同濟大學

机械振动课程大作业（二）

学院 机械与能源工程学院

专业 机械设计制造及其自动化

学号 1851960

姓名 郑光泽

指导教师 朱传敏

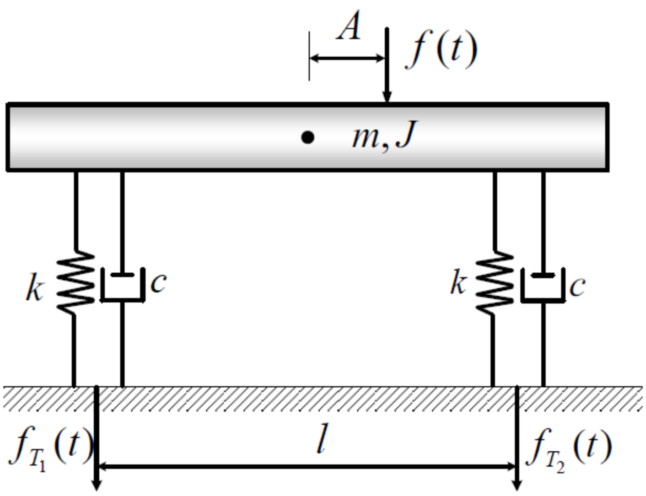
完成日期 2020 年 12 月 20 日

目 录

一、题目要求

如图是一个二自由度振动系统。惯性元件为一个质心位于中心的刚体，其质量为m，对质心的转动惯量为J；k、c代表支撑刚度和支撑阻尼；刚体受集中力$f(t)$的作用，集中力到刚体质心的距离为A，$f_{T_1}(t)$和$f_{T_2}(t)$代表左右两边传递给基础的振动力，传递给基础的合力为$f_{T_S}(t) = f_{T_1}(t) + f_{T_2}(t)$。该振动模型中的相关参数如下：

$$l = 2\ m$$
$$A = (0.3 + \frac{N_3}{40})\ m$$
$$m = (10 + N_1)\ kg$$
$$J = (2 + \frac{N_2}{6})\ kg \cdot m^2$$
$$k = 1000\ N/m$$
$$c = 5\ N \cdot s/m$$



图一：题图

作业要求：

1. 选择系统的广义坐标（在图上标出），列出矩阵形式的系统运动方程；
2. 针对 1）$f(t) = 50\sin(\pi t)\,N$； 2）$f(t) = 100\sin\,(4\pi t + \frac{\pi}{2})\,N$ 两种激励情况分别求系统广义坐标和传递力$f_{T_1}(t)$和$f_{T_2}(t)$的稳态响应；

3．推导频率响应特性 $H_{f,f_{T_1}}(w)$、$H_{f,f_{T_2}}(w)$ 和 $H_{f,f_{T_s}}(w)$ 的求解公式，并通过电算作出它们在 $0\sim20\pi\ rad/s$ 以内的幅频特性和相频特性曲线；

4．如果激励 $f(t)$ 为非简谐激励，其幅值谱密度 $F(w)$ 的幅值 $|F(w)|$ 在频域分布为：

$$|F(w)| = \begin{cases} 10(1-cos0.1w) & w \le 20\pi \\ 0 & w > 20\pi \end{cases} \qquad N/Hz$$

通过电算作出传递给基础的振动力的幅值谱密度幅值在 $0\sim20\pi\ rad/s$ 以内的图线；

5．针对（4）的激励情况，如果只改变阻尼器，则阻尼系数 c 取多少可以使得传递给基础的振动力 $f_{T_s}(t)$ 总体较小，并作出新的阻尼系数 c 对应的传递给基础的振动力 $f_{T_s}(t)$ 稳态响应的幅值谱密度幅值 $\left|F_{T_s}(w)\right|$ 图线。

二、确定初始参数

根据学号，可计算N_1、N_2、N_3、N_4 参数如下：

$$N_1 = mod(1851960,5) = 0$$

$$N_2 = mod(1851960,7) = 5$$

$$N_3 = mod(1851960,9) = 3$$

$$N_4 = mod(1851960,11) = 0$$

进一步地，模型中的相关参数计算如下：

$$l = 2\ m$$

$$m = 10 + N_1\ kg = (10+0)\ kg = 10\ kg$$

$$A = 0.3 + \frac{N_3}{40} m = \left(0.3 + \frac{3}{40}\right) m = 0.375\ m$$

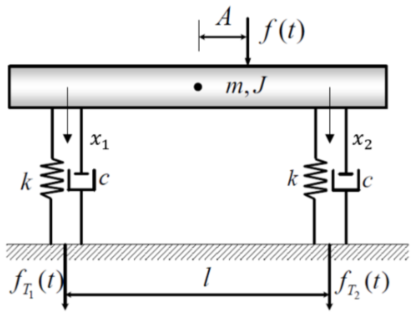
$$J = 2 + \frac{N_2}{6}\ kg\cdot m^2 = \left(2 + \frac{5}{6}\right) kg\cdot m^2 = \frac{17}{6}\ kg\cdot m^2$$

$$k = 1000\ N/m$$

$$c\ = 5\ N\cdot s/m$$

三、题目解答

3.1 问题 1



取平衡位置为平衡点，刚体的质心位移和刚体转角为广义坐标，则：

系统的动能函数为：

$$E_k = \frac{1}{2}\left[m\cdot\left(\frac{\dot{x_1}+\dot{x_2}}{2}\right)^2 + J\cdot\left(\frac{\dot{x_1}-\dot{x_2}}{l}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{m}{4}+\frac{J}{l^2}\right)\dot{x_1}^2 + \left(\frac{m}{4}+\frac{J}{l^2}\right)\dot{x_2}^2 + \left(\frac{m}{2}-\frac{2J}{l^2}\right)x_1\dot{x_2}\right]$$

质量矩阵为：

$$[M] = \begin{bmatrix} \frac{m}{4}+\frac{J}{l^2} & \frac{m}{4}-\frac{J}{l^2} \\ \frac{m}{4}-\frac{J}{l^2} & \frac{m}{4}+\frac{J}{l^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.208 & 1.791 \\ 1.791 & 3.208 \end{bmatrix}\ kg$$

系统的势能函数为：

$$E_p = \frac{1}{2}(k{x_1}^2 + k{x_2}^2) = 500({x_1}^2 + {x_2}^2)$$

刚度矩阵为：

$$[K] = \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}\ N/m$$

阻尼矩阵为：

$$[C] = \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\ N\cdot s/m$$

广义力为：

$$\{p(t)\} = \begin{Bmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\frac{1}{2} - \frac{A}{l}) \cdot f(t) \\ (\frac{1}{2} + \frac{A}{l}) \cdot f(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3125 \\ 0.6875 \end{Bmatrix} f(t)$$

系统的运动方程为：

$$[M]\{\ddot{x}\} + [C]\{\dot{x}\} + [K]\{x\} = \{p(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{m}{4} + \frac{J}{l^2} & \frac{m}{4} - \frac{J}{l^2} \\ \frac{m}{4} - \frac{J}{l^2} & \frac{m}{4} + \frac{J}{l^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} (\frac{1}{2} - \frac{A}{l}) \cdot f(t) \\ (\frac{1}{2} + \frac{A}{l}) \cdot f(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3.208 & 1.791 \\ 1.791 & 3.208 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.3125 \\ 0.6875 \end{Bmatrix} f(t)$$

系统运动的特征方程为：

$$|-w_n{}^2[M] + [K]| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1000 - 3.208w_n{}^2 & -1.791w_n{}^2 \\ -1.791w_n{}^2 & 1000 - 3.208w_n{}^2 \end{vmatrix} = 0$$

化简可得：

$$(1000 - 3.208w_n{}^2)^2 - (1.791w_n{}^2)^2 = 0$$

$$7.084\, w_n{}^4 - 6416\, w_n{}^2 + 1000000 = 0$$

解得：

$$w_{n1} = 26.564\ rad/s$$

$$w_{n2} = 14.144\ rad/s$$

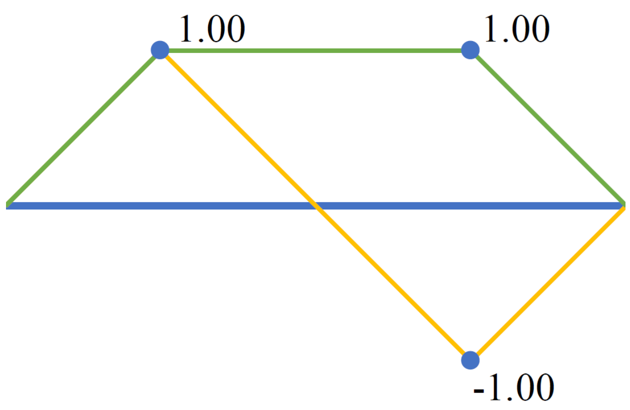
通过$[Z(w_{ni})]\{u_i\} = 0$，可求得固有频率对应的特征向量为：

$$\{u_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}，\{u_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

由此可得阵型矩阵为：

$$[u] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

由此，主振型图示如下：



图二：主振型图示

3.2 问题 2

系统运动的阻抗矩阵为：

$$[Z(w)] = -w^2[M] + wj[C] + [K]$$

$$= -w^2\begin{bmatrix}3.208 & 1.791\\1.791 & 3.208\end{bmatrix} + wj\begin{bmatrix}5 & 0\\0 & 5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1000 & 0\\0 & 1000\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}-3.208w^2 + 5wj + 1000 & -1.791w^2\\-1.791w^2 & -3.208w^2 + 5wj + 1000\end{bmatrix}$$

频率响应矩阵为：

$$[H_{p,x}(w)] = [Z(w)]^{-1}$$

$$= \frac{1}{[7.084w^4 - 6441w^2 + 10^6 - (32.081w^3 - 10^4w)j]}$$

$$\begin{bmatrix}-3.208w^2 + 5wj + 1000 & 1.791w^2\\1.791w^2 & -3.208w^2 + 5wj + 1000)\end{bmatrix}$$

1）当$f(t) = 50si\,n(\pi t)\,N$时

$$\{p(t)\} = \begin{Bmatrix}0.3125\\0.6875\end{Bmatrix}f(t) = \begin{Bmatrix}15.625\sin(\pi t)\\34.375\sin(\pi t)\end{Bmatrix}$$

转换为复数形式：

$$\{p(t)\} = \begin{Bmatrix}15.625\\34.375\end{Bmatrix}$$

将 $w=\pi\ rad/s$ 代入，可得：

阻抗矩阵为：

$$[Z(\pi)]=\begin{bmatrix}-3.208\pi^2+5\pi j+1000 & -1.791\pi^2\\ -1.791\pi^2 & -3.208\pi^2+5\pi j+1000\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}968.338+15.708j & -17.676\\ -17.676 & 968.338+15.708j\end{bmatrix}$$

频响矩阵为：

$$[H_{p,x}(w)]=[Z(w)]^{-1}=\begin{bmatrix}103.287-1.676j & 1.884-0.0612j\\ 1.884-0.0612j & 103.287-1.676j\end{bmatrix}\times 10^{-5}$$

系统的广义坐标稳态响应为：

$$\begin{Bmatrix}x_1\\ x_2\end{Bmatrix}=[H_{p,x}(\pi)]\cdot\{p(t)\}$$

$$=\begin{bmatrix}103.287-1.676i & 1.884-0.0612i\\ 1.884-0.0612i & 103.287-1.676i\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}15.625\\ 34.375\end{Bmatrix}\times 10^{-5}$$

$$=\begin{Bmatrix}1678.622-28.291j\\ 3579.928-58.569j\end{Bmatrix}\times 10^{-5}$$

$$=\begin{Bmatrix}1678.860\sin(\pi t-0.96555^\circ)\\ 3580.407\sin(\pi t-0.93730^\circ)\end{Bmatrix}\times 10^{-5}$$

即：

$$\begin{cases}x_1(t)=1678.860\sin(\pi t-0.96555^\circ)\times 10^{-5} \quad m\\ x_2(t)=3580.407\sin(\pi t-0.93730^\circ)\times 10^{-5} \quad m\end{cases}$$

传递力的稳态响应为：

$$f_{T_1}(t)=kx_1(t)+c\dot{x}_1(t)=16.791\sin(\pi t-0.06562^\circ) \qquad N$$

$$f_{T_2}(t)=kx_2(t)+c\dot{x}_2(t)=35.809\sin(\pi t-0.03737^\circ) \qquad N$$

2）当 $f(t)=100sin\ (4\pi t+\frac{\pi}{2})\ N$

$$\{p(t)\}=\begin{Bmatrix}0.3125\\ 0.6875\end{Bmatrix}f(t)=\begin{Bmatrix}31.25sin\ (4\pi t+\dfrac{\pi}{2})\\ 68.75sin\ (4\pi t+\dfrac{\pi}{2})\end{Bmatrix}$$

转换为复数形式：

$$\{p(t)\}=\begin{Bmatrix}31.25j\\68.75j\end{Bmatrix}$$

将$w=4\pi\ rad/s$ 代入，可得：

阻抗矩阵为：

$$[\,Z(4\pi)\,]=\begin{bmatrix}-51.328\pi^2+20\pi j+1000 & -28.656\pi^2\\-28.656\pi^2 & -51.328\pi^2+20\pi j+1000\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}493.413+62.832j & -282.823\\-282.823 & 493.413+62.832j\end{bmatrix}$$

频响矩阵为：

$$\left[H_{p,x}(w)\right]=[Z(w)]^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}0.00282\,-\,0.000702j & 0.00154\,-\,0.000599j\\0.00154\,-\,0.000599j & 0.00282\,-\,0.000702j\end{bmatrix}$$

系统的广义坐标稳态响应为：

$$\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\end{Bmatrix}=\left[H_{p,x}(\pi)\right]\cdot\{p(t)\}$$

$$=\begin{bmatrix}282.014\,-\,70.229j & 154.026\,-59.869j\\154.026\,-59.869j & 282.014\,-\,70.229j\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}31.25j\\68.75j\end{Bmatrix}\times10^{-5}$$

$$=\begin{Bmatrix}6310.650+19402.225j\\6699.150+24201.775j\end{Bmatrix}\times10^{-5}$$

$$=\begin{Bmatrix}20402.711\sin\left(4\pi t+71.983^\circ\right)\\21474.386\sin\left(4\pi t+74.528^\circ\right)\end{Bmatrix}\times10^{-5}$$

即：

$$\begin{cases}x_1(t)=20402.711\sin\left(4\pi t+71.983^\circ\right)\times10^{-5} \qquad m\\x_2(t)=21474.386\sin\left(4\pi t+74.528^\circ\right)\times10^{-5} \qquad m\end{cases}$$

传递力的稳态响应为：

$$f_{T_1}(t)=kx_1(t)+c\dot{x}_1(t)=204.430\,sin(4\pi t+75.578^\circ) \qquad N$$

$$f_{T_2}(t)=kx_2(t)+c\dot{x}_2(t)=215.167\,sin(4\pi t+78.123^\circ) \qquad N$$

3.3 问题 3

$$\{X(w)\} = \left[H_{p,x}(w)\right]\{P(w)\}$$

$$\text{其中，}\{P(w)\} = \begin{Bmatrix} 0.3125 \\ 0.6875 \end{Bmatrix} f(t)$$

$H_{f,f_{T_1}}(w)$、$H_{f,f_{T_2}}(w)$ 的推导如下：

$$\begin{Bmatrix} F_{T_1}(t) \\ F_{T_2}(t) \end{Bmatrix} = (k+cwj)\{X(w)\} = (k+cwj)\left[H_{p,x}(w)\right]\begin{Bmatrix} 0.3 \\ 0.7 \end{Bmatrix} F(w)$$

$$\begin{Bmatrix} H_{f,f_{T_1}}(w) \\ H_{f,f_{T_2}}(w) \end{Bmatrix} = (k+cwj)\left[H_{p,x}(w)\right]\begin{Bmatrix} 0.3125 \\ 0.6875 \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{(1000+5wj)\begin{bmatrix} -3.208w^2 + 5wj + 1000 & 1.791w^2 \\ 1.791w^2 & -3.208w^2 + 5wj + 1000) \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} 0.3125 \\ 0.6875 \end{Bmatrix}}{[7.084w^4 - 6441w^2 + 10^6 - (32.081w^3 - 10^4 w)j]}$$

化简整理可得：

$$\begin{cases} H_{f,f_{T_1}}(w) = \dfrac{(1000+5wj)(0.229w^2+312.5+1.563wj)}{(-1.417w^2+1000+5wj)(-4.999w^2+1000+5wj)} \\ H_{f,f_{T_2}}(w) = \dfrac{(1000+5wj)(-1.646w^2+687.5+3.438wj)}{(-1.417w^2+1000+5wj)(-4.999w^2+1000+5wj)} \end{cases}$$

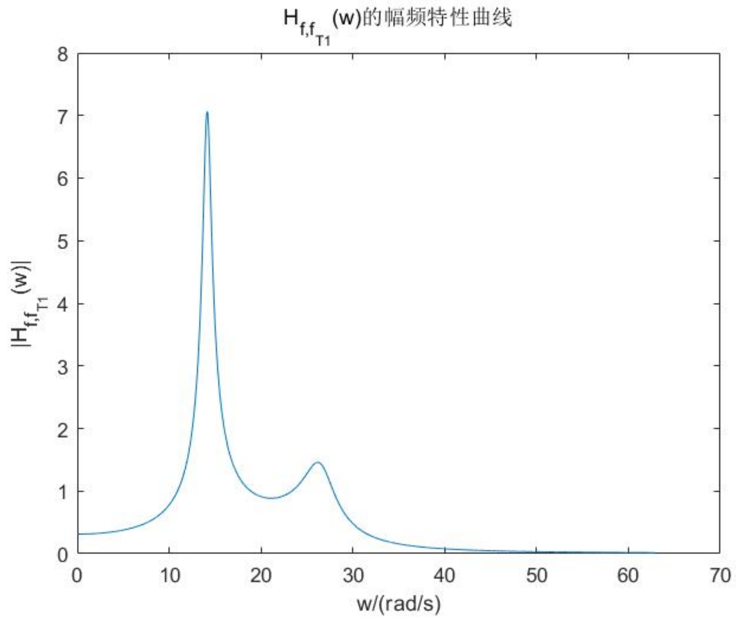
$H_{f,f_{T_1}}(w)$的幅频特性：

$$\left|H_{f,f_{T_1}}(w)\right| = \frac{\sqrt{1000^2+25w^2}\sqrt{(0.229w^2+312.5)^2+(1.563w)^2}}{\sqrt{(1000-1.417w^2)^2+(5w)^2}\sqrt{(1000-4.999w^2)^2+(5w)^2}}$$

$H_{f,f_{T_1}}(w)$的相频特性：

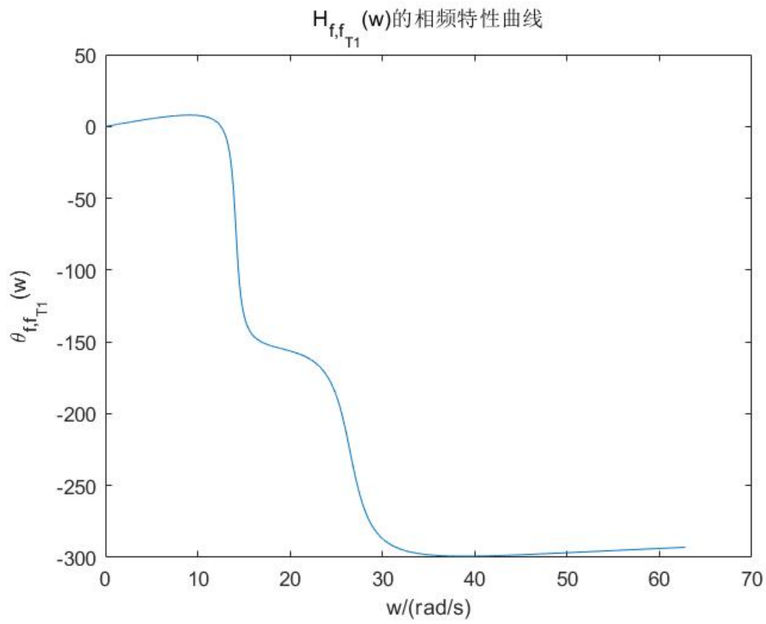
$$\begin{aligned}\theta_{f,f_{T_1}}(w) = {} & arctan(25w, 1000) + arctan(1.563w, 0.229w^2+312.5) \\ & - arctan(5w, 1000-1.417w^2) - arctan(5w, 1000-4.999w^2)\end{aligned}$$

$H_{f,f_{T_1}}(w)$的幅频特性曲线图像绘制如下：



图三：$H_{f,f_{T_1}}(w)$的幅频特性曲线

$H_{f,f_{T_1}}(w)$的相频特性曲线图像绘制如下：



图四：$H_{f,f_{T_1}}(w)$的相频特性曲线

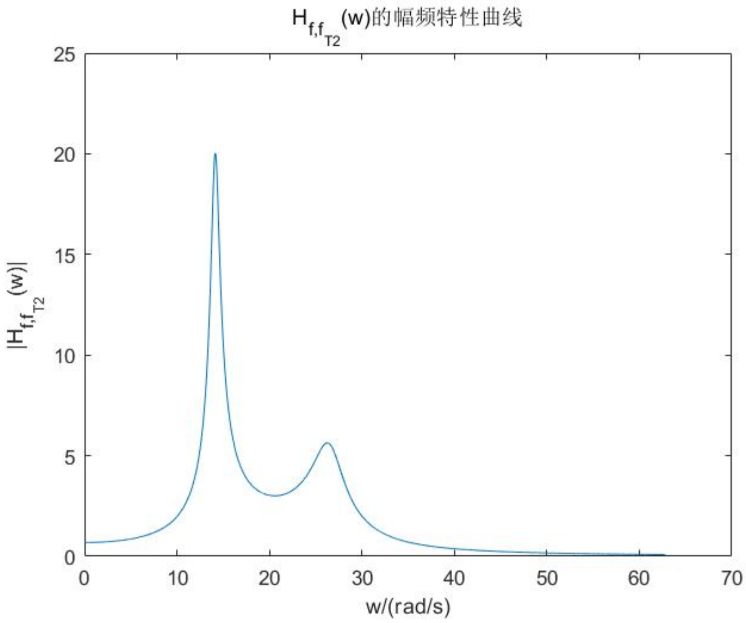
$H_{f,f_{T_2}}(w)$的幅频特性：

$$\left|H_{f,f_{T_2}}(w)\right| = \frac{\sqrt{1000^2+25w^2}\sqrt{(1.646w^2+687.5)^2+(3.438w)^2}}{\sqrt{(1000-1.417w^2)^2+(5w)^2}\sqrt{(1000-4.999w^2)^2+(5w)^2}}$$

$H_{f,f_{T_2}}(w)$的相频特性：

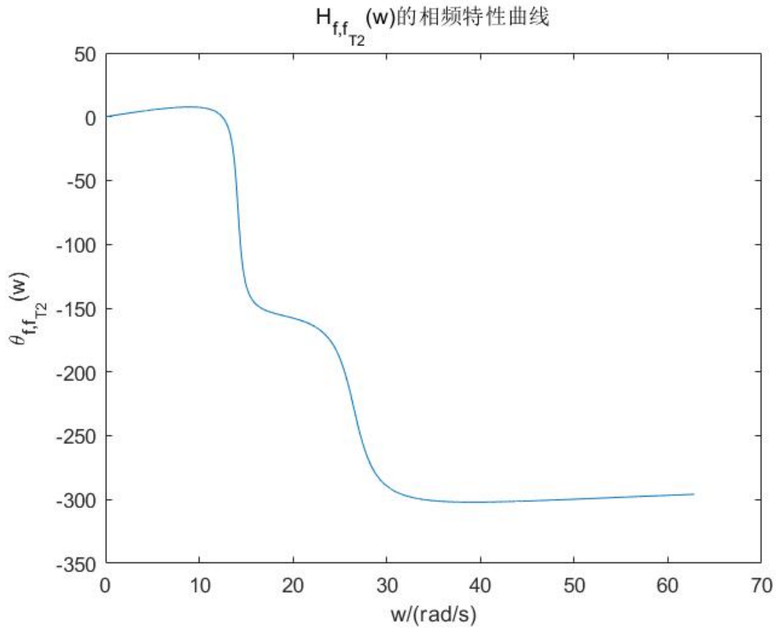
$$\theta_{f,f_{T_2}}(w) = arctan(25w,1000) + arctan(3.438w,1.646w^2+687.5) - arctan(5w,1000-1.417w^2) - arctan(5w,1000-4.999w^2)$$

$H_{f,f_{T_2}}(w)$的幅频特性曲线图像绘制如下 ：



图五： $H_{f,f_{T_2}}(w)$的幅频特性曲线

$H_{f,f_{T_2}}(w)$的相频特性曲线绘制如下：



图六： $H_{f,f_{T_2}}(w)$的相频特性曲线

$H_{f,f_{T_s}}(w)$的公式推导：

$$f_{T_s}(t) = f_{T_1}(t) + f_{T_2}(t)$$

$$F_{T_s}(w) = F_{T_1}(w) + F_{T_2}(w)$$

$$H_{f,f_{T_s}}(w) = \frac{F_{T_s}(w)}{F(w)} = \frac{F_{T_1}(w) + F_{T_2}(w)}{F(w)} = H_{f,f_{T_1}}(w) + H_{f,f_{T_2}}(w)$$

$$= \frac{(1000 + 5wj)[(0.229w^2 + 312.5 + 1.563wj) + (-1.646w^2 + 687.5 + 3.438wj)]}{(-1.417w^2 + 1000 + 5wj)(-4.999w^2 + 1000 + 5wj)}$$

$$= \frac{1000 + 5wj}{-4.999w^2 + 1000 + 5wj}$$

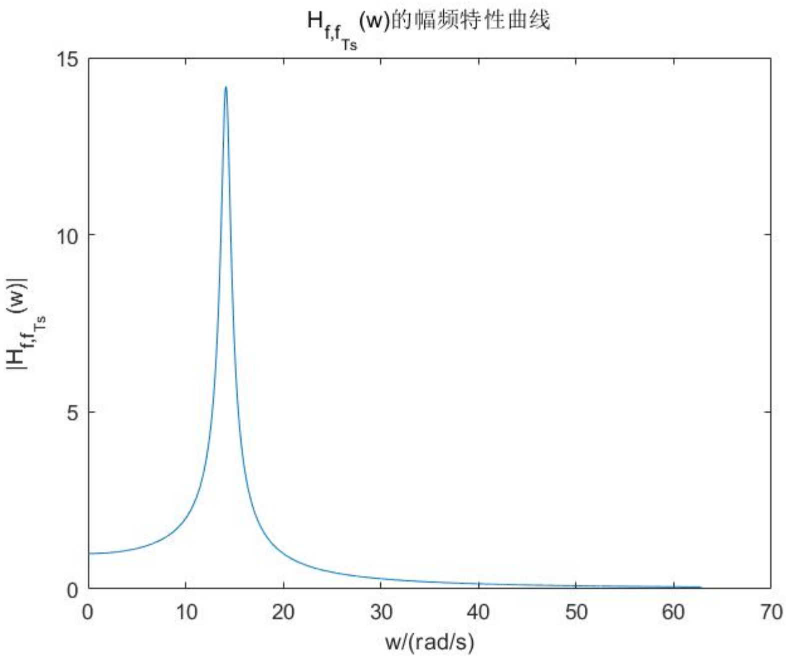
$H_{f,f_{T_s}}(w)$的幅频特性：

$$\left| H_{f,f_{T_s}}(w) \right| = \frac{\sqrt{1000^2 + 25w^2}}{\sqrt{(1000 - 4.999w^2)^2 + (5w)^2}}$$

$H_{f,f_{T_s}}(w)$的相频特性：

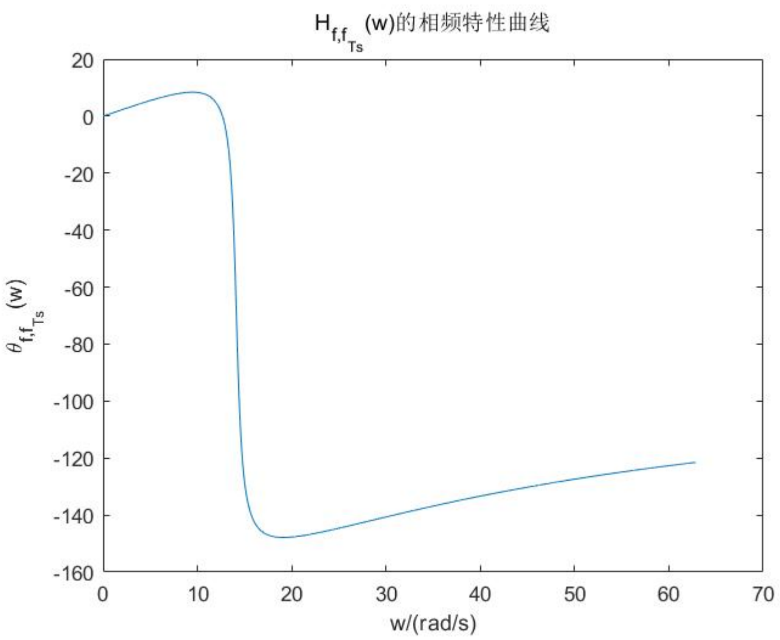
$$\theta_{f,f_{T_s}}(w) = arctan(25w, 1000) - arctan(5w, 1000 - 4.999w^2)$$

$H_{f,f_{T_s}}(w)$的幅频特性曲线图像绘制如下：



图七： $H_{f,f_{T_s}}(w)$的幅频特性曲线

$H_{f,f_{T_s}}(w)$的相频特性曲线绘制如下：



图八： $H_{f,f_{T_s}}(w)$的相频特性曲线

3.4 问题 4

$f_{T_1}(t)$的幅值谱密度幅值$|F_{T_1}(w)|$：

$$\left|F_{T_1}(w)\right| = |F(w)||\,H_{f,f_{T_1}}(w)|$$

$$=\begin{cases} \dfrac{10(1-cos0.1w)\sqrt{1000^2+25w^2}\sqrt{(0.229w^2+312.5)^2+(1.563w)^2}}{\sqrt{(1000-1.417w^2)^2+(5w)^2}\sqrt{(1000-4.999w^2)^2+(5w)^2}} & w\le 20\pi \\ 0 & w>20\pi \end{cases}$$

$f_{T_2}(t)$的幅值谱密度幅值$|F_{T_2}(w)|$：

$$\left|F_{T_2}(w)\right| = |F(w)||\,H_{f,f_{T_2}}(w)|$$

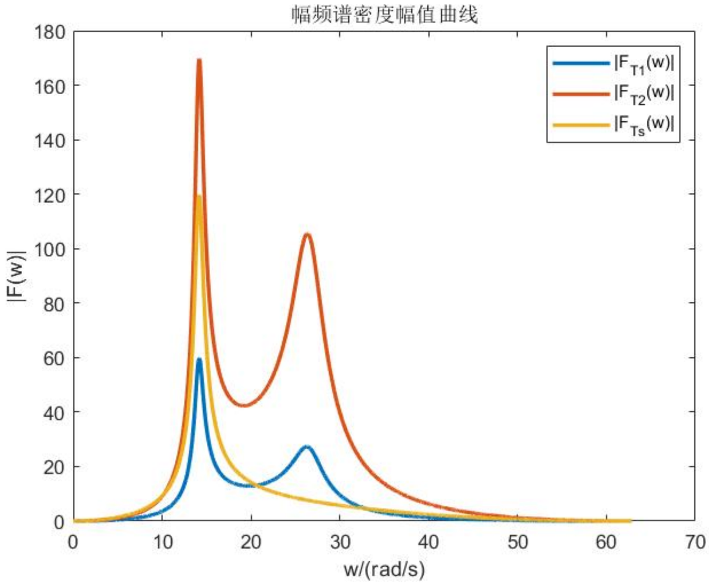
$$=\begin{cases} \dfrac{10(1-cos0.1w)\sqrt{1000^2+25w^2}\sqrt{(1.646w^2+687.5)^2+(3.438w)^2}}{\sqrt{(1000-1.417w^2)^2+(5w)^2}\sqrt{(1000-4.999w^2)^2+(5w)^2}} & w\le 20\pi \\ 0 & w>20\pi \end{cases}$$

$f_{T_s}(t)$的幅值谱密度幅值$|F_{T_s}(w)|$：

$$\left|F_{T_s}(w)\right| = |F(w)||\,H_{f,f_{T_s}}(w)|$$

$$=\begin{cases} \dfrac{10(1-cos0.1w)\sqrt{1000^2+25w^2}}{\sqrt{(1000-4.999w^2)^2+(5w)^2}} & w\le 20\pi \\ 0 & w>20\pi \end{cases}$$

幅频谱密度幅值曲线图像绘制如下：



图九：幅频谱密度幅值曲线

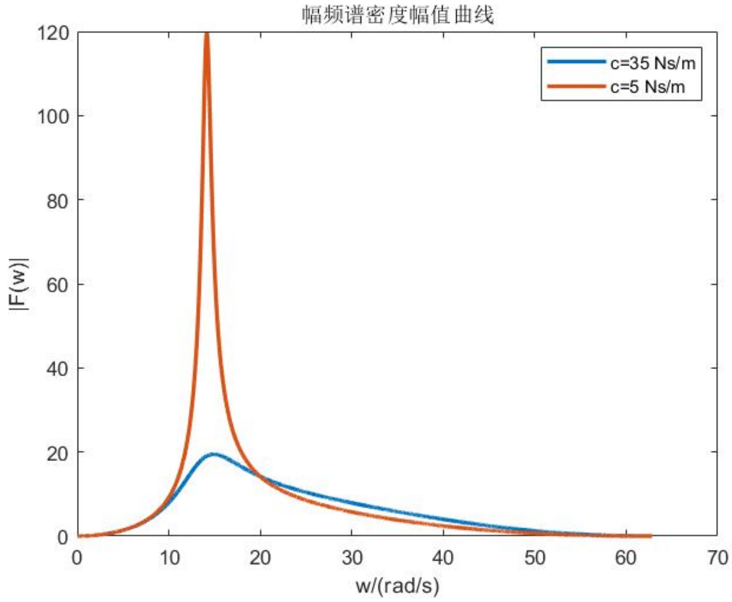
3.5 问题 5

改变阻尼系数 c 的数值，取 c 的值为 $1\sim 60$，并计算在不同阻尼系数下传递给基础的振动力 $f_{T_s}(t)$ 稳态响应的幅值谱密度幅值 $\left|F_{T_s}(w)\right|$，在 $0\sim 20\pi$ 区间内对其进行积分，可得到60个积分值：

1~10	*11~20*	*21~30*	*31~40*	*41~50*	*51~60*
720.66	445.43	392.22	376.83	377.53	385.99
638.23	436.97	389.54	376.37	378.12	387.09
590.34	429.46	387.17	376.05	378.77	388.22
556.71	422.77	385.09	375.86	379.49	389.37
530.95	416.80	383.27	375.79	380.27	390.56
510.24	411.47	381.69	375.84	381.11	391.77
493.05	406.71	380.33	375.99	382.00	393.01
478.48	402.44	379.18	376.25	382.93	394.27
465.93	398.64	378.23	376.59	383.91	395.54
455.02	395.24	377.45	377.02	384.93	396.84

表一：不同阻尼系数下稳态响应幅值曲线在$0\sim 20\pi$ 区间的积分值

通过比较可得，当阻尼系数 c 在 $35\ N\cdot s/m$ 左右时传递给基础的振动力 $f_{T_s}(t)$ 稳态响应的幅值谱密度幅值 $\left|F_{T_s}(w)\right|$ 在 $0\sim 20\pi$ 区间积分数值最小，即此时传递给基础的振动力 $f_{T_s}(t)$ 总体较小。此时图像绘制如下：



图十：不同阻尼幅频谱密度幅值曲线的比较