震惊!!

深圳大学34小时学完 运筹学

왕관우.

Chapter 1. 线性规划及单纯形法.

一、线性规划的标准型.

1. 剩余变量(surplus)与松弛变量(slack)：x_s 均可称作松弛变量. 其作用是引入后将不等式化为等式

2. 标准型的标准形式：

$$\max z = c^T X$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} AX = b \\ X \geqslant 0 \end{cases}$$

[提示] ① 目标函数求 $\min z$ 时，应利用 $\max z = -\min(-z)$ 进行转换.

② 若 x_i 不确定符号，则应引入松弛变量 x_{s1}, x_{s2}，有 $x_i = x_{s1} - x_{s2}$

③ 引入的 x_s 不能加入到目标函数中，即使加入，系数也为 0.

例：将下列线性规划化为标准型.

$$\min z = 2x - 3y$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} |x| + |y| = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

▷ 令 $u_1 = \frac{|x|-x}{2}$ $u_2 = \frac{|x|+x}{2}$ $u_3 = \frac{|y|-y}{2}$ $u_4 = \frac{|y|+y}{2}$

则 $|x| = u_1 + u_2$, $|y| = u_3 + u_4$. $x = u_2 - u_1$, $y = u_4 - u_3$.

于是标准型为：$\max z = -2x + 3y$

$$\text{s.t.} \begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 3 \\ u_2 - u_1 - u_4 + u_3 = 1 \\ u_i \geqslant 0, \ (i = 1, 2, 3, 4). \end{cases}$$

二、单纯形法

1. 检验数：$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$.

2. 列单纯型表方法及步骤.

以右题为例：

例：$\min z = 2x_1 - 2x_2$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 6 \\ 6x_1 + 2x_2 \leq 21 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

化为标准型 →

此处可不转化成 max

$$\min z = 2x_1 - 2x_2$$
$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 5 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 6 \\ 6x_1 + 2x_2 + x_5 = 21 \\ x_i \geqslant 0, \ i = 1, 2, \dots, 5 \end{cases}$$

① 依题列表：

	c_j		(目标函数中)所有变量前系数					θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
(…) x_s 前系数	松弛变量 x_s	资源值 (b)	系数矩阵(A)					
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$								

$\tilde{A} = (b, A)$ 为该线性方程组的增广矩阵

填表 →

	c_j		2	-2	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	5	1	1	1	0	0	
0	x_4	6	-1	1	0	1	0	
0	x_5	21	6	2	0	0	1	
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$								

② 计算检验数：

	c_j			c_2				θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
a_1				b_1				
a_2				b_2				
a_3				b_3				
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$				σ_2				

以 x_2 为例：$\sigma_2 = c_2 - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)$

填表 →

	c_j		2	-2	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	5	1	1	1	0	0	
0	x_4	6	-1	1	0	1	0	
0	x_5	21	6	2	0	0	1	
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			2	-2	0	0	0	

③ 将检验数(σ_j) $\begin{cases} \text{min 时找最小} \\ \text{max 时找最大} \end{cases}$ 对应的 x_j 作为换入变量，根据换入变量算出 θ (不考虑 θ 为负值的情况).

	c_j							$\theta=\frac{b_i}{a_{ij}}$
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
		m_1		n_1				$\theta_1=\frac{m_1}{n_1}$
		m_2		n_2				$\theta_2=\frac{m_2}{n_2}$
		m_3		n_3				$\theta_3=\frac{m_3}{n_3}$
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			2	-2	0	0	0	

故将x_2作为换入变量.

填表

	c_j		2	-2	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	5	1	1	1	0	0	5
0	x_4	6	-1	1	0	1	0	6
0	x_5	21	6	2	0	0	1	$\frac{21}{2}$
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			2	-2	0	0	0	

④将θ最小的(无论min还是max)对应的x_{ij}作为旋转主元，并用[ ]标记.

于是在第2张单纯形表中C_B一栏相应改变，并根据矩阵的基本行变换使旋转主元变为1，该列的其他元素变为0.

	c_j		2	-2	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	5	1	[1]	1	0	0	5
0	x_4	6	-1	1	0	1	0	6
0	x_5	21	6	2	0	0	1	$\frac{21}{2}$
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			2	-2	0	0	0	
-2	x_2			1				
0	x_4			0				
0	x_5			0				
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$								

填表

	c_j		2	-2	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	5	1	[1]	1	0	0	5
0	x_4	6	-1	1	0	1	0	6
0	x_5	21	6	2	0	0	1	$\frac{21}{2}$
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			2	-2	0	0	0	
-2	x_2	5	1	1	1	0	0	
0	x_4	1	-2	0	-1	1	0	
0	x_5	16	5	0	-1	0	1	
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$								

⑤根据上述②③条完善单纯形表，直到检验数 $\begin{cases}\text{min 时，全正}\\ \text{max 时，全负}\end{cases}$ 时，结束，可取到最优解.

	c_j		2	-2	0	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	5	1	[1]	1	0	0	5
0	x_4	6	-1	1	0	1	0	6
0	x_5	21	6	2	0	0	1	$\frac{21}{2}$
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			2	-2	0	0	0	0
-2	x_2	5	1	1	1	0	0	
0	x_4	1	-2	0	-1	1	0	
0	x_5	16	5	0	-1	0	1	
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_ia_{ij}$			4	0	2	0	0	-10

此处为$\sum C_B \cdot b$，可写可不写.

最优值

根据该表可得最优解 $x_1^*=0$, $x_2^*=5$, $x_3^*=0$, $x_4^*=1$, $x_5^*=16$.

代入目标函数可得最优值 $z^*=2\times0-2\times5=-10$

※由此例题可看出求目标函数最大 or 最小都可以直接用单纯形法求解.

二、单纯形法的进一步讨论:

1. 大M法: 构造新线性规划，与原问题不等价，但解相同.(当非基变量不足以构成一个单位对角矩阵时使用)

即考虑下述问题 $\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n-M\sum_{i=1}^{m}x_{n+i}$. 其中 $0<M<+\infty$，且任意大. 但不能用具体的数代替.

☆求解方法及步骤. 以下题为例:

例: $\max z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{且使 } b>0]{\text{标准型}} \max z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \quad \text{s.t.}\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0\ (i=1,2,3,4,5) \end{cases}$$

2式有这个就够了

$$\xrightarrow[x_6,\ x_7]{\text{加入人工变量}} \max z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 - Mx_6 - Mx_7 \quad \text{s.t.}\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_i \geq 0\ (i=1,2,\dots,7) \end{cases}$$

○作单纯形表

	c_j									θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
$-M$	x_6	4	-4	3	1	-1	0	1	0	4
0	x_5	10	1	-1	2	0	1	0	0	5
$-M$	x_7	1	2	-2	[1]	0	0	0	1	1
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			$-2M+3$	$M+2$	$2M-1$	$-M$	0	0	0	$-5M$
$-M$	x_6	3	-6	[5]	0	-1	0	1		$\frac{3}{5}$
0	x_5	8	-3	3	0	0	1	0		$\frac{8}{3}$
-1	x_3	1	2	-2	1	0	0	0		负的直接不填.
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			$-6M+5$	$5M$	0	$-M$	0	0		
2	x_2	$\frac{3}{5}$	$-\frac{6}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0			负的
0	x_5	$\frac{31}{5}$	$[\frac{3}{5}]$	0	0	$\frac{3}{5}$	1			$\frac{31}{3}$
-1	x_3	$\frac{11}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0			不填
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			5	0	0	0	0			
2	x_2	13	0	1	0	1	2			不用算了.
3	x_1	$\frac{31}{3}$	1	0	0	1	$\frac{5}{3}$			
-1	x_3	$\frac{19}{3}$	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$			
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			0	0	0	-5	$-\frac{25}{3}$			$\frac{152}{3}$

故得到最优解 $x_1^* = \frac{31}{3}$, $x_2^* = 13$, $x_3^* = \frac{19}{3}$, $x_4^* = x_5^* = 0$

则最优值 $z^* = \frac{152}{3}$.

2. 两阶段法(自学成才) ☆求解方法及步骤. 以下题为例:

例: $\max z = 3x_1 + 2x_2 - x_3$

$$\text{s.t.}\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \leq 10 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{且使 } b>0]{\text{标准型}} \max z = 3x_1 + 2x_2 - x_3 \quad \text{s.t.}\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_i \geq 0\ (i=1,2,3,4,5) \end{cases}$$

只有人工变量(与大M法区别)

$$\xrightarrow[x_6,\ x_7]{\text{加入人工变量}} \underbrace{\min z = x_6 + x_7 \quad \text{s.t.}\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + x_6 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_5 = 10 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_i \geq 0\ (i=1,2,\dots,7) \end{cases}}_{\text{辅助问题}}$$

○第一阶段辅助问题的单纯形表.

	c_j		0	0	0	0	0	1	1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	4	-4	3	1	-1	0	1	0	4
0	x_5	10	1	-1	2	0	1	0	0	5
1	x_7	1	2	-2	[1]	0	0	0	1	1
$\sigma_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$			2	-1	-2	1	0	0	0	

(续表)

	c_j		0	0	0	0	0	1	1	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
1	x_6	3	-6	[5]	0	-1	0	1		$\frac{3}{5}$
0	x_5	8	-3	3	0	0	1	0		$\frac{8}{3}$
0	x_3	1	2	-2	1	0	0	0		
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}$			6	-5	0	1	0	0		
0	x_2	$\frac{3}{5}$	$-\frac{6}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0			
0	x_5	$\frac{31}{5}$	$\frac{3}{5}$	0	0	$\frac{3}{5}$	1			
-1	x_3	$\frac{11}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0			
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}$			5	0	0	0	0			

○第二阶段问题(原问题)的单纯形表.(与大M法后续无异)

	c_j		3	2	-1	0	0	θ
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
2	x_2	$\frac{3}{5}$	$-\frac{6}{5}$	1	0	$-\frac{1}{5}$	0	
0	x_5	$\frac{31}{5}$	$[\frac{3}{5}]$	0	0	$\frac{3}{5}$	1	$\frac{31}{3}$
-1	x_3	$\frac{11}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	0	
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}$			5	0	0	0	0	
2	x_2	13	0	1	0	1	2	
3	x_1	$\frac{31}{3}$	1	0	0	1	$\frac{5}{3}$	
-1	x_3	$\frac{19}{3}$	0	0	1	0	$\frac{2}{3}$	
$\sigma_j=c_j-\sum_{i=1}^{m}c_i a_{ij}$			0	0	0	-5	$-\frac{25}{3}$	$\frac{152}{3}$

故得到最优解 $x_1^*=\frac{31}{3}$, $x_2^*=13$, $x_3^*=\frac{19}{3}$, $x_4^*=x_5^*=0$

则最优值 $z^*=\frac{152}{3}$.

Chapter 2 . 对偶理论及灵敏度分析

一、线性规划的对偶理论