



同濟大學  
TONGJI UNIVERSITY

## 基于MATLAB的 直线一级倒立摆控制系统的设计

组 别 : 第一组  
姓 名 : 李奇澳, 安泓宇, 覃栋鹏,  
郑光泽  
学 号 : 1853474, 1853255, 1850540,  
1851960  
所在院系 : 机械与能源工程学院  
学科门类 : 工学  
学科专业 : 机械设计制造及其自动化  
指导教师 : 于颖

二〇二〇年十二月

## 摘要

本文对直线一级倒立摆建立控制系统模型，根据技术参数和指标要求进行控制系统设计。首先对直线一级倒立摆进行动力学模型的建立，通过??方法对系统进行分析，从而得到系统状态空间方程。然后利用MATLAB分析系统的内在特性。本文利用LQR控制法和模糊控制法对直线一级倒立摆进行校正，从而得到了理想的输出结果，并进行了对比得出结论。

**关键词：**直线一级倒立摆，LQR，模糊控制，MATLAB

# 目录

主要符号对照表 .....	V
插图索引 .....	VI
表格索引 .....	VII
第1章 引言 .....	1
第2章 前期准备与相关工作 .....	2
2.1 前期准备 .....	2
2.1.1 LQR（线性二次型调节器） .....	2
2.1.2 模糊控制 .....	2
2.1.3 神经网络 .....	3
2.1.4 PID控制 .....	3
2.2 题目数据 .....	3
第3章 物理模型的建立和状态空间公式的推导 .....	4
3.1 模型假设与分析 .....	4
3.1.1 受力分析 .....	4
3.1.2 加速度分析 .....	4
3.1.3 传递函数求解 .....	5
3.2 状态空间求解 .....	6
第4章 用PID算法校正直线一级倒立摆系统 .....	8
4.1 PID控制分析 .....	8
4.1.1 PID介绍 .....	8
4.1.2 PID控制器原理性推导 .....	8
4.2 实验分析 .....	9
第5章 LQR .....	10
5.1 LQR线性二次型调节器 .....	10
5.1.1 LQR介绍 .....	10
5.1.2 LQR控制器原理性推导 .....	10
5.1.3 LQR的系统能控性和能观性分析 .....	11
5.1.4 小车系统权重的选取以及能控性能观性分析 .....	12
5.1.5 小车倒立摆仿真 .....	12
5.1.6 修改权重分析比较 .....	13
致谢 .....	17
附录 A 外文资料原文 .....	18
A.1 Single-Objective Programming .....	18
A.1.1 Linear Programming .....	19
A.1.2 Nonlinear Programming .....	20

A.1.3 Integer Programming .....	21
附录 B 外文资料的调研阅读报告或书面翻译 .....	22
B.1 单目标规划 .....	22
B.1.1 线性规划 .....	22
B.1.2 非线性规划 .....	23
B.1.3 整数规划 .....	23
附录 C 其它附录 .....	24
个人简历、在学期间发表的学术论文与研究成果 .....	25

## 主要符号对照表

$M$	小车质量
$m$	摆杆质量
$l$	摆杆质心到转动轴心的长度
$b$	摩擦比例系数
$I$	摆杆对质心的转动惯量
$T$	采样时间
$\phi$	摆杆与竖直向上方向间的夹角
$\theta$	摆杆与竖直向下方向间的夹角

## 插图索引

图 1.1	倒立摆系统 .....	1
图 2.1	任务计划甘特图 .....	2
图 3.1	小车受力分析 .....	4
图 3.2	摆杆受力分析 .....	5
图 4.1	PID原理图 .....	8
图 4.2	实验室倒立摆控制系统结构图 .....	9
图 5.1	<i>LQRsimulink</i> .....	13
图 5.2	模拟脉冲激励 .....	14
图 5.3	脉冲激励仿真结果 .....	14
图 5.4	阶跃激励仿真结果 .....	15

## 表格索引

表 2.1	题目参数.....	3
-------	-----------	---

## 第1章 引言

倒立摆系统是一个非线性自然不稳定系统，是进行控制理论教学及开展各种控制实验的理想实验平台。许多抽象的控制概念如控制系统的稳定性、可控性、系统收敛速度和系统抗干扰能力等，都可以通过倒立摆系统直观的表现出来。对其基础的理论控制以及算法的学习都有十分巨大的帮助。由于倒立摆本身所具有的高阶次，不稳定，多变量。非线性，和强耦合性，许多现代控制理论的研究人员一直将它作为典型的研究对象，不断从中发掘新的控制策略和控制算法，相关的科研成果在航天科技和机器人学方面获得广阔的应用。

本文通过两种不同的控制方法，即LQR控制方法与模糊控制方法，对直线一级倒立摆实现对手动的加速度脉冲输入的稳定性。其中，实验所用的倒立摆为固高科技公司的直线一级摆：直线倒立摆在直线运动模块（小车）上装有摆杆和角度编码器，直线运动模块有一个自由度，在伺服电机的驱动下可以沿导轨水平运动,如图 1.1所示。通过相关方法的处理，倒立摆能够通过调节位移和角度，保证对一定范围内扰动的鲁棒性，并最终实现摆杆竖直位置的保持。通过两种方法实验结果的比较，我们进一步得出了两种方法的优劣，并分析出了产生差异的原因。本文的主要贡献有：

- 分别利用LQR控制方法和模糊控制方法建立了直线一级倒立摆的控制系统；
- 通过比较LQR控制方法和模糊控制方法的效果，分析了两者的优劣。

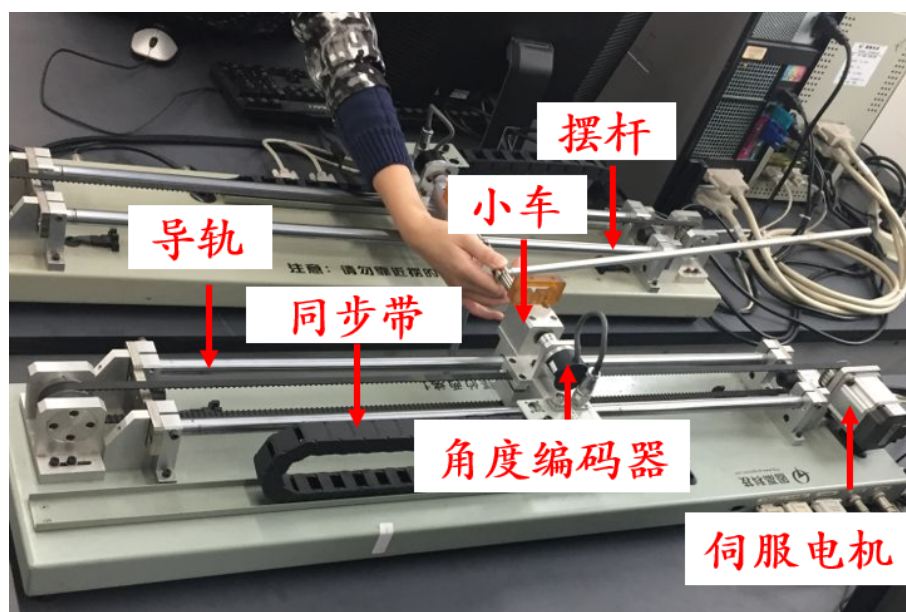


图 1.1 倒立摆系统



## 第2章 前期准备与相关工作

### 2.1 前期准备

倒立摆系统的控制，可以采用经典的PID控制方法，LQR控制，模糊控制法，神经网络控制算法，根轨迹控制算法等，我们组搜集了LQR，模糊算法，神经网络算法，以及PID相关方面的资料，进行比较整理，从四种方法中选取了LQR和模糊控制算法进行研究设计。并对研究内容，进度规划，报告，答辩进行了细致的分工，按照计划甘特图推进课程设计，如图 2.1所示。

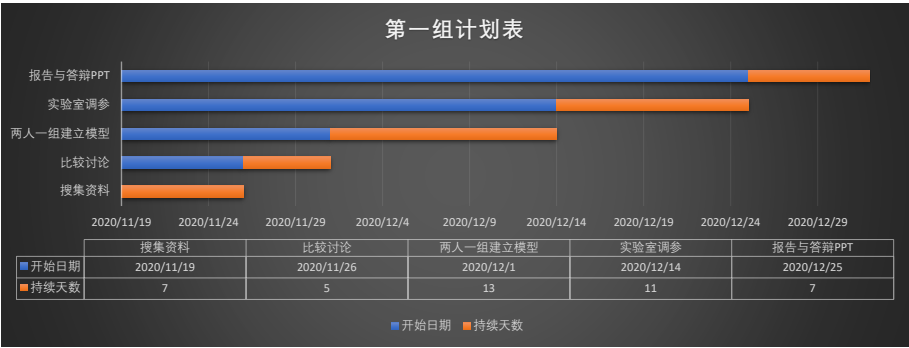


图 2.1 任务计划甘特图

根据查找的文献资料，我们简单总结了四种控制方法的优缺点，现罗列如下

#### 2.1.1 LQR（线性二次型调节器）

LQR具有较好的控制住摆杆，并且响应速度较快，具有超调量。该方法可以使目标函数达到最优，可以对能控系统进行任意的极点配置来满足所设计系统的性能要求，提高闭环系统的相对稳定性或者使不稳定系统得以镇定，同时具有较强的鲁棒性。但对小车的控制效果稍差，并且LQR需要调整两个矩阵，要求解Riccati方程确定Q和R权矩阵，算法复杂。

#### 2.1.2 模糊控制

基于模糊控制的方法使用语言方法，可不需要过程的精确数学模型；鲁棒性强，适于解决过程控制中的非线性、强耦合时变、滞后等问题；有较强的容错能力。具有适应受控对象动力学特征变化、环境特征变化和动行条件变化的能力。但是模糊控制的设计尚缺乏系统性，这对复杂系统的控制是难以奏效的。

难以建立一套系统的模糊控制理论，以解决模糊控制的机理、稳定性分析、系统化设计方法等一系列问题；如何获得模糊规则及隶属函数即系统的设计办法，完全凭经验进行；信息简单的模糊处理将导致系统的控制精度降低和动态品质变差。若要提高精度就必然增加量化级数，导致规则搜索范围扩大，降低决策速度，甚至不能进行实时控制。

### 2.1.3 神经网络

基于神经网络的算法属于非线性映射，能以任意精度逼近任何非线性连续函数，适合求解内部机制复杂问题。而且输入输出变量数目是任意的，具有自学习和自适应的能力，能过学习获取输出数据间的对应关系，将学习内容存储到网络权值中，具有容错能力，部分神经元受损对全局训练结果不会有很大影响。但是该方法存在实时性和自适应性相互矛盾的问题，不能保证快速性和有效性；并且权值容易收敛到局部最小点，收敛速度慢，隐含层数目难以确定，训练依赖样本数据，样本数据有采集难度。

### 2.1.4 PID控制

基于PID原理的控制系统结构简单，易于实现，使用方便，PID各参数相互独立，可以根据过程的动态特性及时调节；适用性强，可通过适当简化将非线性的、时变的被控对象变成基本线性和动态特性不随时间变化的系统，应用范围十分广泛，理论成熟。棒性较好，即其控制品质对被控对象特性的变化不太敏感。但是该方法稳定性差，在控制非线性、时变、耦合及参数和结构不确定的复杂过程时，效果不好。

## 2.2 题目数据

将题目的数据整理如表 2.1所示。

参数	意义	数值
$M$	小车质量	$1.096kg$
$m$	摆杆质量	$0.109kg$
$l$	摆杆质心到转动轴心的长度	$0.25m$
$b$	摩擦比例系数	$0.1N.s/m$
$I$	摆杆对质心的转动惯量	$0.0034kg.m^2$
$T$	采样时间	$0.005s$

表 2.1 题目参数

## 第3章 物理模型的建立和状态空间公式的推导

### 3.1 模型假设与分析

#### 3.1.1 受力分析

为了建立物理模型，现有如下假设：1、摆杆质量均匀，质心位于其几何中心处 2、忽略除 $b$ 以外的所有摩擦力

如图3.1对小车进行受力分析，以摆杆和小车交点为原点，以水平向右和竖直向下为正方向建立坐标系，沿 $x$ 轴有牛顿第二定律

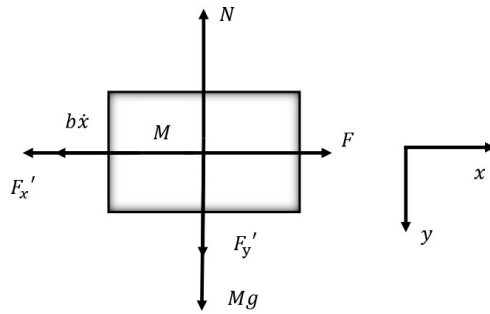


图 3.1 小车受力分析

$$F - b\dot{x} - N'_x = M\ddot{x} \quad (3.1)$$

如图3.2对摆杆进行受力分析，沿 $x, y$ 轴有牛顿第二定律和沿 $\theta$ 向动量矩定理摆杆质心 $c$ 点

$$\begin{aligned} x_c &= x + l\sin\theta \\ y_c &= l\cos\theta \end{aligned} \quad (3.2)$$

#### 3.1.2 加速度分析

求导可得质心加速度

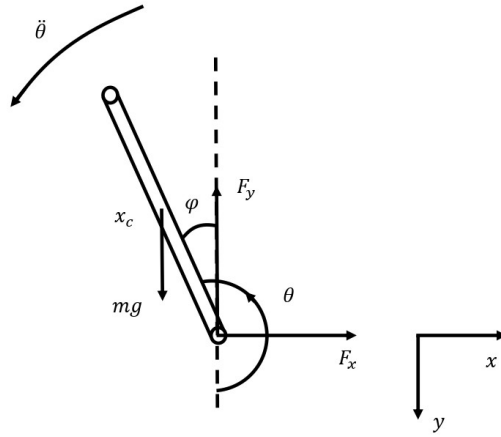


图 3.2 摆杆受力分析

$$\begin{aligned}\ddot{x}_c &= \ddot{x} + l\ddot{\theta}\cos\theta - l\dot{\theta}^2\sin\theta \\ \ddot{y}_c &= -l\ddot{\theta}\sin\theta - l\dot{\theta}^2\cos\theta\end{aligned}\quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}N_y - mg &= -m\ddot{y}_c \\ N_x &= m\ddot{x}_c \\ N_y l \sin\varphi + N_x l \cos\varphi &= I\ddot{\varphi}\end{aligned}\quad (3.4)$$

应用小量近似  $\sin x \doteq x, \cos x = 1 - \frac{x^2}{2}$  以及  $\theta = \varphi + \pi$  这个关系整理以上各式, 可得倒立摆系统物理方程组

$$\begin{aligned}F &= (M + m)\ddot{x} - ml\ddot{\varphi} + b\dot{x} \\ (I + ml^2)\ddot{\varphi} &= ml\ddot{x} + mgl\varphi\end{aligned}\quad (3.5)$$

### 3.1.3 传递函数求解

拉氏变换可得

$$\begin{aligned}(M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\varphi(s)s^2 &= F(s) \\ (I + ml^2)\varphi(s)s^2 - mgl\varphi(s) &= mlX(s)s^2\end{aligned}\quad (3.6)$$

注意到小车加速度  $A(s) = X(s)s^2$

可得从小车角速度输入到摆杆角度输出的传递函数

$$\frac{\varphi(s)}{A(s)} = \frac{ml}{(I + ml^2)s^2 - mgl}\quad (3.7)$$

进一步整理,可以得到力输入到摆杆角度和小车位移的传递函数

$$\begin{aligned}\frac{\varphi(s)}{F(s)} &= \frac{m l s^2}{[(I + m l^2)(M + m) - m^2 l^2] s^4 + b(I + m l^2) s^3 - (M + m) m g l s^2 - b m g l s} \\ \frac{X(s)}{F(s)} &= \frac{(I + m l^2) s^2 - m g l}{[(I + m l^2)(M + m) - m^2 l^2] s^4 + b(I + m l^2) s^3 - (M + m) m g l s^2 - b m g l s}\end{aligned}\quad (3.8)$$

### 3.2 状态空间求解

将物理方程组进行等价变形, 可以得到

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= -\frac{bI + bml^2}{\Delta} \dot{x} + \frac{m^2 g l^2}{\Delta} \varphi + \frac{I + ml^2}{\Delta} F \\ \ddot{\varphi} &= \frac{-mlb}{\Delta} \dot{x} + \frac{mg(M+m)l}{\Delta} \varphi + \frac{ml}{\Delta} F\end{aligned}\quad (3.9)$$

其中,  $\Delta = I(M + m) + Mml^2$ .

基于此, 取  $z_1 = x, z_2 = \dot{x}, z_3 = \varphi, z_4 = \dot{\varphi}$  为状态空间变量, 以力  $F$  作为输入  $u$ , 建立状态空间矩阵

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{\dot{x}} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\dot{\varphi}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{bI+bml^2}{\Delta} & \frac{m^2 g l^2}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-mlb}{\Delta} & \frac{mg(M+m)l}{\Delta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{I+ml^2}{\Delta} \\ 0 \\ \frac{ml}{\Delta} \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u\end{aligned}\quad (3.10)$$

注意到该状态空间矩阵较为复杂, 若取小车加速度作为输入  $u'$ , 可以简化该状态空间矩阵

根据转动惯量的定义式, 并认为摆件质地均匀, 有下式

$$I = \frac{1}{12} m (2l)^2 \quad (3.11)$$

带入整理, 得

$$\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\phi + \frac{3}{4l}\ddot{x} \quad (3.12)$$

则可得较为简单的状态空间矩阵

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g}{4l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix} u' \\ \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u' \end{aligned} \quad (3.13)$$

代入数据可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u' \\ \begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u' \end{aligned} \quad (3.14)$$

## 第4章 用PID算法校正直线一级倒立摆系统

### 4.1 PID控制分析

#### 4.1.1 PID介绍

PID控制就是用线性组合的方式，把偏差的比例 $P$ 、积分 $I$ 、微分 $D$ 组合构成控制量。对被控对象展开控制的方法。在PID控制器中，通过比例单元 $P$ 将偏差进行比例放大得到输出，但通过这一过程无法消除余差，因此加以积分单元 $I$ ，积分依照偏差累计，只要当偏差不为0时，积分值就不为0，考虑到偏差变化有速度快慢之分，加以微分单元 $D$ ，计算偏差变化的速率，PID控制就是综合使用这三个单元来控制被控变量。其原理控制示意图如图4.1所示。

#### 4.1.2 PID控制器原理性推导

PID控制器是一种线性控制器，其根据给定值 $r(t)$ 与实际输出值 $y(t)$ 构成的控制偏差 $e(t)$ 为：

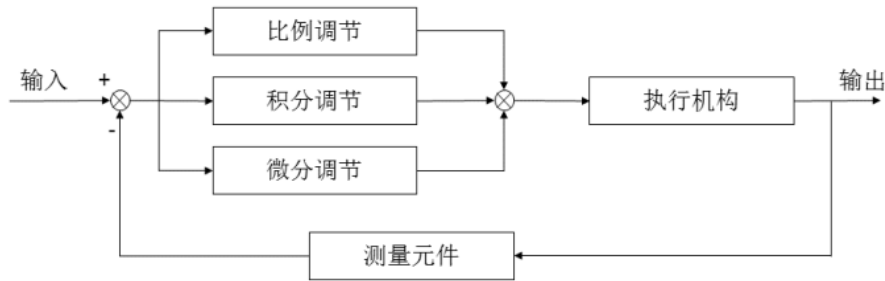


图 4.1 PID原理图

$$e(t) = r(t) - y(t) \quad (4.1)$$

其输入控制偏差 $e(t)$ 与输出控制结果 $u(t)$ 的关系为：

$$u(t) = K_p e(t) + K_I \int_0^t e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (4.2)$$

上式进行拉氏变换，得其传递函数为：

$$\begin{aligned}
G(s) &= \frac{U(s)}{E(s)} \\
&= K_p + \frac{1}{K_I s} + K_D s \\
&= \frac{K(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}{s}
\end{aligned} \tag{4.3}$$

其中， $K_p e(t)$ 为比例环节，随着 $K_p$ 的增加，可以更好地减小偏差，但同时 $K_p$ 还影响系统的稳定性， $K_p$ 增加通常导致系统的稳定性下降，过大的 $K_p$ 往往使系统产生剧烈的震荡和不稳定。

$K_I \int_0^t e(t)dt$ 为积分环节，消除系统静态误差，作用的强弱由 $K_I$ 决定， $K_I$ 越大，积分作用越强，反之则越弱，但同时积分环节也可能增大系统超调量。

$K_D \frac{de(t)}{dt}$ 为微分环节，针对被测量的变化速率来进行调节，预测偏差信号的变化趋势，在其出现较大变化之前引入修正信号与之低效，从而减小系统的调节时间。

## 4.2 实验分析

实验室倒立摆控制系统结构图如图 4.2所示。

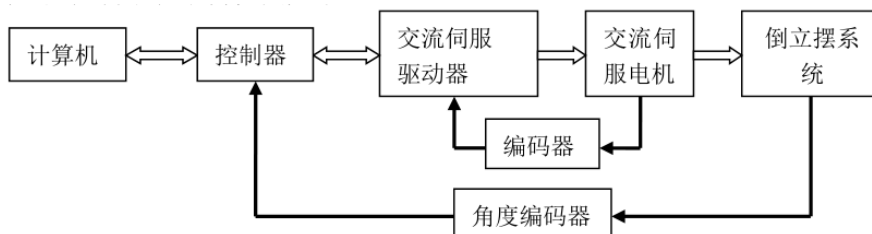


图 4.2 实验室倒立摆控制系统结构图

修改PID各项参数，通过角度编码器测量摆杆的摆动角度，通过伺服电机控制小车的位移速度和加速度，通过控制器利用摆杆的惯性力控制摆杆的位移速度和加速度，从而控制摆杆的角度，最终可以实现直线倒立摆的竖直稳定。

当其受到外界干扰时，在干扰停止作用后，系统能够很快地回到平衡位置。但是，整个控制系统中并无小车位移的反馈，只能通过角度编码器获取摆杆的角度，通过传动比转换近似得到小车的位移。因此PID控制器无法对小车的位置偏差进行修正，不能对小车的位置进行控制，当受到扰动时，小车会沿滑轨一直向扰动方向运动，撞到滑轨边缘，无法恢复到初始平衡位置。后续考虑使用其它控制方法，既能实现直线倒立摆的竖直稳定，又可以控制小车位置的稳定不变。



## 第5章 LQR线性二次型调节器

### 5.1 LQR介绍

LQR(linear quadratic regulator)线性二次型调节器, 利用现代控制理论中以状态空间矩阵形式给出的线性系统, 利用目标函数(能量函数) $J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru)dt$  (其中 $Q$ 为半正定矩阵,  $R$ 为正定矩阵), 设计状态反馈控制器 $K$ 使得目标函数的值最小。LQR控制器可以在系统偏离平衡状态时, 尽可能减少消耗的能量保持系统状态各分量仍接近平衡状态. 以一维系统 $X = x(t)$ 为例, 则 $x^T Qx = Qx^2$ , 为了使得 $J$ 最小, 那么该函数一定有界, 故有下式

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad (5.1)$$

这保证了系统的稳定性, 类似的 $u(t)$ 小保证了节省能量, 控制代价降低。

### 5.2 LQR控制器原理性推导与分析

#### 5.2.1 LQR控制器原理性推导

线性系统的状态空间可以描述为

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + Bu \\ Y &= CX + Du \end{aligned} \quad (5.2)$$

评价函数为

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x^T Qx + u^T Ru)dt \quad (5.3)$$

$Q \Delta R$ 分别是对状态变量和输入量的加权矩阵, 确定误差和能量损耗的相对性。

根据极小值原理, 引入 $n$ 维协态矢量 $\lambda(t)$ , 构造哈密顿函数

$$H(x, u, \lambda) = \frac{1}{2} [x^T Qx + u^T Ru] + \lambda^T [Ax + Bu] \quad (5.4)$$

最优控制使得 $H$ 取极值，即

$$\frac{\partial H}{\partial u} = Ru + B^T \lambda = 0 \quad (5.5)$$

解得

$$u = -R^{-1} B^T \lambda \quad (5.6)$$

又有

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = R \quad (5.7)$$

$R$ 正定，故上式为系统的最优控制律。

设 $\lambda = Px$ ,  $P$ 为 $n$ 阶实对称正定矩阵，且满足黎卡提矩阵代数方程

$$-PA - A^T P + PBR^{-1}B^T - Q_1 = 0 \quad (5.8)$$

则最优控制

$$u = -R^{-1} B^T \lambda = -Kx \quad (5.9)$$

系统最优轨线为

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) \quad (5.10)$$

在 $matlab$ 中可以利用 $lqr$ 函数求得反馈矩阵 $K$ 。

### 5.2.2 LQR的系统能控性和能观性分析

对于上面假设的线性系统，状态完全能控制的充要条件是

$$\text{rank}[B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B] = n \quad (5.11)$$

系统状态能够完全观测的充要条件是

$$\text{rank} \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} = n \quad (5.12)$$

### 5.2.3 小车系统权重的选取以及能控性能观性分析

前面得到小车的状态空间方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u' \quad (5.13)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u'$$

在 $matlab$ 中(代码见附录)进行矩阵秩计算可知两个判定矩阵的秩都是4,则小车倒立摆系统可控可观测。

### 5.2.4 小车倒立摆仿真

首先根据系统的运动微分方程在 $matlab$ 中的 $simulink$ 进行仿真, 由上述矩阵导出参考方程,为方便, 将一些量名称更改如下

$$\begin{aligned} \dot{x} &\rightarrow \dot{x}_1 \\ \ddot{x} &\rightarrow \dot{x}_2 \\ \dot{\varphi} &\rightarrow \dot{x}_3 \\ \ddot{\varphi} &\rightarrow \dot{x}_4 \end{aligned} \quad (5.14)$$

则有

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= u \\
 \dot{x}_3 &= x_4 \\
 \dot{x}_4 &= 29.4x_3 + 3u \\
 u &= -k_1x_1 - k_2x_2 - k_3x_3 - k_4x_4
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

得到如图 5.1 的仿真

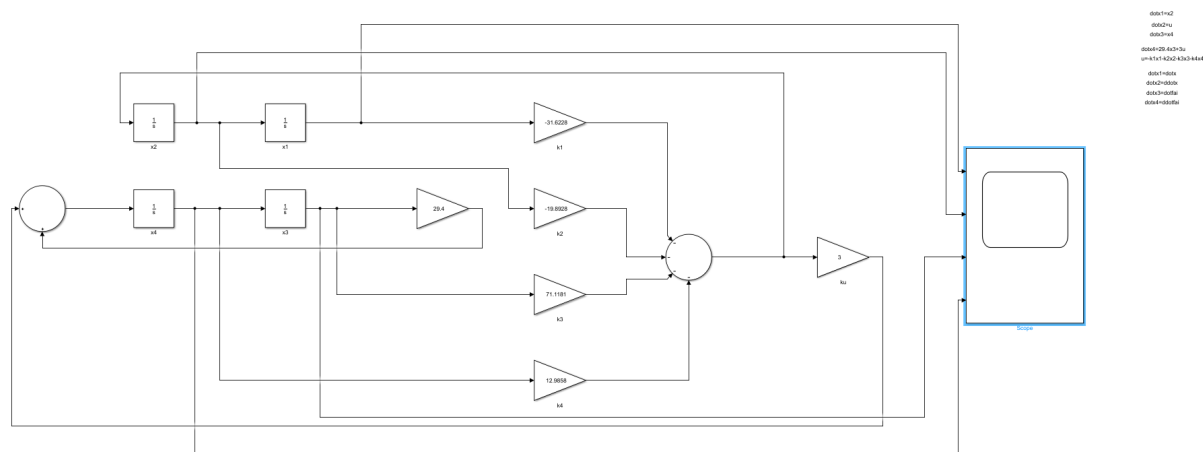


图 5.1 *LQRsimulink*

这种仿真可以通过给定 $x_i$ 的初始值来模拟脉冲激励

给定小车5单位位移，摆杆5单位角度,可以得到如图5.3的响应曲线。

可以发现系统可以稳定。关于修改权重以及关于曲线的比较分析在后面介绍。

此外也可以利用编程来模拟仿真，以`lsim`函数模拟的阶跃信号为例，编写代码（见附件）也可以得到响应曲线如图5.4。

### 5.2.5 修改权重分析比较

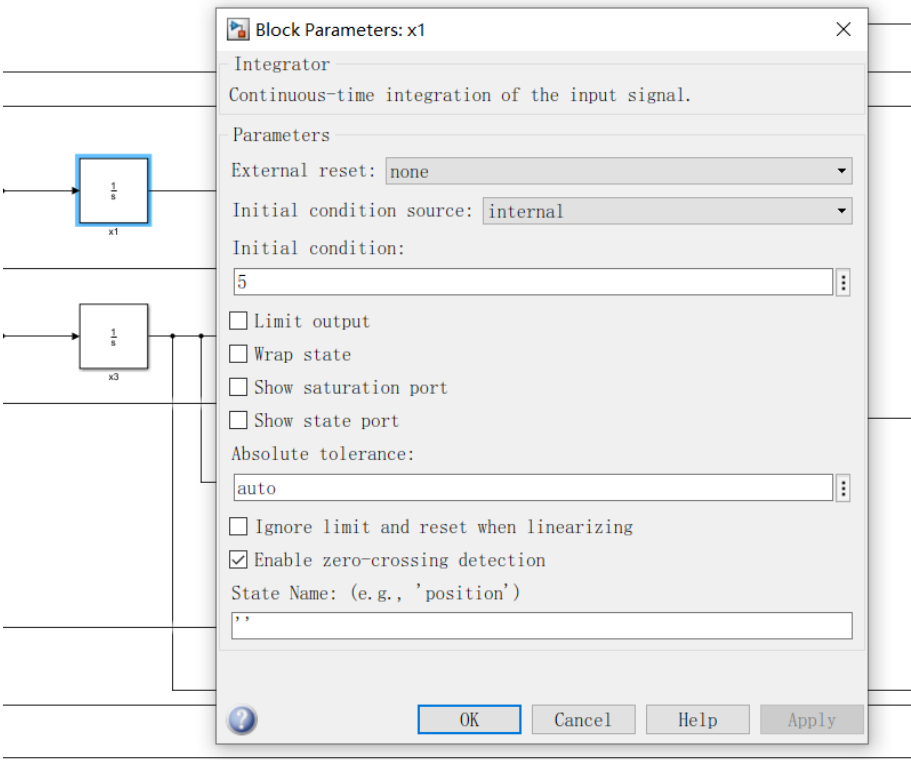


图 5.2 模拟脉冲激励

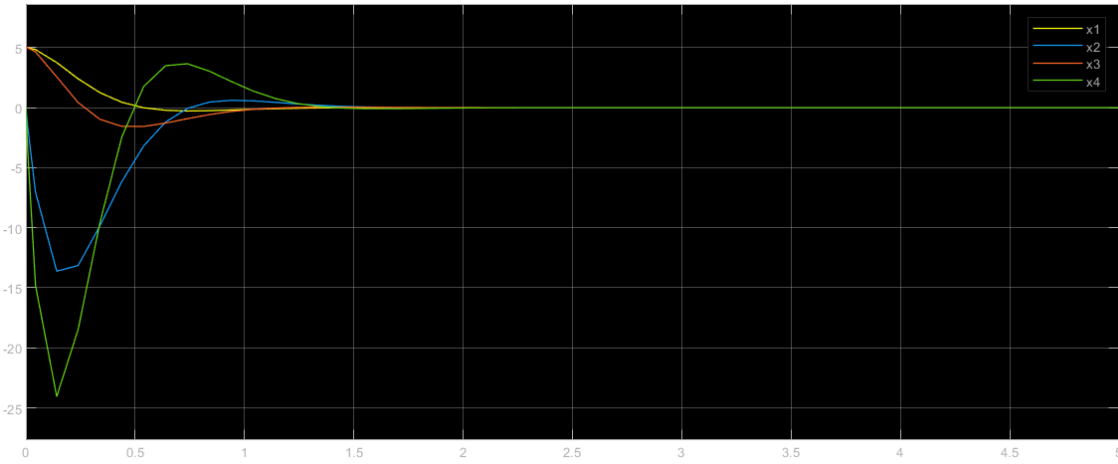


图 5.3 脉冲激励仿真结果

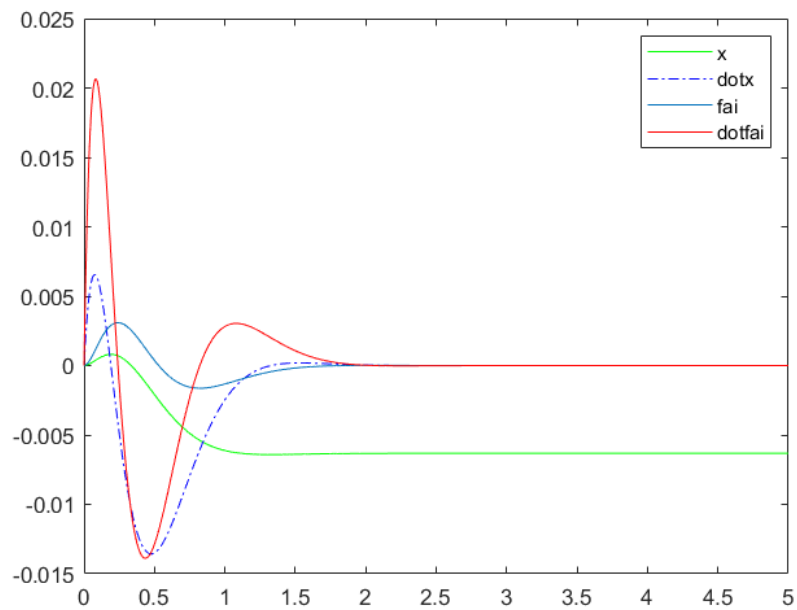


图 5.4 阶跃激励仿真结果

## 附录

```

1 A=[0 1 0 0;
2     0 0 0 0;
3     0 0 0 1;
4     0 0 29.4 0];
5 B=[0 1 0 3]';
6 C=[1 0 0 0;
7     0 0 0 1];
8 D=[0 0]';
9 Co=ctrb(A,B);
10 rank(Co)
11 Ob=obsv(A,C);
12 rank(Ob)

```

```

1 A=[0 1 0 0;0 0 0 0;0 0 0 1;0 0 29.4 0];
2 B=[0 1 0 3]';
3 C=[1 0 0 0;0 0 1 0];
4 D=[0 0]';
5 Q11=1000;
6 Q33=100;
7 Q=[Q11 0 0 0;0 0 0 0;0 0 Q33 0;0 0 0 0];
8 R=1;
9 K=lqr(A,B,Q,R);
10 Ac=(A-B*K);
11 T=0:0.001:5;
12 U=0.2*ones(size(T));

```

```
13 [Y,X]=lsim(Ac,B,C,D,U,T);
14 plot(T,X(:,1),'-g','LineWidth',1);
15 hold on;
16 plot(T,X(:,2),'-.b','LineWidth',1);
17 plot(T,X(:,3),'-', 'LineWidth',1);
18 plot(T,X(:,4),'-r','LineWidth',1);
19 hold off;
20 legend('x','dotx','fai','dotfai');
```