# Ordinary Differential Equations

# 常微分方程

Guanxu (Gleason) WANG

Special Version for

Yankun (Alfred) Chen
(University of California San Diego)

2025 年 6 月 12 日

# 目录

# 1 一阶微分方程的初等解法

## 1.1 变量分离方程与变量变换

**定义 1.1 变量分离的方程 (separable equations)**

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)\phi(y)$ 的方程, 其中 $f(x)$ 与 $\phi(y)$ 均为连续函数.

运算步骤:

1. **分离变量:** 若 $\phi(y) \neq 0$ 则上式可改写成: $\dfrac{1}{\phi(y)}\mathrm{d}y = f(x)\mathrm{d}x$.
2. **两边积分:** 得到 $\displaystyle\int \frac{1}{\phi(y)}\mathrm{d}y = \int f(x)\mathrm{d}x$. 最后化作隐式解. 若能写成显式解, 则写作 $y(x)$ 的形式, 并讨论 $\phi(y) \neq 0$ 的情况.

**例 1.1**

求解方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\dfrac{x}{y}$

***Solution.*** 显然 $y \neq 0$, 将变量分离得: $y\mathrm{d}x = -x\mathrm{d}y$. 两边积分得: $\displaystyle\int y\mathrm{d}x = -\int x\mathrm{d}y$, 即 $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + C$. 进而写成通解 $x^2 + y^2 = C$.

## 1.2 线性微分方程与常数变易法

**定义 1.2 线性微分方程**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \begin{cases} P(x)y, & \text{一阶}\textbf{齐次 (homogeneous)}\text{ 线性微分方程} \\ P(x)y + Q(x), & \text{一阶}\textbf{非齐次 (inhomogeneous)}\text{ 线性微分方程} \end{cases}$$

**定理 1.1 常数变易法 (constant variation method)**

一阶非齐次线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)$ 的解为

$$y(x) = \underbrace{C \cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次通解 (general solution)}} + \underbrace{e^{\int P(x)\mathrm{d}x} \cdot \int Q(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次特解 (particular solution)}}.$$

***Proof.*** 易知一阶齐次线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y$ 是变量分离方程, 因此得到通解:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y \xrightarrow{\text{变量分离}} \frac{1}{y}\mathrm{d}y = P(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{积分}} \int \frac{1}{y}\mathrm{d}y = \int P(x)\mathrm{d}x \xrightarrow{\text{求解}} \log|y| = \int P(x)\mathrm{d}x + \widetilde{C}$$
$$\Rightarrow y = Ce^{\int P(x)\mathrm{d}x}$$

常数变易指的是将常数变为变量 (函数), 即令 $y = C(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x}$, 将其与原方程联立得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = C'(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} + C(x)P(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} = P(x)\cdot C(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} + Q(x),$$

即

$$C'(x)e^{\int P(x)\mathrm{d}x} = Q(x).$$

求解 $C(x)$ 得

$$C(x) = \int Q(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x + C.$$

因此得到方程的解为

$$y(x) = C\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x} + e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot \int Q(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x.$$

**定义 1.3 伯努利方程**

形如 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y + Q(x)y^n$ 的方程, 其中 $n \neq 0, 1$.

运算步骤:

1. 对于 $y \neq 0$, 方程两边同时乘以 $y^{-n}$ 得, $y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = P(x)y^{1-n} + Q(x)$.
2. 变量代换, 令 $z := y^{1-n}$, 则 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (1-n)y^{-n}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.
3. 将伯努利方程代入上式,
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = (1-n)y^{-n}\big(P(x)y+Q(x)y^n\big) = (1-n)y^{1-n}P(x)+(1-n)Q(x) = (1-n)P(x)z+(1-n)Q(x).$$
4. 然后用常数变易法 (略).

# 2 高阶微分方程

## 2.1 一般理论

**定义 2.1 $n$ 阶线性微分方程**

讨论关于 $x(t)$ 的 $n$ 阶线性微分方程, 形如

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=f(t), \tag{1}$$

其中, $a_i, f\in \mathrm{C}[a,b]$. 称当 $f(t)=0$ 时, 即

$$\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n}+a_1(t)\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(t)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+a_n(t)x=0, \tag{2}$$

为**齐次**线性微分方程; 当 $f(t)\neq 0$ 时, 为**非齐次**线性微分方程.

### 2.1.1 齐次线性微分方程

**定理 2.1 叠加原理**

在齐次线性微分方程中, 若 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 是其 $k$ 个解, 则它们的线性组合

$$C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_kx_k(t)$$

也是该齐次线性微分方程的解.

**定义 2.2 朗斯基行列式 (Wronskian)**

$$W\left[x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)\right]:=W(t)=\begin{vmatrix} x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_k(t)\\ x_1'(t) & x_2'(t) & \cdots & x_k'(t)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ x_1^{(k-1)}(t) & x_2^{(k-1)}(t) & \cdots & x_k^{(k-1)}(t)\end{vmatrix}$$

**定理 2.2**

若 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 线性相关, 则 $W(t)\equiv 0$. **注意:** 这不是充要条件.

**逆反命题:**

若 $\exists t_0$, 使得 $W(t)\neq 0$, 则 $x_1(t),x_2(t),\cdots,x_k(t)$ 线性无关.

**定理 2.3 通解结构定理**

$n$ 阶齐次线性微分方程 (2) 一定有 $n$ 个线性无关的解, 且这 $n$ 个解的线性组合即为 (2) 的通解.

方程 (2) 的一组 $n$ 个线性无关解称为方程的一个**基本解组**. 特别地, 当 $W(t_0)=1$ 时, 称为**标准解组**.

### 2.1.2 齐次线性微分方程

**性质 2.1**

1. 若 $\widetilde{x}(t)$ 是 $n$ 阶非齐次线性微分方程 (1) 的解, $x(t)$ 是 $n$ 阶齐次线性微分方程 (2) 的解, 则 $\widetilde{x}(t)+x(t)$ 也是 (1) 的解.

2. 方程 (1) 的任意两个解之差必为 (2) 的解.

**定理 2.4 通解结构定理**

设 $x_1(t), x_2(t), \cdots, x_n(t)$ 为方程 (2) 的一个基本解组, $\widetilde{x}(t)$ 是为方程 (1) 的一个解, 则方程 (1) 的通解为

$$x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+\cdots+C_nx_n(t)+\widetilde{x}(t),$$

即, $x(t)=$ 齐次方程通解 + 非齐次方程特解.

**例 2.1 常数变易法**

以二阶非齐次线性微分方程为例, 即

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x).$$

***Solution.*** 设其齐次线性微分方程

$$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$$

的一组线性无关解 (基本解组) 为 $y_1(x), y_2(x)$, 则其通解可以表示为

$$y(x)=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x),$$

即同样的思路, 对于非齐次的原方程, 将常数设为函数 (不再赘述). 为了找到一个**特解**, 我们添加简化条件: 将所有含**变易常数的导数**化为零, 即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\underbrace{C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)}_{\text{化零}}+C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x),$$

因此得到第一个关于 $C_i'(x)$ 的方程:

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0. \quad (1)$$

接下来基于此求二阶导数为

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x).$$

将一阶导数和二阶导数分别代入原方程得,

$$
\begin{aligned}
f(x)=&\left[C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)+C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)\right]\\
&+a_1(x)\left[C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)\right]\\
&+a_2(x)\left[C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x)\right].
\end{aligned}
$$

将其整理得,

$$
\begin{aligned}
&C_1(x)\underbrace{\left[y_1''(x)+a_1(x)y_1'(x)+a_2(x)y_1(x)\right]}_{=0}\\
&+C_2(x)\underbrace{\left[y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+a_2(x)y_2(x)\right]}_{=0}+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x)
\end{aligned}
$$

由于 $y_1(x),y_2(x)$ 是齐次线性微分方程的基本解组, 因此代入齐次方程中为 0, 于是得到第二个关于 $C_i'(x)$ 的方程:

$$
C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x). \tag{2}
$$

因此得到关于 $C_i'(x)$ 二元线性方程组:

$$
\begin{cases}
C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0,\\
C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).
\end{cases}
$$

然后按小学学的求解二元一次方程组的办法 (此处不再赘述, 反正就是消元法) 求解即可, 但是这里我们用高等代数的办法, 即

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x)\\ C_2'(x)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}0\\ f(x)\end{pmatrix}\\
\Rightarrow\quad\begin{pmatrix} C_1'(x)\\ C_2'(x)\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x)\\ y_1'(x) & y_2'(x)\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}0\\ f(x)\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{y_1(x)y_2'(x)-y_2(x)y_1'(x)}\begin{pmatrix} y_2'(x) & -y_2(x)\\ -y_1'(x) & y_1(x)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ f(x)\end{pmatrix}\\
&=\frac{1}{W(x)}\begin{pmatrix}-y_2(x)f(x)\\ y_1(x)f(x)\end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

因此得到

$$
\begin{cases}
C_1'(x)=\dfrac{-y_2(x)f(x)}{W(x)}\\
C_2'(x)=\dfrac{y_1(x)f(x)}{W(x)}
\end{cases}
\Rightarrow
\begin{cases}
C_1(x)=C_1-\displaystyle\int\frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\mathrm{d}x\\
C_2(x)=C_1+\displaystyle\int\frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\mathrm{d}x
\end{cases}
$$

## 2.2 常系数线性微分方程的解法

### 2.2.1 复值函数与复值解

**定理 2.5 欧拉 (Euler) 公式**

$$e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x.$$

$$e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x} = e^{\alpha x}\big[\cos(\beta x) + \mathrm{i}\sin(\beta x)\big].$$

### 2.2.2 常系数齐次线性微分方程

本节介绍常系数齐次线性微分方程, 形如

$$L[x] \equiv \frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n x = 0,$$

的基本解组的解法: **Euler 待定指数函数法**.

**定理 2.6**

若使 $L[x]$ 的解为 $x = e^{\lambda t}$ 的充要条件是 $\lambda$ 为**特征方程 (characteristic equation)**

$$F(\lambda) \equiv \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0,$$

的根, 称之为**特征根 (eigenvalue)**.

**案例 2.1 特征根是单根**

1. **实根:**
   解特征方程得到 $n$ 个不相等的实数根分别为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, 则相应得到 $L[x]$ 有 $n$ 个解分别为 $e^{\lambda_1 t}, e^{\lambda_2 t}, \cdots, e^{\lambda_n t}$ 且都线性无关. 于是得到通解为
   $$x(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + C_n e^{\lambda_n t}.$$

2. **复根:**
   复根将共轭地出现, 即若 $\lambda_1 = \alpha + \mathrm{i}\beta$ 是其中一个特征根, 那么一定有它的共轭 $\lambda_2 = \alpha - \mathrm{i}\beta$ 也是其中一个特征根. 由欧拉公式可知, 一对共轭复根 $\lambda = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ 得到方程的两个实值解分别为 $e^{\alpha t}\cos(\beta t)$ 和 $e^{\alpha t}\sin(\beta t)$.

**例 2.2**

解常系数齐次线性微分方程 $x'''(t) + x(t) = 0$.

***Solution.*** 特征方程: $\lambda^3 + 1 = 0$, 解得 $\lambda_1 = -1, \lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$. 因此通解为

$$x(t) = C_1 e^{-t} + e^{\frac{1}{2}t}\left[C_2\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_3\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right]$$

**案例 2.2 特征根是重根**

1. **实根:**
若特征方程的根 $\lambda$ 有 $k$ 重, 则方程有 $k$ 个解, 分别为 $e^{\lambda t}, te^{\lambda t}, t^2 e^{\lambda t}, \cdots, t^{k-1}e^{\lambda t}$. 于是得到通解为
$$x(t) = (C_1 + C_2 t + C_3 t^2 + \cdots + C_k t^{k-1})e^{\lambda t}.$$

2. **复根:**
若 $\lambda = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$ 是 $k$ 重特征根 (即有 $k$ 对共轭复根), 同实根处理办法, 得到方程的 $2k$ 个实值解分别为
$$e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ te^{\alpha t}\cos(\beta t),\ t^2e^{\alpha t}\cos(\beta t),\ \cdots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t),$$
$$e^{\alpha t}\sin(\beta t),\ te^{\alpha t}\sin(\beta t),\ t^2e^{\alpha t}\sin(\beta t),\ \cdots,\ t^{k-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t).$$

### 2.2.3 欧拉方程

本节接上一节介绍欧拉方程, 形如
$$t^n\frac{\mathrm{d}^n x}{\mathrm{d}t^n} + a_1 t^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}x}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_{n-1}t\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + a_n x = 0,$$
的基本解组的解法: 利用**变量代换**转换为 $L[x]$ 的形状.

本节只介绍齐次欧拉方程的解法.

齐次欧拉方程的解, 形如 $x(t) = t^K$, 因此求其 $n$ 阶导数后, 得到欧拉方程的特征方程为
$$K(K-1)\cdots(K-n+1) + a_1K(K-1)\cdots(K-n+2) + \cdots + a_{n-1}K + a_n = 0.$$
与此前不同的是, 需使 $t' = \log|t|$, 即

| | | | |
|---|---|---|---|
| 单实根 | $e^{\lambda t} \Rightarrow t^K$ | 单复根 | $e^{\alpha t}\cos(\beta t) \Rightarrow x^\alpha\cos(\beta\log|x|)$ |
| $m$ 重实根 | $t^{m-1}e^{\lambda t} \Rightarrow t^K(\log|x|)^{m-1}$ | $m$ 重复根 | $t^{m-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t) \Rightarrow x^\alpha(\log|x|)^{m-1}\cos(\beta\log|x|)$ |

# 3 $n$ 阶线性微分方程组

## 3.1 一般理论

**定义 3.1 $n$ 阶线性微分方程组**

考虑标准形式的 $n$ 阶线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}y^i}{\mathrm{d}x}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y^j+f_i(x),\ i=1,2,\cdots,n,$$

其中, $a_{ij},f_i\in\mathrm{C}[a,b]$.

把上面的线性微分方程组写成矩阵和向量的形式, 即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)+\boldsymbol{f}(x).$$

当 $\boldsymbol{f}(x)$ 不恒为 0 时, 称该方程为非齐次的线性微分方程组; 当 $\boldsymbol{f}(x)\equiv 0$ 时, 即

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)+\boldsymbol{f}(x),$$

称它是 (相应) 齐次的线性微分方程组.

$n$ 阶线性微分方程组与一阶线性微分方程不仅在形式上相似, 而且在理论上相似.

## 3.2 常系数线性微分方程组

所谓常系数线性微分方程组, 指的是线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}+\boldsymbol{f}(x)\tag{1}$$

中的系数矩阵 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶常数矩阵, 而 $\boldsymbol{f}(x)$ 是在 $a<x<b$ 上连续的向量函数. 我们很清楚地知道, 求解线性微分方程组 1 的关键是求出相应齐次线性微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}\tag{2}$$

的一个基解矩阵.

### 3.2.1 常系数齐次线性微分方程组的基解矩阵

**定理 3.1**

矩阵指数函数 $\boldsymbol{\Phi}(x)=e^{\boldsymbol{A}x}$ 是常系数齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 的一个标准**基解矩阵**.

基解矩阵 $\boldsymbol{\Phi}(x)$ 满足 $\boldsymbol{\Phi}(0)=\boldsymbol{I}$.

*Proof.* 在自变量 $x$ 的任意有限区间上, 矩阵指数函数

$$\boldsymbol{\Phi}(x)=e^{\boldsymbol{A}x}=\boldsymbol{I}+x\boldsymbol{A}+\frac{x^2}{2!}\boldsymbol{A}^2+\cdots+\frac{x^k}{k!}\boldsymbol{A}^k+\cdots$$

是一致收敛的, 可以逐项微分得到

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\boldsymbol{\Phi}(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{\boldsymbol{A}x}&=\boldsymbol{A}+x\boldsymbol{A}^2+\frac{x^2}{2!}\boldsymbol{A}^3+\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\boldsymbol{A}^k+\cdots\\&=\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{I}+x\boldsymbol{A}+\frac{x^2}{2!}\boldsymbol{A}^2+\cdots+\frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\boldsymbol{A}^{k-1}+\cdots\right)\\&=\boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}x}\quad=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\Phi}(x).\end{aligned}$$

**定理 3.2 常数变易法**

$n$ 阶非齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}(x)+\boldsymbol{f}(x)$ 的解为

$$\boldsymbol{y}(x)=\underbrace{C\cdot e^{\boldsymbol{A}x}}_{\text{齐次通解}}+\underbrace{e^{\boldsymbol{A}x}\cdot\int e^{-\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x}_{\text{非齐次特解}}.$$

**对比:** 一阶非齐次线性微分方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)y+Q(x)$ 的解为

$$y(x)=\underbrace{C\cdot e^{\int P(x)\mathrm{d}x}}_{\text{齐次通解}}+\underbrace{e^{\int P(x)\mathrm{d}x}\cdot\int Q(x)e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}_{\text{非齐次特解}}.$$

*Proof.* 根据定理 3.1, 易知 $n$ 阶常系数齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 的基解矩阵为 $\boldsymbol{\Phi}(x)=e^{\boldsymbol{A}x}$. 然后进行常数变易, 即令 $\boldsymbol{y}=C(x)e^{\boldsymbol{A}x}$, 将其与原方程联立得

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=C'(x)e^{\boldsymbol{A}x}+C(x)\boldsymbol{A}e^{\boldsymbol{A}x}=\boldsymbol{A}C(x)e^{\boldsymbol{A}x}+\boldsymbol{f}(x),$$

即

$$C'(x)e^{\boldsymbol{A}x}=\boldsymbol{f}(x).$$

求解 $C(x)$ 得

$$C(x)=\int e^{-\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x+C.$$

因此得到方程的解为

$$\boldsymbol{y}(x)=C\cdot e^{\boldsymbol{A}x}+e^{\boldsymbol{A}x}\cdot\int e^{-\boldsymbol{A}x}\boldsymbol{f}(x)\mathrm{d}x.$$

### 3.2.2 利用若尔当 (Jordan) 标准型求基解矩阵

现在我们要进一步解决的问题是, 求解这种用矩阵无穷级数定义的指数函数 $e^{\boldsymbol{A}x}$. 对任意 $n$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}$, 存在 $n$ 阶非奇异矩阵 $\boldsymbol{P}$, 使得

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1},$$

其中 $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(\boldsymbol{J}_1, \cdots, \boldsymbol{J}_m)$, 其中 $\boldsymbol{J}_i = \lambda_i \boldsymbol{I} + \boldsymbol{Z}_i$ 为一个 $n_i$ 阶的若当块. 因此

$$\boldsymbol{\Phi}(x) = e^{\boldsymbol{A}x} = e^{\boldsymbol{P}\boldsymbol{J}\boldsymbol{P}^{-1}x} = \boldsymbol{P}e^{\boldsymbol{J}x}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}\mathrm{diag}\left(e^{\boldsymbol{J}_1 x}, \cdots, e^{\boldsymbol{J}_m x}\right)\boldsymbol{P}^{-1}.$$

怎么求 $\boldsymbol{J}$ 和 $\boldsymbol{P}$.

1. 计算矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值, 即求解行列式方程 $|\lambda \boldsymbol{I} - A| = 0$, 得到 $\lambda_i$, $i = 1, \cdots, n$. 满秩矩阵的特征值个数等于 $\boldsymbol{A}$ 的阶数.
2. 如果特征值没有重根, 则 $\boldsymbol{J} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$.
3. 根据特征值求出特征向量, 即求解矩阵方程 $(\lambda_i \boldsymbol{I} - A)\boldsymbol{u}_i = \boldsymbol{0}$, 得到 $\boldsymbol{u}_i$, $i = 1, \cdots, n$.
4. 根据特征向量得到 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{u}_1, \cdots, \boldsymbol{u}_n)$.

**例 3.1**

求解微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{y}$.

***Solution.*** 首先求特征值:

$$|\lambda \boldsymbol{I} - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 1 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0.$$

解得:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 2}}{2 \times 1} = 1 \pm \mathrm{i}.$$

因此,

$$\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} 1 + \mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1 - \mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda = 1 + \mathrm{i}$ 时,

$$(\lambda \boldsymbol{I} - A)\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & -1 \\ 1 & \mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{i}u_1 - u_2 \\ u_1 + \mathrm{i}u_2 \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

求解得到:

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_1 = u_2 \\ u_1 = -\mathrm{i}u_2 \end{cases}$$

不难发现, 两个解实际上是等价的, 因此可以取特征向量 $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}$.

当 $\lambda = 1 - \mathrm{i}$ 时,

$$(\lambda \boldsymbol{I} - A)\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i} & -1 \\ 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathrm{i}u_1 - u_2 \\ u_1 + -\mathrm{i}u_2 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

求解得到:

$$\begin{cases} \mathrm{i}u_1 = -u_2 \\ u_1 = \mathrm{i}u_2 \end{cases}$$

不难发现, 两个解和上面的情况是一样的, 即是等价的, 因此可以取特征向量 $\boldsymbol{u}_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}$.

因此,

$$\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{P}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

于是,

$$\begin{aligned} e^{\boldsymbol{A}x} &= \boldsymbol{P} e^{\boldsymbol{J}x} \boldsymbol{P}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{(1+\mathrm{i})x} & 0 \\ 0 & e^{(1-\mathrm{i})x} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^x}{2} \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}x} & 0 \\ 0 & e^{-\mathrm{i}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^x}{2} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}x} & \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}x} \\ \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x} & e^{-\mathrm{i}x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \\ -\mathrm{i} & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^x}{2} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x} & -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}x} + \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}x} \\ \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x} - \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}x} & e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

根据欧拉公式 $e^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x$ 和 $e^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x$, 将两式分别相加和相减得:

$$\begin{cases} e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x} = 2\cos x, \\ e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x} = 2\mathrm{i}\sin x. \end{cases}$$

因此, 化简 $e^{\boldsymbol{A}x}$ 得

$$e^{\boldsymbol{A}x} = \frac{e^x}{2} \begin{pmatrix} e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x} & -\mathrm{i}e^{\mathrm{i}x} + \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}x} \\ \mathrm{i}e^{\mathrm{i}x} - \mathrm{i}e^{-\mathrm{i}x} & e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x} \end{pmatrix} = \frac{e^x}{2} \begin{pmatrix} 2\cos x & -\mathrm{i}(2\mathrm{i}\sin x) \\ \mathrm{i}(2\mathrm{i}\sin x) & 2\cos x \end{pmatrix} = e^x \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}.$$

故, 得到解为

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

显然, 这样是相对比较麻烦的常规推理, 因此给出如下推论.

**推论 3.1**

若常系数齐次线性微分方程组有一对共轭的复数特征根 $\lambda = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$, 且其对应的特征向量可以分别写成 $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} \pm \mathrm{i}\boldsymbol{b}$ 的形式, 那么这两个共轭特征根对应的实值解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1(x) &= e^{\alpha x}\cos(\beta x)\boldsymbol{a} - e^{\alpha x}\sin(\beta x)\boldsymbol{b},\\ \boldsymbol{y}_2(x) &= e^{\alpha x}\sin(\beta x)\boldsymbol{a} + e^{\alpha x}\cos(\beta x)\boldsymbol{b}.\end{aligned} \iff \begin{aligned}\boldsymbol{y}_1(x) &= e^{\alpha x}\big[\cos(\beta x)\boldsymbol{a} - \sin(\beta x)\boldsymbol{b}\big],\\ \boldsymbol{y}_2(x) &= e^{\alpha x}\big[\sin(\beta x)\boldsymbol{a} + \cos(\beta x)\boldsymbol{b}\big].\end{aligned}$$

***Proof.*** 显然, 两个解可以写作

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}_1(x) &= e^{\lambda x}\boldsymbol{u} = e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}(\boldsymbol{a}+\mathrm{i}\boldsymbol{b}),\\ \boldsymbol{w}_2(x) &= e^{\overline{\lambda}x}\overline{\boldsymbol{u}} = e^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}(\boldsymbol{a}-\mathrm{i}\boldsymbol{b}).\end{aligned}$$

然后通过欧拉公式改写 $\boldsymbol{w}_1(x)$, 即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}_1(x) &= e^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}(\boldsymbol{a}+\mathrm{i}\boldsymbol{b})\\ &= e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x)+\mathrm{i}\sin(\beta x)\right](\boldsymbol{a}+\mathrm{i}\boldsymbol{b})\\ &= e^{\alpha x}\left[\cos(\beta x)\boldsymbol{a}+\mathrm{i}\sin(\beta x)\boldsymbol{a}+\cos(\beta x)\mathrm{i}\boldsymbol{b}+\mathrm{i}\sin(\beta x)\mathrm{i}\boldsymbol{b}\right]\\ &= e^{\alpha x}\left\{\big[\cos(\beta x)\boldsymbol{a}-\sin(\beta x)\boldsymbol{b}\big]+\mathrm{i}\big[\sin(\beta x)\boldsymbol{a}+\cos(\beta x)\boldsymbol{b}\big]\right\}.\end{aligned}$$

因此, 可以将 $\boldsymbol{w}_1(x)$ 写成 $\boldsymbol{w}_1(x) = \boldsymbol{y}_1(x) + \mathrm{i}\boldsymbol{y}_1(x)$ 的形式, 即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}_1(x) &\coloneqq e^{\alpha x}\big[\cos(\beta x)\boldsymbol{a}-\sin(\beta x)\boldsymbol{b}\big],\\ \boldsymbol{y}_2(x) &\coloneqq e^{\alpha x}\big[\sin(\beta x)\boldsymbol{a}+\cos(\beta x)\boldsymbol{b}\big].\end{aligned}$$

共轭不再考虑, 因为它们之间仅是虚部互为相反数的关系, 在添加系数 $C$ 时, 可以弥补这个区别.

那么我们重新做例3.1.

***Solution.*** 首先求特征值:

$$|\lambda\boldsymbol{I} - A| = \begin{vmatrix}\lambda-1 & -1\\ 1 & \lambda-1\end{vmatrix} = (\lambda-1)^2+1 = \lambda^2-2\lambda+2 = 0.$$

解得:

$$\lambda = \frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times2}}{2\times1} = 1\pm\mathrm{i}.$$

**(跳过中间求 $J$ 的步骤, 不用求了)**

当 $\lambda = 1+\mathrm{i}$ 时,

$$(\lambda\boldsymbol{I}-A)\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}\mathrm{i} & -1\\ 1 & \mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathrm{i}u_1-u_2\\ u_1+\mathrm{i}u_2\end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

求解得到:

$$\begin{cases}\mathrm{i}u_1 = u_2\\ u_1 = -\mathrm{i}u_2\end{cases}$$

不难发现, 两个解实际上是等价的, 因此可以取特征向量 $\boldsymbol{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{i} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

**(跳过中间求共轭特征根的特征向量的步骤, 不用求了, 直接使用推论3.1)**

此时, $\alpha = 1, \beta = 1, \boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. 代入公式:

$$\boldsymbol{y}_1(x) = e^{\alpha x}\big[\cos(\beta x)\boldsymbol{a} - \sin(\beta x)\boldsymbol{b}\big] = e^x \left[\cos x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \sin x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{y}_2(x) = e^{\alpha x}\big[\sin(\beta x)\boldsymbol{a} + \cos(\beta x)\boldsymbol{b}\big] = e^x \left[\sin x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \cos x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = e^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

因此, 得到解为

$$\boldsymbol{y} = C_1 e^x \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2 e^x \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}.$$

## 3.3 非齐次线性微分方程组的常数变易法

**定义 3.2 基解矩阵 (fundamental matrix)**

若齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)$ 的基本解组为 $\boldsymbol{y}_1(x), \cdots, \boldsymbol{y}_n(x)$, 其**基解矩阵**为

$$\boldsymbol{Y}(x) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1(x) & \cdots & \boldsymbol{y}_n(x) \end{pmatrix}.$$

**引理 3.1 特解形式**

非齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x} = \boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x) + \boldsymbol{f}(x)$ 的特解取决于其非齐次项 $\boldsymbol{f}(x)$ 的形式.

比如:

- 若 $\boldsymbol{f}(x)$ 是关于 $x$ 的线性向量, 即 $\boldsymbol{f}(x) = x\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, 则特解形式应为 $\boldsymbol{y}_p(x) = x\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$.
- 若 $\boldsymbol{f}(x)$ 包含 $x, \sin x$ 的列向量, 则特解形式应为 $\boldsymbol{y}_p(x) = x\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + (\sin x)\boldsymbol{c} + (\cos x)\boldsymbol{d}$.
- 若 $\boldsymbol{f}(x)$ 包含 $x, x^2, e^x$ 的列向量, 则特解形式应为 $\boldsymbol{y}_p(x) = x^2\boldsymbol{a} + x\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c} + e^x\boldsymbol{d}$.
- ...
- 更复杂的情况我们暂不考虑.

**定理 3.3 常数变易法**

若齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)$ 的基解矩阵为 $\boldsymbol{Y}(x)$, 则其对应的非齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)+\boldsymbol{f}(x)$ 的解为

$$\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c}+\boldsymbol{Y}(x)\int\boldsymbol{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\ \mathrm{d}x,$$

其中, $\boldsymbol{c}$ 是 $n\times 1$ 的常向量, 注意这里是右乘在基解矩阵 $(n\times n)$ 上.

***Proof.*** 易知齐次线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{y}}{\mathrm{d}x}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{y}(x)$ 的通解为 $\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c}$, 即满足

$$\boldsymbol{Y}'(x)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c}\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{Y}'(x)=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}(x).$$

同之前的常数变易法思路一致, 即特解形式为

$$\boldsymbol{y}_p=\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c}(x).$$

那么与非齐次线性微分方程组进行联立得

$$\boldsymbol{Y}'(x)\boldsymbol{c}(x)+\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c}'(x)=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c}(x)+\boldsymbol{f}(x).$$

刚才我们提到 $\boldsymbol{Y}'(x)=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}(x)$, 因此有

$$\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c}(x)+\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c}'(x)=\boldsymbol{A}(x)\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c}(x)+\boldsymbol{f}(x)\quad\Rightarrow\quad\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c}'(x)=\boldsymbol{f}(x).$$

那么, 显然

$$\boldsymbol{c}(x)=\int\boldsymbol{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\ \mathrm{d}x.$$

因此方程的解为

$$\boldsymbol{y}(x)=\boldsymbol{Y}(x)\boldsymbol{c}+\boldsymbol{Y}(x)\int\boldsymbol{Y}^{-1}(x)\boldsymbol{f}(x)\ \mathrm{d}x.$$

# 4 拉普拉斯变换

## 4.1 一般理论

**定义 4.1 拉普拉斯变换 (Laplace transform)**

若 $f(x)$ 为定义在 $[0,\infty)$ 的函数, 则 $f$ 的**拉普拉斯变换** $F$ 为

$$F(s) := \int_0^\infty e^{-st} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

函数 $f$ 的拉普拉斯变换可以用 $F$ 表示, 也可以用 $\mathscr{L}\{f\}$ 表示.

显然, 拉普拉斯变换涉及到很复杂的积分运算, 因此可以参照拉普拉斯变换表.

| $f(t)$ | $F(s)=\mathscr{L}\{f\}(s)$ | $f(t)$ | $F(s)=\mathscr{L}\{f\}(s)$ |
|---|---|---|---|
| $1$ | $\frac{1}{s},\ s>0$ | $\sin(bt)$ | $\frac{b}{s^2+b^2},\ s>0$ |
| $e^{at}$ | $\frac{1}{s-a},\ s>a$ | $\cos(bt)$ | $\frac{s}{s^2+b^2},\ s>0$ |
| $t^n,\ n=1,2,\cdots$ | $\frac{n!}{s^{n+1}},\ s>0$ | $e^{at}\sin bt$ | $\frac{b}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$ |
| $t^n e^{at},\ n=1,2,\cdots$ | $\frac{n!}{(s-a)^{n+1}},\ s>a$ | $e^{at}\cos bt$ | $\frac{s-a}{(s-a)^2+b^2},\ s>a$ |

**定义 4.2 $\alpha$ 阶指数**

若存在常数 $T>0,\ M>0$, 使得

$$|f(t)| \leqslant Me^{\alpha t},\ \forall t \geqslant T,$$

则称函数 $f(x)$ 为 $\alpha$ **阶指数**.

比如, $f(t)=e^{2t}\sin(3t)$ 是 $\alpha=2$ 阶指数, 因为 $|e^{2t}\sin(3t)| \leqslant e^{2t}$, 其中 $M=1$, $T$ 是任意正数.

**定理 4.1 拉普拉斯变换存在条件**

如果 $f(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上分段连续且为 $\alpha$ 阶指数, 则当 $s>\alpha$ 时, $\mathscr{L}\{f\}(s)$ 存在.

**定理 4.2 拉普拉斯变换的性质**

对于拉普拉斯变换 $\mathscr{L}\{f\}(s)=F(s)$, 存在 $s>\alpha$, 则有如下性质:

1. **线性性质**:

$$\mathscr{L}\{f_1+f_2\}=\mathscr{L}\{f_1\}+\mathscr{L}\{f_2\},$$
$$\mathscr{L}\{cf\}=c\mathscr{L}\{f\}.$$

2. **平移**:

$$\mathscr{L}\{e^{at}f(t)\}(s)=F(s-a).$$

3. **导数的拉普拉斯变换**:

$$\mathscr{L}\{f'\}(s)=s\mathscr{L}\{f\}(s)-f(0)=sF(s)-f(0).$$

高阶导数进行嵌套即可, 即

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}\}(s)=s^n\mathscr{L}\{f\}(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).$$

4. **拉普拉斯变换的导数**:

$$\mathscr{L}\{t^nf(t)\}(s)=(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}s^n}F(s).$$

**定义 4.3 逆拉普拉斯变换**

给定函数 $F(s)$, 若函数 $f(t)\in \mathrm{C}[0,\infty)$, 并且满足 $\mathscr{L}\{f\}=F$, 则称 $f(t)$ 是 $F(s)$ 的**逆拉普拉斯变换**, 记为

$$f=\mathscr{L}^{-1}\{F\}.$$

逆拉普拉斯变换同样具备线性性质.

## 4.2 求解初值问题

**例 4.1**

解初值问题

$$y''+4y'-5y=te^t;\quad y(0)=1, y'(0)=0.$$

***Solution.*** 令 $Y(s):=\mathscr{L}\{y\}(s)$, 方程两侧同时进行拉普拉斯变换,

$$\mathscr{L}\{y''\}(s)+4\mathscr{L}\{y'\}(s)-5\mathscr{L}\{y\}(s)=\mathscr{L}\{te^t\}(s)$$
$$\mathscr{L}\{y''\}(s)+4\mathscr{L}\{y'\}(s)-5Y(s)=\frac{1}{(s-1)^2}.$$

使用导数的拉普拉斯性质:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{y'\}(s) &= s\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0) = sY(s) - 1,\\ \mathscr{L}\{y''\}(s) &= s\mathscr{L}\{y'\}(s) - y'(0)\\ &= s\big[s\mathscr{L}\{y\}(s) - y(0)\big] - y'(0)\\ &= s^2\mathscr{L}\{y\}(s) - sy(0) - y'(0) = s^2Y(s) - s.\end{aligned}$$

因此, 代入回去得

$$\begin{aligned}\big[s^2Y(s) - s\big] + 4\big[sY(s) - 1\big] - 5Y(s) &= \frac{1}{(s-1)^2}\\ (s^2+4s-5)Y(s) &= s + 4 + \frac{1}{(s-1)^2}\\ (s+5)(s-1)Y(s) &= \frac{(s+4)(s-1)^2+1}{(s-1)^2}\\ Y(s) &= \frac{s^3+2s^2-7s+5}{(s+5)(s-1)^3}.\end{aligned}$$

对 $Y(s)$ 进行分式展开:

$$Y(s) = \frac{s^3+2s^2-7s+5}{(s+5)(s-1)^3} = \frac{A}{s+5} + \frac{B}{s-1} + \frac{C}{(s-1)^2} + \frac{D}{(s-1)^3}.$$

然后再合并分别计算出 $A, B, C, D$, 此处略. 最后找到求逆变换:

$$\begin{aligned}y(s) &= A\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+5}\right\} + B\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + C\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^2}\right\} + D\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)^3}\right\}\\ &= Ae^{-5t} + Be^t + Cte^t + D\frac{t^2e^t}{2}.\end{aligned}$$

## 4.3 非连续函数的拉普拉斯变换

**定义 4.4 矩形窗函数 (rectangular window function)**

定义**矩形窗函数 (rectangular window function)** $\Pi_{a,b}(t)$ 为

$$\Pi_{a,b}(t) := u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases}1, & a < t < b,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$$

其中, $u(\cdot)$ 为**单位阶跃函数 (unit step function)**, 定义为 $u(t) := \begin{cases}1, & t > 0,\\ 0, & t < 0,\end{cases}$

**例 4.2**

将函数 $f(t) = \begin{cases} 3, & t < 2, \\ 1, & 2 < t < 5, \\ t, & 5 < t < 8, \\ \dfrac{t^2}{10}, & t > 8. \end{cases}$ 写成矩形窗函数的形式为

$$f(t) = 3\Pi_{0,2}(t) + \Pi_{2,5}(t) + t\Pi_{5,8}(t) + \frac{t^2}{10}u(t-8).$$

**定理 4.3 关于单位阶跃函数的拉普拉斯变换**

记 $F(s) := \mathscr{L}\{f\}(s)$, $s > \alpha \geqslant 0$. 若常数 $a > 0$, 则

- 单位阶跃函数的拉普拉斯变换:

$$\mathscr{L}\{u(t-a)\}(s) = \frac{e^{-as}}{s}.$$

- 推广:

$$\mathscr{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) = e^{-as}F(s).$$

因此, 其逆拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}(s) = f(t-a)u(t-a).$$

***Proof.*** 单位阶跃函数的拉普拉斯变换为

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{u(t-a)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}u(t-a)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_a^\infty e^{-st}\ \mathrm{d}t \\ &= \lim_{M\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_a^M = \frac{e^{-as}}{s}.\end{aligned}$$

推广:

$$\begin{aligned}\mathscr{L}\{f(t-a)u(t-a)\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)u(t-a)\ \mathrm{d}t \\ &= \int_a^\infty e^{-st}f(t-a)\ \mathrm{d}t \\ &\xlongequal{r=t-a} \int_0^\infty e^{-s(r+a)}f(r)\ \mathrm{d}r \\ &= e^{-as}\int_0^\infty e^{-sr}f(r)\ \mathrm{d}r = e^{-as}F(s).\end{aligned}$$

因此,

$$\mathscr{L}\{f(t)u(t-a)\}(s) = e^{-as}\mathscr{L}\{f(t+a)\}(s).$$

## 4.4 周期函数与幂函数的拉普拉斯变换

**定义 4.5 周期函数 (periodic function)**

若函数 $f(t)$ 满足

$$f(t+T)=f(t),\ \forall t,$$

则称为 $f(t)$ **周期函数 (periodic function)**.

**定理 4.4 周期函数的拉普拉斯变换**

若函数 $f$ 的周期为 $T$ 并且在 $[0,T]$ 上是分段连续的, 则它的拉普拉斯变换为

$$F(s)=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\ \mathrm{d}t \quad \text{以及} \quad F_T(s)=\int_0^\infty e^{-st}f_T(t)\ \mathrm{d}t=\int_0^T e^{-st}f(t)\ \mathrm{d}t,$$

二者之间的关系为

$$F_T(s)=F(s)\left(1-e^{-sT}\right) \quad \text{或者} \quad F(s)=\frac{F_T(s)}{1-e^{-sT}}.$$

一般用矩形窗函数来表达周期函数, 即

$$f_T(t):=f(t)\Pi_{0,T}(t)=f(t)[u(t)-u(t-T)]=\begin{cases} f(t), & 0<t<T,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

则它的拉普拉斯变换为

$$F_T(s)=\int_0^\infty e^{-st}f_T(t)\ \mathrm{d}t=\int_0^T e^{-st}f(t)\ \mathrm{d}t.$$

***Proof.*** 由于

$$f_T(t)=f(t)[u(t)-u(t-T)]=f(t)u(t)-f(t)u(t-T)=f(t)u(t)-f(t-T)u(t-T).$$

根据定理4.3, 等号两边同时进行拉普拉斯变换得

$$F_T(s)=F(s)-e^{-sT}F(s)=F(s)\left(1-e^{-sT}\right).$$

**定义 4.6 Gamma 函数**

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\ \mathrm{d}t, \quad x>0.$$

**性质 4.1 Gamma 函数**

- $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
- 若 $n$ 为正整数, 则 $\Gamma(n) = (n-1)!$.

**定理 4.5 幂函数的拉普拉斯变换**

$$\mathscr{L}\{t^\alpha\}(s) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \ \forall \alpha > -1.$$

***Proof.***

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}\{t^\alpha\}(s) &= \int_0^\infty e^{-st} t^\alpha \, \mathrm{d}t \\
&\overset{u=st}{=\!=} \int_0^\infty e^{-u} \left(\frac{t}{s}\right)^\alpha \frac{1}{s} \, \mathrm{d}u \\
&= \frac{1}{s^{\alpha+1}} \int_0^\infty e^{-u} t^\alpha \, \mathrm{d}u = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}.
\end{aligned}$$

## 4.5 卷积

**定义 4.7 卷积 (convolution)**

若函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上间断连续, 则 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的**卷积 (convolution)** 为

$$(f * g)(t) := \int_0^t f(t-\tau) g(\tau) \, \mathrm{d}\tau.$$

**性质 4.2 卷积**

1. 交换律: $f * g = g * f$.
2. 结合律: $f * (g * h) = (f * g) * h$
3. 分配律: $f * (g + h) = f * g + f * h$.

**定理 4.6 卷积的拉普拉斯变换**

若函数 $f(t)$ 和 $g(t)$ 在 $[0,\infty)$ 上间断连续, 且为 $\alpha$ 阶指数, 令 $F(t) = \mathscr{L}\{f\}(s)$, $G(t) = \mathscr{L}\{g\}(s)$, 则

$$\mathscr{L}\{f * g\}(s) = F(s)G(s).$$

其逆拉普拉斯变换为

$$\mathscr{L}^{-1}\{F(s)G(s)\}(t) = (f * g)(t).$$

***Proof.*** 将卷积函数进行拉普拉斯变换得

$$
\begin{aligned}
\mathscr{L}\{f*g\}(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st}(f*g)(t)\ \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\infty} e^{-st}\left[\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)\ \mathrm{d}\tau\right]\ \mathrm{d}t \\
&\xlongequal{\text{更改积分次序}} \int_0^{\infty} g(\tau)\left[\int_\tau^{\infty} e^{-st}f(t-\tau)\ \mathrm{d}t\right]\ \mathrm{d}\tau \\
&\xlongequal{u=t-\tau} \int_0^{\infty} g(\tau)\left[\int_\tau^{\infty} e^{-s(u+\tau)}f(u)\ \mathrm{d}u\right]\ \mathrm{d}\tau \\
&= \int_0^{\infty} e^{-s\tau}g(\tau)\left[\int_\tau^{\infty} e^{-su}f(u)\ \mathrm{d}u\right]\ \mathrm{d}\tau \\
&= F(s)\int_0^{\infty} e^{-s\tau}g(\tau)\ \mathrm{d}\tau \\
&= F(s)G(s).
\end{aligned}
$$

**例 4.3**

解积分微分方程

$$y'(t) = 1 - \int_0^t y(t-\tau)e^{-2\tau}\ \mathrm{d}\tau, \quad y(0) = 1.$$

***Solution.*** 写成卷积的形式为

$$y'(t) = 1 - y(t) * e^{-2t}.$$

令 $Y(s) = \mathscr{L}\{y\}(s)$, 将上式两侧同时取拉普拉斯变换得

$$
\begin{aligned}
sY(s) - 1 &= \frac{1}{s} - Y(s) \times \frac{1}{s+2} \\
\left(s + \frac{1}{s+2}\right)Y(s) &= 1 + \frac{1}{s} \\
\frac{s^2+2s+1}{s+2}Y(s) &= \frac{1+s}{s} \\
Y(s) &= \frac{s+2}{s(s+1)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}
\end{aligned}
$$

因此

$$y(s) = 2 - e^{-t}.$$

**定义 4.8 传递函数 (transfer function) 与脉冲响应函数 (impulse response function)**

一个常系数非齐次线性微分方程且所有初值为 0 的问题, 以二阶微分方程为例, 即

$$ay''(t) + by'(t) + cy(t) = g(t); \quad y(0) = 0,\ y'(0) = 0.$$

将微分方程的解 $y(t)$ 和非齐次项 $g(t)$ 的拉普拉斯变换的比值称为**传递函数 (transfer** function), 即

$$H(s) := \frac{\mathscr{L}\{y\}(s)}{\mathscr{L}\{g\}(s)} = \frac{Y(s)}{G(s)} = \frac{1}{as^2+bs+c}.$$

传递函数的逆拉普拉斯变换称为**脉冲响应函数 (impulse response function)**, 即

$$h(t) := \mathscr{L}^{-1}\{H\}(t).$$

**定理 4.7 用脉冲响应函数求解微分方程**

二阶常系数非齐次线性微分方程的初值问题

$$ay''(t)+by'(t)+cy(t)=g(t);\quad y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1,$$

的解为

$$y(t)=(h*g)(t)+y_k(t)=\int_0^t h(t-\tau)g(\tau)\,\mathrm{d}\tau+y_k(t),$$

其中, $y_k(t)$ 是齐次方程的通解.

***Proof.*** 令 $Y(s)=\mathscr{L}\{y\}(s)$, $G(s)=\mathscr{L}\{g\}(s)$, 将微分方程两侧同时取拉普拉斯变换得

$$\begin{aligned}
a[s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)]+b[sY(s)-y(0)]+cY(s)&=G(s)\\
as^2Y(s)-ay_0s-ay_1+bsY(s)-by_0+cY(s)&=G(s)\\
(as^2+bs+c)Y(s)&=G(t)+ay_0s+ay_1+by_0\\
Y(s)&=\frac{G(s)}{as^2+bs+c}+\frac{ay_0s+ay_1+by_0}{as^2+bs+c}\\
&=H(s)G(s)+\frac{ay_0s+ay_1+by_0}{as^2+bs+c},
\end{aligned}$$

其中 $\dfrac{ay_0s+ay_1+by_0}{as^2+bs+c}$ 与 $g(t)$ 无关, 即齐次方程的通解, 令其逆拉普拉斯变换为 $y_k(t)$. 因此

$$y(t)=(h*g)(t)+y_k(t).$$

显然, 这个齐次方程通解如果通过逆拉普拉斯变换得到是麻烦的, 因此, 我们直接采用最基本的办法.

**例 4.4**

求解线性微分方程

$$y''+2y'+5y=g(t);\quad y(0)=2,\ y'(0)=-2.$$

***Solution.*** 该方程的齐次形式为 $y''+2y'+5y=0$, 为常系数齐次线性微分方程, 因此可以直接使用特征方程求解, 即

$$\lambda^2+2\lambda+5=0\quad\Rightarrow\quad\lambda=-1\pm2\mathrm{i}.$$

于是, 通过欧拉公式得到基解

$$e^{(-1+2\mathrm{i})t} = e^{-t}[\cos(2t) + \mathrm{i}\sin(2t)].$$

因此, 齐次通解为

$$y_k(t) = C_1 e^{-t}\cos(2t) + C_2 e^{-t}\sin(2t),$$

其一阶导数为

$$y_k'(t) = C_1 e^{-t}(-1 - 2\sin(2t)) + C_2 e^{-t}(-1 + 2\cos(2t)).$$

将初值代入得

$$\begin{cases} y_k(0) = C_1 = 2, \\ y_k'(0) = C_1(-1) + C_2(-1+2) = -2. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = 2, \\ C_2 = 0. \end{cases}$$

故, 齐次通解为

$$y_k(t) = 2e^{-t}\cos(2t).$$

下一步, 通过计算传递函数和脉冲响应函数来计算非齐次特解部分.

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 5} = \frac{1}{(s+1)^2 + 2^2} \xrightarrow{\text{逆拉普拉斯变换}} h(t) = \frac{1}{2}e^{-t}\sin(2t).$$

故, 原方程的解为

$$y(t) = (h * g)(t) + y_k(t) = \frac{1}{2}\int_0^t e^{-(t-\tau)}\sin[2(t-\tau)]g(\tau)\ \mathrm{d}\tau + 2e^{-t}\cos(2t).$$

## 4.6 狄拉克 $\delta$ 函数

**定义 4.9 狄拉克 (Dirac) $\delta$ 函数**

Dirac 函数 $\delta(t)$ 具有以下两个特征:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & t = 0, \\ 0, & t \neq 0. \end{cases} \quad \text{以及} \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t)\ \mathrm{d}t = f(0),$$

其中, $f(t)$ 是一个在含 $t = 0$ 的开区间上的连续函数.

**性质 4.3 Dirac 函数**

1. 平移 Dirac 函数:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-a)\ \mathrm{d}t = f(a).$$

2. Dirac 函数的累积:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\ \mathrm{d}t = 1.$$

**定理 4.8 Dirac 函数的拉普拉斯变换**

$$\mathscr{L}\{\delta(t-a)\}(s) = e^{-as}, \quad \text{where } a \geqslant 0.$$

用性质4.3和定义4.9即可证明.

# 5 微分方程的级数解

本章的根基为 Taylor 展开公式.

**定义 5.1 泰勒展开 (Taylor expansion)**

**Taylor 多项式 (polynomial)** 以 $x_0$ 为中心进行展开, 用于逼近在 $x_0$ 处具有 $n$ 阶导数的函数 $f(x)$, 表示为:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k \\
&= f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \cdots
\end{aligned}
$$

令 $p_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$, 对应的**余项 (remainder)** $\epsilon_n(x) := f(x) - p_n(x)$, 用来度量 Taylor 展开的准确性, 即

$$\epsilon_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

## 5.1 幂级数与解析函数

**定义 5.2 幂级数 (power series)**

形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \cdots,$$

称为关于点 $x_0$ 的**幂级数 (power series)**.

- **收敛 (converge):**

$$\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n(c-x_0)^n < \infty.$$

- **发散 (diverge):** 极限不存在.

- **绝对收敛 (converge absolutely):** $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n(x-x_0)^n|$ 收敛.

**定义 5.3 收敛半径 (radius of convergence)**

若存在一个常数 $\rho \in [0, \infty]$, 使得幂级数在 $|x-x_0| < \rho$, 即 $x \in (x_0-\rho, x_0+\rho)$ 上**绝对收敛**, 在 $|x-x_0| > \rho$ 上**发散**, 则称 $\rho$ 为这个幂级数的**收敛半径 (radius of convergence)**.

- 若幂级数处处收敛, 则收敛半径 $\rho = \infty$.

- 若幂级数仅在 $x_0$ 处收敛, 则收敛半径 $\rho = 0$.

**定理 5.1 比值审敛法 (ratio test)**

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, 若

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = L \in [0,\infty],$$

则其收敛半径 $\rho = L$. 这种方法又被称为**达朗贝尔判别法 (D'Alembert's test)**.

特别地, 我们这里给出**几何级数 (geometric series)** 的 Taylor 展开:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots = \frac{1}{1-x}, \quad \text{for } x \in (-1,1). \tag{*}$$

**定理 5.2 幂级数的微分与积分**

如果级数 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的收敛半径 $\rho > 0$, 且 $f$ 在区间 $|x-x_0| < \rho$ 可导, 那么逐项微分给出 $f$ 导数的幂级数为:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}, \quad \text{for } |x-x_0| < \rho.$$

此外，逐项积分给出 $f$ 积分的幂级数为:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}, \quad \text{for } |x-x_0| < \rho.$$

**例 5.1**

根据几何级数 (*) 推导下列方程的幂级数.

(1) $\dfrac{1}{1+x^2}$.　　(2) $\dfrac{1}{(1-x)^2}$.　　(3) $\arctan x$.

***Solution.***

(1) 将 (*) 中的 $x$ 替换为 $-x^2$ 即可, 即

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n$$
$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots.$$

(2) 不难发现, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$, 因此有

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-x)^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots\right)\\ &= 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots + (n-1)x^n + \cdots.\end{aligned}$$

(3) 依旧不难发现, $\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \arctan x$, 因此有

$$\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n t^{2n} + \cdots\right)\,\mathrm{d}t$$

$$\arctan x = x - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7}x^7 + \cdots + (-1)^n \frac{1}{2n+1}x^{2n+1} + \cdots.$$

**定义 5.4 解析函数 (analytic function)**

若在以 $x_0$ 为中心的开区间内, 函数 $f(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的和, 且该级数具有正的收敛半径, 则称函数 $f(x)$ **在 $x_0$ 处是解析的 (analytic)**.

## 5.2 线性微分方程的幂级数解

**定义 5.5 常点 (ordinary point) 与奇点 (singular point)**

一个二阶齐次线性微分方程

$$y''(x) + p(x)y' + q(x)y = 0.$$

若函数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都在 $x_0$ 处是解析的, 则称 $x_0$ 为该微分方程的**常点 (ordinary point)**, 否则为该微分方程的**奇点 (singular point)**.

**例 5.2 找出奇点**

$$xy'' + x(1-x)^{-1}y' + y\sin x = 0.$$

***Solution.*** 我们定义的二阶齐次线性微分方程的二阶导数系数为 1, 因此可以确定

$$p(x) = \frac{x(1-x)^{-1}}{x} = \frac{1}{1-x}, \qquad q(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

- $p(x)$ 在 $x=1$ 没有定义, 因此可以认为除了 $x=1$ 外都是解析的.
- $q(x)$ 从表面上看在 $x=0$ 没有定义, 但是将 $\sin x$ 进行 Taylor 展开得

$$q(x) = \frac{\sin x}{x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots.$$

  因此 $q(x)$ 处处可解析.

综上所述, 惟一的奇点为 $x=1$.

**例 5.3 用幂级数解微分方程**

$$(1+x^2)y''-y'+y=0.$$

***Solution.*** 由于 $p(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$ 和 $q(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $x=0$ 都是可解析的, 则 $x=0$ 是该微分方程的一个常点. 因此, 可以通过在 $x=0$ 处的幂级数展开表示通解, 即设

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

将此展开式代入微分方程中得到

$$\begin{aligned}(1+x^2)\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n&=0\\ \sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n-\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n&=0\end{aligned}$$

为了能将上式各项进行合并, 我们**不优先**选择统一求和范围, 而是**优先**将幂级数统一, 即全部转换成 $x^k$, 那么就需要进行变量代换, 同时考虑求和范围, 即

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k}_{k:=n-2}+\underbrace{\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^k}_{k:=n}-\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k}_{k:=n-1}+\underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k}_{k:=n}=0\quad\text{for } k\geqslant 2.$$

这时就可以将所有的 $\sum_{k=2}^{\infty}(\cdot)$ 项全部合并, 但是 $\sum_{k=0}^{\infty}(\cdot)$ 项需要将 $k=0$ 和 $k=1$ 提取出来, 即

$$\begin{aligned}&\left(2a_2+6a_3x+\sum_{k=2}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k\right)\\ &+\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^k-\left(a_1+2a_2x+\sum_{k=2}^{\infty}(k+1)a_{k+1}x^k\right)+\left(a_0+a_1x+\sum_{k=2}^{\infty}a_kx^k\right)=0\\ \Rightarrow\ &(2a_2-a_1+a_0)+(6a_3-2a_2+a_1)x\\ &+\sum_{k=2}^{\infty}\Big[(k+2)(k+1)a_{k+2}-(k+1)a_{k+1}+\Big(k(k-1)+1\Big)a_k\Big]x^k=0\end{aligned}$$

上式为 0 说明各项系数为 0, 即

$$\begin{cases}2a_2-a_1+a_0=0,\\ 6a_3-2a_2+a_1=0,\\ (k+2)(k+1)a_{k+2}-(k+1)a_{k+1}+(k^2-k+1)a_k=0.\end{cases}\quad\Rightarrow\quad\begin{cases}a_2=\dfrac{a_1-a_0}{2},\\ a_3=\dfrac{2a_2-a_1}{6}=-\dfrac{a_0}{6},\\ a_{k+2}=\dfrac{(k+1)a_{k+1}-(k^2-k+1)a_k}{(k+2)(k+1)}.\end{cases}$$

于是, 当 $k=2$ 时,

$$a_4=\frac{3a_3-3a_2}{12}=\frac{3\times\dfrac{-a_0}{6}-3\times\dfrac{a_1-a_0}{2}}{12}=\frac{2a_0-3a_1}{24}.$$

当 $k=3$ 时,

$$a_5 = \frac{4a_4 - 7a_3}{20} = \frac{4 \times \dfrac{2a_0 - 3a_1}{24} - 7 \times \dfrac{-a_0}{6}}{20} = \frac{3a_0 - a_1}{40}.$$

当 $k=4$ 时,

$$a_6 = \frac{5a_5 - 13a_4}{30} = \frac{5 \times \dfrac{3a_0 - a_1}{40} - 13 \times \dfrac{2a_0 - 3a_1}{24}}{30} = \frac{36a_1 - 17a_0}{720}.$$

后面的省略, 因为我们现在已经能展开到 $x^6$ 项了, 已经相对较多了. 因此得到通解为

$$\begin{aligned} y(x) &= a_0 + a_1 x + \left(\frac{a_1 - a_0}{2}\right) x^2 - \frac{a_0}{6} x^3 + \left(\frac{2a_0 - 3a_1}{24}\right) x^4 + \left(\frac{3a_0 - a_1}{40}\right) x^5 + \left(\frac{36a_1 - 17a_0}{720}\right) x^6 + \cdots \\ &= a_0 \left(1 - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{3}{40}x^5 - \frac{17}{720}x^6 + \cdots\right) + a_1 \left(x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \frac{1}{20}x^6 + \cdots\right), \end{aligned}$$

其中, $a_0$ 和 $a_1$ 为任意常数.