# 数值分析内部课程习题解答

## 第四章第二部分

SCAU DataHub

2025 年 5 月 5 日

## 目录

## 5 Newton for nonlinear systems

**Solution 5.1.** 根据算法 4.5.4 计算.

- 第一步，计算 Jacobi 矩阵

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2 & x_1+2x_2\\ x_2^3+2x_1x_2^2 & 3x_1x_2^2+2x_1^2x_2\end{bmatrix},$$

  接着代入 $\mathbf{x}_1=[-2,1]^T$ 计算 $\mathbf{y}_1$ 和 $\mathbf{A}_1$

$$\mathbf{y}_1=\mathbf{f}(\mathbf{x}_1)=\begin{bmatrix}-2\\ 3\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_1=\mathbf{J}(\mathbf{x}_1)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}.$$

- 第二步，求解线性方程组 $\mathbf{A}_1\mathbf{s}_1=-\mathbf{y}_1$，得到 $\mathbf{s}_1=[2,\frac{3}{2}]^T$.

- 第三步，$\mathbf{x}_2=\mathbf{x}_1+\mathbf{s}_1=[0,\frac{5}{2}]^T$.

**Solution 5.2.** 根据多维的牛顿迭代算法，代入题设 $\mathbf{f}(\mathbf{x})=\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{b}$ 可证，过程略.

**Solution 5.3.** 学会构造方程组并通过算法求根.

(a) 非线性系统为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}u\ln u+v\ln v+0.3\\ u^4+v^2-1\end{bmatrix}=\mathbf{0},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}.$$

(b) Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\ln u+1 & \ln v+1\\ 4u^3 & 2v\end{bmatrix}.$$

(c) 代码见 Gitee 仓库.

(d) 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 5.4.** 学会构造方程组并通过算法求根.

(a) 代码见 Gitee 仓库.

(b) 考虑将参数方程化为关于 $x,y$ 的方程，由题设

$$x_1(t)=-5+10\cos(t),\quad y_1(t)=6\sin(t),$$

将右边挪剩 $\cos(t)$ 和 $\sin(t)$

$$(x_1(t)+5)/10=\cos(t),\quad y_1(t)/6=\sin(t),$$

利用 $\cos^2(t)+\sin^2(t)=1$，得到

$$\left(\frac{x_1+5}{10}\right)^2+\left(\frac{y_1}{6}\right)^2=1.$$

同理得第二个椭圆方程

$$\left(\frac{x_2}{8}\right)^2+\left(\frac{y_2-3}{12}\right)^2=1.$$

于是非线性系统为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\left(\frac{x+5}{10}\right)^2+\left(\frac{y}{6}\right)^2-1\\ \left(\frac{x}{8}\right)^2+\left(\frac{y-3}{12}\right)^2-1\end{bmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}.$$

(c) Jacobi 矩阵为

$$\mathbf{J}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}\frac{x+5}{50} & \frac{y}{18}\\ \frac{x}{32} & \frac{y-3}{72}\end{bmatrix}.$$

(d) 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 5.5.** 反复试错为牛顿法寻找合适的初值.

(a) 非线性系统为

$$\mathbf{f}(\mathbf{x})=\begin{bmatrix}x-5-\frac{\lambda x}{25}\\ y-4-\frac{\lambda y}{16}\\ z-3-\frac{\lambda z}{9}\\ \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}-1\end{bmatrix}=\mathbf{0}.$$

(b) Jacobi 矩阵为

$$J(u)=\begin{bmatrix}1-\frac{\lambda}{25} & 0 & 0 & -\frac{x}{25}\\ 0 & 1-\frac{\lambda}{16} & 0 & -\frac{y}{16}\\ 0 & 0 & 1-\frac{\lambda}{9} & -\frac{z}{9}\\ \frac{2x}{25} & \frac{2y}{16} & \frac{2z}{9} & 0\end{bmatrix}.$$

(c) 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 5.6.** 代码见 Gitee 仓库.

# 6 Quasi-Newton methods

**Solution 6.1.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 6.2.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 6.3.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 6.4.** 这是一个验证性的证明.

不妨先简化记号，设

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T, \quad \mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{\beta}, \quad \beta = 1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}.$$

我们希望证明 $\mathbf{C} = \mathbf{B}^{-1}$，即 $\mathbf{BC} = \mathbf{I}$ 且 $\mathbf{CB} = \mathbf{I}$.

我们演示计算 $\mathbf{BC}$ 的过程

$$\begin{aligned}
\mathbf{BC} &= (\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)\Big(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{\beta}\Big) \\
&= \underbrace{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}}_{=\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{\beta} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{\beta} \\
&= \mathbf{I} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{\beta} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{\beta}
\end{aligned}$$

注意到 $\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}$ 是标量，于是

$$\frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{\beta} = \frac{\big(\mathbf{u}(\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u})\big)\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{\beta} = (\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u})\frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}{\beta}.$$

我们将所有 $\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}$ 项合并，可得

$$\begin{aligned}
\mathbf{BC} =& \mathbf{I} - \frac{1}{\beta}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}{\beta}(\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}) \\
=& \mathbf{I} - \underbrace{\frac{1 - \beta + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}{\beta}\mathbf{u}\mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}}_{=\mathbf{0}},
\end{aligned}$$

只需要代入记号 $\beta$ 的表达式，就可以发现第二项为 $\mathbf{0}$，进而证明 $\mathbf{BC} = \mathbf{I}$.

计算右乘也同理，可算出 $\mathbf{CB} = \mathbf{I}$，步骤一模一样，只是展开顺序互换.

因此，只要 $\mathbf{A}$ 可逆且 $\beta \neq 0$，就有

$$(\mathbf{A} + \mathbf{u}\mathbf{v}^T)^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\frac{\mathbf{u}\mathbf{v}^T}{1 + \mathbf{v}^T\mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}}\mathbf{A}^{-1}$$

**Solution 6.5.** 这是多元函数微分，关键是把向量形式用分量具体写出来.

根据教材记号

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

我们将 $\varphi(\mathbf{x})$ 写成分量的形式

$$\varphi(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x})^T\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\mathbf{x})^2.$$

对第 $x_j$ 个分量求偏导：

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^{n} 2\, f_i(\mathbf{x})\, \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = 2 \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_j} \\ \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_j} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}) \end{bmatrix}}_{\text{将求和写成内积的形式}} = 2\big[\mathbf{J}(\mathbf{x})^T\mathbf{f}(\mathbf{x})\big]_j.$$

把所有 $n$ 个偏导量收集成向量便得

$$\nabla\varphi(\mathbf{x}) = 2\,\mathbf{J}(\mathbf{x})^T\mathbf{f}(\mathbf{x}).$$

注：$\nabla$ 表示梯度，一元函数求导叫导数，多元函数对一个元求导叫偏导，多元函数对所有元求导叫梯度.

**Solution 6.6.** Levenberg 方法等价于 Newton 法加惩罚项.

将题设优化问题通过矩阵分块写为最小二乘的形式

$$\min_{\mathbf{v}} \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \lambda\,\mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{v} + \begin{bmatrix} \mathbf{f}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \right\|_2^2,$$

并记

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_k \\ \lambda\,\mathbf{I} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_k \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

那么就变为最小二乘的形式，即 $\min_{\mathbf{v}} \|\mathbf{M}\mathbf{v} + \mathbf{c}\|_2^2$，其正规方程为

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M}\,\mathbf{v} = -\mathbf{M}^T\mathbf{c}.$$

直接计算，有

$$\mathbf{M}^T\mathbf{M} = \mathbf{A}_k^T\mathbf{A}_k + \lambda^2\mathbf{I}, \qquad \mathbf{M}^T\mathbf{c} = \mathbf{A}_k^T\mathbf{f}_k,$$

所以 Levenberg 方法就是上述最小二乘问题的正规方程，二者同解.

# 7 Nonlinear least squares

**Solution 7.1.** 将非线性函数用线性近似，并求线性近似意义下的解.

(a) 对非线性向量函数 $\mathbf{f}(x) = [x-8, x^2-4]$，其在某点 $x$ 附近的线性近似 (一阶泰勒近似) 为

$$\mathbf{q}(x+s) = \mathbf{f}(x) + \mathbf{J}(x)s,$$

其中 $x, s$ 是标量，且

$$\mathbf{J}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2x \end{bmatrix}.$$

代入 $x = 2$，得到线性近似为

$$\mathbf{q}(2+s) = \mathbf{f}(2) + \mathbf{J}(2)s = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} -6+s \\ 4s \end{bmatrix}.$$

(b) 设初始点为 $x_0 = 2$，根据算法 4.7.2，现在需要求解线性最小二乘问题

$$\min_s \|\mathbf{q}(s)\|_2^2 = \min_s \underbrace{\left[(-6+s)^2 + (4s)^2\right]}_{:=g(x)}.$$

我们对目标函数 $g(s)$ 求导并令其为零

$$g'(s) = 34s - 12 = 0 \Longrightarrow s = \frac{6}{17}.$$

于是新的估计为

$$x_1 = x_0 + s = 2 + \frac{6}{17} = \frac{40}{17}.$$

**Solution 7.2.** 与上题类似，本题关注二阶近似的模型. 解答略.

**Solution 7.3.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 7.4.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 7.5.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 7.6.** 代码见 Gitee 仓库.