间上分段连续,  
且存在一正实常数 $\sigma$ , 使得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\sigma t} |f(t)| \rightarrow 0$$

显然函数 $f(t)e^{-\sigma t}$   
的傅立叶变换就  
是 $f(t)$ 的拉氏变换

则函数 $f(t)$ 的拉普拉氏变换存在, 并定义为:

$$F(s) = L[f(t)] \equiv \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

式中:  $s = \sigma + j\omega$  ( $\sigma, \omega$ 均为实数) 为复变数;

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

$\int_0^{\infty} e^{-st} dt$  称为拉普拉斯积分；

$F(s)$ 称为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换或象函数，  
它是一个复变函数； $f(t)$ 称为 $F(s)$ 的原函数；

$L$ 为拉氏变换的符号。

显然函数 $f(t)$ 是 $f(t)e^{-\sigma t}$ 的傅立叶变换的反变换乘以 $e^{\sigma t}$

### ●拉氏反变换

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds, \quad t > 0$$

$L^{-1}$ 为拉氏反变换的符号。

Laplace（拉普拉斯）变换是描述、分析连续、线性、时不变系统的重要工具！

- 拉氏变换定义

拉氏变换可理解为广义单边傅立叶变换。  
傅氏变换建立了时域和频域间的联系，而拉氏变换建立了时域和复频域间的联系。

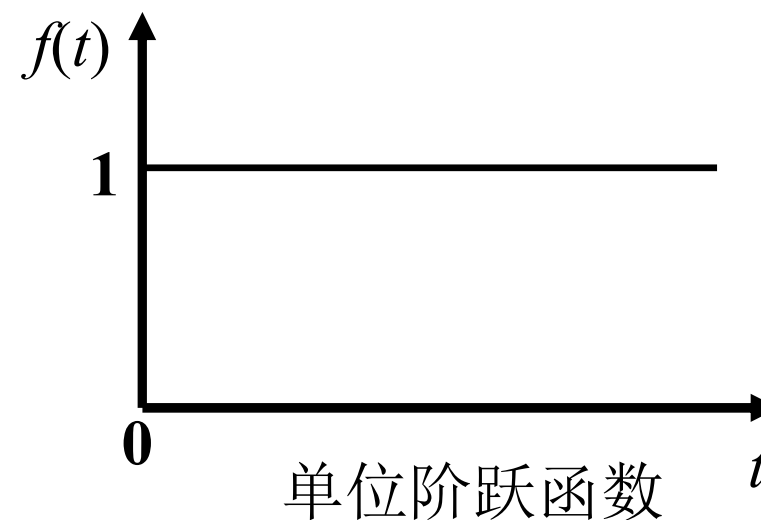
### ● 简单函数的拉氏变换

#### □ 单位阶跃函数 $1(t)$

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$L[1(t)] = \int_0^{\infty} 1(t) e^{-st} dt$$

$$= -\frac{1}{s} e^{-st} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$



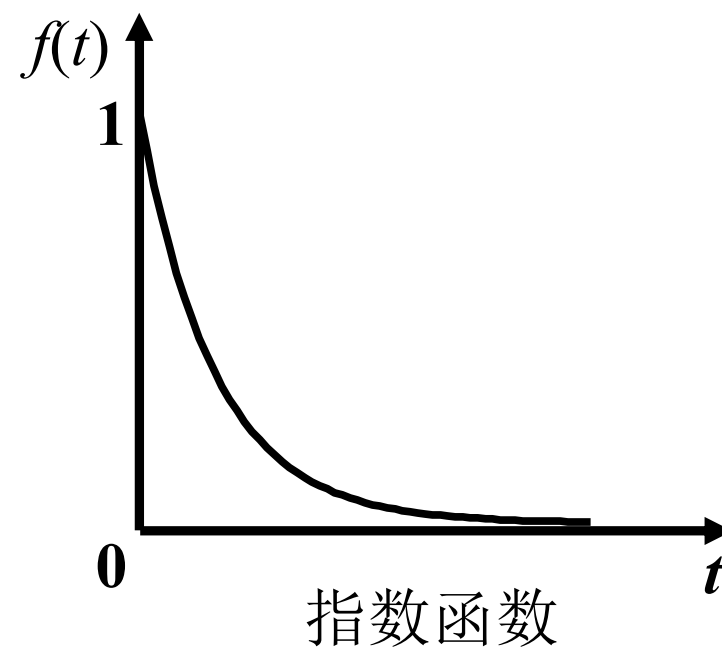
## □ 指数函数

$$f(t) = e^{-at} \quad (a \text{ 为常数})$$

$$L[e^{-at}] = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-st} dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t} dt$$

$$= \frac{1}{s+a}, \quad (\operatorname{Re}(s+a) > 0)$$



## □ 正弦及余弦函数

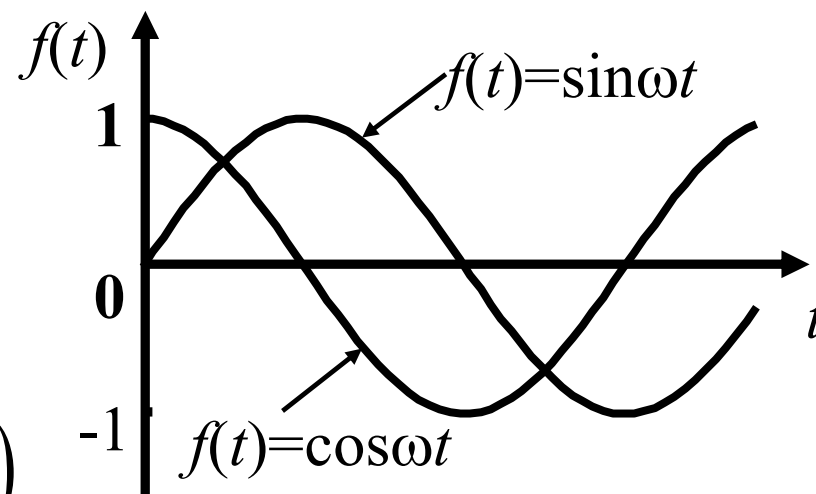
$$L[\sin \omega t] = \int_0^{\infty} \sin \omega t \cdot e^{-st} dt$$

$$L[\cos \omega t] = \int_0^{\infty} \cos \omega t \cdot e^{-st} dt$$

由欧拉公式，有：

$$\sin \omega t = \frac{1}{2j} (e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})$$

$$\cos \omega t = \frac{1}{2} (e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$



正弦及余弦函数

从而

$$\begin{aligned} L[\sin \omega t] &= \frac{1}{2j} \left( \int_0^{\infty} e^{j\omega t} e^{-st} dt - \int_0^{\infty} e^{-j\omega t} e^{-st} dt \right) \\ &= \frac{1}{2j} \left( \frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega} \right) \\ &= \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0) \end{aligned}$$

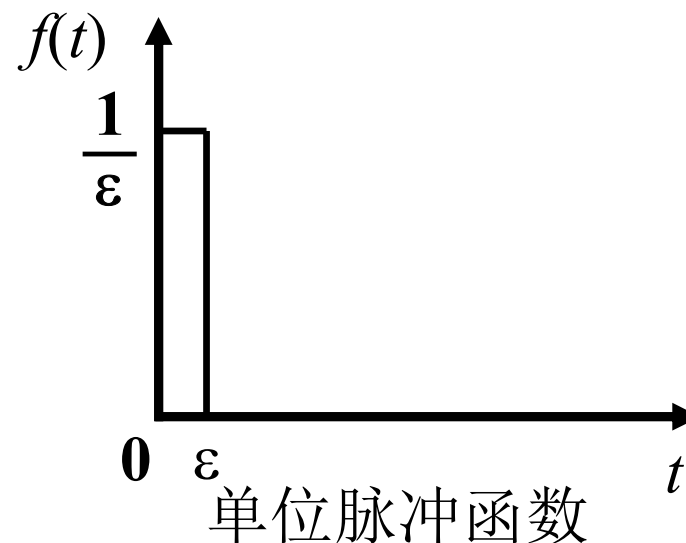
同理  $L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$



## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

□ 单位脉冲函数  $\delta(t)$

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0 \text{ 且 } t > \varepsilon) \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} & (0 < t < \varepsilon) \end{cases}$$



$$L[\delta(t)] = \int_0^{\infty} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(t) \cdot e^{-st} dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} \frac{1}{\varepsilon} \cdot e^{-st} dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon s} (1 - e^{-\varepsilon s})$$

由洛必达法则:  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon s} (1 - e^{-\varepsilon s}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{(1 - e^{-\varepsilon s})'}{(\varepsilon s)'}$

所以:  $L[\delta(t)] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon \cdot e^{-\varepsilon s}}{\varepsilon} = 1$

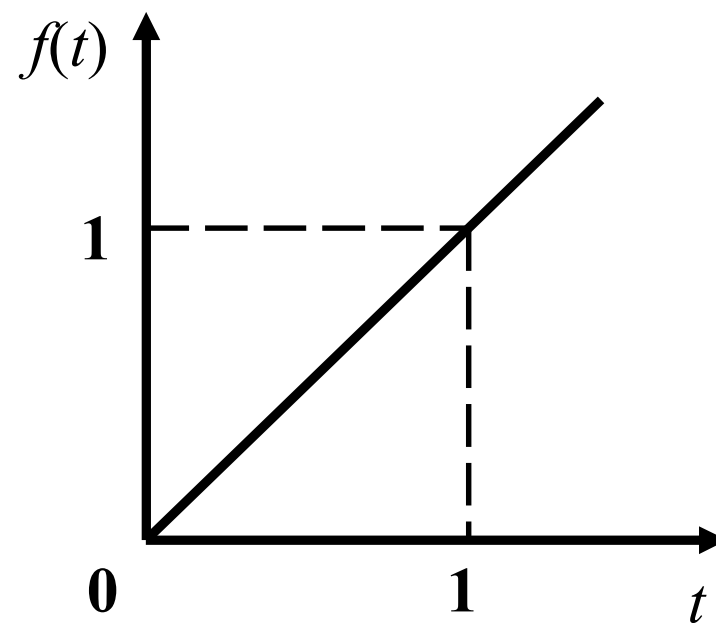
## □ 单位速度函数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & t \geq 0 \end{cases}$$

$$L[f(t)] = \int_0^{\infty} t e^{-st} dt$$

$$= t \frac{e^{-st}}{-s} \Big|_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-st}}{-s} dt$$

$$= \frac{1}{s^2} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0)$$

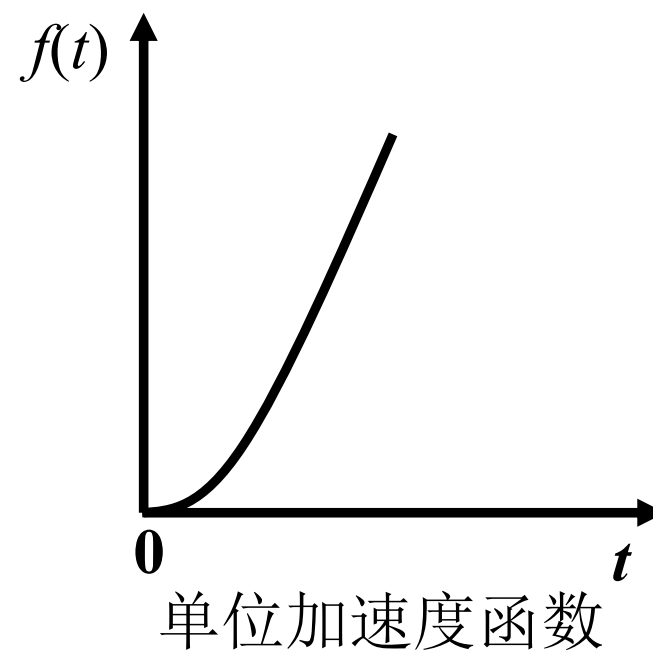


单位速度函数

### □ 单位加速度函数

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2}t^2 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} L[f(t)] &= \int_0^{\infty} \frac{1}{2}t^2 e^{-st} dt \\ &= \frac{1}{s^3} \quad (\operatorname{Re}(s) > 0) \end{aligned}$$



## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

□ 幂函数  $t^n \cdot 1(t)$

(令  $st = u$ )

$$L[t^n \cdot 1(t)] = \int_0^{\infty} t^n e^{-st} dt = \frac{1}{s^{n+1}} \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

函数的拉氏变换及反变换通常可以由拉氏变换表直接或通过一定的转换得到。

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^{\infty} u^n e^{-u} du = n a_{n-1} \\ &= n! a_0 = n! \end{aligned}$$

### ● 拉氏变换积分下限的说明

在某些情况下，函数 $f(t)$ 在 $t=0$ 处有一个脉冲函数。这时必须明确拉氏变换的积分下限是 $0^-$ 还是 $0^+$ ，并相应记为：

$$L_+[f(t)] = \int_{0^+}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

$$\begin{aligned} L_-[f(t)] &= \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st} dt \\ &= L_+[f(t)] + \int_{0^-}^{0^+} f(t)e^{-st} dt \end{aligned}$$

### ● 拉氏变换性质

#### ➤ 叠加原理

□ 齐次性:  $L[af(t)] = aL[f(t)]$ ,  $a$  为常数;

□ 叠加性:  $L[af_1(t) + bf_2(t)] = aL[f_1(t)] + bL[f_2(t)]$   
 $a, b$  为常数;

显然, 拉氏变换为线性变换。

### ► 微分定理

$$L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0), \quad f(0) = f(t)|_{t=0}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0) \\ \dots\dots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0) \end{array} \right.$$

式中,  $f'(0)$ ,  $f''(0)$ ,  $\dots\dots$  为函数  $f(t)$  的各阶导数在  $t=0$  时的值。

当 $f(t)$ 及其各阶导数在 $t=0$ 时刻的值均为零时（零初始条件）：

$$\left\{ \begin{array}{l} L\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) \\ L\left[\frac{d^2 f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) \\ \dots\dots\dots \\ L\left[\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right] = s^n F(s) \end{array} \right.$$



当 $f(t)$ 在 $t=0$ 处具有间断点时， $df(t)/dt$ 在 $t=0$ 处将包含一个脉冲函数。故若 $f(0^+) \neq f(0^-)$ ，则：

$$L_+ \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = sF(s) - f(0^+)$$

$$L_- \left[ \frac{df(t)}{dt} \right] = sF(s) - f(0^-)$$

### ► 复微分定理

若 $L[f(t)]=F(s)$ ，则除了 $F(s)$ 的极点之外，有：

$$\frac{d}{ds} F(s) = -L[tf(t)]$$

$$\frac{d^2}{ds^2} F(s) = L[t^2 f(t)]$$

.....

$$\frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n L[t^n f(t)] \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

$$L[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

➤ 积分定理

$$L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0)}{s}, \quad f^{(-1)}(0) = \int f(t)dt \Big|_{t=0}$$

当初始条件为零时  $L\left[\int f(t)dt\right] = \frac{1}{s} F(s)$

若  $f(0^+) \neq f(0^-)$ , 则:

$$L_+ \left[ \int f(t)dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0^+)}{s}$$

$$L_- \left[ \int f(t)dt \right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{f^{(-1)}(0^-)}{s}$$

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

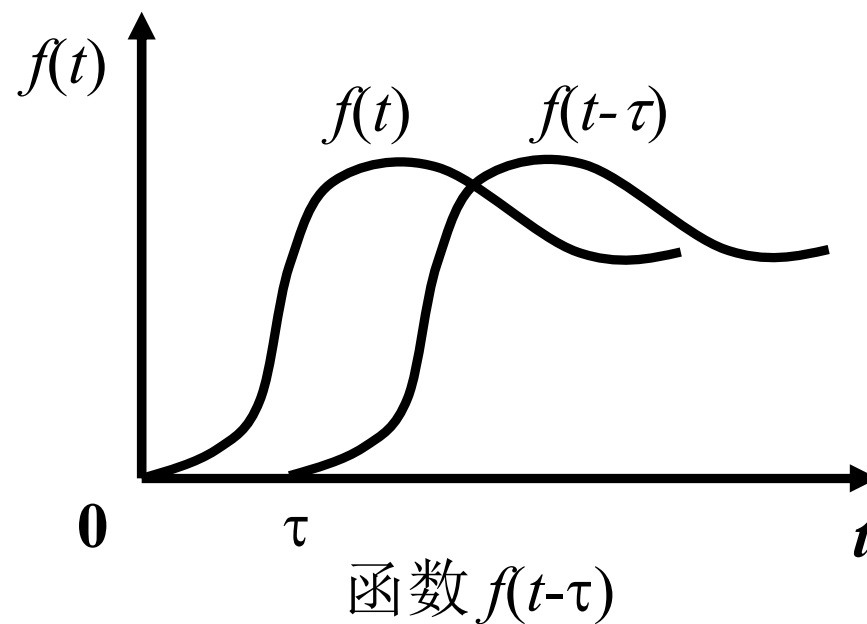
同样

$$L\left[\underbrace{\int \cdots \int}_n f(t) dt\right] = \frac{1}{s^n} F(s) + \frac{1}{s^{n-1}} f^{(-1)}(0) + \cdots + \frac{1}{s} f^{(-n+1)}(0)$$

当初始条件为零时

$$L\left[\underbrace{\int \cdots \int}_n f(t) dt\right] = \frac{1}{s^n} F(s)$$

### ► 延时定理



设当  $t < 0$  时,  $f(t) = 0$ , 则对任意  $\tau \geq 0$ , 有:

$$L[x(t-a) \cdot 1(t-a)] = e^{-as} X(s)$$

### ► 衰减定理

$$L[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$$

$$\text{例: } L[\sin \omega t] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad L[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$L[e^{-at} \sin \omega t] = \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

$$L[e^{-at} \cos \omega t] = \frac{(s + a)}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

### ➤ 初值定理

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

### ➤ 终值定理

若 $sF(s)$ 的所有极点位于左半 $s$ 平面，即

$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$  存在。则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$$

### ➤ 卷积定理

$$L[f(t) * g(t)] = F(s)G(s)$$

其中， $f(t)*g(t)$ 表示函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积。

若 $t < 0$ 时， $f(t) = g(t) = 0$ ，则 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的卷积可表示为

$$f(t) * g(t) \equiv \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$$



## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

➤  $f\left(\frac{t}{a}\right)$  的象函数

$$L\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as) \quad a = \text{常数} > 0$$

$$\text{例: } L[e^{-t}] = F(s) = \frac{1}{s+1}$$

$$L[e^{-t/a}] = aF(as) = \frac{a}{as+1}$$

### ● 拉氏反变换

#### ➤ 部分分式法

如果 $f(t)$ 的拉氏变换 $F(s)$ 已分解成为下列分量:

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\dots+F_n(s)$$

假定 $F_1(s), F_2(s), \dots, F_n(s)$ 的拉氏反变换可以容易地求出, 则

$$\begin{aligned} L^{-1}[F(s)] &= L^{-1}[F_1(s)]+L^{-1}[F_2(s)]+\dots+L^{-1}[F_n(s)] \\ &= f_1(t) + f_2(t) + \dots + f_n(t) \end{aligned}$$

在控制理论中，通常

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (n \geq m)$$

为了应用上述方法，将 $F(s)$ 写成下面的形式

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{c_0 s^m + c_1 s^{m-1} + \cdots + c_{m-1} s + c_m}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)}$$

式中， $p_1, p_2, \dots, p_n$ 为方程 $A(s)=0$ 的根的负值，称为 $F(s)$ 的极点； $c_i = b_i / a_0$  ( $i = 0, 1, \dots, m$ )。

此时，即可将 $F(s)$ 展开成部分分式。

### ➤ 只含不同单极点的情况

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s + p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i}$$

式中， $A_i$ 为常数，称为 $s = -p_i$ 极点处的留数。

$$A_i = [F(s) \cdot (s + p_i)]_{s = -p_i}$$

$$\text{于是} \quad L^{-1}[F(s)] = L^{-1}\left[\sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i}\right] = \sum_{i=1}^n A_i e^{-p_i t}$$

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

例：求  $F(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s(s^2 - s - 6)}$  的原函数。

$$\text{解： } F(s) = \frac{s^2 - s + 2}{s(s^2 - s - 6)} = \frac{s^2 - s + 2}{s(s-3)(s+2)} = \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s-3} + \frac{A_3}{s+2}$$

$$A_1 = [sF(s)]_{s=0} = \left[ \frac{s^2 - s + 2}{(s-3)(s+2)} \right]_{s=0} = -\frac{1}{3}$$

$$A_2 = [(s-3)F(s)]_{s=3} = \left[ \frac{s^2 - s + 2}{s(s+2)} \right]_{s=3} = \frac{8}{15}$$

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

$$A_3 = [(s+2)F(s)]_{s=-2} = \left[ \frac{s^2 - s + 2}{s(s-3)} \right]_{s=-2} = \frac{4}{5}$$

$$\text{即: } F(s) = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s} + \frac{8}{15} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+2}$$

$$f(t) = L^{-1}[F(s)] = -\frac{1}{3} + \frac{8}{15}e^{3t} + \frac{4}{5}e^{-2t} \quad (t \geq 0)$$

### ➤ 含共轭复数极点情况

**方法1** 假设 $F(s)$ 含有一对共轭复数极点 $-p_1$ 、 $-p_2$ ，其余极点均为各不相同的实数极点，则

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A_1s + A_2}{(s + p_1)(s + p_2)} + \frac{A_3}{s + p_3} + \cdots + \frac{A_n}{s + p_n}$$

式中， $A_1$ 和 $A_2$ 的值由下式求解：

$$[F(s)(s + p_1)(s + p_2)]_{s=-p_1 \text{ 或 } s=-p_2} = [A_1s + A_2]_{s=-p_1 \text{ 或 } s=-p_2}$$

上式为复数方程，令方程两端实部、虚部分别相等即可确定 $A_1$ 和 $A_2$ 的值。

方法2 此时 $F(s)$ 仍可分解为下列形式:

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{A_1}{s + p_1} + \frac{A_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{A_n}{s + p_n} = \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{s + p_i}$$

由于 $p_1$ 、 $p_2$ 为共轭复数, 因此,  $A_1$ 和 $A_2$ 也为共轭复数。

$$A_i = [F(s) \cdot (s + p_i)]_{s = -p_i}$$



## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

方法1例：求  $F(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}$  的原函数。

$$\text{解： } F(s) = \frac{s+1}{s \left( s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \left( s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2} \right)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1 s + A_2}{s^2 + s + 1}$$

$$A_0 = sF(s) \Big|_{s=0} = 1$$

$$(s^2 + s + 1)F(s) \Big|_{s=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}} = (A_1 s + A_2) \Big|_{s=-\frac{1}{2}-j\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\text{即 } \begin{cases} -\frac{1}{2}(A_1 + A_2) = \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2}(A_1 - A_2) = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Rightarrow A_1 = -1, \quad A_2 = 0$$

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

所以 
$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + s + 1}$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{s}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{\frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$
$$= \frac{1}{s} - \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\left(s + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

$$\begin{aligned} f(t) &= 1 - e^{-t/2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t + \frac{1}{2} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t \right) \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-t/2} \sin \left( \frac{\sqrt{3}}{2} t + 60 \right), \quad t \geq 0 \end{aligned}$$

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

方法2例:  $X(s) = \frac{s+1}{s^3 + s^2 + s}$

解: 
$$X(s) = \frac{s+1}{s^3 + s^2 + s} = \frac{a_1}{s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{a_2}{s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{a_3}{s}$$

$$a_1 = \left[ \frac{s+1}{s^3 + s^2 + s} \cdot \left( s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right]_{s = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6}$$

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

$$a_3 = \left[ \frac{s+1}{s^3 + s^2 + s} \cdot s \right]_{s=0} = 1$$

$$X(s) = \frac{s+1}{s^3 + s^2 + s} = \frac{-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6}}{s + \frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6}}{s + \frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}} + \frac{1}{s}$$

则

$$\begin{aligned} x(t) &= \left[ \left( -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{6} \right) e^{-\left(\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + \left( -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{6} \right) e^{-\left(\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)t} + 1 \right] \cdot 1(t) \\ &= \left[ e^{-\frac{1}{2}t} \left( \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}t - \cos \frac{\sqrt{3}}{2}t \right) + 1 \right] \cdot 1(t) \end{aligned}$$

➤ 含多重极点情况

设 $F(s)$ 存在 $r$ 重极点 $-p_0$ ，其余极点均不同，则

$$F(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{(s + p_0)^r (s + p_{r+1}) \cdots (s + p_n)}$$

$$= \frac{A_{01}}{(s + p_0)^r} + \frac{A_{02}}{(s + p_0)^{r-1}} + \cdots + \frac{A_{0r}}{(s + p_0)} + \frac{A_{r+1}}{(s + p_{r+1})} + \cdots + \frac{A_n}{(s + p_n)}$$

式中， $A_{r+1}, \dots, A_n$ 利用前面的方法求解。

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

$$A_{01} = [F(s)(s + p_0)^r]_{s=-p_0}$$

$$A_{02} = \left\{ \frac{d}{ds} [F(s)(s + p_0)^r] \right\}_{s=-p_0}$$

$$A_{03} = \frac{1}{2!} \left\{ \frac{d^2}{ds^2} [F(s)(s + p_0)^r] \right\}_{s=-p_0}$$

.....

$$A_{0r} = \frac{1}{(r-1)!} \left\{ \frac{d^{r-1}}{ds^{r-1}} [F(s)(s + p_0)^r] \right\}_{s=-p_0}$$

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

注意到:

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(s+p_0)^n}\right] = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-p_0 t}$$

所以:

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}[F(s)] \\ &= \left[ \frac{A_{01}}{(r-1)!} t^{r-1} + \frac{A_{02}}{(r-2)!} t^{r-2} + \cdots + A_{0r} \right] e^{-p_0 t} \\ &\quad + A_{r+1} e^{-p_{r+1} t} + \cdots + A_n e^{-p_n t} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$



## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

例：求  $F(s) = \frac{s+3}{(s+2)^2(s+1)}$  的原函数。

解：  $F(s) = \frac{A_{01}}{(s+2)^2} + \frac{A_{02}}{s+2} + \frac{A_3}{s+1}$

$$A_{01} = \left[ F(s)(s+2)^2 \right]_{s=-2} = \left[ \frac{s+3}{s+1} \right]_{s=-2} = -1$$

$$\begin{aligned} A_{02} &= \left\{ \frac{d}{ds} \left[ F(s)(s+2)^2 \right] \right\}_{s=-2} = \left\{ \frac{d}{ds} \left[ \frac{s+3}{s+1} \right] \right\}_{s=-2} \\ &= \left[ \frac{(s+3)'(s+1) - (s+3)(s+1)'}{(s+1)^2} \right]_{s=-2} \\ &= -2 \end{aligned}$$

$$A_3 = [F(s)(s+1)]_{s=-1} = 2$$

$$F(s) = \frac{-1}{(s+2)^2} - \frac{2}{s+2} + \frac{2}{s+1}$$

于是

$$\begin{aligned} f(t) &= L^{-1}[F(s)] \\ &= -(t+2)e^{-2t} + 2e^{-t} \quad (t \geq 0) \end{aligned}$$

### ● 借用拉氏变换解常系数线性微分方程

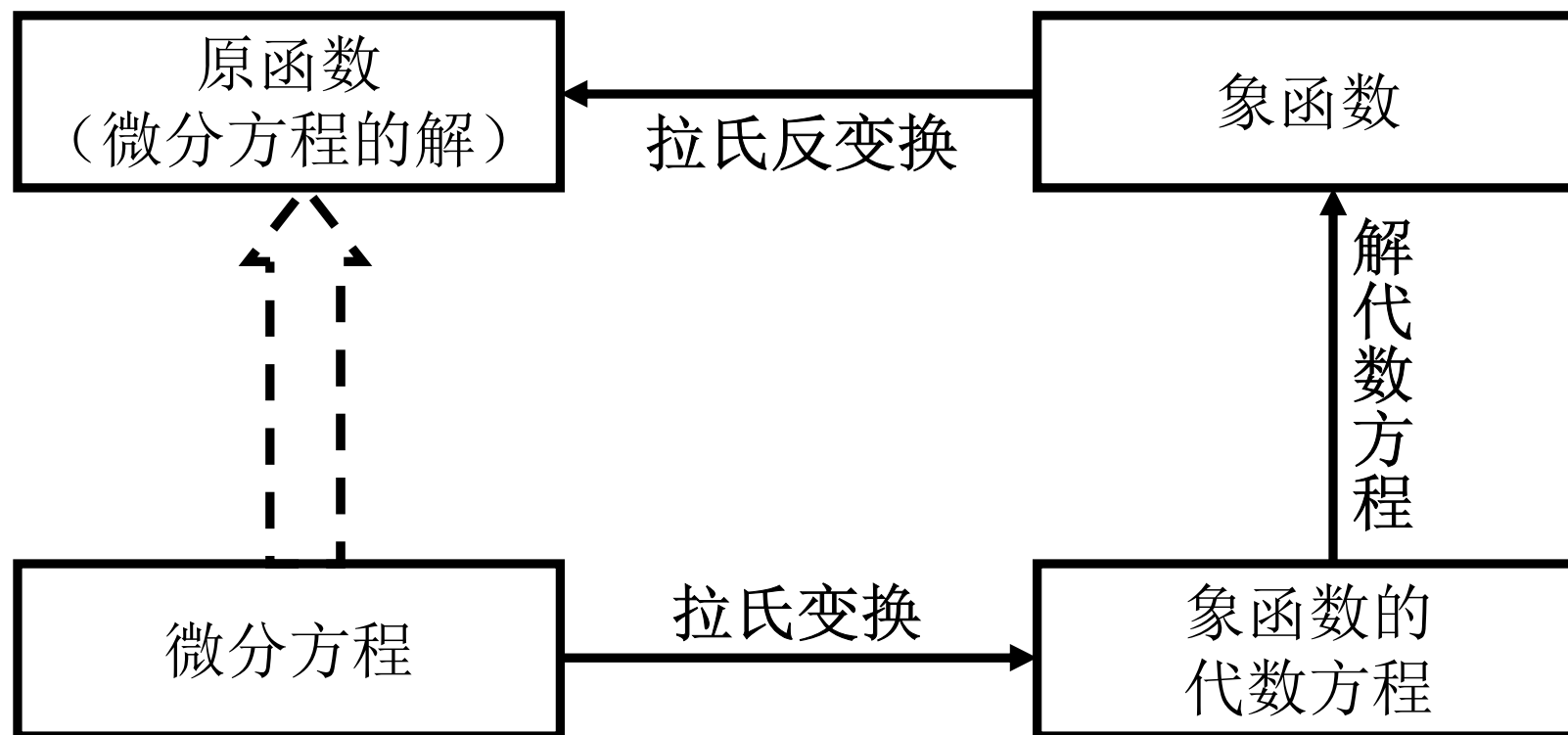
#### ➤ 求解步骤

□ 将微分方程通过拉氏变换变为  $s$  的代数方程；

□ 解代数方程，得到有关变量的拉氏变换表达式；

□ 应用拉氏反变换，得到微分方程的时域解。

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换



拉氏变换法求解线性微分方程的过程

### ➤ 实例

设系统微分方程为：

$$\frac{d^2 x_o(t)}{dt^2} + 5 \frac{dx_o(t)}{dt} + 6x_o(t) = x_i(t)$$

若 $x_i(t)=1(t)$ ，初始条件分别为 $x'_o(0)$ 、 $x_o(0)$ ，试求 $x_o(t)$ 。

解：对微分方程左边进行拉氏变换

$$L\left[\frac{d^2 x_o(t)}{dt^2}\right] = s^2 X_o(s) - sx_o(0) - x'_o(0)$$

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

$$L\left[5\frac{dx_o(t)}{dt}\right] = 5sX_o(s) - 5x_o(0)$$

$$L[6x_o(t)] = 6X_o(s)$$

$$\begin{aligned} \text{即: } L\left[\frac{d^2x_o(t)}{dt^2} + 5\frac{dx_o(t)}{dt} + 6x_o(t)\right] \\ = (s^2 + 5s + 6)X_o(s) - (s + 5)x_o(0) - x'_o(0) \end{aligned}$$

对方程右边进行拉氏变换

$$L[x_i(t)] = X_i(s) = L[1(t)] = \frac{1}{s}$$

从而

$$(s^2 + 5s + 6)X_o(s) - [(s + 5)x_o(0) + x'_o(0)] = \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned} X_o(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 5s + 6)} + \frac{(s + 5)x_o(0) + x'_o(0)}{s^2 + 5s + 6} \\ &= \frac{A_1}{s} + \frac{A_2}{s + 2} + \frac{A_3}{s + 3} + \frac{B_1}{s + 2} + \frac{B_2}{s + 3} \end{aligned}$$

## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

$$A_1 = \left[ \frac{1}{s^2 + 5s + 6} \right]_{s=0} = \frac{1}{6}$$

$$A_2 = \left[ \frac{1}{s(s+3)} \right]_{s=-2} = -\frac{1}{2}$$

$$A_3 = \left[ \frac{1}{s(s+2)} \right]_{s=-3} = \frac{1}{3}$$

$$B_1 = \left[ \frac{(s+5)x_o(0) + x_o'(0)}{s+3} \right]_{s=-2} = 3x_o(0) + x_o'(0)$$

$$B_2 = \left[ \frac{(s+5)x_o(0) + x_o'(0)}{s+2} \right]_{s=-3} = -2x_o(0) - x_o'(0)$$



## 2.4 拉氏变换和拉氏反变换

所以

$$X_o(s) = \frac{1/6}{s} + \frac{-1/2}{s+2} + \frac{1/3}{s+3} + \frac{3x_o(0) + x'_o(0)}{s+2} + \frac{-2x_o(0) - x'_o(0)}{s+3}$$

零初状态响应

$$x_o(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t}$$

零输入响应

$$+ [3x_o(0) + x'_o(0)]e^{-2t} - [2x_o(0) + x'_o(0)]e^{-3t} \quad (t \geq 0)$$

当初始条件为零时：

$$x_o(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^{-3t} \quad (t \geq 0)$$

由上述实例可见：

- 应用拉氏变换法求解微分方程时，由于初始条件已自动地包含在微分方程的拉氏变换式中，因此，不需要根据初始条件求积分常数的值就可得到微分方程的全解。
- 如果所有的初始条件为零，微分方程的拉氏变换可以简单地用 $s^n$ 代替 $d^n/dt^n$ 得到。

## 2.5 传递函数及典型环节的传递函数

- 传递函数的概念和定义

- 传递函数 
$$G(s) \triangleq \frac{X_o(s)}{X_i(s)}$$

在零初始条件下，线性定常系统输出量的拉氏变换与引起该输出的输入量的拉氏变换之比。

零初始条件：

- $t < 0$  时，输入量及其各阶导数均为0；
    - 输入量施加于系统之前，系统处于稳定的工作状态，即  $t < 0$  时，输出量及其各阶导数也均为0；

设线性定常系统的微分方程为

$$\begin{aligned} a_0 x_o^{(n)}(t) + a_1 x_o^{(n-1)}(t) + \cdots + a_{n-1} \dot{x}_o(t) + a_n x_o(t) \\ = b_0 x_i^{(m)}(t) + b_1 x_i^{(m-1)}(t) + \cdots + b_{m-1} \dot{x}_i(t) + b_m x_i(t) \end{aligned}$$

则零初始条件下，系统传递函数为

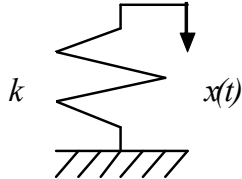
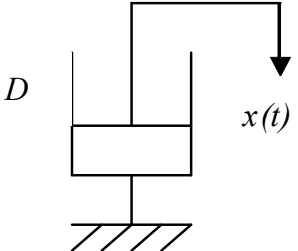
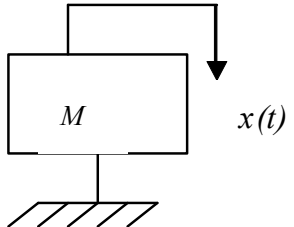
$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

它有以下特点：

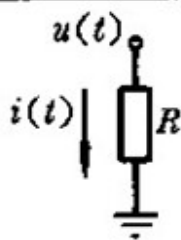
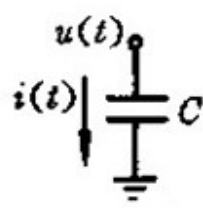
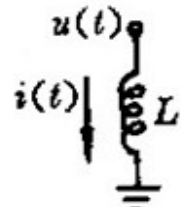
- 比微分方程简单，通过拉氏变换，实数域复杂的微积分运算已经转化为简单的代数运算；
- 输入典型信号时，其输出与传递函数有一定对应关系，当输入是单位脉冲函数时，输入的象函数为1，其输出象函数与传递函数相同；
- 令传递函数中的 $s=j\omega$ ，则系统可在频率域内分析（详见第四章）；
- $G(s)$ 的零极点分布决定系统动态特性。

## 2.5 传递函数及典型环节的传递函数

### 等效弹性刚度

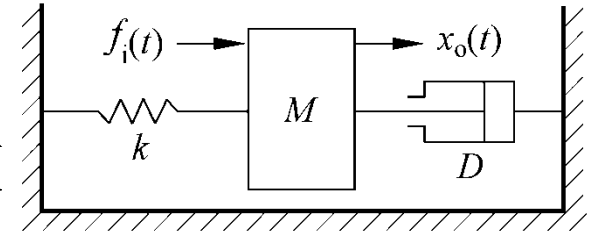
	力学模型	时域方程	拉氏变换式	等效弹簧刚度
弹簧		$f(t) = kx(t)$	$F(s) = kX(s)$	$k$
阻尼器		$f(t) = D\dot{x}(t)$	$F(s) = DsX(s)$	$Ds$
质量		$f(t) = M\ddot{x}(t)$	$F(s) = Ms^2X(s)$	$Ms^2$

## 等效复阻抗

	典型电路	时域方程	拉氏变换式	复阻抗
电阻负载		$u(t) = i(t) \cdot R$	$U(s) = I(s) \cdot R$	$R$
电容负载		$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$	$U(s) = I(s) \cdot \frac{1}{Cs}$	$\frac{1}{Cs}$
电感负载		$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}$	$U(s) = I(s) \cdot Ls$	$Ls$

### ➤ 传递函数求解示例

#### □ 质量-弹簧-阻尼系统的传递函数



$$m \frac{d^2}{dt^2} x_o(t) + D \frac{d}{dt} x_o(t) + k x_o(t) = f_i(t)$$

所有初始条件均为零时，其拉氏变换为：

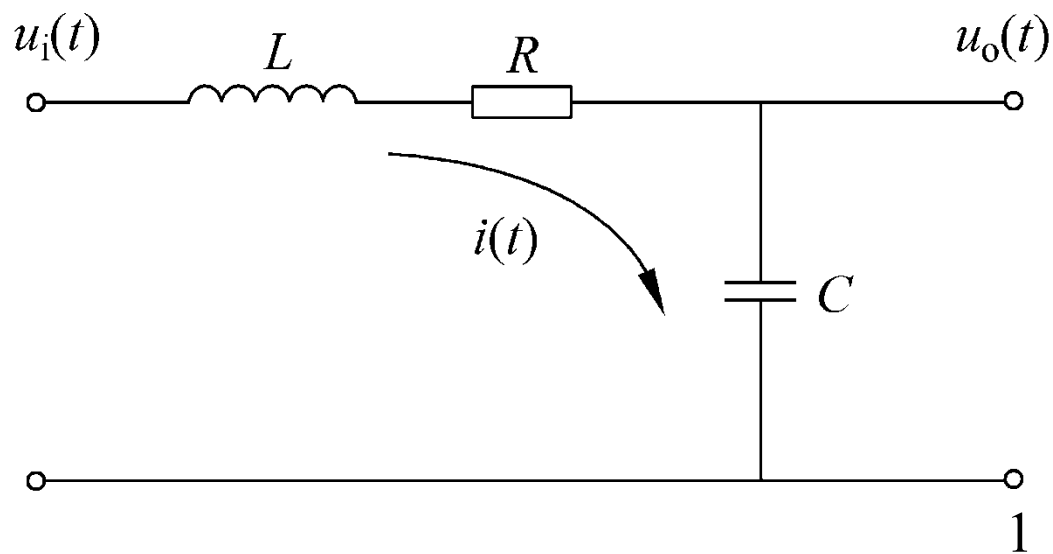
$$ms^2 X_o(s) + DsX_o(s) + kX_o(s) = F_i(s)$$

按照定义，系统的传递函数为：

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{F_i(s)} = \frac{1}{ms^2 + Ds + k}$$



### □ $R$ - $L$ - $C$ 无源电路网络的传递函数



$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = \frac{\frac{1}{Cs}}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$

### □ 几点结论

- ✓ 传递函数是复数 $s$ 域中的系统数学模型，其参数仅取决于系统本身的结构及参数，是系统固有的特性，与系统的输入形式无关。
- ✓ 若输入给定，则系统输出特性完全由传递函数 $G(s)$  决定，即传递函数表征了系统内在的固有动态特性。
- ✓ 传递函数通过系统输入量与输出量之间的关系来描述系统的固有特性。即以系统外部的输入-输出特性来描述系统的内部特性。

### ➤ 传递函数的一般形式

考虑线性定常系统

$$\begin{aligned} & \frac{d^n}{dt^n} x_o(t) + a_1 \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x_o(t) + \cdots + a_{n-1} \frac{d}{dt} x_o(t) + a_n x_o(t) \\ &= b_0 \frac{d^m}{dt^m} x_i(t) + b_1 \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} x_i(t) + \cdots + b_{m-1} \frac{d}{dt} x_i(t) + b_m x_i(t) \quad (n \geq m) \end{aligned}$$

当初始条件全为零时，对上式进行拉氏变换可得系统传递函数的一般形式：

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n} \quad (n \geq m)$$

### ● 特征方程、零点和极点

#### ➤ 特征方程

令： 
$$N(s) = b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m$$

$$D(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n$$

则： 
$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

$D(s)=0$ 称为系统的**特征方程**，其根称为系统的**特征根**。特征方程决定着系统的动态特性。 $D(s)$ 中 $s$ 的最高阶次等于系统的阶次。

当 $s=0$ 时:

$$G(0)=b_m/a_n=K$$

式中,  $K$ 称为系统的放大系数或增益。

从微分方程的角度看, 此时相当于所有的导数项都为零。因此 $K$ 反应了系统处于静态时, 输出与输入的比值。

### ➤ 零点和极点

将 $G(s)$ 写成下面的形式

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{a_0(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)}$$

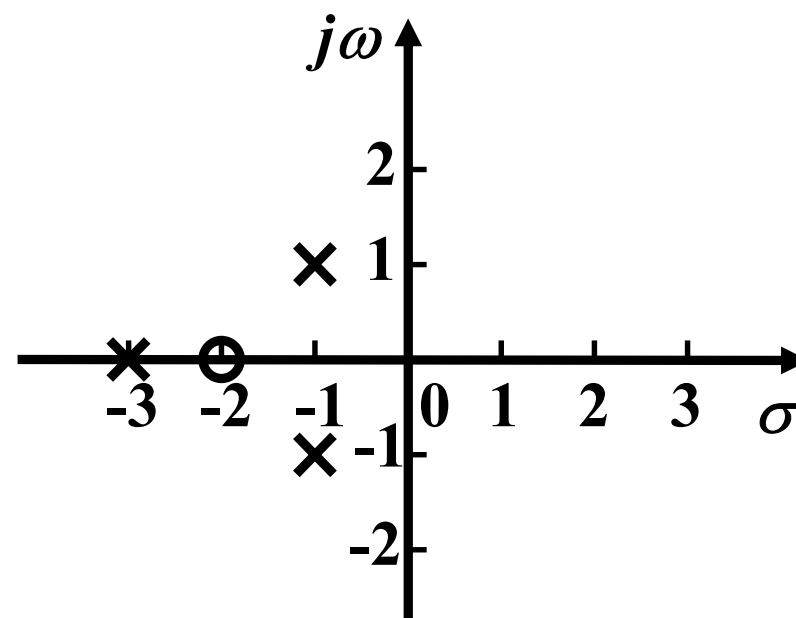
式中,  $N(s)=b_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)=0$ 的根 $s=z_i$   
( $i=1, 2, \dots, m$ ), 称为传递函数的**零点**;

$D(s)=a_0(s-p_1)(s-p_2)\cdots(s-p_n)=0$ 的根 $s=p_j$   
( $j=1, 2, \dots, n$ ), 称为传递函数的**极点**;

系统传递函数的极点就是系统的特征根。零点和极点的数值完全取决于系统的结构参数。

### ➤ 零、极点分布图

将传递函数的零、极点表示在复平面上的图形称为传递函数的零、极点分布图。图中，零点用“O”表示，极点用“×”表示。



$$G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s^2+2s+2)}$$

的零极点分布图

### ● 传递函数的几点说明

- 传递函数是一种以系统参数表示的线性定常系统输入量与输出量之间的关系式；传递函数的概念通常只适用于线性定常系统；
- 传递函数是  $s$  的复变函数。传递函数中的各项系数和相应微分方程中的各项系数对应相等，完全取决于系统结构参数；



- 传递函数是在零初始条件下定义的，即在零时刻之前，系统对所给定的平衡工作点处于相对静止状态。因此，传递函数不反映系统在非零初始条件下的全部运动规律；
- 传递函数只能表示系统输入与输出的关系，无法描述系统内部中间变量的变化情况。
- 一个传递函数只能表示一个输入对一个输出的关系，适合于单输入单输出系统的描述。

- 脉冲响应函数

初始条件为0时，系统在单位脉冲输入作用下的输出响应的拉氏变换为

$$Y(s) = G(s)X(s) = G(s)$$

拉氏反变换  $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}[G(s)] = g(t)$

$g(t)$ 称为系统的脉冲响应函数（权函数）。

系统的脉冲响应函数与传递函数包含关于系统动态特性的相同信息。

注意到复数域相乘等同于时域内卷积，因此，  
由：

$$Y(s) = G(s)X(s)$$

知线性系统在任意输入作用下，其时域输出

$$\begin{aligned} y(t) &= g(t) * x(t) \\ &= \int_0^t g(\tau)x(t-\tau)d\tau \\ &= \int_0^t x(\tau)g(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

式中，当 $t < 0$ 时， $g(t) = x(t) = 0$ 。

### ● 典型环节及其传递函数

#### ➤ 环节

具有某种确定信息传递关系的元件、元件组或元件的一部分称为一个**环节**。经常遇到的环节称为**典型环节**。

任何复杂的系统总可归结为由一些典型环节所组成。

### ➤ 环节的分类

假设系统有 $b$ 个实零点， $c$ 对复零点； $d$ 个实极点， $e$ 对复极点和 $v$ 个零极点，由线性系统传递函数的零、极点表达式

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{b_0(s - z_1)(s - z_2) \cdots (s - z_m)}{a_0(s - p_1)(s - p_2) \cdots (s - p_n)}$$

可见  $b + 2c = m$   
 $v + d + 2e = n$

对于实零点 $z_i = -\alpha_i$ 和实极点 $p_j = -\beta_j$ ，其因式可以变换成如下形式：

$$s - z_i = s + \alpha_i = \frac{1}{\tau_i} (\tau_i s + 1), \quad \tau_i = \frac{1}{\alpha_i}$$

$$s - p_j = s + \beta_j = \frac{1}{T_j} (T_j s + 1), \quad T_j = \frac{1}{\beta_j}$$

对于复零点对 $z_\ell = -\alpha_\ell + j\omega_\ell$ 和 $z_{\ell+1} = -\alpha_\ell - j\omega_\ell$ ，其因式可以变换成如下形式：

$$\begin{aligned}(s - z_\ell)(s - z_{\ell+1}) &= (s + \alpha_\ell - j\omega_\ell)(s + \alpha_\ell + j\omega_\ell) \\ &= s^2 + 2\alpha_\ell s + \alpha_\ell^2 + \omega_\ell^2 \\ &= \frac{1}{\tau_\ell^2} (\tau_\ell^2 s^2 + 2\zeta_\ell \tau_\ell s + 1)\end{aligned}$$

式中，
$$\tau_\ell = \frac{1}{\sqrt{\alpha_\ell^2 + \omega_\ell^2}}, \quad \zeta_\ell = \frac{\alpha_\ell}{\sqrt{\alpha_\ell^2 + \omega_\ell^2}}$$

对于复极点对 $p_k = -\beta_k + j\omega_k$ 和 $p_{k+1} = -\beta_k - j\omega_k$ ，其因式可以变换成如下形式：

$$\begin{aligned}(s - p_k)(s - p_{k+1}) &= (s + \beta_k - j\omega_k)(s + \beta_k + j\omega_k) \\ &= s^2 + 2\beta_k s + \beta_k^2 + \omega_k^2 \\ &= \frac{1}{T_k^2} (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)\end{aligned}$$

式中，
$$T_k = \frac{1}{\sqrt{\beta_k^2 + \omega_k^2}}, \quad \zeta_k = \frac{\beta_k}{\sqrt{\beta_k^2 + \omega_k^2}}$$



于是，系统的传递函数可以写成：

$$G(s) = \frac{K \prod_{i=1}^b (\tau_i s + 1) \prod_{\ell=1}^c (\tau_{\ell}^2 s^2 + 2\zeta_{\ell} \tau_{\ell} s + 1)}{s^{\nu} \prod_{j=1}^d (T_j s + 1) \prod_{k=1}^e (T_k^2 s^2 + 2\zeta_k T_k s + 1)}$$

式中，
$$K = \frac{b_0}{a_0} \cdot \prod_{i=1}^b \frac{1}{\tau_i} \cdot \prod_{\ell=1}^c \frac{1}{\tau_{\ell}^2} \cdot \prod_{j=1}^d T_j \cdot \prod_{k=1}^e T_k^2$$

为系统静态放大倍数。

由上式可见，传递函数表达式包含六种不同的因子，即：

$$K, \tau s + 1, \tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1, \frac{1}{s}, \frac{1}{Ts + 1}, \frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

一般，任何线性系统都可以看作是由上述六种因子表示的典型环节的串联组合。上述六种典型环节分别称为：

## 2.5 传递函数及典型环节的传递函数

比例环节:  $K$

一阶微分环节:  $\tau s + 1$

二阶微分环节:  $\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1$

积分环节:  $\frac{1}{s}$

惯性环节:  $\frac{1}{Ts + 1}$

振荡环节:  $\frac{1}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$

实际系统中还存在纯时间延迟现象，输出完全复现输入，但延迟了时间  $\tau$ ，即  $x_o(t)=x_i(t-\tau)$ ，此时：

$$X_o(s) = e^{-\tau s} X_i(s)$$

$$\text{或： } G(s) = e^{-\tau s}$$

因此，除了上述六种典型环节外，还有一类典型环节——延迟环节  $e^{-\tau s}$ 。

### ➤ 典型环节示例

#### □ 比例环节

输出量不失真、无惯性地跟随输入量，两者成比例关系。

其运动方程为： $x_o(t)=Kx_i(t)$

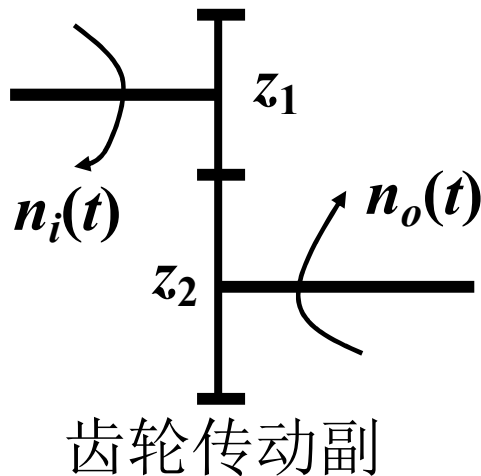
$x_o(t)$ 、 $x_i(t)$ —分别为环节的输出和输入量；

$K$ —比例系数，等于输出量与输入量之比。

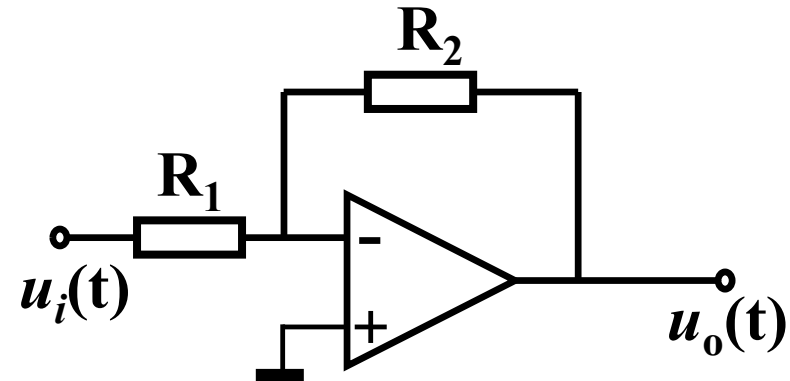
## 2.5 传递函数及典型环节的传递函数

比例环节的传递函数为：

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = K$$



$$G(s) = \frac{N_o(s)}{N_i(s)} = \frac{z_1}{z_2} = K$$



$$G(s) = \frac{U_o(s)}{U_i(s)} = -\frac{R_2}{R_1} = K$$

### □ 一阶惯性环节

凡运动方程为下面一阶微分方程

$$T \frac{d}{dt} x_o(t) + x_o(t) = K x_i(t)$$

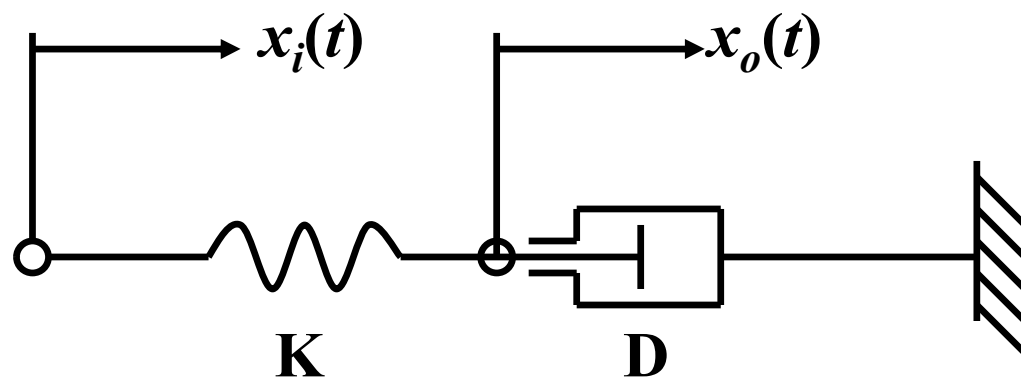
形式的环节称为一阶惯性环节。其传递函数为：

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{K}{Ts + 1}$$

式中， $K$ —环节增益（放大系数）；

$T$ —时间常数，表征环节的惯性，和  
环节结构参数有关

如：弹簧-阻尼器环节



弹簧-阻尼器组成的环节

$$D \frac{dx_o(t)}{dt} + Kx_o(t) = Kx_i(t)$$

$$G(s) = \frac{K}{Ds + k} = \frac{1}{Ts + 1}, \quad T = \frac{D}{K}$$



### □ 微分环节

输出量正比于输入量的微分。

运动方程为： 
$$x_o(t) = \tau \frac{dx_i(t)}{dt}$$

传递函数为： 
$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \tau s$$

式中， $\tau$ —微分环节的时间常数

## 2.5 传递函数及典型环节的传递函数

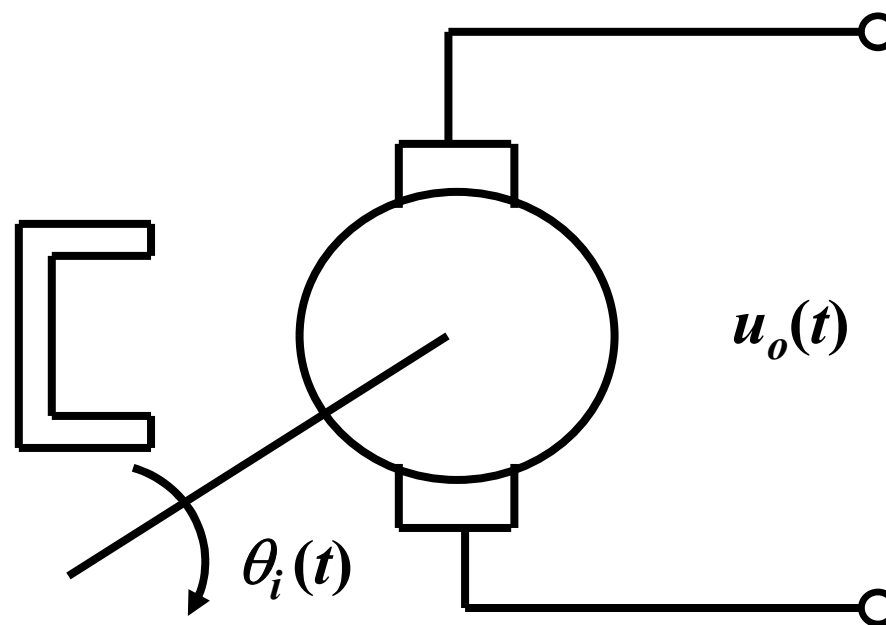
如：测速发电机

无负载时

$$u_o(t) = K_t \frac{d\theta_i(t)}{dt}$$

式中， $K_t$ 为电机常数。

$$G(s) = \frac{U_o(s)}{\Theta_i(s)} = K_t s$$



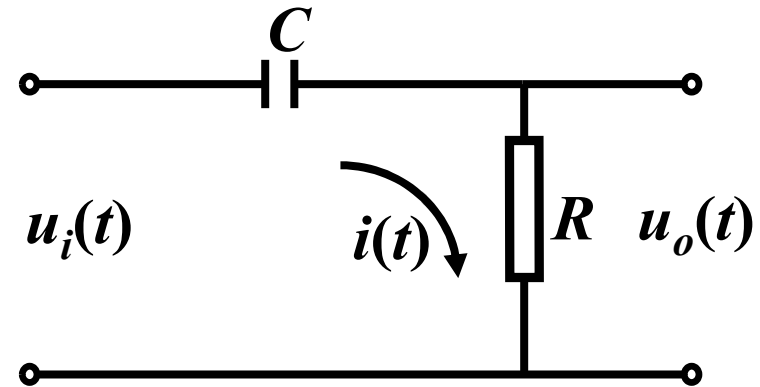
测速发电机

## 无源微分网络

$$u_i(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt + i(t)R$$

$$u_o(t) = i(t)R$$

$$G(s) = \frac{RCs}{RCs + 1} = \frac{Ts}{Ts + 1}, \quad T = RC$$



无源微分网络

显然，无源微分网络包括有惯性环节和微分环节，称之为**惯性微分环节**，只有当 $|Ts| \ll 1$ 时，才近似为微分环节。

在物理系统中输入输出同量纲的微分环节很难独立存在，经常和其它环节一起出现。

除了上述微分环节外，还有一类一阶微分环节，其传递函数为：

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = K(\tau s + 1)$$

微分环节的输出是输入的导数，即输出反映了输入信号的变化趋势，从而给系统以有关输入变化趋势的预告。因此，微分环节常用来改善控制系统的动态性能。

### □ 积分环节

输出量正比于输入量对时间的积分。

运动方程为： 
$$x_o(t) = \frac{1}{T} \int_0^t x_i(t) dt$$

传递函数为： 
$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{Ts}$$

积分环节特点：

- ✓ 输出量取决于输入量对时间的积累过程。
- ✓ 具有明显的滞后作用。

如当输入量为常值  $A$  时，由于

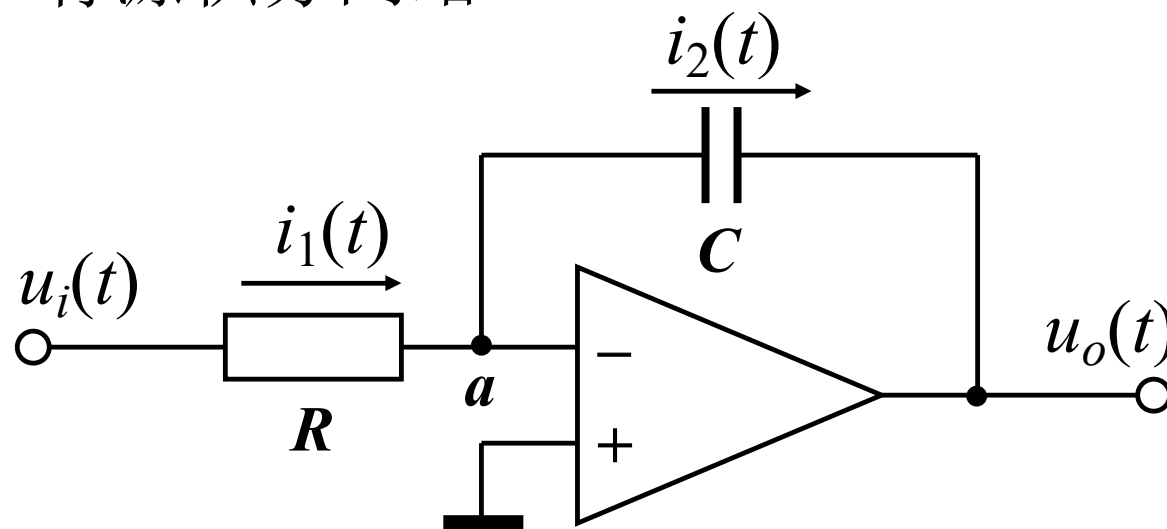
$$x_o(t) = \frac{1}{T} \int_0^t A dt = \frac{1}{T} At$$

输出量须经过时间  $T$  才能达到输入量在  $t = 0$  时的值  $A$ 。

积分环节常用来改善系统的稳态精度。

## 2.5 传递函数及典型环节的传递函数

如：有源积分网络



$$RC \frac{du_o(t)}{dt} = -u_i(t)$$

$$G(s) = -\frac{1}{RCs} = -\frac{1}{Ts}, \quad T = RC$$

### □ 二阶振荡环节

含有两个独立的储能元件，且所存储的能量能够相互转换，从而导致输出带有振荡的性质，运动方程为：

$$T^2 \frac{d^2}{dt^2} x_o(t) + 2\zeta T \frac{d}{dt} x_o(t) + x_o(t) = Kx_i(t), \quad 0 < \zeta < 1$$

传递函数：

$$G(s) = \frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

式中， $T$ —振荡环节的时间常数

$\zeta$ —阻尼比，对于振荡环节， $0 < \zeta < 1$

$K$ —比例系数



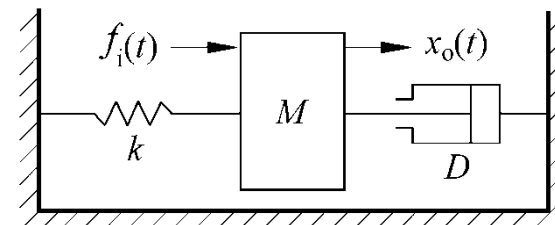
振荡环节传递函数的另一常用标准形式为（ $K=1$ ）：

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}, \quad \omega_n = \frac{1}{T}$$

$\omega_n$ 称为无阻尼固有角频率。

## 2.5 传递函数及典型环节的传递函数

如：质量-弹簧-阻尼系统



$$m \frac{d^2}{dt^2} x_o(t) + D \frac{d}{dt} x_o(t) + K x_o(t) = f_i(t)$$

传递函数：

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + Ds + K} = \frac{1/K}{T^2 s^2 + 2\zeta Ts + 1}$$

式中，  $T = \sqrt{\frac{m}{K}}, \zeta = \frac{D}{2\sqrt{mK}}$

当  $D < 2\sqrt{mk}$  时，为振荡环节。

### □ 延迟环节

运动方程:  $x_o(t) = x_i(t - \tau)$

传递函数:  $G(s) = e^{-\tau s}$

式中,  $\tau$ 为纯延迟时间。

### 延迟环节与惯性环节的区别:

- ✓ 惯性环节从输入开始时刻起就已有输出, 仅由于惯性, 输出要滞后一段时间才接近所要求的输出值;
- ✓ 延迟环节从输入开始之初, 在  $0 \sim \tau$  时间内, 没有输出, 但  $t = \tau$  之后, 输出等于  $\tau$  之前时刻的输入。

### ➤ 小结

- ❑ 构造数学模型时，环节是根据微分方程划分的，往往不是具体的物理装置或元件；
- ❑ 一个环节往往由几个元件之间的运动特性共同组成；
- ❑ 同一元件在不同系统中作用不同，输入输出的物理量不同，可起到不同环节的作用。

### 2.6 方块图和信号流图

#### ● 方块图

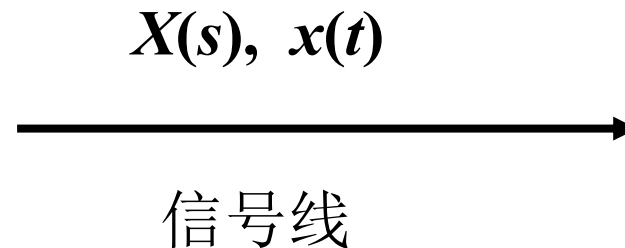
系统方框图是控制系统的动态数学模型的图解形式。可以形象直观地描述系统中各环节功能及其相互关系，以及信号在系统中的传递、变换过程。

注意：即使描述系统的数学关系式相同，其方框图也不一定相同。

### ➤ 方框图的结构要素

#### □ 信号线

带有箭头的直线，箭头表示信号的传递方向，直线旁标记变量，即信号的时间函数或象函数。

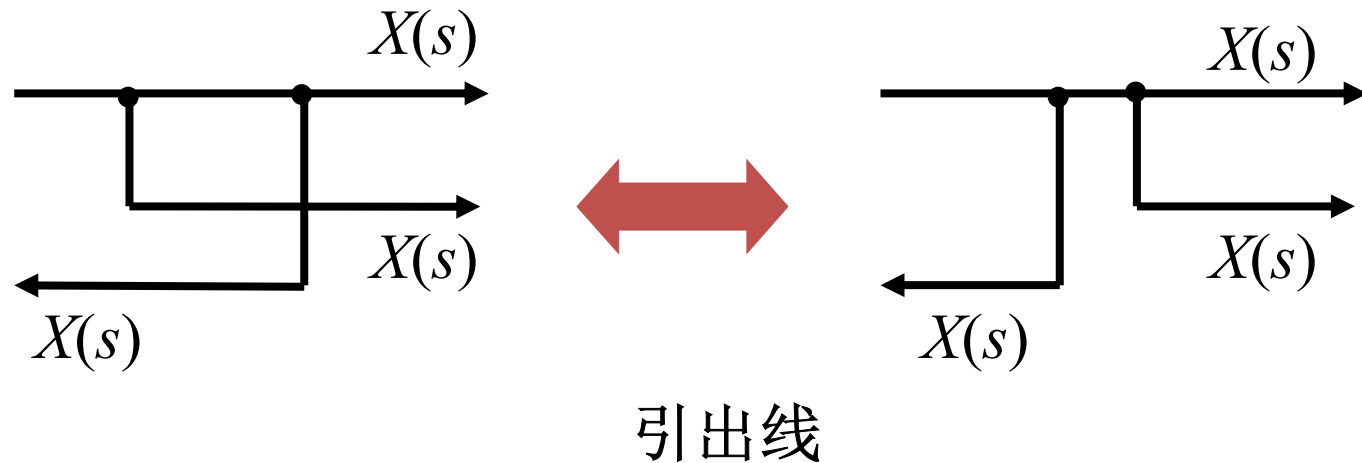


## 2.6 方块图和信号流图

### □ 信号引出点（线）

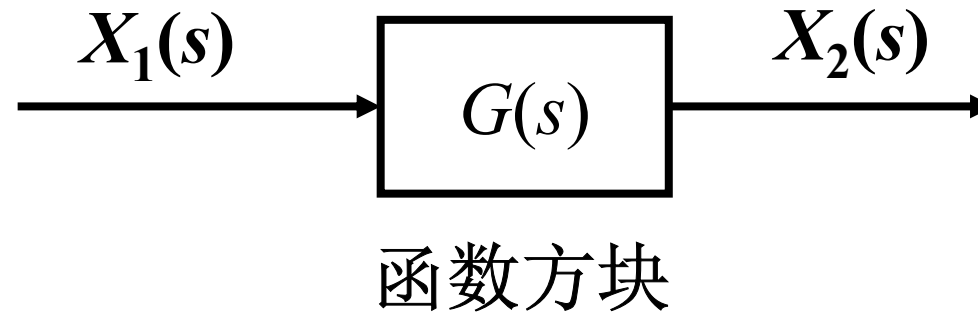
表示信号引出或测量的位置和传递方向。

同一信号线上引出的信号，其性质、大小完全一样。



### □ 函数方块(环节)

传递函数的图解表示。



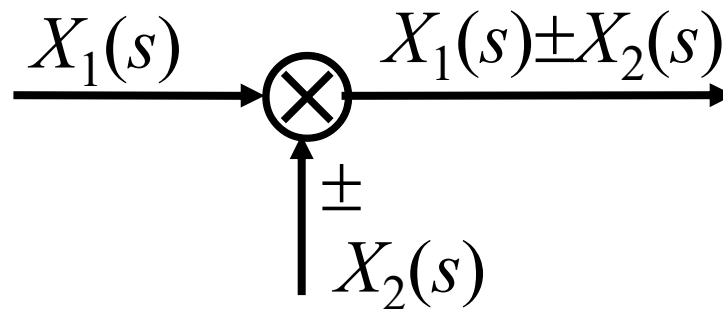
函数方块具有运算功能，即

$$X_2(s) = G(s)X_1(s)$$



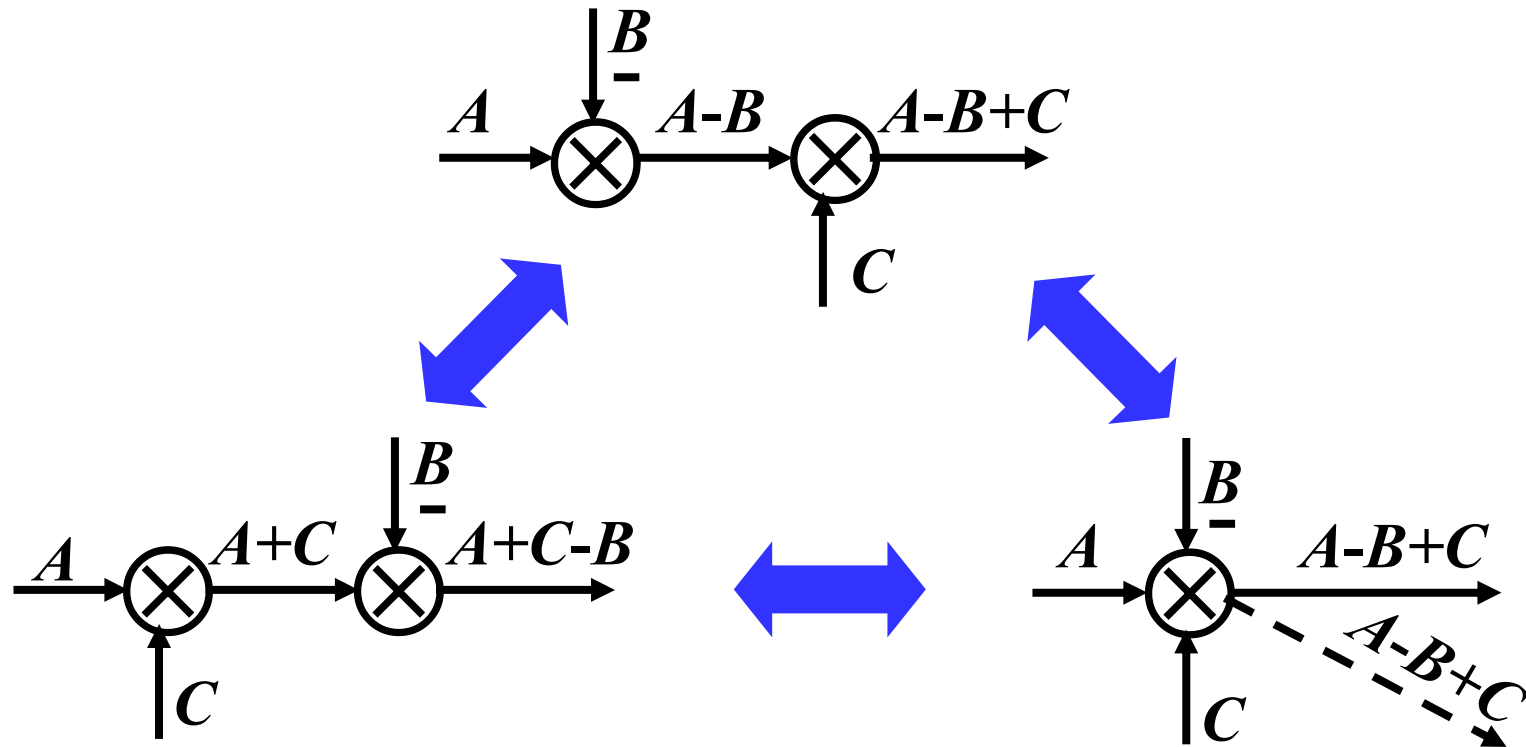
### □ 求和点（比较点、综合点）

信号之间代数加减运算的图解。用符号“ $\otimes$ ”及相应的信号箭头表示，每个箭头前方的“+”或“-”表示加上此信号或减去此信号。



相邻求和点可以互换、合并、分解，即满足代数运算的交换律、结合律和分配律。

## 2.6 方块图和信号流图

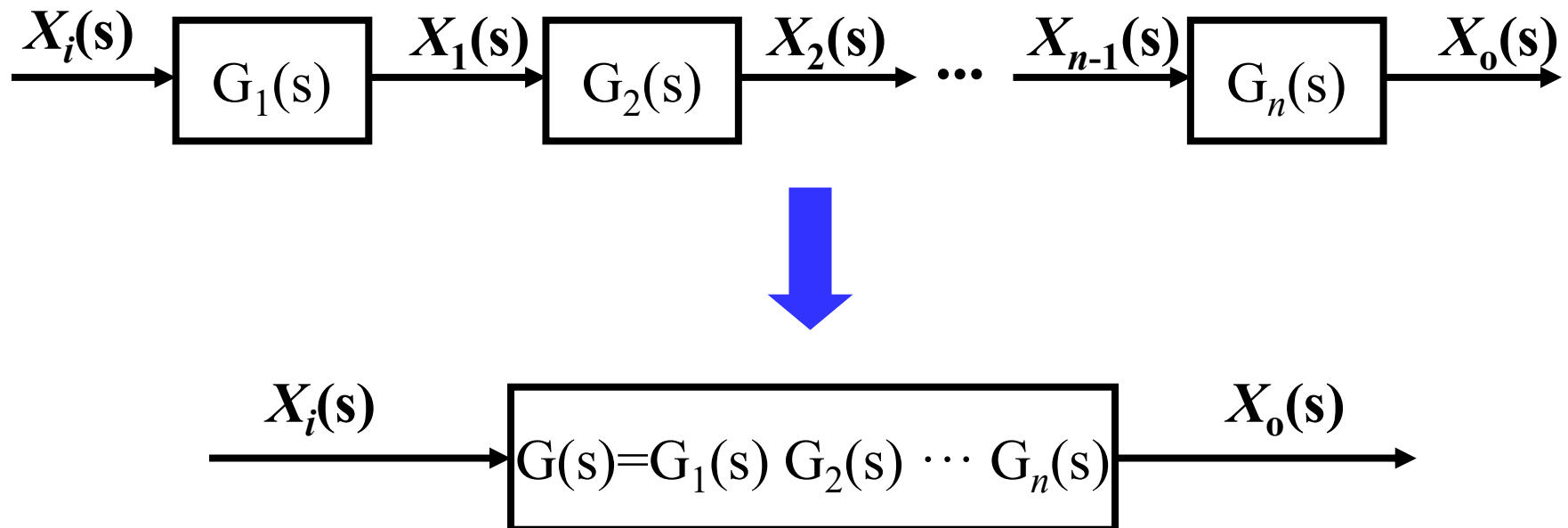


求和点可以有多个输入，但输出是唯一的。

## 2.6 方块图和信号流图

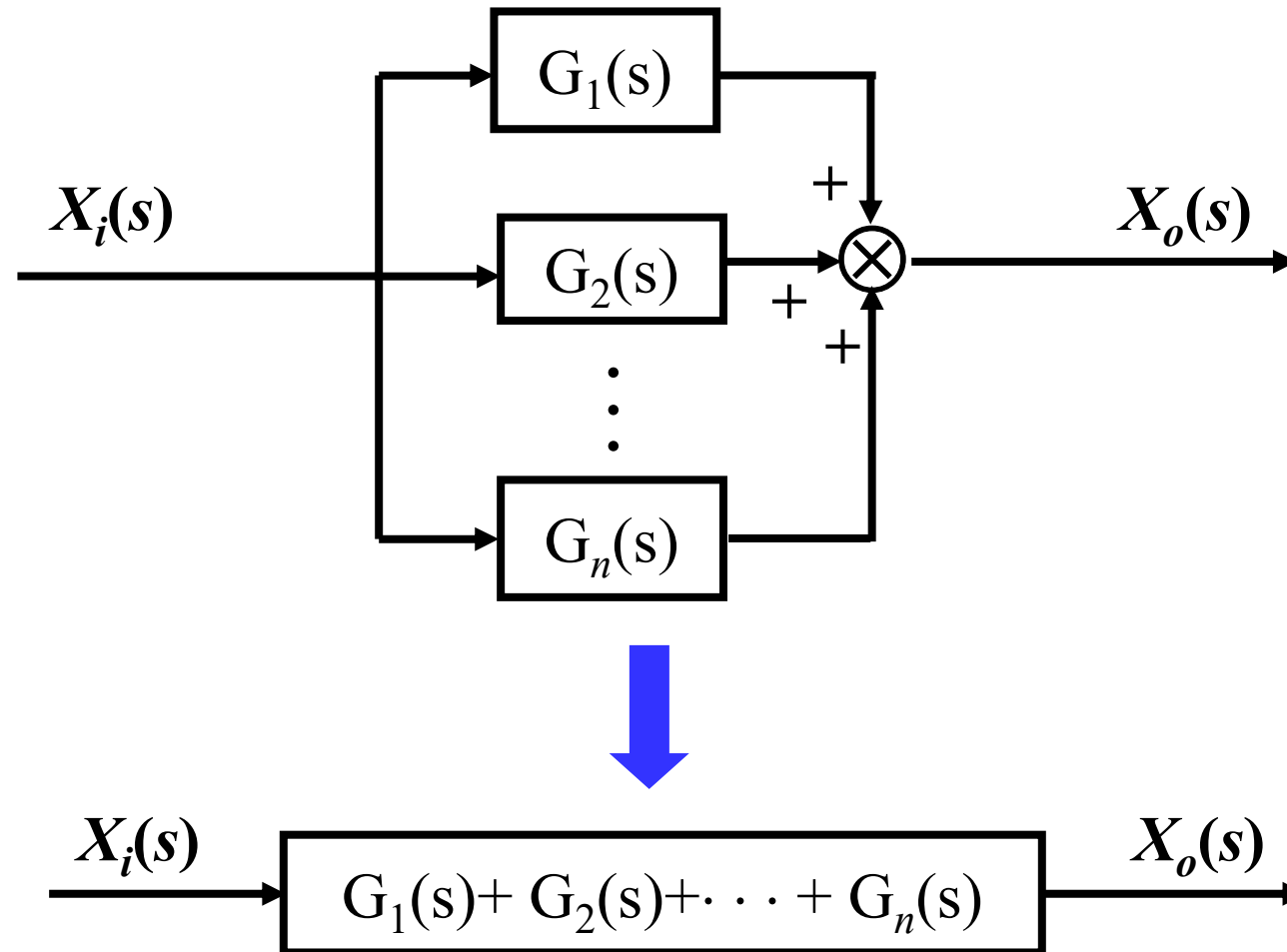
### ➤ 方块图基本结构

#### ✓ 串联



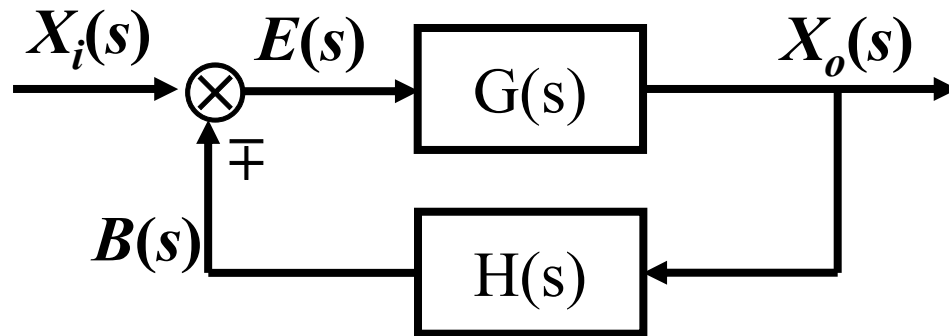
## 2.6 方块图和信号流图

✓ 并联



## 2.6 方块图和信号流图

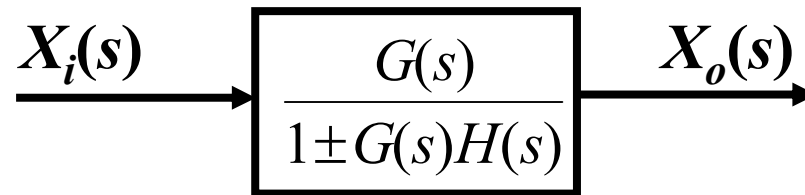
✓ 反馈



$$X_o(s) = G(s)E(s)$$

$$E(s) = X_i(s) \mp B(s)$$

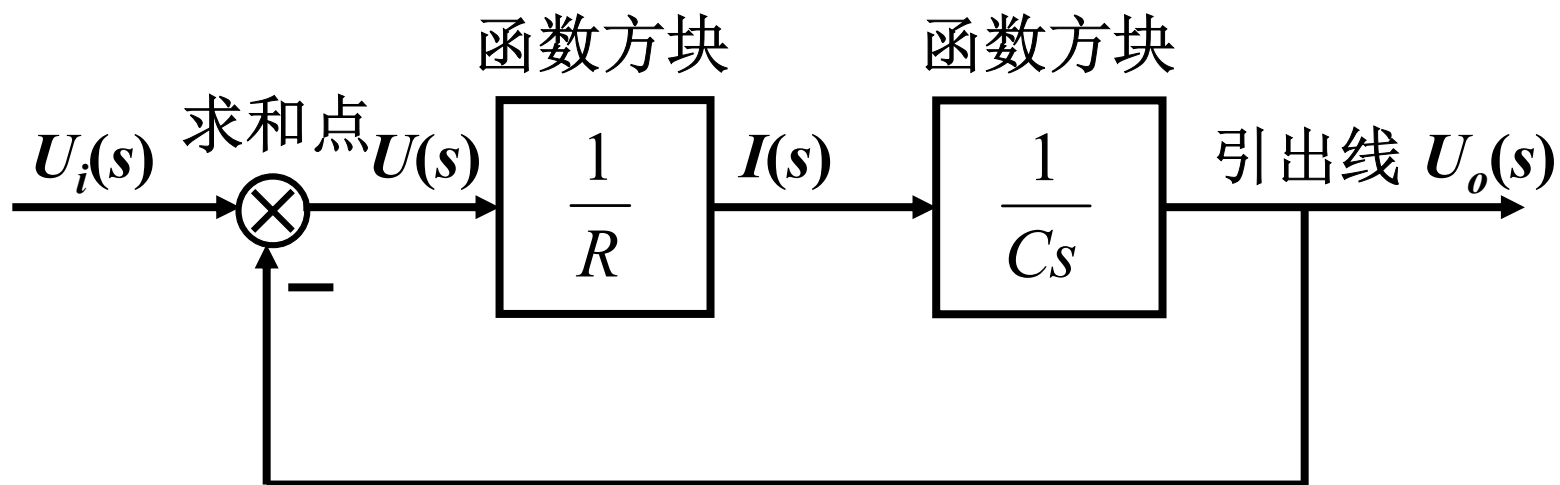
$$B(s) = H(s)X_o(s)$$



$$\begin{aligned}\Phi(s) &= \frac{X_o(s)}{X_i(s)} \\ &= \frac{G(s)}{1 \pm G(s)H(s)}\end{aligned}$$

## 2.6 方块图和信号流图

任何系统都可以由信号线、函数方块、信号引出点及求和点组成的方框图来表示。



方框图示例

### ➤ 系统方框图的建立

#### □ 步骤

- ✓ 建立系统各环节的微分方程, 明确信号的因果关系（输入/输出）。
- ✓ 对上述微分方程进行拉氏变换, 绘制各部件(对应部件传递函数)的方框图。
- ✓ 按照信号在系统中的传递、变换过程, 依次将各部件的方框图连接起来, 得到系统的方框图。

## 2.6 方块图和信号流图

### □ 示例

✓ 无源RC网络

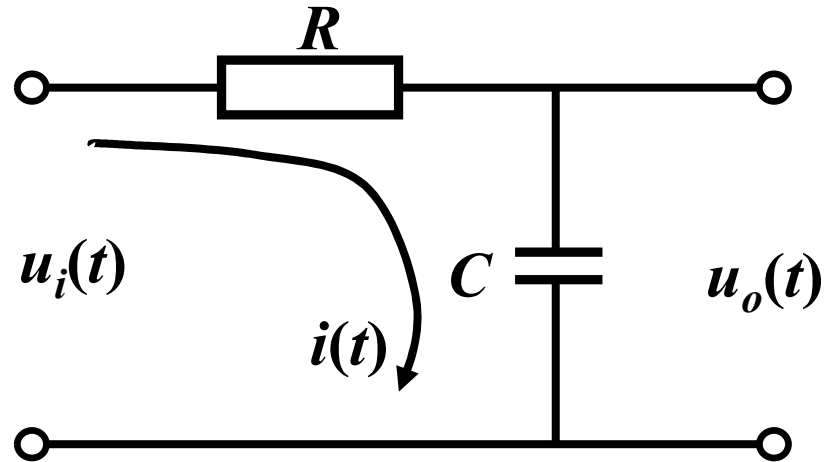
$$Ri(t) = u_i(t) - u_o(t)$$

$$u_o(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

拉氏变换得：

$$RI(s) = U_i(s) - U_o(s)$$

$$U_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$



无源RC电路网络



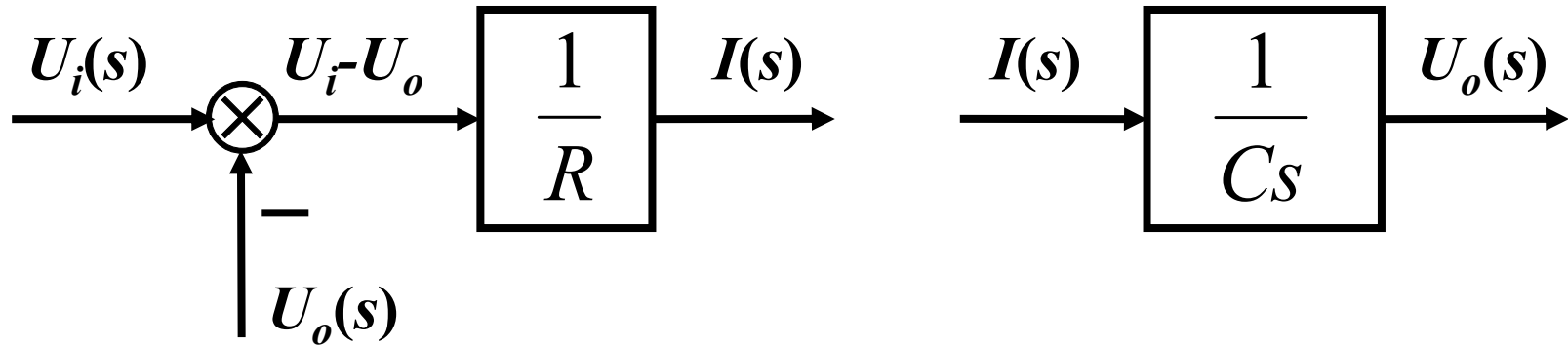
$$I(s) = \frac{1}{R} [U_i(s) - U_o(s)]$$

$$U_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$



## 2.6 方块图和信号流图

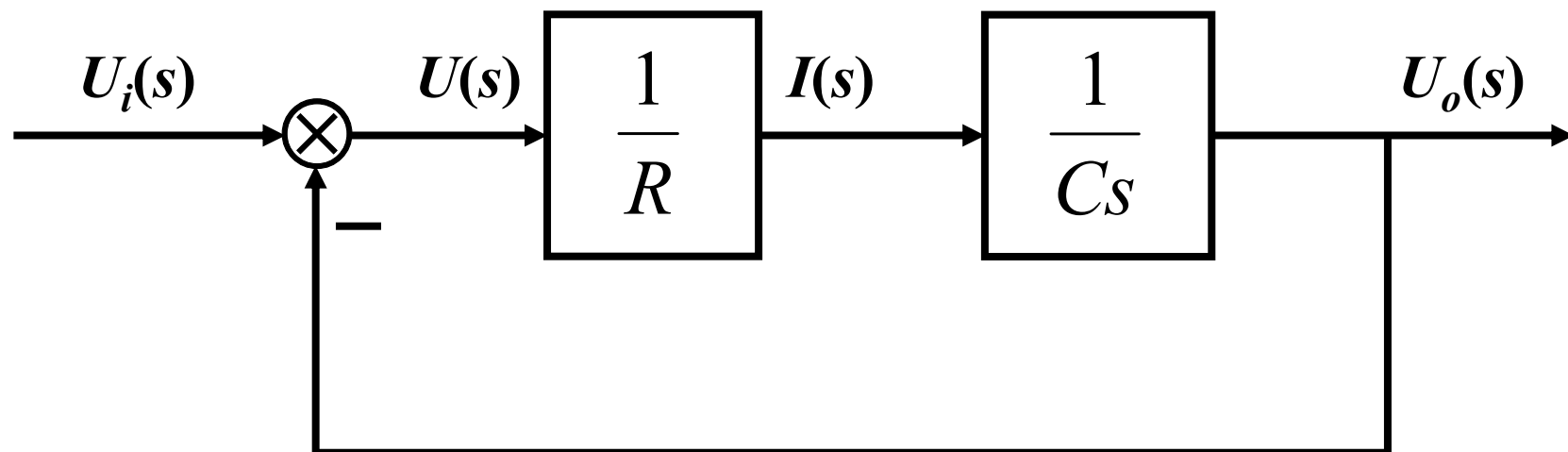
从而可得系统各方框单元及其方框图。



$$(a) \quad I(s) = \frac{1}{R} [U_i(s) - U_o(s)]$$

$$(b) \quad U_o(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

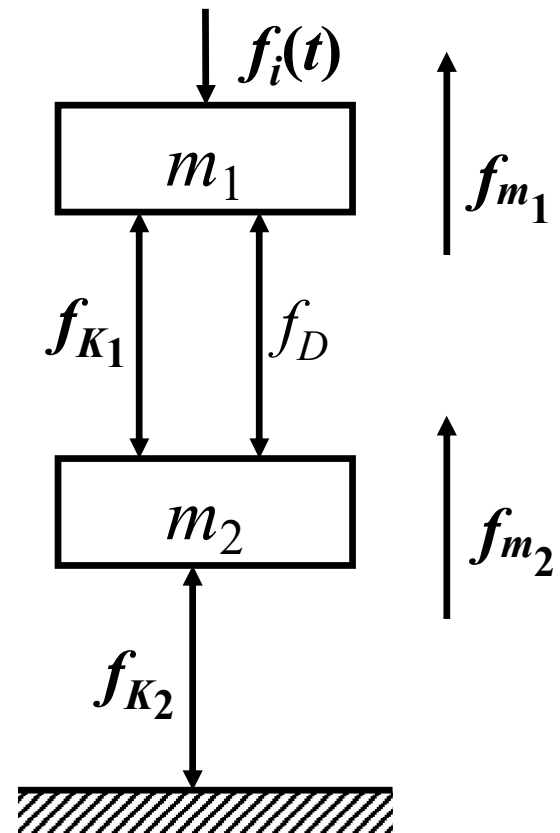
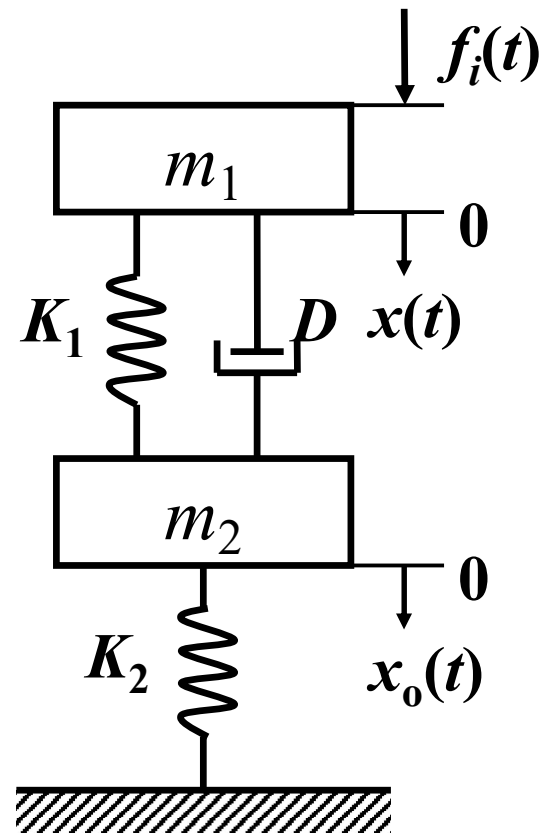
## 2.6 方块图和信号流图



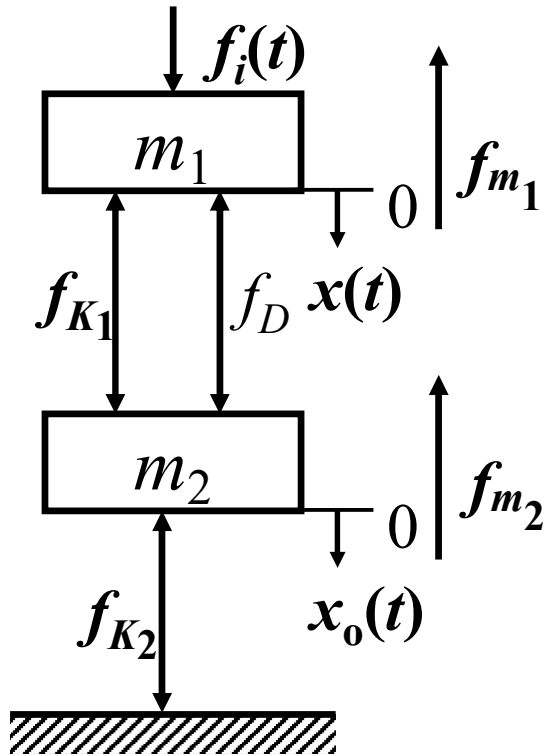
无源RC电路网络系统方框图

## 2.6 方块图和信号流图

### ✓ 机械系统



## 2.6 方块图和信号流图



$$m_1 \ddot{x}(t) = f_i(t) - f_D(t) - f_{K_1}(t)$$

$$f_{K_1}(t) = K_1 [x(t) - x_o(t)]$$

$$f_D(t) = D \left( \frac{dx(t)}{dt} - \frac{dx_o(t)}{dt} \right)$$

$$m_2 \ddot{x}_o(t) = f_{K_1}(t) + f_D(t) - f_{K_2}(t)$$

$$f_{K_2}(t) = K_2 x_o(t)$$

## 2.6 方块图和信号流图

$$X(s) = \frac{1}{m_1 s^2} [F_i(s) - F_D(s) - F_{K_1}(s)]$$

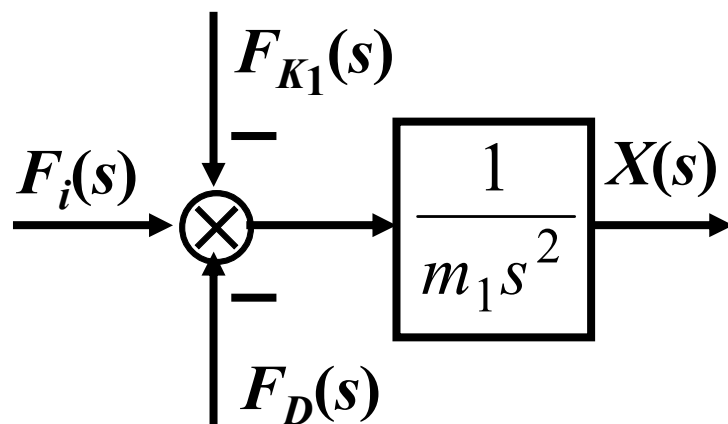
$$F_{K_1}(s) = K_1 [X(s) - X_o(s)]$$

$$F_D(s) = Ds [X(s) - X_o(s)]$$

$$X_o(s) = \frac{1}{m_2 s^2} [F_{K_1}(s) + F_D(s) - F_{K_2}(s)]$$

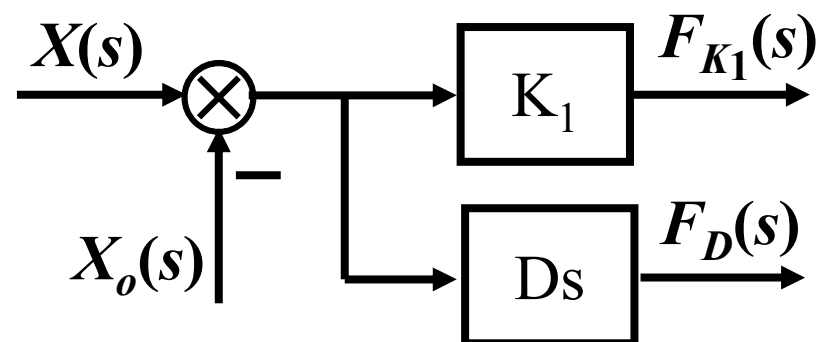
$$F_{K_2}(s) = K_2 X_o(s)$$

## 2.6 方块图和信号流图



$$X(s) = \frac{1}{m_1 s^2} [F_i(s) - F_D(s) - F_{K_1}(s)]$$

(a)

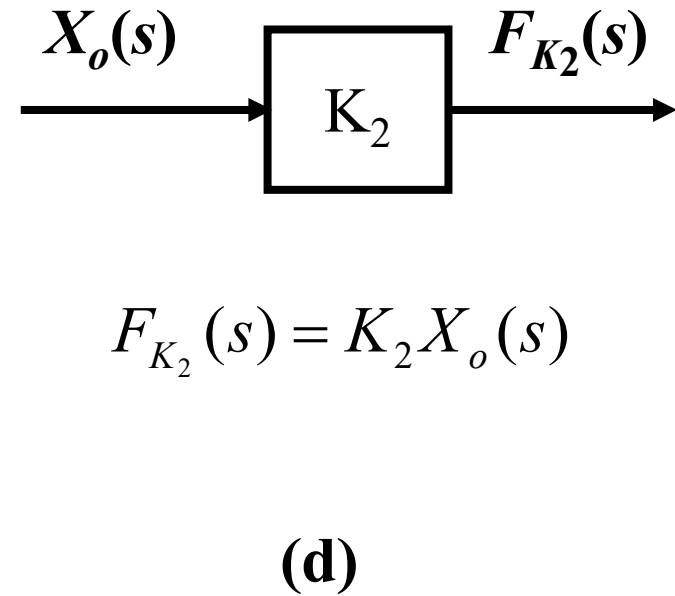
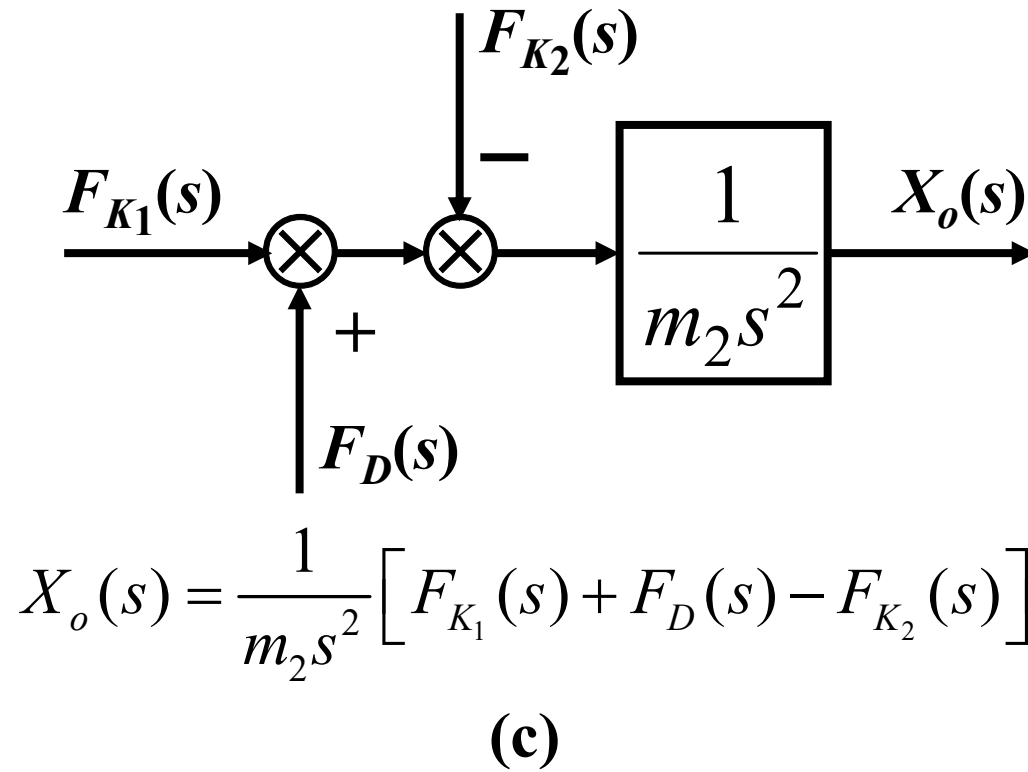


$$F_{K_1}(s) = K_1 [X(s) - X_o(s)]$$

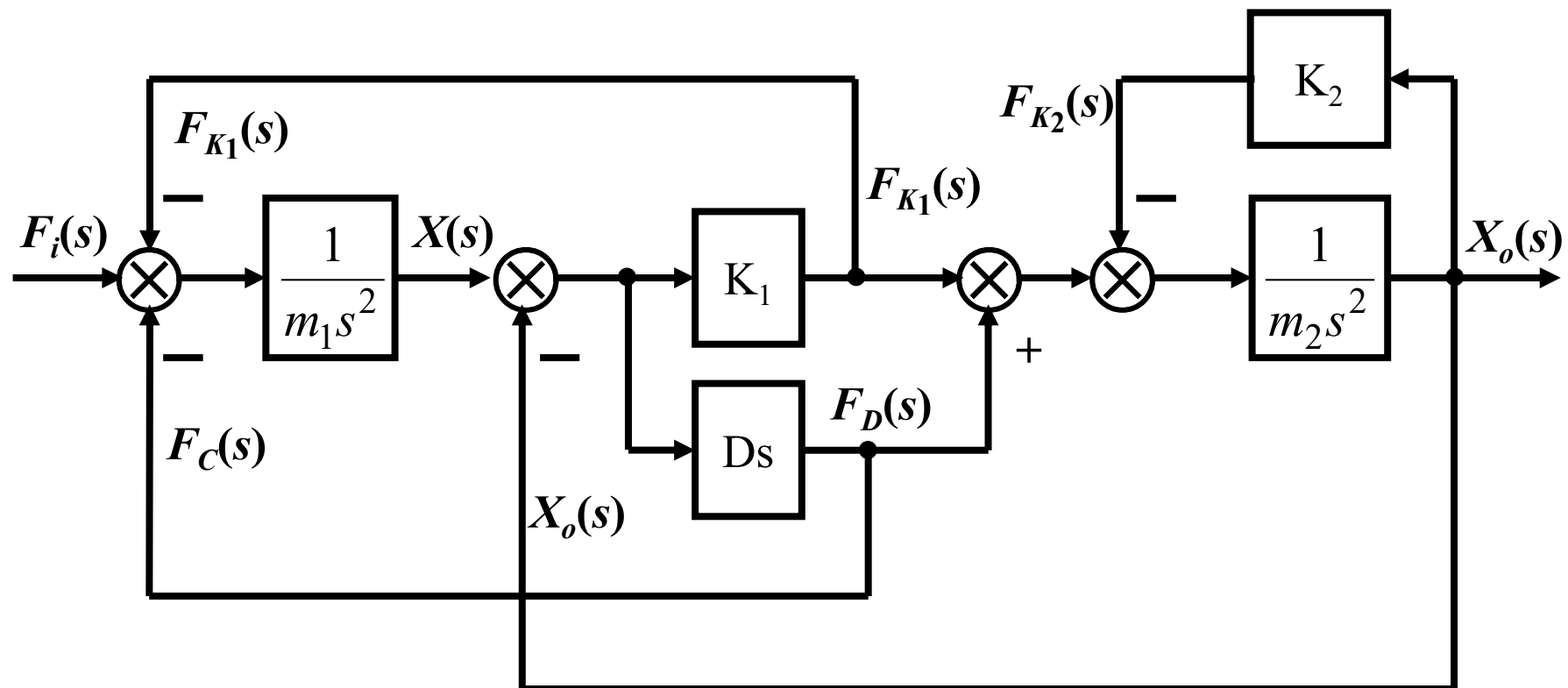
$$F_D(s) = Ds [X(s) - X_o(s)]$$

(b)

## 2.6 方块图和信号流图



## 2.6 方块图和信号流图



机械系统方框图

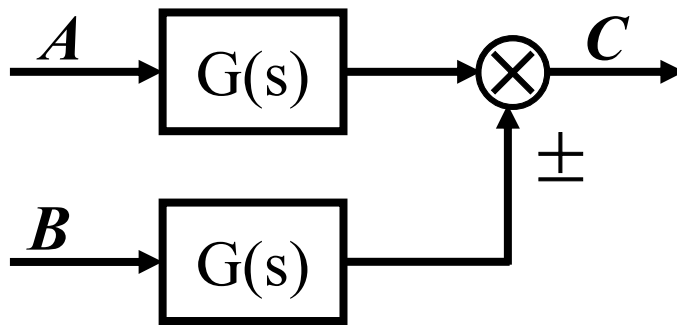
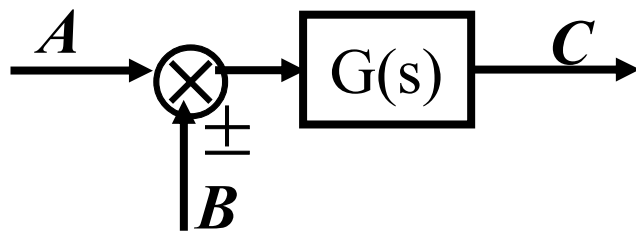


## 2.6 方块图和信号流图

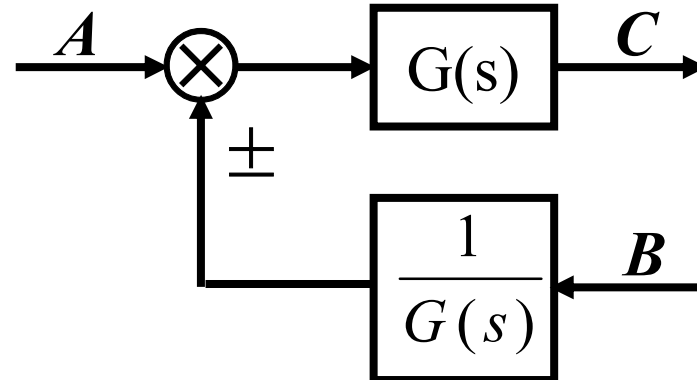
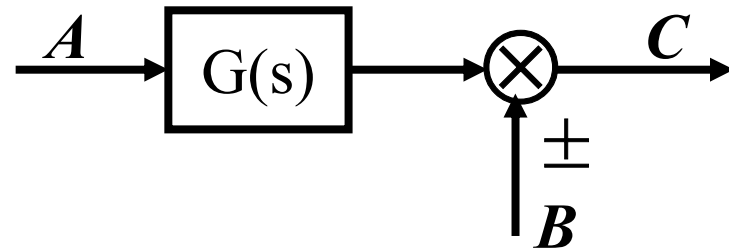
### ➤ 方框图的化简

#### □ 方块图变换法则

#### ✓ 求和点的移动



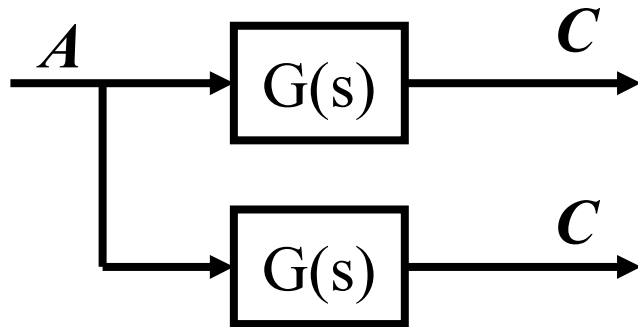
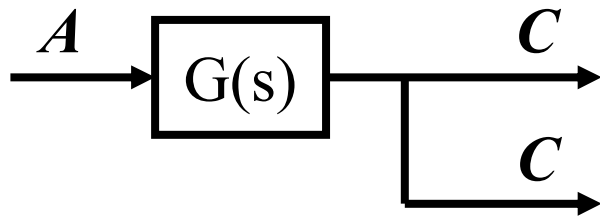
求和点后移



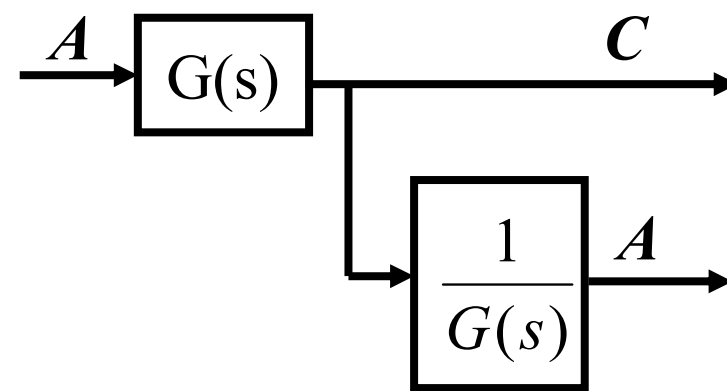
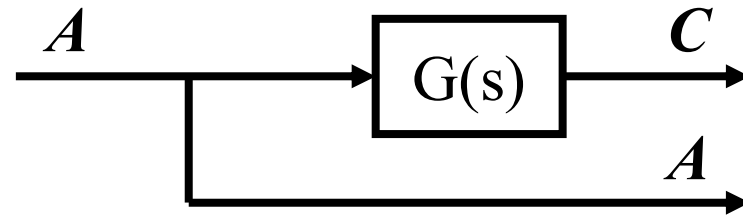
求和点前移

## 2.6 方块图和信号流图

### ✓ 引出点的移动



引出点前移



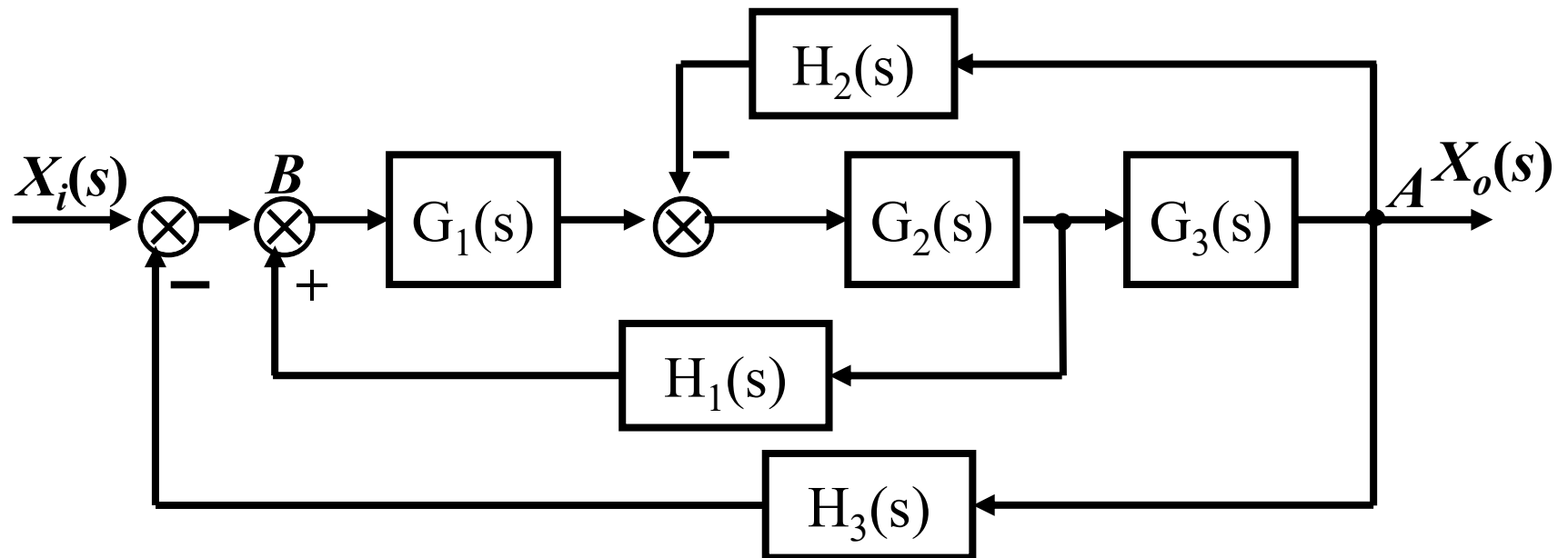
引出点后移

### □ 由方框图求系统传递函数

基本思路：利用等效变换法则，移动求和点和引出点，消去交叉回路，使方框图变换成由基本结构框图构成的框图。

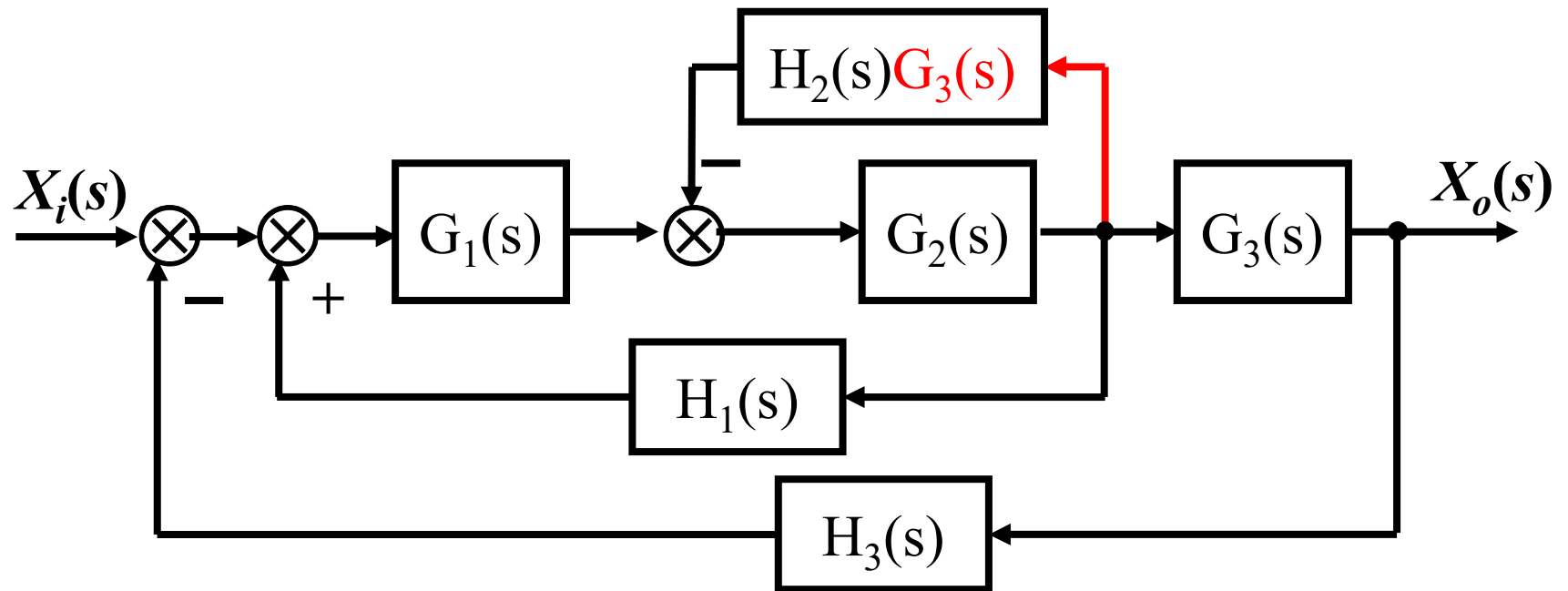
## 2.6 方块图和信号流图

例：求下图所示系统的传递函数。

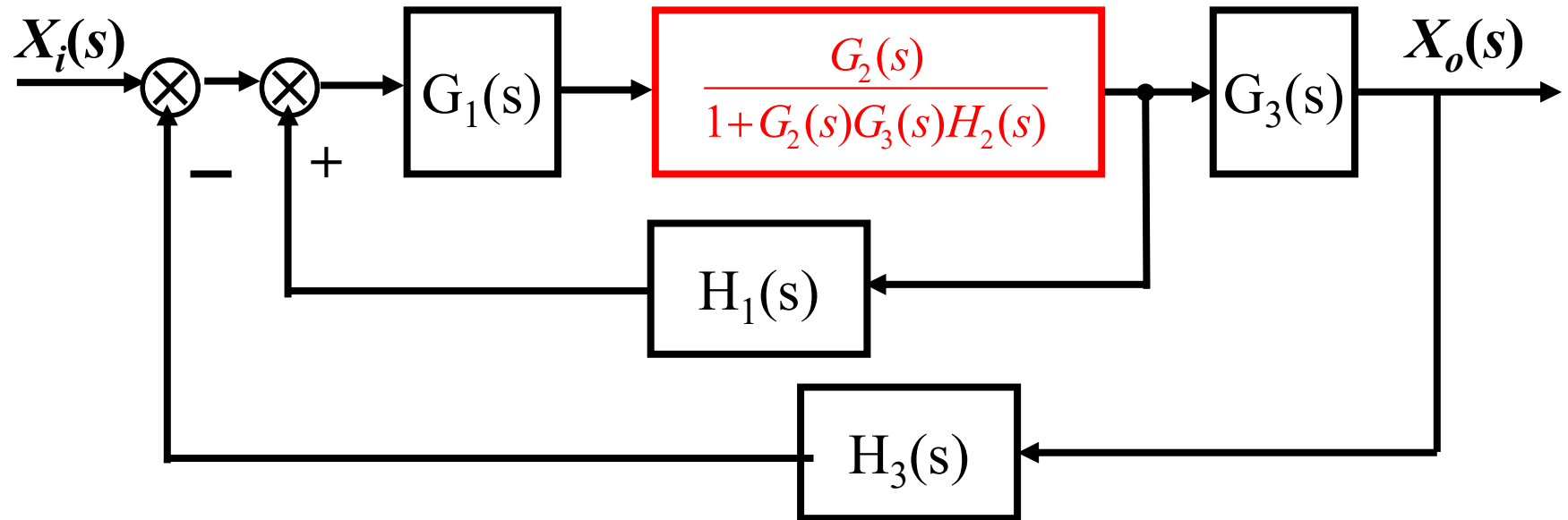


## 2.6 方块图和信号流图

解： 1、A点前移；

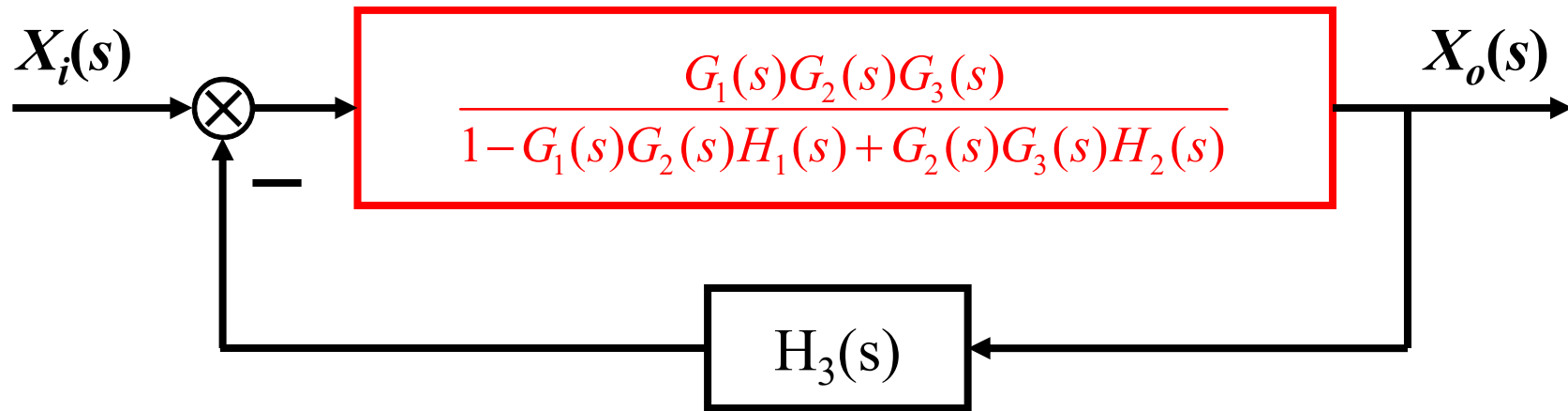


## 2、消去 $H_2(s)G_3(s)$ 反馈回路

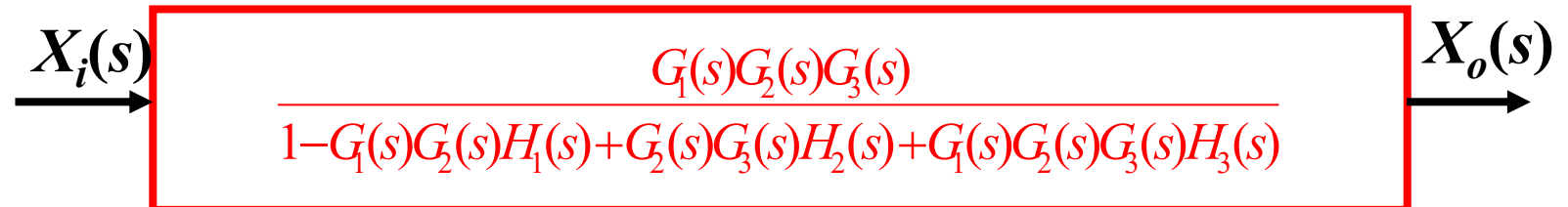


## 2.6 方块图和信号流图

### 3、消去 $H_1(s)$ 反馈回路



### 4、消去 $H_3(s)$ 反馈回路



- 信号流图及梅逊公式

- 信号流图及其术语

信号流图起源于梅逊（S. J. MASON）利用图示法来描述一个和一组线性代数方程，是由节点和支路组成的一种信号传递网络。



### □ 节点

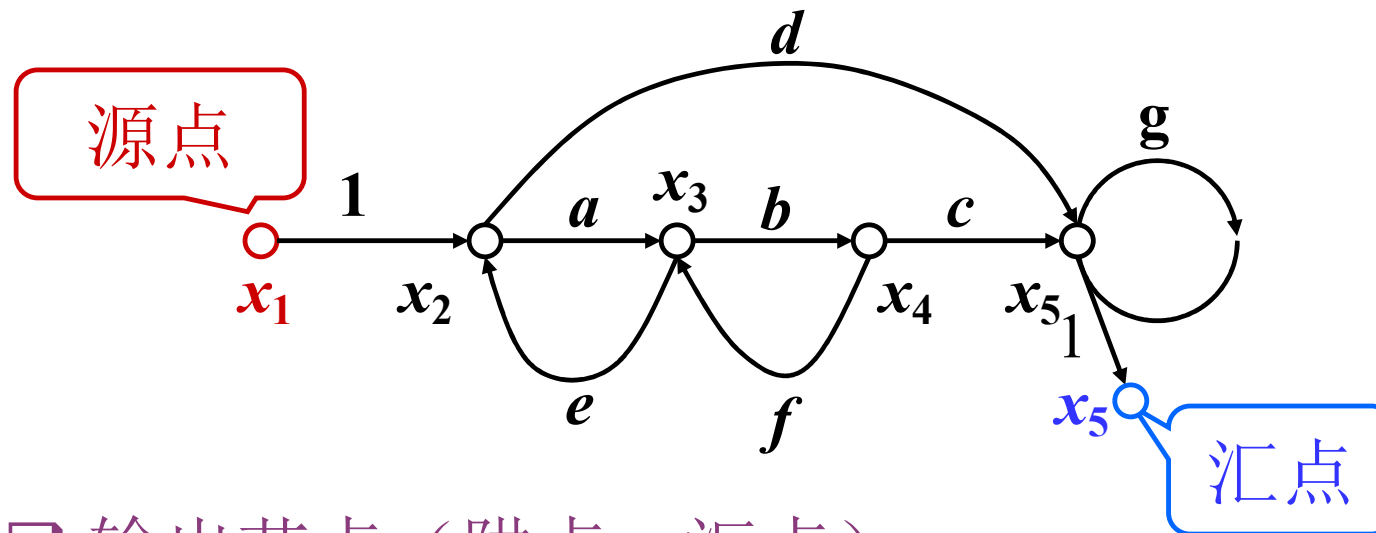
表示变量或信号，其值等于所有进入该节点的信号之和。节点用“**o**”表示。

### □ 支路

连接两个节点的定向线段，用**支路增益**（传递函数）表示方程式中两个变量的因果关系。支路相当于乘法器。信号在支路上沿箭头单向传递。

### □ 输入节点（源点）

只有输出的节点，代表系统的输入变量。



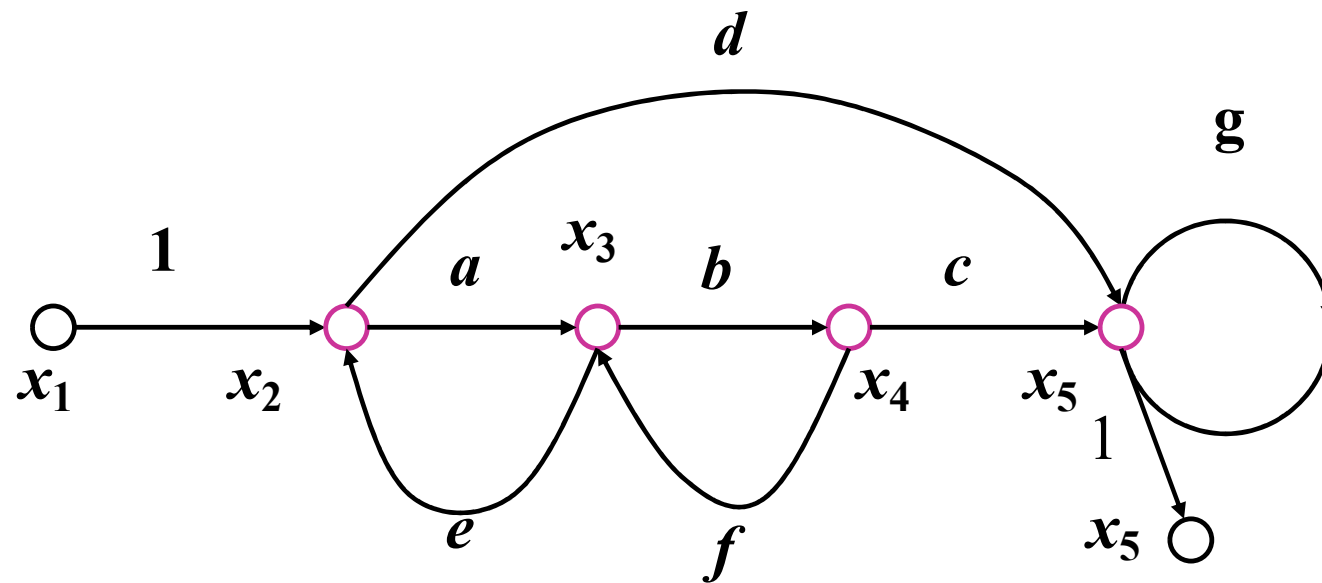
### □ 输出节点（阱点、汇点）

只有输入的节点，代表系统的输出变量。

## 2.6 方块图和信号流图

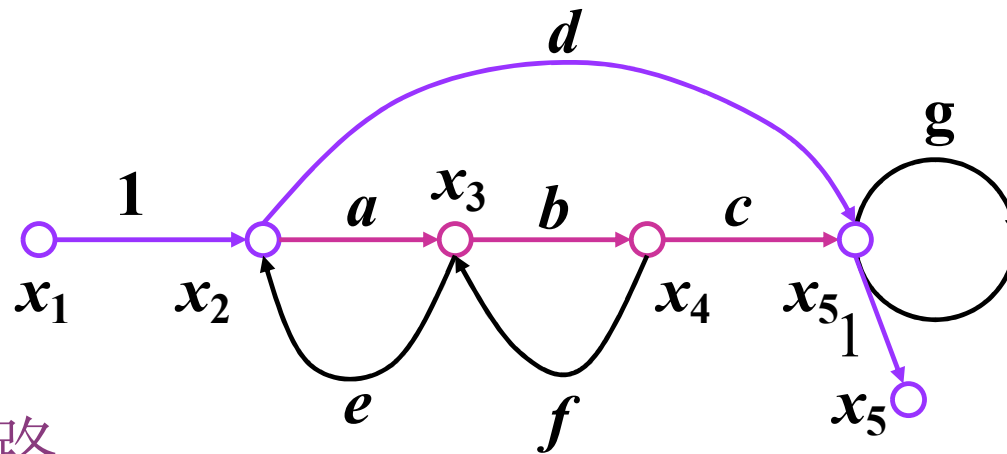
### □ 混合节点

既有输入又有输出的节点。若从混合节点引出一条具有单位增益的支路，可将混合节点变为输出节点。



### □ 通路

沿支路箭头方向穿过各相连支路的路径。



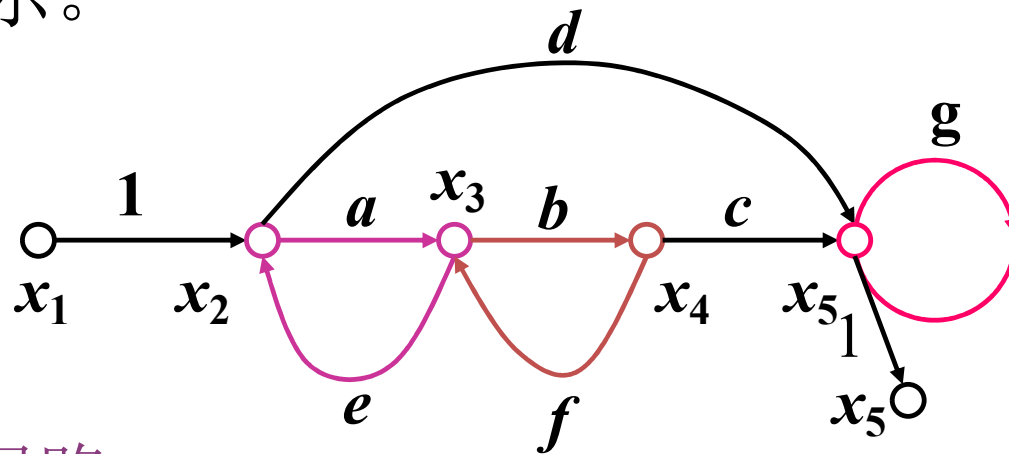
### □ 前向通路

从输入节点到输出节点通路上通过任何节点不多于一次的通路。前向通路上各支路增益之乘积，称**前向通路总增益**，一般用 $p_k$ 表示。

## 2.6 方块图和信号流图

### □ 回路

起点与终点重合且通过任何节点不多于一次的闭合通路。回路中所有支路增益之乘积称为回路增益，用 $L_a$ 表示。

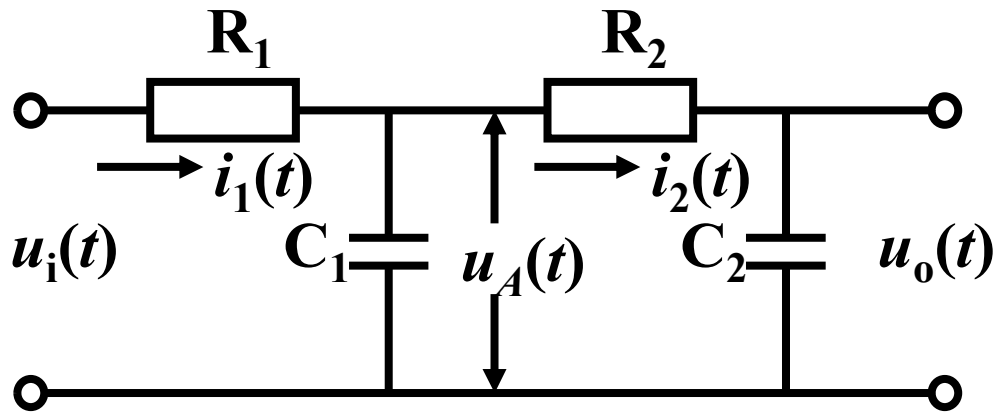


### □ 不接触回路

相互间没有任何公共节点的回路。

## 2.6 方块图和信号流图

例1：根据微分方程绘制信号流图



二级RC电路网络

$$i_1(t) = \frac{u_i(t) - u_A(t)}{R_1}$$

$$u_A(t) = \frac{1}{C_1} \int [i_1(t) - i_2(t)] dt$$

$$i_2(t) = \frac{u_A(t) - u_o(t)}{R_2}$$

$$u_o(t) = \frac{1}{C_2} \int i_2(t) dt$$

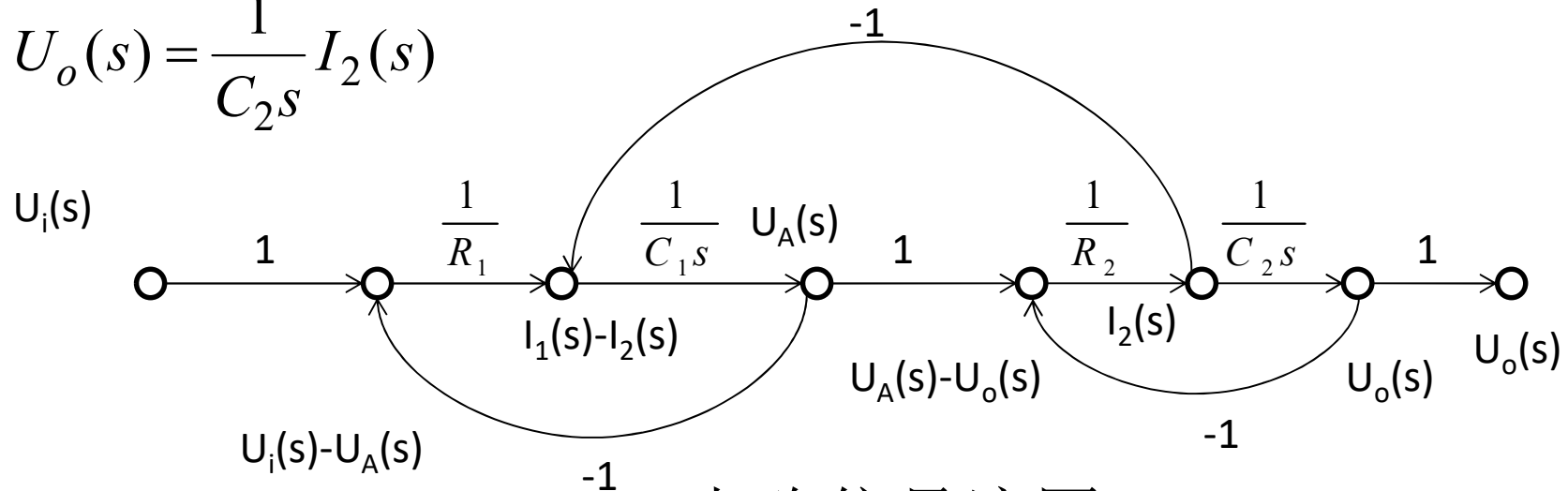
## 2.6 方块图和信号流图

$$I_1(s) = \frac{U_i(s) - U_A(s)}{R_1}$$

取  $U_i(s)$  、  $U_i(s) - U_A(s)$  、  $U_A(s)$  、  $I_1(s) - I_2(s)$  、  $I_2(s)$  、  $U_A(s) - U_o(s)$  、  $U_o(s)$  作为信号流图的节点，其中， $U_i(s)$ 、 $U_o(s)$  分别为输入及输出节点。

$$I_2(s) = \frac{U_A(s) - U_o(s)}{R_2}$$

$$U_o(s) = \frac{1}{C_2 s} I_2(s)$$



RC电路信号流图

## 2.6 方块图和信号流图

➤ 梅逊公式

$$P = \frac{1}{\Delta} \left( \sum_k P_k \Delta_k \right)$$

式中， $P$  — 系统总传递函数

$P_k$  — 第 $k$ 条前向通路的传递函数（通路增益）

$\Delta$  — 流图特征式

$$\Delta = 1 - \sum_a L_a + \sum_{b,c} L_b L_c - \sum_{d,e,f} L_d L_e L_f + \cdots$$

$\Delta_k$  — 第 $k$ 条前向通路特征式的余因子，即对于流图的特征式 $\Delta$ ，将与第 $k$ 条前向通路相接触（即有公共节点）的回路传递函数代以零值，余下的 $\Delta$ 即为 $\Delta_k$ 。



## 2.6 方块图和信号流图

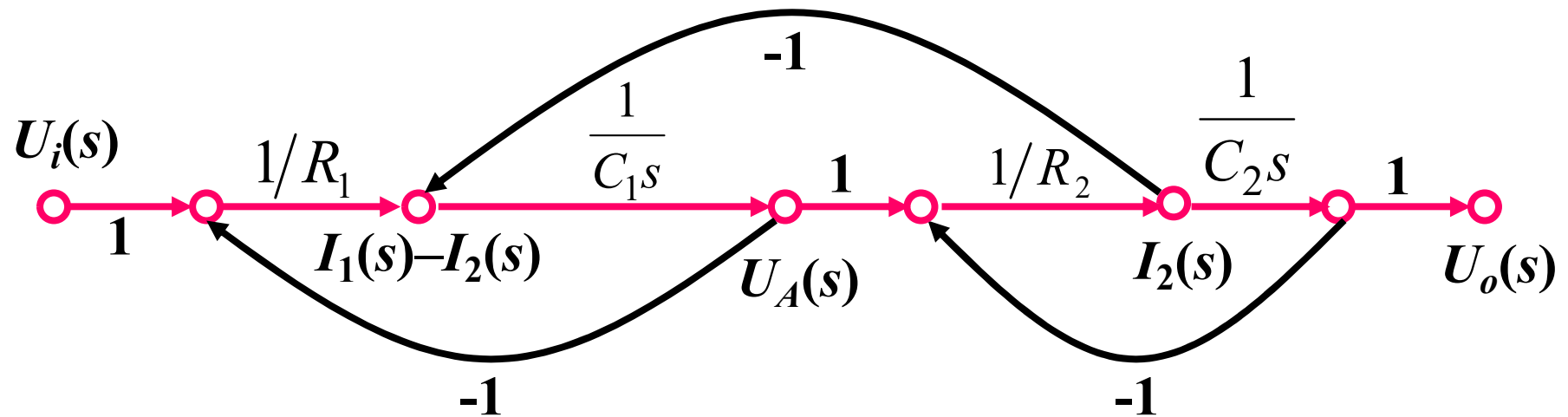
$\sum_a L_a$  —所有不同回路的传递函数之和;

$\sum_{b,c} L_b L_c$  —每两个互不接触回路传递函数乘积之和

$\sum_{d,e,f} L_d L_e L_f$  —每三个互不接触回路传递函数乘积之和

## 2.6 方块图和信号流图

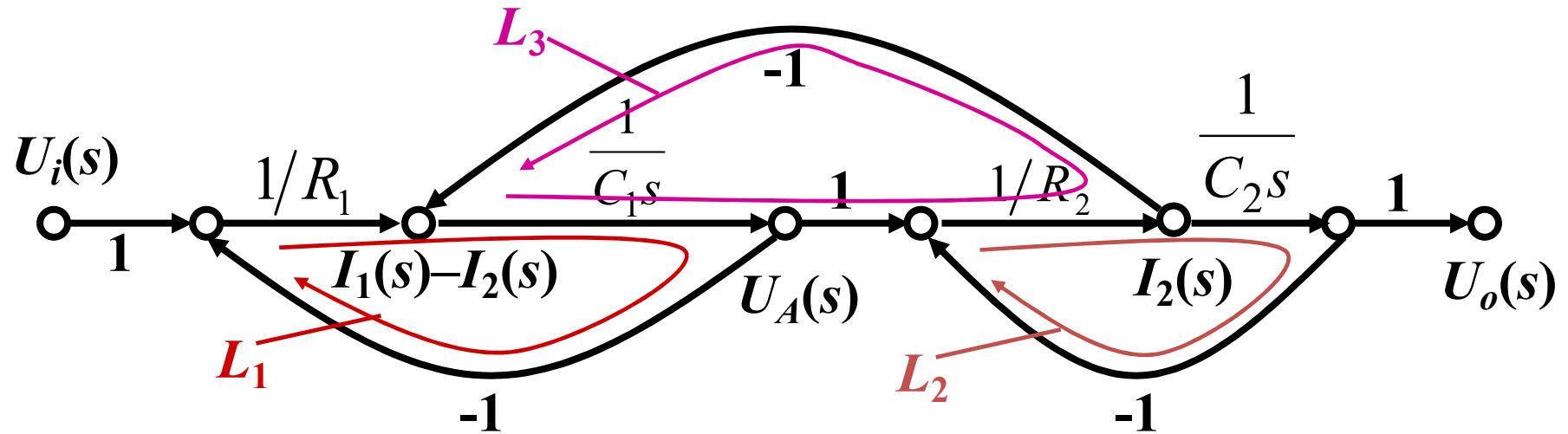
例：用梅逊公式求系统传递函数



对于二阶RC电路网络，输入 $U_i(s)$ 与输出 $U_o(s)$ 之间**只有一条前向通路**，其前向通路的传递函数为：

$$P_1 = \frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C_1s} \cdot \frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{C_2s}$$

## 2.6 方块图和信号流图



三个不同回路的传递函数分别为：

$$L_1 = -\frac{1}{R_1} \cdot \frac{1}{C_1 s} \quad L_2 = -\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{C_2 s} \quad L_3 = -\frac{1}{R_2} \cdot \frac{1}{C_1 s}$$

两两互不接触的回路：  $L_1 \cdot L_2 = \left(-\frac{1}{R_1 C_1 s}\right) \cdot \left(-\frac{1}{R_2 C_2 s}\right) = \frac{1}{R_1 C_1 s} \frac{1}{R_2 C_2 s}$

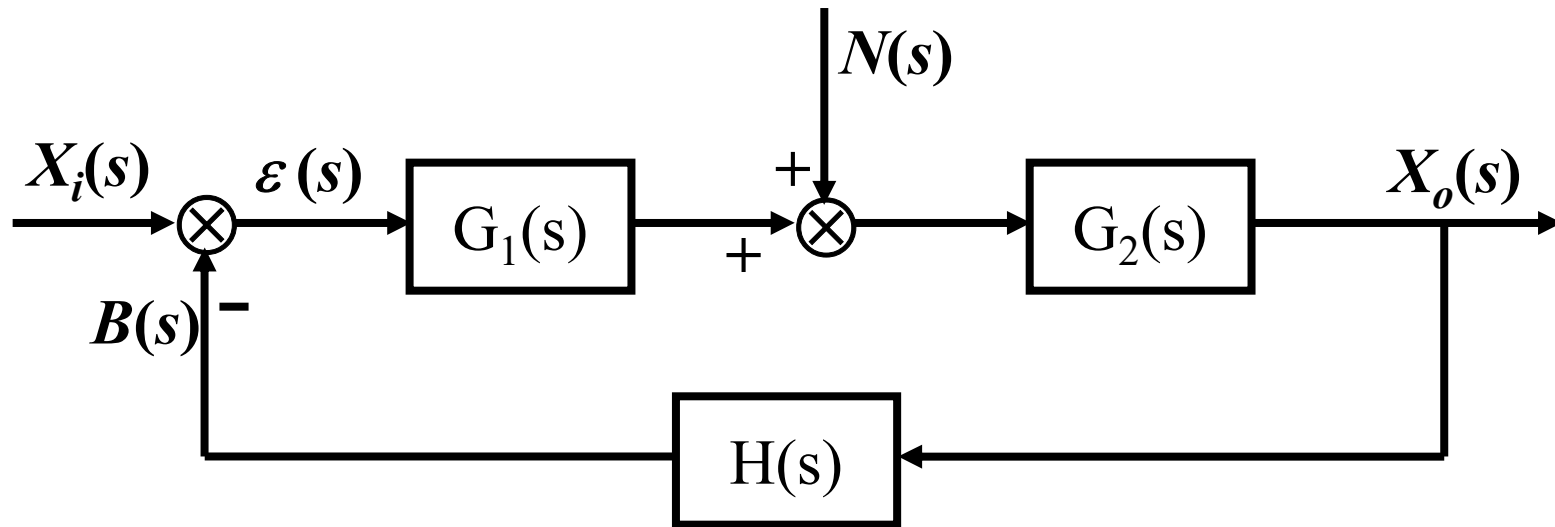
流图特征式为：

$$\begin{aligned}\Delta &= 1 - (L_1 + L_2 + L_3) + L_1 L_2 \\ &= 1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + \frac{1}{R_2 C_1 s} + \frac{1}{R_1 C_1 s} \cdot \frac{1}{R_2 C_2 s}\end{aligned}$$

所有回路都与前向通路接触，所以前向通路特征式的余因子为：  $\Delta_1 = 1$

$$\begin{aligned}\text{所以, } P &= \frac{1}{\Delta} \sum_k P_k \Delta_k = \frac{1}{\Delta} P_1 \Delta_1 \\ &= \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_1 C_2) s + 1}\end{aligned}$$

### ● 控制系统的传递函数



$X_i(s)$ 到 $X_o(s)$ 的信号传递通路称为前向通道；  
 $X_o(s)$ 到 $B(s)$ 的信号传递通路称为反馈通道；

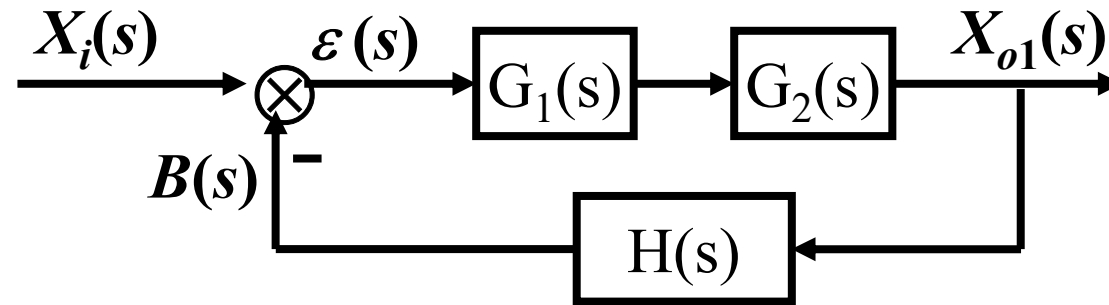
### ➤ 闭环系统的开环传递函数

将闭环控制系统主反馈通道的输出断开，即 $H(s)$ 的输出通道断开，此时，前向通道传递函数与反馈通道传递函数的乘积 $G_1(s)G_2(s)H(s)$ 称为该闭环控制系统的开环传递函数。记为 $G_K(s)$ 。

闭环系统的开环传递函数也可定义为反馈信号 $B(s)$ 和偏差信号 $\varepsilon(s)$ 之间的传递函数，即：

$$G_K(s) = \frac{B(s)}{\varepsilon(s)} = G_1(s)G_2(s)H(s)$$

➤  $x_i(t)$ 作用下系统的闭环传递函数



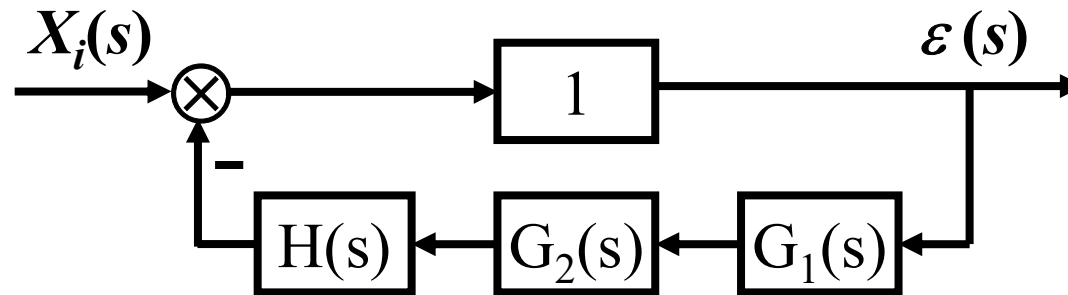
$x_i(t)$ 作用下的闭环系统

令  $n(t)=0$ ，此时在输入  $x_i(t)$  作用下系统的闭环传递函数为：

$$\Phi_i(s) = \frac{X_{o1}(s)}{X_i(s)} = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

### ➤ 输入作用下系统的偏差传递函数

令 $n(t)=0$ ，此时系统输入 $X_i(s)$ 与偏差 $\varepsilon(s)$ 之间的传递函数称为**输入作用下的偏差传递函数**。用 $\Phi_{\varepsilon i}(s)$ 表示。

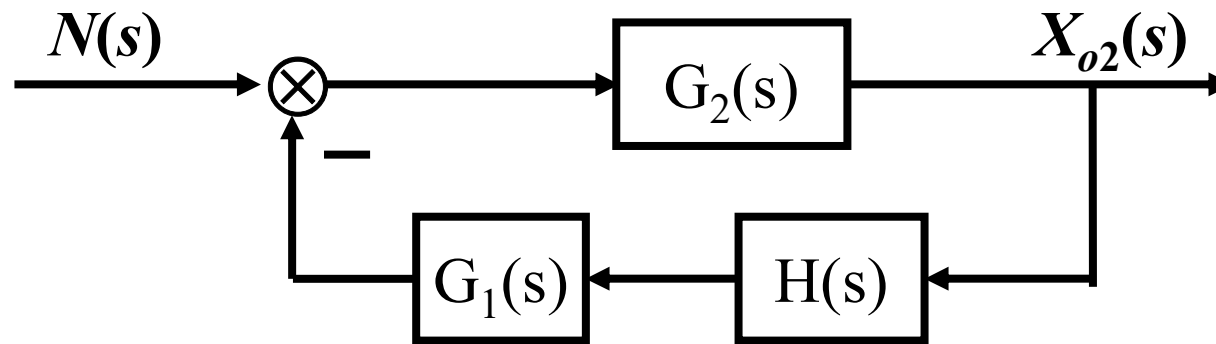


偏差信号与输入信号之间的关系

$$\Phi_{\varepsilon i}(s) = \frac{\varepsilon_i(s)}{X_i(s)} = \frac{1}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$



### ➤ $n(t)$ 作用下系统的闭环传递函数



$n(t)$ 作用下的闭环系统

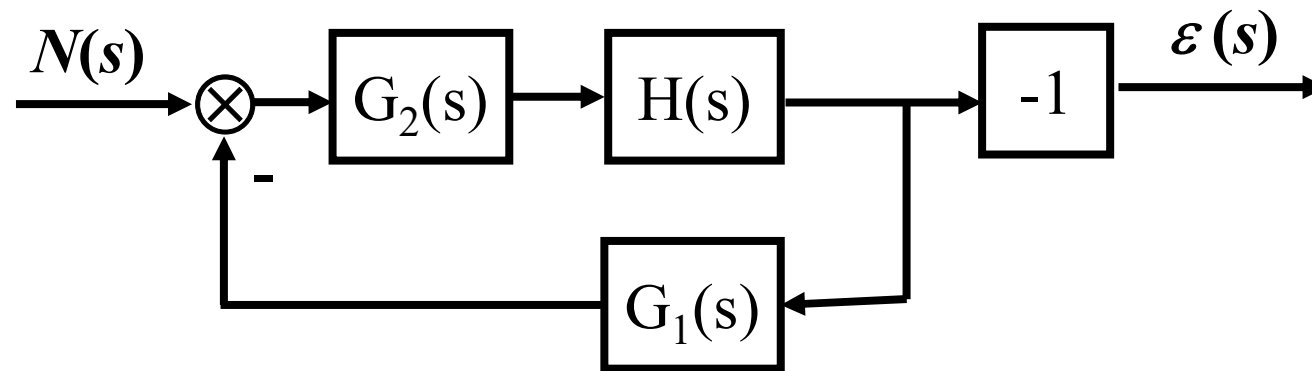
令  $x_i(t)=0$ ，此时在扰动  $n(t)$  作用下系统的闭环传递函数（**干扰传递函数**）为：

$$\Phi_N(s) = \frac{X_{o2}(s)}{N(s)} = \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

## 2.6 方块图和信号流图

### ➤ 扰动作用下系统的偏差传递函数

令 $x_i(t)=0$ ，此时系统在扰动作用下的偏差传递函数（称**扰动偏差传递函数**）。



偏差信号与干扰信号之间的关系

$$\Phi_{\varepsilon N}(s) = \frac{\varepsilon_N(s)}{N(s)} = \frac{-G_2(s)H(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)}$$

### ➤ 结论

- 系统的闭环传递函数  $\Phi_i(s)$ 、 $\Phi_{\varepsilon i}(s)$ 、 $\Phi_N(s)$  及  $\Phi_{\varepsilon N}(s)$  具有相同的特征多项式：

$$1+G_1(s)G_2(s)H(s)$$

其中  $G_1(s)G_2(s)H(s)$  为系统的开环传递函数。

闭环传递函数的极点相同。

- 系统的固有特性与输入、输出的形式、位置均无关；同一个外作用加在系统不同的位置上，系统的响应不同，但不会改变系统的固有特性；

### ➤ 系统的总输出

根据线性系统的叠加原理，系统在输入 $x_i(t)$ 及扰动 $n(t)$ 共同作用下的总输出为：

$$X_o(s) = X_{o1}(s) + X_{o2}(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} X_i(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s)$$

若  $|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1$  且  $|G_1(s)H(s)| \gg 1$ ，则：

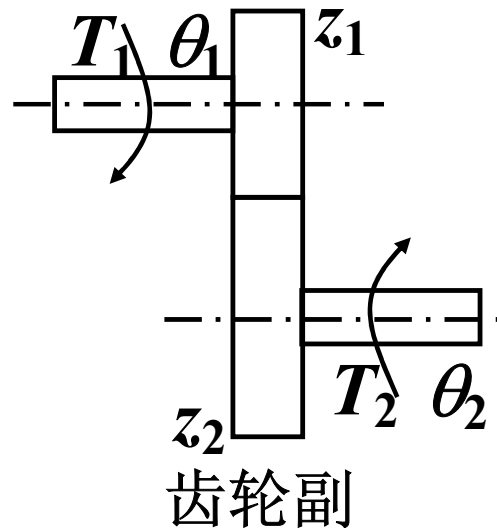
$$X_o(s) = \frac{G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} X_i(s) + \frac{G_2(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)H(s)} N(s) \xrightarrow{|G_1(s)G_2(s)H(s)| \gg 1}$$

$$X_o(s) \approx \frac{1}{H(s)} X_i(s) + \frac{1}{G_1(s)H(s)} N(s) \xrightarrow{|G_1(s)H(s)| \gg 1} X_o(s) \approx \frac{1}{H(s)} X_i(s)$$

上式表明，采用反馈控制的系统，适当选择元部件的结构参数，可以增强系统抑制干扰的能力。

### 2.7 控制系统传递函数推导举例

#### ➤ 齿轮传动装置



$T_1$ 、 $T_2$ : 转矩

$\theta_1$ 、 $\theta_2$ : 角位移

$\omega_1$ 、 $\omega_2$ : 角速度

$z_1$ 、 $z_2$ : 齿数

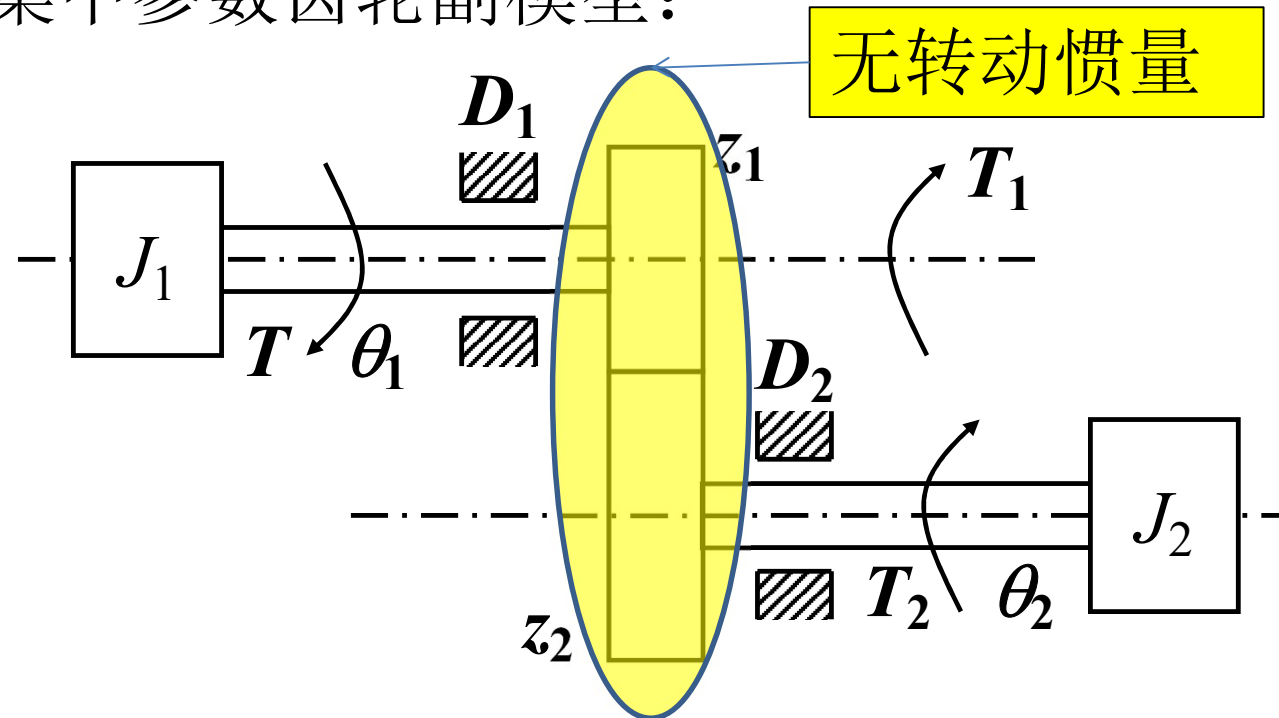
$r_1$ 、 $r_2$ : 齿轮分度圆半径

假设齿轮传动中无功率损耗，且忽略齿轮转动惯量(或齿轮匀速运动)、啮合间隙与变形，则(功率守恒原理)：

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}$$

## 2.7 控制系统传递函数推导举例

集中参数齿轮副模型：



$T$  : 输入转矩

$J_1$ 、 $J_2$  : 齿轮（包括轴）的转动惯量

$D_1$ 、 $D_2$  : 啮合齿轮、支承粘性阻尼系数

## 2.7 控制系统传递函数推导举例

齿轮1: 
$$T(t) = J_1 \frac{d^2 \theta_1(t)}{dt^2} + D_1 \frac{d\theta_1(t)}{dt} + T_1(t)$$

齿轮2: 
$$T_2(t) = J_2 \frac{d^2 \theta_2(t)}{dt^2} + D_2 \frac{d\theta_2(t)}{dt}$$

利用: 
$$T_1(t) = \frac{z_1}{z_2} T_2(t) = \frac{T_2}{i_2}, \quad \theta_2(t) = \frac{z_1}{z_2} \theta_1(t)$$

有: 
$$T_1(t) = \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 J_2 \frac{d^2 \theta_1(t)}{dt^2} + \left( \frac{z_1}{z_2} \right)^2 D_2 \frac{d\theta_1(t)}{dt}$$

## 2.7 控制系统传递函数推导举例

$$T(t) = J_I \frac{d^2 \theta_1(t)}{dt^2} + D_I \frac{d\theta_1(t)}{dt}$$

$$\text{式中: } J_I = J_1 + (z_1/z_2)^2 J_2 = J_1 + \frac{J_2}{i_2^2}$$

—— 等效折算到输入端的转动惯量

其中,  $(z_1/z_2)^2 J_2$  为齿轮2 一侧的转动惯量折算到齿轮1一侧的等效转动惯量



## 2.7 控制系统传递函数推导举例

$$D_I = D_1 + (z_1/z_2)^2 D_2 = D_1 + \frac{D_2}{i_2^2}$$

——等效折算到输入端的粘性阻尼系数

其中， $(z_1/z_2)^2 D_2$  为齿轮2 一侧的粘性阻尼系数折算到齿轮1一侧的等效粘性阻尼系数

显然，利用  $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$  ， 齿轮2 一侧的转矩、转速和角位移同样可等效折算到齿轮1一侧。

## 2.7 控制系统传递函数推导举例

考虑扭转弹性变形效应时，齿轮2一侧的扭转刚度系数等效到齿轮1一侧时，刚度系数也应乘以  $(z_1/z_2)^2 = \frac{1}{i_2^2}$ 。

即若  $K_1$ 、 $K_2$  分别为齿轮1 和2的扭转刚度系数，则齿轮1 一侧的等效刚度  $K_I$  为(弹簧串联)：

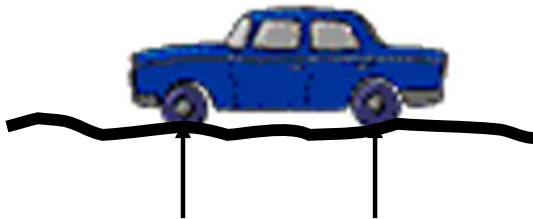
$$K_I = \frac{1}{\frac{1}{K_1} + \frac{1}{(z_1/z_2)^2 K_2}}$$

### 结论:

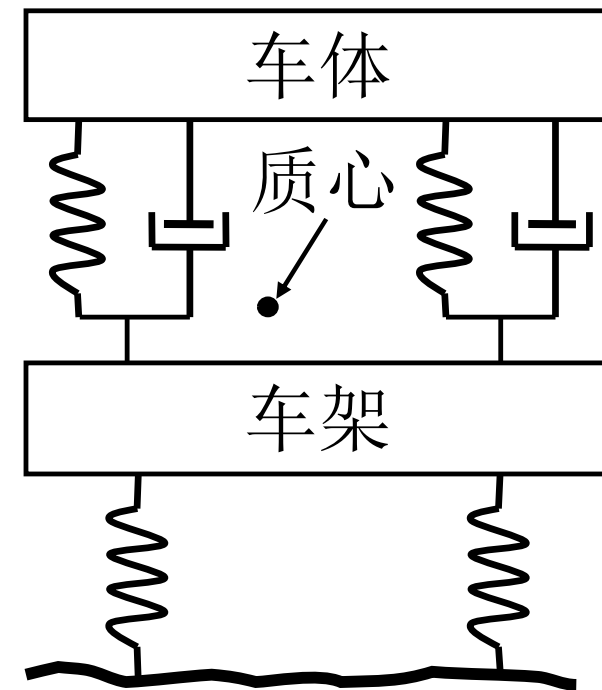
当折合到主动轴上时，从动轴上的转动惯量和阻尼系数都要除以传动比的平方，负载转矩除以传动比。因此，减速传动时，相当于电动机带的负载变小了，也可以说电动机带负载的力矩增大了。

反之，当折合到从动轴上时，主动轴上的转动惯量和阻尼系数都要乘以传动比的平方，输入转矩乘以传动比。

### ➤ 汽车悬挂系统

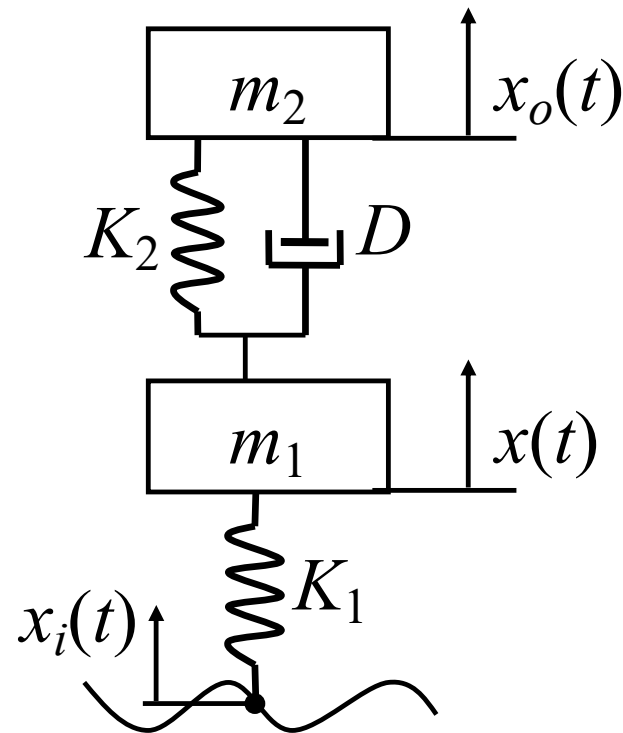


当汽车行驶时，汽车作平面运动，则轮胎的垂直位移作用于汽车悬挂系统上，系统的运动由质心的平动和围绕质心的旋转运动组成。



汽车悬挂系统（垂直方向）

## 2.7 控制系统传递函数推导举例



忽略了系统的  
旋转运动！

简化的悬挂系统（垂直方向）

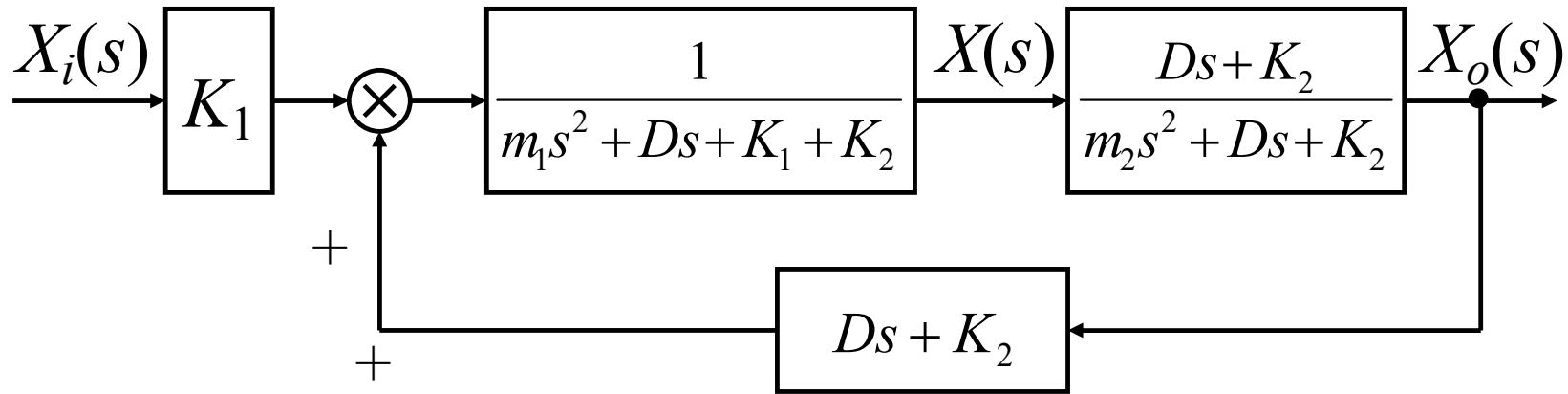
$$m_2 x_o''(t) = K_2 [x(t) - x_o(t)] + D [x'(t) - x_o'(t)]$$

$$m_1 x''(t) = K_2 [x_o(t) - x(t)] + D [x_o'(t) - x'(t)] + K_1 [x_i(t) - x(t)]$$

## 2.7 控制系统传递函数推导举例

$$(m_2 s^2 + Ds + K_2)X_o(s) = (Ds + K_2)X(s)$$

$$(m_1 s^2 + Ds + K_1 + K_2)X(s) = (Ds + K_2)X_o(s) + K_1 X_i(s)$$



$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{K_1(Ds + K_2)}{m_1 m_2 s^4 + (m_1 + m_2)Ds^3 + [K_1 m_2 + (m_1 + m_2)K_2]s^2 + K_1 Ds + K_1 K_2}$$

## 本章作业 (p67-p75)

拉氏变换: 2-1, 2-2,

传递函数: 2-6(b), 2-8,

数学模型: 2-9(b), 2-10(a), 2-11(c), 2-12(b), 2-19

解微分方程: 2-3,

信号流图: 2-26(b)

