数值分析内部课程习题解答

第二章第二部分

SCAU DataHub

2025 年 4 月 9 日

目录

6 Row pivoting

Solution 6.1. 参考 Demo 2.6.3 和 Demo 2.6.5，一步一步算. 这里仅给出 (a) 的过程，至于答案可以通过程序自行检验.

(a) 对原矩阵 $\mathbf{A}$，首先关注第一列，发现第一行需要与第二行对换，于是

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 10 \\ 2 & 3 & 4 \\ 4 & 8 & 2 \end{bmatrix},$$

初始化全零的矩阵 $\mathbf{L}$ 和 $\mathbf{U}$，先计算 $\mathbf{U}$ 的第一行，有

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

紧接着计算 $\mathbf{L}$ 的第一列，有

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

于是可以用 $\mathbf{L}$ 的第一列，和 $\mathbf{U}$ 的第一行，做外积，抵消掉 $\mathbf{A}_1$ 的一部分，有

$$\tilde{\mathbf{A}}_1 = \mathbf{A}_1 - \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 5 & 10 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_1 - \begin{bmatrix} 4 & 5 & 10 \\ 2 & \frac{5}{2} & 5 \\ 4 & 5 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 3 & -8 \end{bmatrix}.$$

注意到，这里的 $\mathbf{L}$ 初始化的时候不再是单位阵 (对角元为 1)，而是全零矩阵，原因是我们得随着主元换行而灵活调整 $\mathbf{L}$ 的对角元.

OK，接着我们观察 $\tilde{\mathbf{A}}_1$，发现要对换第二行和第三行，于是

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix},$$

第二个需要注意的点是，随着对" 待分解矩阵" 的行变换操作，我们同时需要对下三角阵 $\mathbf{L}$ 做同样的行变换，故现在的 $\mathbf{L}$ 应该是

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

剩余的计算就和原先的 LU 分解一样了，最终计算结果为

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 10 \\ 0 & 3 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_3^T \\ \mathbf{e}_1^T \end{bmatrix},$$

其中矩阵 $\mathbf{P}$ 的作用是改变行排序，如 $\mathbf{PA}$ 就是将原矩阵 $\mathbf{A}$ 的行排序变为 2, 3, 1.

(b) 参考 Gitee 仓库代码，自行检验答案.

Solution 6.2. 理解代码的运算逻辑，本题在 Gitee 有参考代码.

由于 `b[p]` 只是说，pivoting LU 分解会对方程 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 左边的 $\mathbf{A}$ 做行变换，进而右边的 $\mathbf{b}$ 也做一样的行变换，所以我们这里简化讨论 `x = U \(L \b)` 和 `x = U \L \b`.

我们通过 LU 分解求解线性系统 $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ 是指，将原方程转为 $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$，进而将 $\mathbf{Ux}$ 看成整体，通过回代求解 $\mathbf{Ly} = \mathbf{b}$，继续回代求解 $\mathbf{Ux} = \mathbf{y}$. 这个流程，其实就是题中的 `x = U \(L \b)`.

至于 `x = U \L \b`，因为后面没有加括号，所以会优先计算前面的 `U \L`，即先求解 $\mathbf{UM} = \mathbf{L}$ 这一矩阵方程，进而求解 $\mathbf{Mx} = \mathbf{b}$. 因此，在数学表达式上，此时是 $\mathbf{U}^{-1}\mathbf{Lx} = \mathbf{b}$，与 $\mathbf{LUx} = \mathbf{b}$ 是不一样的.

Solution 6.3. 理解代码中的索引操作，以及教材 2.2 章节中的 Row and column operations 部分的内容.

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_4^T \\ \mathbf{e}_3^T \\ \mathbf{e}_2^T \\ \mathbf{e}_1^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_6 & \mathbf{e}_5 & \mathbf{e}_4 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solution 6.4. 按照定义一步步推就好，理解置换矩阵的性质.

(a) 根据题设 $n = 4$ 和 $i_1 = 3, i_2 = 2, i_3 = 4, i_4 = 1$，置换矩阵 $\mathbf{P}$ 表示为

$$\mathbf{P} = \mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_3^T + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4^T.$$

依次计算各项，有

$$\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^T = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_4\mathbf{e}_3^T = \begin{bmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4^T = \begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

所以置换矩阵为

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},$$

如果是左乘矩阵 $\mathbf{A}$，则 $\mathbf{PA}$ 表示将原矩阵的行排序变为 4, 2, 1, 3.

(b) 这里通过 (a) 中的具体形式来证明，以便于初学者理解，更一般的证明仿照思路易得.

根据 $\mathbf{P}$ 的表达式，可知

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^T &= (\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_3^T + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4^T)^T\\ &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4^T + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_1^T,\end{aligned}$$

于是

$$\mathbf{P}^T\mathbf{P} = (\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4^T + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_1^T)(\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_3^T + \mathbf{e}_1\mathbf{e}_4^T),$$

注意到，形如 $\mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_3$ 有

$$\mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = 1,$$

而形如 $\mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_2$ 有

$$\mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix} = 0,$$

即

$$\mathbf{e}_i^T\mathbf{e}_j = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases},$$

所以 $\mathbf{P}^T\mathbf{P}$ 化简为

$$\begin{aligned}\mathbf{P}^T\mathbf{P} &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^T\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T\mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_4^T\mathbf{e}_4\mathbf{e}_3^T + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_1^T\mathbf{e}_1\mathbf{e}_4^T \\ &= \mathbf{e}_1\mathbf{e}_1^T + \mathbf{e}_2\mathbf{e}_2^T + \mathbf{e}_3\mathbf{e}_3^T + \mathbf{e}_4\mathbf{e}_4^T \\ &= \mathbf{I},\end{aligned}$$

于是验证了 $\mathbf{P}^{-1} = \mathbf{P}^T$. 更一般的情况同理可证.

7 Vector and matrix norms

Solution 7.1. 因为 taxicab 沿街道网格移动，而不是沿出发地和目的地的连线移动.

Solution 7.2. 画图代码参考 Gitee 仓库.

Solution 7.3. 通过各个范数的定义即可证明.

首先明确各个具体范数的定义

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\cdots n}|x_i|, \quad \|\mathbf{x}\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \quad \|\mathbf{x}\|_1 = \sum_{i=1}|x_i|.$$

(a) 注意 $|x_i|, i=1,\cdots,n$ 都是非负的，所以

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,\cdots n}|x_i| \le \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\mathbf{x}\|_2.$$

(b) 我们考虑 $\|\mathbf{x}\|_2$ 和 $\|\mathbf{x}\|_1$ 平方的情况

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^n |x_i|^2 \le \left(\sum_{i=1}|x_i|\right)^2 = \|\mathbf{x}\|_1^2,$$

结合二次函数在非负处的单调性得证.

Solution 7.4. 通过各个范数的定义即可证明.

对任意的 $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n$，有

$$|\mathbf{x}^T\mathbf{y}| = \left|\sum_{i_1}^n x_iy_i\right| \le \sum_{i_1}^n |x_iy_i| \le \sum_{i_1}^n |x_i| \max_{j=1,\cdots,n}|y_j| = \|\mathbf{x}\|_1\|\mathbf{y}\|_\infty.$$

Solution 7.5. 通过一般向量范数、诱导范数的定义即可证明.

对于矩阵的诱导范数 $\|\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}=1\|}\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$，我们知道 $\mathbf{A}\mathbf{x}$ 乘出来的结果是一个向量，所以 $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$ 是一个向量范数，而向量范数有 $\|c\mathbf{A}\mathbf{x}\| = |c|\cdot\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|$，因此

$$\|c\mathbf{A}\| = \max_{\|\mathbf{x}=1\|}\|c\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \max_{\|\mathbf{x}=1\|}|c|\cdot\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = |c|\cdot\max_{\|\mathbf{x}=1\|}\|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = |c|\cdot\|\mathbf{A}\|.$$

Solution 7.6. 通过各个范数的定义即可求解.

不妨令 $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$，那么

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}.$$

(a) 根据矩阵的无穷范数的定义，有

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{i=1,2} \sum_{j=1}^{2} |A_{ij}| = 4.$$

又根据向量无穷范数的定义，有

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{i=1,2} |x_i| = 1.$$

现在我们要找 $\mathbf{x}$ 满足 $\|\mathbf{x}\|_\infty = 1$ 且 $\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty = 4$，即

$$\|\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\} = 1, \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_\infty = \max\{|-x_1 + x_2|, |2x_1 + 2x_2|\} = 4,$$

显然，$x_1 = x_2 = 1$ 或 $x_1 = x_2 = -1$ 满足，故答案为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

(b) 思路同 (a)，此时需要满足的条件是

$$\|\mathbf{x}\|_1 = |x_1| + |x_2| = 1, \quad \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_1 = |-x_1 + x_2| + |2x_1 + 2x_2| = 3,$$

显然，$x_1 = \pm 1, x_2 = 0$ 或 $x_1 = 0, x_2 = \pm 1$ 满足，故答案为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \pm 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{or} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{bmatrix}.$$

(c) 思路同 (a)，关键在于转换为极坐标形式，因为 2-范数表示的是我们常见的距离. 这里先计算矩阵范数 $\|\mathbf{A}\|_2$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|_2 = 1} \|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 &= \max_{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} = 1} \sqrt{(-x_1 + x_2)^2 + (2x_1 + 2x_2)^2} \\ &= \max_{\theta \in [0, 2\pi)} \sqrt{(-\cos\theta + \sin\theta)^2 + (2\cos\theta + 2\sin\theta)^2} = 2\sqrt{2}, \end{aligned}$$

此时需要满足的条件是

$$\|\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|\cos\theta|^2 + |\sin\theta|^2} = 1,$$

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2 = \sqrt{|-\cos\theta + \sin\theta|^2 + |2\cos\theta + 2\sin\theta|^2} = 2\sqrt{2},$$

显然，同上面计算矩阵范数时取 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时满足，故答案为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}.$$

Solution 7.7. 二者的区别在于 $\|\mathbf{x}\|_p$ 是否是单位向量，关键在于单位化.

注意到，$\|\mathbf{x}\|_p$ 是一个数，用这个数除 $\mathbf{x}$ 即可获得一个单位向量 $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}$，即 $\left\|\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}\right\|_p = 1$. 因此我们有

$$\max_{\|\mathbf{x}\|_p \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} = \max_{\|\mathbf{x}\|_p \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_p}{\|\mathbf{x}\|_p} \frac{\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_p}}{\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_p}} = \max_{\|\mathbf{x}\|_p \neq 0} \left\|\mathbf{A}\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_p}\right\|_p = \max_{\|\mathbf{y}\|_p = 1} \|\mathbf{A}\mathbf{y}\|_p .$$

Solution 7.8. 通过定理 2.7.5 即可证明.

$$1 = \|\mathbf{I}\| = \|\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1}\| \leq \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{A}^{-1}\| \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{A}^{-1}\| \geq \frac{1}{\|\mathbf{A}\|}.$$

Solution 7.9. 通过各个范数的定义即可证明，本题是前面第 3 题的推广，证明思路相似，答案略.

Solution 7.10. 根据题中的 Hint 证明.

记 $M = \max_i |D_{ii}|$，我们先证 $\|\mathbf{D}\|_2 \geq M$. 设对角矩阵的最大元在第 k 个主元，那么 $M = |D_{kk}|$. 进一步有

$$\mathbf{D}\mathbf{e}_k = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ D_{kk} \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{D}\mathbf{e}_k\|_2 = D_{kk} = M,$$

结合矩阵范数的定义，有

$$\|\mathbf{D}\|_2 = \max_{\|\mathbf{x}\|=1} \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_2 \geq \|\mathbf{D}\mathbf{e}_k\|_2 = D_{kk} = M.$$

接着证明 $\|\mathbf{D}\|_2 \leq M$. 设 $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$，且 $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$，那么

$$\mathbf{D}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} D_{11}x_1 \\ \vdots \\ D_{nn}x_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} (D_{ii}x_i)^2,$$

结合 $M = \max_i |D_{ii}|$，有

$$\|\mathbf{D}\mathbf{x}\|_2^2 \leq M^2 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = M^2,$$

且对任意的 $\|\mathbf{x}\|_2 = 1$ 成立，即 $\|\mathbf{D}\|_2 \leq M$.

Solution 7.11. 根据题中的 Hint 证明.

(a) 反证法. 假设 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 奇异，也就是说线性系统 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0$ 有无穷多个解，于是存在 $\mathbf{x}$ 满足

$$(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{x} = 0 \Rightarrow \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x} \Rightarrow \|\mathbf{A}\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\| \Rightarrow \frac{\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{x}\|} = 1,$$

与 $\|\mathbf{A}\| < 1$ 矛盾，故 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})$ 非奇异.

(b) 根据 $\|\mathbf{A}\| < 0$，有

$$\|\mathbf{A}^m - 0\| \leq \|\mathbf{A}\|^m \to 0, \quad (m \to \infty).$$

(c) 注意到，我们学过等比级数的求和公式

$$a^0 + a^1 + \cdots + a^m = \frac{1 - a^m}{1 - a},$$

类似地，有

$$\left(\sum_{k=0}^{m} \mathbf{A}^k\right)(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = (\mathbf{I} + \mathbf{A} + \cdots \mathbf{A}^m)(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I} - \mathbf{A}^{m+1}$$

根据 (b) 的结论 $\mathbf{A}^{m+1} \to \mathbf{I}, \quad (m \to \infty)$，所以

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k\right)(\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \mathbf{I},$$

因此 $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{A}^k$.

8 Conditioning of linear systems

Solution 8.1. 代码的部分见 Gitee, 为什么在 $n = 13$ 的时候，条件数增加减缓，应该是因为计算机精度的原因.

Solution 8.2. 参考 Gitee 仓库代码.

Solution 8.3. 参考 Gitee 仓库代码.

Solution 8.4. 参考 Gitee 仓库代码.

Solution 8.5. 参考 Gitee 仓库代码.

Solution 8.6. (a) 直接给出答案

$$\mathbf{A}_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_3^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

(b) 先直接给出 $\mathbf{B_n}$ 的一般形式，我们定义

$$\mathbf{B}_n = \Big[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \cdots, \mathbf{b}_n\Big]$$

其中

$$\mathbf{b}_j = \Big[\underbrace{2^{j-1}, 2^{j-2}, \cdots, 2^0}_{\text{j 个元素}} \ \underbrace{0, \cdots, 0}_{\text{n-j 个 0}}\Big]^{\mathsf{T}}$$

下面我们证明 $\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n = \mathbf{I}$，令

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^\top \\ \mathbf{a}_2^\top \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^\top \end{bmatrix}$$

其中

$$\mathbf{a}_i^\top = \left[\underbrace{0,\cdots,0}_{\text{i-1 个 0}}\ 1,-2,\underbrace{0,\cdots,0}_{\text{n-i-1 个 0}}\right]$$

那么不难验证

$$\mathbf{a}_i^\top \mathbf{b}_j = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

因此 $\mathbf{B}_n = \mathbf{A}_n^{-1}$.

(c) 先计算 $\|\mathbf{A}_n\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |A_{ij}| = 3$, $\|\mathbf{A}_n^{-1}\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |A_{ij}| = \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = 2^n - 1$，因此

$$\kappa(\mathbf{A}) = 3\cdot(2^n-1).$$

Solution 8.7. (a) 这个证明很简单，重复使用 $\|\mathbf{AB}\| \le \|\mathbf{A}\|\|\mathbf{B}\|$ 再结合条件数的定义即可证明.

(b) 我们可以用 Python 来跑两个模拟，计算

$$g(\mathbf{A},\mathbf{B}) = \kappa(\mathbf{AB}/\kappa(\mathbf{A})\kappa(\mathbf{B}).$$

首先，给定两个随机数矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}, n = 1,2,\cdots,1000$, 计算 $g(\mathbf{A},\mathbf{B})$, 结果见图1；随后，将 n 固定为 $n=5$，然后产生 1000 个不同的随机数矩阵 $\mathbf{A},\mathbf{B}$，再计算 $g(\mathbf{A},\mathbf{B})$，结果见图2. 不难看出，从模拟层面，不同维度的不同矩阵的计算结果来看，$g(\mathbf{A},\mathbf{B})$ 都是严格的小于 1，除了 $n=1$ 以外，理论层面的证明还需要补充.

Solution 8.8. 我们先给诱导范数的一个等价定义

$$\|\mathbf{A}\| := \max_{\mathbf{x}} \frac{\|\mathbf{Ax}\|}{\|\mathbf{x}\|} \Longleftrightarrow \|\mathbf{A}\| := \max_{\|\mathbf{x}\|=\mathbf{1}} \|\mathbf{Ax}\|$$

那么本题就很容易证明了. 根据定义，即证明

$$\|\mathbf{D}\| = \max_i \mathbf{D}_{ii}, \quad \|\mathbf{D}^{-1}\| = \frac{1}{\min_i \mathbf{D}_{ii}}$$

后续步骤非常简单，是问题

$$\max_{|x_1|+|x_2|=1} |x_1 D_1| + |x_2 D_2|$$

的扩展，细节在此不表.

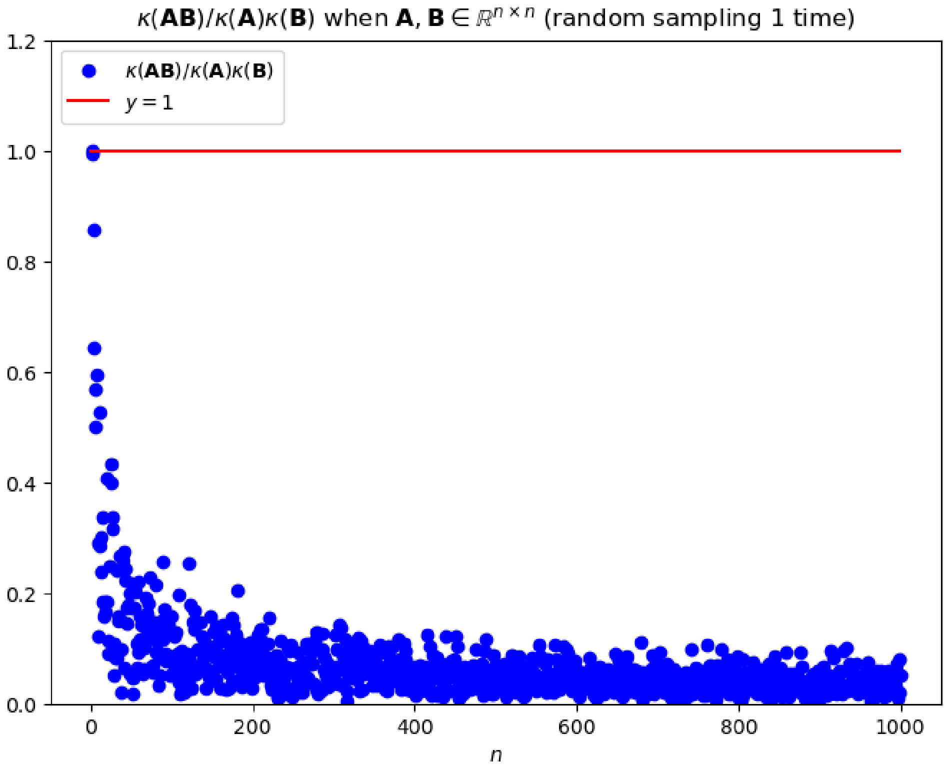

图 1: $\kappa(\mathbf{AB}/\kappa(\mathbf{A})\kappa(\mathbf{B}), \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}, 1 \leq n \leq 1000$, 单次采样.

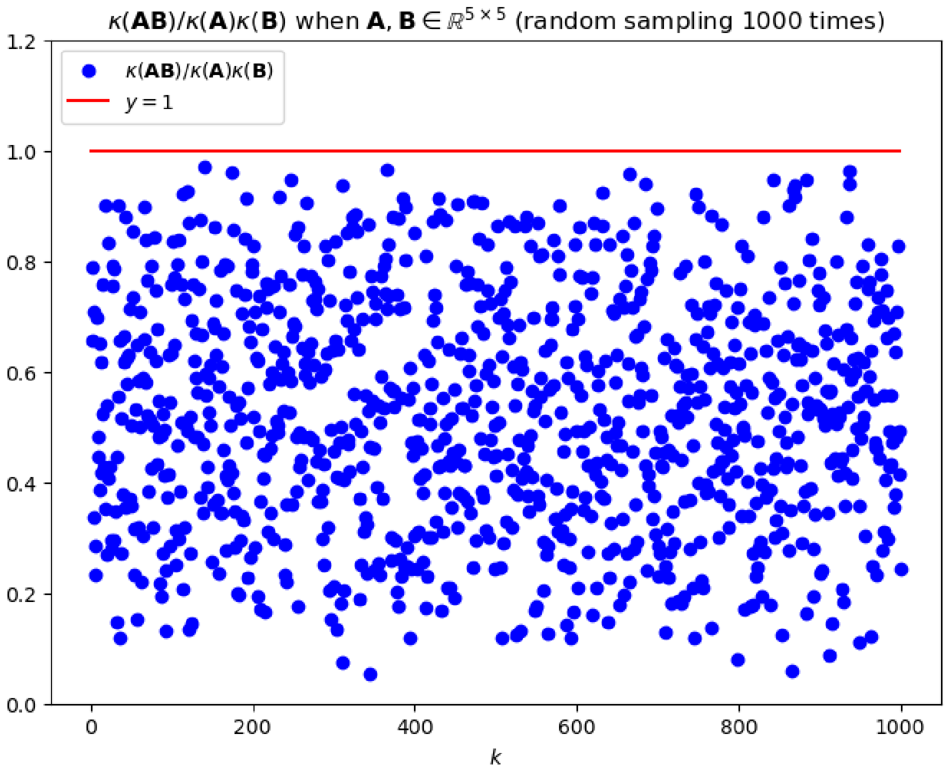

图 2: $\kappa(\mathbf{AB}/\kappa(\mathbf{A})\kappa(\mathbf{B}), \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}, n = 5$, $k = 1000$ 次采样.

9 Exploiting matrix structure

Solution 9.1. 使用定义验证，$\mathbf{A}$ 对角占优，$\mathbf{B}, \mathbf{C}$ 不是对角占优.

Solution 9.2. 参考 Gitee 仓库代码.

Solution 9.3. 取 $\mathbf{x} = \mathbf{e}_k (k = 1, \cdots, n)$，则由 $\mathbf{e}_k^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{e}_k > 0$ 可得 $\mathbf{A}_{kk} > 0$.

Solution 9.4. 参考 Gitee 仓库代码.

Solution 9.5. 本题的 Tridiagonal 在 Python 里面没有，不需要做，有兴趣可以试试.

Solution 9.6. 首先，由 2-范数的定义，可得

$$\|\mathbf{A}\mathbf{x}\|_2^2 = \mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{A}^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{x} \geq 0.$$

接下来，我们验证 $\mathbf{x} \neq 0$ 时，$\mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{A}^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{x} > 0$, 假设 $\mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{A}^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{x} = 0$, 则 $\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$, 由于 $\mathbf{x} \neq 0$，则 $\mathbf{A}$ 奇异，与 $\mathbf{A}$ 可逆 (非奇异) 相矛盾，因此

$$\mathbf{x}^\mathsf{T} \mathbf{A}^\mathsf{T} \mathbf{A} \mathbf{x} > 0, \quad (x \neq 0).$$

另外，由于 $(\mathbf{A}^\mathsf{T} \mathbf{A})^\mathsf{T} = \mathbf{A}^\mathsf{T} \mathbf{A}$，因此，当 $\mathbf{A}$ 可逆时，$\mathbf{A}^\mathsf{T} \mathbf{A}$ 是对称正定矩阵.