数值分析内部课程习题解答

第七章

SCAU DataHub

目录

1 From matrix to insight

Solution 1.1. 我们取术语（按行）为 {`numerical`, `analysis`, `fun`}，文档（按列）对应三句：(a) “Numerical analysis is the most fun type of analysis. ” (b) “It’ s fun to produce numerical values for the digits of pi. ” (c) “Complex analysis is a beautiful branch of mathematics. ”

逐句统计出现次数（大小写不敏感、精确匹配）得

$$T = \begin{array}{c|ccc} & (a) & (b) & (c) \\ \hline \text{numerical} & 1 & 1 & 0 \\ \text{analysis} & 2 & 0 & 1 \\ \text{fun} & 1 & 1 & 0 \end{array}.$$

这里 (a) 中 “analysis” 出现两次；(b) 中包含 “numerical” 与 “fun”；(c) 只含 “analysis”.

Solution 1.2. 按照 $A_{ij} = 1$（存在 $i \to j$），图的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

为核对：$A_{41} = 1$ 对应 $4 \to 1$；$A_{23} = 1$ 对应 $2 \to 3$；$A_{26} = 1$ 对应 $2 \to 6$；其余双向边在矩阵中成对出现，表现为对称.

Solution 1.3. 这是一个对称的矩阵，说明是无向图，考虑起来较容易.

(a) 顶点 5 的相邻顶点数（也称度数）等于第 5 行的 1 的个数：2 个（为顶点 3 与 6）.

(b) 该矩阵关于主对称轴对称，图是无向图. 无向图的边数为矩阵中所有 1 的总数的一半. 逐行计数得 $3+3+3+1+2+3+1 = 16$，故边数为 $16/2 = 8$.

(c) 由 (b) 可知为无向图（因为邻接矩阵对称）.

(d) 作图的一种方式是只连 $i < j$ 且 $A_{ij} = 1$ 的无向边，得到边集

$$\{(1,2),(1,4),(1,6),(2,3),(2,6),(3,5),(3,7),(5,6)\}.$$

Solution 1.4. 代码见 Gitee 仓库.

Solution 1.5. 代码见 Gitee 仓库.

2 Eigenvalue decomposition

Solution 2.1. 诱导范数控制谱半径.

(a) 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 有特征值 λ，对应特征向量 $x \neq 0$，即 $Ax = \lambda x$. 对任一诱导矩阵范数 $\|\cdot\|$ 都有

$$\|A\| = \sup_{y\neq 0} \frac{\|Ay\|}{\|y\|} \ \geq \ \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \frac{\|\lambda x\|}{\|x\|} = |\lambda|\frac{\|x\|}{\|x\|} = |\lambda|.$$

任意诱导范数均满足 $\|A\| \geq |\lambda|$，结论成立，换句话说也就是 $\|A\| \geq \rho(A)$（谱半径）.

(b) 取非正规矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

其全部特征值都为 1，故 $\max_\lambda |\lambda| = 1$. 对 2-范数，取 $v = (0,1)^T$，则

$$\frac{\|Av\|_2}{\|v\|_2} = \frac{\|(1,1)^T\|_2}{\|(0,1)^T\|_2} = \sqrt{2},$$

从而 $\|A\|_2 \geq \sqrt{2} > 1 = |\lambda|$.

Solution 2.2. 教材中 (7. 2. 4) 的矩阵是

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

其特征多项式为 $(\lambda-1)^2$，唯一特征值为 $\lambda = 1$. 解

$$(B-I)v = 0 \ \Rightarrow \ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \implies v_2 = 0,$$

故特征向量全为 $v = (v_1, 0)^T$ 的数倍，特征子空间维数为 1，从而不可能有两条线性无关的特征向量. 也即 B 不可对角化.

Solution 2.3. 代码见 Gitee 仓库.

Solution 2.4. 特殊矩阵的特征值分解.

(a) 设 $D = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. 对任意标准基向量 e_i，$De_i = d_i e_i$，故 d_i 是 D 的特征值，e_i 为对应特征向量. 对角矩阵的特征值就是其对角元.

(b) 取 3×3 上三角矩阵

$$T = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ 0 & t_{22} & t_{23} \\ 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}.$$

首先 $[1,0,0]^T$ 显然是 t_{11} 的特征向量. 接着设 $v=[a,1,0]^T$，希望 $(T-t_{22}I)v=0$. 计算第一分量得 $(t_{11}-t_{22})a+t_{12}=0$. 若 $t_{11}\neq t_{22}$，取 $a=-t_{12}/(t_{11}-t_{22})$ 即可得到 t_{22} 的特征向量；若 $t_{11}=t_{22}$，则解仍存在（此时 $t_{12}=0$ 也成立，否则与上三角范式矛盾），于是 $[0,1,0]^T$ 就是特征向量. 最后对 t_{33} 类似：令 $v=[a,b,1]^T$，方程 $(T-t_{33}I)v=0$ 给出

$$\begin{cases}(t_{11}-t_{33})a+t_{12}b+t_{13}=0,\\(t_{22}-t_{33})b+t_{23}=0.\end{cases}$$

当 $t_{22}\neq t_{33}$ 时可先解出 $b=-t_{23}/(t_{22}-t_{33})$，再代回解 a；若 $t_{22}=t_{33}$，同理由上三角结构可得 $t_{23}=0$，此时取 $b=0$，再解第一式亦可. 综上，三角矩阵的特征值为其对角元.

Solution 2.5. （本题答案由 AI 计算）令

$$A=\frac{\pi}{6}\begin{bmatrix}4&1\\4&4\end{bmatrix},\qquad v_1=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix},\ \lambda_1=\pi;\quad v_2=\begin{bmatrix}1\\-2\end{bmatrix},\ \lambda_2=\tfrac{\pi}{3}.$$

(a) 直接计算 $Av_1=\pi v_1$，$Av_2=\frac{\pi}{3}v_2$，且 v_1,v_2 线性无关，故 $A=V\Lambda V^{-1}$，其中

$$V=[v_1\ v_2]=\begin{bmatrix}1&1\\2&-2\end{bmatrix},\quad V^{-1}=\frac{1}{-4}\begin{bmatrix}-2&-1\\-2&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac12&\frac14\\\frac12&-\frac14\end{bmatrix},$$

$\Lambda=\mathrm{diag}(\pi,\pi/3)$，这给出 A 的特征值分解.

(b) 用多项式函算子（式 (7. 2. 7)）：若 $p(x)=(x-\pi)^4$，则

$$p(A)=Vp(\Lambda)V^{-1}=V\begin{bmatrix}0&0\\0&(\frac{\pi}{3}-\pi)^4\end{bmatrix}V^{-1}=c\,v_2w_2^T,$$

其中 $c=\left(-\frac{2\pi}{3}\right)^4=\frac{16\pi^4}{81}$，$w_2^T$ 为 V^{-1} 的第 2 行，即 $w_2^T=(\frac12,-\frac14)$. 故

$$p(A)=\frac{16\pi^4}{81}\begin{bmatrix}\frac12&-\frac14\\-1&\frac12\end{bmatrix}.$$

(c) 函数型（式 (7. 2. 7) 的函数版本）：$\cos(A)=V\cos(\Lambda)V^{-1}$. 由

$$\cos\Lambda=\mathrm{diag}(\cos\pi,\ \cos\tfrac{\pi}{3})=\mathrm{diag}(-1,\tfrac12),$$

写成特征投影之和：

$$\cos(A)=-\,v_1w_1^T+\tfrac12\,v_2w_2^T=-\begin{bmatrix}\frac12&\frac14\\1&\frac12\end{bmatrix}+\frac12\begin{bmatrix}\frac12&-\frac14\\-1&\frac12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac14&-\frac38\\-\frac32&-\frac14\end{bmatrix}.$$

Solution 2.6. 代码见 Gitee 仓库.

Solution 2.7. 代码见 Gitee 仓库.

Solution 2.8. 代码见 Gitee 仓库.

3 Singular value decomposition

Solution 3.1. （本题答案由 AI 计算）

(a)

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}}_{U}\underbrace{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}}_{\Sigma}\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}}_{V^T}.$$

U, V 都是正交矩阵，$\Sigma=\mathrm{diag}(1,0)$ 非负对角，因而这是一个 SVD（秩为 1）. 可取

$$\sigma_1=1,\qquad u_1=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},\qquad v_1=\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix}$$

（奇异向量的符号不唯一，取负亦可）.

(b)

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\end{bmatrix}=I_2\underbrace{\begin{bmatrix}0&0\\0&-1\end{bmatrix}}_{\text{不是非负对角}}I_2.$$

中间的矩阵并非非负对角阵（含 -1），因此不是 SVD（尽管两端是正交矩阵）.

(c) 令 $\alpha=1/\sqrt{2}$.

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&\sqrt{2}\\1&0\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha&0&-\alpha\\0&1&0\\\alpha&0&-\alpha\end{bmatrix}}_{U?}\underbrace{\begin{bmatrix}\sqrt{2}&0\\0&\sqrt{2}\\0&0\end{bmatrix}}_{\Sigma}\underbrace{\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}}_{V^T}.$$

此处左端因子并非正交：其第 1、3 列向量平行且内积为 -1，也都不是单位长度. 虽然 Σ 非负并与尺寸匹配、V 正交，但由于 U 不是正交矩阵，不是 SVD.

(d) 令 $\alpha=1/\sqrt{2}$.

$$\begin{bmatrix}\sqrt{2}&\sqrt{2}\\-1&1\\0&0\end{bmatrix}=\underbrace{I_3}_{U}\underbrace{\begin{bmatrix}2&0\\0&\sqrt{2}\\0&0\end{bmatrix}}_{\Sigma}\underbrace{\begin{bmatrix}\alpha&\alpha\\-\alpha&\alpha\end{bmatrix}}_{V^T}.$$

U 正交，V 的列向量互正交且单位，$\Sigma=\mathrm{diag}(2,\sqrt{2})$ 非负对角，故为 SVD. 因此

$$\sigma_1=2,\quad \sigma_2=\sqrt{2},\qquad u_1=e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad u_2=e_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},$$

$$v_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix},\qquad v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}.$$

Solution 3.2. （本题答案由 AI 计算）

$$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = 3,\ v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix};\ \lambda_2 = 1,\ v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

故奇异值

$$\sigma_1 = \sqrt{3}, \qquad \sigma_2 = 1,$$

右奇异向量取 $V = [v_1\ v_2]$. 左奇异向量由 $u_i = \dfrac{1}{\sigma_i}Av_i$ 得到：

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{6}} \\ -\sqrt{\dfrac{2}{3}} \end{bmatrix}, \qquad u_2 = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

于是（薄 SVD）

$$A = U\Sigma V^T, \qquad U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} & 0 \end{bmatrix}, \quad \Sigma = \operatorname{diag}(\sqrt{3}, 1), \quad V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

（若需全尺寸 SVD，可将 U 补成 4×4 的正交矩阵，将 Σ 补零行. ）

Solution 3.3. 代码见 Gitee 仓库.

Solution 3.4. 代码见 Gitee 仓库.

Solution 3.5. 设 $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. 由谱范数的定义

$$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)}, \qquad \|A^T\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(AA^T)}.$$

注意 A^TA 与 AA^T 相似于 Σ^2（Σ 为 A 的奇异值对角阵），故二者的特征谱相同，且 $\lambda_{\max}(A^TA) = \lambda_{\max}(AA^T) = \sigma_1^2$. 于是 $\|A\|_2 = \|A^T\|_2$.

Solution 3.6. 设 $A = U\Sigma V^T$ 为 SVD，$\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$. Moore–Penrose 伪逆 $A^+ = V\Sigma^+U^T$，其中 $\Sigma^+ = \operatorname{diag}(\sigma_1^{-1}, \dots, \sigma_r^{-1})$（对零奇异值置零）. 因此

$$\|A^+\|_2 = \|\Sigma^+\|_2 = \sigma_1(\Sigma^+) = \max_j \sigma_j(\Sigma^+) = \frac{1}{\min\{\sigma_j : \sigma_j > 0\}} = \frac{1}{\sigma_r}.$$

结合教材式 (7.3.6) $\|A\|_2 = \sigma_1$，得

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2\,\|A^+\|_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_r},$$

即为式 (7.3.7).

Solution 3.7. 给定 $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$（$m > n$）的 thin SVD：$A = \hat{U}\hat{S}V^T$，其中 $\hat{U} \in \mathbb{R}^{m\times n}$ 为 ONC、$\hat{S} = \mathrm{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. 伪逆 $A^+ = V\hat{S}^{-1}\hat{U}^T$. 于是

$$AA^+ = \hat{U}\hat{S}V^T \cdot V\hat{S}^{-1}\hat{U}^T = \hat{U}\hat{U}^T.$$

右端是投影到 $\mathrm{range}(A)$ 的正交投影矩阵，故结论成立.

Solution 3.8. 定义 $\kappa_2(A) = \|A\|_2\,\|A^+\|_2$. 设 $A = U\Sigma V^T$，则 $A^TA = V\Sigma^2V^T$，故

$$\|A^TA\|_2 = \|\Sigma^2\|_2 = \sigma_1^2, \qquad (A^TA)^+ = V\Sigma^{-2}V^T \;\Rightarrow\; \|(A^TA)^+\|_2 = \sigma_r^{-2}.$$

于是

$$\kappa_2(A^TA) = \|A^TA\|_2\;\|(A^TA)^+\|_2 = \sigma_1^2\,\sigma_r^{-2} = \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_r}\right)^2 = \kappa_2(A)^2.$$

Solution 3.9. 定理 7.3.5 已给出 A^*A 的非零特征值是 A 的奇异值平方. 对 AA^* 同理：若 $A = U\Sigma V^*$，则 $AA^* = U\Sigma^2U^*$，其非零特征值亦为 $\{\sigma_j^2\}$. 当 $m > n$ 时，AA^* 额外有 $m-n$ 个零特征值；当 $m \le n$ 时，A^*A 有 $n-m$ 个零特征值. 两者的非零谱一致.

Solution 3.10. （本题答案由 AI 计算）

(a) 令 $f(x) = \|Ax\|_2^2 = x^TA^TAx$，约束 $g(x) = \|x\|_2^2 - 1 = 0$. 拉格朗日函数 $L(x,\lambda) = x^TA^TAx - \lambda(x^Tx-1)$. 驻点满足 $\nabla_x L = 2A^TAx - 2\lambda x = 0$，即 $A^TAx = \lambda x$，故极值点是 A^TA 的特征向量.

(b) 由 Rayleigh 商可知最大值为 $\lambda_{\max}(A^TA) = \sigma_1^2$，从而 $\|A\|_2 = \max_{\|x\|=1}\|Ax\|_2 = \sqrt{\lambda_{\max}(A^TA)} = \sigma_1$，即 (7.3.6).

Solution 3.11. 令

$$C = \begin{bmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{bmatrix}, \qquad v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

(a) $Cv = \lambda v$ 等价于

$$A^*y = \lambda x, \qquad Ay = \lambda y.$$

(b) 消去 y：由 $A^*y = \lambda x$ 得 $y = \lambda^{-1}Ax$（$\lambda \ne 0$ 时），代回得 $A^*Ax = \lambda^2x$；或消去 x 得 $AA^*y = \lambda^2y$.

(c) 令 $A = USV^*$，则 $A^*A = VS^2V^*$，$AA^* = US^2U^*$. 故 (b) 表明 λ^2 必为某个 σ_k^2，即 $\lambda = \pm\sigma_k$.

(d) 若 A 非方阵，则 C 的维数为 $(m+n)\times(m+n)$. 当 $m \ne n$ 时，A^*A（或 AA^*）存在额外的零特征值，从 (b) 可见此时 $\lambda = 0$ 也是 C 的可能特征值.

4 Symmetry and definiteness

Solution 4.1. 设给出的分解均为 $A = V\Lambda V^*$，其中 $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_i)$ 为实对角矩阵.

(a) $\Lambda = \mathrm{diag}(-1,\,1)$. 一正一负，$A$ 为不定矩阵（indefinite）. 该分解不是 SVD（奇异值需非负）. 令 $S = \mathrm{diag}(\mathrm{sign}\,\lambda_i) = \mathrm{diag}(-1,\,1)$，取

$$U = VS, \qquad \Sigma = \mathrm{diag}(|\lambda_i|) = \mathrm{diag}(1,\,1),$$

则 $A = U\Sigma V^*$ 为一组 SVD.

(b) $\Lambda = \mathrm{diag}(5,\,0)$. 特征值非负，$A$ 为正半定（但奇异）. 因为 $A \geq 0$ 且 Hermitian，EVD 已经是 SVD：取 $U = V,\ \Sigma = \Lambda$ 即可.

(c) $\Lambda = \mathrm{diag}(-2,\,-8)$（顺序可换）. 全负，$A$ 为负定. 不是 SVD. 取 $S = \mathrm{diag}(-1,\,-1)$，令

$$U = VS, \qquad \Sigma = \mathrm{diag}(2,\,8)\ \ (\text{或排成}(8,\,2)),$$

则 $A = U\Sigma V^*$ 为 SVD.

Solution 4.2. 代码见 Gitee 仓库.

Solution 4.3. 想证明 $R_{A+B}(x) = R_A(x) + R_B(x)$. 定义 Rayleigh 商 $R_M(x) = \dfrac{x^*Mx}{x^*x}$，$x \neq 0$. 则

$$R_{A+B}(x) = \frac{x^*(A+B)x}{x^*x} = \frac{x^*Ax}{x^*x} + \frac{x^*Bx}{x^*x} = R_A(x) + R_B(x).$$

结论对任意同型矩阵（不必 Hermitian）成立.

Solution 4.4. 代码见 Gitee 仓库.

Solution 4.5. 给定 $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) 显式公式：

$$R_A(x) = \frac{x^TAx}{x^Tx} = \frac{3x_1^2 - 4x_1x_2}{x_1^2 + x_2^2}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \neq 0.$$

(b) 在 $(x_1, x_2) = (1, 2)$ 处：

$$R_A(1,2) = \frac{3-8}{1+4} = -1.$$

(c) 梯度：

$$\nabla R_A(x) = \frac{2}{x^Tx}\Big(Ax - R_A(x)\,x\Big).$$

注：关于向量函数求梯度，设 $f = x^TAx$（对称 A 下有 $\nabla f = 2Ax$）、$g = x^Tx$（$\nabla g = 2x$），将上式看作为 $R_A(x) = \big(x^TAx\big)\big(x^Tx\big)^{-1}$ 即可.

(d) 在 $(1,2)$ 处的驻点性：$Ax = [3\cdot 1 - 2\cdot 2,\ -2\cdot 1]^T = [-1,\ -2]^T$，且 $R_A(1,2) = -1$. 故

$$Ax - R_A(x)\,x = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix} - (-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 0,$$

从而 $\nabla R_A(1,2) = 0$.

Solution 4.6. 若 A skew-Hermitian（$A^* = -A$），我们希望证明 $R_A(x)$ 纯虚. 设 $d = x^*x > 0$，则

$$\overline{x^*Ax} = (x^*Ax)^* = x^*A^*x = x^*(-A)x = -(x^*Ax),$$

故 (x^*Ax) 为纯虚数或 0. 又 $R_A(x) = n/d$，分母 d 为正实数，因此 $R_A(x)$ 是纯虚数.

Solution 4.7. 代码见 Gitee 仓库.

5 Dimension reduction

Solution 5.1. 设 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ 的奇异值按降序为 $\sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$, SVD 为 $A = U\Sigma V^*$, $\Sigma = \operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$. 令 $E = \sigma_n\, u_n v_n^*$，则 $A - E = U\operatorname{diag}(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}, 0)V^*$ 奇异，由 Theorem 7.5.1，$\|E\|_2 = \sigma_n$，且对任意秩 $\leq n-1$ (奇异) 的扰动 B，$\|A - B\|_2 \geq \sigma_n$. 因此 $\operatorname{dist}_2(A, \mathcal{S}) = \sigma_n$.

注：Theorem 7.5.1 的含义是，把矩阵 A 做 SVD 后，按奇异值从大到小截断得到 A_k，它就是离 A 最近的、秩不超过 k 的矩阵. 最近距离正好等于下一条奇异值 σ_{k+1}，因此误差可由谱直接读出，既精确又可计算. 这给出了“保留主能量、丢弃小奇异值”的最佳低秩近似原则，支撑了压缩、去噪、PCA 等降维方法的解释.

Solution 5.2. $A \in \mathbb{C}^{7\times 4}$, 已知 A^*A 的特征值为 $3, 4, 7, 10$. 则奇异值为 $\sigma_1 = \sqrt{10}$, $\sigma_2 = \sqrt{7}$, $\sigma_3 = \sqrt{4} = 2$, $\sigma_4 = \sqrt{3}$（降序排列）. 由 Theorem 7.5.1，2-范数下到秩不超过 k 的最佳逼近误差为 σ_{k+1}.

(a) 到秩-3 矩阵的距离：$\sigma_4 = \sqrt{3}$.

(b) 到秩-2 矩阵的距离：$\sigma_3 = 2$.

Solution 5.3. 代码见 Gitee 仓库.

Solution 5.4. 令 $A = \begin{bmatrix} 1 & b \\ b & 1 \end{bmatrix}$，$b > 0$. 特征分解给出 $\lambda_1 = 1 + b$、$\lambda_2 = 1 - b$，对应单位特征向量

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

由于 A 对称（实 Hermitian），其 SVD 与特征分解一致，奇异值为 $\sigma_1 = |1+b| = 1+b$、$\sigma_2 = |1-b|$，最大奇异向量为 u_1. 故按 Theorem 7.5.1，2-范数下最近的秩-1 矩阵为

$$A_1 = \sigma_1\, u_1 u_1^{\mathsf{T}} = (1+b)\,\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix} = \frac{1+b}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix},$$

最优误差为 $\|A - A_1\|_2 = \sigma_2 = |1-b|$.

Solution 5.5. 代码见 Gitee 仓库.