物理模型和状态空间公式推导部分

为了建立物理模型，现有如下假设：

1、摆杆质量均匀，质心位于其几何中心处

2、忽略除 b 以外的所有摩擦力

如图以摆杆和小车交点为原点，以水平向右和竖直向下为正方向建立坐标系，各物理量之间的关系如下

摆杆质心 c 点

$$\begin{aligned} x_c &= x + lsin\theta \\ y_c &= lcos\theta \end{aligned} \tag{1}$$

求导可得质心加速度

$$\begin{aligned} \ddot{x}_c &= \ddot{x} + l\ddot{\theta}cos\theta - l\dot{\theta}^2 sin\theta \\ \ddot{y}_c &= -l\ddot{\theta}sin\theta - l\dot{\theta}^2 cos\theta \end{aligned} \tag{2}$$

取小车为隔离体，如图，沿 x 轴有牛顿第二定律

$$F - b\dot{x} - N_x' = M\ddot{x} \tag{3}$$

取摆杆为隔离体，如图，沿 x, y 轴有牛顿第二定律和沿 θ 向动量矩定理

$$\begin{aligned} &N_y - mg = -m\ddot{y}_c \\ &N_x = m\ddot{x}_c \\ &N_y lsin\varphi + N_x lcos\varphi = I\ddot{\varphi} \end{aligned} \tag{4}$$

应用小量近似 $sinx \doteq x, cosx = 1 - \frac{x^2}{2}$ 以及 $\theta = \varphi + \pi$ 这个关系整理以上各式，可得倒立摆系统物理方程组

$$\begin{aligned} F &= (M+m)\ddot{x} - ml\ddot{\varphi} + b\dot{x} \\ (I + ml^2)\ddot{\varphi} &= ml\ddot{x} + mgl\varphi \end{aligned} \tag{5}$$

拉氏变换可得

$$\begin{aligned} (M+m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\varphi(s)s^2 &= F(s) \\ (I+ml^2)\varphi(s)s^2 - mgl\varphi((s) &= mlX(s)s^2 \end{aligned} \tag{6}$$

注意到小车加速度 $A(s) = X(s)s^2$

可得从小车角速度输入到摆杆角度输出的传递函数

$$\frac{\varphi(s)}{A(s)} = \frac{ml}{(I+ml^2)s^2 - mgl} \tag{7}$$

进一步整理, 可以得到力输入到摆杆角度和小车位移的传递函数

$$
\begin{aligned}
\frac{\varphi(s)}{F(s)} &= \frac{mls^2}{[(I+ml^2)(M+m)-m^2l^2]s^4+b(I+ml^2)s^3-(M+m)mgls^2-bmgls} \\
\frac{X(s)}{F(s)} &= \frac{(I+ml^2)s^2-mgl}{[(I+ml^2)(M+m)-m^2l^2]s^4+b(I+ml^2)s^3-(M+m)mgls^2-bmgls}
\end{aligned} \tag{8}
$$

将物理方程组进行等价变形，可以得到

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{bI+bml^2}{\Delta}\dot{x}+\frac{m^2gl^2}{\Delta}\varphi+\frac{I+ml^2}{\Delta}F \\
\ddot{\varphi} &= \frac{-mlb}{\Delta}\dot{x}+\frac{mg(M+m)l}{\Delta}\varphi+\frac{ml}{\Delta}F
\end{aligned} \tag{9}
$$

其中，$\Delta = I(M+m)+Mml^2$.

基于此，取 $z_1 = x, z_2 = \dot{x}, z_3 = \varphi, z_4 = \dot{\varphi}$ 为状态空间变量，以力 F 作为输入 u, 建立状态空间矩阵

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{bI+bml^2}{\Delta} & \frac{m^2gl^2}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{\Delta} & \frac{mg(M+m)l}{\Delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml^2}{\Delta} \\ 0 \\ \frac{ml}{\Delta} \end{bmatrix} u \\
\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u
\end{aligned} \tag{10}
$$

注意到该状态空间矩阵较为复杂，若取小车加速度作为输入 u'，可以简化该状态空间矩阵

根据转动惯量的定义式，并认为摆件质地均匀，有下式

$$
I = \frac{1}{12}m(2l)^2 \tag{11}
$$

带入整理，得

$$
\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}+\frac{3}{4l}\ddot{x} \tag{12}
$$

则可得较为简单的状态空间矩阵

$$
\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g}{4l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix} u'
$$

$$
\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u' \tag{13}
$$