第 7 章

稳态导热

7.1 导热微分方程及边界条件

- 导热问题的求解方法：分析解，实验方法，类比方法和数值方法。
- 傅里叶定律无法求解所有的导热问题，还必须利用导热微分方程及相应的单值性条件，才能获得导热物体内的温度场，并进而求得物体内瞬时的或者平均的传热热流。
- 导热微分方程系根据傅里叶定律和热量守恒原理导出。

导热微分方程式

根据能量守恒与转换定律

导入与导出微元体的净热量+微元体内热源的发热量 =微元体中热力学能的增加

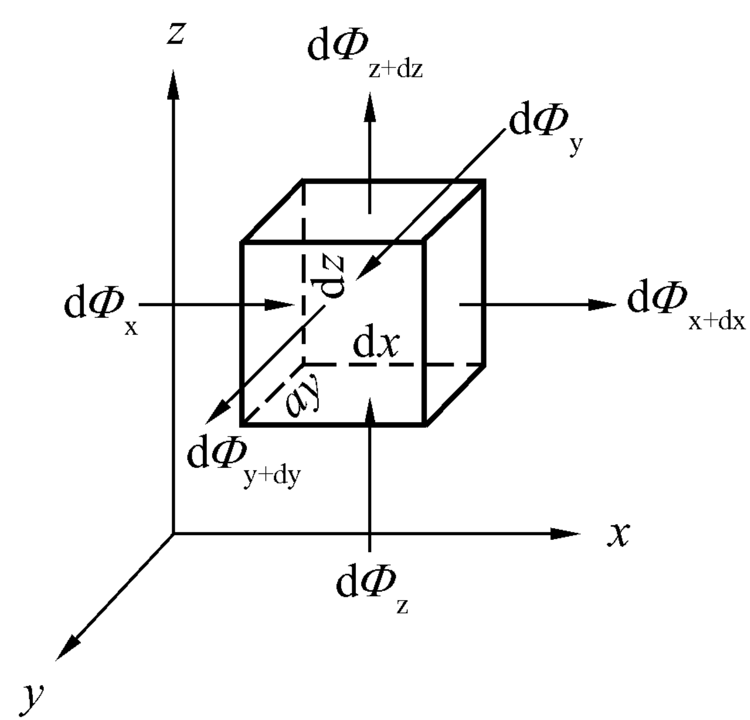
I II III

三个方向导入和导出微元体的热量为：

$$\mathrm{d}\Phi_x - \mathrm{d}\Phi_{x+dx} = -\frac{\partial q_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$$

$$\mathrm{d}\Phi_y - \mathrm{d}\Phi_{y+dy} = -\frac{\partial q_y}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$$

$$\mathrm{d}\Phi_z - \mathrm{d}\Phi_{z+dz} = -\frac{\partial q_z}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$$



导入微元体的净热量：

$$q_x = -\lambda \frac{\partial t}{\partial x}$$

$$\mathrm{I} = [\frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial t}{\partial z})]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$$

微元体中的热源发热量：

$$\mathrm{II} = q_v \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$$

微元体中热力学能的增量：

$$(mc\mathrm{d}t = \rho \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z c \frac{\partial t}{\partial \tau}\mathrm{d}\tau)$$

$$\mathrm{III} = \rho c \frac{\partial t}{\partial \tau}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}\tau$$

最后，导热微分方程式：

$$\rho c \frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x}(\lambda \frac{\partial t}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(\lambda \frac{\partial t}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(\lambda \frac{\partial t}{\partial z}) + q_v$$

热物性参数为常数

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = \frac{\lambda}{\rho c}\left(\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2}\right) + \frac{q_v}{\rho c}$$

或者：

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t + \frac{q_v}{\rho c} \qquad a = \frac{\lambda}{\rho c}}$$

a——热扩散率表征物体被加热或冷却时，物体内各部分温度趋向均匀一致的能力。热扩散率a反映了导热过程中材料的导热能力(λ)与沿途物质储热能力(ρc)之间的关系。

无热源：

$$\boxed{\frac{\partial t}{\partial \tau} = a\nabla^2 t}$$

稳态温度场：

$$\boxed{a\nabla^2 t + \frac{q_v}{\rho c} = 0}$$

无热源稳态温度场：

$$\boxed{\nabla^2 t = \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial z^2} = 0}$$

导热过程的单值性条件

导热微分方程是物体内温度分布的通用控制方程，但还需要配相应的单值性条件，才能获得特定导热问题的特解。单值性条件由以下四个方面构成：

(1) 几何条件，指物体的几何尺度、形状等。

(2) 物理条件，指导热体的主要物理特征，如物性的数值，是否随温度变化以及有无内热源等。

(3) 时间条件，针对非稳态问题。常以初始时刻温度分布的形式给出，因此也称为初始条件。

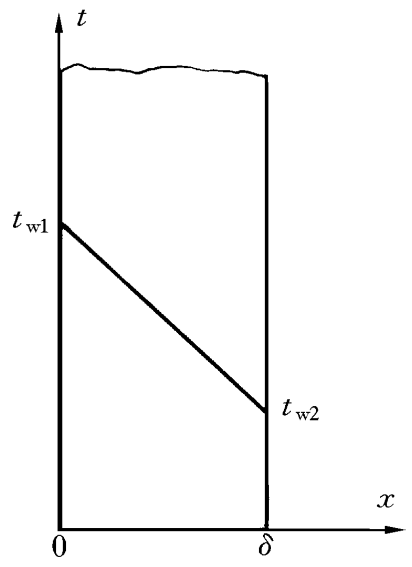
(4) 边界条件，指导热物体边界面上与外部环境之间在热方面的联系或相互作用。

常见的三种边界条件

- **第一类规定导热物体边界面上的温度**

$$\tau > 0, \quad t_{\mathrm{w}} = f\left(x, y, z, \tau\right)$$

恒壁温边界条件



无限大平壁的第一类边界条件

常见的三种边界条件

- **第二类规定导热物体边界面上的热流密度**

$$\tau > 0, \quad q_{\mathrm{w}} = -\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{\mathrm{w}} = f\left(x, y, z, \tau\right)$$

实际上相当于已知任意时刻物体边界面上法向的温度变化率的值

$$-\left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{s} = \frac{q_w}{\lambda}$$

恒热流边界条件

如果边界面是绝热的，即边界面上的温度变化率数值为0，则

$$-\left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{s} = 0$$

绝热边界条件

注意已知边界面上温度变化率的值，并不是已知物体的温度分布，因为物体内各处的温度梯度和边界面上的温度值都是未知的。

常见的三种边界条件

- 第三类，称为对流边界条件，规定边界面上的换热状况。一般给出流体温度和相应的对流换热表面传热系数。

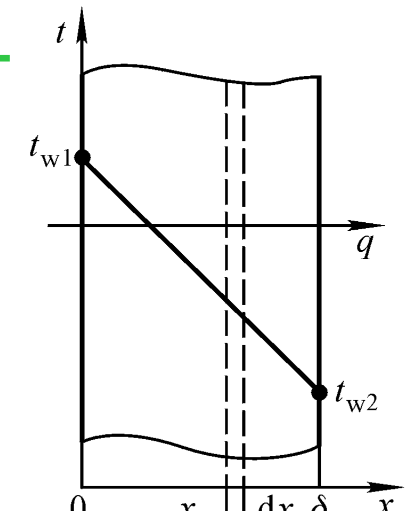
$$-\lambda \left.\frac{\partial t}{\partial n}\right|_{\mathrm{w}} = h\left(t_{\mathrm{w}} - t_{\mathrm{f}}\right)$$

流体温度 t_{f} 和表面传热系数 h 可以随位置和时间变化，也可以是恒定的常数。

如果边界面上对流与辐射并存，h 应被视为复表合面传热系数。

当热流方向不同时该式的形式相应有变化。

7.2 平壁的导热计算



- 表面积A的单一材料平壁，无内热源，两侧面分别维持均匀恒定的温度t_{w1}和t_{w2}
- 由傅里叶定律，穿过平壁的导热热流量

$$\Phi = -\lambda A \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}$$

- 分离变量，在平壁的全厚度上积分

$$\Phi \int_{x=0}^{\delta} \mathrm{d}x = -\int_{t=t_{w1}}^{t_{w2}} \lambda A \mathrm{d}t$$

$$\Phi = \lambda A \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta} = \lambda A \frac{\Delta t}{\delta}$$

$$\Phi = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\boxed{\delta / (\lambda A)}}$$

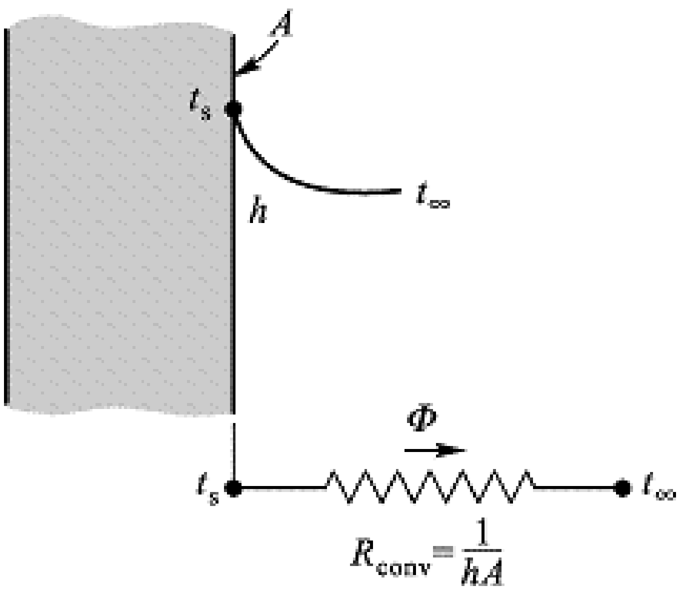
热阻

注意：一维温度场的条件

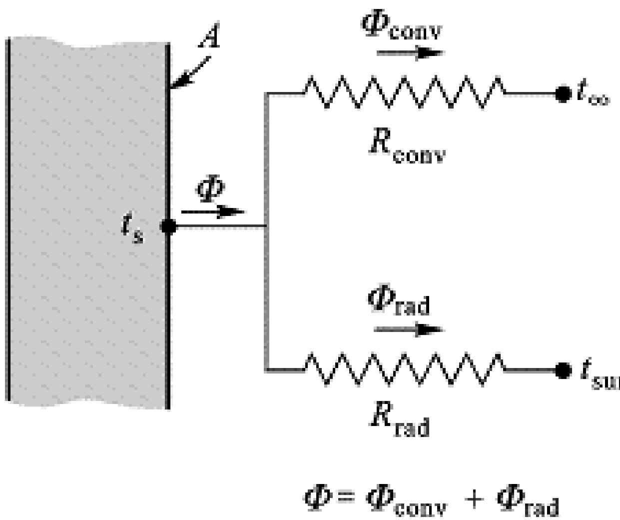
- 其他解法

热电比拟：热阻表达方法

- 对流换热的热阻也可以表示为 $\Phi = \dfrac{t_w - t_f}{\boxed{1/(hA)}}$
- 对于表面上的辐射换热，有 $R_{rad} = 1/\boxed{(h_{rad} A)}$
- 从辐射换热表面传热系数计算的当量热阻是壁面温度、环境温度、发射率以及表面积的函数。



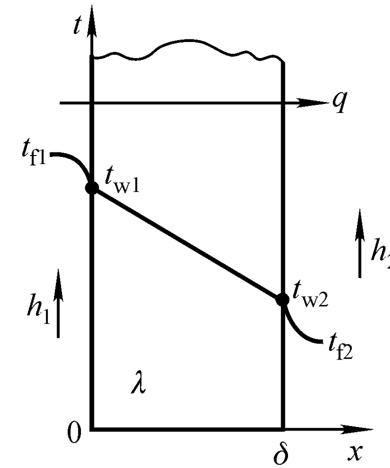
表面对流换热热阻



辐射与对流热阻并联

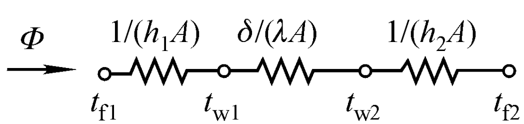
- 对流边界条件下的平壁导热：<u>传热过程</u>

$$\Phi = \frac{t_{f1} - t_{w1}}{1/(h_1 A)} = \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\delta/(\lambda A)} = \frac{t_{w2} - t_{f2}}{1/(h_2 A)}$$



$$\Phi = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{R_{tot}} \qquad R_{tot} = \frac{1}{h_1 A} + \frac{\delta}{\lambda A} + \frac{1}{h_2 A}$$

- <u>总传热系数</u>***k***



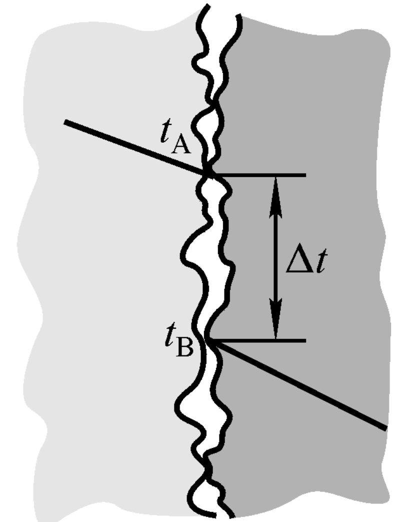
$$\Phi = kA(t_{f1} - t_{f2})$$

穿过每个平面的热流量/热流密度保持不变

如何计算壁面的温度?

7.3 接触热阻

- 多数实际工程应用中很难保证绝对的平整和光滑，两表面间为点或小面积接触。
- 通过不规则缝隙的热量传递是接触点的导热、缝隙中空气的导热和由缝隙的空腔形成的热辐射联合作用的结果。相对于表面理想热接触而言，导热过程多了额外的热阻，称为接触热阻



$$R_c = \frac{t_A - t_B}{q}$$

$$\frac{t_{w1} - t_{w2}}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1} + R_c + \dfrac{\delta_2}{\lambda_2}} < \frac{t_{w1} - t_{w2}}{\dfrac{\delta_1}{\lambda_1} + \dfrac{\delta_2}{\lambda_2}}$$

- 影响接触热阻的主要因素包括：材料种类，硬度匹配状况，材料的表面粗糙度，缝隙中填充介质的种类，接触面承受的正压力（预紧力）以及材料表面的清洁程度、氧化状况等。

- 接触热阻无法做理论计算，只能实测。
- 消除接触面处的热阻的简便方法：(1) 选软硬适当的材料配对，施以一定压力，以便加大接触面积，消除缝隙。(2) 在接触面上衬以铜箔、铝箔、银箔等较软且导热非常好的材料。(3) 在接触面上涂一薄层特制的导热油（导热姆）。(4) 对接触面积很小的管带式肋片，可采用胀管、钎焊或者镀锡、热浸锌等措施。

7.4 多层平壁与复合平壁导热

- 由多层不同材料构成的平壁，如果层间不存在接触热阻

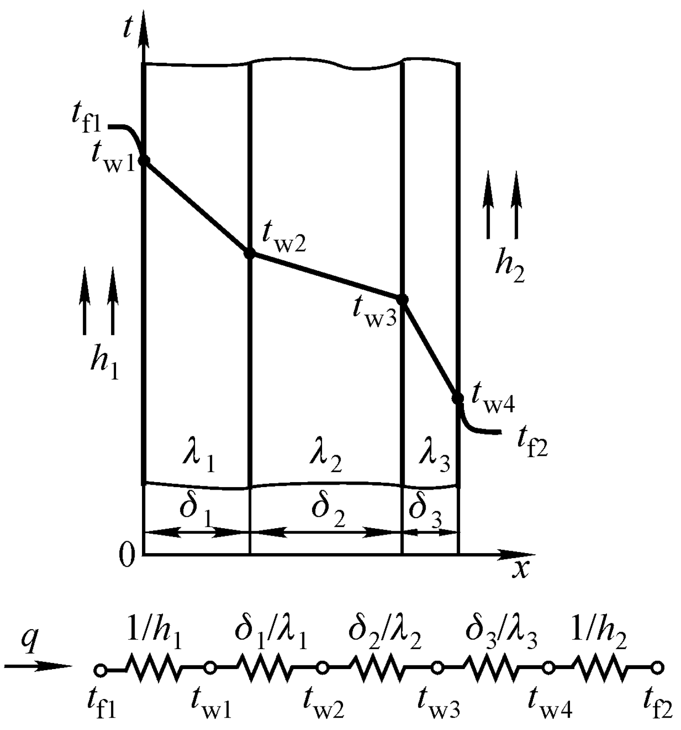
$$q=\frac{t_{f1}-t_{wa}}{1/h_1}=\frac{1}{R_{h,1}}(t_{f1}-t_{w1})$$

$$q=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\delta_1/\lambda_1}=\frac{1}{R_{\lambda,1}}(t_{w1}-t_{w2})$$

$$q=\frac{t_{w2}-t_{w3}}{\delta_2/\lambda_2}=\frac{1}{R_{\lambda,2}}(t_{w2}-t_{w3})$$

$$q=\frac{t_{w3}-t_{w4}}{\delta_3/\lambda_3}=\frac{1}{R_{\lambda,3}}(t_{w3}-t_{w4})$$

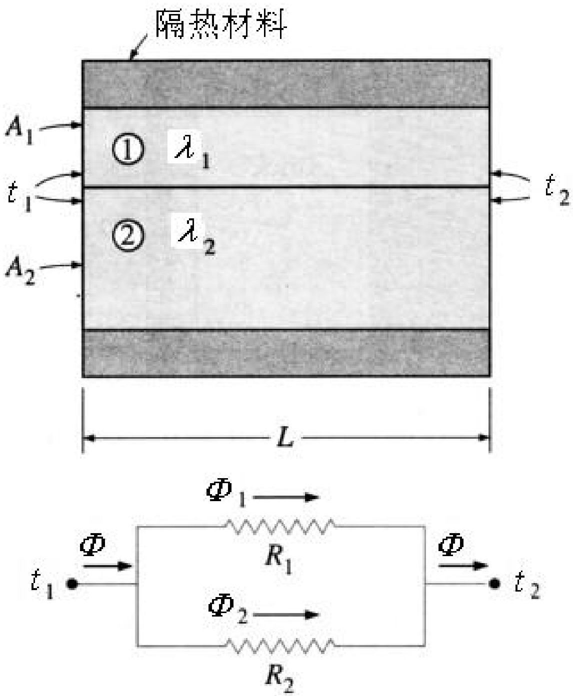
$$q=\frac{t_{w4}-t_{f2}}{1/h_2}=\frac{1}{R_{h,2}}(t_{w4}-t_{f2})$$



$$q=\frac{\Delta t}{\sum R_i}=\frac{t_{f1}-t_{f2}}{\frac{1}{h_1}+\frac{\delta_1}{\lambda_1}+\frac{\delta_2}{\lambda_2}+\frac{\delta_3}{\lambda_3}+\frac{1}{h_2}}$$

δ为沿热流传递方向的厚度

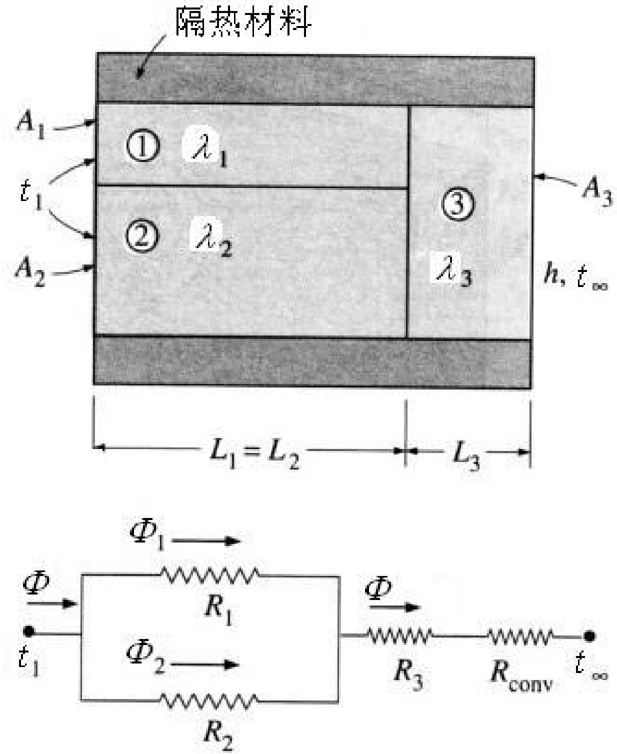
复合平壁导热分析：热阻网络



$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$

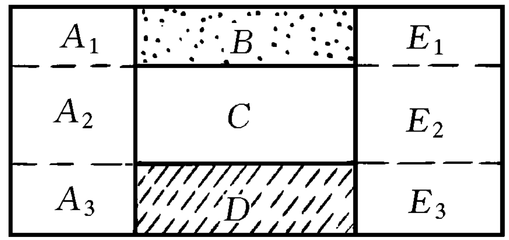
$$\sum R_\lambda = \frac{1}{\dfrac{1}{R_{\lambda 1}} + \dfrac{1}{R_{\lambda 2}}}$$

并联结构

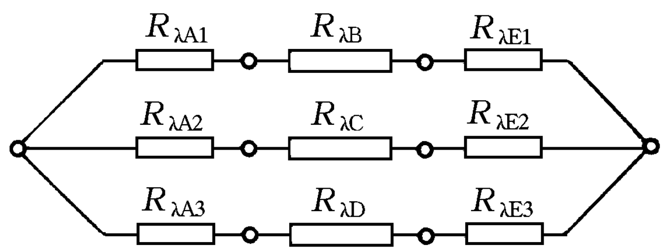


$$\sum R_\lambda = \frac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{R_{\lambda 1}} + \dfrac{1}{R_{\lambda 2}}} + R_{\lambda 3} + R_{conv}}$$

串并联结构



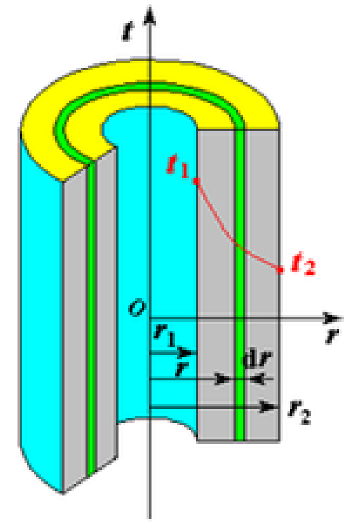
(a)



(b)

$$\sum R_\lambda = \frac{1}{\dfrac{1}{R_{\lambda A1}+R_{\lambda B}+R_{\lambda E1}}+\dfrac{1}{R_{\lambda A2}+R_{\lambda c}+R_{\lambda E2}}+\dfrac{1}{R_{\lambda A3}+R_{\lambda D}+R_{\lambda E3}}}$$

7.5 径向系统的一维导热



- 总长L，内外半径分别为r_1、r_2的圆柱体，没有内热源，内外表面分别保持均匀温度t_{w1}、t_{w2}

$$\Phi = -\lambda A\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} = -\lambda 2\pi r L\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r} \qquad \frac{\Phi}{2\pi L}\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{r} = -\int_{t_{w1}}^{t_{w2}}\lambda\,\mathrm{d}t$$

$$\Phi = \frac{t_{w1}-t_{w2}}{\boxed{\dfrac{1}{2\pi\lambda L}\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)}}$$

以单位长度计算的q_L

$$q_L = \frac{t_{w1}-t_{w2}}{\ln(r_2/r_1)/2\pi\lambda}$$

在第3类边界条件下

$$q_L = \frac{t_{f1}-t_{f2}}{\dfrac{1}{h_1\pi d_1}+\dfrac{1}{2\pi\lambda}\ln\left(\dfrac{r_2}{r_1}\right)+\dfrac{1}{h_2\pi d_2}}$$

多层圆筒壁

$$\Phi = \frac{t_{f1} - t_{f2}}{\boxed{\dfrac{1}{h_1 \pi d_1 L} + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{2\pi \lambda_i L} \ln \dfrac{r_{i+1}}{r_i} + \dfrac{1}{h_2 \pi d_{n+1} L}}}$$

通过球壁的导热

- 空心球壳内一维稳态、无内热源、常物性时的温度分布及热流量

$$Q=-\lambda A\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}=-\lambda 4\pi r^2\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r}=const$$

分离变量后积分，可得

$$Q\int_{r_1}^{r_2}\frac{\mathrm{d}r}{4\pi r^2}=-\lambda\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t$$

$$Q=\frac{(t_1-t_2)}{\boxed{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\Big/4\pi\lambda}}$$

例题

7-1　至　7-5

作业

P198

- 7-3
- 7-5
- 7-7
- 7-8

$$\rho c\frac{\partial t}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}(\lambda\frac{\partial t}{\partial x})+\frac{\partial}{\partial y}(\lambda\frac{\partial t}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(\lambda\frac{\partial t}{\partial z})+q_v$$

三类边界条件

$$\Phi=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\boxed{\delta/(\lambda A)}}$$

$$\Phi=\frac{t_w-t_f}{\boxed{1/(hA)}}$$

$$\boldsymbol{R_{\mathrm{rad}}=1/\boxed{(h_{\mathrm{rad}}A)}}$$

$$q=\frac{\Delta t}{\sum R_i}=\frac{t_{f1}-t_{f2}}{\frac{1}{h_1}+\frac{\delta_1}{\lambda_1}+\frac{\delta_2}{\lambda_2}+\frac{\delta_3}{\lambda_3}+\frac{1}{h_2}}$$

$$\Phi=\frac{t_{w1}-t_{w2}}{\boxed{\frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}}$$

$$Q=\frac{(t_1-t_2)}{\boxed{\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)\Big/4\pi\lambda}}$$