2022 管综数学

冲刺讲义

主讲人:张紫潮

目 录

前言

管综数学——张紫潮老师寄语：

很高兴各位小伙伴的加入，我们将一起进行管综数学冲刺训练！

当你打开这份讲义的时候，离上岸更近了一步。冲刺课时间宝贵，你需要悄悄打印好讲义，并提前做完！

冲刺课上，我将带你体验前所未有的做题快感，全面秒杀的技巧体系，希望你用心练好每一道题，最后一个多月全力以赴，直接拿分！

算术与代数

考点一 质数

(1)质数:如果一个大于 1 的正整数,只能被 1 和它本身整除,即只有 1 和它本身两个约数,那么这样的数叫做质数(质数可以写成 1×本身的形式).

(2)2 是唯一既是质数又是偶数的正整数,即是唯一的偶质数,大于 2 的质数必定为奇数,最小的质数是 2.

(3)如果两个质数的和或差是奇数,那么其中必定有一个是 2,如果两个质数的乘积是偶数,那么其中必定有一个是 2(2 是解决质数合数问题的切入点).

(4)两个数的乘积等于它们的最大公约数与最小公倍数的乘积.

偶数:能被 2 整除的数,记作 $2n$.

奇数:不能被 2 整除的数,记作 $2n+1$ 或 $2n-1$.

奇数偶数之间的加减乘除规律.

奇偶性:对于整数而言,$a+b$和$a-b$的奇偶性一致.

质数: 1)熟记 20 以内的质数.

2)质数问题的切入点:2.

(2011)设a,b,c是小于 12 的三个不同的质数,且$|a-b|+|b-c|+|c-a|=8$,则$a+b+c=$(　　).

A.10　　B.12　　C.14　　D.15　　E.19

考点二 奇数,偶数,有理数,无理数

偶数:能被 2 整除的数叫做偶数,记作 $2n$.

奇数:不能被 2 整除的数叫做奇数,记作 $2n+1$ 或者 $2n-1$.

(2014)m^2-n^2 是 4 的倍数.

(1)m,n都是偶数.

(2)m,n都是奇数.

考点三 有理数,无理数的经典考题

(2009)若x,y是有理数,且满足$(1+2\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y-2+5\sqrt{3}=0$,则$x,y$的值为(　　).

A.1,3　　B.−1, 2　　C.−1, 3　　D.1,2　　E.以上结论都不正确

考点四 非负性

(2008)$|3x+2|+2x^2-12xy+18y^2=0$,则 $2y-3x=$(　　).

A.$-\frac{14}{9}$　　B.$-\frac{2}{9}$　　C.0　　D.$\frac{2}{9}$　　E.$\frac{14}{9}$

考点五 三角不等式

(2004)x,y是实数, $|x|+|y|=|x-y|$.

(1)$x>0,y<0$.

(2)$x<0,y>0$.

(2003)不等式$|x-2|+|4-x|<s$无解.

(1)$s\leqslant2$.

(2)$s>2$.

考点六 绝对值的几何意义

$|a|$的几何意义是:数轴上表示a的点到原点的距离,$|a-b|$表示的是数轴上a、b两点的距离.

而对于到三个以上的距离的最值问题有结论:

当数轴上有奇数个点时,那么在中点一点时取得的距离最小.

当数轴上有偶数个点时,那么在中间两个点的范围之间距离最小.

总结:

三个线性和:$f_{(x)}=|x-x_1|+|x-x_2|+|x-x_3|$,$x_1>x_2>x_3$.

只有最小值,不存在最大值.

最小值为$|x_3-x_1|$.

在$x=x_2$处取得最小值(中间一点处取得最小值).

两个线性差:$f_{(x)}=|x-x_1|-|x-x_2|$,既有最小值,也有最大值.

最小值为:$-|x_1-x_2|$(记住:就是最大值的相反数).

最大值为:$|x_1-x_2|$(通过三角不等式求出).

取得最值时,无论是最大值还是最小值,x都有无数多个.

(2009)设$y=|x-a|+|x-20|+|x-a-20|$其中 $0<a<20$,则对于满足$a\leqslant x\leqslant 20$ 的x的值,y的最小值为(　　).

A.10　　B.15　　C.20　　D.25　　E.30

(2017)已知a,b,c为三个实数,则$min\{|a-b|,|b-c|,|a-c|\}\leqslant 5$.

(1)$|a|\leqslant 5,|b|\leqslant 5,|c|\leqslant 5$.

(2)$a+b+c=15$.

考点七 奇偶性

在实数范围中,奇数之间和偶数之间的奇偶性相同.

特别的:$a+b$和$a-b$的奇偶性相同.

(2019)能确定小明年龄.

(1)小明年龄是完全平方数.

(2)20 年后小明年龄是完全平方数.

考点八 等比定理

(1)等比定理:$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f}$($b$+$d$+$f$≠0)

特别注意:一定要对等比定理推论出的分母是否等于零进行分类讨论.

(2002)若$\frac{a+b-c}{c}=\frac{a-b+c}{b}=\frac{-a+b+c}{a}=k$,则$k$的值为(　　).

A.1　　B.1 或−2　　C.−1 或 2　　D.−2

考点九 均值不等式

(1)a+b≥$2\sqrt{ab}$　　a,b＞0　　当且仅当a=b时,取得等号.

(2)a^2+b^2≥$2ab$　　a,b≠0　　当且仅当$a^2=b^2$时,取得等号.

(2019)设函数$f(x)=2x+\frac{a}{x^2}(a>0)$在(0,+∞)内的最小值为$f(x_0)$=12,则$x_0$=(　　).

A.5　　B.4　　C.3　　D.2　　E.1

(某模拟题)已知x,y均为正实数,且 3x+2y=6,当x^2y取得最大值时,x=(　　).

A.2　　B.3　　C.4 或 2　　D.$\frac{2}{3}$　　E.$\frac{4}{3}$

(某模拟题)已知 $2x+y=1(x>0,y>0)$,则x^2y的最大值为(　　).

A.$\frac{1}{2}$　　B.$\frac{1}{3}$　　C.$\frac{1}{12}$　　D.$\frac{1}{27}$　　E.$\frac{1}{13}$

(某模拟题)已知b、$c>0$,且$\frac{4}{b}+\frac{1}{c}=1$,则使得$b+c>a$恒成立的$a$的取值范围为(　　).

A. $(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$　　B. $(-\infty,9)$　　C. $(-1,1)$

D.$(1,\frac{8}{3})$　　E. $(1,2)$

(2020)设a,b是正实数,则$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$存在最小值.

(1)已知ab的值.

(2)已知a,b是方程$x^2-(a+b)x+2=0$ 的不同实根.

(某模拟题)正项等比数列$\{a_n\}$中,存在两项a_m,a_n使得$\sqrt{a_m a_n}=4a_1$,且$a_6=a_5+2a_4$,则$\frac{1}{m}+\frac{4}{n}$的最小值为(　　).

A.$\frac{3}{2}$　　B.2　　C.$\frac{5}{2}$　　D.3　　E.$\frac{7}{2}$

整式分式

考点一 基本公式

完全平方公式:$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

$$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$$

平 方 差公式:$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

三项平方公式:$(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

$$(a-b-c)^2=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac+2bc$$

立 方 和公式:$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

立 方 差公式:$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

和 立 方公式:$(a+b)^3=a^3+b^3+3a^2b+3ab^2$

差 立 方公式:$(a-b)^3=a^3-b^3-3a^2b+3ab^2$

常用配方公式:$a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\frac{1}{2}[(a-b)^2+(b-c)^2+(a-c)^2]$

$$a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc=\frac{1}{2}[(a+b)^2+(b+c)^2+(a+c)^2]$$

$$a^3+b^3+c^3=3abc\Rightarrow a=b=c$$

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$$

(2013)已知$f(x,y)=x^2-y^2-x+y+1$,则$f(x,y)=1$.

(1)$x=y$.

(2)$x+y=1$.

(2020)已知实数x满足$x^2+\frac{1}{x^2}-3x-\frac{3}{x}+2=0$,则$x^3+\frac{1}{x^3}=$(　　).

A.12　　B.15　　C.18　　D.24　　E.27

(2020)设a,b,c,d是正实数,则$\sqrt{a}+\sqrt{d}\le\sqrt{2(b+c)}$.

(1)$a+d=b+c$.

(2)$ad=bc$.

(2021)已知数列$\{a_n\}$,则数列$\{a_n\}$为等比数列.

(1)$a_n a_{n+1} > 0$.

(2)$a_{n+1}^2 - 2a_n^2 - a_n a_{n+1} = 0$.

考点二 因式定理及余式定理

(1)对于因式定理,直接让因式等于零,把x的值代入原式即可.

因式定理的出题模式:整除、是一个因式、余式为零.

(2)对于余式定理注意事项:余式永远比除式低且仅低一次方.

【解题思路】直接让除式等于零即可

因式定理等于零

余式定理等于余式

(2012)若$x^3 + x^2 + ax + b$能被$x^2 - 3x + 2$ 整除,则(　　).

A.$a = 4, b = 4$　　B.$a =- 4, b =- 4$　　C.$a = 10, b =- 8$

D.$a =- 10, b = 8$　　E.$a =- 2, b = 0$

(某模拟题)关于x的多项式$f(x)$除以 $3(x - 1)$和 $2(x + 2)$的余数分别为 1 和 -17,那么$f(x)$除以$x^2 + x - 2$ 的余式为(　　).

A.$-5x + 6$　　B.$-6x - 5$　　C.$6x - 5$

D.$6x + 11$　　E.$6x - 7$

考点三 裂项相消法

(2012)若等差数列中$a_2 = 4, a_4 = 8$,若$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} = \frac{5}{21}$,则$n =$(　　).

A.16　　B.17　　C.19　　D.20　　E.21

(2009)设直线$nx+(n+1)y=1$(n为正整数)与两坐标轴围成的三角形面积为S_n,则$S_1+S_2+\cdots+S_{2009}=$(　　).

A.$\frac{1}{2}\cdot\frac{2009}{2008}$　　B.$\frac{1}{2}\cdot\frac{2008}{2009}$　　C.$\frac{1}{2}\cdot\frac{2009}{2010}$

D.$\frac{1}{2}\cdot\frac{2010}{2009}$　　E.以上结论都不正确

(某模拟题)$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\cdots\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{101}}=$(　　).

A.$\frac{1}{2}(\sqrt{101}-1)$　　B.$\frac{1}{2}(\sqrt{101}+1)$　　C.$\frac{1}{3}(\sqrt{101}-1)$

D.1　　E.0

(2021)$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$(　　).

A.9　　B.10　　C.11　　D.$3\sqrt{11}-1$　　E. $3\sqrt{11}$

一元二次函数和方程

一元二次函数公式总结

一般式:$y=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

顶点式:$y=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$,顶点坐标为$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$

两根式:$y=a(x-x_1)(x-x_2)$, x_1,x_2是函数的两个根

对称轴:$x=-\frac{b}{2a}$,顶点坐标为$(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a})$

求根公式:$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

判别式:$\Delta=b^2-4ac$

韦达定理:$x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, $x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$(注意用韦达定理之前验证判式大于等于零)

考点一 关于判别式Δ不同自然语言的相同的数学语言的表达

(1)$\Delta=0$

A.方程有两个相等的实根

B.函数抛物线与x轴有且仅有一个交点(只有一个公共点)

C.函数抛物线与x轴相切

D.函数是一个完全平方式

E.方程具有重实根

F.直线与曲线(抛物线)有一个交点

(2)$\Delta>0$

A.方程有两个不相等的实根

B.函数抛物线与x轴相交

C.函数抛物线与x轴有两个交点

D.方程有两个不同的零点

F.直线与曲线(抛物线)有两个交点

(3)$\Delta<0$

A.方程没有实数根

B.函数抛物线与x轴没有交点

C.函数抛物线与x轴相离

D.直线与曲线(抛物线)没有交点

关于判别式Δ的常见思维误区

同学们对于判别式的思维误区通常有以下几个方面:

A.方程有两个实数根

B.方程有两个正根

C.方程有两个负根

D.方程有根

这四句话的意思是判别式大于等于零,而非大于零,因为存在两个相等的根和两个不相等的根两种情况,记住:二次方程永远是有两个根的.

E.函数抛物线与x轴有两个交点

(2011)抛物线$y=x^2+(a+2)x+2a$与x轴相切.

(1)a＞0.

(2)$a^2+a-6=0$.

(2013)设a,b为常数,则关于x的二次方程$(a^2+1)x^2+2(a+b)x+b^2+1=0$ 具有重实根.

(1)$a,1,b$成等差数列.

(2)$a,1,b$成等比数列.

(2017)直线$y=ax+b$与抛物线$y=x^2$有两个交点.

(1)$a^2>4b$.

(2)$b>0$.

(2014)方程$x^2+2(a+b)x+c^2=0$有实数根.

(1)a,b,c是一个三角形的三边长.

(2)实数a,c,b成等差数列.

(2013)已知二次函数$f_{(x)}=ax^2+bx+c$,则方程$f_{(x)}=0$有两个不相同的实根.

(1)$a+c=0$.

(2)$a+b+c=0$.

(2019)关于x的方程$x^2+ax+b-1=0$有实根.

(1)$a+b=0$.

(2)$a-b=0$.

归纳:一元二次函数思路的固定做题步骤

一看开口方向(注意自然语言的表达以决定对二次项系数a是否等于 0 进行分类讨论)

二次函数,二次方程,二次不等式,抛物线(默认$a\neq 0$)

函数,方程,不等式(需要对a是否等于 0 进行分类讨论)

二看判别式

三看对称轴

四看交点值

(某模拟题)关于x的方程$mx^2-2(3m-1)x+9m-1=0$有两个实数根,那么m的取值范围为(　　).

A.$m\le\frac{1}{5}$　　B.$0<m<\frac{1}{5}$或$m<0$　　C.$m\le\frac{1}{5}$且$m\ne0$

D.$m\ge\frac{1}{5}$　　E.$0<m<\frac{1}{5}$

考点二 韦达定理及精髓考点

关于$|x_1-x_2|$不同自然语言的表达形式:

A.方程两根之差的绝对值

B.方程两根之间的距离

C.函数抛物线截x轴的长

D.函数抛物线与两坐标轴围成的三角形的底边长

注:在用韦达定理的时候,一定要注意其隐藏的定义域.

(2011)若三次方程$ax^3+bx^2+cx+d=0$的三个不同的实根x_1,x_2,x_3满足$x_1+x_2+x_3=0$且$x_1x_2x_3=0$,则下列关系式中恒成立的是(　　).

A.$ac=0$　　B.$ac<0$　　C.$ac>0$　　D.$a+c<0$　　E.$a+c>0$

(2016)设抛物线$y=x^2+2ax+b$与x轴相交于A、B两点,点C的坐标为$(0,2)$,若$\triangle ABC$的面积为6,则(　　).

A.$a^2-b=9$　　B.$a^2+b=9$　　C.$a^2-b=36$

D.$a^2+b=36$　　E.$a^2-4b=9$

(2008)$\alpha^2+\beta^2$的最小值是$\frac{1}{2}$.

(1)α和β是方程$x^2-2ax+(a^2+2a+1)=0$ 的两个实数根.

(2)$\alpha\beta=\frac{1}{4}$.

考点三 固定思路

一元二次方程$ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$.

(1)若一个根比k大,一个根比k小,只需保证$af(k)<0$ 即可.

(2)一根在(m,n)内,另外一根在(a,b)内则有$\begin{cases} f_{(m)}\cdot f_{(n)}<0 \\ f_{(a)}\cdot f_{(b)}<0 \end{cases}$

(2005)$x^2+ax+b=0$ 有一正一负两个实根.

(1)$b=-C_4^3$.

(2)$b=-C_7^5$.

(1998)要使得方程 $3x^2+(m-5)x+m^2-m-2=0$ 的两个根x_1,x_2分别满足 $0<x_1<1,1<x_2<2$,则实数m的取值范围应该是(　　).

A.$-2<m<-1$　　B.$-4<m<-1$　　C.$-4<m<-2$

D.$\frac{-1-\sqrt{65}}{2}<m<-1$　　E.$-3<m<1$

考点四 一元二次函数求最值

(2012)设实数x,y满足$x+2y=3$,则x^2+y^2+2y的最小值为(　　).

A.4　　B.5　　C.6　　D. $\sqrt{5}-1$　　E. $\sqrt{5}+1$

(2017)设a、b是两个不相等的实数,则函数$f_{(x)}=x^2+2ax+b$的最小值小于零.

(1)1、a、b成等差数列.

(2)1、a、b成等比数列.

一元二次不等式

总结:解一元二次不等式的普适性步骤

解一元二次不等式$ax^2+bx+c>0$或$ax^2+bx+c<0$的一般性步骤

(1)将不等式的一边必须变成0(不等式的函数化).

(2)将其二次项系数必须变成正,即$a>0$.

(3)求根:解出与不等式对应的方程的根(如果求不出根,就要考虑恒成立的情况).

建议:在求根之前验证一下判别式的情况,以免做出不必要的错误判断,浪费时间.

备注:求根只有两种方法:

A.十字相乘法(首选方法).

B.求根公式法:$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

(4)写解集:大于号取两边,小于号取中间.

考点一 含有绝对值不等式的解法

解含有绝对值的不等式的关键是化去式子中绝对值符号,常用的有以下几种方法:

(1)平方法:$(|f_{(x)}|)^2=(f_{(x)})^2$,平方法如果出现在不等式中,要注意正值.

(2)零点问题的分类讨论:$|f_{(x)}|=a$(常数)$\begin{cases}f_{(x)}=a,f_{(x)}\geq 0\\ f_{(x)}=-a,f_{(x)}<0\end{cases}$,用这两个式子进行解题即可.

(3)转化法:$|f_{(x)}|<a$(参数)$(a>0)$,则有$-a<f_{(x)}<a$,若$|f_{(x)}|>a$,则有

$f_{(x)}>a$或$f_{(x)}<-a$(绝对值的几何意义).

不等式平方法拓展讲解

(1)形如$|f_{(x)}|,\sqrt{f_{(x)}}>a$,在确保$a$为正值的时候可以直接平方,一定注意根号里面的定义域.

(2)形如$|f_{(x)}|,\sqrt{f_{(x)}}<a$,在确保$a$为正值的时候可以直接平方,以免漏掉定义域.

(3)形如两个绝对值或者两个根号的情况:形如:$|x|<|y|$,果断平方(一定要和三角不等式区分开来).

总结:平方法的运用需要确保两边均为非负的属性,只要具备这个属性,不管是解方程还是解不等式,平方法横扫千军.

(2017)不等式$|x-1|+x\leq 2$的解集为(　　).

A.$(-\infty,1]$　　B.$(-\infty,\frac{3}{2}]$　　C.$\left[1,\frac{3}{2}\right]$　　D.$[1,+\infty)$　　E.$[\frac{3}{2},+\infty)$

(某模拟题)不等式$|4x-3|>2x+1$的解集为(　　).

A. $x>3$ 或$x<\frac{1}{3}$　　B. $x>2$ 或$x<-\frac{1}{3}$　　C. $x>3$ 或$x<-\frac{1}{3}$

D. $x>1$ 或$x<\frac{1}{3}$　　E. $x>2$ 或$x<\frac{1}{3}$

考点二 分式不等式的解法

(1)求出定义域(定义域一般隐含在分母$\neq 0$).

(2)通过移项、通分、合并,然后用分母乘以分子,化为整式不等式求解集.

(3)求解集与定义域的交集.

特别注意:在对不等式两边乘除的时候,切不可直接通过乘以分母来去掉分母.

高次不等式的解法

穿针引线法是高次不等式的通解通法,具体操作步骤如下所示:

第一步:分解因式,化为若干个因式的乘积的形式,分解到不可分解为止.

第二步:作等价变形,便于判断因式的符号,例如x^2+1,x^2+x+1等这些因式的共同特点是无论x取何值,它们的值恒大于0.

第三步:将分解所得到的每一个因式的最高次项的系数化为正数.

第四步:从小到大,从左到右依次标出与不等式对应的方程的根.

第五步:从右上角开始,穿针引线,奇过偶不过(指的是不等式的幂指数).

第六步:根据图像写出解集,注意能否取到等号.

(某模拟题)不等式$\frac{(x^2-2x-8)(3x^2-3x+1)}{-x^2+2x+15}\leq 0$恒成立.

(1)$x\in[-2,3)$.

(2)$x\in(5,+\infty)$.

(某模拟题)不等式$\frac{(x-4)(6-x)^3(x+3)^2}{x+\sqrt{3}}>0$ 的解集是(　　).

A. $(-\sqrt{3},4)\cup(6,+\infty)$　　B. $(-3,-\sqrt{3})\cup(4,6)$　　C. $(-\sqrt{3},\sqrt{3})$

D. $(-\infty,3)\cup(-\sqrt{3},4)\cup(6,+\infty)$　　E. $(-\infty,-3)\cup(-3,-\sqrt{3})\cup(4,6)$

(2008)$(2x^2+x+3)(-x^2+2x+3)<0$.

(1)$x\in[-3,-2]$.

(2)$x\in(4,5)$.

不等式$(x+2)(x+1)^2(x-1)^3(x-2)\le 0$ 的解集为(　　).

A.$(-\infty,-2]\cup[1,2]$　　B.$(-\infty,-2]\cup\{1\}\cup[1,2]$　　C.$(-\infty,-2]\cup\{1\}\cup(1,2)$

D.$(-\infty,-2)\cup\{1\}\cup[1,2]$　　E.以上答案均不正确

等差数列与等比数列

考点一 等差数列通项公式

数学语言:$a_n - a_{n-1} =$ 常数$d(n \geq 2)$或$a_{n+1} - a_n =$ 常数$d(n \geq 1)$

通项公式:

基本通项公式:$a_n = a_1 + (n-1)d$

推广通项公式:$a_n = a_m + (n-m)d$

等差数列的通项公式可以看成一个一次函数.

一次项系数+常数项=首项,以公差d为一次项系数,常数项为$a_1 - d$.

也可将其抽象成一次函数,其斜率为一次项系数d,在y轴上的截距为$a_1 - d$.

(某模拟题)设数列$\{a_n\}$的通项公式为a_n,则$\{a_n\}$是一个等差数列.

(1)$a_n = 4n + 3, n = 1,2,3\ldots$

(2)$a_{n+1} + 2a_n = 0, n = 1,2,3\ldots$

(2019)设数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,则$\{a_n\}$为等差数列(　　).

(1)$S_n = n^2 + 2n, n = 1,2,3.$

(2)$S_n = n^2 + 2n + 1, n = 1,2,3.$

等差中项的定义:

自然语言:若a, b, c三个数按这个顺序排列成等差数列,那么b叫a,c的等差中项.

数学语言:$2b = a + c$.

(2019)甲、乙、丙三人各自拥有不超过 10 本图书,甲再购入 2 本图书后,他们拥有的图书数量构成等比数列,则能确定甲拥有图书的数量.

(1)已知乙拥有的图书数量.

(2)已知丙拥有的图书数量.

(2021)三位年轻人的年龄成等差数列,且最大与最小的两人年龄差的 10 倍是另一人的年龄,则三人中年龄最大的是(　　).

A.19　　B.20　　C.21　　D.22　　E.23

考点二 等差数列前n项和

S_n=$\frac{(a_1+a_n)n}{2}$=$na_1+\frac{n(n-1)}{2}d=\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$

其特点:

(1)常数项为 0(表现形式是一个不含常数项的二次函数).

(2)开口方向由d的符号决定.

(3)二次项系数为d的一半.

(4)二次项系数+一次项系数=首项a_1.

(5)对称轴:$\frac{1}{2}-\frac{a_1}{d}$.

特别地:若等差数列前n项和为一个含有常数项的二次函数,那么就把常数项加在首项,该数列为一个分段等差数列,即第一项为一项,从第二项开始依然成等差数列,依然符合上述五条特点.

等差数列前n项和与通项公式的相互转换

等差数列前n项和公式:S_n=$\frac{d}{2}n^2+(a_1-\frac{d}{2})n$

等差数列通项公式:$a_n=dn+a_1-d$

(某模拟题)在等差数列$\{a_n\}$中,其公差$d<0$,若$a_4\cdot a_6=24, a_2+a_8=10$,则该数列前$n$项和的最大值为(　　).

A.50　　B.40　　C.45　　D.35　　E.30

(2020)等差数列$\{a_n\}$满足$a_1=8$,且$a_2+a_4=a_1$,则$\{a_n\}$前n项和的最大值为(　　).

A.16　　B.17　　C.18　　D.19　　E.20

考点三 等差数列的性质

(1)下标和相等公式:在等差数列中

若m、n、p、k为正整数,且$m+n=p+k$,则$a_m+a_n=a_p+a_k$

(等号左右两边的项数必须保持一致)

(2)等差数列$\{a_n\}$中,等距离的n项也成等差数列,例如a_1,a_3,a_5,a_7,其公差为nd.

(3)等差数列中,等距的片段和依然成等差数列,即$s_n,s_{2n}-s_n,s_{3n}-s_{2n}$依然成等差数列,其公差为$n^2d$(片段和公式).

(4)若a_n是公差为d的等差数列,则ma_n+b是以公差为md的等差数列.

(5)若等差数列a_n和b_n的前n项和分别用S_n和T_n表示,则他们的通项公式之比$\frac{a_k}{b_k}=\frac{S_{2k-1}}{T_{2k-1}}$

注:仅限于比例,不表示大小!

(2009)$\{a_n\}$的前 n 项和与$\{b_n\}$的前n项S_n和T_n满足$\frac{S_{19}}{T_{19}}=3:2$.

(1)$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是等差数列.

(2)$a_{10}:b_{10}=3:2$.

(1998)若在等差数列前 5 项和$S_5=15$,前 15 项和$S_{15}=120$,则前 10 项和S_{10}为(　　).

A.40　　B.45　　C.50　　D.55　　E.60

(某模拟题)在等比数列$\{a_n\}$中,其前n项和为S_n,已知$S_3=10,S_6=90$,则数列$\{a_n\}$的公比为(　　).

A.1　　B.2　　C.3　　D.4　　E.5

等比中项

等比中项:

自然语言:一般地,如果a, b, c都不为零,并且a, b, c成等比数列,则称b为a, c的等比中项.

数学语言:若b为a, c的等比中项,则$b^2 = ac$,a、b、c均不为 0.

考点四 等比数列前n项和

等比数列前n项和的推广形式:S_n=$\frac{a_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{a_1-a_1\cdot q^n}{1-q}$=$\frac{a_1}{1-q} - \frac{a_1}{1-q}\cdot q^n$

(某模拟题)若数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n,则数列$\{a_n\}$为等比数列.

(1)$S_n = 2^{n+1} - 2$.

(2)$S_n = 2^{n-1} - 1$.

(某模拟题)在等比数列$\{a_n\}$中,已知对任意自然数n,都有$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = 2^n - 1$,则$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2$=(　　).

A.$(2^n - 1)^2$　　B. $\frac{1}{3}(2^n - 1)$　　C. $4^n - 1$

D.$\frac{1}{3}(4^n - 1)$　　E.以上均不正确

考点五 等比数列的性质

(1)若m、n、p、k属于正整数,且$m + n = p + k$,那么$a_m \cdot a_n$=$a_p \cdot a_k$等比数列$\{a_n\}$中,等距离的n项a_k, a_{2k}, a_{3k}也成等比数列,其公比为q^k.

(2)等比数列中,等距的片段和依然成等比数列,即s_n,$s_{2n} - s_n$,$s_{3n} - s_{2n}$依然成等比数列,其公比为q^n.

等比数列的性质

A.等比数列中,下标奇偶性相同的项数正负符号一致.

例如,在等比数列中 ,$a_1, a_3, a_5, a_7\cdots$一定同号,$a_2, a_4, a_6, a_8\cdots$一定同号.

B.当无穷等比数列前n项(出题模式一定*是* $0 < q < 1$ 且$q \neq 0$),当$n \to \infty$*时,* $q^n \to 0$,此时,所有项的和$S = \frac{a_1}{1-q}$.

考点六 常用递推数列的求解

一般地,题中如果给出a_{n+1}和a_n的一个关系表达式 m 并且无法直接用等差数列和等比数列的性质进行求解时,一般形如$a_{n+1}=qa_n+d$,可以给等式两边都加上一个常数$c=\frac{d}{q-1}$ 进行变形.

(2019)设数列$\{a_n\}$满足$a_1=0,a_{n+1}-2a_n=1$,则$a_{100}=$(　　).

A.$2^{99}-1$　　B.2^{99}　　C.$2^{99}+1$　　D.$2^{100}-1$　　E.$2^{100}+1$

(2010)$x_n=1-\frac{1}{2^n}(n=1,2\cdots)$.

(1)$x_1=\frac{1}{2},x_{n+1}=\frac{1}{2}(1-x_n)(x=1,2\cdots)$.

(2)$x_1=\frac{1}{2},x_{n+1}=\frac{1}{2}(1+x_n)(x=1,2\cdots)$.

(某模拟题)已知数列$\{a_n\}$满足:$a_{n+1}=\frac{2a_n}{1+4a_n},a_1=\frac{2}{9}$,则$a_{10}=$(　　).

A. $\frac{512}{3}$　　B.1　　C. $\frac{1024}{4097}$　　D. $\frac{512}{2945}$　　E.4

考点七 累加累乘法求和的应用

累加法和累乘法的出题模式非常固定:

累加法:后项−前项=含参的数字(和等差数列区分)

累乘法:后项:前项=含参的数字(和等比数列区分)

(2013)设数列$\{a_n\}$满足:$a_1=1,a_{n+1}=a_n+\frac{n}{3}(n\geq 1)$,则$a_{100}$=(　　).

A.1650　　B.1651　　C. $\frac{5050}{3}$　　D.3300　　E.3301

(某模拟题)已知数列$\{a_n\}$满足$\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{n}{n+1}(n\geq 2), a_1=2013, a_{2012}=($　　).

A.1　　B.2　　C.3　　D.4　　E.5

考点八 a_n与S_n的关系转化表达

此类题目属于联考数列中较难的题目,难以从常规的等差,等比数列的性质找到切入点,其出题模式非常固定:题目只给出一个条件,即a_n与S_n的关系表达式,此时要用到数列中最常规的解题思路,即:$a_n=S_n-S_{n-1}$.

然后再观察题目问的问题:如果题目问的是a_n,就把式子中所有的S_n转化成a_n,如果题目中问的是S_n,就把式子中所有的a_n转化成S_n.

(2008)如果数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{3}{2}a_n-3$,那么这个数列的通项公式为(　　).

A.$a_n=2(n^2+n+1)$　B.$a_n=3\times 2^n$　C.$a_n=3n+1$　D.$a_n=2\times 3^n$　E.以上均不正确

(2009)若数列$\{a_n\}$中,$a_n\neq 0$ 且$n\geq 1, a_1=\frac{1}{2}$,前n项和S_n满足$a_n=\frac{2S_n^2}{2S_n-1}(n\geq 2)$,则$\{\frac{1}{S_n}\}$(　　).

A.首项为 2,公比为$\frac{1}{2}$的等比数列

B.首项为 2,公比为 2 的等比数列

C.既非等差也非等比数列

D.首项为 2,公差为$\frac{1}{2}$的等差数列

E.首项为 2,公差为 2 的等差数列

总结:当无法使用常规的等差等比数列思路解决数列题目的时候,就要想到三个思路的试算:

1.穷举

2.常见递推数列的求解

3.a_n和S_n的互相转化

原则:永远只用一个公式:$a_n=S_n-S_{n-1}$,如果题目问的是a_n,就把式子中所有的S_n转化成a_n,如果题目中问的是S_n,就把式子中所有的a_n转化成S_n.

平面几何

考点一 三角形的性质

(1)三角形三边的关系:即任意两边之和大于第三边,任意两边之差小于第三边.

(2)三角形的面积公式:$S=\frac{1}{2}ah=\frac{1}{2}ab\sin C$,其中$C$是$ab$两边之间的夹角.

(3)有一个内角为30°的直角三角形:其中30°所对的直角边的边长是斜边边长的一半.

(4)有一个内角为30°的直角三角形的三边边长关系为:$1:\sqrt{3}:2$

(5)任意直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半.

(6)正三角形(等边三角形)面积公式:$S=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

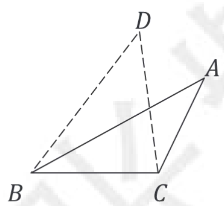
(2020)在$\triangle ABC$中,$\angle B=60°$,则$\frac{c}{a}>2$.

(1)$\angle C<90°$.

(2)$\angle C>90°$.

(2020)如图,在$\triangle ABC$中,$\angle ABC=30°$,将线段AB绕点B旋转至DB,使$\angle DBC=60°$,则$\triangle DBC$与$\triangle ABC$的面积之比为(　　).

A.1　　B. $\sqrt{2}$　　C.2　　D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$　　E. $\sqrt{3}$



两三角形相似的性质:

A.两三角形对应的边长成比例(称之为相似比)对应的角相等.

B.两相似三角形对应的线段(任意线段)比等于相似比.

C.两三角形的周长等于相似比.

D.两三角形的面积比等于相似比的平方.

菱形:有一组邻边相等的平行四边形叫作菱形

菱形的性质:

A.四条边全部相等

B.菱形的对角线互相垂直且平分

C.菱形的对角线平分对角

D.菱形的面积计算公式:$S=\frac{1}{2}cd$,其中c 、d是两条对角线的长度

E.菱形的周长计算公式:$l=4a$,其中,a是菱形的边长

考点二 圆

圆的定义:与定点O距离等于r的平面上动点的轨迹称之为以O为圆心,以半径为r的圆.

圆的性质:如图所示,在圆O中,半径为r,直径为$d=2r$,线段AB和AC是过圆外点A的两条切线.

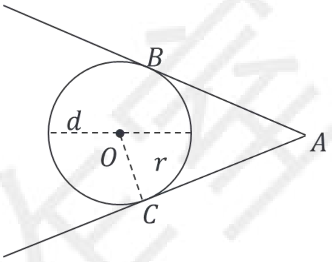
A.半径为r的圆,面积$S=\pi r^2=\frac{1}{4}\pi d^2$,周长$C=2\pi r=\pi d$

B.直径所对的圆周角是直角.

C.同一条弧所对应的圆周角是其所对应的圆心角的一半

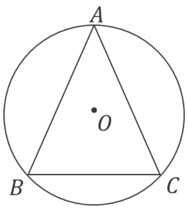
D.直径是圆中最长的弦

E.垂径定理(了解)



(2020)如图,圆O的内接$\triangle ABC$是等腰三角形,底边$BC=6$,顶角为$\frac{\pi}{4}$,则圆O的面积为(　　).

A. 12π　　B. 16π　　C. 18π　　D. 32π　　E. 36π



切线(平面几何):直线与圆只有一个交点,这条直线称之为圆的切线,这个交点称为圆的切点,过切点的半径与切线垂直.

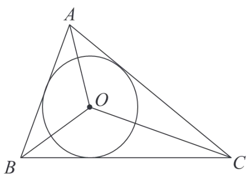
特别注意:题目中如果出现切线(切点)一定要连接半径.

扇形的弧长:$l=\frac{a}{360}\cdot 2\pi r$

扇形的面积公式:$S=\frac{a}{360}\cdot\pi r^2$

(2018)如图,圆O是三角形ABC的内切圆,若三角形ABC的面积与周长的大小之比为 1:2,则圆O的面积为(　　).

A. π　　B.2 π　　C.3 π　　D.4 π　　E.5 π



考点三 等边三角形的内切圆与外接圆

等边三角形的外接圆与内切圆半径

设边长为a的等边三角形,其内切圆半径为$\frac{\sqrt{3}}{6}a$,其外接圆半径为$\frac{\sqrt{3}}{3}a$.

任意直角三角形的内切圆半径为$\frac{a+b-c}{2}$,其中a,b为直角边,c为斜边.

任意三角形面积公式: $S=\frac{(a+b+c)r}{2}$

考点四 正方形的内接圆与外切圆

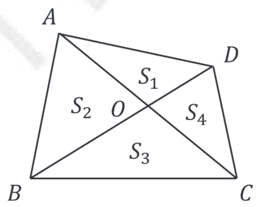
设正方形的边长为a,则

正方形的内切圆半径:$r=\frac{a}{2}$

正方形的外接圆半径:$r=\frac{\sqrt{2}}{2}a$

考点五 蝶形定理(针对任意四边形)

对于任意四边形而言,有:



$S_1:S_2=S_4:S_3$,即$S_1\cdot S_3=S_2\cdot S_4$

$AO:OC=(S_1+S_2):(S_3+S_4)$

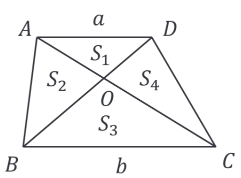
$DO:OB=(S_1+S_4):(S_2+S_3)$

蝶形定理(针对任意梯形)

对于任意梯形$ABCD$,假设上底$AD=a$,下底$BC=b$,

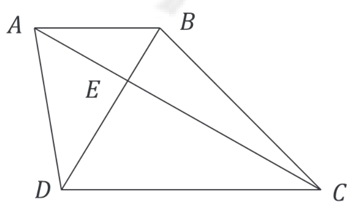
则$S_1:S_2:S_3:S_4=a^2:ab:b^2:ab$.

特别注意:上式仅表示比例,不表示大小.



(2016)如图,在四边形$ABCD$中,$AB//CD$,与AB与CD的边长分别为 4 和 8.若$\triangle ABE$的面积为 4,则四边形$ABCD$的面积为(　　).

A.24　　B.30　　C.32　　D.36　　E.40



立体几何

考点一 立体几何公式考察

(1)长方体

体积:$V = abc$

全面积:$S = 2(ab + ac + bc)$

体对角线:$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

所有棱长和:$l = 4(a + b + c)$

注意:当$a = b = c$时为正方体

(2020)能确定长方体的体对角线.

(1)已知长方体一个顶点的三个面的面积.

(2)已知长方体一个顶点的三个面的面对角线.

(2)正方体

设正方体的棱长为a,则

体积:$V = a^3$

表面积:$S = 6a^2$

所有棱长和:$12a$

体对角线:$\sqrt{3}a$

(3)圆柱

设圆柱的底面半径为r,高为h,则

体积:$V = \pi r^2 h$(所有的圆柱,所有的棱柱,其体积均为:底面积×高)

圆柱的侧面展开图为一个矩形(长为底面周长,宽为高)

侧面积:$S = 2\pi rh$

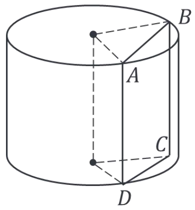
全面积:$F = 2\pi rh + 2\pi r^2$(圆柱两个底面)

圆柱的轴截面为一个矩形(长为底面直径,宽为高)

注:区分圆柱的侧面展开图和轴截面的区别

(2018)如图,圆柱体的底面半径为2,高为3,垂直于底面的平面截圆柱体所得截面为矩形$ABCD$.若弦AB所对的圆心角是$\frac{\pi}{3}$,则截掉部分(较小部分)的体积为(　　).

A.$\pi-3$　　B. $2\pi-6$　　C. $\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}$　　D. $2\pi-3\sqrt{3}$　　E. $\pi-\sqrt{3}$



(4)球体:

半径为r的球体,体积:$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

表面积:$S=4\pi r^2$

(某模拟题)若正三棱柱的底面边长为 3,侧棱长为 $2\sqrt{6}$,则该正三棱柱的体积为(　　).

A.$\frac{27}{2}\sqrt{2}$　　B.$\frac{27}{2}\sqrt{3}$　　C.$9\sqrt{2}$　　D.$9\sqrt{3}$　　E.以上答案均不正确

考点二 内切球,外接球,外接半球

设正方体的棱长为a,球体的半径为r

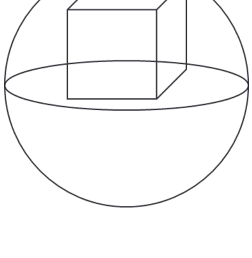
则正方体的内切球半径:$r=\frac{a}{2}$

正方体的外接球半径:$r=\frac{\sqrt{3}}{2}a$

正方体的外接半球半径:$r=\frac{\sqrt{6}}{2}a$

(2019)如图,正方体位于半径为 3 的球内,且一面位于球的大圆上,则正方体表面积最大为(　　).

A.12　　B.18　　C.24　　D.30　　E.36



(2021)若球体的内接正方体的体积为 $8m^3$,则该球体的表面积为(　　)m^2.

A. 4π　　B. 6π　　C. 8π　　D. 12π　　E. 24π

考点三:立方体的切割,融合问题

对于几何体的切开问题,新增加的表面积等于切面面积的 2 倍,对于融合问题,减少的表面积等于融合面积的 2 倍.对于融合问题,我们主要借助的是体积不变进行求解.

注意:无论是切开还是融合,表面积都发生了变化,但是体积不变.

解析几何

考点一 直线在平面直角坐标系中的分布情况

(1997)当$ab < 0$,直线$y = ax + b$必然(　　).

A.经过一、二、四象限　　B.经过一、三、四象限　　C.在y轴上的截距为正数

D.在x轴上的截距为正数　　E.在x轴上的截距为负数

考点二 点

两点间的距离d为:$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

中点坐标公式:两点 A (x_1, y_1)与点 B (x_2, y_2)则线段 AB 的中点 C (x_3, y_3)

$x_3 = \frac{x_1+x_2}{2}$, $y_3 = \frac{y_1+y_2}{2}$.

平面直线的倾斜角和斜率

A.直线的倾斜角:直线与x轴正方向所成的夹角称之为直线的倾斜角,记为$\angle A$,其中要求$\angle A$的范围是$[0, \frac{\pi}{2}) \cup (\frac{\pi}{2}, \pi)$,其中

当倾斜角范围在$(0, \frac{\pi}{2})$时,斜率$k > 0$,单调递增

当倾斜角范围在$(\frac{\pi}{2}, \pi)$时,斜率$k < 0$,单调递减

B.斜率:倾斜角的正切值称之为斜率

C.两点之间的斜率的计算公式,设直线l上有两个点$P(x_1, y_1)$, $Q(x_2, y_2)$

则斜率$k = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$(只要按照顺序写都没问题)

D.斜率的含义:表示直线增减的快慢程度(描述直线走势的缓急程度)

斜率的绝对值越大,直线增长(减少)的幅度越快,倾斜程度越陡

斜率的绝对值越小,直线增长(减少)的幅度越慢,倾斜程度越缓

考点三 直线方程的常见形式

(1)点斜式:过点$P(x_0, y_0)$斜率为k的直线方程为$y - y_0 = k(x - x_0)$

(2)斜截式:斜率为k,在y轴上的截距为b(即直线过点$(0, b)$)的直线方程为$y = kx + b$

(3)截距式:设直线在x轴上的截距为a,即直线过$(a, 0)$点,在y轴上截距为b,即过直线$(0, b)$点,则直线方程为$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, a \neq 0, b \neq 0$

(4)一般式:$ax + by + c = 0$,其中a, b不能全为 0

点到直线的距离公式以及直线间的距离公式

A.点到直线的距离公式:

点(x_0,y_0)到直线$ax+by+c=0$ 的距离$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

B.平行直线间的距离公式:只有平行的直线间才存在距离

直线$ax+by+c=0$ 与直线$ax+by+d=0$ 的距离$d=\frac{|c-d|}{\sqrt{a^2+b^2}}$

注:有的时候前后的a,b可能不一致,但是$a:b$是一个定值,这时需要把前后的a,b放缩一致再进行求解.

关于直线问题的固定做题体系

在所有的涉及直线的问题中,请同学们按照以下固定套路进行:

A.表示直线方程用斜截式

B.求直线方程用点斜式

C.涉及点到直线距离公式时用一般式

考点四 圆

(1)圆的方程

A.圆的标准方程:当圆心坐标为(x_0,y_0),半径为r时,圆的标准方程为:$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2(r>0)$特别地:当圆心为原点的时候,圆的标准方程为$x^2+y^2=r^2$ $(r>0)$定义域

B.圆的一般方程:$x^2+y^2+ax+by+c=0$

将其配方后得:$(x+\frac{a}{2})^2+(y+\frac{b}{2})^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}>0$

其中:圆心坐标为$(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})$,半径$r=\frac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}>0$

特别提醒:圆的一般方程仅仅是在设方程时用到(仅作了解即可).

其他情况请一概将圆的一般方程化为圆的标准方程进行解题(体系).

直线和圆的位置关系

判断直线与圆的位置关系有两种方法

A.联立方程组,用一元二次函数的思想解题(代数法)

B.通过比较圆心到直线的距离d和半径r的大小进行解题(解析法)

关于直线与圆的位置关系的不同自然语言的表达

(1)直线与圆有交点:相切+相交

(2)直线与圆没有交点:相离

(3)直线与圆不相交=相切或相离或

解析几何中的特殊直角三角形

特别注意:

在直线与圆相交时,我们会用到一个相当关键的直角三角形,用于解弦长,记住此时解得的弦长是半弦长!

(某模拟题)方程$x^2+y^2+4mx-2y+5m=0$表示一个圆,则m的取值范围为(　　).

A.$\frac{1}{4}<m<1$　　B.$m<\frac{1}{4}$或$m>1$　　C.$m<\frac{1}{4}$　　D.$m>1$　　E.$1<m<4$

(2011)已知直线$y=kx$与圆$x^2+y^2=2y$有两个交点A和B,若弦AB的长度大于$\sqrt{2}$,则k的取值范围是(　　).

A.$(-\infty,-1)$　　B.$(-1,0)$　　C.$(0,1)$　　D.$(1,+\infty)$　　E.$(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

(2017)$x^2+y^2-ax-by+c=0$与x轴相切,则能确定c的值.

(1)已知a的值.

(2)已知b的值.

(2018)设x,y是实数,则圆$x^2+y^2=2y$与直线$x+ay=b$不相交.

(1)$|a-b|>\sqrt{1+a^2}$.

(2)$|a+b|>\sqrt{1+a^2}$.

(2019)直线$y = kx$与圆$x^2 + y^2 - 4x + 3 = 0$ 有两个交点.

(1)$-\frac{\sqrt{3}}{3} < k < 0$.

(2)$0 < k < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(2020) $x^2 + y^2 = 2x + 2y$上的点到$ax + by + \sqrt{2} = 0$ 的距离最小值大于 1.

(1)$a^2 + b^2 = 1$.

(2)$a > 0, b > 0$.

(2021)设a为实数,圆$C: x^2 + y^2 = ax + ay$,则能确定圆C的方程.

(1)直线$x + y = 1$ 与圆C相切.

(2)直线$x - y = 1$ 与圆C相切.

圆和圆的位置关系

圆和圆的位置关系的本质是两个圆心的之间的距离,两个圆心之间距离的本质是两点之间距离公式

解决圆和圆的位置关系的第一步操作是将圆的一般方程化为圆的标准方程,然后利用圆心距和半径的关系进行判断

当$d > r_1 + r_2$,两圆外离,有四条公切线(4)

当$d = r_1 + r_2$,两圆外切,有三条公切线(3)

当$r_1-r_2<d<r_1+r_2$,两圆相交,有两条公切线(2)

当$d=r_1-r_2$,两圆内切,有一条公切线(1)

当$d<r_1-r_2$,两圆内含,无公切线(0)

注意:

(1)两圆相切=内切+外切

(2)两圆有交点:内切+外切+相交

(3)两圆没有交点:内含+外离

(4)两圆不相交=相切或相离或内含

(某模拟题)两圆$x^2+y^2-4x+2y+1=0$与$x^2+y^2+4x-4y-1=0$的公切线有(　　).

A.1 条　　B.2 条　　C.3 条　　D.4 条　　E.5 条

圆的切线问题

切线的定义:

1.如果一条直线与几何图形(任意图形)有且仅有一个交点,那么称该直线为该几何图形的切线.

2.圆的切线:一条直线与圆有且仅有一个交点.

3.在圆上切线的性质:

(1)切线在切点处和半径垂直(即切线与切点和圆心所成直线垂直).

(2)切点到圆心的距离等于半径(两点之间距离公式).

备注:出现切线一定要连接半径,因为切线必须要和半径配套使用.

(2011)设p是圆$x^2+y^2=2$上的一点,并且该圆在点p的切线平行于直线$x+y+2=0$,则点p的坐标为(　　).

A.$(-1,1)$　　B.$(1,-1)$　　C.$(0,\sqrt{2})$　　D.$(-\sqrt{2},0)$　　E.$(1,1)$

(2014)已知直线l是圆$x^2+y^2=5$在点(1,2)处的切线,则l在y轴上的截距为(　　).

A.$\frac{2}{5}$　　B.$\frac{2}{3}$　　C.$\frac{3}{2}$　　D.$\frac{5}{2}$　　E.5

(2018)已知圆$C:x^2+(y-a)^2=b$,若圆C在点(1,2)处的切线与y轴的交点为(0,3),则$ab=$(　　).

A.-2　　B.-1　　C.0　　D.1　　E.2

考点五 解析几何特殊面积公式的考察

总结:$|ax-b|+|cy-d|=e$(当$a=c$时,表示正方形.当$a\neq c$时为菱形),围成的面积均为$S=\frac{2e^2}{ac}$,其中b、d只影响图形的中心位置,不影响图形的面积.

$|xy|-a|x|-b|y|+ab=0$,其中a,b都大于0,当$a=b$时,该式子表示一个正方形,当$a\neq b$时,该式子表示一个矩形,面积均为$4ab$.

(2009)曲线$|xy|+1=|x|+|y|$所围成的图形的面积为(　　).

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{2}$　　C.1　　D.2　　E.4

(某模拟题)由曲线$|x|+|2y|=4$所围成的图形的面积为(　　).

A.12　　B.14　　C.16　　D.18　　E.8

考点六 平面几何和解析几何的综合

(2014)已知x,y为实数,则$x^2+y^2\geq 1$.

(1)$4y-3x\geq 5$.

(2)$(x-1)^2+(y-1)^2\geq 5$.

(2021)设x,y为实数,则能确定$x\leq y$.

(1)$x^2\leq y-1$.

(2)$x^2+(y-2)^2\leq 2$.

(2020)设实数x,y满足$|x-2|+|y-2|\leq 2$,则x^2+y^2的取值范围是(　　).

A.[2,18]　　B. [2,20]　　C. [2,36]　　D. [4,18]　　E. [4,20]

(2021)已知$ABCD$是圆$x^2+y^2=25$的内接四边形,若A、C是直线$x=3$与圆$x^2+y^2=25$的交点,则四边形$ABCD$面积的最大值为(　　).

A.20　　B.24　　C.40　　D.48　　E.80

排列组合

排列组合的基本步骤(固定解题思路)

先取后排:即先取出元素,后排列元素,切勿边取边排.

逐次进行:按照一定的顺序逐次进行排列组合.

实验结束:整个实验过程必须完成.

考点一 分类讨论

(某模拟题)在 1,2,3,4,5 这五个数字中任取三个数,组成没有重复数字的三位数中,各位数字之和为偶数的情况共有(　　)种.

A.36　　B.24　　C.18　　D.6　　E.4

(2021)甲、乙两组同学中,甲组有 3 男 3 女, 乙有 4 男 2 女,从甲、乙两组中各选出 2 名同学,这 4 人中恰有 1 女的选法有(　　)种.

A. 26　　B. 54　　C.70　　D. 78　　E. 105

考点二 全能(特殊)元素问题(分类讨论思路)

全能元素在题目中考官通常会描述为一个元素具有两种属性,既会A也会B(全能人)

特殊元素在题目中考官通常会描述为对某一元素有特殊要求(例如:A一定要……,A一定不能……)

对于这种固定出题模式的全能(特殊)元素问题,我们的解题思路也很固定:对全能(特殊)元素要/不要,或者要几个进行分类讨论即可

(2011)在 8 名志愿者中,只能做英语翻译的有 4 人,只能做法语翻译的有 3 人,既能做英语翻译又能做法语翻译的有 1 人,现在从这些志愿者中选取 3 人做翻译工作,确保英语和法语都有翻译的不同选法共有(　　)种.

A.12　　B.18　　C.21　　D.30　　E.51

(某模拟题)从5个文艺节目中选取4个编排成一个节目单,如果某女演员的舞蹈节目一定不能排在第三个节目的位置上,则共有(　　)种不同的排法.

A.48　　B.60　　C.72　　D.96　　E.120

考点三 隔板法

隔板法的要求条件相当严格,必须具备以下 3 个条件,缺一不可.

A.所要分的物品必须完全相同

B.所要分的物品必须全部分完,不允许有剩余

C.参与分物品的每个成员至少分到一个,分配不允许空

结论:将n个完全相同的元素分给m个对象$(m \le n)$如果分配对象非空,即每人至少分得一个则有C_{n-1}^{m-1}种方法,如果分配对象允许空,则有C_{n+m-1}^{m-1}种方法.

(2009)若将 10 只完全相同的小球,随机放入编号为 1、2、3、4 的四个盒子中,则每个盒子不空的投放方法有(　　)种.

A.72　　B.84　　C.96　　D.108　　E.120

(某模拟题)将 20 个相同的小球放入编号为1,2,3 的三个盒子中,要求每个盒内的球数不少于它的编号数,则不同的方法数是(　　).

A.40　　B.64　　C.72　　D.120　　E.144

(某模拟题)将 20 个完全相同的小球放入 4 个盒子中,要求每个盒子至少放两个小球,则不同的放法共有(　　)种.

A.155　　B.165　　C.178　　D.273　　E.199

考点四 对号与不对号问题

元素对号入座只有一种方法,元素不对号请大家记住答案

两个不对号	1 种方法
三个不对号	2 种方法
四个不对号	9 种方法
五个不对号	44 种方法

注意:

(1)所有的对号问题全部转化为不对号问题进行求解

(2)考虑不对号元素的同时,还要考虑对号问题

(2011)某单位决定对 4 个部门的经理进行轮岗,要求每位经理必须轮换到 4 个部门的其他部门任职,则不同的轮岗方案有(　　)种.

A.3　　B.6　　C.8　　D.9　　E.10

(2018)某单位为检查 3 个部门的工作,由这 3 个部门的主任和外聘的 3 名人员组成检查组,分 2 人一组检查工作,每组有 1 名外聘成员.规定本部门主任不能检查本部门,则不同的安排方式有(　　).

A.6 种　　B.8 种　　C.12 种　　D.18 种　　E.36 种

考点五 分堆与分配问题

如果分堆时,若出现相同数量的堆数时,要除以相同堆数的阶乘,以消除排序,如果出现分配问题时,注意先分堆后分配.

如果题目需要分配,一定会有非常明确的自然语言的表达,例如:干三项不同的工作,去三个不同的地方.

(2001)将 4 封信投入三个不同的邮箱,若四封信全部投完,且每个邮筒至少投入一封信,则共有投法(　　).

A.12　　B.21　　C.36　　D.42

(2010)某大学派出 5 名志愿者到西部的 4 所中学支教,若每所中学至少有一名志愿者,则不同的分配方案有(　　)种.

A.240　　B.144　　C.120　　D.60　　E.24

(2017)将 6 人分成 3 组,每组 2 人,则不同的分组方式共有(　　).

A.12　　B.15　　C.30　　D.45　　E.90

(2018)将 6 张不同的卡片 2 张一组分别装入甲、乙、丙 3 个袋中,若指定的两张卡片要在同一组,则不同的装法有(　　).

A.12 种　　B.18 种　　C.24 种　　D.30 种　　E.36 种

(2020)某科室有 4 名男职员,2 名女职员,若将这 6 名职员分为 3 组,每组 2 人,且女职员不同组,则不同的安排方式有(　　)种.

A.4　　B.6　　C.9　　D.12　　E.15

(2020)已知甲、乙、丙三人共捐款 3500 元,则能确定每人捐款金额.

(1)三人的捐款金额各不相同.

(2)三人的捐款金额都是 500 的倍数.

注意:关于分堆与分配问题分配与否的自然语言的表达

(1)将 6 个不同的小球等分为甲,乙,丙三组

(2)将 6 个不同的小球等分为三组

(3)将 6 个不同的小球等分为三组,去从事甲,乙,丙三项不同的工作

备注:如果要分配,考官一定会有非常明确的自然语言的表达,例如:做不同的工作,去三个不同的地方等等,一定不要对于是否分配的判断进行脑补.

考点六 分房模型

分房模型的出题模式:可以理解为一种分步计数原理(乘法原理),在分配时没有任何的条件限制的要求时,就是分房模型的出题思路.

分房模型的解题思路:自问自答(当作分步计数原理进行分析和解决).

(某模拟题)5 个人参加 4 个不同的项目,每人都只报一项,则不同的报法有(　　)种.

A.120　　B.625　　C.1024　　D.240　　E.1200

(某模拟题)将 4 个不同的奖项分给 3 个人,则有分法(　　)种.

A.9　　B.27　　C.81　　D.144　　E.288

分房,分堆分配,隔板之间的区别及出题模式

(1)将 5 个不同的小球放入 4 个不同的盒子里.

(2)将 5 个完全相同的小球放入 4 个不同的盒子里,每个盒子至少一个.

(3)将 5 个不同的小球放入 4 个不同的盒子里,每个盒子至少一个.

考点七 成双问题(配对问题)

配对问题的解题思路:核心在于成双不成双,对于成双问题,直接选取整双即可,对于不成双问题,要先取成双的,然后从每双中取单只即可.

特别注意:要注意单位的统一(“双”和“只”的区分)

(2002)从 6 双不同的鞋子中任取 4 只,则其中没有成双鞋子的概率是(　　).

A.$\frac{4}{11}$　　B.$\frac{5}{11}$　　C.$\frac{16}{33}$　　D.$\frac{2}{3}$

(2019)某中学的 5 个学科各推荐 2 名教师作为支援候选人,若从中选出来自不同学科的 2 人参加支援工作,则不同的选派方式有(　　)种.

A.20　　B.24　　C.30　　D.40　　E.45

考点八 循环赛问题

n名选手进行单循环比赛,一共需要比赛C_n^2场,其中每个选手比赛$n-1$场.

n名选手进行双循环比赛,一共需要比赛$C_n^2\cdot 2$场,其中每个选手比赛$2(n-1)$场.

(2012)某次乒乓球单打比赛中,现将 8 名选手分为 2 个小组进行单循环比赛,若一位选手只打了一场比赛之后因故退赛,则小组赛实际的比赛场数为(　　).

A.24　　B.19　　C.12　　D.11　　E.10

概率

考点一 取球问题

(2017)甲从 1、2、3 中抽取一个数,记为a,乙从 1、2、3、4 抽取一个数,记为b,规定当$a > b$或$a + 1 < b$时甲获胜,则甲获胜的概率(　　).

A.$\frac{1}{6}$　　B.$\frac{1}{4}$　　C.$\frac{1}{3}$　　D.$\frac{5}{12}$　　E.$\frac{1}{2}$

(2001)一只口袋中有 5 只同样大小的球,编号分别为 1,2,3,4,5,现在从中随机抽取 3 个球,则取到的球中最大号码是 4 的概率为(　　).

A.0.3　　B.0.4　　C.0.5　　D.0.7

(2020)从 1 至 10 这 10 个整数中任取 3 个数,恰有 1 个质数的概率是(　　).

A. $\frac{2}{3}$　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{5}{12}$　　D. $\frac{2}{5}$　　E. $\frac{1}{120}$

(2020)某商户有 20 部手机,从中任选 2 部,则恰有 1 部甲的概率为$p > \frac{1}{2}$.

(1)甲手机不少于 8 部.

(2)乙手机大于 7 部.

考点二 分房模型

(2011)若 2 只红球与 1 只白球随机地放入甲、乙、丙三个盒子里,则乙盒中至少有 1 个红球的概率为(　　).

A.$\frac{1}{8}$　　B.$\frac{8}{27}$　　C.$\frac{4}{9}$　　D.$\frac{5}{9}$　　E.$\frac{17}{27}$

(1999)将 3 人分配到 4 间房的每一间中,若每个人被分配到这 4 间房的每一间房中的概率都相同,则一、二、三房间中各有 1 人的概率为(　　).

A.$\frac{3}{4}$　　B.$\frac{3}{8}$　　C.$\frac{3}{16}$　　D.$\frac{3}{32}$　　E.$\frac{3}{64}$

考点三 穷举法

(2016)在分别标记了数字 1、2、3、4、5、6 的 6 张卡片中随机取 3 张,其上数字之和等于 10 的概率(　　).

A.0.05　　B.0.1　　C.0.15　　D.0.2　　E.0.25

(2018)从标号为 1 到 10 的 10 张卡片中随机抽取 2 张,他们的标号之和能被 5 整除的概率为(　　).

A.$\frac{1}{5}$　　B.$\frac{1}{9}$　　C.$\frac{2}{9}$　　D.$\frac{2}{15}$　　E.$\frac{7}{45}$

(2019)在分别标记 1,2,3,4,5,6,的 6 张卡片上,甲抽取 1 张,乙从余下的卡片中再抽取 2 张,乙的卡片数字之和大于甲的卡片数字的概率为(　　).

A. $\frac{11}{60}$　　B. $\frac{13}{60}$　　C. $\frac{43}{60}$　　D. $\frac{47}{60}$　　E. $\frac{49}{60}$

考点四 猜密码问题

(2000)某人忘记了三位数号码锁(每一位均有 0-9 十个数码)的最后一个数码,因此在正确拨出前两个数码后,只能随机的试拨最后一个数码,每拨一次算做一次试开,则他在第四次试开时才将锁打开的概率为(　　).

A.$\frac{1}{4}$　　B.$\frac{1}{6}$　　C.$\frac{2}{5}$　　D.$\frac{1}{10}$

(2010)某装置的启动密码由 0-9 中的 3 个不同的数字组成,连续 3 次输入错误密码,就会导致该装置永久关闭,一个仅记得密码是有 3 个不同数字组成的人能够启动该装置的概率为(　　).

A.$\frac{1}{120}$　　B.$\frac{1}{168}$　　C.$\frac{1}{240}$　　D.$\frac{1}{720}$　　E.$\frac{1}{1000}$

(2021)某商场利用抽奖方式促销,100 个奖券中设有 3 个一等奖,7 个二等奖,则一等奖先于二等奖抽完的概率为(　　).

A.0.3　　B.0.5　　C.0.6　　D.0.7　　E.0.73

猜密码问题秒杀思路总结:

(1)先求出第一次猜出密码的概率

(2)看题目问的问题:考官只有两种问法

A.第n次打开的概率是多少(不管第几次,都是第一次)

B.一共有n次机会尝试打开密码(直接在第一次的基础上乘n就是秒杀答案)

考点五 伯努利公式

(2008)张三以卧姿设计 10 次,命中靶子 7 次的概率为$\frac{15}{128}$.

(1)张三以卧姿打靶的命中率是 0.2.

(2)张三以卧姿打靶的命中率是 0.5.

应用题

应用题考官细分思路

(1)利润问题

(2)基准量问题

(3)工程问题

(4)路程问题

(5)浓度问题

(6)集合问题(集合问题几何化)

(7)分段计费问题

(8)不定方程问题

(9)年龄问题

(10)杠杆原理——交叉法

(11)植树问题

(12)最值问题

(13)最优解问题

(14)多个比例统一问题

考点一 基准量问题

(1)A 比 B 大$p\%(\frac{1}{n})$.

(2)A 是 B 的n倍(A 是 B 的……).

(3)A 比 B 大 P.

基准量问题的出题模式非常固定,即:A比B多(少)$P\%$.

我们的解题思路也很固定:记住“比”后面的量叫基准量,我们必须设基准量为未知数x

(2019)某车间计划 10 天完成一项任务,工作了 3 天后因故停工 2 天,若要按原计划完成任务,则工作效率需要提高(　　).

A.20%　　B.30%　　C.40%　　D.50%　　E.60%

考点二 路程问题

路程s,速度v,时间t之间的关系

(和工程问题一样,所有的路程问题只用一个公式求解,即$s=vt$)

$s=vt$　　$t=\frac{s}{v}$　　$v=\frac{s}{t}$

备注:路程问题一定要注意单位的统一

直线型的相遇:速度和

直线型的追及:速度差

圆圈型的相遇:速度和

圆圈型的追及:速度差

(2009)甲、乙在环形跑道上跑步,他们同时从起点出发,当方向相反时每隔 $48s$相遇一次,当方向相同时,每隔 10 分钟相遇一次.若甲比乙每分钟快 $40m$,则甲乙两人的速度分别是(　　)米/分钟.

A.470,430　　B.380,340　　C.370,330　　D.280,240　　E.270,230

(2021)甲、乙两人相距 330 千米,他们驾车同时出发,经过 2 小时相遇,甲继续行驶 2 小时 24 分钟后到达乙的出发地,则乙的车速为(　　).

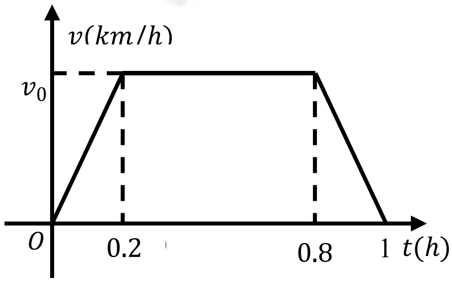
A.70km/h　　B.75km/h　　C.80km/h　　D.90km/h　　E.96 km/h

(2020)甲乙两人在相距 1800m的 A、B 两地相对运动,甲的速度为 100m/min,乙的速度为 80m/min,则两人第三次相遇时,甲距其出发点(　　)米.

A.600　　B.900　　C.1000　　D.1400　　E.1600

(2019)货车行驶 72km 用时 1 小时,速度v与行驶时间 t 的关系如图所示,则v_0=(　　).

A.72　　B.80　　C.90　　D.85　　E.100



(2011)一列火车匀速行驶,通过一座长为 $250m$的桥梁需要 10 秒,通过一座长为 $450m$的桥梁需要 15 秒,该火车通过长为 $1050m$的桥梁需要(　　)秒.

A.22　　B.25　　C.28　　D.30　　E.35

(2012)甲、乙、丙三人同时在起点出发进行 1000 米的自行车比赛(假设他们各自的速度保持不变)甲到终点时,乙距离终点还有 40 米,丙距离终点还有 64 米,那么乙到达终点时,丙距离终点还有(　　)米.

A.21　　B.25　　C.30　　D.35　　E.39

$v_{顺水} = v + v_{水}$　　　　$v_{逆水} = v - v_{水}$

对于顺水,逆水问题而言,仅仅是速度发生了变化,其核心思路依然是路程问题,依然采用$s = vt$这个公式进行求解即可.

(2011)已知船在静水中的速度为 28km/h, 水流速度为 2km/h, 则此船在相距 78km 的两地往返一次所需要的时间是(　　).

A.5.9h　　B.5.6h　　C.5.4h　　D.4.4h　　E.4h

考点三 浓度问题

浓度问题考官只有三种考察思路

(1)什么不变就以什么不变列等式求解(浓度公式).

(2)杠杆原理交叉法.

(3)浓度置换公式.

(2011)含盐 12.5%的盐水 40kg 蒸发掉部分水之后变成了含盐 20%的盐水,蒸发掉水分的重量为(　　)kg.

A.19　　B.18　　C.17　　D.16　　E.15

(2011)某种新鲜水果的含水量为 98%,一天后的含水量降为 97.5%.某商店以每斤 1 元的价格购进了 1000 斤新鲜水果,预计当天能售出 60%,两天内售完.要使利润维持在 20%,则每斤水果的平均售价应定为(　　)元.

A.1.20　　B.1.25　　C.1.30　　D.1.35　　E.1.40

(2021)现有甲、乙两种浓度酒精,已知用 10 升甲酒精和 12 升乙酒精可以配成浓度为 70%的酒精,用 20 升甲酒精和 8 升乙酒精可以配成浓度为 80%的酒精,则甲酒精的浓度为(　　).

A.72%　　B.80%　　C.84%　　D.88%　　E.91%

浓度置换公式

设一份溶液:原浓度为a,现浓度为b,容器的容积为V,第一次倒出m_1溶液后用水加满,第二次倒出m_2溶液后用水加满……,第n次倒出m_n溶液后用水加满,则有公式:

$$a \cdot \frac{V-m_1}{V} \cdot \frac{V-m_2}{V} \cdots \frac{V-m_n}{V} = b$$

(2012)一桶纯酒精倒出 10L 后,加满水搅匀,再倒出 4L 后,再加满水,此时,桶中的纯酒精与水的体积之比为 2: 3,则该桶的容积是(　　).

A.15L　　B.18L　　C.20L　　D.22L　　E.25L

考点四 集合问题

(2017)老师问班上 50 名同学周末复习情况,结果有 20 人复习过数学,30 人复习过语文,6 人复习过英语,且同时复习过数学和语文的有 10 人,同时复习过语文和英语的有 2 人,同时复习过英语和数学的有 3 人.若同时复习过这三门课的人为 0,则没有复习过这三门课程的学生人数为(　　).

A.7　　B.8　　C.9　　D.10　　E.11

(2018)有 96 位顾客至少购买了甲、乙、丙三种商品的一种,经过调查,同时购买了甲、乙两种商品的有 8 位,同时购买了甲、丙两种商品的有 12 位,同时购买了乙、丙两种商品的有 6 位,同时购买了 3 种商品的有 2 位,则仅购买了一种商品的顾客有(　　)位.

A.70　　B.72　　C.74　　D.76　　E.82

(2021)某便利店第一天售出 50 种商品,第二天出售 45 种,第三天售出 60 种,前两天售出有 25 种相同,后两天售出商品有 30 种相同,这三天售出商品至少有(　　)种.

A.70　　B.75　　C.80　　D.85　　E.100

考点五 分段计费问题

(2018)某单位采取分段收费的方式收取网络流量(单位:GB)费用,每月流量 20(含)以内免费,流量 20 到 30(含)的每 GB 收费 1 元,流量 30 到 40(含)的每 GB 收费 3 元,流量 40 以上的每 GB 收费 5 元,小王这个月用了 45GB 的流量,则他应该缴费(　　)元.

A.45　　B.65　　C.75　　D.85　　E.135

考点六 不定方程问题

(2015)利用长度为a和b的两管材能连接成长度为 37 的管道(米).

(1)$a = 3, b = 5$.

(2)$a = 4, b = 6$.

(2021)某人购买了果汁、牛奶、咖啡三种物品,已知果汁每瓶 12 元,牛奶每瓶 15 元,咖啡每瓶 35 元,则能确定所买各种物品的数量.

(1)总花费为 104 元.

(2)总花费为 215 元.

(2020)共有n辆车,则能确定人数.

(1)若每辆 20 座,1 车未满.

(2)若每辆 12 座,则少 10 个座.

考点七 年龄问题

特点主要是年龄的差值恒定,另一个是年龄的同步增长.

(某模拟题)今年祖父的年龄是小明年龄的 6 倍,几年后,祖父年龄是小明年龄的 5 倍,又过了几年后,祖父年龄是小明年龄的 4 倍,则祖父今年m岁.

(1)$m = 72$.

(2)$m = 66$.

(某模拟题)兄弟俩在讨论过去某一年发生的事情.哥哥现在的年龄是弟弟当年年龄的 3 倍,弟弟现在的年龄和哥哥当年的年龄相同,而现在兄弟俩年龄的和为 30 岁.则哥哥现在的年龄为(　　).

A.17 岁　　B.18 岁　　C.19 岁　　D.20 岁　　E.21 岁

考点八 杠杆原理——交叉法

杠杆交叉法:当一个整体按照某个标准分为两部分时,可以根据杠杆原理得到交叉法,快速求出两部分的数量比,交叉法不仅仅局限于平均值问题,只要涉及一个大量,一个小量以及他们混合后的平均量,一般都可以用交叉法计算,例如溶液的配比问题.

该方法的核心思路是出现上下列每部分的数值(大量和小量),然后与整体的平均数值相加减(中间量),减得的两个数值的比值就是上下两部分的数量比.

(2008)某班有学生 36 人,期末各科平均成绩为 85 分以上的为优秀生,若该班优秀生的平均成绩为 90 分,非优秀生的平均成绩为 72 分,全班平均成绩为 80 分,则该班优秀生的人数是(　　).

A.12　　B.14　　C.16　　D.18　　E.20

(2011)在一次英语考试中,某班的及格率为 80%.

(1)男生及格率为 70%,女生及格率为 90%.

(2)男生的平均分与女生的平均分相等.

(2016)已知某公司的男员工的平均年龄和女员工的平均年龄,则能确定该公司员工的平均年龄.

(1)已知该公司员工的人数.

(2)已知该公司男、女员工的人数之比.

考点九 植树问题

对于直线型(开放型)植树问题,如果长度为k米,每隔n米植树,则一共需要$\frac{k}{n}+1$棵树,对于圆圈型(封闭型)植树问题,如果周长为k米,每隔n米植树,则一共需要$\frac{k}{n}$棵树.

(2019)将一批树苗种在一个正方形花园边上,四角都种,如果每隔 3 米种一棵,那么剩下 10 棵树苗；如果每隔 2 米种一棵,那么恰好种满正方形的 3 条边,则这批树苗有(　　)棵.

A.54　　B.60　　C.70　　D.82　　E.94

考点十 应用题与二次函数的综合求最值问题

应用题与二次函数的综合求最值问题:主要利用二次函数的顶点公式求解,较为简单.

这种题目的出题模式非常固定:即这种题目通常以利润问题出现,然后问我们利润取得最值时售价为多少.

出题模式很固定:

A.商品每上涨n元,少卖m件.

B.商品每下降n元,多卖m件.

(2015)某商场将每台进价为 2000 元的冰箱以 2400 元销售时,每天销售 8 台,调研表明这种冰箱的售价每降低 50 元,每天就能多销售 4 台,若要使得每天的销售利润最大,则该冰箱的定价应该为(　　).

A.2200　　B.2250　　C.2300　　D.2350　　E.2400

思路十一 最优解问题

最优解问题的出题模式:

题目通常会给出两种模式的解决方案,然后让我们去通过这两种模式去解决题目中涉及的问题,然后利用花费最少或者成本最少进行合理分配两种模式(线性规划).

但是,线性规划的学院派解法是通过列不等式、画图找出可行域然后进行求解,这种方法很明显在联考这种“速度至上”的考题中是不可取的,我们的通常解法是列出不等式,找出参数的取值范围,然后根据题意进行近似交点取值试算即可.

(2012)某公司计划运送 180 台电视机和 110 台洗衣机下乡,现在两种货车,甲种货车每辆最多可载 40 台电视机和 10 台洗衣机,乙种货车每辆最多可载 20 台电视机和 20 台洗衣机,已知甲、乙种货车的租金分别是每辆 400 元和 360 元,则最少的运费是(　　).

A.2560 元　　B.2600 元　　C.2640 元　　D.2580 元　　E.2720 元

(2010)某居民小区决定投资 15 万元修建停车位,据测算,修建一个室内车位的费用为 5000 元,修建一个室外车位的费用为 1000 元,考虑到实际因素,计划室外车位的数量不少于室内车位的 2 倍,也不多于室内车位的 3 倍,这笔投资最多可建车位的数量为(　　).

A.78　　B.74　　C.72　　D.70　　E.66

最优解问题套路性总结及提醒

(1)不等式是不能相减的,但是对于最优解问题,这只是一个具有局限性的套路总结.

(2)如果算出来是整数,就直接取整,如果算出来是分数,就要在其附近处取值,根据题目问法不同,在“便宜,贵”这个标准上进行取值.

(3)在最优解问题中,不建议同学们去用线性规划,可行域的套路去做,这样会非常浪费时间,在考试的时候没有可实现性.

(4)等号−不等号需要变号(不等号−等号不需要变号)

注意:只变方向,而非补集.等号+不等号是不需要变号的,不等号+等号是不需要变号的.