# 第3章　物理模型的建立和状态空间公式的推导

## 3.1　模型假设与分析

### 3.1.1　受力分析

为了建立物理模型，现有如下假设： 1、摆杆质量均匀，质心位于其几何中心处 2、忽略除b以外的所有摩擦力

如图3.1对小车进行受力分析，以摆杆和小车交点为原点，以水平向右和竖直向下为正方向建立坐标系，沿$x$轴有牛顿第二定律

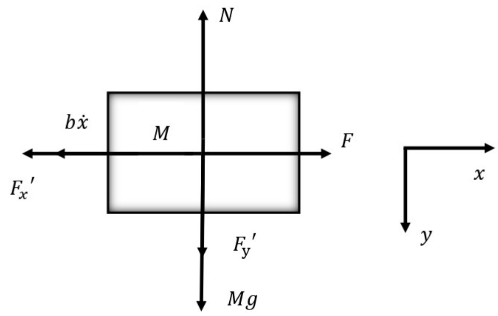


图 3.1　小车受力分析

$$F - b\dot{x} - N_x^{'} = M\ddot{x} \tag{3.1}$$

如图3.2对摆杆进行受力分析，沿$x, y$轴有牛顿第二定律和沿$\theta$向动量矩定理摆杆质心$c$点

$$\begin{aligned} x_c &= x + l sin\theta \\ y_c &= l cos\theta \end{aligned} \tag{3.2}$$

求导可得质心加速度

$$\begin{aligned} \ddot{x}_c &= \ddot{x} + l\ddot{\theta} cos\theta - l\dot{\theta}^2 sin\theta \\ \ddot{y}_c &= -l\ddot{\theta} sin\theta - l\dot{\theta}^2 cos\theta \end{aligned} \tag{3.3}$$

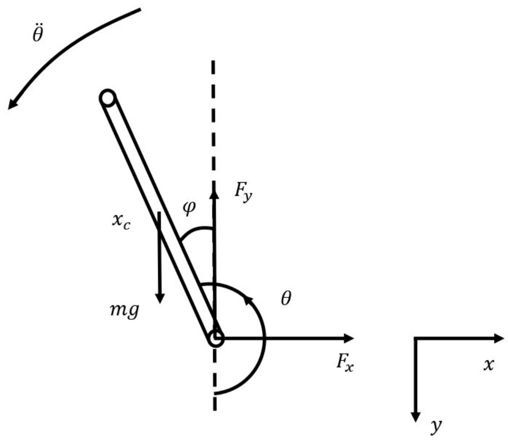


图 3.2 摆杆受力分析

$$
\begin{aligned}
&N_y - mg = -m\ddot{y}_c \\
&N_x = m\ddot{x}_c \\
&N_y l sin\varphi + N_x l cos\varphi = I\ddot{\varphi}
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

应用小量近似$sinx \doteq x, cosx = 1 - \frac{x^2}{2}$以及$\theta = \varphi + \pi$这个关系整理以上各式，可得倒立摆系统物理方程组

$$
\begin{aligned}
&F = (M + m)\ddot{x} - ml\ddot{\varphi} + b\dot{x} \\
&(I + ml^2)\ddot{\varphi} = ml\ddot{x} + mgl\varphi
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

### 3.1.2 传递函数求解

拉氏变换可得

$$
\begin{aligned}
&(M + m)X(s)s^2 + bX(s)s - ml\varphi(s)s^2 = F(s) \\
&(I + ml^2)\varphi(s)s^2 - mgl\varphi((s) = mlX(s)s^2
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

注意到小车加速度$A(s) = X(s)s^2$

可得从小车角速度输入到摆杆角度输出的传递函数

$$
\frac{\varphi(s)}{A(s)} = \frac{ml}{(I + ml^2)s^2 - mgl} \tag{3.7}
$$

进一步整理,可以得到力输入到摆杆角度和小车位移的传递函数

$$
\begin{aligned}
\frac{\varphi(s)}{F(s)} &= \frac{mls^2}{[(I+ml^2)(M+m)-m^2l^2]s^4+b(I+ml^2)s^3-(M+m)mgls^2-bmgls} \\
\frac{X(s)}{F(s)} &= \frac{(I+ml^2)s^2-mgl}{[(I+ml^2)(M+m)-m^2l^2]s^4+b(I+ml^2)s^3-(M+m)mgls^2-bmgls}
\end{aligned}
\tag{3.8}
$$

## 3.2　状态空间求解

将物理方程组进行等价变形，可以得到

$$
\begin{aligned}
\ddot{x} &= -\frac{bI+bml^2}{\Delta}\dot{x}+\frac{m^2gl^2}{\Delta}\varphi+\frac{I+ml^2}{\Delta}F \\
\ddot{\varphi} &= \frac{-mlb}{\Delta}\dot{x}+\frac{mg(M+m)l}{\Delta}\varphi+\frac{ml}{\Delta}F
\end{aligned}
\tag{3.9}
$$

其中，$\Delta = I(M+m)+Mml^2$.

基于此，取$z_1 = x, z_2 = \dot{x}, z_3 = \varphi, z_4 = \dot{\varphi}$为状态空间变量，以力$F$作为输入$u$,建立状态空间矩阵

$$
\begin{aligned}
\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \ddot{x}\\ \dot{\varphi}\\ \ddot{\varphi}\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -\frac{bI+bml^2}{\Delta} & \frac{m^2gl^2}{\Delta} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & \frac{-mlb}{\Delta} & \frac{mg(M+m)l}{\Delta} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \varphi\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ \frac{I+ml^2}{\Delta}\\ 0\\ \frac{ml}{\Delta}\end{bmatrix}u \\
\begin{bmatrix}x\\ \varphi\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ \dot{x}\\ \varphi\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 0\end{bmatrix}u
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

注意到该状态空间矩阵较为复杂，若取小车加速度作为输入$u'$，可以简化该状态空间矩阵

根据转动惯量的定义式，并认为摆件质地均匀，有下式

$$
I = \frac{1}{12}m(2l)^2 \tag{3.11}
$$

带入整理，得

$$
\ddot{\varphi} = \frac{3g}{4l}\phi+\frac{3}{4l}\ddot{x} \tag{3.12}
$$

则可得较为简单的状态空间矩阵

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{3g}{4l} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \frac{3}{4l} \end{bmatrix} u'$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u' \tag{3.13}$$

代入数据可得

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \dot{\varphi} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 29.4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u'$$

$$\begin{bmatrix} x \\ \varphi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \varphi \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u' \tag{3.14}$$