数学

那可太好玩了

编者

王观旭

特供 · 第一版

Exclusive Limited Edition for the 1st Edition

序

本书旨对学习普通高中《数学（人教 A 版 · 2019）》的学生对本学科的学习提供便捷，本书并无过多的例题以及~~我写了也不会看的~~课后练习和作业。希望这本教材对读者有所帮助，便于翻阅查看资料和考试复习。

本书无法代替校内课上教学，并非必修及选必修教材的平替，内容涉及交叉知识，适合做模块或综合学习的学生使用。

由于编者水平有限，疏漏之处在所难免，恳请读者批评指正。[1]

收到纸质版的读者可进入https://guanxuwang.github.io/files/FunMath.pdf下载电子版，本书已添加 CC BY-NC-ND 4.0 许可证（详见本书封面页）。此许可证要求重复使用的用户向创建者提供信用。它允许再用户以未经改编的形式以任何媒介或格式复制和分发材料，并且仅用于非商业目的。[2]

本书的落实离不开以下各位的支持与帮助：

鸣谢

胡瑛时、张一凡、王禹祁、付靖煊、张曦月、王诗淇、赵修楠、陈起雯
曲恩良、黄译萱、郑淇予、陈冠驰、赵艺婷、梁晶妍、王瑞晨、范德言
李子旋、孙梓涵、肖雯莉、彭昱铮、车　略、曹津铭、王茜桐

特别鸣谢

段星宇

真理所在之处，数学生生不息。

编　者

[1]编者个人主页：guanxuwang.github.io，请用邮箱联系，欢迎读者提出意见和建议。

[2]This license requires that reusers give credit to the creator. It allows reusers to copy and distribute the material in any medium or format in unadapted form and for noncommercial purposes only.

增删改日志

2024 年 3 月 1 日至今 不间断对序言页鸣谢部分增删姓名。

2024 年 3 月 18 日 *§12.5.5 独立性检验*（*PDF112 页、页码 104 页*）对本页中下部表格格式进行调整。

2024 年 3 月 24 日 *§5.1.2-3. 向量的数乘（2）向量数乘运算的运算律*（*PDF40 页、页码 33 页*）后两条公式之间添加分号。

2024 年 4 月 3 日 *§9.2.1-2. 判定方法与性质-表9.2.1*（*PDF69 页、页码 61 页*）两行符号语言分别改为 $l \mathbin{/\!/} \alpha$ 和 $\alpha \mathbin{/\!/} \beta$。

Contents

Chapter 1

集合与常用逻辑用语

集合是刻画一类事物的语言和工具，使用集合语言可以简洁、准确地表述数学研究对象，提升数学抽象素养. 常用逻辑用语是数学语言的重要组成部分，是数学表达和交流的工具，是逻辑思维的基本语言，使用常用逻辑用语表达数学对象、进行数学推理，可以提高交流的严谨性与准确性，提升逻辑推理素养.

"数学在它自身的发展中完全是自由的，对他的概念限制只在于：必须是无矛盾的，并且与由确切定义引进的概念相协调……数学的本质就在于它的自由。"

——【德国】格奥尔格·康托尔（*Cantor, Georg Ferdinand Ludwig Philipp, 1845—1918*）

（集合论的创始人）

§1.1 集合

§1.1.1 集合的有关概念

1. 集合的定义

由一个或多个确定的元素所构成的整体，即集合是"确定的一堆东西".

2. 集合元素的特征

(1) **确定性**：集合中的元素必须是确定的，即对于给定一个集合和一个对象，这个对象是否为这个集合的元素，只有"是"与"不是"两种情况.

(2) **互异性**：集合中任何两个元素都是互不相同的，如集合 $\{1,2,3,3\}$ 就是错误的写法，应记为 $\{1,2,3\}$.

(3) **无序性**：集合与其组成元素的顺序无关，如 $\{a,b,c\}=\{c,a,b\}$.

3. 集合的常用表示方法

集合的常用表示法有列举法、描述法、图示法（Venn 图、数轴）和区间法.

① 描述法：

数集：$\{x|\text{描述}\}$，如 $\{x|x<-2 \text{ 或 } x\geqslant 5\}$；

点集：$\{(x,y)|\text{描述}\}$，如：$\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ 表示由圆心为 $(0,0)$，半径为 1 的圆上的点构成的集合.

② 区间法：通用的区间记号中，圆括号表示"排除"，方括号表示"包括".

例如：$\{x|x<-2\text{或}x\geqslant 5\}\Leftrightarrow(-\infty,-2)\cup[5,+\infty)$.

4. 常用数集的表示

集合	自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集	复数集
符号	$\mathbb{N}$	$\mathbb{N}^*$ 或 $\mathbb{N}^+$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Q}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$

§1.1.2 集合的关系

1. 元素与集合之间的关系

(1) 若 a 是集合 A 中的元素，则称 a **属于**集合 A，记作 $a\in A$.

(2) 若 a 不是集合 A 中的元素，则称 a **不属于**集合 A，记作 $a\notin A$.

2. 集合与集合之间的关系

子集关系（即包含关系）：相等或真子集.

(1) 子集：如果对任意 $a\in A$ 且 $a\in B$，则集合 A 是集合 B 的子集，记作 $A\subseteq B$（尽量不要记作 $B\supseteq A$），显然 $A\subseteq A$.

⋆ 相等：对于两个集合 A 与 B，如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么，记作 $A=B$.

(2) 真子集：对于两个集合 A 与 B，若 $A\subseteq B$，且存在 $b\in B$，但 $b\notin A$，则集合 A 是集合 B 的真子集，记作 $A\subsetneqq B$（尽量不要记作 $B\supsetneqq A$）.

⋆ 空集：不含有任何元素的集合，记作 $\varnothing$. 空集是任何集合的子集，是任何非空集合的真子集.

(3) 子集个数：由 n 个元素组成的集合 A 的子集有 2^n 个，非空子集有 2^n-1 个，真子集有 2^n-1 个，非空真子集有 2^n-2 个.

⋆ 集合 A 的子集有 2^n 个，从每个元素的取、舍来理解，即每个元素都有两种选择，则 n 个元素共有 2^n 种选择. 或从二**项式**角度理解，即 $\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}+\mathrm{C}_n^n=2^n$.

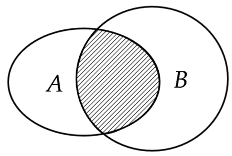
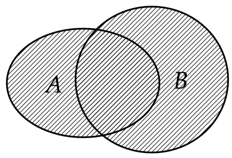
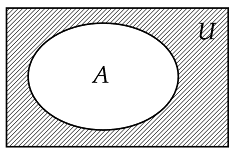
► $\varnothing$ 分别与 0，$\{0\}$，$\{\varnothing\}$ 之间的关系.

	$\varnothing$ 与 0	$\varnothing$ 与 $\{0\}$	$\varnothing$ 与 $\{\varnothing\}$
相同点	都表示"无"	都是集合	都是集合
不同点	$\varnothing$ 是集合； 0 是数.	$\varnothing$ 不含任何元素； $\{0\}$ 含一个元素是 0.	$\varnothing$ 不含任何元素； $\{\varnothing\}$ 含一个元素是 $\varnothing$.
关系	$0 \notin \varnothing$	$\varnothing \subsetneqq \{0\}$	$\varnothing \in \{\varnothing\}$ 或 $\varnothing \subsetneqq \{\varnothing\}$

3. 集合的基本运算与性质

集合的基本运算包括集合的交集、并集和补集运算.

三大运算的符号语言、Venn（韦恩）图表示以及运算性质，如下表所示.

运算	符号	符号语言	图像
交集	$\cap$	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{且} x \in B\}$	
并集	$\cup$	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{或} x \in B\}$	
补集	$\complement_U A$	$\complement_U A = \{x \mid x \in U \text{且} x \notin A\}$	

§1.2 命题与命题条件

§1.2.1 命题

1. 定义

用语言、符号或式子表达的，可以判断真假的陈述句叫做**命题**. 判断为真的语句叫做**真命题**，判断为假的语句叫做**假命题**.

2. 逻辑联结词

命题中的"且"、"或"、"非"叫做**逻辑联结词**，符号分别为"$\wedge$"、"$\vee$"、"$\neg$".

▷ 命题 $p \wedge q$，$p \vee q$，$\neg p$ 的真假判断.

p	q	$p \wedge q$	$p \vee q$	$\neg p$
真	**真**	真	真	假
真	**假**	假	真	
假	**真**	假	真	真
假	**假**	假	假	

3. 命题的形式

(1) 对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另外一个命题的结论和条件，那么这两个命题叫做**互逆命题**，其中一个命题叫做**原命题**，另外一个命题叫做原命题的**逆命题**，即

$$\text{若}p\text{，则}q \xrightarrow{\text{逆命题}} \text{若}q\text{，则}p.$$

(2) 对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另外一个命题的条件的否定和结论的否定，那么这两个命题叫做**互否命题**，其中一个命题叫做**原命题**，另外一个命题叫做原命题的**否命题**，即

$$\text{若}p\text{，则}q \xrightarrow{\text{否命题}} \text{若}\neg p\text{，则}\neg q.$$

(3) 对于两个命题，如果一个命题的条件和结论分别是另外一个命题的结论的否定和条件的否定，那么这两个命题叫做**互为逆否命题**，其中一个命题叫做**原命题**，另外一个命题叫做原命题的**逆否命题**，即

$$\text{若}p\text{，则}q \xrightarrow{\text{逆否命题}} \text{若}\neg q\text{，则}\neg p.$$

⋆ **否命题**的真假性一定与原命题的真假性**相反**.
逆否命题的真假性一定与原命题的真假性**相同**.
但是，**逆命题**的真假性与原命题的真假性关系**无法判断**.

§1.2.2　命题条件——充分条件与必要条件

1. 定义

若命题“若 p，则 q”为真（记作 $p \Rightarrow q$），则 p 是 q 的**充分条件**；同时 q 是 p 的**必要条件**.

2. 逻辑推理关系

(1) 若 $p \Rightarrow q$ 且 $p \not\Leftarrow q$，则 p 是 q 的充分不必要条件；

(2) 若 $p \not\Rightarrow q$ 且 $p \Leftarrow q$，则 p 是 q 的必要不充分条件；

(3) 若 $p \Rightarrow q$ 且 $p \Leftarrow q$，则 p 是 q 的充要条件（记作 $p \Leftrightarrow q$）；

(4) 若 $p \nRightarrow q$ 且 $p \nLeftarrow q$，则 p 既不是 q 的充分条件，也不是 q 的必要条件.

⋆ 记忆方法:"充要充要，先充后要".

若可正向推导，则**前者为后者**的充分条件；若可反向推导，则**前者为后者**的必要条件.

$$p \underset{\text{必要条件}}{\overset{\text{充分条件}}{\rightleftarrows}} q$$

3. 集合间关系

设 $A = \{x|x\text{具有性质}p(x)\}$，$B = \{x|x\text{具有性质}q(x)\}$.

(1) 若 $A \subseteq B$，则 p 是 q 的充分条件，q 是 p 的必要条件，即 $p \Rightarrow q$；

若 $A \subsetneqq B$，则 p 是 q 的充分不必要条件，q 是 p 的必要不充分条件，即 $p \Rightarrow q$ 且 $q \nRightarrow p$；

(2) 若 $B \subseteq A$，则 p 是 q 的必要条件，q 是 p 的充分条件（与 (1) 同理）；

(3) 若 $A = B$，则 p 与 q 互为充要条件.

§1.3 全称量词与存在量词

1. 全称量词与全称量词命题

短语"所有的"、"任意一个"在逻辑中通常叫作**全称量词**，并用符号"$\forall$"表示. 含有全称量词的命题叫作**全称量词命题**.

全称量词命题"对 M 中的任意一个 x，有 $p(x)$ 成立"可用符号简记为"$\forall x \in M, p(x)$".

2. 存在量词与存在量词命题

短语"存在一个"、"至少有一个"在逻辑中通常叫作**存在量词**，并用符号"$\exists$"表示. 含有存在量词的命题叫作**存在量词命题**.

存在量词命题"存在 M 中的一个 x_0，使 $p(x_0)$ 成立"可用符号简记为"$\exists x_0 \in M, p(x_0)$".

3. 含有一个量词的命题的否定

全称量词命题的否定是存在量词命题，存在量词命题的否定是全称量词命题，其结构为:

$$\forall x \in M, p(x) \xrightarrow{\text{否定}} \exists x_0 \in M, \neg p(x_0)$$

同理，

$$\exists x_0 \in M, p(x_0) \xrightarrow{\text{否定}} \forall x \in M, \neg p(x)$$

Chapter 2

不等式

不等关系是数学中最基本的数量关系之一，我们可以利用不等关系构建不等式，再通过不等式解决数学中的各种问题．同时不等式与函数之间具有内在联系，这也体现了数学知识的联系性与整体性．

“为了对学术的热爱而满足于庶民生活。”

——【英国】托马斯·哈里奥特（*Thomas Harriot, 1560—1621*）

（“$>$”和“$<$”符号的创始人）

§2.1 不等式的有关概念

1. 定义

用不等号（“$>$”“$<$”“$\geqslant$”“$\leqslant$”“$\neq$”等）连接的式子称为**不等式**.

2. 利用不等式比较两式（数）大小关系

(1) 作差法（最常用）：$a-b\begin{cases} >0 \ \Leftrightarrow \ a>b; \\ =0 \ \Leftrightarrow \ a=b; \\ <0 \ \Leftrightarrow \ a<b. \end{cases}$

(2) 作商法（$b>0$）：$\dfrac{a}{b}\begin{cases} >1 \ \Leftrightarrow \ a>b; \\ =1 \ \Leftrightarrow \ a=b; \\ <1 \ \Leftrightarrow \ a<b. \end{cases}$

3. 不等式的性质

(1) 对称性：$a>b \Leftrightarrow b<a$.

(2) 传递性：$a>b, b>c \Rightarrow a>c$.

(3) 可加性：$a>b \Rightarrow a+x>b+x$；$a>b, c>d \Rightarrow a+c>b+d$.

(4) 可乘性: $a>b,c>0\Rightarrow ac>bc$; $a>b,c<0\Rightarrow ac<bc$; $a>b>0,c>d>0\Rightarrow ac>bd$.

(5) 可乘方性: $a>b>0\Rightarrow a^n>b^n(n\in\mathbb{N}^*)$.

(6) 可开方性: $a>b>0\Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}(n\in\mathbb{N}^*,n\geqslant 2)$.

(7) 有关倒数的性质:

① $a>b,ab>0\Rightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$;

② $a<0<b\Rightarrow \dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$;

③ $a>b>0,0<c<d\Rightarrow \dfrac{a}{c}<\dfrac{b}{d}$;

④ $0<a<x<b$或$a<x<b<0\Rightarrow \dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{a}$.

(8) 糖水不等式: $b>a>0,m>0\Rightarrow \dfrac{a+m}{b+m}>\dfrac{a}{b},\dfrac{b+m}{a+m}<\dfrac{b}{a}$.
该式表示，b g 糖水中有 a g 糖，若在这些糖水中再添加 m g 糖，则糖水会变甜（即糖水的浓度会变大）.

§2.2 一元二次方程、函数、不等式

1. 三个“二次”的一般形式

(1) **一元二次方程**的一般形式为 $ax^2+bx+c=0$，其中，a,b,c 均为常数，且 $a\neq 0$.

(2) **二次函数**的一般形式为 $y=ax^2+bx+c$，其中，a,b,c 均为常数，且 $a\neq 0$.

(3) **一元二次不等式**的一般形式为 $ax^2+bx+c>0(<0,\geqslant 0,\leqslant 0)$，其中，$a,b,c$ 均为常数，且 $a\neq 0$.

2. 解一元二次方程的前序知识及拓展

(1) **配方法**: 补充常数（一次项系数一半的平方）使其与二次、一次项共同构成完全平方，即，

$$\begin{aligned}ax^2+bx+c&=a\left(x^2+\frac{b}{a}x\right)+c\\&=a\left[x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2\right]-a\left(\frac{b}{2a}\right)^2+c\\&=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}.\end{aligned}$$

$\star$ 完全平方公式: $(a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$.

由此亦知: 二次函数**顶点坐标**为 $\left(-\dfrac{b}{2a},\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)$. 同时根据配方法可推导出**求根公式**.

(2) **求根公式**：$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，其中 $\Delta=b^2-4ac\begin{cases}>0, & \text{有两个不相等的实数根,}\\ =0, & \text{有两个相等的实数根,}\\ <0, & \text{无实数根.}\end{cases}$

(3) **十字相乘法** (如下图所示)：$acx^2+(ad+bc)x+bd=(ax+b)(cx+d)$.

$$\begin{array}{cccc} ax & & b & (ax+b) \\ & \times & & \\ cx & & d & (cx+d) \\ & adx+bcx & & \end{array}$$

⋆ 求解一元二次不等式的方法：**穿轴法**（“右上起笔，逢点即穿”）.

将一元二次不等式化为一般形式，同时使不等式中二次项系数 $a>0$，求解不等号左端式子为零时的方程，并将求得的根依次画在数轴上，从数轴的右上方开始起笔，依次穿过数轴 上的每一个根（要注意两个相等实根的情况）. 在 x 轴上方的部分大于零，在 x 轴下方的部分小于零.

(4) 根与系数关系（韦达 (Vieta) 定理）：$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}\quad \big(\Delta=b^2-4ac\geqslant 0\big)$.

§2.3 基本不等式

1. 基本不等式

若 $a>0,b>0$，则 $\dfrac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}$，当且仅当 $a=b$ 时，取等号.

(1) 证明方法（重要不等式）：$(a-b)^2\geqslant 0\Rightarrow a^2+b^2\geqslant 2ab$，当且仅当 $a=b$ 时等号成立.

(2) 推论：用于连接 a^2+b^2 与 $(a+b)^2$ 的不等关系：$a^2+b^2\geqslant 2ab=\dfrac{(a+b)^2}{2}$.

证: $a^2+b^2\geqslant 2ab\Rightarrow 2\left(a^2+b^2\right)\geqslant a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$.

2. 基本不等式的应用

已知 $x,y\in(0,+\infty)$，

(1) 若 $x+y=S$ (定值)，则当且仅当 $x=y$ 时，xy 可以取到最大值为 $\dfrac{S^2}{4}$（“和定求积”），即

$$xy\leqslant\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{S^2}{4}.$$

(2) 若 $xy=P$ (定值)，则当且仅当 $x=y$ 时，$x+y$ 可以取到最小值为 $2\sqrt{P}$（“积定求和”），即

$$x+y \geqslant 2\sqrt{xy}=2\sqrt{P}.$$

⋆ 注意基本不等式三步走战略：

① 正（条件）：保证使用基本不等式的两项需为正数；

② 定 (技巧)：二者之和或积为一定值 (一般为常数)，即“积定求和”与“和定求积”；

③ 等 (套话)：四个大字“当且仅当”，若不满足则无法取等，即不能取到最值.

Chapter 3

函数

函数是现代数学最基本的概念，是描述客观世界中变量关系和规律的最为基本的数学语言和工具，在解决实际问题中发挥着重要作用. 函数是新高中数学课程的主线，贯穿高中数学的始终.

“凡此变数中函彼变数者，则此为彼之函数。”

——《代数学》【清代】李善兰（*1811—1882*）（译）

（我国首次翻译“*function*”为“函数”并沿用至今）

§3.1　函数的有关概念

1.　函数

设集合 A, B 是非空的数集，对集合 A 中任意实数 x，按照确定的法则 f，集合 B 中都有惟一确定的实数值 y 与它对应，则这种对应关系叫作集合 A 到集合 B 上的一个函数，记作 $y = f(x), x \in A$.[1]

2.　函数的定义域

已知函数 $y = f(x)$，其中 x 叫作**自变量**，其所有取值构成的集合称作该函数的**定义域**.

▶ 求解定义域（或取值范围）注意一下几种情况：

(1) 分式的分母不能为零（即若有 $\dfrac{1}{x}$，则有 $x \neq 0$）;

(2) 偶次方根的被开方数非负（即若有 $\sqrt[2n]{x}$ 或 $x^{\frac{1}{2n}}, n \in \mathbb{N}^*$ ，则有 $x \geqslant 0$）;

(3) 0 次幂或负指数次幂的底数不为零（即若有 x^0 或 $x^{-n}, n \in \mathbb{Q}_+$，则有 $x \neq 0$）;

(4) 对数的真数为正，底数为正但不为 1（即若有 $\log_a x$，则有 $x > 0$ 且 $a > 0, a \neq 1$）;

(5) 正切函数 $\tan x$ 的定义域为 $\left\{x \middle| x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$;

(6) 尤其注意特殊情况特殊分析，如：距离不能为负；椭圆离心率的取值范围为 $(0, 1)$ 等.

[1]构成函数的三要素：定义域、对应关系（法则）、值域. 其中值域由定义域和对应法则决定，因此判断两个函数是否相同，只需判断其定义域和对应法则是否相同即可.

3. 函数的值域

已知函数 $y=f(x)$，当自变量取 a 时，则由法则 f 确定的值 y 称为函数在 a 处的**函数值**，记作 $y=f(a)$ 或 $y|_{x=a}$.

所有函数值构成的**集合** $C=\{y\mid y=f(x),x\in A\}$ 称作该函数的值域，显然 $C\subseteq B$.[2]

► 求解函数值域主要有以下 6 种方法:

(1) **配方法**：即将形如 $f(x)=ax^2+bx+c$ 写成 $f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ 的形式；

(2) **单调性法**：即若函数 $f(x)$ 在意闭区间内单调，则其最值一定在边界上；

(3) **有界法**：常用于求由三角函数构成的初等函数的值域，通常和辅助角公式搭配进行；

(4) **分离常数法**：将分式的分子通过凑配的方式同分母相除分离出常数；

(5) **换元法**：即若有函数 $f[g(x)]$，则令 $t=g(x)$；[3]

(6) **基本不等式法**；

(7) **数形结合法**：适用于绝对值、分式等，联想直线斜率、两点间距离公式等；

(8) **导数法**：通过导函数等于零来得到极值，进而判断是否为最值.

⋆ 请注意，在闭区间上的边界值未必是区间内的最值.

§3.2 函数的基本性质

§3.2.1 奇偶性

1. 定义及性质

	奇函数	偶函数
定义	$f(-x)=-f(x)$	$f(-x)=f(x)$
定义域	关于原点对称	
图像	关于原点中心对称	关于 y 轴 $(x=0)$ 轴对称
特殊	若函数在 $x=0$ 处有意义，则有 $f(0)=0$	$f(x)=f(\lvert x\rvert)$

[2]集合 B 表示所有~~有的没的~~的数构成的数集（也可以浅显地看作全体实数集 $\mathbb{R}$），其中包含一些元素并非 $f(x)$ 可以涉及到的函数值，因此有 $C\subseteq B$ 的说法. 但是这些定义在各位同学心中都是只可意会不可言传的，所以不必太在意具体的数学上的定义，大家理解明白就好

[3]除此之外还有三角换元法，即通过 $\sin^2x+\cos^2x=1$ 来进行换元，从而将函数化简，通常和辅助角公式搭配进行. 例如：$y=x+\sqrt{1-x^2}$，可以令 $x=\cos\theta,\theta\in[0,\pi]$，则 $y=\cos\theta+\sin\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

其他性质

(1) 单调性:

偶函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上单调性**相反**;

奇函数在其定义域内关于原点对称的两个区间上单调性**相同**.

(2) 若函数 $f(x)$ 的定义域关于原点对称（未明确告知奇偶性），则函数 $f(x)$ 能表示成一个偶函数与一个奇函数和的形式. 即

偶函数 $g(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$, 奇函数 $h(x)=\dfrac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$, 则 $f(x)=g(x)+h(x)$.

(3) 运算规律:

① 奇 $\pm$ 奇 $=$ 奇；偶 $\pm$ 偶 $=$ 偶；奇 $\pm$ 偶 $=$ 非奇非偶；

② 奇 $\divideontimes$ 奇 $=$ 偶；偶 $\divideontimes$ 偶 $=$ 偶；奇 $\divideontimes$ 偶 $=$ 奇 (“$\divideontimes$ ”表示 $\times$ 和 $\div$);

③ 复合函数 $y=f[g(x)]$ 的奇偶性原理:“**内偶则偶，内积同外**”(如 $y=\sin(\cos x)$ 为偶函数，$y=\sin(\sin x)$ 为奇函数，$y=\cos(\sin x)$ 为偶函数）.

$\star$ 在判断四则运算的奇偶性时，可利用熟悉的简单函数进行考量，如奇函数为 $y=x$，偶函数为 $y=1$.

§3.2.2 单调性

1. 定义

一般地，设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D，区间 $M\subseteq D$，若对于任意的 $x_1,x_2\in M$，当 $x_1<x_2$ 时，都有 $f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)$ （或 $f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)$），则称函数 $f(x)$ 在区间 M 上是**单调递增（或递减）**的，区间 M 为函数 $f(x)$ 的一个**增（减）区间**.

熟练掌握增、减函数的定义，注意定义的如下两种等价形式:

设 $x_1,x_2\in M$，则

(1) $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}>0\Leftrightarrow f(x)$ 在 M 上是增函数 $\Leftrightarrow$ 过单调递增函数图像上任意不同两点的割线斜率恒大于零 $\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)\left[f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right]>0$;

(2) $\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)}{x_1-x_2}<0\Leftrightarrow f(x)$ 在 M 上是减函数 $\Leftrightarrow$ 过单调递增函数图像上任意不同两点的割线斜率恒小于零 $\Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)\left[f\left(x_1\right)-f\left(x_2\right)\right]<0$.

2. 性质

对于运算函数有如下结论：在公共区间上，增 $+$ 增 $=$ 增；减 $+$ 减 $=$ 减；增 $-$ 减 $=$ 增；减 $-$ 增 $=$ 减.

一般地，对于乘除运算没有必然的结论，例如:“增 $\times$ 增 $=$ 增”不一定成立;“若 $f(x)$ 为增函数，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为减函数”也是错误的，如 $f(x)=x(x\in\mathbb{R}$ 且 $x\neq 0)$，则 $y=\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x}$ 为减函数是不正确的，但若具备如下特殊要求，则结论成立:

(1) 若 $f(x)$ 为增函数，且 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$)，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为减函数；

(2) 若 $f(x)$ 为减函数，且 $f(x)>0$ (或 $f(x)<0$)，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为增函数.

3. 复合函数的单调性

复合函数的单调性遵从“**同增异减**”的原则，即在对应的取值区间上，外层函数是增（减）函数，内层函数是增（减）函数，复合函数是增函数；外层函数是增（减）函数，内层函数是减 (增) 函数，则复合函数是减函数.

§3.2.3 周期性

1. 定义

设函数 $y=f(x)$ $(x\in D)$，如果存在非零常数 T，使得对任何 $x\in D, x+T\in D$，有

$$f(x+T)=f(x),$$

则函数 $f(x)$ 为**周期函数**，T 为函数的一个**周期**.

若在所有的周期中，存在一个最小的正数，则这个最小的正数叫作**最小正周期**.

注: 函数的周期性是函数的“整体”性质, 即对于定义域 D 中任何一个 x, 都满足 $f(x+T)=f(x)$. 若 $f(x)$ 是周期函数，则其图像平移若干整数个周期后，能够完全重合.

2. 性质

若 $f(x)$ 的周期为 T，则 $nT(n\in\mathbb{Z}, n\neq 0)$ 也是函数 $f(x)$ 的周期，因此通过定义可得

$$f(x+nT)=f(x).$$

3. 通过抽象函数观察周期

函数式满足关系 $(x\in\mathbb{R})$	最小正周期	周期
$f(x+T)=f(x)$	T	$nT(n\in\mathbb{Z})$
$f(x+T)=-f(x)$	$2T$	$2nT(n\in\mathbb{Z})$
$f(x+T)=\dfrac{1}{f(x)}$, $f(x+T)=-\dfrac{1}{f(x)}$	$2T$	$2nT(n\in\mathbb{Z})$
$f(x+T)=f(x-T)$	$2T$	$2nT(n\in\mathbb{Z})$
$f(x+T)=-f(x-T)$	$4T$	$4nT(n\in\mathbb{Z})$

【证明方法】将函数中的 x 代换为 $x+T$ 或 $x+2T$ 即可，此处以 $f(x+T)=\dfrac{1}{f(x)}$ 为例.

证: 已知 $f(x+T)=\dfrac{1}{f(x)}$，令 $x=x+T$，则有

$$f(x+2T)=\frac{1}{f(x+T)}=\frac{1}{\frac{1}{f(x)}}=f(x).$$

因此由定义可知，$f(x)$ 的（最小正）周期为 $2T$.

§3.2.4　平移与对称性

1.　平移

(1) 左右平移:“**左加右减**”:

如函数 $y=f(x)$ 向左平移 $a(>0)$ 个单位长度后的解析式为 $y=f(x+a)$;

向右平移 $a(>0)$ 个单位长度后的解析式为 $y=f(x-a)$.

(2) 上下平移:“**上加下减**”:

如函数 $y=f(x)$ 向上平移 $a(>0)$ 个单位长度后的解析式为 $y=f(x)+a$;

向下平移 $a(>0)$ 个单位长度后的解析式为 $y=f(x)-a$.

2.　对称

(1) 函数 $y=f(x)$ 关于直线 $x=a$ **轴对称** $\Leftrightarrow f(a+x)=f(a-x)\Leftrightarrow f(x)=f(2a-x)$;

(2) 函数 $y=f(x)$ 关于点 (a,b) **中心对称** $\Leftrightarrow f(x)+f(2a-x)=2b\Leftrightarrow f(a+x)+f(a-x)=2b$.

3.　对称性与周期性的关系

(1) 若函数 $y=f(x)$ 有两条对称轴 $x=a,x=b(a<b)$，则函数 $f(x)$ 是周期函数，且 $T=2n|b-a|(n\in\mathbb{Z})$;

(2) 若函数 $y=f(x)$ 的图像有两个对称中心 $(a,c),(b,c)(a<b)$，则函数 $f(x)$ 是周期函数，且 $T=2n|b-a|(n\in\mathbb{Z})$;

(3) 若函数 $y=f(x)$ 有一条对称轴 $x=a$ 和一个对称中心 $(b,0)(a<b)$，则函数 $f(x)$ 是周期函数，且 $T=4n|b-a|(n\in\mathbb{Z})$.

⋆ 对于此结论，可类比 $y=\sin x$ 的周期性与对称性的关系记忆.

§3.3 幂函数

1. 定义

形如 $y = x^\alpha$ $(\alpha \in \mathbb{R})$ 的函数称为**幂函数**，其中 x 是自变量，α 是常数.

2. 图像

幂函数的图像一定会出现在第一象限内，一定不会出现在第四象限内，至于是否出现在第二、三象限内，要看函数的奇偶性；幂函数的图像如果与坐标轴相交，则交点一定是原点.

幂函数一定经过点 $(1,1)$. 当 $\alpha < 0, 0 < \alpha < 1, \alpha > 1$ 时，在同一坐标系内的幂函数的图像比较如图3.3.1所示.

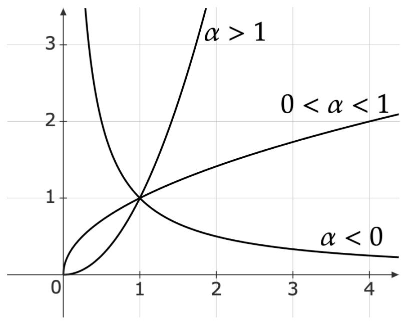


图 3.3.1

3. 性质

幂函数 $y = x^\alpha = x^{\frac{p}{q}}$ (其中 α 为有理数，即 p, q 互质) 的单调性、奇偶性随 α, p, q 的变化会有很大不同.

(1) 单调性：

当 $\alpha > 0$ 时，幂函数 $y = x^\alpha$ 在第一象限内都是增函数，且 α 越大，上升速度越快；

当 $\alpha < 0$ 时，幂函数 $y = x^\alpha$ 在第一象限内都是减函数，且 α 越小，下降速度越快.

(2) 奇偶性：

当 p 是偶数时，幂函数 $y = x^{\frac{p}{q}}$ 是偶函数；

当 p 是奇数且 q 为奇数时，幂函数 $y = x^{\frac{p}{q}}$ 是奇函数.

(3) 定义域（注意根号和分式）：

当 q 是偶数，且 $\dfrac{p}{q} > 0$ 时，幂函数 $y = x^{\frac{p}{q}}$ 的定义域为 $[0, +\infty)$；

当 q 是偶数，且 $\dfrac{p}{q} < 0$ 时，幂函数 $y = x^{\frac{p}{q}}$ 的定义域为 $(0, +\infty)$；

当 q 是奇数，且 $\dfrac{q}{q} > 0$ 时，幂函数 $y = x^{\frac{p}{q}}$ 的定义域为 $\mathbb{R}$；

当 q 是奇数，且 $\dfrac{p}{q} < 0$ 时，幂函数 $y = x^{\frac{p}{q}}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

§3.4 指数与指数函数

§3.4.1 指数

1. 定义

自然数指数：$a \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$，$a^n$ 叫作 a 的 n 次幂，a 为幂的**底数**，n 为幂的**指数**.

零指数：$a \in \mathbb{R}$ 且 $a \neq 0$，定义 $a^0 = 1$（0^0 无意义）.

分数指数幂：$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$，$a^{-\frac{m}{n}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\,(a > 0, m, n \in \mathbb{N}^*$ 且 $n > 1)$.

2. 运算性质

当 $a > 0, b > 0$ 时，有

(1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n} (m, n \in \mathbb{R})$；

(2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n} (m, n \in \mathbb{R})$；

(3) $(a^m)^n = a^{mn} (m, n \in \mathbb{R})$；

(4) $(ab)^m = a^m b^m (m \in \mathbb{R})$；

(5) $a^{-p} = \dfrac{1}{a^p} (p \in \mathbb{Q})$；

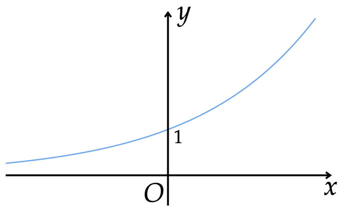
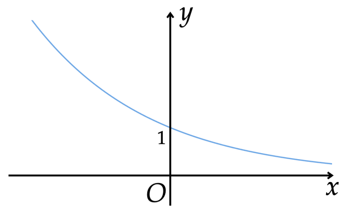
(6) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\,(m, n \in \mathbb{N}^*)$.

§3.4.2 指数函数

1. 定义

形如 $y = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的函数叫作**指数函数**.

2. 指数函数 $y = a^x (a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 的图像与性质

<table>
<tr><td colspan="2">$y = a^x$</td><td>$a > 1$</td><td>$0 < a < 1$</td></tr>
<tr><td colspan="2">图像</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td rowspan="4">性质</td><td>定义域</td><td colspan="2">$\mathbb{R}$</td></tr>
<tr><td>值域</td><td colspan="2">$(0, +\infty)$</td></tr>
<tr><td>恒过定点</td><td colspan="2">$(0, 1)$</td></tr>
<tr><td>单调性</td><td>在 $\mathbb{R}$ 上是增函数</td><td>在 $\mathbb{R}$ 上是减函数</td></tr>
</table>

§3.5 对数与对数函数

§3.5.1 对数

1. 定义

$a^n = N \Leftrightarrow n = \log_a N(N > 0, a > 0$ 且 $a \neq 1)$ 叫作**以 a 为底 N 的对数**，a 为对数的**底数**，N 为对数的**真数**.

(1) $\log_a 1 = 0$；$\log_a a = 1$；

(2) 特殊：$\log_{10} N = \lg N$；$\log_e N = \ln N$.

2. 运算性质

(1) $\log_a(MN) = \log_a M + \log_a N(M > 0, N > 0)$；

(2) $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N(M > 0, N > 0)$；

(3) $\log_a M^n = n \log_a M(M > 0)$；$\log_{a^n} M = \dfrac{1}{n} \log_a M(M > 0)$；

(4) $a^{\log_a N} = N(N > 0, a > 0 且 a \neq 1)$；$\log_a a^N = N(N \in \mathbb{R}, a > 0 且 a \neq 1)$；

(5) 换底公式：$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}(a > 0 且 a \neq 1, b > 0, c > 0 且 c \neq 1)$；

推论：$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}(a, b > 0 且 a, b \neq 1)$.

§3.5.2 对数函数

1. 定义

形如 $y = \log_a x\ (x > 0, a > 0 且 a \neq 1)$ 的函数叫作**对数函数**. 函数的定义域为 $(0, +\infty)$，值域为 $\mathbb{R}$.

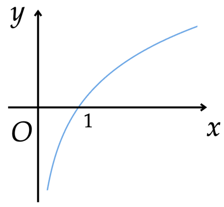
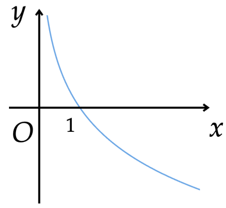
2. 对数函数 $y = \log_a x(a > 0 且 a \neq 1)$ 的图像与性质

$\star$ 指数函数与对数函数互为**反函数**（逆运算），因此图像上二者关于直线 $y = x$ 轴对称.

§3.6 函数与方程

1. 函数的零点

对于函数 $y = f(x)$，我们把使 $f(x) = 0$ 的实数 x 叫作函数 $y = f(x)$ 的零点.

$y = \log_a x$		$a > 1$	$0 < a < 1$
图像			
性质	定义域	$(0, +\infty)$	
	值域	$\mathbb{R}$	
	恒过定点	$(1, 0)$	
	单调性	在 $(0, +\infty)$ 上是增函数	在 $(0, +\infty)$ 上是减函数

2. 方程的根与函数图像、零点之间的关系

方程 $f(x) = 0$ 有实数根

$\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 的图像与 x 轴有交点

$\Leftrightarrow$ 函数 $y = f(x)$ 有零点.

3. 零点存在定理

若函数 $y = f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续且 $f(a)f(b) < 0$，则函数 $y = f(x)$ 在开区间 (a, b) 上有零点，即 $\exists \xi \in (a, b)$，使得 $f(\xi) = 0$，同时 ξ 也是方程 $f(x) = 0$ 的根.

4. * 二分法

对于在闭区间 $[a, b]$ 上连续，且 $f(a)f(b) < 0$ 的函数 $y = f(x)$，通过不断地把函数 $y = f(x)$ 的零点所在的区间一分为二，使区间的两个端点逐步逼近零点，进而得到零点的近似值的方法叫作**二分法**. 求方程 $f(x) = 0$ 的近似解，就是求函数 $y = f(x)$ 零点的近似值.

Chapter 4

三角函数

三角函数是高中阶段系统学习的最后一个基本初等函数，也是一类最典型的周期函数.

三角函数是以角度（数学上最常用弧度制，下同）为自变量，角度对应任意角终边与单位圆交点坐标或其比值为因变量的函数. 也可以等价地用与单位圆有关的各种线段的长度来定义. 三角函数在研究三角形和圆等几何形状的性质时有重要作用，也是研究周期性现象的基础数学工具.

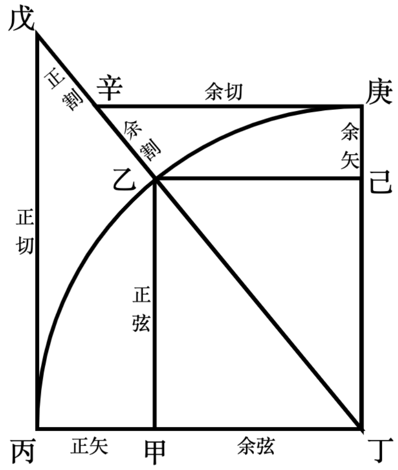


图 4.0.1 割圆八线图

“凡用一弧即对一角，用一角亦对一弧，故可互求。凡一弧即有八线〔正弦、正矢、正割、正切、余弦、余矢、余割、余切〕，角亦然。

以上八线为己丙弧所用，亦即为己丁丙角所用〔自一度至八十九度并同〕若用己庚弧亦同此八线，但以余为正，以正为余；己甲丁句股形己丁〔半径〕为弦，己甲〔正弦〕为股，丁甲〔余弦〕为句；戊丙丁句股形戊丁〔正割〕为弦，戊丙正切为股，丙丁〔半径〕为句。以上两顺句股形同用己丁甲角，故其比例等〔凡句股形一角等则余角并等〕。”

——【明末清初】《历算全书》卷七·算学

（“割圆八线”（如图4.0.1）——中国（世界）最早的三角函数）

§4.1 三角函数的有关概念及公式

§4.1.1 三角函数前序知识

1. 任意角

一条射线绕着它的端点旋转所形成的图形叫做**角**，这条射线叫做角的**始边**，旋转到的位置所对应的边叫做角的**终边**，而这个公共端点叫做角的**顶点**.

通常把逆时针旋转的角称为**正角**，顺时针旋转的角称为**负角**；如果没有进行旋转，也视为形成了一个角，这个角叫作**零角**.

2. 象限角

角 α 的始边与 x 轴的非负半轴重合，终边落在第几象限，α 就叫作**第几象限角**.

3. 弧度制

半径为 r 的圆心角 α 所对弧长为 l，则 $\alpha=\dfrac{l}{r}$ (弧度或 rad).

与角 α (弧度) 终边相同的角 β 的集合为 $\{\beta \mid \beta=\alpha+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$，其意义在于 α 的终边逆时针、顺时针旋转整数圈后，终边位置不变.

太角度制与弧度制互化：由 $\alpha=\dfrac{l}{r}$ 得，$360^\circ=\dfrac{2\pi r}{r}=2\pi$，即 $\pi=180^\circ$.

§4.1.2 弧长和扇形面积公式

弧长公式：$l=\alpha r, \alpha\in(0,2\pi]$；

扇形面积公式：$S=\dfrac{1}{2}lr=\dfrac{1}{2}\alpha r^2=\dfrac{l^2}{2\alpha}$.

注：关于扇形面积公式的记忆，可以采用类似三角形面积公式的方法，把扇形的弧长类比成三角形的底，半径类比成三角形的高，则有 $S=\dfrac{1}{2}\text{底}\cdot\text{高}=\dfrac{1}{2}lr$，如图4.1.1所示.

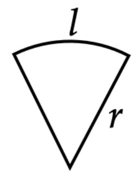


图 4.1.1

§4.1.3 任意角的三角函数

1. 定义

已知角 α 终边上的任一点 $P(x,y)$ （非原点 O），则点 P 到原点 O 的距离 $r=|OP|=\sqrt{x^2+y^2}>0$，因此有

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{\text{对边}}{\text{斜边}},\ \cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{\text{邻边}}{\text{斜边}},\ \tan\alpha=\frac{y}{x}=\frac{\text{对边}}{\text{邻边}}.$$

如图4.1.2所示.

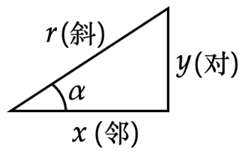


图 4.1.2

⋆ 含特殊角的直角三角形（三角板）的边比关系：

① 含 30°（即 $\dfrac{\pi}{6}$）和 60°（即 $\dfrac{\pi}{3}$）的直角三角形的边比关系为 $1:\sqrt{3}:2$；

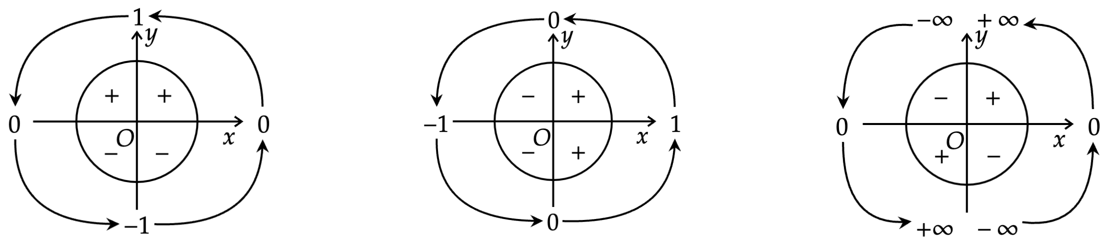
② 含 45°（即 $\dfrac{\pi}{4}$）的直角三角形的边比关系为 $1:1:\sqrt{2}$.

2. 性质及特征

在单位圆中，$r=\sqrt{x^2+y^2}=1$，则

(1) $\sin\alpha=\dfrac{y}{r}=y$，即 α 终边与单位圆交点的纵坐标 y 即为 α 的正弦值 $\sin\alpha$.

如图4.1.3(a)所示，第 I、II 象限为正，第 III、IV 象限为负，即上正、下负.



(a) $\sin\alpha$　　(b) $\cos\alpha$　　(c) $\tan\alpha$

图 4.1.3

(2) $\cos\alpha = \dfrac{x}{r} = x$，即 α 终边与单位圆交点的横坐标 x 即为 α 的余弦值 $\cos\alpha$.
如图4.1.3(b)所示，第 I、IV 象限为正，第 II、III 象限为负，即左负、右正.

(3) $\tan\alpha = \dfrac{y}{x}(x \neq 0)$.
如图4.1.3(c)所示，第 I、III 象限为正，第 II、IV 象限为负，即一三正、二四负.

§4.1.4　相关公式

1.　同角三角函数的基本关系

(1) 平方关系：$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$；

(2) 商数关系：$\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\ (\cos\alpha \neq 0)$.

2.　诱导公式

口诀：奇变偶不变，符号看象限.
奇变偶不变：奇偶指的是 $\sin\left(\dfrac{k\pi}{2} + \alpha\right)$ 中的 k，变不变指的是三角函数名的“正余转变”.
符号看象限：看的是原三角函数对应象限的符号（一律将 α 看做锐角）.

(1) 偶不变

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha \qquad \sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \qquad \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$

$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \qquad \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha \qquad \tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha \qquad \tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$

(2) 奇变

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

§4.2 三角恒等变形

1. 两角和差公式及二倍角公式

分享一个好听又好用的口诀,“**赛扣扣赛**”:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \quad\Rightarrow\quad \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$$

以及“**扣扣赛赛**”(注意 sin 和 cos 中间的 $\pm$ 和 $\mp$):

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta \quad\Rightarrow\quad \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

利用 $\tan(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos(\alpha\pm\beta)}$, 随后分子分母同时除以 $\cos\alpha\cos\beta$ 即得:

$$\tan(\alpha\pm\beta)=\frac{\tan\alpha\pm\tan\beta}{1\mp\tan\alpha\tan\beta} \quad\Rightarrow\quad \tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

2. 降幂公式及半角公式

$$\sin^2\theta=\frac{1-\cos 2\theta}{2} \quad\Rightarrow\quad \sin\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$
$$\cos^2\theta=\frac{1+\cos 2\theta}{2} \quad\Rightarrow\quad \cos\frac{\theta}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}}$$

证: 由二倍角公式进行推导.

$$\begin{aligned}\cos 2\theta&=\cos^2\theta-\sin^2\theta\\&=\cos^2\theta-\sin^2\theta+1-1\\&=\cos^2\theta-\sin^2\theta+\left(\sin^2\theta+\cos^2\theta\right)-1\\&=2\cos^2\theta-1.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\theta &= \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta - 1 + 1 \\ &= \cos^2\theta - \sin^2\theta - \left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + 1 \\ &= 1 - 2\sin^2\theta.\end{aligned}$$

⋆ 降幂公式的后果:**“次数减半，角度翻倍”**.

适用于在化简三角型函数时，考虑需不需要降幂? 能不能函数变为同角的三角函数? 是使用辅助角公式，还是配方来进行化简?

3. 辅助角公式

$$a\sin\theta + b\cos\theta = \sqrt{a^2+b^2}\sin(\theta+\varphi)$$

其中，φ 由 a, b 具体的值确定，即 $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

例题 4.2.1. 化简 $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$.

解: 由辅助角公式得 $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2}\sin(\theta+\varphi) = 2\sin(\theta+\varphi)$.

即 $2\left(\sin\alpha\cdot\dfrac{1}{2} + \cos\alpha\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2(\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\sin\varphi)$，故 $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$，$\sin\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，则 $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. 因此 $\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right)$.

常用的几个使用辅助角公式的情况:

$$\sin\theta \pm \cos\theta = 2\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{4}\right);$$

$$\sin\theta \pm \sqrt{3}\cos\theta = 2\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{3}\right);$$

$$\sqrt{3}\sin\theta \pm \cos\theta = 2\sin\left(\theta \pm \frac{\pi}{6}\right).$$

⋆ 在化简三角型函数时，使用辅助角公式的条件:

① 次数一致:

可用降幂公式（包括二倍角公式）进行降幂，但降幂的代价是变量（角）变为原来的二倍.

② 变量一致.

否则，考虑配方．例如：

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \cos^2 x + \sin x \\
&= 1 - \sin^2 x + \sin x \\
&= 1 - \left(\sin^2 x - \sin x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4} \qquad = -\left(\sin x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}.
\end{aligned}
$$

§4.3 三角函数的图像与性质

§4.3.1 基本初等三角函数的图像与性质

⋆ “五点法”作图

在确定正弦函数和余弦函数图像时，起到最关键的点是**最值点**和**与 x 轴交点**，在一个最小正周期内（以 $x \in [0, 2\pi]$ 为例）共五个点，它们的横坐标分别为 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$．其中，过最值点且与 y 轴平行的直线为**对称轴**，与 x 轴交点为**对称中心**.

在确定正弦函数 $y = \sin x$ $(x \in [0, 2\pi])$ （一个最小正周期）的图像时，起到最关键的五个点分别是 $(0, 0), \left(\frac{\pi}{2}, 1\right), (\pi, 0), \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right), (2\pi, 0)$.

同理，在确定余弦函数 $y = \cos x$ $(x \in [0, 2\pi])$ （一个最小正周期）的图像时，起到最关键的五个点分别是 $(0, 1), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), (\pi, -1), \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right) (2\pi, 1)$.

1. 正弦函数

正弦函数 $y = \sin x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的图象，如图4.3.1所示.

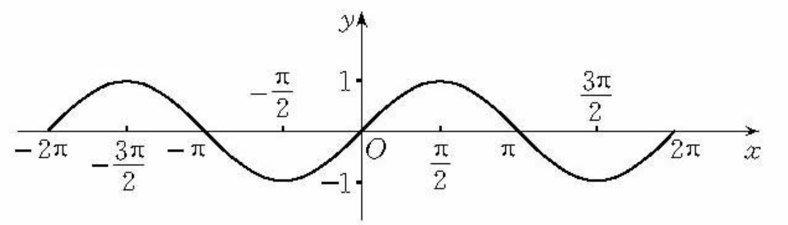


图 4.3.1 正弦函数图像

其中：

(1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$，图形在两直线 $y = -1$ 和 $y = 1$ 围成的带形区域[1] (含边界) 内向左右两侧周期性地无限延伸.

(2) 极值 (最值)：$y_{\max} = 1$，$y_{\min} = -1$.

[1]带型区域（Bézier curves）：指用于描述平滑曲线的数学概念.

(3) 对称轴：$x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi(k \in \mathbb{Z})$；对称中心：$(k\pi, 0)(k \in \mathbb{Z})$.

(4) 正弦函数是奇函数，是以 2π 为最小正周期的周期函数.

(5) 单调性：$y = \sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right](k \in \mathbb{Z})$ 上为增函数，

在区间 $\left[\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi, \dfrac{3\pi}{2} + 2k\pi\right](k \in \mathbb{Z})$ 上为减函数.

2. 余弦函数

余弦函数 $y = \cos x$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内的图象，如图4.3.2所示.

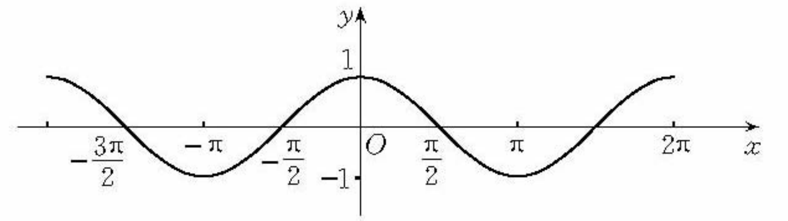


图 4.3.2 余弦函数图像

其中：

(1) 定义域为 $(-\infty, +\infty)$，值域为 $[-1, 1]$，图形在两直线 $y = -1$ 和 $y = 1$ 围成的带形区域 (含边界) 内向左右两侧周期性地无限延伸.

(2) 极值 (最值)：$y_{\max} = 1$，$y_{\min} = -1$.

(3) 对称轴：$x = k\pi(k \in \mathbb{Z})$；对称中心：$\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi, 0\right)(k \in \mathbb{Z})$.

(4) 正弦函数是偶函数，是以 2π 为最小正周期的周期函数.

(5) 单调性：$y = \cos x$ 在区间 $[-\pi + 2k\pi, 2k\pi](k \in \mathbb{Z})$ 上为增函数，

在区间 $[2k\pi, \pi + 2k\pi](k \in \mathbb{Z})$ 上为减函数.

3. 正切函数

正切函数 $y = \tan x$ 在区间 $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)(k \in \mathbb{Z})$ 内的图象，如图4.3.3所示.
其中：

(1) 定义域为 $\left(-\dfrac{\pi}{2} + k\pi, \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)(k \in \mathbb{Z})$，值域为 $[-\infty, +\infty]$，图形分别以直线 $y = -\dfrac{\pi}{2} + k\pi$ 和 $y = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ 为渐近线，曲线成许多相同形状的分支，每一连续区间内的一个分支都在两渐近线之间向上下无限延伸（原因：$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$).

(2) 正切函数在定义域内无极值.

(3) 对称中心：$\left(\dfrac{k\pi}{2}, 0\right)(k \in \mathbb{Z})$.

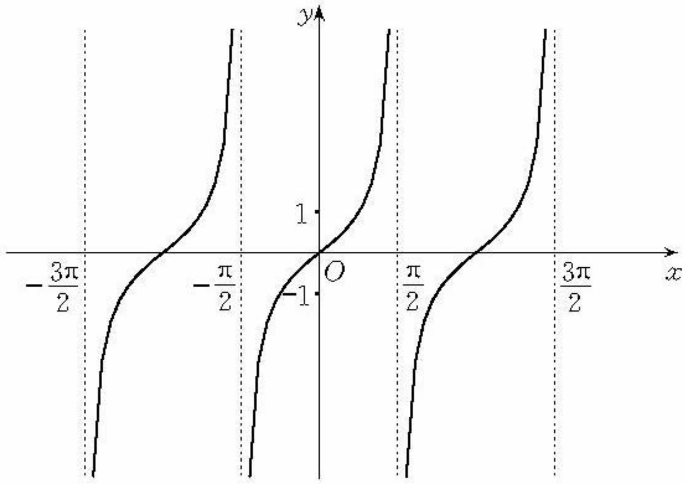


图 4.3.3　正切函数图像

(4) 正切函数是奇函数，是以 π 为最小正周期的周期函数.

(5) 单调性：在各个连续区间内均为增函数. 即在每个区间 $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi\right)(k \in \mathbb{Z})$ 单调递增.

§4.3.2　一般三角函数的图像与性质

研究形如 $y = A\sin(\omega x+\varphi)$ 或 $y = A\cos(\omega x+\varphi)$ 的图像和性质.

1.　图像

(1) 五点法：

设 $X = \omega x + \varphi$，令 X 分别等于 $0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$，求出相应 x 的值，得到五点坐标后，描点画出图像.

(2) 图像变换法：

根据 $y = \sin x$ （或 $y = \cos x$ 的图像进行**平移、伸缩变换**.

⋆ 图像的平移与伸缩永远发生在 x 与 y 本身.

例如：由函数 $y = \sin x$ 的图像变换为函数 $y = 2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+3$ 的图像的步骤为：

① 【法一】(x 轴上) 先平移、再伸缩：

$$\boxed{y=\sin x} \xrightarrow{\text{向左平移 } \frac{\pi}{3} \text{ 个单位长度}} \boxed{y=\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)} \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{所有点的横坐标变为原来的 } \frac{1}{2}} \boxed{y=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{所有点的纵坐标变为原来的 2 倍}} \boxed{y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)} \xrightarrow{\text{向上平移 3 个单位长度}} \boxed{y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+3}$$

② 【法二】(x 轴上) 先伸缩、再平移：

$$\boxed{y=\sin x} \xrightarrow[\text{纵坐标不变}]{\text{所有点的横坐标变为原来的 } \frac{1}{2}} \boxed{y=\sin 2x} \xrightarrow{\text{向左平移 } \frac{\pi}{6} \text{ 个单位长度}} \boxed{y=\sin 2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$\xrightarrow[\text{横坐标不变}]{\text{所有点的纵坐标变为原来的 2 倍}} \boxed{y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)} \xrightarrow{\text{向上平移 3 个单位长度}} \boxed{y=2\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+3}$$

⋆ 注意：x 轴上的变化均发生在"x"上，与此时 $\omega x+\varphi$ 的大小无关.

2. 性质

(1) 振幅：A （确定最值 $\iff$ 确定 A ）；

(2) 最小正周期：$T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ （确定周期 $\iff$ 确定 ω ）；

(3) 频率：$f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$；

(4) 相位：$\omega x+\varphi$；其中 φ 被称为初相（即当 $x=0$ 时）（确定特殊点 $\iff$ 确定 φ ）；

(5) 定义域：$\mathbb{R}$；值域：$[-A,A]$；

(6) 最值、对称性、单调性等：

类比研究 $y=\sin x$（或 $y=\cos x$ ）的性质的方法，只需将 $y=A\sin(\omega x+\varphi)$ （或 $y=A\cos(\omega x+\varphi)$ ）中的 $\omega x+\varphi$ 当作 $y=\sin x$ （或 $y=\cos x$）中的 x，即将其视为一个整体. 此外要特别注意 A 和 ω 的符号，通过诱导公式先将 ω 的符号化为正，随后再进行相关讨论.

§4.4 解三角形

1. 三角形内角关系

在任意 $\triangle ABC$ 中，角 A,B,C 所对的边长分别为 a,b,c，如图4.4.1.

由于在任何一个三角形中均有 $A+B+C=\pi$，则有 $A=\pi-(B+C)$，因此，有

$$\sin A=\sin[\pi-(B+C)]=\sin(B+C),$$

$$\cos A=\cos[\pi-(B+C)]=-\cos(B+C).$$

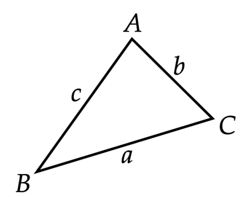


图 4.4.1

故，

$$\tan A=\frac{\sin A}{\cos A}=\frac{\sin(B+C)}{-\cos(B+C)}=-\tan(B+C).$$

以及

$$\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{\pi-(B+C)}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}\right)=\cos\frac{B+C}{2},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{\pi-(B+C)}{2}=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{B+C}{2}\right)=\sin\frac{B+C}{2}.$$

因此，

$$\tan\frac{A}{2}=\frac{\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{\cos\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B+C}{2}}=\frac{1}{\tan\frac{B+C}{2}}=\cot\frac{B+C}{2}.$$

2.　正弦定理

在任意 $\triangle ABC$ 中，角 A, B, C 所对的边长分别为 a, b, c，且该三角形外接圆半径为 R，直径为 D，则有

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R = D$$

推论：

$$a : b : c = \sin A : \sin B : \sin C$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b+c}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

正弦定理常应用于：已知**两边及其中一边对角**来解三角形.

3.　余弦定理

对于任意三角形，任何一边的平方等于其他两边平方的和减去这两边与它们夹角的余弦的两倍积. 即，若 $\triangle ABC$ 三个角 A, B, C 所对三边分别为 a, b, c，则有

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\angle A \Leftrightarrow \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\angle B \Leftrightarrow \cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\angle C \Leftrightarrow \cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

余弦定理常应用于：(1) 已知**两边及夹角**求解第三边；(2) 已知**三边**求角.

4.　三角形面积公式

根据三角形面积的基本公式推演出如下公式：

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}bc\sin A = \frac{1}{2}ac\sin B.$$

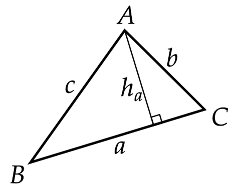


图 4.4.2

其中，h_a 表示边 a 上的高.

更多的变形可根据题意及上述两个定理来进行变换，如 $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{abc}{4R}$ 等.

Chapter 5

平面向量

向量理论具有深刻的数学内涵、丰富的物理背景. 向量既是代数研究对象，也是几何研究对象，是沟通几何与代数的桥梁. 向量是描述直线、冲线、平面、曲面、以及高维空间数学问题的基本工具，是进一步学习和研究其他数学领域问题的基础，在解决实际问题中发挥着重要作用.

"大学的可贵在于提供他一个自由思考的地方。"

——【美国】约西亚·威拉德·吉布斯（*Josiah Willard Gibbs*，*1839—1903*）

（吉布斯自由能的提出者，创立了向量分析并将其引入数学物理之中）

§5.1 平面向量的概念及线性运算

§5.1.1 向量的基本概念

1. 向量的概念

既有大小又有方向的量叫作**向量**，一般用 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\cdots$ 来表示[1]. 或者使用有向线段来表示，如 $\overrightarrow{AB}$（其中 A 为起点，B 为终点）.

注：涉及向量必须说明其方向与大小.

向量的大小：也就是向量的**长度**（或称**模**），记作 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

2. 零向量、单位向量、相等向量、平行（共线）向量

(1) 零向量：长度为零的向量，记为 $\mathbf{0}$，其方向是不确定的.

(2) 单位向量：模为 1 个单位长度的向量. 当 $|\boldsymbol{a}|\neq 0$ 时，向量 $\pm\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与向量 $\boldsymbol{a}$ 共线（平行）的单位向量，通常用 $\boldsymbol{e}$ 表示，则 $|\boldsymbol{e}|=1$.

(3) 相等向量：长度相等且方向相同的向量. 相等的向量经过平移后总可以重合，记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

(4) 平行向量：方向相同或相反的非零向量，也叫作共线向量，因为任何平行向量经过平移后，总可以移到同一条直线上.

规定：零向量与任何向量 $\boldsymbol{a}$ 平行，即 $\mathbf{0}\,/\!/\,\boldsymbol{a}$.

[1] 印刷可以使用加粗的小写字母来表示，但手写只能只用 $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\cdots$ 来表示.

⋆ 注：

① 数学中研究的向量都是自由向量，可以任意平移；

② 向量中的平行就是共线，可以重合，而几何中的平行不可以重合；

③ 若 $\boldsymbol{a} \mathbin{/\mkern-5mu/} \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \mathbin{/\mkern-5mu/} \boldsymbol{c}$，不一定有 $\boldsymbol{a} \mathbin{/\mkern-5mu/} \boldsymbol{c}$，因为 $\boldsymbol{b}$ 可能为 $\boldsymbol{0}$.

§5.1.2　向量的线性运算

1.　向量的加法

求两个向量和的运算叫作向量的加法．已知向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$，在平面内任取一点 A，作 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{BC} = \boldsymbol{b}$, 则向量 $\overrightarrow{AC}$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和（或和向量），即 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

口诀：首尾相连，首尾连.

向量加法的几何意义：向量的加法符合三角形法则和平行四边形法则.

如图5.1.1所示，$\overrightarrow{AC} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.

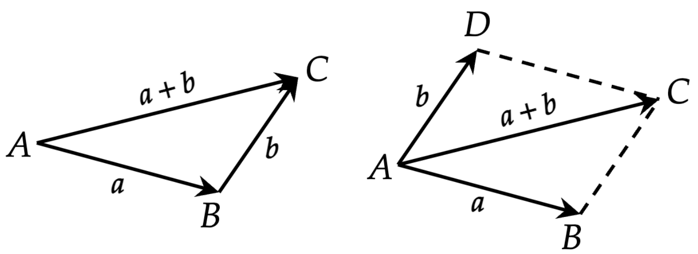


图 5.1.1

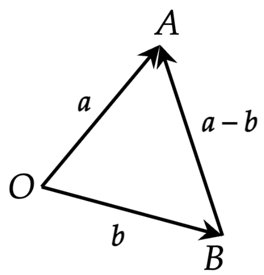


图 5.1.2

⋆ 注：向量加法的本质是首尾相接.

2.　向量的减法

(1) 相反向量.

与 $\boldsymbol{a}$ 长度相等、方向相反的向量叫作 $\boldsymbol{a}$ 的**相反向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$.

① 规定：零向量的相反向量仍是零向量；

② $-(-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{0}$；

③ 若 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 互为相反向量，则 $\boldsymbol{a} = -\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

(2) 向量的减法.

向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的相反向量的和叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差或差向量，即 $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + (-\boldsymbol{b})$.

口诀：共起点，指被减.

向量减法的几何意义：向量的减法符合三角形法则.

如图5.1.2所示，$\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}, \overrightarrow{OB} = \boldsymbol{b}$，则向量 $\overrightarrow{BA} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$.

注：向量加法的三角形法则是两向量首尾相连，和向量以第一个向量的起点为起点，以第二个向量的终点为终点的向量；向量减法的三角形法则是将两个向量的起点移到一起，差向量是连接两向量的终点，箭头指向被减向量的终点的向量.

3. 向量的数乘

(1) 实数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的积是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，其长度与方向规定如下：

① $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

② 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$，方向不确定.

(2) 向量数乘运算的运算律.

设 λ,μ 为实数，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$；$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$.

(3) 共线向量定理.

向量 $\boldsymbol{a}(\neq 0)$ 与 $\boldsymbol{b}$ 共线，当且仅当有惟一的实数 λ，使得 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.

§5.2 平面向量基本定理及坐标表示

§5.2.1 平面向量基本定理和性质

1. 平面向量基本定理

如果 e_1 和 e_2 是同一平面内的两个不共线的向量，那么对于该平面内的任意向量 $\boldsymbol{a}$，都存在惟一的一对实数 λ_1,λ_2，使得 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2$，我们把不共线向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2$ 叫作表示这一平面内所有向量的一组基底，记为 $\{e_1,e_2\}$，$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2$ 可称作向量 a 关于基底 $\{e_1,e_2\}$ 的分解式.

推论 1：若 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=\lambda_3\boldsymbol{e}_1+\lambda_4\boldsymbol{e}_2$，则 $\lambda_1=\lambda_3,\lambda_2=\lambda_4$.

推论 2：若 $\boldsymbol{a}=\lambda_1\boldsymbol{e}_1+\lambda_2\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{0}$，则 $\lambda_1=\lambda_2=0$

2. 线段定比分点的向量表达式

如图5.2.1所示，在 $\triangle ABC$，若点 D 是边 BC 上的点，且 $\overrightarrow{BC}=\lambda\overrightarrow{DC}(\lambda\neq-1)$，得 $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\lambda(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD})$，

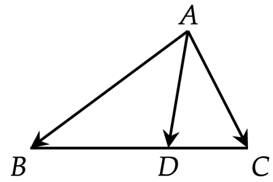


图 5.2.1

$$(1+\lambda)\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC},$$

又 $\lambda\neq-1$，则

$$\overrightarrow{AD}=\frac{\overrightarrow{AB}+\lambda\overrightarrow{AC}}{1+\lambda}.$$

3. 三点共线定理

平面内三点共线的充要条件（⇔）是：存在实数 λ,μ，使得 $\overrightarrow{OC}=\lambda\overrightarrow{OA}+\mu\overrightarrow{OB}$，其中 $\lambda+\mu=1$，点 O 为平面内任意一点.

4. 极化恒等式

如图5.2.2所示，在 $\triangle ABC$，若点 D 是边 BC 的中点，则中点向量 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC})$，且

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}&=(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DB})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\\&=(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DC})\cdot(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC})\\&=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{DC}^2=\overrightarrow{AD}^2-\overrightarrow{BD}^2=\overrightarrow{AD}^2-\left(\frac{\overrightarrow{BC}}{2}\right)^2\end{aligned}$$

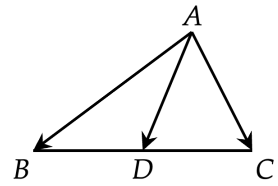


图 5.2.2

§5.2.2 平面向量的坐标表示及坐标运算

1. 平面向量的坐标表示

在平面直角坐标系中，分别取与 x 轴、y 轴正半轴方向相同的两个单位向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$ 作为基底，那么由平面向量基本定理可知，对于平面内的一个向量 $\boldsymbol{a}$，有且只有一对实数 x,y，使得 $\boldsymbol{a}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}$，我们把有序实数对 (x,y) 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标，记作 $\boldsymbol{a}=(x,y)$.

因此，向量的坐标表示和以坐标原点为起点的向量是一一对应的，即

$$\text{向量}(x,y)\xLeftrightarrow{\text{一一对应}}\text{向量}\overrightarrow{OA}\xLeftrightarrow{\text{一一对应}}\text{点}A(x,y).$$

2. 平面向量的坐标运算

(1) 向量的加减：

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)\,\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$，则 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(x_1+x_2,y_1+y_2)\,,\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(x_1-x_2,y_1-y_2)$，即两个向量的和与差的坐标分别等于这两个向量相应坐标的和与差.

设 $A\,(x_1,y_1)\,,B\,(x_2,y_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1)$，即一个向量的坐标等于表示该向量的有向线段的终点坐标减去始点坐标.

(2) 向量的数乘：

若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，λ 为实数，则 $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda x,\lambda y)$，即实数与向量的积的坐标，等于用该实数乘原来向量的相应坐标.

3. 向量共线的坐标表示

设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1)$, $\boldsymbol{b}=(x_2,y_2)$. $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$ 的充要条件是 $x_1y_2-x_2y_1=0$. 当 $x_2y_2\neq 0$ 时，可表示为 $\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}$，即对应坐标成比例.

§5.3 平面向量的数量积及应用

§5.3.1 平面向量的数量积

1. 平面向量的数量积

(1) 已知两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$，记为 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB=\theta\in[0,\pi]$ 叫作向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，并规定 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\in[0,\pi]$. 如果 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角是 $\dfrac{\pi}{2}$，就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直，记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

(2) 将“两向量模长的乘积乘以夹角余弦”称作向量的**数量积** (**内积**或**点积**), 即 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$, 记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle.$$

注意：两向量的数量积为一常数.

规定：零向量与任意向量的数量积为 0.

推论 1：两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 垂直的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$.

推论 2：两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\pm|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

2. 投影和投影的数量

如图5.3.1(左) 所示，设非零向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，过 A,B 分别作直线 l 的垂线，垂足分别为 A',B'，则称向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在直线 l 上的**投影向量**（或**投影**）.

给定平面上一个非零向量 $\boldsymbol{b}$，设 $\boldsymbol{b}$ 所在直线为 l，则 $\boldsymbol{a}$ 在直线 l 上的投影称为 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影. 如图5.3.1(右) 所示，向量 $\boldsymbol{a}$ 在 $\boldsymbol{b}$ 上的投影为 $\overrightarrow{A'B'}$.

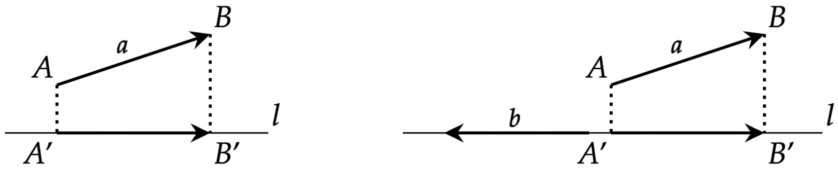


图 5.3.1

一般地，如果 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量，则称 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影的数量. 因此，投影向量为投影的数量乘以投影方向的单位向量，即

$$\overrightarrow{A'B'}=|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=|\boldsymbol{a}|\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}\frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}=\frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}\boldsymbol{b}.$$

3.　平面向量数量积的几何意义

数量积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 等于 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影的数量与 $|\boldsymbol{b}|$ 的乘积，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$.

4.　平面向量数量积的重要性质

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{e}=\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\theta$，其中 $\boldsymbol{e}$ 为单位向量；

(2) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ ，其中 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 为非零向量；

(3) 当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 同向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 反向时，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=-|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$；$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2$；

(4) $\cos\theta=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}(\boldsymbol{a}\neq 0$ 且 $\boldsymbol{b}\neq 0)$ (夹角余弦等于点积比模积)；

(5) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$.

§5.3.2　平面向量数量积的运算方法

1.　平面向量数量积满足的运算律

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 数乘的结合率：$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$，其中 λ 为一实数；

(3) 分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

注意：平面向量数量积运算法则不满足结合律，即 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}\neq\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.
此前提及“两向量的数量积为一实数”，若 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\lambda,\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}=\mu$，则 $(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{c},\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})=\mu\boldsymbol{a}$，而 $\lambda\boldsymbol{c}$ 与 $\mu\boldsymbol{a}$ 可能不相等，因为二者表示的向量方向或大小可能不同，因此无法满足结合律.

2.　平面向量数量积有关性质的坐标表示

(1) 若 $\boldsymbol{a}=(x,y)$，则 $\boldsymbol{a}^2=|\boldsymbol{a}|^2=x^2+y^2$ 或 $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{x^2+y^2}$；

(2) 设 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，则 $\overrightarrow{AB}=\left(x_2-x_1,y_2-y_1\right)$，
因此 A,B 两点间距离 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\left(x_2-x_1\right)^2+\left(y_2-y_1\right)^2}$.

(3) 设 $\boldsymbol{a}=\left(x_1,y_1\right),\boldsymbol{b}=\left(x_2,y_2\right)$，$\theta$ 是 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，则 $\cos\theta=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}$.

① 非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，二者垂直（即 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$）的充要条件是 $x_1x_2+y_1y_2=0$.

② 由 $|\cos\theta|=\left|\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2}\sqrt{x_2^2+y_2^2}}\right|\leqslant 1$，得 $\left(x_1x_2+y_1y_2\right)^2\leqslant\left(x_1^2+y_1^2\right)\left(x_2^2+y_2^2\right)$.

Chapter 6

复数

复数作为数系扩充的结果引入，体现了实际需求与数学内部的矛盾在数系扩充过程中的作用，以及数系扩充过程中数系结构与运算性质的变化. 本章内容虽然比较简单，但通过学习，可以体会理论产生与发展的过程，提升数学运算及直观想象的核心素养.

“先生，$e^{\mathrm{i}\pi}+1=0$，所以上帝存在，请回答！”

——【瑞士】莱昂哈德·欧拉（*Leonhard Euler, 1707—1783*）

（第一次用 i 来表示 -1 的平方根，首创了用符号 i 作为虚数的单位）

§6.1 复数的有关概念

1. 复数的概念

我们把形如 $a+b\mathrm{i}$ 的数叫作**复数**，其中 i 叫作**虚数单位**，且 $\mathrm{i}^2=-1$.

全体复数所成的集合 $\mathbb{C}=\{z \mid z=a+b\mathrm{i}, a, b\in\mathbb{R}\}$ 叫作复数集. 复数通常用字母 z 表示，即 $z=a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbb{R})$，这一表示形式叫作**复数的代数形式**.

对于复数 $z=a+b\mathrm{i}$，其中的 a 与 b 分别叫作复数 z 的**实部**与**虚部**.

2. 复数相等的充要条件

$a+b\mathrm{i}=c+d\mathrm{i} \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases} \quad (a,b,c,d\in\mathbb{R})$，即两个复数相等当且仅当实部和虚部都相等.

3. 复数的分类

$$\text{复数}(z=a+b\mathrm{i})\begin{cases}\text{实数}(b=0)\\ \text{虚数}(b\neq 0)\begin{cases}\text{纯虚数}(a=0)\\ \text{非纯虚数}(a\neq 0)\end{cases}\end{cases}$$

4. 复数的几何意义

(1) 复平面.

复平面内实轴上的点表示实数，除原点以外虚轴上的点都表示纯虚数，各象限内的点都表示非纯虚数的虚数.

(2) 复数的几何表示.

复数 $a+b\mathrm{i}(a,b\in\mathbb{R}) \xLeftrightarrow{\text{一一对应}}$ 复平面内的点 $Z(a,b) \xLeftrightarrow{\text{一一对应}}$ 平面向量 $\overrightarrow{OZ}=(a,b)$.

5. 复数的模

向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的模叫作复数 $a+b\mathrm{i}$ 的**模**，记作 $|z|$ 或 $|a+b\mathrm{i}|$.

当 $b=0$ 时，$z=a+b\mathrm{i}$ 是一个实数 a，它的模等于 $|a|$ （即 a 的绝对值）.

由模的定义可知：$|z|=|a+b\mathrm{i}|=\sqrt{a^2+b^2}$.

6. 共轭复数

一般地，当两个复数的实部相等，且虚部互为相反数时，这两个复数叫作互为**共轭复数**；通常记复数 z 的共轭复数为 $\overline{z}$，即

$$z=a+b\mathrm{i} \xLeftrightarrow{\text{互为共轭复数}} \overline{z}=a-b\mathrm{i}.$$

§6.2 复数的运算

1. 复数的代数运算

设 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i},\ z_2=a_2+b_2\mathrm{i}\ (a,b,c,d\in\mathbb{R})$.

(1) 复数的加减法法则：

$$(a_1+b_1\mathrm{i})\pm(a_2+b_2\mathrm{i})=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\,\mathrm{i}.$$

其几何意义与平面向量类似，在此便不再过多赘述.

(2) 复数的乘法法则：

$$(a_1+b_1\mathrm{i})\,(a_2+b_2\mathrm{i})=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)\,\mathrm{i}+b_1b_2\mathrm{i}^2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\,\mathrm{i}$$

(3) 复数的除法法则 (类似于“分母有理化”)：

$$\frac{a_1+b_1\mathrm{i}}{a_2+b_2\mathrm{i}}=\frac{(a_1+b_1\mathrm{i})\,(a_2-b_2\mathrm{i})}{(a_2+b_2\mathrm{i})\,(a_2-b_2\mathrm{i})}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}\mathrm{i}\ \left(a_2^2+b_2^2\neq 0\right).$$

2. * 复数的三角形式及其运算

(1) 复数的辐角:

设复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 对应向量 $\overrightarrow{OZ}$，以 x 轴的正半轴为始边，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 所在的射线（起点为 O ）为终边的角 θ，叫作复数 z 的辐角，其中适合 $0\leqslant\theta<2\pi$ 的辐角 θ 的值，叫作辐角的主值，记作 $\arg z$，即 $\theta=\arg z$.

⋆ 特别说明:

① 复数的辐角与辐角主值满足关系式 $\theta=2k\pi+\arg z(k\in\mathbb{Z})$.

② 不等于零的复数 z 的辐角有无限多个值，这些值中的任意两个值相差 2π 的整数倍.

③ 复数 0 的辐角也是任意的，辐角主值可以取 $[0,2\pi)$ 内的任意一个值.

(2) 复数的三角形式:

$r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 叫作复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 的三角形式.

其中，$r=\sqrt{a^2+b^2}\geqslant 0,\cos\theta=\dfrac{a}{r},\sin\theta=\dfrac{b}{r}$.

⋆ 特别说明：任何一个复数 $z=a+b\mathrm{i}$ 均可表示成 $r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 的形式. 其中 r 为 z 的模，θ 为 z 的一个辐角.

(3) 复数的三角形式的运算:

设 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta),z_1=r_1\left(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1\right),z_2=r_2\left(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2\right)$. 则

① 乘法：$z_1z_2=r_1r_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+\mathrm{i}\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right]$;

证:

$$\begin{aligned}
z_1z_2&=r_1\left(\cos\theta_1+\mathrm{i}\sin\theta_1\right)\cdot r_2\left(\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_2\right)\\
&=r_1r_2\left(\cos\theta_1\cdot\cos\theta_2+\cos\theta_1\cdot\mathrm{i}\sin\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_1\cdot\cos\theta_2+\mathrm{i}\sin\theta_1\cdot\mathrm{i}\sin\theta_2\right)\\
&=r_1r_2\left[\left(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2\right)+\mathrm{i}\left(\cos\theta_1\sin\theta_2+\sin\theta_1\cos\theta_2\right)\right]\\
&=r_1r_2\left[\cos\left(\theta_1+\theta_2\right)+\mathrm{i}\sin\left(\theta_1+\theta_2\right)\right].
\end{aligned}$$

② 除法：$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{r_1}{r_2}\left[\cos\left(\theta_1-\theta_2\right)+\mathrm{i}\sin\left(\theta_1-\theta_2\right)\right]\ \left(z_2\neq 0\right)$;

③ 乘方 (棣莫弗定理)：$z^n=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)\ (n\in\mathbb{N})$;

④ 开方：$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\theta+2k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)\ (k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

(4) 复数乘、除法的几何意义:

① 复数乘法的几何意义：

设 $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + \mathrm{i}\sin\theta_1)$ 对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1}$，且 $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + \mathrm{i}\sin\theta_2)$，则 $z_1 \cdot z_2$ 的几何意义是把 z_1 的对应向量 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按逆时针方向旋转一个角 θ_2 (如果 $\theta_2 < 0$，就要把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按顺时针方向旋转一个角 $|\theta_2|$)，再把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 的模换成 $r_1 r_2$，即得 $z_1 \cdot z_2$ 的积对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$.

② 复数除法的几何意义：

$z_1 \neq 0, \dfrac{z}{z_1}$ 的几何意义是把 z 的对应向量 $\overrightarrow{OZ}$ 按顺时针方向旋转一个角 θ_1 (如果 $\theta_1 < 0$，就要把 $\overrightarrow{OZ}$ 按逆时针方向旋转一个角 $|\theta_1|$)，再把它的模变为原来的 $\dfrac{1}{r_1}$ 倍，所得的向量即表示商 $\dfrac{z}{z_1}$.

Chapter 7

数列

数列是列有序的数，一类以正整数集（或它的有限子集）为定义域的特殊函数. 学习数列有两条主线：一是基本技能，即基本公式和基本方法；二是用函数的观点认识数列，在具体问题情境中发现数列关系，建立数学模型. 通过学习使数学运算抽象及应用创新能力得以提升.

“没有大胆的猜测不可能有伟大的发现。”

——【德国】约翰·卡尔·弗里德里希·高斯（*Johann Carl Friedrich Gauß, 1777—1855*）

（被认为是世界上最重要的数学家之一，享有“数学王子”的美誉）

§7.1　数列的概念

§7.1.1　数列的概念

1.　定义

按照一定顺序排列着的一列数称为**数列**，数列中的每一个数叫作这个数列的**项**. 数列中的每一项都和它的序号有关，排在第一个位置的数称为这个数列的第 1 项（也叫作**首项**），排在第二个位置的数称为这个数列的第 2 项，$\cdots$ ，排在第 n 个位置的数称为这个数列的第 n 项.

所以，数列的一般形式可以写成 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$，其中 a_n 是数列的第 n 项，叫作数列的**通项**. 常把一般形式的数列简记作地 $\{a_n\}$.

2.　通项公式

如果数列 $\{a_n\}$ 的第 n 项（即 a_n ）与序号 n 之间的关系可以用一个式子来表示，那么这个公式叫作这个数列的**通项公式**.

3.　前 n 项和

数列 $\{a_n\}$ 中，$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ 叫作数列的**前 n 项和**.

此外，一般数列 $\{a_n\}$ 有无穷个项，因此前 n 项和又被称为**部分和**.

$\star$ 从函数的观点看，数列可以看作一个定义域为正整数集 $\mathbb{N}^*$（或它的有限子集 $\{1, 2, 3, \cdots, n\}$）的函数，当自变量从小到大依次取值时所对应的一列函数值.

§7.1.2 数列的分类

数列按项的**增减规律**分为递增数列、递减数列、摆动数列和常数列.

$$\text{数列}\begin{cases}\text{单调数列}\begin{cases}\text{递增数列}\Leftrightarrow a_{n+1}>a_n\text{, 即后一项比前一项大;}\\ \text{递减数列}\Leftrightarrow a_{n+1}<a_n\text{, 即后一项比前一项小;}\end{cases}\\ \text{非单调数列}\begin{cases}\text{摆动数列}\Leftrightarrow a_{n+1}\neq a_n\text{, 且非增非减，一般通项公式中含有}(-1)^n;\\ \text{常数列}\Leftrightarrow a_n=a\in\mathbb{R}\text{, 即整个数列的每一项均为}a.\end{cases}\end{cases}$$

§7.1.3 数列前 n 项和 S_n 与通项 a_n 的关系

已知 S_n，则 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2, n\in\mathbb{R}^*.\end{cases}$

§7.2 等差数列

§7.2.1 基本概念

1. 定义

一般地，如果一个数列从第 2 项起，每一项与它前一项的差等于同一常数，则该数列叫作**等差数列**，这个常数叫作公差，常用字母 d 表示，即

$$a_n-a_{n-1}=d\,(n\geqslant 2, n\in\mathbb{N}^*)\,.$$

2. 等差数列的通项公式

若等差数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1，公差是 d，则其通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d$$

由此得到 $a_n=nd+(a_1-d)$ 是关于 n 的一次函数.

推广：$a_n=a_m+(n-m)d$，从而公差 $d=\dfrac{a_n-a_m}{n-m}, n, m\in\mathbb{N}^*$.

3. 等差中项

如果 a, A, b 成等差数列，那么 A 叫做 a 与 b 的等差中项. 即：$A=\dfrac{a+b}{2}$ 或 $2A=a+b$. 在一个等差数列中，从第 2 项起（有穷等差数列的末项除外），每一项都是它的前一项与

后一项的等差中项. 事实上，等差数列中每一项都是与其等距离的前后两项的等差中项，即

$$2a_n = a_{n-m} + a_{n+m}, n \geqslant 2, m < n, m \in \mathbb{N}^*.$$

推广：当 $m+n=p+q\,(m,n,p,b \in \mathbb{N}^*)$ 时，则有

$$a_m + a_n = a_p + a_q$$

特别地，当 $m+n=2p$ 时，则有 $a_m + a_n = 2a_{\frac{m+n}{2}} = 2a_p$.

4. 等差数列的前 n 项和

根据“高斯求和法”可知，等差数列前 n 项和为 (首项 + 末项) × 项数 ÷ 2，即

$$S_n = \frac{n\left(a_1 + a_n\right)}{2} = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d,$$

由此得到 $S_n = \dfrac{d}{2}n^2 + \left(a_1 - \dfrac{1}{2}d\right)n = An^2 + Bn$ 是关于 n 的二次函数，其中常数项为 0.

§7.2.2 基本性质

1. 等差数列的线性组合

(1) 设 $\{a_n\}$ 是等差数列，则 $\{k \cdot a_n + b\}\,(k, b \in \mathbb{R})$ 也是等差数列.

(2) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是等差数列，则 $\{k_1 \cdot a_n + k_2 \cdot b_n\}\,(k_1, k_2 \in \mathbb{R})$ 也是等差数列.

2. 等差数列的前 $2n-1$ 项的和

等差数列的前 $2n-1$ 项的和为 $S_{2n-1} = (2n-1)a_n$.

证: 由 $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$ 得，

$$\begin{aligned} S_{2n-1} &= (2n-1)a_1 + \frac{(2n-1)[(2n-1)-1]}{2}d \\ &= (2n-1)a_1 + (2n-1)(n-1)d \\ &= (2n-1)\left[a_1 + (n-1)d\right] \\ &= (2n-1)a_n. \end{aligned}$$

因此，$S_{2n-1} = (2n-1)a_n$.

3. 等差数列的单调性及前 n 项和 S_n 的最值

公差 $d > 0 \Leftrightarrow \{a_n\}$ 为递增等差数列，S_n 有最小值；
公差 $d < 0 \Leftrightarrow \{a_n\}$ 为递减等差数列，S_n 有最大值；
公差 $d = 0 \Leftrightarrow \{a_n\}$ 为常数列.

$\star$ 特别地：

若 $a_1 > 0, d < 0$，则 S_n 有最大值 (所有非负项之和)；
若 $a_1 < 0, d > 0$，则 S_n 有最小值（所有非正项之和）.

4. * 其他衍生等差数列

若已知等差数列 $\{a_n\}$，公差为 d，前 n 项和为 S_n，则

(1) 等间距抽取：$a_p, a_{p+t}, a_{p+2t}, \cdots, a_{p+nt}, \cdots$ 为等差数列，公差为 td.

(2) 等长度截取：$S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}, \cdots$ 为等差数列，公差为 $m^2 d$.

证: 由 $S_n = na_1 + \dfrac{n(n-1)}{2}d$ 得,

$$
\begin{aligned}
&\left[S_{nm} - S_{(n-1)m}\right] - \left[S_{(n-1)m} - S_{(n-2)m}\right] \\
=&S_{nm} - 2S_{(n-1)m} + S_{(n-2)m} \\
=&\left[nma_1 + \frac{nm(nm-1)}{2}d\right] - 2\left[(n-1)ma_1 + \frac{(n-1)m((n-1)m-1)}{2}d\right] \\
&+ \left[(n-2)ma_1 + \frac{(n-2)m((n-2)m-1)}{2}d\right] \\
=&[n-2(n-1)+(n-2)]ma_1 \\
&+ [nm(nm-1) - 2(nm-m)(nm-m-1) + (nm-2m)(nm-2m-1)]\frac{d}{2} \\
=&\{nm(nm-1) - 2[nm(nm-m-1) - m(nm-m-1)] \\
&+ [nm(nm-2m-1) - 2m(nm-2m-1)]\}\frac{d}{2} \\
=&\{nm[(nm-1) - 2(nm-m-1) + (nm-2m-1)] + 2m[(nm-m-1) - (nm-2m-1)]\}\frac{d}{2} \\
=&(0 + 2m \cdot m)\frac{d}{2} = m^2 d
\end{aligned}
$$

因此，$\left\{S_{nm} - S_{(n-1)m}\right\}$ 是以 $m^2 d$ 为公差的等差数列.

(3) 算术平均值：$\dfrac{S_1}{1}, \dfrac{S_2}{2}, \dfrac{S_3}{3}, \cdots$ 为等差数列，公差为 $\dfrac{d}{2}$.

证: 由 $S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d$ 得,

$$\begin{aligned}
\frac{S_n}{n} - \frac{S_{n-1}}{n-1} &= \frac{(n-1)S_n - nS_{n-1}}{n(n-1)} \\
&= \frac{n\left(S_n - S_{n-1}\right) - S_n}{n(n-1)} \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left\{na_n - \left[na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d\right]\right\} \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left\{n\left[a_1 + (n-1)d\right] - \left[na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d\right]\right\} \\
&= \frac{1}{n(n-1)}\left[n(n-1)d\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{d}{2}.
\end{aligned}$$

因此, $\left\{\frac{S_n}{n}\right\}$ 是以 $\frac{d}{2}$ 为公差的等差数列.

§7.3 等比数列

§7.3.1 基本概念

1. 定义

一般地, 如果一个数列从第 2 项起, 每一项与它前一项的比等于同一非零常数, 则该数列叫作**等比数列**, 这个常数叫作公比, 常用字母 q 表示, 即

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = q \neq 0 \, (n \geqslant 2, n \in \mathbb{N}^*)$$

2. 等比数列的通项公式

若等比数列 $\{a_n\}$ 的首项是 a_1, 公比是 q, 则其通项公式为

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

由此得到 $a_n = cq^n \left(c = \frac{a_1}{q}\right) (a_1 \neq 0, q \neq 0)$ 是关于 n 的指数型函数.

推广: $a_n = a_m q^{n-m}$, 从而 $q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}, (n \neq m, n, m \in \mathbb{N}^*)$.

3. 等比中项

如果 a, A, b 成等比数列, 那么 A 叫做 a 与 b 的等比中项. 即: $A^2 = ab$ 或 $A = \pm\sqrt{ab}$.

注意 *1*: a, b 一定同号, 且 $-A$ 也是 a 与 b 的等比中项.

注意 2：由于等比中项的不惟一性，导致 $A^2=ab$ 是 a,A,b 成等比数列的**必要不充分**条件.

推广：当 $m+n=p+q\,(m,n,p,q\in\mathbb{N}^*)$ 时，则有

$$a_m a_n = a_p a_q$$

特别地，当 $m+n=2p$ 时，则有 $a_m+a_n=a_{\frac{m+n}{2}}^2=a_p^2$.

4. 等比数列的前 n 项和

$$S_n=\begin{cases} na_1, & q=1 \\ \dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\dfrac{a_1-a_nq}{1-q}, & q\neq 1 \end{cases}$$

$\star$ 等比数列的前 n 项和的**系常互反**：

$S_n=\dfrac{a_1\left(1-q^n\right)}{1-q}=\dfrac{a_1}{1-q}-\dfrac{a_1}{1-q}q^n=\lambda-\lambda q^n(\lambda\neq 0,q\neq 0$ 且 $q\neq 1)$，S_n 为指数型函数，且系数与常数互为相反数（简称**系常互反**）.

例题 7.3.1. （系常互反）等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^{2n+1}+t$，则 $t=$ $\underline{\ -2\ }$.

解: 等比数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 $S_n=2^{2n+1}+t=2\cdot 4^n+t$，则 $t=-2$.

§7.3.2 基本性质

1. 与等比数列 $\{a_n\}$ 有关的等比数列

(1) 设 $\{a_n\}$ 是等比数列，则 $\{ka_n\}\,(k\neq 0),\{|a_n|\},\{a_n^m\}$ 也是等比数列.

(2) 设 $\{a_n\},\{b_n\}$ 是等比数列，则 $\{a_nb_n\}$ 也是等比数列.

2. 等比数列的单调性

当 $\begin{cases} a_1>0 \\ q>1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1<0 \\ 0<q<1 \end{cases}$ 时，$\{a_n\}$ 为**递增数列**；

当 $\begin{cases} a_1>0 \\ 0<q<1 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a_1<0 \\ q>1 \end{cases}$ 时，$\{a_n\}$ 为**递减数列**；

当 $q<0$ 时，$\{a_n\}$ 为**摆动数列**，不具备单调性.

3. * 其他衍生等比数列

若已知等比数列 $\{a_n\}$，公比为 q，前 n 项和为 S_n，则

(1) 等间距抽取：$a_p, a_{p+t}, a_{p+2t}, \cdots, a_{p+nt}, \cdots$ 为等比数列，公比为 q^t.

(2) 等长度截取：$S_m, S_{2m}-S_m, S_{3m}-S_{2m}, \cdots$ 为等比数列，公差为 q^m （当 $q=-1$ 时，m 不为偶数）.

证: 由 $S_n = \dfrac{a_1(1-q^n)}{1-q}$ 得，

$$
\begin{aligned}
&\frac{S_{nm}-S_{(n-1)m}}{S_{(n-1)m}-S_{(n-2)m}}\\
=&\left\{\frac{a_1(1-q^{nm})}{1-q}-\frac{a_1\left[1-q^{(n-1)m}\right]}{1-q}\right\}\Big/\left\{\frac{a_1\left[1-q^{(n-1)m}\right]}{1-q}-\frac{a_1\left[1-q^{(n-2)m}\right]}{1-q}\right\}\\
=&\frac{(1-q^{nm})-\left[1-q^{(n-1)m}\right]}{\left[1-q^{(n-1)m}\right]-\left[1-q^{(n-2)m}\right]}\\
=&\frac{q^{(n-1)m}-q^{nm}}{q^{(n-2)m}-q^{(n-1)m}}\\
=&\frac{\left(q^{(n-1)m}-q^{nm}\right)/q^{(n-2)m}}{\left(q^{(n-2)m}-q^{(n-1)m}\right)/q^{(n-2)m}}=\frac{q^m-q^{2m}}{1-q^m}=\frac{q^m(1-q^m)}{1-q^m}=q^m.
\end{aligned}
$$

因此，$\left\{S_{nm}-S_{(n-1)m}\right\}$ 是以 q^m 为公比的等比数列.

此外，由于等比数列首项不能为零，即 $S_m \neq 0$.

若 $q=-1$，则 $S_m = a_1[1+(-1)+1+(-1)+\cdots]$，故此时 m 不能为偶数.

§7.4 题型总结

1. 已知 S_n 求 a_n

① $S_1 = a_1$；

② 当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1}$；

③ 检验：a_1 是否符合 a_n，若符合则直接写出 a_n，否则写成 $a_n = \begin{cases} a_1, & n=1, \\ a_n, & n \geqslant 2 \text{且} n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

2. 裂项

形如分式 $\dfrac{1}{f(x)g(x)}$ 可以通过裂项的方法将其拆分成两项，步骤如下：

① 将分式 $\dfrac{1}{f(x)g(x)}$ 进行拆分，拆分成 $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1)}{g(x)}$；

② 将拆分的两项通分合并与原式进行比较，即 $\dfrac{1}{f(x)} - \dfrac{1)}{g(x)} = \dfrac{g(x)-f(x)}{f(x)g(x)}$；

③ 因此可得裂项的结果为

$$\frac{1}{f(x)g(x)} = \frac{1}{g(x)-f(x)}\left[\frac{1}{f(x)} - \frac{1)}{g(x)}\right].$$

通过裂项进行求解的题目一般都是计算前 n 项和，并且与之伴随的都是累加法.

3. 错位相减

错位相减法适用于求差比数列（由等差数列和等比数列相乘得到的数列称为**差比数列**），计算过程如下：

设等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n = a_1 + (n-1)d = nd + (a_1 - d) \triangleq nd + a$，

设等比数列 $\{b_n\}$ 的通项公式 $b_n = b_1 q^{n-1} \triangleq bq^{n-1}$.

构造差比数列 $\{c_n\}$，其通项公式 $c_n = a_n \cdot b_n = (nd+a)bq^{n-1}$，若设数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n，则有

$$\begin{array}{rcccccccc}
T_n = & (d+a)bq^0 & + (2d+a)bq & + (3d+a)bq^2 & + \cdots + & (nd+a)bq^{n-1} & + & 0 \\
-\ \ q\cdot T_n = & 0 & + \ (d+a)bq & + (2d+a)bq^2 & + \cdots + & [(n-1)d+a]bq^{n-1} & + & (nd+a)bq^n \\
\hline
(1-q)T_n = & (d+a)b & + \ \ d\cdot bq & + \ \ d\cdot bq^2 & + \cdots + & d\cdot bq^{n-1} & & -(nd+a)bq^n \\
= & (d+a)b & + & & db(q+q^2+\cdots+q^{n-1}) & & & -(nd+a)bq^n \\
= & (d+a)b & + & & db\dfrac{q(1-q^{n-1})}{1-q} & & & -(nd+a)bq^n
\end{array}$$

因此，得到数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和

$$T_n = \frac{(d+a)b + db\frac{q(1-q^{n-1})}{1-q} - (nd+a)bq^n}{1-q}.$$

复盘一下做题过程：

① 将 T_n 从第 1 项到第 n 项依次列举出来；

② 将 T_n 乘以公比 q，即 $q \cdot T_n$，并**错位**依次列举出来；同时建议在前后错开的地方补“0”；

③ 两式相减得到 $(1-q)T_n$，中间部分可用等比数列前 n 项和公式进行求和；

④ 将 $(1-q)T_n$ 中的 $(1-q)$ 除到等号右侧，便得到 T_n.

4. 构造法（待定系数法）

构造法适用于“已知形如 $a_{n+1}=qa_n+p\ (q,p\in\mathbb{R})$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式”类型题中，计算过程如下：

已知 $a_{n+1}=qa_n+p\ (q,p\in\mathbb{R})$，设 $m\in\mathbb{R}$，有

$$a_{n+1}+m=q(a_n+m),$$

即

$$a_{n+1}=qa_n+qm.$$

于是有

$$qm=p \qquad \Rightarrow \qquad m=\frac{p}{q}.$$

同时由 $a_{n+1}+m=q(a_n+m)$ 得

$$\frac{a_{n+1}+m}{a_n+m}=q,$$

由等比数列的定义可知，数列 $\{a_n+m\}$ 是以 a_1+m 为首项，q 为公比的等差数列，则有

$$a_n+m=(a_1+m)q^{n-1}.$$

因此，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=(a_1+m)q^{n-1}-m=\left(a_1+\frac{p}{q}\right)q^{n-1}-\frac{p}{q}.$$

⋆ 注意：

在上式中 q,p 均为常数，其中 p 有时非常数，如

$$a_{n+1}=a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

则可将该式等号两侧同时 $\times 2^n$，将其化成

$$2^na_{n+1}=2^na_n+1.$$

但是此时出现指数和角标不一致的情况，可构造数列 $\{b_n\}$，使 $b_{n+1}=2^na_{n+1}$，则 $b_n=2^{n-1}a_n$，那么原式便化为

$$b_{n+1}=2b_n+1,$$

这样便与构造法的形式一致，便可继续构造法的做题步骤.

Chapter 8

导数

导数是微积分的核心内容之一，是现代数学的基本概念、蕴含微积分的基本思想，导数定量地刻画了函数的局部变化，是研究函数性质的基本工具.

“一尺之棰，日取其半，万世不竭。”

——《庄子·天下》【战国】庄子（约公元前 *369* 年—约公元前 *286* 年）

（微积分思想的萌芽——极限）

“上帝之存在是因为数学是相容的，而魔王之存在是因为我们不能证明数学是相容的。”

——【法国】皮埃尔·德·费马 *(Pierre de Fermat, 1601—1665)*

（研究了作曲线的切线和求函数极值的方法——导数）

§8.1 导数的概念及其意义与运算

1. 导数的定义

设函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 附近有定义，如果 $\Delta x\to 0$ 时，Δy 与 Δx 的比 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ (也叫函数的平均变化率) 有极限，即 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 无限趋近于某个常数，我们把这个**极限值**叫作函数 $y=f(x)$ 在 $x=x_0$ 处的**导数**，记作 $f'(x_0)$ 或 $y'|_{x=x_0}$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

2. 导数的几何意义

函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的导数 $f'(x_0)$，表示曲线 $y=f(x)$ 在点 $P(x_0,f(x_0))$ 处的切线的斜率，即 $k=\tan\theta=f'(x_0)$，其中 θ 为切线的倾斜角，则在点 P 处的切线方程为

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0).$$

注：函数 $y=f(x)$ 需在区间 $(x_0-\Delta x,x_0+\Delta)$ 上有定义.

3.　基本初等函数的导数公式

函数类型	原函数 $f(x)$	导函数 $f'(x)$
常函数	$y=c$ (c为常数)	$y'=0$
幂函数	$y=x^\alpha$ ($\alpha\in\mathbb{Q}$且$\alpha\neq 0$)	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$
指数函数	$y=a^x$ ($a>0$且$a\neq 1$)	$y'=a^x\ln a (a>0)$
	特殊：$y=e^x$	$y'=e^x$
对数函数	$y=\log_a x$ ($a>0$且$a\neq 1$)	$y'=\dfrac{1}{x\ln a}$
	特殊：$y=\ln x$	$y'=\dfrac{1}{x}$
三角函数	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$

常用特殊基本初等函数的导数：$(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$，$\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$.

4.　导数的运算法则

设函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 均可导，则

加减运算　$$[f(x)\pm g(x)]'=f'(x)\pm g'(x)$$

数乘运算　$$[kf(x)]'=kf'(x)(k\in\mathbb{R})$$

乘法运算　$$[f(x)g(x)]'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

除法运算　$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}\ (g(x)\neq 0)$$

5.　复合函数的导数（链式法则）

复合函数 $y=f[g(x)]$ 的导数与函数 $y=f(u),u=g(x)$ 的导数之间具有关系 $y'_x=y'_u\cdot u'_x$，该关系用语言表述为"y 对 x 的导数等于 y 对 u 的导数与 u 对 x 的导数的乘积"，即

$$\{f[g(x)]\}'=f'[g(x)]\cdot g'(x),$$

即，外层函数的导数乘以内层函数的导数.

换句话说，先把 $g(x)$ 当作一个整体，把 $y=f[g(x)]$ 对 $g(x)$ 求导，再把 $g(x)$ 对 x 求导，这两者的乘积就是复合函数 $y=f[g(x)]$ 对 x 的导数.

§8.2 导数的应用

1. 函数单调性与导函数符号的关系

一般地，函数的单调性与其导数正负有如下关系:

在某个区间 (a,b) 内，如果 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在该区间内**单调递增**；如果 $f'(x)>0$，那么函数 $y=f(x)$ 在该区间内**单调递减**.

导数与函数单调性
$f'(x)>0 \Rightarrow f(x)\uparrow$
$f'(x)<0 \Rightarrow f(x)\downarrow$

函数单调性与导数
$f(x)\uparrow \Rightarrow f'(x)\geqslant 0$
$f(x)\downarrow \Rightarrow f'(x)\leqslant 0$

2. 函数极值的概念

设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续且 $y=f'(x_0)=0$，若在点 x_0 附近的左侧，$f'(x_0)>0$，右侧 $f'(x_0)<0$，则 x_0 为函数的**极大值点**；若在 x_0 附近的左侧 $f'(x_0)<0$，右侧 $f'(x_0)>0$，则 x_0 为函数的**极小值点**.

函数的极值是相对函数在某一点附近的小区间而言的，在函数的整个定义区间内可能有多个极大值或极小值，且极大值不一定比极小值大. 极大值与极小值统称为极值，极大值点与极小值点统称为**极值点**（注意：极值点和零点一样都不是点，而是数）.

3. 函数的最大值、最小值

若函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的图像是一条连续不间断的曲线，则该函数在 $[a,b]$ 上一定能够取得最大值与最小值，函数的最值必在极值点或区间端点处取得.

Chapter 9

立体几何

几何学是研究现实世界中物体的形状、大小与位置关系的数学学科. 立体几何是几何学的重要组成部分，也是高中数学的主干知识，它从认识多面体与旋转体的结构特征出发，聚焦点、线、面的位置关系，落脚点在它们之间的位置关系的判定及空间角和距离的计算. 立体几何是培养直观想象、逻辑推理及数学运算能力的重要阵地.

"抱歉，陛下！学习数学（几何学）和学习一切科学一样，是没有什么捷径可走的。学习数学，人人都得独立思考，就像种庄稼一样，不耕耘是不会有收获的。在这一方面，国王和普通老百姓是一样的。"

——【古希腊】欧几里得（*Euclid*，公元前 *330*—公元前 *275*）

（欧式空间（高中阶段所学习的空间均为欧式空间）创始人）

§9.1 空间几何体及空间点、直线、平面的位置关系

§9.1.1 * 空间几何体的直观图

1. 斜二测画法

口诀：平行依旧垂改斜，横等纵半坚不变；眼见为实遮为虚，空间观感好体现。

(1) 平面图形.

Step 1. 在已知平面图形中取互相垂直的 x 轴和 y 轴，两轴相交于点 O，从而建立平面直角坐标系；

Step 2. 画出斜坐标系：在画直观图的纸上（平面上）画出对应的 x' 轴和 y' 轴，两轴相交于点 O'，且使 $\angle x'O'y' = 45^\circ$ (或 135°)，它们确定的平面表示水平平面；

Step 3. 画对应图形：在已知图形平行于 x 轴的线段，在直观图中画成平行于 x' 轴，长度保持不变；在已知图形平行于 y 轴的线段，在直观图画成平行于 y' 轴，且长度为原来的一半；

Step 4. 对于一般线段，要在原来的图形中从线段的各个端点引垂线，再按上述要求画出这些线段，确定端点，从而画出线段；

Step 5. 擦去辅助线：图画好后，要擦去 x' 轴、y' 轴及为画图添加的辅助线.

(2) 立体图形.

Step 1. 画轴：画 x, y, z 三轴交原点，使 $\angle xOy = 45°, \angle xOz = 90°$；

Step 2. 画底面：在相应轴上取底面的边，并交于底面各顶点；

Step 3. 画侧棱或横截面侧边，使其平行于 z 轴；

Step 4. 成图：连接相应端点，去掉辅助线，将被遮挡部分改为虚线等.

⋆ 直观图和平面图形的面积比为 $\sqrt{2} : 4$.

2. 平行投影与中心投影

平行投影的投影线互相平行，中心投影的投影线相交于一点.

§9.1.2 构成空间几何体的基本元素——点、线、面

1. 空间中，点动成线，线动成面，面动成体.
2. 空间中，不重合的两点确定一条直线，不共线的三点确定一个平面，不共面的四点确定一个空间四边形或几何体 (四面体或三棱锥).

§9.1.3 简单凸多面体——棱柱、棱锥、棱台

1. 棱柱

两个面互相平行，其余各面都是四边形，并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行，由这些面所围成的多面体叫作**棱柱**.

(1) **斜棱柱**：侧棱不垂直于底面的棱柱；

(2) **直棱柱**：侧棱垂直于底面的棱柱；

(3) **正棱柱**：底面是正多边形的直棱柱；

(4) **平行六面体**：底面是平行四边形的棱柱；

(5) **长方体**：底面是矩形的直平行六面体；

(6) **正方体**：棱长都相等的长方体.

2. 棱锥

有一个面是多边形，其余各面都是有一个公共顶点的三角形，由这些面所围成的多面体叫作**棱锥**.

(1) **正棱锥**：底面是正多边形，且顶点在底面的射影是底面的中心；

(2) **正四面体**：所有棱长都相等的三棱锥.

3. 棱台

用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥，底面和截面之间的部分叫作**棱台**. 由正棱锥截得的棱台叫作**正棱台**.

§9.1.4 简单旋转体——圆柱、圆锥、圆台、球

1. 圆柱

以矩形的一边所在的直线为旋转轴，其余三边旋转形成的面所围成的几何体叫作**圆柱**.

2. 圆锥

以直角三角形的一条直角边所在的直线为旋转轴，将其旋转一周形成的曲面所围成的几何体叫作**圆锥**.

3. 圆台

用平行于圆锥底面的平面去截圆锥，底面和截面之间的部分叫作**圆台**.

4. 球

半圆的直径所在的直线为旋转轴，半圆面旋转一周形成的旋转体叫作**球体**，简称为**球**.

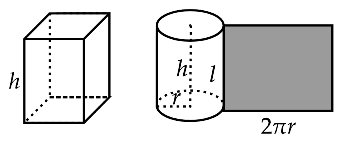
§9.1.5 组合体

由柱体、锥体、台体、球等几何体组成的复杂几何体叫作**组合体**.

§9.1.6 表面积与体积

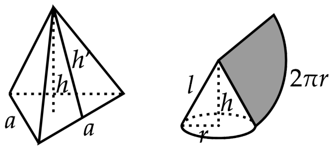
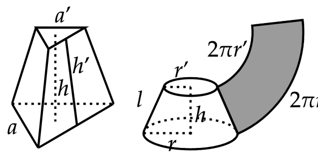
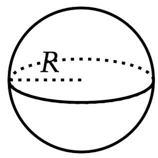
常见几何体的表面积与体积计算公式如表9.1.1所示.

表 9.1.1 常见几何体的表面积与体积计算公式

几何体	表面积与体积计算公式		图示
柱体	表面积	$S_{棱柱}=cl+2S_{底}$ （c 为底面边长，l 为侧棱长） $S_{圆柱}=2\pi r^2+2\pi rl=2\pi r(r+l)$	
柱体	体积	$V_{锥}=Sh$	

（接下页）

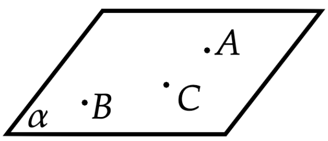
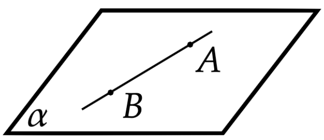
续表:

<table>
<tr><th>几何体</th><th colspan="2">表面积与体积计算公式</th><th>图示</th></tr>
<tr><td rowspan="2">锥体</td><td>表面积</td><td>$S_{正棱锥}=\frac{1}{2}nah'+S_{底}$
(n 为侧面个数)
$S_{圆锥}=\pi r^2+\pi rl=\pi r(r+l)$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>体积</td><td>$V_{锥}=\frac{1}{3}Sh$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">台体</td><td>表面积</td><td>$S_{正棱台}=\frac{1}{2}n\left(a+a'\right)h'+S_{上}+S_{下}$
(n 为侧面个数)
$S_{圆台}=\pi\left(r'^2+r^2+r'l+rl\right)$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>体积</td><td>$V_{台}=\frac{1}{3}\left(S+\sqrt{SS'}+S'\right)h$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">球</td><td>表面积</td><td>$S_{球}=4\pi R^2$</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>体积</td><td>$V_{球}=\frac{4}{3}\pi R^3$</td></tr>
</table>

§9.1.7 平面的基本性质

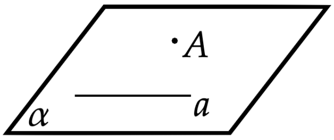
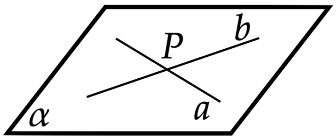
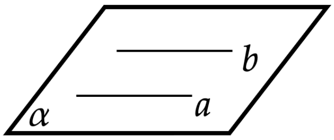
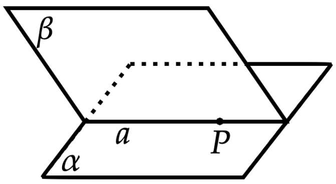
平面的基本性质如表9.1.2所示.

表 9.1.2 平面的基本性质

<table>
<tr><th>名称</th><th>图形</th><th>文字语言</th><th>符号语言</th></tr>
<tr><td>基本事实 1</td><td></td><td>过不在同一直线上的三点有且只有一个平面</td><td>A,B,C 不共线
$\Rightarrow A,B,C\in\alpha$ 且 α 是惟一确定的</td></tr>
<tr><td>基本事实 2</td><td></td><td>如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内</td><td>$\left.\begin{array}{l}A\in l\\B\in l\\A\in\alpha\\B\in\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow l\subset\alpha$</td></tr>
</table>

(接下页)

续表:

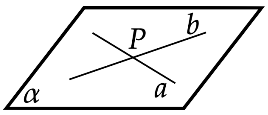
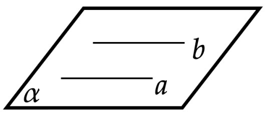
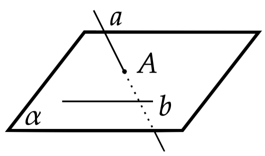
名称	图形	文字语言	符号语言
推论 1		经过一条直线和该直线外一点有且只有一个平面	若点 $A \notin a$，则经过点 A 和直线 a 有且仅有一个平面 α
推论 2		两条相交直线确定一个平面	$a \cap b = P \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α，使 $a \subset \alpha, b \subset \alpha$
推论 3		两条平行直线确定一个平面	$a \parallel b \Rightarrow$ 有且只有一个平面 α，使 $a \subset \alpha b \subset \alpha$
基本事实 3		如果两个不重合的平面有一个公共点，那么它们有且只有一条过该点的公共直线	若 $P \in \alpha \cap \beta$，则 $\alpha \cap \beta = a$ （惟一），且 $P \in \alpha$

注：三个基本事实的用途：**基本事实 1** 证明“两个平面重合”，用来确定一个平面，或证明“点线共面”；**基本事实 2** 证明“点在面内”或“线在面内”；**基本事实 3** 证明“三点共线”“三线共点”，用来确定交线.

§9.1.8 空间中直线与直线的位置关系

空间中直线与直线的位置关系详见表9.1.3.

表 9.1.3 空间中直线与直线的位置关系

位置关系	相交（共面）	平行（共面）	异面
图形			
符号	$a \cap b = P$	$a \parallel b$	$a \cap \alpha = A, b \subset \alpha, A \notin b$
公共点个数	1	0	0

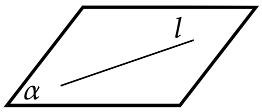
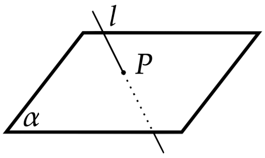
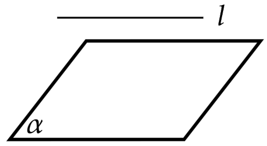
基本事实 4（平行公理）：平行于同一直线的两条直线平行.

定理：空间中若两个角的两边分别对应平行，则这两个角相等或互补.

§9.1.9 空间中的直线与平面的位置关系

空间中的直线与平面的位置关系详见表9.1.4.

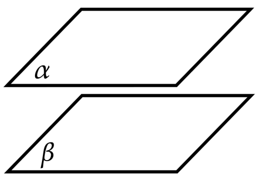
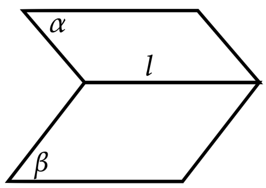
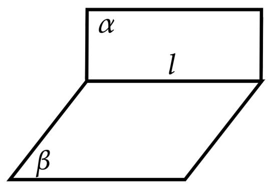
表 9.1.4 空间中的直线与平面的位置关系

位置关系	包含（面内线）	相交（面外线）	平行（面外线）
图形			
符号	$l \subset a$	$l \cap a = P$	$l \,/\!/\, \alpha$
公共点个数	无数个	1	0

§9.1.10 空间中的平面与平面的位置关系

空间中的平面与平面的位置关系详见表9.1.5.

表 9.1.5 空间中的平面与平面的位置关系

位置关系	平行	相交（但不垂直）	垂直
图形			
符号	$l \subset a$	$l \cap a = P$	$l \,/\!/\, \alpha$
公共点个数	无数个	1	0

注：垂直是相交（成 90°）的特殊情形，异面直线经平移后相交成 90° 也叫垂直.

§9.2 空间直线、平面间平行的判定与性质

判定与性质的区分：

判定：线线关系 ⇒ 线面关系、面面关系，线面关系 ⇒ 面面关系；

性质：面面关系 ⇒ 线线关系、线面关系，线面关系 ⇒ 线线关系.

§9.2.1　直线和平面平行

1.　定义

直线与平面没有公共点，则称此直线 l 与平面 α 平行，记作 $l /\!/ \alpha$. 表 9.1.5 空间中的平面与平面的位置关系

2.　判定方法与性质

线面平行的判定方法详见表9.2.1，性质详见表9.2.2.

表 9.2.1　线面平行的判定方法

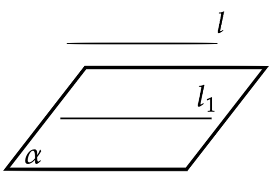
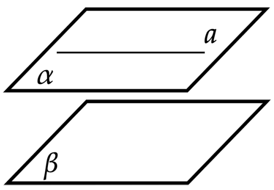
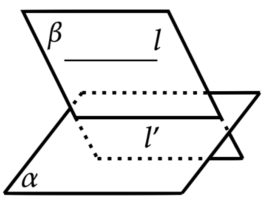
名称	图形	文字语言	符号语言
线 $/\!/$ 线 $\Downarrow$ 线 $/\!/$ 面		如果平面外的一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行	$\left.\begin{array}{l} l /\!/ l_1 \\ l_1 \subset \alpha \\ l \not\subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow l /\!/ \alpha$
面 $/\!/$ 面 $\Downarrow$ 线 $/\!/$ 面		如果两个平面平行，那么在一个平面内的所有直线都平行于另一个平面	$\left.\begin{array}{l} \alpha /\!/ \beta \\ a \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a /\!/ \beta$

表 9.2.2　线面平行的性质

名称	图形	文字语言	符号语言
线 $/\!/$ 面 $\Downarrow$ 线 $/\!/$ 线		如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行	$\left.\begin{array}{l} l /\!/ \alpha \\ l \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = l' \end{array}\right\} \Rightarrow l /\!/ l'$

§9.2.2　两个平面平行

1.　定义

没有公共点的两个平面叫作平行平面，即：对于平面 α 和 β，若 $\alpha \cap \beta = \varnothing$，则 $\alpha /\!/ \beta$.

2. 判定方法与性质

面面平行的判定方法详见表9.2.3，性质详见表9.2.4.

表 9.2.3 面面平行的判定方法

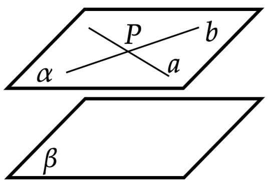
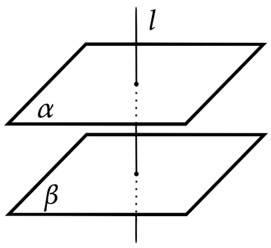
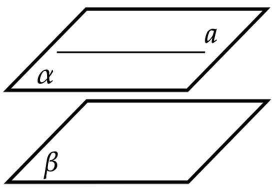
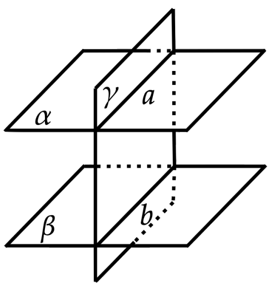
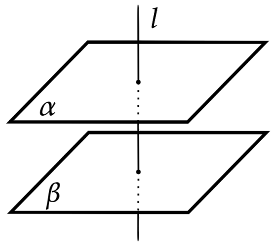
名称	图形	文字语言	符号语言
线 // 面 $\Downarrow$ 面 // 面		如果一个平面内有两条相交的直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行	$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \cap b = P \\ a \,//\, \beta \\ b \,//\, \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \,//\, \beta$
线 ⊥ 面 $\Downarrow$ 面 // 面		如果一个平面内的直线都平行于两条一个平面，那么这两个平面平行	$\left.\begin{array}{l} l \perp \alpha \\ l \perp \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \,//\, \beta$

表 9.2.4 面面平行的性质

名称	图形	文字语言	符号语言
面 // 面 $\Downarrow$ 线 // 面		如果两个平面平行，那么在一个平面内的所有直线都平行于另一个平面	$\left.\begin{array}{l} \alpha \,//\, \beta \\ a \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow a \,//\, \beta$
面 // 面 $\Downarrow$ 线 // 线		如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行	$\left.\begin{array}{l} \alpha \,//\, \beta \\ \alpha \cap \gamma = a \\ \beta \cap \gamma = b \end{array}\right\} \Rightarrow a \,//\, b$

（接下页）

续表:

名称	图形	文字语言	符号语言
面 // 面 ⇓ 线 ⊥ 面		如果两个平行平面中有一个平面垂直于一条直线，那么另一个平面也垂直于这条直线	$\left.\begin{array}{l}\alpha \parallel \beta\\ l\perp\alpha\end{array}\right\}\Rightarrow l\perp\beta$

§9.3 空间直线、平面间垂直的判定与性质

§9.3.1 直线和平面垂直

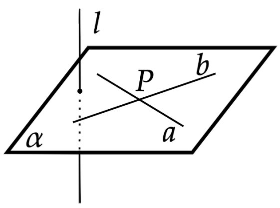
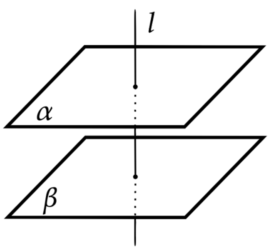
1. 定义

如果一条直线和这个平面内的**任意一条直线**都垂直，则称这条直线和这个平面相互垂直.

2. 判定方法与性质

线面垂直的判定方法详见表9.3.1，性质详见表9.3.2.

表 9.3.1 线面垂直的判定方法

名称	图形	文字语言	符号语言
线 ⊥ 线 ⇓ 线 ⊥ 面		一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直	$\left.\begin{array}{l}a\subset\alpha\\ b\subset\alpha\\ a\perp l\\ b\perp l\\ a\cap b=P\end{array}\right\}\Rightarrow l\perp\alpha$
线 ⊥ 面 ⇓ 线 ⊥ 面		一条直线与两平行平面中的一个平面垂直, 则该直线与另一个平面也垂直	$\left.\begin{array}{l}l\perp\alpha\\ \alpha \parallel \beta\end{array}\right\}\Rightarrow l\perp\beta$

（接下页）

续表:

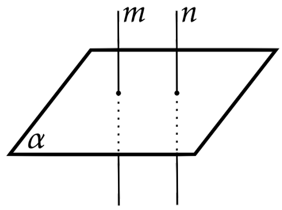
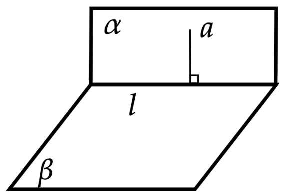
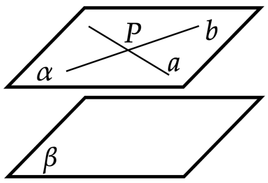
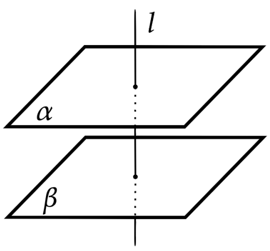
名称	图形	文字语言	符号语言
线 ⊥ 面 ⇓ 线 ⊥ 面		两平行直线中有一条与平面垂直，则另一条直线与该平面也垂直	$\left.\begin{array}{l} m \perp \alpha \\ m /\!/ n \end{array}\right\} \Rightarrow n \perp \alpha$
面 ⊥ 面 ⇓ 线 ⊥ 面		一条直线与一个平面内的两条相交直线都垂直，则该直线与此平面垂直	$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \perp l \\ b \perp l \\ a \cap b = P \end{array}\right\} \Rightarrow l \perp \alpha$

表 9.3.2 线面垂直的性质

名称	图形	文字语言	符号语言
线 // 面 ⇓ 面 // 面		如果一个平面内有两条相交的直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行	$\left.\begin{array}{l} a \subset \alpha \\ b \subset \alpha \\ a \cap b = P \\ a /\!/ \beta \\ b /\!/ \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha /\!/ \beta$
线 ⊥ 面 ⇓ 面 // 面		如果一个平面内的直线都平行于两条一个平面，那么这两个平面平行	$\left.\begin{array}{l} l \perp \alpha \\ l \perp \beta \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha /\!/ \beta$

§9.3.2 斜线在平面内的射影

1. 斜线的定义

一条直线与一个平面相交，但不和这个平面垂直，这条直线叫作这个平面的**斜线**，斜线和这个平面的交点叫作**斜足**.

2. 射影的定义

过斜线上斜足以外的一点向平面引垂线，过垂足和斜足的直线叫作斜线在这个平面内的**射影**.

3. 直线与平面所成的角（线面角）

平面内的一条斜线和它在平面内的射影所成的锐角，叫作这条直线和这个平面所成的角.

特别地，一条直线垂直于平面，我们说它们所成的角是直角；一条直线和平面平行，或在平面内，我们说它们所成的角是 $0°$ 的角，故直线与平面所成的角的范围是 $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

如图9.3.1所示，PA 是平面 α 的**斜线**，A 为**斜足**；PO 是平面 α 的**垂线**，O 为**垂足**；AO 是 PA 在平面 α 内的**射影**，$\angle PAO$ 的大小即为直线 PA 与平面 α 所成的角的大小.

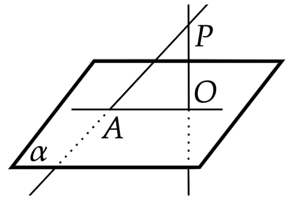


图 9.3.1

§9.3.3 平面与平面垂直

1. 二面角的定义

从一条直线出发的两个半平面所组成的图形叫作**二面角**. 这条直线叫作二面角的**棱**，这两个半平面叫作二面角的**面**.

如图9.3.2所示，在二面角 $\alpha - l - \beta$ 的棱 l 上任取一点 O，以点 O 为垂足，在半平面 α 和 β 内分别作垂直于棱 l 的射线 OA 和 OB，则射线 OA 和 OB 构成的 $\angle AOB$ 叫作二面角的平面角，二面角的范围是 $[0, \pi]$. 另外，平面角是直角的二面角叫作**直二面角**.

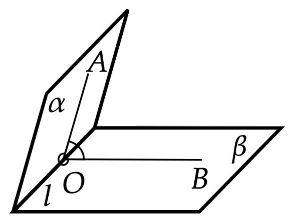


图 9.3.2

2. 平面与平面垂直的定义

一般地，两个平面相交，如果它们所成的二面角是直二面角，就说这两个平面互相垂直.

3. 判定方法与性质

面面垂直的判定方法详见表9.3.3，性质详见表9.3.4.

表 9.3.3　面面垂直的判定方法

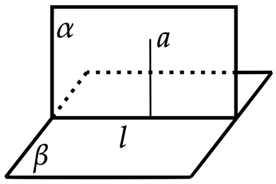
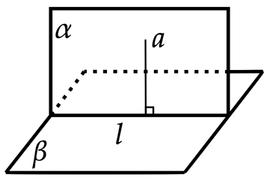
名称	图形	文字语言	符号语言
线 $\perp$ 面 $\Downarrow$ 面 $\perp$ 面		一个平面过另一个平面的垂线，则这两个平面垂直	$\left.\begin{array}{l} a \perp \beta \\ a \subset \alpha \end{array}\right\} \Rightarrow \alpha \perp \beta$

表 9.3.4　面面垂直的性质

名称	图形	文字语言	符号语言
面 $\perp$ 面 $\Downarrow$ 线 $\perp$ 面		两个平面垂直，则一个平面内垂直于交线的直线与另一个平面垂直	$\left.\begin{array}{l} \alpha \perp \beta \\ \alpha \subset \beta = l \\ a \subset \alpha \\ a \perp l \end{array}\right\} \Rightarrow a \perp \beta$

§9.4　空间向量与立体几何

本节内容大致上与第五章基本类似，只不过是二维到三维上的拓展，下面进行简单介绍.

§9.4.1　空间向量及其加减运算

1.　空间向量

在空间，我们把具有大小和方向的量叫作**空间向量**. 空间向量也可用有向线段表示，有向线段的长度表示向量的模，若向量 $\boldsymbol{a}$ 的起点是 A，终点是 B，则向量 $\boldsymbol{a}$ 也可以记作 $\overrightarrow{AB}$，其模记为 $|\boldsymbol{a}|$ 或 $|\overrightarrow{AB}|$.

2.　零向量与单位向量

规定长度为 0 的向量叫作**零向量**，记作 $\mathbf{0}$. 当有向线段的起点 A 与终点 B 重合时，$\overrightarrow{AB} = \mathbf{0}$. 模为 1 的向量称为**单位向量**.

3.　相等向量与相反向量

方向相同且模相等的向量称为**相等向量**. 在空间上，同向且等长的有向线段表示同一向量或相等向量. 空间任意两个向量都可以平移到同一个平面，成为同一平面内的两个向量. 与向

量 a 长度相等而方向相反的向量，称为 $\boldsymbol{a}$ 的**相反向量**，记为 $-\boldsymbol{a}$.

4. 空间向量的加法和减法运算

(1) 加减法：$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

(2) 空间向量的加法运算满足交换律及结合律，即 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}$.

§9.4.2 空间向量的数乘运算

1. 数乘运算

实数 λ 与空间向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 称为向量的数乘运算. 当 $\lambda>0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相同；当 $\lambda<0$ 时，向量 $\lambda\boldsymbol{a}$ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 方向相反. $\lambda\boldsymbol{a}$ 的长度是 $\boldsymbol{a}$ 的长度的 $|\lambda|$ 倍.

2. 空间向量的数乘运算的分配律及结合律

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$, $\quad\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$.

3. 共线向量与平行向量

如果表示空间向量的有向线段所在的直线互相平行或重合，则这些向量叫作共线向量或平行向量，称作 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.

4. 共线向量定理

对空间中任意两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ $(\boldsymbol{b}\neq 0)$，$\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$ 的充要条件是存在实数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

5. 直线的方向向量

如图9.4.1所示，l 为经过已知点 A 且平行于已知非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的直线. 对空间任意一点 O，点 P 在直线 l 上的充要条件是存在实数 t，使

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\boldsymbol{a},$$

其中向量 $\boldsymbol{a}$ 叫作直线 l 的方向向量，在 l 上取 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，则上可化为

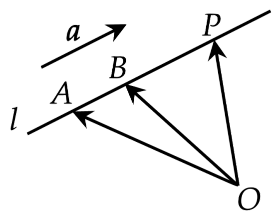


图 9.4.1

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OA}+t\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\right)=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}.$$

上述两式都称为空间直线的向量表达式，当 $t=\dfrac{1}{2}$，即点 P 是线段 AB 的中点时，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$，此式叫作线段的中点公式.

6. 共面向量

已知平面 α 与向量 $\boldsymbol{a}$，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，如果直线 OA 平行于平面 α 或在平面 α 内，则说明向量 $\boldsymbol{a}$ 平行于平面 α. 平行于同一平面的向量，叫作共面向量.

7. 共面向量定理

如果两个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 不共线，那么向量 $\boldsymbol{p}$ 与向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共面的充要条件是存在惟一的有序实数对 (x,y)，使 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}$. 因此可得以下两条推论：

(1) 空间中一点 P 位于平面 ABC 内的充要条件是存在有序实数对 (x,y)，使

$$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC},$$

或对空间任意一点 O，有

$$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC},$$

该式称为空间平面 ABC 的向量表达式.

(2) 已知空间任意一点 O 和不共线的三点 A,B,C，满足向量关系式

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}\quad(\text{其中}x+y+z=1)$$

的点 P 与点 A,B,C 共面；反之也成立.

§9.4.3 空间向量的数量积运算

1. 两向量的夹角

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，在空间中任取一点 O，作 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a},\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$，则 $\angle AOB$ 叫作向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的夹角，记作 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$，通常规定 $0\leqslant\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\leqslant\pi$.

如果 $\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\pi}{2}$，那么向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 互相垂直，记作 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

2. 数量积定义

已知两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，则 $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 叫作 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的数量积，记作 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\langle\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\rangle.$$

零向量与任何向量的数量积为 0，特别地，$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$

3. 空间向量的数量积满足的运算律

(1) 交换律：$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$；

(2) 数乘的结合率：$\lambda(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\lambda\boldsymbol{a})\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}\cdot(\lambda\boldsymbol{b})$，其中 λ 为一实数；

(3) 分配律：$\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}$.

§9.4.4 空间向量的坐标表示与坐标运算

1. 空间向量的正交分解及其坐标表示

(1) 空间向量的基本定理.

如果三个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 不共面，那么对任一向量 $\boldsymbol{p}$，存在有序实数组 $\{x,y,z\}$，使得 $\boldsymbol{p}=x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}$. 其中 $\{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\}$ 叫作空间的一个基底，$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 为基向量.

$\star$ 推论：设 O,A,B,C 是不共面的四点，则对空间任一点 P，都存在惟一的三个有序实数 $\{x,y,z\}$，使 $\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OA}+y\overrightarrow{OB}+z\overrightarrow{OC}$.

(2) 空间直角坐标系.

① 空间直角坐标系的建立.

如果空间的一个基底的三个基向量互相垂直，且长都为 1 ，则这个基底叫作单位正交基底，用 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$ 表示，在空间选定一点 O 和一个单位正交基底 $\{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}\}$，以点 O 为原点，分别以 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 的方向为正方向建立三条数轴：x 轴、y 轴、z 轴，它们都叫作坐标轴. $O-xyz$ 为空间直角坐标系，O 为原点，向量 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为坐标向量，通过每两个坐标轴的平面叫作坐标平面. 右手系是指右手的大拇指、食指与中指尽可能伸展成两两垂直状态，拇指方向表示 x 轴正向、食指方向表示 y 轴正向，中指方向表示 z 轴正向，空间直角坐标系将空间分成八个卦限.

② 向量的坐标.

给定一个空间直角坐标系和向量 $\boldsymbol{a}$，且设 $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 为坐标向量，由空间向量基本定理知，存在惟一的有序实数组 (a_1,a_2,a_3)，使 $\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}$. 有序实数组 (a_1,a_2,a_3) 叫作 $\boldsymbol{a}$ 在空间直角坐标系 $O-xyz$ 中的坐标，即 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$.

设 A 是空间任一点，$\overrightarrow{OA}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，则 (x,y,z) 称为点 A 的空间直角坐标.

2. 空间向量的坐标运算

设向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)\,,\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$. 则

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$；

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$；

(3) $\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$；

(4) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

(5) $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}(\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0})\Rightarrow$ 存在惟一实数 λ，$a_1=\lambda b_1$，使 $a_2=\lambda b_2,a_3=\lambda b_3$；

(6) $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}\Rightarrow\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$.

3. 空间向量坐标、起点坐标、终点坐标的关系

设点 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$，则 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$. 也就是说，一个向量在直角坐标系中的坐标等于表示该向量的有向线段的终点的坐标减起点的坐标.

4. 两个向量的夹角及两点间的距离公式

(1) 已知向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$，则

① $|\boldsymbol{a}|=\sqrt{\boldsymbol{a}^2}=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2},|\boldsymbol{b}|=\sqrt{\boldsymbol{b}^2}=\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}$；

② $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$；

③ $\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle=\dfrac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}=\dfrac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$.

(2) 已知点 $A(x_1,y_1,z_1),B(x_2,y_2,z_2)$，则 $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$ 或 $d(A,B)=|\overrightarrow{AB}|$，其中 $d(A,B)$ 表示 A 与 B 两点间的距离，即**空间两点的距离公式**.

5. 投影向量

向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影向量为 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$，其中 $|\boldsymbol{a}|\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$ 为向量 $\boldsymbol{a}$ 在向量 $\boldsymbol{b}$ 上的投影长度，再予以方向，即乘以向量 $\boldsymbol{b}$ 的单位向量 $\dfrac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|}$.

§9.4.5　空间向量的应用

1. 空间向量在推理证明中的应用

(1) 利用空间向量证明线面平行：

已知直线 $l(l\not\subset\alpha)$ 的方向向量 $\boldsymbol{l}$，平面 α 的法向量 $\boldsymbol{n}$，若 $\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n}=0$，则 $\boldsymbol{l}\parallel\alpha$.

(2) 利用空间向量证明两条异面直线垂直：

在两条异面直线中各取一个方向向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$，只要证明 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$，即 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$ 即可.

(3) 利用空间向量证明线面垂直：证平面的一个法向量与直线的方向向量共线.

(4) 证明面面平行、面面垂直，最终都要转化为证明法向量互相平行、法向量互相垂直.

2. 空间向量在空间角求解中的应用

(1) 异面直线所成角公式：

设 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 分别为异面直线 l_1,l_2 的方向向量，θ 为异面直线所成角的大小，则

$$\cos\theta = |\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle| = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}.$$

(2) 线面角公式：

设 l 为平面 α 的斜线，$\boldsymbol{a}$ 为 l 的方向向量，$\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量，θ 为 l 与 α 所成角的大小，则

$$\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = |\cos\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{n}\rangle| = \frac{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{n}|}.$$

(3) 二面角公式：

设 $\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2$ 分别为平面 α,β 的法向量，二面角的大小为 θ，则 $\theta = \langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$ 或 $\theta = \pi-\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\rangle$，其中

$$\cos\theta = \left|\cos\left\langle\boldsymbol{n}_1,\boldsymbol{n}_2\right\rangle\right| = \frac{|\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2|}{|\boldsymbol{n}_1|\,|\boldsymbol{n}_2|}.$$

3. 空间向量在空间距离求解中的应用

(1) 点到平面的距离即点到平面内的正射影的距离，在计算中一般用等体积法来求解，也可以用点到平面的距离公式的向量法来求解.

所有空间距离问题，包括线面距离、两平行平面间的距离都可以转化为一个点到一个平面的距离问题.

(2) 若点 A 到平面 α 的距离为 d，且 $B\in\alpha$，设 $\boldsymbol{n}$ 为平面 α 的法向量，则 $d = \dfrac{|\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}$.

Chapter 10

直线与圆

直线与圆作为平面几何的两个基本图形，其方程的学习是解决平面解析几何综合问题的基础工具，是几何问题代数化的初步.

“同长，以正相尽也。中，同长也。圜，一中同长也。”

——《墨经上》【春秋末期战国初期】墨子（公元前 476 或 480 年—公元前 390 或 420 年）

（首次给出“圜”(即“圆”) 的定义）

§10.1 直线方程

§10.1.1 基本概念

1. 倾斜角 α

当直线与 x 轴不平行且不重合时，倾斜角 α 为 x 轴正方向与直线向上的方向所成的角；当直线与 x 轴平行或重合时，规定 $\alpha=0$，所以 $\alpha\in[0,\pi)$.

2. 斜率 k

斜率公式： 过两点 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ 的直线（倾斜角为 α ）的斜率为纵坐标之差与横坐标之差的比值，即

$$k=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\tan\alpha\left(x_1\neq x_2,\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right).$$

当直线与 x 轴不垂直时，直线的斜率 k 为其倾斜角 α 的正切值，即 $k=\tan\alpha$；

当直线与 x 轴垂直时，此时 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$，斜率 $k=\tan\dfrac{\pi}{2}$ 不存在.

(1) 当 $k=0$ 时，直线平行于 x 轴或与 x 轴重合；

(2) 当 $k>0$ 时，直线的倾斜角为锐角，倾斜角随 k 的增大而增大；

(3) 当 $k<0$ 时，直线的倾斜角为钝角，倾斜角随 k 的增大而增大.

另外，$|k|$ 越大，直线越“陡”；$|k|$ 越小，直线越“缓”.

3. 截距

直线与 y 轴交点的纵坐标 b，叫直线的（纵）截距，即直线 $y=kx+b$ 中，令 $x=0$；

直线与 x 轴交点的横坐标 n，叫直线的横截距，即直线 $x=my+n$ 中，令 $y=0$.

注意：截距为纵坐标或横坐标，可正可负可零.

4. 直线的方向向量

一般地，如果表示非零向量 $\boldsymbol{a}$ 的有向线段所在的直线与直线 l 平行或重合，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 为直线 l 的一个方向向量，记作 $a \mathbin{/\!/} l$.

5. 直线的法向量

一般地，如果表示非零向量 $\boldsymbol{v}$ 的有向线段所在的直线与直线 l 垂直，则称向量 $\boldsymbol{v}$ 为直线 l 的一个法向量，记作 $v \perp l$.

§10.1.2 直线方程的五种形式

1. 点斜式

已知直线的斜率为 k 存在，且过点 (x_0, y_0)，则直线方程为

$$y-y_0=k\left(x-x_0\right).$$

注：①当 $k=0$ 时，直线方程为 $y=y_0$；②当 k 不存在时，直线方程为 $x=x_0$.

2. 斜截式

已知直线的斜率为 k 存在，且过点 $(0, b)$，即截距为 b，则直线方程为

$$y=kx+b,$$

其中，向量 $\boldsymbol{n}=(1, k)$ 是这条直线的一个方向向量.

3. 两点式

已知直线过点 (x_1, y_1) 和点 (x_2, y_2)，则可知斜率 $k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}$，由点斜式可得直线方程为

$$y-y_1=\frac{y_1-y_2}{x_1-x_2}\left(x-x_1\right) \Leftrightarrow \frac{y-y_1}{y_1-y_2}=\frac{x-x_1}{x_1-x_2} \Leftrightarrow\left(x_1-x_2\right)\left(y-y_1\right)=\left(y_1-y_2\right)\left(x-x_1\right).$$

4. 截距式

已知直线过点 $(a,0)$ 和点 $(0,b)$，即其横截距为 a，纵截距为 b，则直线方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

因此，截距式不能表示垂直于坐标轴（即直线 $x=a$ 和 $y=b$ ）及过原点的直线.

5. 一般式

$$Ax+By+C=0\ \left(A^2+B^2\neq 0,\ \text{即}a,b\ \text{不能同时为}0\right).$$

一般式能表示平面上任何一条直线. 其中，向量 $\boldsymbol{n}=(A,B)$ 是这条直线的一个**法向量**.

§10.1.3 两条直线平行与垂直的判定

两条直线平行与垂直的判定如下表.

<table>
<tr><th>形式</th><th colspan="2">两直线方程</th><th>平行</th><th>垂直</th></tr>
<tr><td rowspan="2">斜截式</td><td>斜率存在</td><td>$l_1 y=k_1x+b_1$
$l_2 y=k_2x+b_2$</td><td>$k_1=k_2,b_1\neq b_2$</td><td rowspan="2">$k_1\cdot k_2=-1$
或一条斜率为 0，
另一条斜率不存在</td></tr>
<tr><td>斜率不存在</td><td>$l_1 x=x_1$
$l_2 x=x_2$</td><td>$x_1\neq x_2$</td></tr>
<tr><td>一般式</td><td colspan="2">$l_1 A_1x+B_1y+C_1=0$
$l_2 A_2x+B_2y+C_2=0$</td><td>$A_1B_2-A_2B_1=0$
且 $B_1C_2-B_2C_1=0$</td><td>$A_1A_2-B_1B_2=0$</td></tr>
</table>

§10.1.4 距离公式

1. 两点间距离公式

平面上两点 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$ 的距离为

$$|AB|=\sqrt{\left(x_1-x_2\right)^2+\left(y_1-y_2\right)^2}.$$

特别地，原点 $O(0,0)$ 与任意一点 $P(x,y)$ 的距离为 $|OP|=\sqrt{x^2+y^2}$.

2. 点到直线距离公式

点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 到直线 $l:Ax+By+C=0$ 的距离为

$$d=\frac{\left|Ax_0+By_0+C\right|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

特别地，点 $P(x_0, y_0)$ 到直线 $l: x = m$ 的距离 $d = |m - x_0|$；

到直线 $l: y = n$ 的距离 $d = |n - y_0|$.

3. 两条平行线间距离公式

已知 l_1, l_2 是两条平行线，求 l_1, l_2 间距离的方法：

(1) 转化为其中一条直线上的一点到另一条直线的距离；

(2) 设 $l_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $l_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$，则 l_1, l_2 间距离为

$$d = \frac{|C_1 - C_2|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

§10.2 圆的方程

§10.2.1 圆

1. 基本概念

平面内到定点的距离等于定长的点的集合（轨迹）叫**圆**.

2. 圆的方程的两种形式

(1) 圆的标准方程：圆心为 (a, b)，半径为 $r(>0)$ 的圆的方程为

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

(2) 圆的一般方程：

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \ \left(D^2 + E^2 - 4F > 0\right),$$

其中，圆心坐标为 $\left(-\dfrac{D}{2}, -\dfrac{E}{2}\right)$，半径 $r = \dfrac{\sqrt{D^2 + E^2 - 4F}}{2}$.

3. 点与圆的位置关系判断

点 $P(x_0, y_0)$ 与圆 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ 的位置关系有：

(1) $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 > r^2 \Leftrightarrow$ 点 P 在圆外；

(2) $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 = r^2 \Leftrightarrow$ 点 P 在圆上；

(3) $(x_0 - a)^2 + (y_0 - b)^2 < r^2 \Leftrightarrow$ 点 P 在圆内.

同理 $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ 可以改写为 $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ 的形式，因此不再赘述.

§10.2.2 曲线与方程

一般地，在平面直角坐标系中，如果曲线 C 与方程 $F(x,y)=0$ 之间具有如下关系：

(1) 曲线 C 上的点的坐标都是方程 $F(x,y)=0$ 的解；

(2) 以方程 $F(x,y)=0$ 的解为坐标的点都在曲线 C 上.

则称曲线 C 为方程 $F(x,y)=0$ 的曲线，方程 $F(x,y)=0$ 为曲线 C 的方程.

轨迹是指点在运动变化过程中形成的图形，曲线的方程通常也称为满足某种条件的点的**轨迹方程**.

§10.3 直线与圆、圆与圆的位置关系

1. 直线与圆的位置关系及其判定

设直线 $l:Ax+By+C=0\left(A^2+B^2\neq 0\right)$，圆 $O:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2(r>0)$，则有如下两种办法判断直线与圆的位置关系.

(1) 几何法：圆心 $O(a,b)$ 到直线 l 的距离 $d=\dfrac{|Aa+Bb+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ 与半径 r 比较；

(2) 代数法：联立直线与圆的方程，消元并整理得到一元二次方程，其根的判别式为 Δ.

则直线与圆的三种位置关系如下表所示.

	几何法	代数法
相交	$d<r$	$\Delta>0$
相切	$d=r$	$\Delta=0$
相离	$d>r$	$\Delta<0$

2. 圆与圆的位置关系及其判定

设圆 $O_1:(x-a_1)^2+(y-b_1)^2=r_1^2\,(r_1>0)$，$O_2:(x-a_2)^2+(y-b_2)^2=r_2^2\,(r_2>0)$，圆心距 $d=|O_1O_2|$，则有如下两种办法判断圆与圆的位置关系.

(1) 几何法：用两圆的圆心距与两圆半径的和与差的大小关系确定；

(2) 代数法：联立两圆的方程，研究方程组解的情况.

则圆与圆的五种位置关系如下表所示. 注：内含关系中 $d=0$ 时，两圆为同心圆.

	几何法： d 与 $r_1 \pm r_2$ 的关系	代数法： 方程组的解的情况
外离	$d > r_1 + r_2$	无解
外切	$d = r_1 + r_2$	一组实数解
相交	$\|r_1 - r_2\| < d < r_1 + r_2$	两组不同的实数解
内切	$d = \|r_1 - r_2\|$	一组实数解
内含	$0 \leqslant d < \|r_1 - r_2\|$	无解

Chapter 11

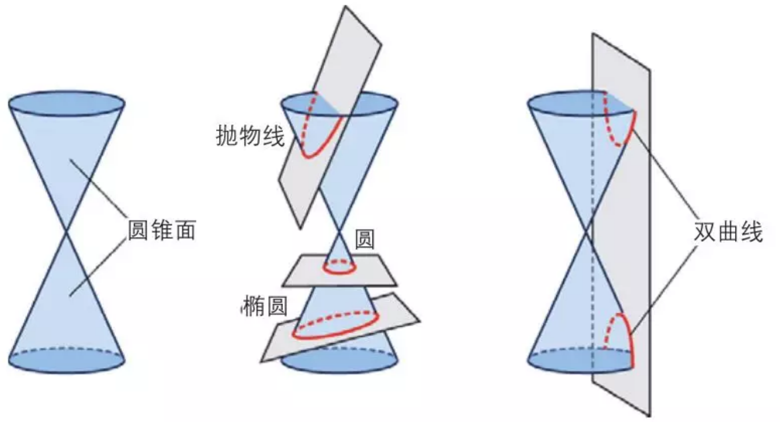
圆锥曲线

圆锥曲线是研究宇宙和客观世界的重要工具，也是高考数学的重要内容. 本章的研究对象是圆锥曲线（几何图形），在研究过程中，数形结合思想和坐标法统领全局，同时在对这些曲线的研究中贯彻“先用几何眼光观察与思考，再用坐标法解决”的策略.

“亏曲线”——椭圆，“超曲线”——双曲线，“齐曲线”——抛物线

——【古希腊】阿波罗尼奥斯（*Apollonius*，约公元前 *262*—约公元前 *190* 年）

（创作了代表希腊几何的最高水平著作——《圆锥曲线论》）



§11.1　椭圆及其性质

§11.1.1　椭圆的定义

平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之和等于常数 $2a\,(2a > |F_1F_2|)$ 的点的轨迹叫作**椭圆**，这两个定点叫作椭圆的**焦点**，两焦点的距离叫作椭圆的**焦距**，其长度为 $2c$.

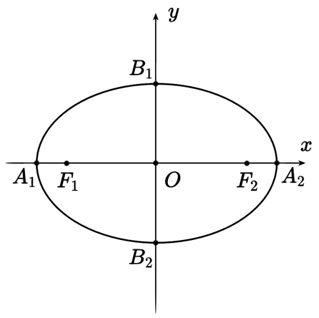
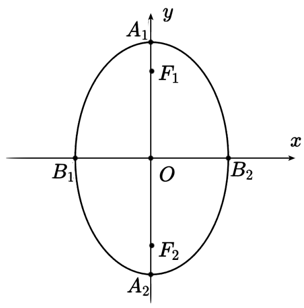
定义用集合语言表示为

$$\left\{P \mid |PF_1| + |PF_2| = 2a \ \ (0 < |F_1F_2| = 2c < 2a)\right\}.$$

注：当 $2a = 2c$ 时，点的轨迹是线段；当 $2a < 2c$ 时，点的轨迹不存在.

§11.1.2 椭圆的方程、图形与性质

1. 椭圆的方程、图形与基本性质

<table>
<tr><td>标准方程</td><td>$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1(a>b>0)$</td><td>$\dfrac{y^2}{a^2}+\dfrac{x^2}{b^2}=1(a>b>0)$</td></tr>
<tr><td>图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>焦点坐标</td><td>$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$</td><td>$F_1(0,c)$，$F_2(0,-c)$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">关于 x 轴、y 轴成轴对称，关于原点成中心对称</td></tr>
<tr><td>顶点坐标</td><td>$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$
$B_1(0,b)$，$B_2(0,-b)$</td><td>$A_1(0,a)$，$A_2(0,-a)$
$B_1(-b,0)$，$B_2(b,0)$</td></tr>
<tr><td>范围</td><td>$|x|\leqslant a,|y|\leqslant b$</td><td>$|x|\leqslant b,|y|\leqslant a$</td></tr>
<tr><td>长轴、短轴</td><td colspan="2">长轴 A_1A_2 长为 $2a$，短轴 B_1B_2 长为 $2b$</td></tr>
<tr><td>参数关系</td><td colspan="2">$a^2=b^2+c^2$</td></tr>
<tr><td>离心率</td><td colspan="2">椭圆的焦距与长轴长之比 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}\in(0,1)$</td></tr>
<tr><td>切线方程</td><td>$\dfrac{x_0x}{a^2}+\dfrac{y_0y}{b^2}=1($切点为 $(x_0,y_0))$</td><td>$\dfrac{y_0y}{a^2}+\dfrac{x_0x}{b^2}=1($切点为 $(x_0,y_0))$</td></tr>
<tr><td>切点弦所在
直线方程</td><td>$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$</td><td>$F_1(0,c)$，$F_2(0,-c)$</td></tr>
<tr><td>通径</td><td colspan="2">通径是过焦点且垂直于焦点所在轴的弦，也是最短的焦点弦，通径长为 $\dfrac{2b^2}{a}$</td></tr>
<tr><td>焦半径</td><td colspan="2">椭圆上任一点 P 到一个焦点 F 的距离 $\begin{cases}|PF|_{\max}=a+c\\|PF|_{\min}=a-c\end{cases}$</td></tr>
</table>

2. 弦长公式

设直线与椭圆的两交点为 $A\left(x_1,y_1\right),B\left(x_2,y_2\right)$，弦 AB 所在直线斜率 $k_{AB}=k$，则弦长

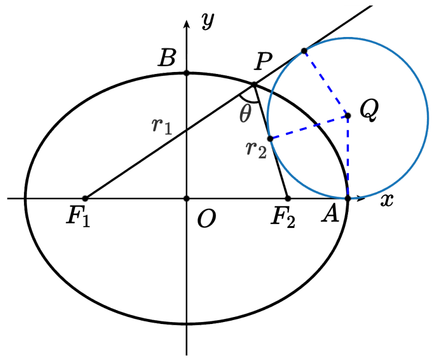
$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|y_1-y_2\right|(k\neq 0),$$

若直线方程与椭圆方程联立并整理得到一元二次方程 $Ax^2+Bx+C=0$ 或 $Ay^2+By+C=0$，则有

$$\left.\begin{aligned}\left|x_1-x_2\right|&=\sqrt{\left(x_1+x_2\right)^2-4x_1x_2}\\ \left|y_1-y_2\right|&=\sqrt{\left(y_1+y_2\right)^2-4y_1y_2}\end{aligned}\right\}\text{（由韦达定理得）}=\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{|A|}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}.$$

3. 焦点三角形

椭圆上一点 $P\left(x_0,y_0\right)$ 与两焦点 F_1F_2 构成的 $\triangle PF_1F_2$ 称为焦点三角形（如图所示），有如下结论：



设 $|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，$\angle F_1PF_2=\theta$，则

(1) $\cos\theta=\dfrac{2b^2}{r_1r_2}-1,\theta_{\max}=\angle F_1BF_2.$

(2) $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}r_1r_2\sin\theta=b^2\tan\dfrac{\theta}{2},$

$$S_{\triangle PF_1F_2}=\begin{cases}c\left|y_0\right|，\text{焦点在}x\text{ 轴上，}\\ c\left|x_0\right|，\text{焦点在}y\text{ 轴上.}\end{cases}$$

(3) 当点 P 与长轴端点 A 重合时，$\left(r_1r_2\right)_{\min}=b^2$；

当点 P 与短轴端点 B 重合时，$\left(r_1r_2\right)_{\max}=a^2$.

(4) 当点 P 在 y 轴右侧时，圆 Q 与 PF_2，x 轴，F_1P 的延长线分别相切，则圆 Q 与 x 轴的切点为长轴的右顶点 $A(a,0)$；同理，当点 P 在 y 轴左侧时，圆 Q 与 PF_1，x 轴，F_2P 的延长线分别相切，则圆 Q 与 x 轴的切点为长轴的左顶点 $(-a,0)$.

$\star$ 焦点三角形中一般要用到的关系式有：

(1) 定义式：$|PF_1|+|PF_2|=2a(>2c)$；

(2) 正弦定理：$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2$；

(3) 余弦定理：$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$.

§11.2　双曲线及其性质

§11.2.1　双曲线的定义

平面内与两个定点 F_1, F_2 的距离之差的绝对值等于常数 $2a\,(0<2a<|F_1F_2|)$ 的点的轨迹叫作双曲线，这两个定点叫作双曲线的焦点，两焦点的距离叫作椭圆的焦距，记作 $2c$.

定义用集合语言表示为

$$\Big\{P \;\Big|\; \big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a\ \ (0<2a<|F_1F_2|=2c)\Big\}.$$

注:

(1) 在平面内，到两定点的距离的“差”，并非“和”或“积”.

(2) 绝对值：若定义式中去掉绝对值，则曲线仅为双曲线其中的一支.

(3) 范围限定:

① 当 $2a=|F_1F_2|$ 时，点的轨迹为以 F_1 和 F_2 为端点的两条射线;

② 当 $2a=0$ 时，点的轨迹是线段 F_1F_2 的垂直平分线;

③ 当 $2a>|F_1F_2|$ 时，点的轨迹不存在.

⋆ 在应用定义和标准方程解题时注意两点:

① 条件“$2a=|F_1F_2|$ ”是否成立;

② 要先定型 (焦点在哪个轴上)，再定量（确定 a^2, b^2 的值)，注意 $a^2+b^2=c^2$ 的应用.

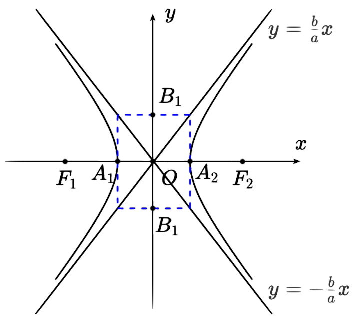
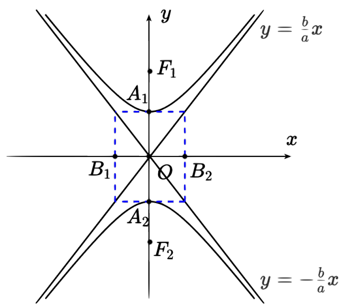
§11.2.2　双曲线的方程、图形与性质

1.　双曲线的方程、图形与基本性质

标准方程	$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$	$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a,b>0)$

（接下页）

续表：

<table>
<tr><td>标准方程</td><td>$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1(a,b>0)$</td><td>$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1(a,b>0)$</td></tr>
<tr><td>图形</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>焦点坐标</td><td>$F_1(-c,0)$，$F_2(c,0)$</td><td>$F_1(0,c)$，$F_2(0,-c)$</td></tr>
<tr><td>对称性</td><td colspan="2">关于 x 轴、y 轴成轴对称，关于原点成中心对称</td></tr>
<tr><td>顶点坐标</td><td>$A_1(-a,0)$，$A_2(a,0)$</td><td>$A_1(0,a)$，$A_2(0,-a)$</td></tr>
<tr><td>范围</td><td>$|x|\geqslant a$</td><td>$|y|\geqslant a$</td></tr>
<tr><td>实轴、虚轴</td><td colspan="2">实轴 A_1A_2 长为 $2a$，虚轴 B_1B_2 长为 $2b$</td></tr>
<tr><td>参数关系</td><td colspan="2">$a^2+b^2=c^2$</td></tr>
<tr><td>离心率</td><td colspan="2">双曲线的焦距与实轴长之比 $e=\dfrac{c}{a}=\sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}}\in(1,+\infty)$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">渐近线方程</td><td>令 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0\Rightarrow y=\pm\dfrac{b}{a}x$</td><td>令 $\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=0\Rightarrow y=\pm\dfrac{a}{b}x$</td></tr>
<tr><td colspan="2">焦点到渐近线的距离为 b</td></tr>
<tr><td>通径</td><td colspan="2">通径是过焦点且垂直于焦点所在轴的弦，也是同支中的最短焦点弦，其长 $\dfrac{2b^2}{a}$</td></tr>
</table>

2. 弦长公式

设直线与双曲线的两交点为 $A\left(x_1,y_1\right)B\left(x_2,y_2\right)$，弦 AB 所在直线斜率 $k_{AB}=k$，则弦长

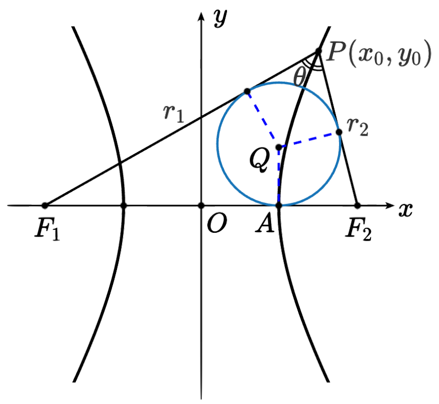
$$|AB|=\sqrt{1+k^2}\left|x_1-x_2\right|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\left|y_1-y_2\right|(k\neq 0).$$

将直线方程与双曲线方程联立并整理可得到一元二次方程，若记作 $Ax^2+Bx+C=0$ 或 $Ay^2+By+C=0$，则有

$$\left.\begin{aligned}|x_1-x_2|&=\sqrt{(x_1+x_2)^2-4x_1x_2}\\|y_1-y_2|&=\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}\end{aligned}\right\}\text{（由韦达定理得）}=\frac{\sqrt{B^2-4AC}}{|A|}=\frac{\sqrt{\Delta}}{|A|}.$$

3. 焦点三角形

双曲线上一点 $P(x_0,y_0)$ 与两焦点 F_1F_2 构成的 $\triangle PF_1F_2$ 称为焦点三角形（如图所示），有如下结论：



设 $|PF_1|=r_1$，$|PF_2|=r_2$，$\angle F_1PF_2=\theta$，则

(1) $\cos\theta=1-\dfrac{2b^2}{r_1r_2}$.

(2) $S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}r_1r_2\sin\theta=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\cdot b^2=\dfrac{b^2}{\tan\frac{\theta}{2}}$,

$$S_{\triangle PF_1F_2}=\begin{cases}c\,|y_0|\text{，焦点在}x\text{ 轴上，}\\c\,|x_0|\text{，焦点在}y\text{ 轴上.}\end{cases}$$

(3) 当点 P 在双曲线右支上时，焦点三角形 PF_1F_2 的内切圆于 x 轴的切点为右切点 $(a,0)$；当点 P 在双曲线左支上时，焦点三角形 PF_1F_2 的内切圆于 x 轴的切点为左切点 $(-a,0)$.

⋆ 焦点三角形中一般要用到的关系式有：

① 定义式：$\big||PF_1|-|PF_2|\big|=2a\ (0<2a<2c)$；

② 正弦定理：$S_{\triangle PF_1F_2}=\dfrac{1}{2}|PF_1||PF_2|\sin\angle F_1PF_2$；

③ 余弦定理：$|F_1F_2|^2=|PF_1|^2+|PF_2|^2-2|PF_1||PF_2|\cos\angle F_1PF_2$.

4. 等轴双曲线

等轴双曲线满足如下充要条件：

双曲线为等轴双曲线 $\Leftrightarrow$ $a=b$ $\Leftrightarrow$ 离心率 $e=\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$ 两渐近线相互垂直 $\Leftrightarrow$ 渐近线方程为 $y=\pm x$ $\Leftrightarrow$ 双曲线方程可设为 $x^2-y^2=\lambda(\neq 0)$.

5. 共轭双曲线

共轭双曲线满足如下充要条件：

双曲线为共轭双曲线 $\Leftrightarrow$ 一条双曲线的实轴和虚轴分别是另一条双曲线的虚轴和实轴 $\Leftrightarrow$ 双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 与 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$ 是共轭的 $\Leftrightarrow$ 4 个焦点共圆，并称该圆为辅助圆 $\Leftrightarrow$ 有共同的渐近线 $\dfrac{x}{a}\pm\dfrac{y}{b}=0$ $\Leftrightarrow$ 离心率的平方之和等于离心率的平方之积，即 $e_1^2+e_2^2=e_1^2e_2^2$ $\Leftrightarrow$ 两个离心率的倒数平方和为 1，即 $\dfrac{1}{e_1^2}+\dfrac{1}{e_2^2}=1$.

§11.3　抛物线及其性质

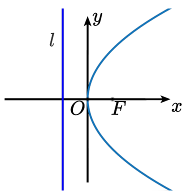
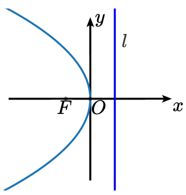
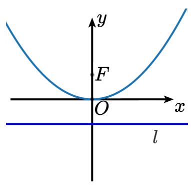
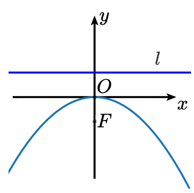
§11.3.1　抛物线的定义

平面内与一个定点 F 和一条定直线 l $(F \notin l)$ 的距离相等的点的轨迹叫作**抛物线**，定点 F 叫作抛物线的焦点，定直线 l 叫作抛物线的准线.

注：若在定义中有 $F \in l$，则动点的轨迹为 l 的垂线，垂足为点 F.

§11.3.2　抛物线的方程、图形及性质

抛物线的标准方程有 4 种形式：$y^2 = 2px$，$y^2 = -2px$，$x^2 = 2py$，$x^2 = -2py$ $(p > 0)$. 其中一次项与对称轴一致，一次项系数的符号决定开口方向（如下表所示）.

标准方程	$y^2 = 2px(p > 0)$	$y^2 = -2px(p > 0)$	$x^2 = 2py(p > 0)$	$x^2 = -2py(p > 0)$
图形				
对称轴	x 轴		y 轴	
顶点坐标	$(0, 0)$			
焦点坐标	$\left(\frac{p}{2}, 0\right)$	$\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$	$\left(0, \frac{p}{2}\right)$	$\left(0, -\frac{p}{2}\right)$
准线方程	$x = -\frac{p}{2}$	$x = \frac{p}{2}$	$y = -\frac{p}{2}$	$y = \frac{p}{2}$
几何意义	$p(> 0)$ 为焦点 F 到准线 l 的距离，即**焦准距**. p 越大，抛物线的开口越大.			
离心率	抛物线的离心率是指抛物线上的点到焦点的距离与到准线的距离的比， 即离心率 $e = 1$			
焦半径	$\|PF\| = x_0 + \frac{p}{2}$	$\|PF\| = -x_0 + \frac{p}{2}$	$\|PF\| = y_0 + \frac{p}{2}$	$\|PF\| = -y_0 + \frac{p}{2}$
通径	通径是过焦点且垂直于焦点所在轴的弦，也是最短焦点弦，其长 $= 2p$			

§11.3.3　抛物线中常用的结论

1.　焦点弦

若 AB 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的焦点弦，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，则有以下结论：

(1) $x_1x_2=\dfrac{p^2}{4}$；$y_1y_2=-p^2$；

证: 设直线 $l_{AB}:x=my+\dfrac{p}{2}$，与抛物线方程联立得 $y^2=2p\left(my+\dfrac{p}{2}\right)$，即

$$y^2-2pmy-p^2=0.$$

由根与系数关系 (韦达定理) 得

$$y_1y_2=-p^2.$$

由抛物线方程 $y^2=2px$ 得 $x=\dfrac{y^2}{2p}$，因此

$$x_1x_2=\frac{y_1^2}{2p}\cdot\frac{y_2^2}{2p}=\left(\frac{y_1y_2}{2p}\right)^2=\frac{p^2}{4}.$$

(2) 焦点弦长公式：

① $|AB|=|x_1|+|x_2|+p=|x_1+x_2|+p\geqslant 2\sqrt{x_1x_2}=p$，当且仅当 $x_1=x_2$ 时，焦点弦取最小值 $2p$，即所有焦点弦中通径最短，其长度为 $2p$.

② $|AB|=\dfrac{2p}{\sin^2\alpha}$，其中 α 为直线 AB 与对称轴的夹角.

(3) $\triangle AOB$ 的面积公式：$S_{\triangle AOB}=\dfrac{p^2}{2\sin\alpha}$，其中 α 为直线 AB 与对称轴的夹角.

2.　抛物线的弦

若 AB 为抛物线 $y^2=2px(p>0)$ 的任意一条弦，$A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$，弦 AB 的中点为 $M(x_0,y_0)$ $(y_0\neq 0)$，则

(1) $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|=\sqrt{1+\dfrac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|\,(k_{AB}=k\neq 0)$；

(2) $k_{AB}=\dfrac{p}{y_0}$；

(3) 直线 AB 的方程为 $y-y_0=\dfrac{p}{y_0}(x-x_0)$；

(4) 线段 AB 的垂直平分线方程为 $y-y_0=-\dfrac{y_0}{p}(x-x_0)$.

Chapter 12

计数原理与概率统计

分类加法计数原理和分步乘法计数原理是处理计数问题的两种基本思想方法. 同时, 在数据化、信息化的时代, 掌握解读数据、应用数据的能力本身就是一种生产力. 本章介绍了概率统计中重要的概念和常见问题, 帮助我们更好地走进随机数学的大门.

"左衰乃积数, 右裹乃隅算, 中藏者皆廉, 以廉乘商方, 命实以除之。"

——"开方作法本源图"【北宋】贾宪 (*11* 世纪前半叶)

(著作已佚, 但被【南宋】杨辉引用, 得以保存下来, 现称"杨辉三角")

"赌!"

——【意大利】吉罗拉莫·卡尔达诺 (*Girolamo Cardano*, *1501—1576*)

(所作赌博备忘录:《论赌博游戏》, 被认为是第一部概率论著作)

§12.1 两个基本计数原理、排列组合

§12.1.1 两个基本计数原理

1. 分类加法计数原理

如果一个目标可以在 n 种不同情况下完成, 第 k 种情况又有 m_k 种不同方式来实现, 设实现这个目标总共有所以共有 N 种方法, 那么

$$N = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n.$$

$\star$ 注意:

① 每种方式都能实现目标, 不依赖于其他条件;

② 每种情况内任两种方式都不同时存在;

③ 不同情况之间没有相同方式存在.

2. 分步乘法计数原理

如果实现一个目标必须经过 n 个步骤，第 k 步又可以有 m_k 种不同方式来实现，设实现这个目标总共有所以共有 N 种方法，那么

$$N = m_1 \times m_2 \times m_3 \times \cdots \times m_n.$$

3. 两个原理的相同点及其区别

<table>
<tr><th></th><th>分类加法计数原理</th><th>分步乘法计数原理</th></tr>
<tr><td>相同点</td><td colspan="2">用来计算完成一件事的方法数</td></tr>
<tr><td rowspan="3">不同点</td><td>分类完成</td><td>分步完成</td></tr>
<tr><td>各类方法数相加</td><td>各步方法数相乘</td></tr>
<tr><td>各类方案中每种方法都能独立完成这件事</td><td>各步中的每种方法不能独立完成这件事，每步依次完成才能完成这件事</td></tr>
<tr><td>注意点</td><td>各类方法之间是互斥的，分类时要做到不重不漏</td><td>各步方法互不影响，贯穿起来要做到步骤完整</td></tr>
</table>

§12.1.2　排列组合

1. 排列与排列数

从 n 个不同元素中取出 $m(m \leqslant n)$ 个（不同）元素，按照一定的顺序排成一列，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个排列.

从 n 个不同元素中选取 m 个元素 $(n \geqslant m)$ 的排列个数为 A_n^m，即

$$\mathrm{A}_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1).$$

由此得知，全排列 $\mathrm{A}_n^n = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!$，则 $\mathrm{A}_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$，其中 $n!$ 被称为 n 的阶乘，规定 $0! = 1$.

⋆ 注意：排列数公式的两种不同表达形式本质一样，但作用略有不同.

① 进行具体的数字计算时，常用 $\mathrm{A}_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$；

② 进行含字母算式化简或证明时，多用 $\mathrm{A}_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!}$.

例题 12.1.1. 用 $1,2,3,4,5$ 这五个自然数，排成有重复数字和无重复数字的四位数分别有多少种？

解: ① 有重复数字的四位数有 $5\times5\times5\times5=5^4$ 种;

② 无重复数字的四位数有 $5\times4\times3\times2=\mathrm{A}_5^4$ 种.

二者的区别在于：不可重复排排列中，用过的数字不可再用，用一个少一个；而在可重复排列中，用过的数字还可再用，每次可用数字不减少.

2. 组合与组合数

从 n 个不同元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个（不同）元素，并成一组，叫作从 n 个不同元素中取出 m 个元素的一个组合.

从 n 个不同元素中选取 m 个元素 $(n\geqslant m)$ 的组合个数为 C_n^m，即

$$\mathrm{C}_n^m=\frac{\mathrm{A}_n^m}{\mathrm{A}_m^m}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}=\frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

⋆ 注意：与排列数公式相同，

① 进行具体的数字计算时，常用 $\mathrm{C}_n^m=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}$;

② 进行含字母算式化简或证明时，多用 $\mathrm{C}_n^m=\dfrac{n!}{m!(n-m)!}$.

3. 排列组合的区别和性质

(1) 排列和组合的区别.

组合：取出的元素地位平等，没有不同去向和分工.

排列：取出的元素地位不同，去向、分工或职位不同.

(2) 性质（相关公式）.

① $n!=n\cdot(n-1)!=n(n-1)\cdot(n-2)!=\cdots$;

② $\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_n^{n-m}$，例如：$\mathrm{C}_n^0=\mathrm{C}_n^n=1,\mathrm{C}_{100}^2=\mathrm{C}_{100}^{98}=\dfrac{100\times99}{2\times1}$;

③ $\mathrm{C}_n^m+\mathrm{C}_n^{m+1}=\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}$;

④ $\mathrm{C}_m^m+\mathrm{C}_{m+1}^m+\mathrm{C}_{m+2}^m+\cdots+\mathrm{C}_n^m=\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}$.

§12.2　二项式定理

1. 二项式定理

二项式定理可以将一个二项式（即两项之和）的任意次幂展开成和的形式，即

$$(a+b)^n=\mathrm{C}_n^0a^nb^0+\mathrm{C}_n^1a^{n-1}b+\cdots+\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r+\cdots+\mathrm{C}_n^na^0b^n\,(n\in\mathbb{N}^*)\,.$$

展开式具有以下特点:

(1) 项数：共 $n+1$ 项.

(2) 二项式系数：依次为组合数 $\mathrm{C}_n^0,\mathrm{C}_n^1,\mathrm{C}_n^2,\cdots,\mathrm{C}_n^n$.

(3) 每一项的次数是一样的，都为 n 次，展开式依 a 的降幂、b 的升幂排列展开.

特别地，$(1+x)^n=1+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n$.

2. 二项式展开式的通项（第 $r+1$ 项）

二项式 $(a+b)^n$ 展开式的通项为

$$T_{r+1}=\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r(r=0,1,2,3,\cdots,n),$$

其中 C_n^r 叫作 T_{r+1} 的二项式系数.

令变量（常用 x）取 1 ，可得 T_{r+1} 的系数.

注：通项公式主要用于求二项式的次数，满足特定条件的项的项数或系数，展开式的某一项或其系数. 在应用通项公式时要注意以下几点:

① 分清 $\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r$ 是第 $r+1$ 项，而不是第 r 项；

② 在通项公式 $T_{r+1}=\mathrm{C}_n^ra^{n-r}b^r$ 中，含有 $T_{r+1},\mathrm{C}_n^r,a,b,r,n$ 这 6 个参数，只有 a,b,r,n 是独立的. 在未知 r,n 的情况下利用通项公式解题，一般都需要先将通项公式转化为方程组求 n 和 r.

3. 二项展开式中的系数

(1) 二项式系数与项的系数.

二项式系数仅指 $\mathrm{C}_n^0,\mathrm{C}_n^1,\mathrm{C}_n^2,\cdots,\mathrm{C}_n^n$ 而言，不包括字母 a,b 所表示的式子中的系数.

例如：$(2+x)^n$ 的展开式中，含有 x^r 的项应该是 $T_{r+1}=\mathrm{C}_n^r2^{n-r}x^r$，其中 C_n^r 叫作该项的二项式系数，而 x^r 的系数应该是 $\mathrm{C}_n^r2^{n-r}$ (即项的系数).

(2) 二项式系数的性质.

(1) 在二项展开式中，与首末两端“等距离”的两项的二项式系数相等，即 $\mathrm{C}_n^0=\mathrm{C}_n^n,\mathrm{C}_n^1=\mathrm{C}_n^{n-1},\mathrm{C}_n^2=\mathrm{C}_n^{n-2},\cdots,\mathrm{C}_n^r=\mathrm{C}_n^{n-r}$.

(2) 二项展开式中间项的二项式系数最大.

如果二项式的次数 n 是偶数，中间项是第 $\dfrac{n}{2}+1$ 项，其二项式系数 $\mathrm{C}_n^{\frac{n}{2}}$ 最大；

如果二项式的次数 n 是奇数，中间项有两项，即为第 $\dfrac{n+1}{2}$ 项和第 $\dfrac{n+1}{2}+1$ 项，则它们的二项式系数 $\mathrm{C}_n^{\frac{n-1}{2}}$ 和 $\mathrm{C}_n^{\frac{n+1}{2}}$ 相等并且最大.

(3) 二项式系数和与系数和.

① 二项式系数和.

$$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n.$$

证: 由于 $(1+x)^n=1+\mathrm{C}_n^1x+\mathrm{C}_n^2x^2+\cdots+\mathrm{C}_n^nx^n$，当 $x=1$ 时，即得

$$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^2+\cdots+\mathrm{C}_n^n=2^n=(1+1)^n=2^n$$

奇数项二项式系数和等于偶数项二项式系数和，即

$$\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_n^2+\mathrm{C}_n^4+\cdots=\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_n^3+\mathrm{C}_n^5+\cdots=2^{n-1}$$

② 系数和.

求所有项系数和，令 $x=1$；求变号系数和，令 $x=-1$；求常数项，令 $x=0$.

§12.3 随机事件的概率及其计算

§12.3.1 随机事件的相关概念

1. 有限样本空间

(1) 随机试验:

我们把对随机现象的实现和对它的观察称为**随机试验**，简称**试验**，常用字母 E 表示.

① 试验可以在相同条件下重复进行;

② 试验的所有可能结果是明确可知的，并且不止一个;

③ 每次试验总是恰好出现这些可能结果中的一个，但事先不能确定出现哪一个结果.

(2) 样本点：随机试验 E 的每个可能的基本结果称为**样本点**.

(3) 样本空间：全体样本点的集合称为试验 E 的**样本空间**.

(4) 有限样本空间：

一般地，我们用大写 Ω 表示**样本空间**，用小写 ω 表示**样本点**.

如果一个试验有 n 个可能结果：$\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n$，则称样本空间 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}$ 为**有限样本空间**，也就是说 Ω 为有限集的情况即为有限样本空间.

2.　随机事件与基本事件

一般地，随机试验中的每个随机事件都可以用这个试验的样本空间的子集来表示. 为了叙述方便，我们将样本空间 Ω 的子集称为**随机事件**，简称**事件**，并把只包含一个样本点的事件称为**基本事件**. 随机事件一般用大写字母 $A, B, C, \cdots$ 表示. 在每次试验中，当且仅当 A 中某个样本点出现时，称为事件 A 发生.

3.　必然事件与不可能事件

在每次试验中总有一个样本点发生，所以 Ω 总会发生，我们称 Ω 为**必然事件**. 而空集 $\varnothing$ 不包含任何样本点，在每次试验中都不会发生，我们称 $\varnothing$ 为**不可能事件**.

4.　事件的关系与运算（类比集合的关系与运算）

事件的关系与运算的含义及其符号表示见表12.3.1.

表 12.3.1　事件的关系与运算

事件的关系或运算	含义	符号表示
包含	若事件 A 发生，则事件 B 一定发生，这时称事件 B 包含事件 A (或称事件 A 包含于事件 B)	$B \supseteq A$（或 $A \subseteq B$）
相等	若事件 A 发生，则事件 B 一定发生，且如果事件 B 发生，则事件 A 也一定发生，这时称事件 A 与事件 B 相等	$A = B$
并事件（和事件）	若某事件发生当且仅当事件 A 与事件至少有一个发生，则称此事件为事件 A 与事件 B 的并事件（或和事件）	$A \cup B$（或 $A + B$）
交事件（积事件）	若某事件发生当且仅当事件 A 与事件 B 同时发生，则称此事件为事件 A 与事件 B 的交事件（或积事件）	$A \cap B$（或 AB）
互斥（互不相容）	若 $A \cap B$ 为不可能事件，则事件 A 与事件 B 互斥（或互不相容）	$A \cap B = \varnothing$
对立	若 $A \cap B$ 为不可能事件，$A \cup B$ 为必然事件，那么称事件 A 与事件 B 互为对立事件	$A \cap B = \varnothing$ 且 $A \cup B = \Omega$

⋆ 注：互斥事件与对立事件的区别及联系：

两个事件 A 与 B 是互斥事件，有如下三种情况：

① 若事件 A 发生，则事件 B 就不发生；

② 若事件 B 发生，则事件 A 就不发生；

③ 事件 A,B 都不发生.

两个事件 A 与 B 是对立事件，仅有前两种情况.

因此，互斥事件未必是对立事件，但对立事件一定是互斥事件.

§12.3.2 古典概型

1. 概念

(1) **有限性**：样本空间的样本点（基本事件）只有有限个；

(2) **等可能性**：每个样本点发生的可能性相等.

我们将具有上述两个特征的试验称为**古典概型试验**，其数学模型称为**古典概率模型**，简称**古典概型**.

2. 公式

一般地，设试验 E 是古典概型，样本空间 Ω 包含 n 个样本点，事件 A 包含其中的 m 个样本点，则定义事件 A 发生的概率

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

其中 $n(A)$ 和 $n(\Omega)$ 分别表示事件 A 和样本空间 Ω 包含的样本点个数.

§12.3.3 概率的基本性质

(1) 对任意的事件 A，都有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

(2) 必然事件的概率为 1，不可能事件的概率为 0，即 $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$.

(3) 如果事件 A 与事件 B 互斥，那么 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$.

(4) 如果事件 A 与事件 B 互为对立事件，那么 $P(A)+P(B)=1$.

(5) 如果 $A\subseteq B$，那么 $P(A)\leqslant P(B)$.

(6) 设 A,B 是一个随机试验中的两个事件，则有 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

§12.3.4 事件的相互独立性

对任意两个事件 A 与 B，如果 $P(AB) = P(A)P(B)$ 成立，则称事件 A 与事件 B **相互独立**，简称**独立**.

⋆ 注：

(1) 事件 A 与 B 是相互独立的，那么 A 与 $\overline{B}$，$\overline{A}$ 与 B，$\overline{A}$ 与 $\overline{B}$ 也是相互独立的（其中，$\overline{A}$ 和 $\overline{B}$ 分别表示事件 A 和事件 B 的补集，补集表示与某事件互斥且构成全集的所有事件）；

(2) 相互独立事件同时发生的概率：$P(AB) = P(A)P(B)$.

§12.3.5 频率与概率

1. 频率的稳定性

一般地，随着试验次数 n 的增大，频率偏离概率的幅度会缩小，即事件 A 发生的频率 $f_n(A)$ 会逐渐稳定于事件 A 发生的概率 $P(A)$. 我们称频率的这个性质为**频率的稳定性**. 因此，我们可以用频率 $f_n(A)$ 估计概率 $P(A)$.

2. 概率与频率的区别与联系

项目	频率	概率
区别	频率反映了一个随机事件发生的频繁程度，是随机的	概率是一个确定的值，它反映随机事件发生的可能性的大小
联系	频率是概率的估计值，随着试验次数的增加，频率会越来越接近概率	

§12.3.6 条件概率

1. 条件概率的定义

一般地，设 A, B 为两个事件，且 $P(A) > 0$，称 $P(B \mid A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$ 为在事件 A 发生的条件下，事件 B 发生的条件概率，简称**条件概率**，一般“$B|A$”读作“B given A”.

在古典概型中，若用 $n(A)$ 表示事件 A 中基本事件的个数，$n(AB)$ 表示事件 A 与事件 B 同时发生的基本事件的个数，则 $P(B \mid A) = \dfrac{n(AB)}{n(A)} = \dfrac{P(AB)}{P(A)}$.

2. 条件概率具有的性质

(1) $0 \leqslant P(B \mid A) \leqslant 1$;

(2) 如果 B 和 C 是两个互斥事件，则 $P(B \cup C \mid A) = P(B \mid A) + F(C \mid A)$.

§12.3.7 全概率公式与贝叶斯公式

1. 全概率公式

若随机试验的样本空间为 Ω，随机事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，$A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$，则有 $B=A_1B+A_2B+\cdots+A_nB$，且 $A_1B, A_2B, \cdots, A_nB$ 也是两两互斥的随机事件.

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A_1B)+P(A_2B)+\cdots+P(A_nB) \\ &= P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)+\cdots+P(A_n)P(B \mid A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i)P(B \mid A_i). \end{aligned}$$

当 $n=2$ 时，$P(B)=P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)$.

全概率公式是概率论中使用频率最高的公式之一.

2. 贝叶斯公式

若随机事件组 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互斥，则由 $P(A_iB)=P(B)P(A_i \mid B)=P(A_i)P(B \mid A_i)$ 可得

$$P(A_i \mid B)=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(B)}=\frac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)P(B \mid A_j)}.$$

当 $n=2$ 时，$P(A_i \mid B)=\dfrac{P(A_i)P(B \mid A_i)}{P(A_1)P(B \mid A_1)+P(A_2)P(B \mid A_2)}\ (i=1,2)$.

假定 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是导致结果的原因，B 表示实验的结果，则 $P(A)$ 一般称为**先验概率**. $P(A_i \mid B)$ 表示知道特定结果发生的条件下，推断是某个原因导致的概率，一般称为**后验概率**.

§12.4 随机变量及其分布

§12.4.1 离散型随机变量的概念

1. 随机变量

一般地，如果随机试验的样本空间为 Ω，而且对于 Ω 中的每一个样本点，变量 X 都对应惟一确定的实数值，就称 X 为一个**随机变量**. 随机变量一般用大写英文字母 $X, Y, Z, \cdots$ 或小写希腊字母 $\xi, \eta, \zeta, \cdots$ 表示.

2. 离散型随机变量

所有取值可以一一列出的随机变量，称为**离散型随机变量**.

§12.4.2 离散型随机变量的分布列

1. 分布列

设离散型随机变量 X 可能取的值为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，X 取每一个值 x_i 的概率 $P(X = x_i) = p_i, i = 1, 2, \cdots, n$ 为 X 的**概率分布列**，简称**分布列**. 用表格表示如下.

X	x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\cdots$	p_n

2. 分布列的性质

(1) $p_i \geqslant 0, i = 1, 2, \cdots, n$.

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n} p_i = 1$.

§12.4.3 常用的离散型随机变量的分布列

1. 两点分布（$0-1$ 分布）

随机变量 X 的分布列如下，其中 $0 \leqslant p \leqslant 1$.

X	1	0
P	p	$1-p$

则称 X 服从两点分布，并称 $p = P(X = 1)$ 为成功概率，两点分布也称 $0-1$ 分布.

2. 二项分布

(1) 伯努利试验与 n 重伯努利试验.

我们把只包含两个可能结果的试验叫作**伯努利试验**.

我们将一个伯努利试验独立地重复进行 n 次所组成的随机试验称为 n **重伯努利试验**，也叫 n **次独立重复试验**.

显然 n 重伯努利试验具有如下共同特征：

① 同一个伯努利试验重复做 n 次；

② 各次试验的结果相互独立.

(2) 二项分布.

一般地，在 n 重伯努利试验中，设每次试验中事件 A 发生的概率为 $p(0 < p < 1)$，用 X 表示事件 A 发生的次数，则 X 的分布列为

$$P(X=k)=\mathrm{C}_n^k p^k(1-p)^{n-k}, k=0,1,2,\cdots,n.$$

若随机变量 X 的分布列形如上式，则称随机变量 X 服从**二项分布**，记作 $X\sim B(n,p)$.

3. 超几何分布

一般地，假设一批产品共有 N 件，其中有 M 件次品. 从 N 件产品中随机抽取 n 件 (不放回)，用 X 表示抽取的 n 件产品中的次品数，则 X 的分布列为

$$P(X=k)=\frac{\mathrm{C}_M^k\mathrm{C}_{N-M}^{n-k}}{\mathrm{C}_N^n}, k=m,m+1,m+2,\cdots,r.$$

其中 $n,M,N\in\mathbb{N}^*$，$M\leqslant N$，$n\leqslant N$，$m=\max\{0,n-N+M\}$，$r=\min\{n,M\}$. 若随机变量 X 的分布列具有上式的形式，则称随机变量 X 服从**超几何分布**.

注：可用超几何分布解决的题目涉及的背景多数是生活、生产实际中的问题，且往往由明显的两部分组成，如产品中的正品和次品、盒中的白球和黑球、同学中的男生和女生等. 注意弄清楚超几何分布与二项分布的区别与联系.

§12.4.4 离散型随机变量的均值与方差

1. 离散型随机变量的均值

(1) 一般地，若离散型随机变量 X 的概率分布列如表所示，

X	x_1	x_2	x_3	$\ldots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\ldots$	p_n

则称

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots+x_np_n=\sum_{i=1}^n x_ip_i$$

为随机变量 X 的**均值**或**数学期望**，简称**期望**. 它反映了离散型随机变量取值的**平均水平**.

(2) 若 $Y=aX+b$，其中 a,b 为常数，则 Y 也是随机变量，且 $E(Y)=aE(X)+b$.

(3) 若 X 服从两点分布，则 $E(X)=p$；

若 $X\sim B(n,p)$，则 $E(X)=np$.

2. 离散型随机变量的方差

(1) 若离散型随机变量 X 的概率分布列为

X	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_n
P	p_1	p_2	p_3	$\dots$	p_n

则称

$$D(X)=\left[x_1-E(X)\right]^2 p_1+\left[x_2-E(X)\right]^2 p_2+\cdots+\left[x_n-E(X)\right]^2 p_n=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i-E(X)\right]^2 p_i$$

为随机变量 X 的**方差**，也记作 $\operatorname{Var}(X)$，其算术平方根 $\sqrt{D(X)}$ 为随机变量 X 的**标准差**. 它反映随机变量取值的**稳定与波动**，集中与离散的程度：$D(X)$ 越小，X 取值越集中；$D(X)$ 越大，X 取值越分散.

(2) 若 $Y=aX+b$，其中 a,b 为常数，则 Y 也是随机变量，且 $D(Y)=a^2E(X)$.

(3) 若 X 服从两点分布，则 $D(X)=p(1-p)$；

若 $X\sim B(n,p)$，则 $D(X)=np(1-p)$.

3. 方差与均值的关系

若随机变量 X（无所谓是离散型或是连续型）的数学期望为 $E(X)$，方差为 $D(X)$，则有

$$D(X)=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2.$$

证: 由于 $E(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}x_ip_i, D(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}\left[x_i-E(X)\right]^2 p_i$，因此可将 $[X-E(X)]^2$ 视为一个整体，设随机变量 $Y=[X-E(X)]^2$，则 $D(X)=\sum\limits_{i=1}^{n}Yp_i=E(Y)$，即

$$D(X)=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}.$$

上式又被称为方差的定义式. 因此有

$$\begin{aligned}
D(X)&=E\left\{[X-E(X)]^2\right\}\\
&=E\left\{X^2-2XE(X)+[E(X)]^2\right\} \qquad E(X)\ \text{为一常数}\\
&=E\left(X^2\right)-2E(X)E(X)+[E(X)]^2\\
&=E\left(X^2\right)-[E(X)]^2.
\end{aligned}$$

§12.4.5 正态分布

1. 正态曲线的定义

函数

$$\varphi_{\mu,\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},x\in(-\infty,+\infty)$$

其中实数 μ 和 $\sigma(>0)$ 为参数，我们称 $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ 的图像为**正态分布密度曲线**，简称**正态曲线**.

2. 正态曲线的性质

(1) 曲线位于 x 轴上方，与 x 轴不相交；

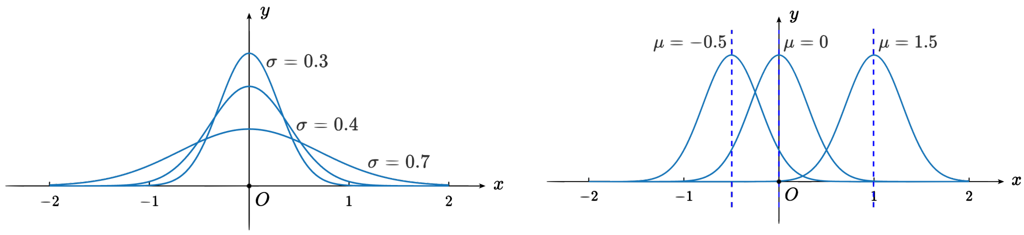
(2) 曲线是单峰的，它关于直线 $x=\mu$ 对称；

(3) 曲线在 $x=\mu$ 处达到峰值 $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}$；

(4) 曲线与 x 轴之间的面积为 1；

(5) 当 σ 一定时，曲线的位置由 μ 确定，曲线随着 μ 的变化而沿 x 轴平移，如图12.4.1(a)所示；

(6) 当 μ 一定时，曲线的形状由 σ 确定，σ 越小，曲线越“瘦高”，表示总体的分布越集中；σ 越大，曲线越“矮胖”，表示总体的分布越分散，如图12.4.1(b)所示.



(a) σ 一定时，μ 变化　　(b) μ 一定时，σ 变化

图 12.4.1　正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的图像性质

3. 正态分布的定义与简单计算

一般地，如果随机变量 X 落在区间 $[a,b]$ 上的概率总等于 $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ 对应的正态曲线与 x 轴在区间 $[a,b]$ 上围成的面积，则称 X 服从参数为 μ 与 σ 的正态分布，记作 $X\sim N\left(\mu,\sigma^2\right)$，此时 $\varphi_{\mu,\sigma}(x)$ 称为 X 的概率密度函数，μ 是 X 的均值，而 σ 是 X 的标准差，σ^2 是 X 的方差.

特别地，当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，称随机变量 X 服从标准正态分布，即 $X\sim N(0,1)$.

⋆ 正态分布总体在三个特殊区间内取值的概率：

① $P(\mu-\sigma<X\leqslant\mu+\sigma)=0.6826$;

② $P(\mu-2\sigma<X\leqslant\mu+2\sigma)=0.9544$;

③ $P(\mu-3\sigma<X\leqslant\mu+3\sigma)=0.9974$.

可以看到正态分布总体几乎总取值于区间 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之内，而在此区间以外取值的概率只有 0.0026，因此通常认为这种情况在一次试验中几乎不可能发生.

在实际应用中，通常认为服从于正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 的随机变量 X 只取 $(\mu-3\sigma,\mu+3\sigma)$ 之间的值，并简称之为“3σ 原则”.

§12.5 统计与统计案例

§12.5.1 抽样方式

1. 简单随机抽样

(1) 定义:

设一个总体含有 N 个个体，从中逐个不放回地抽取 n 个个体作为样本 $(n\leqslant N)$，若每次抽取时总体内的各个个体被抽到的机会都相等，就把这种抽样方法叫作**简单随机抽样**.

(2) 最常用的简单随机抽样的方法：抽签法和随机数表法.

(3) 抽签法与随机数表法的联系与区别:

① 联系:

抽签法和随机数表法都是简单随机抽样的方法，但是抽签法适合在总体和样本都较少、容易搅拌均匀时使用;

② 区别:

随机数表法除了适合总体和样本都较少的情况外，还适用于总体较多，但是需要的样本较少的情况，这时利用随机数表法能够快速地完成抽样.

2. 分层抽样

(1) 定义:

在抽样时，将总体分成互不交叉的层，然后按照一定的比例，从各层独立地抽取一定数量的个体，将各层取出的个体合在一起作为样本，这种抽样方法叫**分层抽样**.

(2) 分层抽样的应用范围：当总体是由差异明显的几个部分组成时，往往选用分层抽样.

注：不论选择哪种抽样方法，总体中的每一个个体入样的概率都是相同的.

§12.5.2 样本的数字特征

1. 众数

在一组数据中，出现次数最多的数据叫作这组数据的**众数**.

2. 平均数

样本数据的**算数平均数**，即 $\overline{x}=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$.

3. 中位数

将一组数据按照大小依次排列，把处在中间位置的一个数据（或中间两个数据的平均数）叫作这组数据的**中位数**.

4. $p\%$ 分位数

一组数据按照从小到大排列为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，计算 $i=np\%$. 若 i 不是整数，取 i_0 为大于 i 的最小整数，x_{i_0} 为 $p\%$ 分位数；若 x 是整数，取 $\dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}$ 为 $p\%$ 分位数.

$$p\% \text{ 分位数} = \begin{cases} x_{i_0}, & i \text{ 不是整数}\,(i_0=[i]+1)\,, \\ \dfrac{x_i+x_{i+1}}{2}, & i \text{ 是整数}. \end{cases}$$

$p\%$ 分位数的直观意义：至少有 $p\%$ 的数据不大于此数，且至少有 $(100-p)\%$ 的数据不小于此数. 中位数是 50% 分位数.

5. 极差

样本数据的**极差**等于该组数据最大值与最小值之差.

6. 方差与标准差

(1) 标准差是样本数据到平均值的一种平均距离.

(2) 若 x_i 是样本数据，n 是样本容量，$\overline{x}$ 是样本平均数，则方差和标准差为

$$s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-\overline{x})^2, s=\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x-\overline{x})^2}.$$

⋆ 注：频率分布直方图与众数、中位数、平均数的关系：

(1) 频率分布直方图中最高的小长方形底边中点的横坐标即是众数；

(2) 中位数左边和右边的小长方形的面积和是相等的；

(3) 平均数等于频率分布直方图中每个小长方形的面积 S_i 乘以小长方形底边中点的横坐标 x_i 之和，即平均数 $= \sum_{i=1}^{n} S_i x_i$.

§12.5.3 统计图表的意义

1. 作频率分布直方图的步骤

① 求极差（即一组数据中最大值与最小值的差）；

② 决定组距和组数，将数据分组；

③ 列频率分布表；

④ 画频率分布直方图.

2. 频率分布折线图

连接频率分布直方图中各小长方形上端的中点，就能得到频率分布折线图.

3. 总体密度曲线

随着样本容量的增加，作图时所分的组数增加，组距减小，相应的频率分布折线图会越来越接近于一条光滑曲线，统计中称这条光滑曲线为总体密度曲线.

4. 茎叶图的画法步骤

① 将每个数据分为茎（高位）和叶（低位）两部分；

② 将最小茎与最大茎之间的数按大小次序排成一列，写在左（右）侧；有两组数据时，写在中间；

③ 将各个数据的叶依次写在其茎的右（左）侧，有两组数据时，写在茎的两侧.

如下给出一个茎叶图的例子.

叶 A	茎	叶 B
9 7	1	8
5 3 3	2	0 4 9 9
9 8 6 4	3	5 7 7
0 0	4	1 2 4

则叶 A 中的数据为：17，19，23，23，25，34，36，38，39，40，40；

叶 B 中的数据为：18，20，24，29，29，35，37，37，41，42，44.

§12.5.4 回归直线方程

1. 变量间的相关关系

常见的两变量之间的关系有两类：一类是确定性的函数关系；另一类是相关关系，与函数关系不同，相关关系是一种非确定性关系，带有随机性.

2. 两个变量的线性相关

(1) 如果散点图中点的分布从整体上看大致在一条直线附近，我们就称这两个变量之间具有线性相关关系，这条直线叫回归直线.

(2) 从散点图上看，如果点分布在从左下角到右上角的区域内，那么两个变量的这种相关关系称为正相关；如果点分布在从左上角到右下角的区域内，那么两个变量的这种相关关系称为负相关.

(3) 相关系数公式为

$$r=\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\overline{y}\right)^2}}.$$

当 $r>0$ 时，表示两个变量正相关；当 $r<0$ 时，表示两个变量负相关.

当 $|r|$ 越接近 1 时，两个变量的线性相关性越强；当 $|r|$ 越接近 0 时，两个变量的线性相关性越弱.

通常当 $|r|>0.75$ 时，便认为两个变量具有很强的线性相关关系.

3. 回归直线方程（最小二乘法）

(1) 通过求 $Q=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\beta x_i-\alpha\right)^2$ 的最小值而得出回归直线方程的方法，即使得样本数据的点与回归直线上相应点在竖直方向上的投影间距离的平方和最小的方法叫作**最小二乘法**. 该式取最小值时的 α,β 的值即分别为 $\widehat{a},\widehat{b}$.

(2) 两个具有线性相关关系的变量的一组数据：$\left(x_1,y_1\right),\left(x_2,y_2\right),\cdots,\left(x_n,y_n\right)$，其回归直线方程为 $\widehat{y}=\widehat{b}x+\widehat{a}$，则 $\begin{cases}\widehat{b}=\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)\left(y_i-\overline{y}\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i-\overline{x}\right)^2},\\ \widehat{a}=\overline{y}-\widehat{b}\overline{x},\end{cases}$ 其中，$\overline{x}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$，$\overline{y}=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$，$(\overline{x},\overline{y})$ 称为样本点的中心.

(3) 残差：$\widehat{e}_i=y_i+\widehat{y}_i$ 称为相应于点 (x_i,y_i) 的残差，残差平方和为 $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i-\widehat{y}_i\right)^2$.

(4) 相关指数 $R^2 = 1 - \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \widehat{y}_i\right)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \overline{y}_i\right)^2}$.

R^2 越大，说明残差平方和越小，即模型的拟合效果越好；

R^2 越小，残差平方和越大，即模型的拟合效果越差.

在线性回归模型中，R^2 越接近于 1，表示回归模型的拟合效果越好.

§12.5.5 独立性检验

(1) 变量的不同“值”表示个体所属的不同类类别，像这样的变量称为**分类变量**.

(2) 列出两个分类变量的频数表，称为列联表，假设有两个分类变量 X 和 Y，它们的可能取值分别为 $\{x_1, x_2\}$ 和 $\{y_1, y_2\}$，其样本频数列联表（称为 2×2 列联表）如下表所示. 构造一个随机变量

$$K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)},$$

其中 $n = a+b+c+d$ 为样本容量.

	y_1	y_2	总计
x_1	a	b	$a+b$
x_2	c	d	$c+d$
总计	$a+c$	$b+d$	$a+b+c+d$

(1) 如果 K^2 的观测值 $k \geqslant k_0$，就认为“两个分类变量之间有关系”；否则，就认为“两个分类变量之间没有关系”. 我们称这样的 k_0 为一个判断规则的临界值.

(2) 把“两个分类变量之间没有关系”错误地判断为“两个分类变量之间有关系”的概率不超过 $P\left(K^2 \geqslant k_0\right)$.

上面这种利用随机变量来判断“两个分类变量有关系”的方法称为独立性检验.

Chapter 13

可能会有点用的东西

在这一部分，编者会列举一些初中老师觉得高中老师会讲，但高中老师觉得初中已经讲过的内容，和在考试中可以让考生如虎添翼的做题小技巧.

“数学，那可太好玩了！”

——王观旭（*2001—*）

§13.1 初中? or 高中?

§13.1.1 韦达定理

设一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ 中，有两根分别为 x_1,x_2，则有根与系数关系

$$\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}, \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}, \end{cases} \quad \left(\Delta=b^2-4ac\geqslant 0\right),$$

又称作：韦达（Vieta）定理.

证: 由一元二次方程求根公式可知 $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，则有

$$x_1+x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\frac{b}{a},$$

$$x_1x_2=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{c}{a}.$$

$\star$ 逆定理:

若两数 α 和 β 满足

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a},$$

则 α 和 β 为方程 $ax^2+bx+c=0(a,b,c\in\mathbb{R},a\neq 0)$ 的根.

例题 13.1.1. （复合根式化简）化简 $\sqrt{33+4\sqrt{63}}$.

解: $\sqrt{33+4\sqrt{63}}=\sqrt{33+2\sqrt{2^2\times 63}}=\sqrt{33+2\sqrt{252}}$,

设 $\begin{cases} x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=33, \\ x_1x_2=\dfrac{c}{a}=252, \end{cases}$ 则可得 x_1,x_2 是方程 $x^2-33x+252=0$ 的两根（即令 $a=1$, 则 $b=-33,c=252$），解得 $x=12$ 或 $x=21$.

因此 $\sqrt{33+4\sqrt{63}}=\sqrt{12}+\sqrt{21}=2\sqrt{3}+\sqrt{21}$.

§13.1.2　整式的乘除

1.　平方差公式

在初中《整式的乘除》一章中，我们学过平方差公式为

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b).$$

实际上，除此之外，还有立方差公式为

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2).$$

在立方差公式中，用 $-b$ 替换 b，即 $a^3-(-b)^3=a^3+b^3$，则得到立方和公式为

$$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2).$$

此外，推广到 n 次方差公式为

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-2}b^2+\cdots+ab^{n-2}+b^{n-1}).$$

基于此，令 $a=1,b=q$ 得，

$$1-q^n=(1-q)(1+q+q^2+\cdots+q^{n-2}+q^{n-1})\ \Rightarrow\ \frac{1-q^n}{1-q}=1+q+q^2+\cdots+q^{n-2}+q^{n-1}.$$

即可得到首项为 1，公比为 q 的等比数列前 n 项和 $S_n=\dfrac{1-q^n}{1-q}$.

2. 整式的除法

如何对整式进行除法运算，以计算 $(3x^4-3x^3+3x^2)\div(x^2-x+1)$ 为例，

与进行除法运算的过程基本完全一致，如下所示：

$$
\begin{array}{r|rrrrrrrrr}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & 3x^2 & - & x & - & 4 \\ \cline{2-10}
x^2-x+1 & 3x^4 & - & 4x^3 & & & + & 5x & - & 1 \\
\multicolumn{1}{r}{} & 3x^4 & - & 3x^3 & + & 3x^2 & & & & \\ \cline{2-10}
\multicolumn{1}{r}{} & & - & x^3 & - & 3x^2 & + & 5x & & \\
\multicolumn{1}{r}{} & & - & x^3 & + & x^2 & - & x & & \\ \cline{3-10}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & - & 4x^2 & + & 6x & - & 1 \\
\multicolumn{1}{r}{} & & & & - & 4x^2 & + & 4x & - & 4 \\ \cline{5-10}
\multicolumn{1}{r}{} & & & & & & & 2x & + & 3
\end{array}
$$

其中 $3x^4-3x^3+3x^2$ 为被除数，x^2-x+1 为除数，$3x^2-x-4$ 为商，$2x+3$ 为余数，即，$(3x^4-3x^3+3x^2)\div(x^2-x+1)=(3x^2-x-4)\cdots\cdots(2x+3)$.

因此 $(3x^4-3x^3+3x^2)=(x^2-x+1)(3x^2-x-4)+(2x+3)$.

⋆ 初等数论初步

在 2024 年九省联考的最后一题涉及到“离散对数在密码学中的重要应用”，实则考察的是数论（原高中数学选修 4-6《初等数论初步》）的内容，在此介绍几个定理和定义作为了解.

定理：（带余除法） 设 a 和 b 是两个给定的整数，其中 $b>0$，那么一定存在惟一的一对整数 q 和 r，满足

$$a=bq+r,\ 0\leqslant r<b.$$

定义：（素数与合数） 定义一个大于 1 的正整数，如果它的正因数只有 1 和它本身，就叫作**素数**（又称**质数**），否则就叫作**合数**。

定义：（同余） 给定一个正整数 m，我们把它叫作**模**. 如果 $a-b$ 能被 m 整除，我们说“两个整数 a,b 对模 m **同余**”，记作 $a\equiv b\pmod m$，读作“a 与 b 对模 m 同余”，如果 a 不能被 m 整除，我们就说“a 与 b 对模 m 不同余”，记作 $a\not\equiv b\pmod m$.

若 $a\equiv b\pmod m$，则 $a-b=km$，即 $a=km+b$. 也可认为 b 是 a 被 m 除得的“余数”.

定理：（费马小定理） 设 p 为素数，且整数 a 与 p 互素（即不可约分），则有

$$a^{p-1}\equiv 1\pmod p.$$

§13.2 解题小技巧

§13.2.1 "1"的妙用

1. 基本不等式

在一些求最值的问题中，利用基本不等式方法中"'1'的妙用"策略来解决，例如

例题 13.2.1. （题型模板）

① 已知 $x>0, y>0$ 且 $ax+by=1$，求 $\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}$ 的最值.

② 已知 $x>0, y>0$ 且 $\dfrac{m}{x}+\dfrac{n}{y}=1$，求 $ax+by$ 的最值.

解:（解题模板）

因为 $x>0, y>0$，

$$
\begin{aligned}
\text{原式} &= \left(\frac{m}{x}+\frac{n}{y}\right)\times 1 \qquad \left[\text{或}(ax+by)\times 1\right]\\
&= \left(\frac{m}{x}+\frac{n}{y}\right)(ax+by)\\
&= am+bn+bm\frac{y}{x}+an\frac{x}{y}\\
&\geqslant am+bn+2\sqrt{bm\frac{y}{x}\cdot an\frac{x}{y}}\\
&= am+bn+2\sqrt{abmn}
\end{aligned}
$$

当且仅当 $bm\dfrac{y}{x}=an\dfrac{x}{y}$ 时，有最小值为 $am+bn+2\sqrt{abmn}$.

2. 三角函数（齐次分式）求值

一般已知 $\tan\alpha$ 的值，求三角函数多项式（或三角函数分式）的值时，一般使用齐次分式的方法. 即分式的分子分母中多项式的各项次数一致时，利用三角函数的商数关系（即 $\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$），将分子分母同时除以 $\cos^n\alpha$，其中 n 为次数.

例如，一次齐次分式，

例题 13.2.2. 已知 $\tan\alpha=2$，求 $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha-\cos\alpha}$ 的值.

解:

$$原式 = \frac{(\sin\alpha - \cos\alpha)/\cos\alpha}{(2\sin\alpha - \cos\alpha)/\cos\alpha} \qquad = \frac{\tan\alpha - 1}{2\tan\alpha - 1}$$

当 $\tan\alpha = 2$ 时,

$$原式 = \frac{2-1}{2\times 2-1} \qquad = \frac{1}{3}$$

二次齐次分式中，常会用到"'1'的妙用"的策略，原理为利用三角函数中的平方关系（即 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$）将三角函数多项式除以 1，不改变原式大小的同时，得到分母为二次多项式，例如：

例题 13.2.3. 已知 $\tan\alpha = 2$，求 $\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha$ 的值.

解:

$$\begin{aligned}
原式 &= \frac{\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha}{1} \\
&= \frac{\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \\
&= \frac{(\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha)/\cos^2\alpha}{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)/\cos^2\alpha} \\
&= \frac{\tan^2\alpha + 3\tan\alpha}{\tan^2\alpha + 1}
\end{aligned}$$

当 $\tan\alpha = 2$ 时,

$$原式 = \frac{2^2 + 3\times 2}{2^2+1} \qquad = 2$$

但是一般来讲，二次项不会直接给出，大多会出现如下形式：

① 直接给出：$\sin^2\alpha$，$\cos^2\alpha$；

② 两个单项式相乘：$\sin\alpha\cos\alpha$；

③ 二倍角：$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$，$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$.

§13.2.2 三步走战略解题

1. 基本不等式

Step 1. 一正（条件）：保证使用基本不等式的两项需为正数；

$$a > 0 \text{ 且 } b > 0$$

Step 2. 二定 (技巧)：二者之和或积为一定值 (一般为常数)，即“积定求和”与“和定求积”；

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{P} \text{ 或 } ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{S^2}{4}$$

Step 3. 三等 (套话)：四个大字“当且仅当”，若不满足则无法取等，即不能取到最值.

$$\text{当且仅当} a = b \text{时，不等式可以取等（“=”）}$$

2. 数列：已知 S_n 求 a_n

Step 1. $S_1 = a_1$；

Step 2. 当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = S_n - S_{n-1}$；

Step 3. 检验:a_1 是否符合 a_n,若符合则直接写出 a_n,否则写成 $a_n = \begin{cases} a_1, & n = 1, \\ a_n, & n \geqslant 2 \text{且} n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$

3. 解析几何：解答题第二问套路

Step 1. 用点斜式设出过定点的直线方程；

$$\text{考虑竖直和水平直线，即斜率不存在（} x = x_0 \text{）和斜率为 0（} y = y_0 \text{）的情况}$$

$$\text{若定点在 } y \text{ 轴上，即 } (0, y_0)\text{，设直线方程 } l : y - y_0 = kx \ \Rightarrow \ y = kx + y_0$$

$$\text{若定点在 } x \text{ 轴上，即 } (x_0, 0)\text{，设直线方程 } l : x - x_0 = my \ \Rightarrow \ x = my + x_0$$

Step 2. 将直线方程和圆锥曲线方程联立，化简整理成一个一元二次方程；

$$\text{整理得，} Ax^2 + Bx + C = 0 \text{ 或 } Ay^2 + By + C = 0$$

Step 3. 求 $\Delta > 0$ 的解集，设交点坐标，使用韦达定理.

设交点坐标分别为$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$，由韦达定理得，$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{B}{A} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{C}{A} \end{cases} \left(\text{或} \begin{cases} y_1 + y_2 = -\dfrac{B}{A} \\ y_1 \cdot y_2 = \dfrac{C}{A} \end{cases} \right)$

§13.2.3 立体几何：平面的法向量求法

在平面向量和空间向量中都介绍过“数量积”（又称“点积”、“内积”），但是向量的乘法除此之外还有“**向量积**”（又称“叉积”、“外积”）.

两个向量的向量积与这两个向量和垂直，即与这两个向量所在平面垂直. 因此，计算两向量的向量积便成为求法向量的另外一种办法.

例题 13.2.4. 已知平面 ABC，其中 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1,z_1),\overrightarrow{BC}=(x_2,y_2,z_2),\overrightarrow{CA}=(x_3,y_3,z_3)$，求平面 ABC 的法向量.

常规方法：

解: 任选两个向量，以 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1,z_1),\overrightarrow{BC}=(x_2,y_2,z_2)$ 为例，设平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则有

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{m}=0.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}x_1x+y_1y+z_1z=0,\\ x_2x+y_2y+z_2z=0.\end{cases}$$

然后，用其中一个字母来表示另外两个字母，并代入一个非 0 的特殊值，即可求出 $\boldsymbol{m}$ 方向上的一个向量.

用叉积来求法向量的原理为：若设 $\boldsymbol{a}=(x_1,y_1,z_1),\boldsymbol{b}=(x_2,y_2,z_2)$，$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ 分别是 x,y,z 轴方向的单位向量，则

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\end{vmatrix}\\&=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}z_1&x_1\\z_2&x_2\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\boldsymbol{k}\\&=(y_1z_2-y_2z_1)\boldsymbol{i}+(z_1x_2-z_2x_1)\boldsymbol{j}+(x_1y_2-x_2y_1)\boldsymbol{k}\\&=(y_1z_2-y_2z_1,\ z_1x_2-z_2x_1,\ x_1y_2-x_2y_1).\end{aligned}$$

但是让高中读者现在去学习叉积的计算原理，学会三阶行列式的计算方法以及是毫无意义的，这里写出更容易理解的计算方法：

解: 任选两个向量，以 $\overrightarrow{AB}=(x_1,y_1,z_1),\overrightarrow{BC}=(x_2,y_2,z_2)$ 为例，

Step 1. 将两个向量写两遍：

$$\begin{array}{cccccc} x_1 & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ \\ x_2 & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 & z_2 \end{array}$$

Step 2. 掐头去尾：

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{x_1} & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 & \cancel{z_1} \\ \\ \cancel{x_2} & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 & \cancel{z_2} \end{array}$$

Step 3. 中间画三个叉：

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{x_1} & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 & \cancel{z_1} \\ \\ \cancel{x_2} & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 & \cancel{z_2} \end{array}$$

其中，实线成为主对角线，虚线成为副对角线，依次用主对角线的乘积减副对角线的乘积，分别得到法向量的横纵竖坐标：

$$\begin{array}{cccccc} \cancel{x_1} & y_1 & z_1 & x_1 & y_1 & \cancel{z_1} \\ \\ \cancel{x_2} & y_2 & z_2 & x_2 & y_2 & \cancel{z_2} \end{array}$$

$$y_1z_2-y_2z_1 \qquad x_1y_2-x_2y_1$$

$$z_1x_2-z_2x_1$$

因此得到平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(y_1z_2-y_2z_1,\ z_1x_2-z_2x_1,\ x_1y_2-x_2y_1)$.

以 2024 年九省联考的 17 题第 (2) 问的节选举个例子：

例题 13.2.5. 已知 $A(0,\sqrt{2},0),B(\sqrt{2},0,0),C(2\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，分别用常规办法和向量积法求平面 ABC 的法向量.

解: 由题意可知，$\overrightarrow{AB}=(\sqrt{2},-\sqrt{2},0),\overrightarrow{BC}=(\sqrt{2},0,\sqrt{2})$，

①（常规办法）设平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(x,y,z)$，则有

$$\begin{cases}\overrightarrow{AB}\cdot\boldsymbol{m}=0,\\ \overrightarrow{BC}\cdot\boldsymbol{m}=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\sqrt{2}x-\sqrt{2}y+0=0,\\ \sqrt{2}x+0+\sqrt{2}z=0.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y,\\ x=-z.\end{cases}$$

令 $x=1$，则平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(1,1,-1)$.

②（向量积法）

（以下内容在草稿纸上进行）

$$
\begin{array}{c|c|cccc|c|}
 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\
 & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\
 & & & -2 & -2 & 2 &
\end{array}
$$

则 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{BC}=(-2,-2,2)$，因此可得平面 ABC 的法向量 $\boldsymbol{m}=(1,1,-1)$.

（因为法向量的重点在于方向，而非长度，因此可以适当对叉积得到的结果进行约分）

读者可以通过多次对立体几何中求线面角、二面角的题目用两种方法进行尝试和计算，找到适合自己的方法.