物理模型和状态空间公式推导部分

为了建立物理模型，现有如下假设：

1、摆杆质量均匀，质心位于其几何中心处

2、忽略除 b 以外的所有摩擦力

如图图 1对小车进行受力分析，以摆杆和小车交点为原点，以水平向右和竖直向下为正方向建立坐标系，沿 x 轴有牛顿第二定律

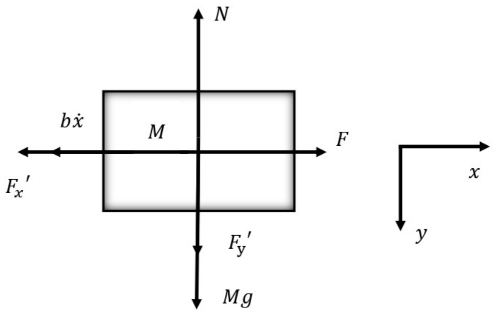

图 1 小车受力分析

$$F - b\dot{x} - N_x' = M\ddot{x} \tag{1}$$

如图图 2对摆杆进行受力分析，沿 x, y 轴有牛顿第二定律和沿 θ 向动量矩定理

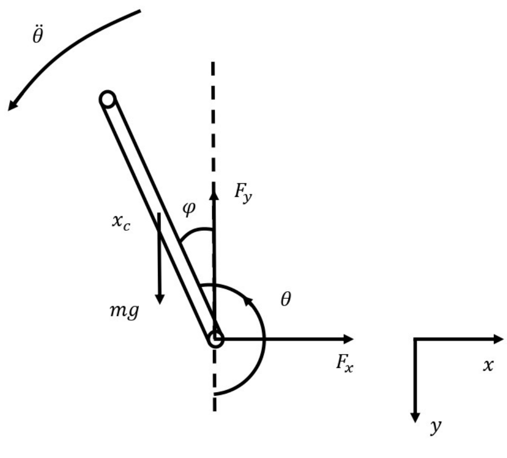

图 2 摆杆受力分析

摆杆质心 c 点

$$\begin{aligned} x_c &= x + l sin\theta \\ y_c &= l cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

求导可得质心加速度

$$\begin{aligned}\ddot{x}_c &= \ddot{x} + l\ddot{\theta}cos\theta - l\dot{\theta}^2 sin\theta \\ \ddot{y}_c &= -l\ddot{\theta}sin\theta - l\dot{\theta}^2 cos\theta\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}&N_y - mg = -m\ddot{y}_c \\ &N_x = m\ddot{x}_c \\ &N_y lsin\varphi + N_x lcos\varphi = I\ddot{\varphi}\end{aligned} \tag{4}$$

应用小量近似 $sinx \doteq x, cosx = 1 - \frac{x^2}{2}$ 以及 $\theta = \varphi + \pi$ 这个关系整理以上各式，可得倒立摆系统物理方程组

$$\begin{aligned}&F = (M+m)\ddot{x} - ml\ddot{\varphi} + b\dot{x} \\ &(I + ml^2)\ddot{\varphi} = ml\ddot{x} + mgl\varphi\end{aligned} \tag{5}$$

拉氏变换可得

$$\begin{aligned}&(M+m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\varphi(s)s^2 = F(s) \\ &(I + ml^2)\varphi(s)s^2 - mgl\varphi((s) = mlX(s)s^2\end{aligned} \tag{6}$$

注意到小车加速度 $A(s) = X(s)s^2$

可得从小车角速度输入到摆杆角度输出的传递函数

$$\frac{\varphi(s)}{A(s)} = \frac{ml}{(I+ml^2)s^2 - mgl} \tag{7}$$

进一步整理, 可以得到力输入到摆杆角度和小车位移的传递函数

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(s)}{F(s)} &= \frac{mls^2}{[(I+ml^2)(M+m) - m^2l^2]s^4 + b(I+ml^2)s^3 - (M+m)mgls^2 - bmgls} \\ \frac{X(s)}{F(s)} &= \frac{(I+ml^2)s^2 - mgl}{[(I+ml^2)(M+m) - m^2l^2]s^4 + b(I+ml^2)s^3 - (M+m)mgls^2 - bmgls}\end{aligned} \tag{8}$$

将物理方程组进行等价变形，可以得到

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{bI + bml^2}{\Delta}\dot{x} + \frac{m^2gl^2}{\Delta}\varphi + \frac{I + ml^2}{\Delta}F \\ \ddot{\varphi} &= \frac{-mlb}{\Delta}\dot{x} + \frac{mg(M+m)l}{\Delta}\varphi + \frac{ml}{\Delta}F\end{aligned} \tag{9}$$

其中，$\Delta = I(M+m) + Mml^2$.

基于此，取 $z_1 = x, z_2 = \dot{x}, z_3 = \varphi, z_4 = \dot{\varphi}$ 为状态空间变量，以力 F 作为输入 u, 建立状态空间矩阵

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\varphi}\\ \ddot{\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{bI+bml^2}{\Delta} & \frac{m^2gl^2}{\Delta} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{-mlb}{\Delta} & \frac{mg(M+m)l}{\Delta} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \varphi\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{I+ml^2}{\Delta}\\ 0\\ \frac{ml}{\Delta}\end{bmatrix}u$$

$$\begin{bmatrix}x\\ \varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \varphi\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}u \tag{10}$$

注意到该状态空间矩阵较为复杂，若取小车加速度作为输入 u'，可以简化该状态空间矩阵

根据转动惯量的定义式，并认为摆件质地均匀，有下式

$$I=\frac{1}{12}m(2l)^2 \tag{11}$$

带入整理，得

$$\ddot{\varphi}=\frac{3g}{4l}+\frac{3}{4l}\ddot{x} \tag{12}$$

则可得较为简单的状态空间矩阵

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\varphi}\\ \ddot{\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & \frac{3g}{4l} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \varphi\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ \frac{3}{4l}\end{bmatrix}u'$$

$$\begin{bmatrix}x\\ \varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \varphi\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}u' \tag{13}$$

代入数据可得

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\varphi}\\ \ddot{\varphi}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 29.4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \varphi\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\\ 0\\ 3\end{bmatrix}u'$$

$$\begin{bmatrix}x\\ \varphi\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \varphi\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}u' \tag{14}$$