# 数值分析内部课程习题解答

## 第六章

SCAU DataHub

2025 年 8 月 18 日

## 目录

# 1 Basics of IVPs

**Solution 1.1.** 我们检验 Theorem 6.1.6（存在唯一性定理）的 Lipschitz 对 $u$ 条件，即 $\frac{\partial f}{\partial u}$ 存在且有界，并在可能时给出最小的全局常数 $L$（在题设的 $t$ 区间上，对所有 $u$ 有效）.

(a) $f(t,u) = 3u,\ 0 \le t \le 1.$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = 3,\ \text{对 } u \text{ 常数}.$$

因此关于 $u$ 的 Lipschitz 常数最小为 $L = 3$（全局）.

(b) $f(t,u) = -t\sin u,\ 0 \le t \le 5.$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial u}\right| = \big|-t\cos u\big| \le t \le 5,$$

对 $u$ 的上确界由 $|\cos u| \le 1$ 给出. 于是最小可取 $L = 5$（在 $t \in [0,5]$ 上的全局常数）.

(c) $f(t,u) = -(1+t^2)u^2,\ 1 \le t \le 3.$

$$\frac{\partial f}{\partial u} = -2(1+t^2)u,$$

其对 $u$ 不有界（当 $u$ 充分大的时候，$-2(1+t^2)u$ 也会很大），因而在整条 $u$ 轴上不存在有限的全局 Lipschitz 常数；定理在全局意义下不适用. 不过在任何有界带 $\{|u| \le M\}$ 上是局部 Lipschitz 的，并可取

$$L = \max_{t\in[1,3]} 2(1+t^2)M = 2(1+3^2)M = 20M.$$

(d) $f(t,u) = \sqrt{u},\ 0 \le t \le 1.$ 定义域受限于 $u \ge 0$. 导数为

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{1}{2\sqrt{u}},$$

在 $u \downarrow 0$ 处无界，因此在包含 $u = 0$ 的集合上不是 Lipschitz；定理不适用. 若限制在 $u \ge \varepsilon > 0$，则可取 $L = 1/(2\sqrt{\varepsilon})$.

**Solution 1.2.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 1.3.** 对一阶线性 ODE，积分因子法是一个好办法.

(a) $u' = -t\,u,\ 0 \le t \le 5,\ u(0) = 2.$ 标准形式 $u' = g(t) + uh(t)$，这里 $g(t) = 0,\ h(t) = -t$，所以积分因子

$$\rho(t) = \exp[\int -h(t)\,dt] = \exp[\int t\,dt] = \exp[\frac{1}{2}t^2 + C],$$

于是解的形式可以由

$$\rho(t)u(t) = u_0 + \int_0^t \rho(s)g(s)\,ds = u_0$$

结合初值条件给出，解析解为

$$u(t) = 2e^{-t^2/2}.$$

注：$\rho(t)u(t) = u_0 + \int_0^t \rho(s)g(s)$ 的来由是，考虑到一阶线性 ODE 的形式

$$u' = g(t) + uh(t),$$

希望构造一个 $\rho(t)$ 使得 $\rho'(t) = -\rho(t)h(t)$，就有

$$(\rho u)' = \rho' u + \rho u' = \rho(u' - hu) = \rho g,$$

再对两端积分，得到

$$\rho(t)u(t) = u_0 + \int_0^t \rho(t)g(t)\,dt,$$

进而可以导出解 $u$. 经构造，发现令 $\rho(t) = \exp[\int -h(t)\,dt]$ 即可满足.

(b) 解法同 (a)，解析解为

$$u(t) = -\frac{1}{5}e^{-2t} + \frac{26}{5}e^{3t}.$$

**Solution 1.4.** 考虑 IVP $u' = u^2$，$u(0) = \alpha$.

(a) Theorem 6.1.6(存在唯一性定理)要求在包含初值的矩形域上 $f$ 关于 $u$ 的 Lipschitz 常数 $L$ 有统一上界. 此处 $\partial f/\partial u = 2u$ 随 $|u|$ 无界，因而不存在全局有限 $L$，该定理不直接适用（当然，$f$ 是连续的，在局部 $|u|$ 有界，所以可以说局部存在唯一解）.

(b) 直接代回可验证 $u(t) = \alpha/(1-\alpha t)$ 满足方程与初值.

(c) 解的极点出现在 $1 - \alpha t = 0 \Rightarrow t = 1/\alpha$. 因此：

- 若 $\alpha > 1$，则奇点 $t = 1/\alpha \in (0,1)$，解在 $[0,1]$ 上不能全程存在；
- 若 $\alpha = 1$，在 $t = 1$ 处发散，亦不能在闭区间 $[0,1]$ 上存在；
- 若 $0 \le \alpha < 1$，则 $1/\alpha > 1$（或 $\alpha = 0$ 得平凡解），解在 $[0,1]$ 上存在；
- 若 $\alpha < 0$，奇点位于 $t < 0$，故在 $[0,1]$ 上亦存在.

综上，在 $[0,1]$ 上，当且仅当 $\alpha < 1$ 时解存在.

**Solution 1.5.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 1.6.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 1.7.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 1.8.** 代码见 Gitee 仓库.

## 2 Euler's method

**Solution 2.1.** （本题答案由 AI 计算）按欧拉法 $u_{i+1} = u_i + h\,f(t_i, u_i)$（式 (6.2.3)），做两步并在 $t_2$ 处用给定精确解 $\hat{u}$ 计算误差.

(a) $u' = -2tu,\ u(0) = 2,\ h = 0.1,\ \hat{u}(t) = 2e^{-t^2}$.

$t_0 = 0,\ u_0 = 2$，$u_1 = u_0 + h(-2t_0u_0) = 2$；

$t_1 = 0.1$，$u_2 = u_1 + h(-2t_1u_1) = 2 - 0.04 = 1.96$.

$t_2 = 0.2$ 处精确值 $\hat{u}(0.2) = 2e^{-0.04} \approx 1.9215788783$, 误差 $|e| = |1.96 - 1.9215788783| \approx 3.8421 \times 10^{-2}$.

(b) $u' = u + t,\ u(0) = 2,\ h = 0.2,\ \hat{u}(t) = -1 - t + 3e^t$.

$u_1 = 2 + 0.2 \cdot (2 + 0) = 2.4$;

$u_2 = 2.4 + 0.2 \cdot (2.4 + 0.2) = 2.92$.

$t_2 = 0.4$ 处 $\hat{u}(0.4) = -1.4 + 3e^{0.4} \approx 3.075474093$，误差 $\approx 1.5547 \times 10^{-1}$.

(c) $t\,u' + u = 1,\ u(1) = 6,\ h = 0.25,\ \hat{u}(t) = 1 + 5/t$. 整理为 $u' = (1 - u)/t$.

$t_0 = 1,\ u_0 = 6$，$u_1 = 6 + 0.25 \cdot (1 - 6)/1 = 4.75$；

$t_1 = 1.25$，$u_2 = 4.75 + 0.25 \cdot (1 - 4.75)/1.25 = 4.00$.

$t_2 = 1.5$ 处 $\hat{u}(1.5) = 1 + \frac{5}{1.5} = \frac{13}{3} \approx 4.333333333$，误差 $\approx 3.3333 \times 10^{-1}$.

(d) $u' - 2u(1 - u) = 0$（即 $u' = 2u(1 - u)$），$u(0) = \frac{1}{2}$，$h = 0.25$，$\hat{u}(t) = 1/(1 + e^{-2t})$.

$u_1 = 0.5 + 0.25 \cdot 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.625$;

$u_2 = 0.625 + 0.25 \cdot 2 \cdot 0.625 \cdot 0.375 = 0.7421875$.

$t_2 = 0.5$ 处 $\hat{u}(0.5) = 1/(1 + e^{-1}) \approx 0.731058579$，误差 $\approx 1.1129 \times 10^{-2}$.

**Solution 2.2.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 2.3.** 写成一般一步格式 $u_{i+1} = u_i + h\,\phi(t_i, u_i, h)$，即

$$\phi(t, u, h) = f\big(t + h,\ u + h\,f(t, u)\big)\ .$$

根据 Definition 6.2.4, 所谓 consistent 是指: 步长足够小时, 截断误差趋于 0. 由 Lemma 6.2.5 可推出 consistent.

**Solution 2.4.** 考虑 $u' = ku,\ u(0) = 1$，步长为 $h$.

(a) 欧拉法给出

$$u_{i+1} = u_i + hku_i = (1 + hk)u_i \quad \Rightarrow \quad u_i = (1 + hk)^i\,.$$

(b) 精确解为 $\hat{u}(t) = e^{kt}$. 当 $k \le 0$ 时，$\hat{u}(t)$ 在 $t \to \infty$ 时有界（$k < 0$ 收敛到 0，$k = 0$ 恒为 1）. 若取 $k < 0$ 且步长满足

$$|1 + hk| > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 + hk < -1 \Longleftrightarrow hk < -2,$$

则欧拉迭代 $|(1+hk)^i| \to \infty$（交替发散），而精确解仍有界. 例如 $k = -1$，$h = 3$.

**Solution 2.5.** 要证 $1 + x \le e^x$（$x \ge 0$）. 设 $g(x) = e^x - 1 - x$，则 $g(0) = 0$，且

$$g'(x) = e^x - 1 \ge 0 \quad (x \ge 0).$$

故 $g$ 在 $[0, \infty)$ 上单调不减，并由 $g(0) = 0$ 得 $g(x) \ge 0$，即

$$1 + x \le e^x, \quad x \ge 0.$$

**Solution 2.6.** **结合机器精度的最优步长.** 若单步的单位局部截断误差包含舍入误差，$\tau_{i+1}(h) \le Ch^p + \epsilon_{i+1} h^{-1}$，且 $|\epsilon_{i+1}| \le \epsilon$，则

$$h\, \tau_{i+1}(h) \le Ch^{p+1} + \epsilon.$$

沿用 Theorem 6.2.7 的证明（把 $Ch^{p+1}$ 换成 $Ch^{p+1} + \epsilon$），得到全局误差满足

$$|\hat{u}(t_i) - u_i| \ \le \ \frac{Ch^p + \epsilon\, h^{-1}}{L} \left[ e^{L(t_i - a)} - 1 \right],$$

其中 $L$ 为 $\left|\partial\phi/\partial u\right|$ 的上界（同定理假设）. 从该界还看出最优步长的量级由 $Ch^p \sim \epsilon h^{-1}$ 平衡给出，故最优的 $h$ 应该与 $(\epsilon/C)^{1/(p+1)}$ 同阶.

## 3 IVP systems

**Solution 3.1.** （本题答案由 AI 计算）将 $y, y', y'', \ldots$ 逐一作为新未知量即可.

(a) $y''' - 3y'' + 3y' - y = t$，初值 $y(0) = 1$，$y'(0) = 2$，$y''(0) = 3$. 令 $u_1 = y$，$u_2 = y'$，$u_3 = y''$，则

$$u_1' = u_2, \quad u_2' = u_3, \quad u_3' = 3u_3 - 3u_2 + u_1 + t,$$

初值 $u_1(0) = 1$，$u_2(0) = 2$，$u_3(0) = 3$.

(b) $y'' + 4(x^2 - 1)y' + y = 0$，$y(0) = 2$，$y'(0) = -1$（自变量为 $x$）. 令 $u_1 = y$，$u_2 = y'$，则

$$u_1' = u_2, \qquad u_2' = -\,4(x^2 - 1)u_2 - u_1,$$

初值 $u_1(0) = 2$，$u_2(0) = -1$.

(c) $x''+\dfrac{ax}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0,\quad y''+\dfrac{ay}{(x^2+y^2)^{3/2}}=0$, 且 $x(0)=1$, $x'(0)=y(0)=0$, $y'(0)=3$. 令 $u_1=x$, $u_2=y$, $u_3=x'$, $u_4=y'$, $r=\sqrt{u_1^2+u_2^2}$, 则

$$u_1'=u_3,\quad u_2'=u_4,\quad u_3'=-\frac{a\,u_1}{r^3},\quad u_4'=-\frac{a\,u_2}{r^3},$$

初值 $=[1,0,0,3]$.

(d) $y^{(4)}-y=e^{-t}$, $y(0)=0$, $y'(0)=0$, $y''(0)=1$, $y^{(3)}(0)=0$. 令 $u_1=y$, $u_2=y'$, $u_3=y''$, $u_4=y^{(3)}$, 则

$$u_1'=u_2,\quad u_2'=u_3,\quad u_3'=u_4,\quad u_4'=u_1+e^{-t},$$

初值 $=[0,0,1,0]$.

(e) $y'''-y''+y'-y=t$, $y(0)=1$, $y'(0)=2$, $y''(0)=3$. 令 $u_1=y$, $u_2=y'$, $u_3=y''$, 则

$$u_1'=u_2,\quad u_2'=u_3,\quad u_3'=u_3-u_2+u_1+t,$$

初值 $[1,2,3]$.

**Solution 3.2.** （本题答案由 AI 计算）统一令 $u_1=y$, $u_2=y'$, 则欧拉法为

$$\mathbf{u}_{k+1}=\mathbf{u}_k+h\,\mathbf{f}(t_k,\mathbf{u}_k),\qquad \mathbf{u}=(u_1,u_2)^\top,\ t_{k+1}=t_k+h.$$

在第 2 步到达 $t_2=t_0+2h$ 处，用题给精确解 $\hat{y}$ 计算 $|u_1(t_2)-\hat{y}(t_2)|$.

(a) $y''+4y=4t$, $y(0)=1$, $y'(0)=1$, $\hat{y}=t+\cos(2t)$, $h=0.1$.

系统：$u_1'=u_2$, $u_2'=4t-4u_1$.

步 1：$u_1(0.1)=1+0.1(1)=1.1$，$u_2(0.1)=1+0.1(0-4\cdot 1)=0.6$.

步 2：$u_1(0.2)=1.1+0.1(0.6)=1.16$，$u_2(0.2)=0.6+0.1(0.4-4.4)=0.2$.

精确值 $\hat{y}(0.2)=0.2+\cos 0.4\approx 1.121060994$,

误差 $|1.16-\hat{y}(0.2)|\approx 3.8939\times 10^{-2}$.

(b) $y''-4y=4t$, $y(0)=2$, $y'(0)=-1$, $\hat{y}=e^{2t}+e^{-2t}-t$, $h=0.1$.

系统：$u_1'=u_2$, $u_2'=4t+4u_1$.

步 1：$u_1(0.1)=2-0.1=1.9$，$u_2(0.1)=-1+0.1(0+8)=-0.2$.

步 2：$u_1(0.2)=1.9-0.02=1.88$，$u_2(0.2)=-0.2+0.1(0.4+7.6)=0.6$.

精确值 $\hat{y}(0.2)=e^{0.4}+e^{-0.4}-0.2\approx 1.962144744$,

误差 $\approx 8.2145\times 10^{-2}$.

(c) $2x^2y''+3xy'-y=0,\ y(2)=1,\ y'(2)=-\frac{1}{2},\ \hat{y}=2/x,\ h=1/8$（自变量为 $x$）.

系统：$u_1'=u_2,\ u_2'=\dfrac{u_1-3xu_2}{2x^2}$. $x_0=2,\ x_1=2.125,\ x_2=2.25.$

步 1：$u_1(2.125)=1+\frac{1}{8}(-\frac{1}{2})=0.9375$，$u_2(2.125)=-\frac{1}{2}+\frac{1}{8}\cdot\frac{1-3\cdot 2(-\frac{1}{2})}{2\cdot 2^2}=-0.4375.$

步 2：在 $x=2.125$ 处 $u_2'=\dfrac{0.9375-3\cdot 2.125(-0.4375)}{2\cdot(2.125)^2}\approx 0.4125$，

故 $u_1(2.25)=0.9375+\frac{1}{8}(-0.4375)=0.8828125.$

精确值 $\hat{y}(2.25)=2/2.25\approx 0.888888889$，

误差 $\approx 6.0764\times 10^{-3}.$

(d) 同 (c)，但 $y(1)=4,\ y'(1)=-1,\ \hat{y}=2(x^{1/2}+x^{-1}),\ h=1/4.\ x_0=1,\ x_1=1.25,\ x_2=1.5$；

系统同上.

步 1：$u_1(1.25)=4+\frac{1}{4}(-1)=3.75$，$u_2(1.25)=-1+\frac{1}{4}\cdot\dfrac{4-3\cdot 1(-1)}{2\cdot 1^2}=-0.125.$

步 2：在 $x=1.25$ 处 $u_2'=\dfrac{3.75-3\cdot 1.25(-0.125)}{2\cdot(1.25)^2}=1.35$，

故 $u_1(1.5)=3.75+\frac{1}{4}(-0.125)=3.71875.$

精确值 $\hat{y}(1.5)=2(\sqrt{1.5}+1/1.5)\approx 3.782823076$，

误差 $\approx 6.4073\times 10^{-2}.$

**Solution 3.3.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 3.4.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 3.5.** 代码见 Gitee 仓库.

# 4 Runge–Kutta methods

**Solution 4.1.** （本题答案由 AI 计算）改进欧拉（Improved Euler, IE）采用公式

$$u_{i+1}=u_i+h\,f\Big(t_i+\tfrac{h}{2},\,u_i+\tfrac{h}{2}f(t_i,u_i)\Big),\qquad h=0.2.$$

(a) $u'=-2tu,\ u(0)=2.$
$k_1=f(0,2)=0,\ u_{1/2}=2+\frac{h}{2}k_1=2,\ f(0.1,2)=-0.4.$
$u_1=2+0.2(-0.4)=1.92.$

(b) $u'=u+t,\ u(0)=2.$
$k_1=f(0,2)=2,\ u_{1/2}=2+0.1\cdot 2=2.2,\ f(0.1,2.2)=2.3.$
$u_1=2+0.2\cdot 2.3=2.46.$

(c) $(1+x^3)u\,u' = x^2,\ u(0)=1$，故 $f(x,u) = \dfrac{x^2}{(1+x^3)u}$.

$k_1 = f(0,1) = 0,\ u_{1/2} = 1,\ f(0.1,1) = \dfrac{0.01}{1.001} = 0.00999001\ldots$
$u_1 = 1 + 0.2\cdot 0.00999001 = 1.001998002.$

**Solution 4.2.** （本题答案由 AI 计算）修正欧拉（Modified Euler, ME2）采用

$$k_1 = f(t_i,u_i),\quad k_2 = f(t_i+h, u_i+hk_1),\quad u_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{2}(k_1+k_2),\qquad h=0.2.$$

(a) $u' = -2tu,\ u(0)=2.$
$k_1 = 0,\ k_2 = f(0.2,2) = -0.8,\ u_1 = 2+0.1(0-0.8) = 1.92.$

(b) $u' = u+t,\ u(0)=2.$
$k_1 = 2,\ u^* = 2+0.2\cdot 2 = 2.4,\ k_2 = 2.6,\ u_1 = 2+0.1(2+2.6) = 2.46.$

(c) $(1+x^3)u\,u' = x^2,\ u(0)=1.$
$k_1 = 0,\ k_2 = f(0.2,1) = \dfrac{0.04}{1.008} = 0.03968254\ldots,$
$u_1 = 1+0.1\cdot 0.03968254 = 1.003968254.$

**Solution 4.3.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 4.4.** （本题答案由 AI 计算）Heun 方法（$c_1=\frac{2}{3},\ a_{11}=\frac{2}{3},\ b_1=\frac{1}{4},\ b_2=\frac{3}{4}$）:

$$k_1 = f(t_i,u_i),\quad k_2 = f\big(t_i+\tfrac{2h}{3},\,u_i+\tfrac{2h}{3}k_1\big),\quad u_{i+1} = u_i + h\big(\tfrac{1}{4}k_1+\tfrac{3}{4}k_2\big),\quad h=0.2.$$

(a) $u' = -2tu,\ u(0)=2.$
$k_1 = 0,\ k_2 = f(0.133\bar{3},2) = -0.533\bar{3},\ u_1 = 2+0.2\cdot\frac{3}{4}(-0.533\bar{3}) = 1.92.$

(b) $u' = u+t,\ u(0)=2.$
$k_1 = 2,\ u^* = 2+\frac{2}{3}\cdot 0.2\cdot 2 = 2.266\bar{6},\ k_2 = 2.4,$
$u_1 = 2+0.2\,(0.5+1.8) = 2.46.$

(c) $(1+x^3)u\,u' = x^2,\ u(0)=1.$
$k_1 = 0,\ k_2 = f(0.133\bar{3},1) = \dfrac{0.017777\ldots}{1.002370\ldots} \approx 0.017735,$
$u_1 = 1+0.2\cdot\big(\frac{3}{4}\,0.017735\big) = 1.002660361.$

**Solution 4.5.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 4.6.** （本题答案由 AI 计算）经典 RK4：

$$\begin{gathered}k_1 = f(t_i,u_i),\quad k_2 = f\big(t_i+\tfrac{h}{2},u_i+\tfrac{h}{2}k_1\big),\\ k_3 = f\big(t_i+\tfrac{h}{2},u_i+\tfrac{h}{2}k_2\big),\quad k_4 = f(t_i+h,u_i+hk_3),\\ u_{i+1} = u_i+\tfrac{h}{6}(k_1+2k_2+2k_3+k_4),\qquad h=0.2.\end{gathered}$$

(a) $u' = -2tu,\ u(0)=2.$ 一步计算得 $u_1 \approx 1.921578667.$ 精确值 $2e^{-0.04} \approx 1.921578878.$

(b) $u' = u + t,\ u(0) = 2$. 一步计算得 $u_1 \approx 2.464200000$. 精确值 $-1 - 0.2 + 3e^{0.2} \approx 2.464208274$.

(c) $(1+x^3)u\,u' = x^2,\ u(0) = 1$. 一步计算得 $u_1 \approx 1.002651453$. 精确值 $\sqrt{1 + \frac{2}{3}\ln(1+0.008)} \approx 1.002652539$.

**Solution 4.7.** 要证：修正欧拉（ME2）至少二阶. 记 $f = f(t_i, \hat{u}(t_i))$，教材式 (6.4.2) 给出

$$\hat{u}(t_{i+1}) = \hat{u}(t_i) + h\Big[f + \tfrac{h}{2}(f_t + f f_u)\Big] + O(h^3).$$

ME2 为

$$u_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{2}\left[f(t_i, u_i) + f(t_i + h, u_i + hf(t_i, u_i))\right].$$

对第二个 $f$ 用式 (6.4.3) 在 $(\alpha, \beta) = (h, hf)$ 处展开：

$$f(t_i + h, u_i + hf) = f + hf_t + hff_u + O(h^2).$$

代回得

$$u_{i+1} = u_i + h\Big[f + \tfrac{h}{2}(f_t + ff_u)\Big] + O(h^3),$$

与精确解的展开在 $O(h^2)$ 上一致，故局部截断误差为 $O(h^3)$，方法为二阶.

**Solution 4.8.** 要证：Heun 方法至少二阶. 其更新为

$$u_{i+1} = u_i + h\Big(\tfrac{1}{4}f(t_i, u_i) + \tfrac{3}{4}f\Big(t_i + \tfrac{2h}{3},\ u_i + \tfrac{2h}{3}f(t_i, u_i)\Big)\Big).$$

对第二个 $f$ 用式 (6.4.3) 在 $(\alpha, \beta) = (\frac{2h}{3},\ \frac{2h}{3}f)$ 处展开：

$$f\Big(t_i + \tfrac{2h}{3}, u_i + \tfrac{2h}{3}f\Big) = f + \tfrac{2h}{3}f_t + \tfrac{2h}{3}ff_u + O(h^2).$$

代回得

$$u_{i+1} = u_i + h\Big[f + \tfrac{h}{2}(f_t + ff_u)\Big] + O(h^3),$$

与式 (6.4.2) 的精确展开到 $O(h^2)$ 一致，故 Heun 至少为二阶.

**Solution 4.9.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 4.10.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 4.11.** 考虑 $u' = cu,\ u(0) = 1$，常数 $c > 0$.

(a) 在修正欧拉（ME2）下，

$$k_1 = cu_i, \qquad k_2 = c(u_i + hk_1) = cu_i(1 + ch),$$

$$u_{i+1} = u_i + \tfrac{h}{2}(k_1 + k_2) = u_i\big[1 + ch + \tfrac{1}{2}(ch)^2\big].$$

$$\frac{u_{i+1}}{u_i} = 1 + ch + \tfrac{1}{2}(ch)^2.$$

(b) 若 $ch = -3$，放大因子 $G = 1 - 3 + \frac{9}{2} = 2.5 > 1$，故 $|u_i| = |G|^i \to \infty$ 随步数发散；而当 $c < 0$ 时精确解 $\hat{u}(t) = e^{ct} \to 0$（$t \to \infty$）. 于是数值解发散而真解衰减，显示该情形下方法不稳定.

## 5 Adaptive Runge–Kutta

**Solution 5.1.** Please see the codes in Gitee.

**Solution 5.2.** Please see the codes in Gitee.

**Solution 5.3.** Let $\hat{u}_{i+1}$ be the exact soluton at timestep $t_{i+1}$. All other notation will be consistent with that used in Section 6.5. Then by triangle inequality, we have that

$$|\bar{u}_{i+1} - u_{i+1}| \le |\hat{u}_{i+1} - u_{i+1}| + |\hat{u}_{i+1} - \bar{u}_{i+1}|. \tag{1}$$

Here, $|\hat{u}_{i+1} - u_{i+1}|$ and $|\hat{u}_{i+1} - \bar{u}_{i+1}|$ represent the global error of $p$-th order approximation $u_{i+1}$ and $(p+1)$-th order approximation $\bar{u}_{i+1}$. Therefore, we have

$$\begin{aligned} |\hat{u}_{i+1} - u_{i+1}| &= C_1 h^{p-1}, \\ |\hat{u}_{i+1} - \bar{u}_{i+1}| &= C_2 h^{p}, \end{aligned} \tag{2}$$

where $C_1, C_2$ are constants. Combining equation (1) and (2), we obtain

$$|\bar{u}_{i+1} - u_{i+1}| = C_3 h^p, \tag{3}$$

where $C_3$ is a constant. Let $G_i(h)$ denote $|\bar{u}_{i+1} - u_{i+1}|$. We now want $G_i(qh) \approx \epsilon$. By an analogous argument to that in the main text, we obtain the following:

$$q \approx \left(\frac{\epsilon}{C_3 h^p}\right)^{\frac{1}{p}} \tag{4}$$

Note that $E_i(h) = |\bar{u}_{i+1} - u_{i+1}| = Ch^p \le C_3 h^p$ (by (1)). Therefore, we have that

$$q \approx \left(\frac{\epsilon}{C_3 h^p}\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{\epsilon}{E_i(h)}\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{5}$$

We now prove the upper bound describes in (6.5.2) by controlling the global error.

**Solution 5.4.** Please see the codes in Gitee.

## 6 Multistep methods

**Solution 6.1.** （本题答案由 AI 计算）线性多步法写成

$$\sum_{j=0}^{k} \alpha_j\, u_{n+j} = h \sum_{j=0}^{k} \beta_j\, f_{n+j}, \qquad \rho(z) = \sum_{j=0}^{k} \alpha_j z^j, \quad \sigma(z) = \sum_{j=0}^{k} \beta_j z^j.$$

以下采用与教材一致的移位（同一对 $(\rho,\sigma)$ 乘共同的 $z^m$ 不影响阶次与比值）.

(a) **AM2（梯形公式）**: $u_{n+1} - u_n = \frac{h}{2}(f_{n+1} + f_n)$.
$\rho(z) = z - 1, \quad \sigma(z) = \frac{1}{2}(1 + z)$.

(b) **AB2**：$u_{n+1}-u_n = h\big(\frac{3}{2}f_n - \frac{1}{2}f_{n-1}\big)$（或等价的 $n \to n+1$ 移位）.
$\rho(z) = z^2 - z, \quad \sigma(z) = -\frac{1}{2} + \frac{3}{2}z.$

(c) **BD2（BDF2）**：$\frac{3}{2}u_{n+1} - 2u_n + \frac{1}{2}u_{n-1} = hf_{n+1}.$
$\rho(z) = \frac{1}{2} - 2z + \frac{3}{2}z^2, \quad \sigma(z) = z^2.$

(d) **AM3**：$u_{n+1}-u_n = h\big(-\frac{1}{12}f_{n-1} + \frac{2}{3}f_n + \frac{5}{12}f_{n+1}\big).$
$\rho(z) = z - 1, \quad \sigma(z) = -\frac{1}{12} + \frac{2}{3}z + \frac{5}{12}z^2.$

(e) **AB3**：$u_{n+1}-u_n = h\big(\frac{23}{12}f_n - \frac{16}{12}f_{n-1} + \frac{5}{12}f_{n-2}\big).$
$\rho(z) = z^3 - z^2, \quad \sigma(z) = \frac{5}{12} - \frac{16}{12}z + \frac{23}{12}z^2.$

**Solution 6.2.** （本题答案由 AI 计算）AM1（Backward Euler）首步由隐式方程

$$u_1 = u_0 + h\,f(t_1, u_1), \qquad t_1 = t_0 + h$$

给出. 对每个 IVP 写出 $u_1$ 的方程（不必求闭式解）:

(a) $u' = -2tu,\ 0 \le t \le 2,\ u_0 = 2,\ h = 0.2.$
$t_0 = 0,\ t_1 = 0.2$，得 $\quad u_1 = 2 + 0.2(-2\cdot 0.2)\,u_1 = 2 - 0.08\,u_1\,.$

(b) $u' = u + t,\ 0 \le t \le 1,\ u_0 = 2,\ h = 0.1.$
$t_1 = 0.1$，得 $\quad u_1 = 2 + 0.1\,(u_1 + 0.1)\,.$

(c) $(1+x^3)u\,u' = x^2,\ 0 \le x \le 3,\ u_0 = 1,\ h = 0.5.$
写成 $u' = \dfrac{x^2}{(1+x^3)u}$，$x_1 = 0.5$，得 $\quad u_1 = 1 + 0.5\,\dfrac{0.25}{(1+0.125)\,u_1} = 1 + \dfrac{0.125}{1.125}\,\dfrac{1}{u_1}\,.$

**Solution 6.3.** （本题答案由 AI 计算）把 2 题中的 AM1 换成 AM2（梯形公式）

$$u_1 = u_0 + \tfrac{h}{2}\big(f(t_0,u_0) + f(t_1,u_1)\big).$$

(a) $u' = -2tu,\ u_0 = 2,\ h = 0.2,\ t_1 = 0.2.$
$u_1 = 2 + \frac{0.2}{2}\big(0 + (-2\cdot 0.2)u_1\big) = 2 - 0.04\,u_1\,.$

(b) $u' = u + t,\ u_0 = 2,\ h = 0.1,\ t_1 = 0.1.$
$u_1 = 2 + \frac{0.1}{2}\big((2+0) + (u_1 + 0.1)\big) = 2 + 0.05\,u_1 + 0.105\,.$

(c) $(1+x^3)u\,u' = x^2,\ u_0 = 1,\ h = 0.5,\ x_1 = 0.5.$
$u_1 = 1 + \frac{0.5}{2}\left(0 + \frac{0.25}{(1+0.125)u_1}\right) = 1 + \frac{0.0625}{1.125}\,\frac{1}{u_1}\,.$

**Solution 6.4.** （参考 Example 6.6.4 和 Example 6.6.5）利用式 (6.6.5)、多步法的系数表格、泰勒展开，把解在 $t_i$ 处的泰勒展开代入格式，即可得到局部截断误差（LTE）的首项系数. 记 $u_i = u(t_i), u_{i+1} = u(t_{i+1})$.

(a) **AM2**：$u_{i+1}=u_i+h(\frac{1}{2}f_{i+1}+\frac{1}{2}f_i)$. 根据截断误差的定义

$$\begin{aligned}
h\tau_{i+1}&=u_{i+1}-u_i-h(\tfrac{1}{2}f_{i+1}+\tfrac{1}{2}f_i)\\
&=u_{i+1}-u_i-h(\tfrac{1}{2}u'_{i+1}+\tfrac{1}{2}u'_i)\\
&=(u_i+hu'_i+\tfrac{h^2}{2}u''_i+\tfrac{h^3}{6}u'''_i+\cdots)-u_i-h\big(\tfrac{1}{2}(u'_i+hu''_i+\tfrac{h^2}{2}u'''_i+\cdots)+\tfrac{1}{2}u'_i\big)\\
&=-\tfrac{h^3}{12}u'''_i+O(h^4),
\end{aligned}$$

因此 $\tau_{i+1}=O(h^2)$，AM2 是二阶方法.

(b) **AB2**：$u_{i+1}=u_n+h\big(\frac{3}{2}f_i-\frac{1}{2}f_{i-1}\big)$.

(c) **BD2**：$u_{i+1}=\frac{4}{3}u_i-\frac{1}{3}u_{i-1}+h\frac{2}{3}f_{i+1}$. 推导过程同上.

以上三者均为二阶方法（LTE 为 $O(h^2)$）.

**Solution 6.5.** 代码见 Gitee 仓库. 思路同第 4 题.

**Solution 6.6.** 设 $p(x)$ 为过三点 $(s_1,y_1),(s_2,y_2),(s_3,y_3)$ 的二次插值多项式：

$$p(x)=\frac{(x-s_2)(x-s_3)}{(s_1-s_2)(s_1-s_3)}y_1+\frac{(x-s_1)(x-s_3)}{(s_2-s_1)(s_2-s_3)}y_2+\frac{(x-s_1)(x-s_2)}{(s_3-s_1)(s_3-s_2)}y_3.$$

(a) **推导 AM3 系数：** 用式 (6.6.6)，把 $f$ 在 $t_{n-1},t_n,t_{n+1}$ 上作二次插值并积分：

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}}f(t,u(t))\,dt=h\left(-\tfrac{1}{12}f_{n-1}+\tfrac{2}{3}f_n+\tfrac{5}{12}f_{n+1}\right),$$

从而 $u_{n+1}=u_n+h\left(-\frac{1}{12}f_{n-1}+\frac{2}{3}f_n+\frac{5}{12}f_{n+1}\right)$.

(b) **推导 BD2 系数：** 用式 (6.6.7)，对 $u$ 在 $t_{n-1},t_n,t_{n+1}$ 作二次插值并在 $t_{n+1}$ 求导：

$$u'(t_{n+1})\approx\frac{1}{h}\left(\tfrac{3}{2}u_{n+1}-2u_n+\tfrac{1}{2}u_{n-1}\right),$$

整理得 $\frac{3}{2}u_{n+1}-2u_n+\frac{1}{2}u_{n-1}=hf_{n+1}$, 即 BD2.

**Solution 6.7.** 令 $z=1+w$，在 $w=0$ 的邻域做幂级数展开，并用 $\log(1+w)=w-\frac{1}{2}w^2+\frac{1}{3}w^3-\frac{1}{4}w^4+\cdots$. 对 **BD2**，取 $\rho(z)=\frac{1}{2}-2z+\frac{3}{2}z^2$，$\sigma(z)=z^2$. 有

$$\rho(1+w)=w+\tfrac{3}{2}w^2,\qquad \sigma(1+w)=1+2w+w^2.$$

长除或几何级数得

$$\frac{\rho(z)}{\sigma(z)}=w-\tfrac{1}{2}w^2+\mathbf{0}\cdot w^3+O(w^4).$$

于是

$$\frac{\rho(z)}{\sigma(z)}-\log z=\Big(w-\tfrac{1}{2}w^2+O(w^4)\Big)-\Big(w-\tfrac{1}{2}w^2+\tfrac{1}{3}w^3+O(w^4)\Big)=-\tfrac{1}{3}w^3+O(w^4).$$

即 $\rho(z)/\sigma(z)-\log z=O\big((z-1)^3\big)$，与 BD2 的二阶相符.

**Solution 6.8.** 同样设 $z=1+w$. 目标是证明对 **AB3** 与 **AM3**, 有 $\rho(z)/\sigma(z)-\log z = O(w^4)$（三阶）.

(a) **AB3：** 取 $\rho(z)=z^3-z^2$, $\sigma(z)=\frac{5}{12}-\frac{16}{12}z+\frac{23}{12}z^2$. 把 $\rho,\sigma$ 展到 $w^3$ 并做比值展开，可得

$$\frac{\rho(z)}{\sigma(z)} = w-\tfrac{1}{2}w^2+\tfrac{1}{3}w^3+O(w^4),$$

从而 $\frac{\rho(z)}{\sigma(z)}-\log z = O(w^4)$.

(b) **AM3：** 取 $\rho(z)=z-1$, $\sigma(z)=-\frac{1}{12}+\frac{2}{3}z+\frac{5}{12}z^2$. 同样计算得

$$\frac{\rho(z)}{\sigma(z)} = w-\tfrac{1}{2}w^2+\tfrac{1}{3}w^3+O(w^4),$$

故 $\frac{\rho(z)}{\sigma(z)}-\log z = O(w^4)$.

# 7 Implementation of multistep methods

**Solution 7.1.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 7.2.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 7.3.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 7.4.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 7.5.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 7.6.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 7.7.** 给定线性系统

$$\mathbf{u}'(t)=\mathbf{A}\,\mathbf{u}(t),\qquad \mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & -4\\ 4 & 0\end{bmatrix},\qquad \mathbf{u}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}.$$

令能量函数 $E(t)=\|\mathbf{u}(t)\|_2^2=\mathbf{u}(t)^T\mathbf{u}(t)$. 对时间求导并用乘法法则,

$$E'(t)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\mathbf{u}^T\mathbf{u}\big)=\mathbf{u}'^T\mathbf{u}+\mathbf{u}^T\mathbf{u}'=\big(\mathbf{A}\mathbf{u}\big)^T\mathbf{u}+\mathbf{u}^T\big(\mathbf{A}\mathbf{u}\big)=\mathbf{u}^T(\mathbf{A}^T+\mathbf{A})\mathbf{u}.$$

因为 $\mathbf{A}^T=\begin{bmatrix}0 & 4\\ -4 & 0\end{bmatrix}=-\mathbf{A}$, 故 $\mathbf{A}^T+\mathbf{A}=\mathbf{0}$, 从而 $E'(t)=0$. 所以 $E(t)$ 为常数, 且 $E(t)\equiv E(0)=\|\mathbf{u}(0)\|_2^2=1$. 这也表明解是等长旋转 (角速度 4), 具体为 $\mathbf{u}(t)=(\cos 4t,\ \sin 4t)^T$, 其二范数恒等于 1.

(b-d) 的代码见 Gitee 仓库.

**Solution 7.8.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 7.9.** 代码见 Gitee 仓库.

## 8 Zero-stability of multistep methods

**Solution 8.1.** 题设两步法（LIAF）为（见式 (6.8.1)）

$$u_{i+1} = -4u_i + 5u_{i-1} + h\,(4f_i + 2f_{i-1}).$$

写成 $\sum \alpha_j u_{i-1+j} = h \sum \beta_j f_{i-1+j}$ 的形式，对应

$$\alpha_0 = -5, \quad \alpha_1 = 4, \quad \alpha_2 = 1; \qquad \beta_0 = 2, \quad \beta_1 = 4, \quad \beta_2 = 0.$$

按多步法的阶条件（由式 (6.6.5) 推得的“矩”关系）

$$\sum_j \alpha_j = 0, \quad \sum_j j\alpha_j = \sum_j \beta_j, \quad \sum_j j^2\alpha_j = 2\sum_j j\beta_j, \quad \sum_j j^3\alpha_j = 3\sum_j j^2\beta_j,$$

依次计算得

$$\begin{aligned}
&(-5) + 4 + 1 = 0;\\
&0\cdot(-5) + 1\cdot 4 + 2\cdot 1 = 6 = \ 2 + 4 = \sum \beta_j;\\
&0 + 1\cdot 4 + 4\cdot 1 = 8 = \ 2\cdot(0\cdot 2 + 1\cdot 4) = 8;\\
&0 + 1\cdot 4 + 8\cdot 1 = 12 = \ 3\cdot(0\cdot 2 + 1^2\cdot 4) = 12.
\end{aligned}$$

在四阶条件上，$\sum_j j^4\alpha_j = 0 + 4 + 16 = 20 \neq 4\sum_j j^3\beta_j = 4\cdot 4 = 16$. 因此该法满足到三阶而不满足四阶条件，故 LIAF 的精度阶为 $p = 3$. （该方法的生成多项式为 $\rho(z) = z^2 + 4z - 5$，与文中式 (6.8.2) 一致. ）

**Solution 8.2.** 代码见 Gitee 仓库.

**Solution 8.3.** Fibonacci 递推：$u_{i+1} = u_i + u_{i-1}$. 设试探解 $u_i = r^i$，代入得特征多项式 $r^2 - r - 1 = 0$, 解为 $r_{1,2} = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. 线性叠加（与 Theorem 6.8.3 的证明思路一致）得通解

$$u_i = c_1(r_1)^i + c_2(r_2)^i, \quad r_{1,2} = \tfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}\,.$$

**Solution 8.4.** (a) 若 $\rho(r) = \rho'(r) = 0$，则 $r$ 为 $\rho$ 的二重根. 记 $\rho(\mathcal{Z}) = (\mathcal{Z} - r)^2 q(\mathcal{Z})$. 对序列 $u_i = ir^i$，有

$$(\mathcal{Z} - r)(ir^i) = (i+1)r^{i+1} - ir^{i+1} = r^{i+1}, \qquad (\mathcal{Z} - r)\big(r^{i+1}\big) = r^{i+2} - r\cdot r^{i+1} = 0.$$

故 $(\mathcal{Z} - r)^2(ir^i) = 0$，进一步 $\rho(\mathcal{Z})\,u_i = 0$，即 $u_i = i\,r^i$ 是差分方程 $\rho(\mathcal{Z})u_i = 0$ 的一个解.

(b) 若存在非单根 $r$ 且 $|r| = 1$，则由 (a) 可得一个解 $u_i = ir^i$，其模长 $|u_i| = i|r|^i = i \to \infty$（随步数线性长大）. 这与零稳定性定义（$h \to 0$ 时所有数值解在 $[a, b]$ 上有界）矛盾，故单位圆上的非单根使方法不具零稳定性.