

ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION

常微分方程

GUANXU (GLEASON) WANG

Special Version for Yankun (Alfred) Chen

2025 年 6 月 12 日

目录

| | | |
|----------|--------------------------------|-----------|
| 1 | 一阶微分方程的初等解法 | 1 |
| 1.1 | 变量分离方程与变量变换 | 1 |
| 1.2 | 线性微分方程与常数变易法 | 1 |
| 2 | 高阶微分方程 | 3 |
| 2.1 | 一般理论 | 3 |
| 2.1.1 | 齐次线性微分方程 | 3 |
| 2.1.2 | 齐次线性微分方程 | 4 |
| 2.2 | 常系数线性微分方程的解法 | 6 |
| 2.2.1 | 复值函数与复值解 | 6 |
| 2.2.2 | 常系数齐次线性微分方程 | 6 |
| 2.2.3 | 欧拉方程 | 7 |
| 3 | n 阶线性微分方程组 | 8 |
| 3.1 | 一般理论 | 8 |
| 3.2 | 常系数线性微分方程组 | 8 |
| 3.2.1 | 常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵 | 8 |
| 3.2.2 | 利用若尔当 (Jordan) 标准型求基解矩阵 | 10 |
| 3.3 | 非齐次线性微分方程组的常数变易法 | 13 |
| 4 | 拉普拉斯变换 | 15 |
| 4.1 | 一般理论 | 15 |
| 4.2 | 求解初值问题 | 16 |
| 4.3 | 非连续函数的拉普拉斯变换 | 17 |
| 4.4 | 周期函数与幂函数的拉普拉斯变换 | 19 |
| 4.5 | 卷积 | 20 |
| 4.6 | 狄拉克 δ 函数 | 23 |
| 5 | 微分方程的级数解 | 25 |
| 5.1 | 幂级数与解析函数 | 25 |
| 5.2 | 线性微分方程的幂级数解 | 27 |

1 一阶微分方程的初等解法

1.1 变量分离方程与变量变换

定义 1.1 变量分离的方程 (separable equations)

形如 $\frac{dy}{dx} = f(x)\phi(y)$ 的方程, 其中 $f(x)$ 与 $\phi(y)$ 均为连续函数.

运算步骤:

1. **分离变量:** 若 $\phi(y) \neq 0$ 则上式可改写成: $\frac{1}{\phi(y)}dy = f(x)dx$.
2. **两边积分:** 得到 $\int \frac{1}{\phi(y)}dy = \int f(x)dx$. 最后化作隐式解. 若能写成显式解, 则写作 $y(x)$ 的形式, 并讨论 $\phi(y) \neq 0$ 的情况.

例 1.1

求解方程 $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$

Solution. 显然 $y \neq 0$, 将变量分离得: $ydx = -xdy$. 两边积分得: $\int ydx = -\int xdy$, 即 $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$. 进而写成通解 $x^2 + y^2 = C$.

1.2 线性微分方程与常数变易法

定义 1.2 线性微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} P(x)y, & \text{一阶齐次 (homogeneous) 线性微分方程} \\ P(x)y + Q(x), & \text{一阶非齐次 (inhomogeneous) 线性微分方程} \end{cases}$$

定理 1.1 常数变易法 (constant variation method)

一阶非齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$ 的解为

$$y(x) = \underbrace{C \cdot e^{\int P(x)dx}}_{\text{齐次通解 (general solution)}} + \underbrace{e^{\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx}_{\text{非齐次特解 (particular solution)}}.$$

Proof. 易知一阶齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx} = P(x)y$ 是变量分离方程, 因此得到通解:

$$\frac{dy}{dx} = P(x)y \xrightarrow{\text{变量分离}} \frac{1}{y}dy = P(x)dx \xrightarrow{\text{积分}} \int \frac{1}{y}dy = \int P(x)dx \xrightarrow{\text{求解}} \log|y| = \int P(x)dx + \tilde{C} \\ \Rightarrow y = Ce^{\int P(x)dx}$$

常数变易指的是将常数变为变量 (函数), 即令 $y = C(x)e^{\int P(x)dx}$, 将其与原方程联立得

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{\int P(x)dx} = P(x) \cdot C(x)e^{\int P(x)dx} + Q(x),$$

即

$$C'(x)e^{\int P(x)dx} = Q(x).$$

求解 $C(x)$ 得

$$C(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx + C.$$

因此得到方程的解为

$$y(x) = C \cdot e^{\int P(x)dx} + e^{\int P(x)dx} \cdot \int Q(x)e^{-\int P(x)dx}dx.$$

定义 1.3 伯努利方程

形如 $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)y^n$ 的方程, 其中 $n \neq 0, 1$.

运算步骤:

1. 对于 $y \neq 0$, 方程两边同时乘以 y^{-n} 得, $y^{-n}\frac{dy}{dx} = P(x)y^{1-n} + Q(x)$.

2. 变量代换, 令 $z := y^{1-n}$, 则 $\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$.

3. 将伯努利方程代入上式,

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}(P(x)y + Q(x)y^n) = (1-n)y^{1-n}P(x) + (1-n)Q(x) = (1-n)P(x)z + (1-n)Q(x).$$

4. 然后用常数变易法 (略).

2 高阶微分方程

2.1 一般理论

定义 2.1 n 阶线性微分方程

讨论关于 $x(t)$ 的 n 阶线性微分方程, 形如

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = f(t), \quad (1)$$

其中, $a_i, f \in C[a, b]$. 称当 $f(t) = 0$ 时, 即

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_1(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}(t) \frac{dx}{dt} + a_n(t)x = 0, \quad (2)$$

为齐次线性微分方程; 当 $f(t) \neq 0$ 时, 为非齐次线性微分方程.

2.1.1 齐次线性微分方程

定理 2.1 叠加原理

在齐次线性微分方程中, 若 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 是其 k 个解, 则它们的线性组合

$$C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \cdots + C_k x_k(t)$$

也是该齐次线性微分方程的解.

定义 2.2 朗斯基行列式 (Wronskian)

$$W[x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)] := W(t) = \begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t) \\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t) \end{vmatrix}$$

定理 2.2

若 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 线性相关, 则 $W(t) \equiv 0$. **注意:** 这不是充要条件.

逆反命题:

若 $\exists t_0$, 使得 $W(t) \neq 0$, 则 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_k(t)$ 线性无关.

定理 2.3 通解结构定理

n 阶齐次线性微分方程 (2) 一定有 n 个线性无关的解, 且这 n 个解的线性组合即为 (2) 的通解.

方程 (2) 的一组 n 个线性无关解称为方程的一个**基本解组**. 特别地, 当 $W(t_0) = 1$ 时, 称为**标准解组**.

2.1.2 齐次线性微分方程

性质 2.1

1. 若 $\tilde{x}(t)$ 是 n 阶非齐次线性微分方程 (1) 的解, $x(t)$ 是 n 阶齐次线性微分方程 (2) 的解, 则 $\tilde{x}(t) + x(t)$ 也是 (1) 的解.
2. 方程 (1) 的任意两个解之差必为 (2) 的解.

定理 2.4 通解结构定理

设 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 为方程 (2) 的一个基本解组, $\tilde{x}(t)$ 是为方程 (1) 的一个解, 则方程 (1) 的通解为

$$x(t) = C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t) + \dots + C_n x_n(t) + \tilde{x}(t),$$

即, $x(t)$ = 齐次方程通解 + 非齐次方程特解.

例 2.1 常数变易法

以二阶非齐次线性微分方程为例, 即

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x).$$

Solution. 设其齐次线性微分方程

$$y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$$

的一组线性无关解 (基本解组) 为 $y_1(x), y_2(x)$, 则其通解可以表示为

$$y(x) = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x),$$

即同样的思路, 对于非齐次的原方程, 将常数设为函数 (不再赘述). 为了找到一个**特解**, 我们添加简化条件: 将所有含**变易常数的导数**化为零, 即

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x)}_{\text{化零}} + C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x),$$

因此得到第一个关于 $C_i'(x)$ 的方程:

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0. \quad (1)$$

接下来基于此求二阶导数为

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x).$$

将一阶导数和二阶导数分别代入原方程得,

$$\begin{aligned} f(x) = & [C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) + C_1(x)y_1''(x) + C_2(x)y_2''(x)] \\ & + a_1(x)[C_1(x)y_1'(x) + C_2(x)y_2'(x)] \\ & + a_2(x)[C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)]. \end{aligned}$$

将其整理得,

$$\begin{aligned} & C_1(x) \underbrace{[y_1''(x) + a_1(x)y_1'(x) + a_2(x)y_1(x)]}_{=0} \\ & + C_2(x) \underbrace{[y_2''(x) + a_1(x)y_2'(x) + a_2(x)y_2(x)]}_{=0} + C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x) \end{aligned}$$

由于 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次线性微分方程的基本解组, 因此代入齐次方程中为 0, 于是得到第二个关于 $C_i'(x)$ 的方程:

$$C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \quad (2)$$

因此得到关于 $C_i'(x)$ 二元线性方程组:

$$\begin{cases} C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0, \\ C_1'(x)y_1'(x) + C_2'(x)y_2'(x) = f(x). \end{cases}$$

然后按小学学的求解二元一次方程组的办法 (此处不再赘述, 反正就是消元法) 求解即可, 但是这里我们用高等代数的办法, 即

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)} \begin{pmatrix} y_2'(x) & -y_2(x) \\ -y_1'(x) & y_1(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{W(x)} \begin{pmatrix} -y_2(x)f(x) \\ y_1(x)f(x) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{-y_2(x)f(x)}{W(x)} \\ C_2'(x) = \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1(x) = C_1 - \int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)} dx \\ C_2(x) = C_2 + \int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)} dx \end{cases}$$

2.2 常系数线性微分方程的解法

2.2.1 复值函数与复值解

定理 2.5 欧拉 (Euler) 公式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$
$$e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)].$$

2.2.2 常系数齐次线性微分方程

本节介绍常系数齐次线性微分方程, 形如

$$L[x] \equiv \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = 0,$$

的基本解组的解法: **Euler 待定指数函数法**.

定理 2.6

若使 $L[x]$ 的解为 $x = e^{\lambda t}$ 的充要条件是 λ 为**特征方程 (characteristic equation)**

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

的根, 称之为**特征根 (eigenvalue)**.

案例 2.1 特征根是单根

1. 实根:

解特征方程得到 n 个不相等的实数根分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则相应得到 $L[x]$ 有 n 个解分别为 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$ 且都线性无关. 于是得到通解为

$$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}.$$

2. 复根:

复根将共轭地出现, 即若 $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ 是其中一个特征根, 那么一定有它的共轭 $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ 也是其中一个特征根. 由欧拉公式可知, 一对共轭复根 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ 得到方程的两个实值解分别为 $e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ 和 $e^{\alpha t} \sin(\beta t)$.

例 2.2

解常系数齐次线性微分方程 $x'''(t) + x(t) = 0$.

Solution. 特征方程: $\lambda^3 + 1 = 0$, 解得 $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$. 因此通解为

$$x(t) = C_1 e^{-t} + e^{\frac{1}{2}t} \left[C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) \right]$$

案例 2.2 特征根是重根

1. 实根:

若特征方程的根 λ 有 k 重, 则方程有 k 个解, 分别为 $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2e^{\lambda t}, \dots, t^{k-1}e^{\lambda t}$. 于是得到通解为

$$x(t) = (C_1 + C_2t + C_3t^2 + \dots + C_k t^{k-1})e^{\lambda t}.$$

2. 复根:

若 $\lambda = \alpha \pm i\beta$ 是 k 重特征根 (即有 k 对共轭复根), 同实根处理办法, 得到方程的 $2k$ 个实值解分别为

$$\begin{aligned} &e^{\alpha t} \cos(\beta t), te^{\alpha t} \cos(\beta t), t^2e^{\alpha t} \cos(\beta t), \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \cos(\beta t), \\ &e^{\alpha t} \sin(\beta t), te^{\alpha t} \sin(\beta t), t^2e^{\alpha t} \sin(\beta t), \dots, t^{k-1}e^{\alpha t} \sin(\beta t). \end{aligned}$$

2.2.3 欧拉方程

本节接上一节介绍欧拉方程, 形如

$$t^n \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 t^{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} t \frac{dx}{dt} + a_n x = 0,$$

的基本解组的解法: 利用**变量代换**转换为 $L[x]$ 的形状.

本节只介绍齐次欧拉方程的解法.

齐次欧拉方程的解, 形如 $x(t) = t^K$, 因此求其 n 阶导数后, 得到欧拉方程的特征方程为

$$K(K-1)\dots(K-n+1) + a_1 K(K-1)\dots(K-n+2) + \dots + a_{n-1} K + a_n = 0.$$

与此前不同的是, 需使 $t' = \log |t|$, 即

| | | | |
|---------|--|---------|---|
| 单实根 | $e^{\lambda t} \Rightarrow t^K$ | 单复根 | $e^{\alpha t} \cos(\beta t) \Rightarrow x^\alpha \cos(\beta \log x)$ |
| m 重实根 | $t^{m-1} e^{\lambda t} \Rightarrow t^K (\log x)^{m-1}$ | m 重复根 | $t^{m-1} e^{\alpha t} \cos(\beta t) \Rightarrow x^\alpha (\log x)^{m-1} \cos(\beta \log x)$ |

3 n 阶线性微分方程组

3.1 一般理论

定义 3.1 n 阶线性微分方程组

考虑标准形式的 n 阶线性微分方程组

$$\frac{dy^i}{dx} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(x)y^j + f_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

其中, $a_{ij}, f_i \in C[a, b]$.

把上面的线性微分方程组写成矩阵和向量的形式, 即

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{f}(x).$$

当 $\mathbf{f}(x)$ 不恒为 0 时, 称该方程为非齐次的线性微分方程组; 当 $\mathbf{f}(x) \equiv 0$ 时, 即

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{f}(x),$$

称它是 (相应) 齐次的线性微分方程组.

n 阶线性微分方程组与一阶线性微分方程不仅在形式上相似, 而且在理论上相似.

3.2 常系数线性微分方程组

所谓常系数线性微分方程组, 指的是线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{f}(x) \quad (1)$$

中的系数矩阵 \mathbf{A} 为 n 阶常数矩阵, 而 $\mathbf{f}(x)$ 是在 $a < x < b$ 上连续的向量函数. 我们很清楚地知道, 求解线性微分方程组 (1) 的关键是求出相应齐次线性微分方程组

$$\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y} \quad (2)$$

的一个基解矩阵.

3.2.1 常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵

定理 3.1

矩阵指数函数 $\Phi(x) = e^{\mathbf{A}x}$ 是常系数齐次线性微分方程组 $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}\mathbf{y}$ 的一个标准基解矩阵.

基解矩阵 $\Phi(x)$ 满足 $\Phi(0) = \mathbf{I}$.

Proof. 在自变量 x 的任意有限区间上, 矩阵指数函数

$$\Phi(x) = e^{Ax} = I + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{x^k}{k!}A^k + \cdots$$

是一致收敛的, 可以逐项微分得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\Phi(x) &= \frac{d}{dx}e^{Ax} = A + xA^2 + \frac{x^2}{2!}A^3 + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^k + \cdots \\ &= A \left(I + xA + \frac{x^2}{2!}A^2 + \cdots + \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}A^{k-1} + \cdots \right) \\ &= Ae^{Ax} = A\Phi(x). \end{aligned}$$

定理 3.2 常数变易法

n 阶非齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dx} = Ay(x) + f(x)$ 的解为

$$y(x) = \underbrace{C \cdot e^{Ax}}_{\text{齐次通解}} + \underbrace{e^{Ax} \cdot \int e^{-Ax} f(x) dx}_{\text{非齐次特解}}.$$

对比: 一阶非齐次线性微分方程 $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$ 的解为

$$y(x) = \underbrace{C \cdot e^{\int P(x) dx}}_{\text{齐次通解}} + \underbrace{e^{\int P(x) dx} \cdot \int Q(x) e^{-\int P(x) dx} dx}_{\text{非齐次特解}}.$$

Proof. 根据定理 3.1, 易知 n 阶常系数齐次线性微分方程组 $\frac{dy}{dx} = Ay$ 的基解矩阵为 $\Phi(x) = e^{Ax}$. 然后进行常数变易, 即令 $y = C(x)e^{Ax}$, 将其与原方程联立得

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)e^{Ax} + C(x)Ae^{Ax} = AC(x)e^{Ax} + f(x),$$

即

$$C'(x)e^{Ax} = f(x).$$

求解 $C(x)$ 得

$$C(x) = \int e^{-Ax} f(x) dx + C.$$

因此得到方程的解为

$$y(x) = C \cdot e^{Ax} + e^{Ax} \cdot \int e^{-Ax} f(x) dx.$$

3.2.2 利用若尔当 (Jordan) 标准型求基解矩阵

现在我们要进一步解决的问题是, 求解这种用矩阵无穷级数定义的指数函数 e^{Ax} . 对任意 n 阶矩阵 A , 存在 n 阶非奇异矩阵 P , 使得

$$A = PJP^{-1},$$

其中 $J = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$, 其中 $J_i = \lambda_i I + Z_i$ 为一个 n_i 阶的若当块. 因此

$$\Phi(x) = e^{Ax} = e^{PJP^{-1}x} = Pe^{Jx}P^{-1} = P\text{diag}(e^{J_1x}, \dots, e^{J_mx})P^{-1}.$$

怎么求 J 和 P .

1. 计算矩阵 A 的特征值, 即求解行列式方程 $|\lambda I - A| = 0$, 得到 $\lambda_i, i = 1, \dots, n$. 满秩矩阵的特征值个数等于 A 的阶数.
2. 如果特征值没有重根, 则 $J = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.
3. 根据特征值求出特征向量, 即求解矩阵方程 $(\lambda_i I - A)u_i = 0$, 得到 $u_i, i = 1, \dots, n$.
4. 根据特征向量得到 $P = (u_1, \dots, u_n)$.

例 3.1

求解微分方程组 $\frac{dy}{dx} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} y$.

Solution. 首先求特征值:

$$|\lambda I - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

解得:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = 1 \pm i.$$

因此,

$$J = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda = 1 + i$ 时,

$$(\lambda I - A)u = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iu_1 - u_2 \\ u_1 + iu_2 \end{pmatrix} = 0$$

求解得到:

$$\begin{cases} iu_1 = u_2 \\ u_1 = -iu_2 \end{cases}$$

不难发现, 两个解实际上是等价的, 因此可以取特征向量 $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

当 $\lambda = 1 - i$ 时,

$$(\lambda \mathbf{I} - A)\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -i & -1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -iu_1 - u_2 \\ u_1 + -iu_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

求解得到:

$$\begin{cases} iu_1 = -u_2 \\ u_1 = iu_2 \end{cases}$$

不难发现, 两个解和上面的情况是一样的, 即是等价的, 因此可以取特征向量 $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$.

因此,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

于是,

$$\begin{aligned} e^{Ax} &= \mathbf{P}e^{Jx}\mathbf{P}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+i)x} & 0 \\ 0 & e^{(1-i)x} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^x}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & e^{-ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^x}{2} \begin{pmatrix} e^{ix} & ie^{-ix} \\ ie^{ix} & e^{-ix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^x}{2} \begin{pmatrix} e^{ix} + e^{-ix} & -ie^{ix} + ie^{-ix} \\ ie^{ix} - ie^{-ix} & e^{ix} + e^{-ix} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

根据欧拉公式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ 和 $e^{-ix} = \cos x - i \sin x$, 将两式分别相加和相减得:

$$\begin{cases} e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x, \\ e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x. \end{cases}$$

因此, 化简 e^{Ax} 得

$$e^{Ax} = \frac{e^x}{2} \begin{pmatrix} e^{ix} + e^{-ix} & -ie^{ix} + ie^{-ix} \\ ie^{ix} - ie^{-ix} & e^{ix} + e^{-ix} \end{pmatrix} = \frac{e^x}{2} \begin{pmatrix} 2 \cos x & -i(2i \sin x) \\ i(2i \sin x) & 2 \cos x \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

故, 得到解为

$$\mathbf{y} = C_1 e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

显然, 这样是相对比较麻烦的常规推理, 因此给出如下推论.

推论 3.1

若常系数齐次线性微分方程组有一对共轭的复数特征根 $\lambda = \alpha \pm i\beta$, 且其对应的特征向量可以分别写成 $\mathbf{u} = \mathbf{a} \pm i\mathbf{b}$ 的形式, 那么这两个共轭特征根对应的实值解为

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(x) &= e^{\alpha x} \cos(\beta x) \mathbf{a} - e^{\alpha x} \sin(\beta x) \mathbf{b}, & \mathbf{y}_1(x) &= e^{\alpha x} [\cos(\beta x) \mathbf{a} - \sin(\beta x) \mathbf{b}], \\ \mathbf{y}_2(x) &= e^{\alpha x} \sin(\beta x) \mathbf{a} + e^{\alpha x} \cos(\beta x) \mathbf{b}. & \mathbf{y}_2(x) &= e^{\alpha x} [\sin(\beta x) \mathbf{a} + \cos(\beta x) \mathbf{b}]. \end{aligned} \iff$$

Proof. 显然, 两个解可以写作

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(x) &= e^{\lambda x} \mathbf{u} = e^{(\alpha+i\beta)x} (\mathbf{a} + i\mathbf{b}), \\ \mathbf{w}_2(x) &= e^{\bar{\lambda}x} \bar{\mathbf{u}} = e^{(\alpha-i\beta)x} (\mathbf{a} - i\mathbf{b}). \end{aligned}$$

然后通过欧拉公式改写 $\mathbf{w}_1(x)$, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1(x) &= e^{(\alpha+i\beta)x} (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \\ &= e^{\alpha x} [\cos(\beta x) + i \sin(\beta x)] (\mathbf{a} + i\mathbf{b}) \\ &= e^{\alpha x} [\cos(\beta x) \mathbf{a} + i \sin(\beta x) \mathbf{a} + \cos(\beta x) i\mathbf{b} + i \sin(\beta x) i\mathbf{b}] \\ &= e^{\alpha x} \{ [\cos(\beta x) \mathbf{a} - \sin(\beta x) \mathbf{b}] + i [\sin(\beta x) \mathbf{a} + \cos(\beta x) \mathbf{b}] \}. \end{aligned}$$

因此, 可以将 $\mathbf{w}_1(x)$ 写成 $\mathbf{w}_1(x) = \mathbf{y}_1(x) + i\mathbf{y}_2(x)$ 的形式, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_1(x) &:= e^{\alpha x} [\cos(\beta x) \mathbf{a} - \sin(\beta x) \mathbf{b}], \\ \mathbf{y}_2(x) &:= e^{\alpha x} [\sin(\beta x) \mathbf{a} + \cos(\beta x) \mathbf{b}]. \end{aligned}$$

共轭不再考虑, 因为它们之间仅是虚部互为相反数的关系, 在添加系数 C 时, 可以弥补这个区别.

那么我们重新做例3.1.

Solution. 首先求特征值:

$$|\lambda \mathbf{I} - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

解得:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = 1 \pm i.$$

(跳过中间求 J 的步骤, 不用求了)

当 $\lambda = 1 + i$ 时,

$$(\lambda \mathbf{I} - A) \mathbf{u} = \begin{pmatrix} i & -1 \\ 1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iu_1 - u_2 \\ u_1 + iu_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

求解得到:

$$\begin{cases} iu_1 = u_2 \\ u_1 = -iu_2 \end{cases}$$

不难发现, 两个解实际上是等价的, 因此可以取特征向量 $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(跳过中间求共轭特征根的特征向量的步骤, 不用求了, 直接使用推论3.1)

此时, $\alpha = 1, \beta = 1, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 代入公式:

$$\mathbf{y}_1(x) = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) \mathbf{a} - \sin(\beta x) \mathbf{b}] = e^x \left[\cos x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{y}_2(x) = e^{\alpha x} [\sin(\beta x) \mathbf{a} + \cos(\beta x) \mathbf{b}] = e^x \left[\sin x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = e^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

因此, 得到解为

$$\mathbf{y} = C_1 e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

3.3 非齐次线性微分方程组的常数变易法

定义 3.2 基解矩阵 (fundamental matrix)

若齐次线性微分方程组 $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)$ 的基本解组为 $\mathbf{y}_1(x), \dots, \mathbf{y}_n(x)$, 其基解矩阵为

$$\mathbf{Y}(x) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(x) & \cdots & \mathbf{y}_n(x) \end{pmatrix}.$$

引理 3.1 特解形式

非齐次线性微分方程组 $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{f}(x)$ 的特解取决于其非齐次项 $\mathbf{f}(x)$ 的形式.

比如:

- 若 $\mathbf{f}(x)$ 是关于 x 的线性向量, 即 $\mathbf{f}(x) = x\mathbf{a} + \mathbf{b}$, 则特解形式应为 $\mathbf{y}_p(x) = x\mathbf{a} + \mathbf{b}$.
- 若 $\mathbf{f}(x)$ 包含 $x, \sin x$ 的列向量, 则特解形式应为 $\mathbf{y}_p(x) = x\mathbf{a} + \mathbf{b} + (\sin x)\mathbf{c} + (\cos x)\mathbf{d}$.
- 若 $\mathbf{f}(x)$ 包含 x, x^2, e^x 的列向量, 则特解形式应为 $\mathbf{y}_p(x) = x^2\mathbf{a} + x\mathbf{b} + \mathbf{c} + e^x\mathbf{d}$.
- ...
- 更复杂的情况我们暂不考虑.

定理 3.3 常数变易法

若齐次线性微分方程组 $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)$ 的基解矩阵为 $\mathbf{Y}(x)$, 则其对应的非齐次线性微分方程组 $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x) + \mathbf{f}(x)$ 的解为

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c} + \mathbf{Y}(x) \int \mathbf{Y}^{-1}(x)\mathbf{f}(x) dx,$$

其中, \mathbf{c} 是 $n \times 1$ 的常向量, 注意这里是右乘在基解矩阵 $(n \times n)$ 上.

Proof. 易知齐次线性微分方程组 $\frac{d\mathbf{y}}{dx} = \mathbf{A}(x)\mathbf{y}(x)$ 的通解为 $\mathbf{Y}(x)\mathbf{c}$, 即满足

$$\mathbf{Y}'(x)\mathbf{c} = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x)\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{Y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x).$$

同之前的常数变易法思路一致, 即特解形式为

$$\mathbf{y}_p = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}(x).$$

那么与非齐次线性微分方程组进行联立得

$$\mathbf{Y}'(x)\mathbf{c}(x) + \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x)\mathbf{c}(x) + \mathbf{f}(x).$$

刚才我们提到 $\mathbf{Y}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x)$, 因此有

$$\mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x)\mathbf{c}(x) + \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{A}(x)\mathbf{Y}(x)\mathbf{c}(x) + \mathbf{f}(x) \Rightarrow \mathbf{Y}(x)\mathbf{c}'(x) = \mathbf{f}(x).$$

那么, 显然

$$\mathbf{c}'(x) = \int \mathbf{Y}^{-1}(x)\mathbf{f}(x) dx.$$

因此方程的解为

$$\mathbf{y}(x) = \mathbf{Y}(x)\mathbf{c} + \mathbf{Y}(x) \int \mathbf{Y}^{-1}(x)\mathbf{f}(x) dx.$$

4 拉普拉斯变换

4.1 一般理论

定义 4.1 拉普拉斯变换 (Laplace transform)

若 $f(x)$ 为定义在 $[0, \infty)$ 的函数, 则 f 的拉普拉斯变换 F 为

$$F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

函数 f 的拉普拉斯变换可以用 F 表示, 也可以用 $\mathcal{L}\{f\}$ 表示.

显然, 拉普拉斯变换涉及到很复杂的积分运算, 因此可以参照拉普拉斯变换表.

| $f(t)$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ | $f(t)$ | $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$ |
|-------------------------------|-----------------------------------|------------------|--|
| 1 | $\frac{1}{s}, s > 0$ | $\sin(bt)$ | $\frac{b}{s^2 + b^2}, s > 0$ |
| e^{at} | $\frac{1}{s - a}, s > a$ | $\cos(bt)$ | $\frac{s}{s^2 + b^2}, s > 0$ |
| $t^n, n = 1, 2, \dots$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}, s > 0$ | $e^{at} \sin bt$ | $\frac{b}{(s - a)^2 + b^2}, s > a$ |
| $t^n e^{at}, n = 1, 2, \dots$ | $\frac{n!}{(s - a)^{n+1}}, s > a$ | $e^{at} \cos bt$ | $\frac{s - a}{(s - a)^2 + b^2}, s > a$ |

定义 4.2 α 阶指数

若存在常数 $T > 0, M > 0$, 使得

$$|f(t)| \leq M e^{\alpha t}, \forall t \geq T,$$

则称函数 $f(x)$ 为 α 阶指数.

比如, $f(t) = e^{2t} \sin(3t)$ 是 $\alpha = 2$ 阶指数, 因为 $|e^{2t} \sin(3t)| \leq e^{2t}$, 其中 $M = 1, T$ 是任意正数.

定理 4.1 拉普拉斯变换存在条件

如果 $f(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上分段连续且为 α 阶指数, 则当 $s > \alpha$ 时, $\mathcal{L}\{f\}(s)$ 存在.

定理 4.2 拉普拉斯变换的性质

对于拉普拉斯变换 $\mathcal{L}\{f\}(s) = F(s)$, 存在 $s > \alpha$, 则有如下性质:

1. 线性性质:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f_1 + f_2\} &= \mathcal{L}\{f_1\} + \mathcal{L}\{f_2\}, \\ \mathcal{L}\{cf\} &= c\mathcal{L}\{f\}.\end{aligned}$$

2. 平移:

$$\mathcal{L}\{e^{at}f(t)\}(s) = F(s-a).$$

3. 导数的拉普拉斯变换:

$$\mathcal{L}\{f'\}(s) = s\mathcal{L}\{f\}(s) - f(0) = sF(s) - f(0).$$

高阶导数进行嵌套即可, 即

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}\}(s) = s^n \mathcal{L}\{f\}(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0).$$

4. 拉普拉斯变换的导数:

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s).$$

定义 4.3 逆拉普拉斯变换

给定函数 $F(s)$, 若函数 $f(t) \in C[0, \infty)$, 并且满足 $\mathcal{L}\{f\} = F$, 则称 $f(t)$ 是 $F(s)$ 的逆拉普拉斯变换, 记为

$$f = \mathcal{L}^{-1}\{F\}.$$

逆拉普拉斯变换同样具备线性性质.

4.2 求解初值问题

例 4.1

解初值问题

$$y'' + 4y' - 5y = te^t; \quad y(0) = 1, y'(0) = 0.$$

Solution. 令 $Y(s) := \mathcal{L}\{y\}(s)$, 方程两侧同时进行拉普拉斯变换,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\}(s) + 4\mathcal{L}\{y'\}(s) - 5\mathcal{L}\{y\}(s) &= \mathcal{L}\{te^t\}(s) \\ \mathcal{L}\{y''\}(s) + 4\mathcal{L}\{y'\}(s) - 5Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2}.\end{aligned}$$

使用导数的拉普拉斯性质:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y'\}(s) &= s\mathcal{L}\{y\}(s) - y(0) = sY(s) - 1, \\ \mathcal{L}\{y''\}(s) &= s\mathcal{L}\{y'\}(s) - y'(0) \\ &= s[s\mathcal{L}\{y\}(s) - y(0)] - y'(0) \\ &= s^2\mathcal{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s.\end{aligned}$$

因此, 代入回去得

$$\begin{aligned}[s^2Y(s) - s] + 4[sY(s) - 1] - 5Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2} \\ (s^2 + 4s - 5)Y(s) &= s + 4 + \frac{1}{(s-1)^2} \\ (s+5)(s-1)Y(s) &= \frac{(s+4)(s-1)^2 + 1}{(s-1)^2} \\ Y(s) &= \frac{s^3 + 2s^2 - 7s + 5}{(s+5)(s-1)^3}.\end{aligned}$$

对 $Y(s)$ 进行分式展开:

$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 - 7s + 5}{(s+5)(s-1)^3} = \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3}.$$

然后再合并分别计算出 A, B, C, D , 此处略. 最后找到求逆变换:

$$\begin{aligned}y(s) &= A\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\} + B\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + C\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} + D\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\} \\ &= Ae^{-5t} + Be^t + Cte^t + D\frac{t^2e^t}{2}.\end{aligned}$$

4.3 非连续函数的拉普拉斯变换

定义 4.4 矩形窗函数 (rectangular window function)

定义矩形窗函数 (rectangular window function) $\Pi_{a,b}(t)$ 为

$$\Pi_{a,b}(t) := u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 1, & a < t < b, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

其中, $u(\cdot)$ 为单位阶跃函数 (unit step function), 定义为 $u(t) := \begin{cases} 1, & t > 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$

例 4.2

将函数 $f(t) = \begin{cases} 3, & t < 2, \\ 1, & 2 < t < 5, \\ t, & 5 < t < 8, \\ \frac{t^2}{10}, & t > 8. \end{cases}$ 写成矩形窗函数的形式为

$$f(t) = 3\Pi_{0,2}(t) + \Pi_{2,5}(t) + t\Pi_{5,8}(t) + \frac{t^2}{10}u(t-8).$$

定理 4.3 关于单位阶跃函数的拉普拉斯变换

记 $F(s) := \mathcal{L}\{f\}(s)$, $s > \alpha \geq 0$. 若常数 $a > 0$, 则

- 单位阶跃函数的拉普拉斯变换:

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

- 推广:

$$\mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s).$$

因此, 其逆拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(s) = f(t-a)u(t-a).$$

Proof. 单位阶跃函数的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{u(t-a)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}u(t-a) \, dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st} \, dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{s}e^{-st} \right]_a^M = \frac{e^{-as}}{s}. \end{aligned}$$

推广:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}f(t-a)u(t-a) \, dt \\ &= \int_a^{\infty} e^{-st}f(t-a) \, dt \\ &\stackrel{r=t-a}{=} \int_0^{\infty} e^{-s(r+a)}f(r) \, dr \\ &= e^{-as} \int_0^{\infty} e^{-sr}f(r) \, dr = e^{-as}F(s). \end{aligned}$$

因此,

$$\mathcal{L}\{f(t)u(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathcal{L}\{f(t+a)\}(s).$$

4.4 周期函数与幂函数的拉普拉斯变换

定义 4.5 周期函数 (periodic function)

若函数 $f(t)$ 满足

$$f(t+T) = f(t), \quad \forall t,$$

则称为 $f(t)$ 周期函数 (periodic function).

定理 4.4 周期函数的拉普拉斯变换

若函数 f 的周期为 T 并且在 $[0, T]$ 上是分段连续的, 则它的拉普拉斯变换为

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad \text{以及} \quad F_T(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_T(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt,$$

二者之间的关系为

$$F_T(s) = F(s) (1 - e^{-sT}) \quad \text{或者} \quad F(s) = \frac{F_T(s)}{1 - e^{-sT}}.$$

一般用矩形窗函数来表达周期函数, 即

$$f_T(t) := f(t)\Pi_{0,T}(t) = f(t)[u(t) - u(t-T)] = \begin{cases} f(t), & 0 < t < T, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

则它的拉普拉斯变换为

$$F_T(s) = \int_0^\infty e^{-st} f_T(t) dt = \int_0^T e^{-st} f(t) dt.$$

Proof. 由于

$$f_T(t) = f(t)[u(t) - u(t-T)] = f(t)u(t) - f(t)u(t-T) = f(t)u(t) - f(t-T)u(t-T).$$

根据定理4.3, 等号两边同时进行拉普拉斯变换得

$$F_T(s) = F(s) - e^{-sT}F(s) = F(s)(1 - e^{-sT}).$$

定义 4.6 Gamma 函数

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt, \quad x > 0.$$

性质 4.1 Gamma 函数

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- 若 n 为正整数, 则 $\Gamma(n) = (n-1)!$.

定理 4.5 幂函数的拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}\{t^\alpha\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \forall \alpha > -1.$$

Proof.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{t^\alpha\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha dt \\ &\stackrel{u=st}{=} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha \frac{1}{s} du \\ &= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} u^\alpha du = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.\end{aligned}$$

4.5 卷积

定义 4.7 卷积 (convolution)

若函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上间断连续, 则 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的**卷积 (convolution)** 为

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau.$$

性质 4.2 卷积

1. 交换律: $f * g = g * f$.
2. 结合律: $f * (g * h) = (f * g) * h$
3. 分配律: $f * (g + h) = f * g + f * h$.

定理 4.6 卷积的拉普拉斯变换

若函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $[0, \infty)$ 上间断连续, 且为 α 阶指数, 令 $F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$, $G(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)$, 则

$$\mathcal{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s).$$

其逆拉普拉斯变换为

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f * g)(t).$$

Proof. 将卷积函数进行拉普拉斯变换得

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}\{f * g\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} (f * g)(t) dt \\
 &= \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau) d\tau \right] dt \\
 &\stackrel{\text{更改积分次序}}{=} \int_0^\infty g(\tau) \left[\int_\tau^\infty e^{-st} f(t-\tau) dt \right] d\tau \\
 &\stackrel{u=t-\tau}{=} \int_0^\infty g(\tau) \left[\int_\tau^\infty e^{-s(u+\tau)} f(u) du \right] d\tau \\
 &= \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) \left[\int_\tau^\infty e^{-su} f(u) du \right] d\tau \\
 &= F(s) \int_0^\infty e^{-s\tau} g(\tau) d\tau \\
 &= F(s)G(s).
 \end{aligned}$$

例 4.3

解积分微分方程

$$y'(t) = 1 - \int_0^t y(t-\tau)e^{-2\tau} d\tau, \quad y(0) = 1.$$

Solution. 写成卷积的形式为

$$y'(t) = 1 - y(t) * e^{-2t}.$$

令 $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, 将上式两侧同时取拉普拉斯变换得

$$\begin{aligned}
 sY(s) - 1 &= \frac{1}{s} - Y(s) \times \frac{1}{s+2} \\
 \left(s + \frac{1}{s+2}\right) Y(s) &= 1 + \frac{1}{s} \\
 \frac{s^2 + 2s + 1}{s+2} Y(s) &= \frac{1+s}{s} \\
 Y(s) &= \frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}
 \end{aligned}$$

因此

$$y(s) = 2 - e^{-t}.$$

定义 4.8 传递函数 (transfer function) 与脉冲响应函数 (impulse response function)

一个常系数非齐次线性微分方程且所有初值为 0 的问题, 以二阶微分方程为例, 即

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t); \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

将微分方程的解 $y(t)$ 和非齐次项 $g(t)$ 的拉普拉斯变换的比值称为**传递函数** (transfer

function), 即

$$H(s) := \frac{\mathcal{L}\{y\}(s)}{\mathcal{L}\{g\}(s)} = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{1}{as^2 + bs + c}.$$

传递函数的逆拉普拉斯变换称为**脉冲响应函数 (impulse response function)**, 即

$$h(t) := \mathcal{L}^{-1}\{H\}(t).$$

定理 4.7 用脉冲响应函数求解微分方程

二阶常系数非齐次线性微分方程的初值问题

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t); \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_1,$$

的解为

$$y(t) = (h * g)(t) + y_k(t) = \int_0^t h(t - \tau)g(\tau) \, d\tau + y_k(t),$$

其中, $y_k(t)$ 是齐次方程的通解.

Proof. 令 $Y(s) = \mathcal{L}\{y\}(s)$, $G(s) = \mathcal{L}\{g\}(s)$, 将微分方程两侧同时取拉普拉斯变换得

$$a[s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] + b[sY(s) - y(0)] + cY(s) = G(s)$$

$$as^2Y(s) - ay_0s - ay_1 + bsY(s) - by_0 + cY(s) = G(s)$$

$$(as^2 + bs + c)Y(s) = G(s) + ay_0s + ay_1 + by_0$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{G(s)}{as^2 + bs + c} + \frac{ay_0s + ay_1 + by_0}{as^2 + bs + c} \\ &= H(s)G(s) + \frac{ay_0s + ay_1 + by_0}{as^2 + bs + c}, \end{aligned}$$

其中 $\frac{ay_0s + ay_1 + by_0}{as^2 + bs + c}$ 与 $g(t)$ 无关, 即齐次方程的通解, 令其逆拉普拉斯变换为 $y_k(t)$. 因此

$$y(t) = (h * g)(t) + y_k(t).$$

显然, 这个齐次方程通解如果通过逆拉普拉斯变换得到是麻烦的, 因此, 我们直接采用最基本的办法.

例 4.4

求解线性微分方程

$$y'' + 2y' + 5y = g(t); \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -2.$$

Solution. 该方程的齐次形式为 $y'' + 2y' + 5y = 0$, 为常系数齐次线性微分方程, 因此可以直接使用特征方程求解, 即

$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda = -1 \pm 2i.$$

于是, 通过欧拉公式得到基解

$$e^{(-1+2i)t} = e^{-t}[\cos(2t) + i \sin(2t)].$$

因此, 齐次通解为

$$y_k(t) = C_1 e^{-t} \cos(2t) + C_2 e^{-t} \sin(2t),$$

其一阶导数为

$$y'_k(t) = C_1 e^{-t}(-1 - 2 \sin(2t)) + C_2 e^{-t}(-1 + 2 \cos(2t)).$$

将初值代入得

$$\begin{cases} y_k(0) = C_1 = 2, \\ y'_k(0) = C_1(-1) + C_2(-1 + 2) = -2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

故, 齐次通解为

$$y_k(t) = 2e^{-t} \cos(2t).$$

下一步, 通过计算传递函数和脉冲响应函数来计算非齐次特解部分.

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \xrightarrow{\text{逆拉普拉斯变换}} h(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \sin(2t).$$

故, 原方程的解为

$$y(t) = (h * g)(t) + y_k(t) = \frac{1}{2} \int_0^t e^{-(t-\tau)} \sin[2(t-\tau)] g(\tau) d\tau + 2e^{-t} \cos(2t).$$

4.6 狄拉克 δ 函数

定义 4.9 狄拉克 (Dirac) δ 函数

Dirac 函数 $\delta(t)$ 具有以下两个特征:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad \text{以及} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0),$$

其中, $f(t)$ 是一个在含 $t = 0$ 的开区间上的连续函数.

性质 4.3 Dirac 函数

1. 平移 Dirac 函数:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t-a) dt = f(a).$$

2. Dirac 函数的累积:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1.$$

定理 4.8 Dirac 函数的拉普拉斯变换

$$\mathcal{L}\{\delta(t-a)\}(s) = e^{-as}, \quad \text{where } a \geq 0.$$

用性质4.3和定义4.9即可证明.

5 微分方程的级数解

本章的根基为 Taylor 展开公式.

定义 5.1 泰勒展开 (Taylor expansion)

Taylor 多项式 (polynomial) 以 x_0 为中心进行展开, 用于逼近在 x_0 处具有 n 阶导数的函数 $f(x)$, 表示为:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} (x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n + \cdots \end{aligned}$$

令 $p_n(x) := \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k$, 对应的**余项 (remainder)** $\epsilon_n(x) := f(x) - p_n(x)$, 用来度量 Taylor 展开的准确性, 即

$$\epsilon_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}.$$

5.1 幂级数与解析函数

定义 5.2 幂级数 (power series)

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = a_0 + a_1 (x - x_0) + a_2 (x - x_0)^2 + \cdots,$$

称为关于点 x_0 的**幂级数 (power series)**.

- **收敛 (converge):**

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N a_n (c - x_0)^n < \infty.$$

- **发散 (diverge):** 极限不存在.

- **绝对收敛 (converge absolutely):** $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n|$ 收敛.

定义 5.3 收敛半径 (radius of convergence)

若存在一个常数 $\rho \in [0, \infty]$, 使得幂级数在 $|x - x_0| < \rho$, 即 $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$ 上**绝对收敛**, 在 $|x - x_0| > \rho$ 上**发散**, 则称 ρ 为这个幂级数的**收敛半径 (radius of convergence)**.

- 若幂级数处处收敛, 则收敛半径 $\rho = \infty$.
- 若幂级数仅在 x_0 处收敛, 则收敛半径 $\rho = 0$.

定理 5.1 比值审敛法 (ratio test)

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, 若

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = L \in [0, \infty],$$

则其收敛半径 $\rho = L$. 这种方法又被称为达朗贝尔判别法 (D'Alembert's test).

特别地, 我们这里给出几何级数 (geometric series) 的 Taylor 展开:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad \text{for } x \in (-1, 1). \quad (*)$$

定理 5.2 幂级数的微分与积分

如果级数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径 $\rho > 0$, 且 f 在区间 $|x-x_0| < \rho$ 可导, 那么逐项微分给出 f 导数的幂级数为:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}, \quad \text{for } |x-x_0| < \rho.$$

此外, 逐项积分给出 f 积分的幂级数为:

$$\int f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} (x-x_0)^{n+1}, \quad \text{for } |x-x_0| < \rho.$$

例 5.1

根据几何级数 (*) 推导下列方程的幂级数.

(1) $\frac{1}{1+x^2}.$

(2) $\frac{1}{(1-x)^2}.$

(3) $\arctan x.$

Solution.

(1) 将 (*) 中的 x 替换为 $-x^2$ 即可, 即

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-(-x^2)} &= \sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n \\ \frac{1}{1+x^2} &= 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots \end{aligned}$$

(2) 不难发现, $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{1-x} \right) = \frac{1}{(1-x)^2}$, 因此有

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{d}{dx} (1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots) \\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n-1)x^n + \cdots \end{aligned}$$

(3) 依旧不难发现, $\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan x$, 因此有

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt &= \int_0^x (1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots) dt \\ \arctan x &= x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots.\end{aligned}$$

定义 5.4 解析函数 (analytic function)

若在以 x_0 为中心的开区间内, 函数 $f(x)$ 是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的和, 且该级数具有正的收敛半径, 则称函数 $f(x)$ 在 x_0 处是解析的 (analytic).

5.2 线性微分方程的幂级数解

定义 5.5 常点 (ordinary point) 与奇点 (singular point)

一个二阶齐次线性微分方程

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

若函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都在 x_0 处是解析的, 则称 x_0 为该微分方程的常点 (ordinary point), 否则为该微分方程的奇点 (singular point).

例 5.2 找出奇点

$$xy'' + x(1-x)^{-1}y' + y \sin x = 0.$$

Solution. 我们定义的二阶齐次线性微分方程的二阶导数系数为 1, 因此可以确定

$$p(x) = \frac{x(1-x)^{-1}}{x} = \frac{1}{1-x}, \quad q(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

- $p(x)$ 在 $x=1$ 没有定义, 因此可以认为除了 $x=1$ 外都是解析的.
- $q(x)$ 从表面上看在 $x=0$ 没有定义, 但是将 $\sin x$ 进行 Taylor 展开得

$$q(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots.$$

因此 $q(x)$ 处处可解析.

综上所述, 惟一的奇点为 $x=1$.

例 5.3 用幂级数解微分方程

$$(1+x^2)y'' - y' + y = 0.$$

Solution. 由于 $p(x) = -\frac{1}{1+x^2}$ 和 $q(x) = \frac{1}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 都是可解析的, 则 $x=0$ 是该微分方程的一个常点. 因此, 可以通过在 $x=0$ 处的幂级数展开表示通解, 即设

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

将此展开式代入微分方程中得到

$$\begin{aligned} (1+x^2) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \\ \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n &= 0 \end{aligned}$$

为了能将上式各项进行合并, 我们**不优先**选择统一求和范围, 而是**优先**将幂级数统一, 即全部转换成 x^k , 那么就需要进行变量代换, 同时考虑求和范围, 即

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k}_{k:=n-2} + \underbrace{\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k}_{k:=n} - \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k}_{k:=n-1} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k}_{k:=n} = 0 \quad \text{for } k \geq 2.$$

这时就可以将所有的 $\sum_{k=2}^{\infty}(\cdot)$ 项全部合并, 但是 $\sum_{k=0}^{\infty}(\cdot)$ 项需要将 $k=0$ 和 $k=1$ 提取出来, 即

$$\begin{aligned} &\left(2a_2 + 6a_3x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}x^k \right) \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^k - \left(a_1 + 2a_2x + \sum_{k=2}^{\infty} (k+1)a_{k+1}x^k \right) + \left(a_0 + a_1x + \sum_{k=2}^{\infty} a_k x^k \right) = 0 \\ \Rightarrow &(2a_2 - a_1 + a_0) + (6a_3 - 2a_2 + a_1)x \\ &+ \sum_{k=2}^{\infty} \left[(k+2)(k+1)a_{k+2} - (k+1)a_{k+1} + (k(k-1) + 1)a_k \right] x^k = 0 \end{aligned}$$

上式为 0 说明各项系数为 0, 即

$$\begin{cases} 2a_2 - a_1 + a_0 = 0, \\ 6a_3 - 2a_2 + a_1 = 0, \\ (k+2)(k+1)a_{k+2} - (k+1)a_{k+1} + (k^2 - k + 1)a_k = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_2 = \frac{a_1 - a_0}{2}, \\ a_3 = \frac{2a_2 - a_1}{6} = -\frac{a_0}{6}, \\ a_{k+2} = \frac{(k+1)a_{k+1} - (k^2 - k + 1)a_k}{(k+2)(k+1)}. \end{cases}$$

于是, 当 $k=2$ 时,

$$a_4 = \frac{3a_3 - 3a_2}{12} = \frac{3 \times \frac{-a_0}{6} - 3 \times \frac{a_1 - a_0}{2}}{12} = \frac{2a_0 - 3a_1}{24}.$$

当 $k = 3$ 时,

$$a_5 = \frac{4a_4 - 7a_3}{20} = \frac{4 \times \frac{2a_0 - 3a_1}{24} - 7 \times \frac{-a_0}{6}}{20} = \frac{3a_0 - a_1}{40}.$$

当 $k = 4$ 时,

$$a_6 = \frac{5a_5 - 13a_4}{30} = \frac{5 \times \frac{3a_0 - a_1}{40} - 13 \times \frac{2a_0 - 3a_1}{24}}{30} = \frac{36a_1 - 17a_0}{720}.$$

后面的省略, 因为我们现在已经能展开到 x^6 项了, 已经相对较多了. 因此得到通解为

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1x + \left(\frac{a_1 - a_0}{2}\right)x^2 - \frac{a_0}{6}x^3 + \left(\frac{2a_0 - 3a_1}{24}\right)x^4 + \left(\frac{3a_0 - a_1}{40}\right)x^5 + \left(\frac{36a_1 - 17a_0}{720}\right)x^6 + \cdots \\ &= a_0 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{40}x^5 - \frac{17}{720}x^6 + \cdots\right) + a_1 \left(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{20}x^6 + \cdots\right), \end{aligned}$$

其中, a_0 和 a_1 为任意常数.