Geometric Invariant Theory

Guanyu Li

目录

1 代数几何预备知识

定理 1.1. 给定概型的态射 $f: X \to Y$，若对任意

引理 1.1. 若环同态 $f: R \to S$ 是忠实平坦的，那么对任意的 R 模 M，序列

$$0 \to M \to M \otimes_R S \xrightarrow{\iota_1 - \iota_2} M \otimes_R S \otimes_R S$$

是正合的，其中 $\iota_1 : M \otimes_R S \to M \otimes_R S \otimes_R S$ 由 $m \otimes s \mapsto m \otimes 1 \otimes s$ 诱导.

命题 1.2. 给定仿射概型 X，且设 $f:U\to V$ 是仿射概型间的忠实平坦态射，那么

$$h_X(U)\to h_X(V)\rightrightarrows h_X(V\times_U V)$$

是等值子.

命题 1.3. 设 $f:Y\to X, g:Z\to X$ 是概型的态射，满足存在 $y\in Y, z\in Z$ 使得 $f(y)=g(z)$，那么存在 $p\in Y\times_X Z$ 满足 $\mathrm{pr}_1(p)=y, \mathrm{pr}_2(p)=z$.

证明. 令 $\kappa(x):=\mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$，于是我们有域扩张 $\kappa(x)\hookrightarrow\kappa(y)$ 和 $\kappa(x)\hookrightarrow\kappa(z)$. 进而 $\kappa(y)\otimes_{\kappa(x)}\kappa(z)$ 是非零的，故存在极大理想 $\mathfrak{m}$，令 $K:=\kappa(y)\otimes_{\kappa(x)}\kappa(z)/\mathfrak{m}$，则 K 是 $\kappa(x)$ 的包含 $\kappa(y)$ 和 $\kappa(z)$ 的扩张.

设 U 是 X 中包含 x 的仿射概型，那么

$$\mathrm{Spec}\ K\to\mathrm{Spec}\ \kappa(y)\to Y\xrightarrow{f}X$$

和

$$\mathrm{Spec}\ K\to\mathrm{Spec}\ \kappa(z)\to Z\xrightarrow{g}X$$

相同，故我们得到了映射 $\mathrm{Spec}\ K\to Y\times_X Z$. □

2 一般的模问题

模问题 (moduli problem) 是代数几何当中一类最基本的问题.

定理 2.1. 设 k 是域，S 是 k 概型，那么存在如下的 1-1 对应

$$\{(\mathcal{L},s_0,\cdots,s_n)\mid\mathcal{L}\in\mathrm{Pic}(S),s_i\in H^0(S,\mathcal{L})\text{生成}\mathcal{L}\}/\sim\leftrightarrow\hom_k(S,\mathbb{P}^n),$$

其中左边的等价关系 $(\mathcal{L},s_0,\cdots,s_n)\sim(\mathcal{M},t_0,\cdots,t_n)$ 定义为存在同构 $\varphi:\mathcal{L}\to\mathcal{M}$ 使得 $t_i=\varphi(s_i)$. 给定 $(\mathcal{L},s_0,\cdots,s_n)$，那么它对应的态射是 $f:S\to\mathbb{P}^n, P\mapsto[s_0(P),\cdots,s_n(P)]$，反过来给定一个态射 $f:S\to\mathbb{P}^n$，取 $\mathcal{L}:=f^*\mathscr{O}(1)$，$s_i:=f^*(x_i)$.

事实上很难给出模问题的准确的定义，但一般一个反变函子

$$\mathcal{M}:\mathbf{Sch}_{/S}\to\mathbf{Set}$$

给的想要参数化的对象，这个反变函子就称为一个模问题. 下面的例子是我们主要考虑的：

例 1. 考虑函子

$$\begin{aligned}\mathcal{M}:\mathbf{Sch}_{/S}&\to\mathbf{Set}\\ X&\mapsto\left\{\begin{tikzcd}E\arrow[d,"p"']\\X\arrow[u,bend right,"t"']\end{tikzcd}\middle|\ p\text{是平坦态射，在每一点的纤维都是亏格为 1 的曲线，且}p\circ t=\mathrm{id}_S\right\},\end{aligned}$$

若 $f:X\to Y$ 是概型的态射，$\mathcal{M}(f)$ 由下图给出

$$\begin{tikzcd}
E \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"'] \\
X \arrow[r, "f"] & Y.
\end{tikzcd}$$

例 2. 考虑函子

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} : \mathbf{Sch}_{/S} &\to \mathbf{Set} \\
X &\mapsto \left\{ \begin{array}{c} C \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow \\ X \end{array} \middle| \text{对 } X \text{ 的每一点 } x\text{，纤维 } C_x \text{ 是几何连通、正规、光滑且亏格为 } g \text{ 的曲线} \right\},
\end{aligned}$$

定理 2.2. 设 E_1, E_2 是两个 k 上的椭圆曲线，则

定义. 给定函子 $\mathcal{M} : \mathbf{Sch}^\circ \to \mathbf{Set}$ 和 k 概型 M，若

1. 存在自然态射 $\eta : \mathcal{M} \Rightarrow \hom_{\mathbf{Sch}}(-, M)$ 使得对任意的 $\xi : \mathcal{M} \Rightarrow \hom_{\mathbf{Sch}}(-, X)$，都存在唯一的 $f : X \to M$ 满足下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[r, Rightarrow, "\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\xi"'] & \hom_{\mathbf{Sch}}(-, M) \arrow[d, dashed, Rightarrow, "\hom_{\mathbf{Sch}}(-,f)"] \\
 & \hom_{\mathbf{Sch}}(-, X).
\end{tikzcd}$$

2. 对任意包含 k 的代数闭域 K，

$$\eta_K : \mathcal{M}(\mathrm{Spec}\ K) \to \hom_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}\ K, M)$$

都是一个双射，

那么称 M 是 $\mathcal{M}$ 的一个粗模空间.

3 几种不同的商

接下来我们会一直有如下假定：给定一个概型 S，我们考虑范畴 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群对象 G/S，如果作为概型 G 是光滑的，则称 G 是一个 S 上的代数群 (algebraic group).

当给定一个代数群时，它上的乘法 $\mu : G \times G \to G$ 给出了一个环同态 $\mu^\# : \mathscr{O}_G(G) \to \mathscr{O}_G(G) \otimes_k \mathscr{O}_G(G)$，它满足相应的（余）结合性，于是这使得 $\mathscr{O}_G(G)$ 是一个余代数，同时 $\mathscr{O}_G(G)$ 还是一个代数，它的乘法和余乘法相容，因此 $\mathscr{O}_G(G)$ 被称为一个 Hopf 代数.

例 3. 假设 k 是域，$S := \mathrm{Spec}\ k$，那么以下是代数群：

1. $\mathbb{G}_a := \mathrm{Spec}\ k[x]$. 其中，$\mu^\#$ 定义为 $x \mapsto 1 \otimes x + x \otimes 1$，$i^\#$ 定义为 $x \mapsto -x$，我们举例说明它们满足群公理. 由于

$$((\mu^\# \circ \mathrm{id}) \circ \mu^\#)(x) = (\mu^\# \circ \mathrm{id})(1 \otimes x + x \otimes 1) = 1 \otimes x + x \otimes 1$$

且

2. $\mathbb{G}_m := \text{Spec } k[t, t^{-1}]$.
3. $GL_n := \text{Spec } k[x_{i,j}, \det^{-1}]_{1\le i,j\le n}$.
4. $SL_n = \text{Spec } k[x_{i,j},]_{1\le i,j\le n}/(\det -1)$.
5. 任意给定有限 *Abel* 群 G，那么 $k[G]$ 是 k 上的代数（也是 *Hopf* 代数），
6. 任意给定有限群 G，它一定是一个置换群 $\mathfrak{S}_n$ 的子群，而 $\mathfrak{S}_n$ 是 GL_n 的子群，那么如果我们可以将 $\mathfrak{S}_n$ 写为代数群那么任意有限群都是代数群. 具体的步骤在习题3.1中.
7. 按照点函子的观点，给定一个 k 上的代数群就给定了一个函子 $R-\mathbf{Alg}\to\mathbf{Set}$，$R\mapsto G(R)$，且 $G(R)$ 是一个群. 给定 k 向量空间 V，考虑函子 $R\mapsto \text{Aut}_R(V\otimes_k R)$，那么这给出了一个代数群，记为 $GL(V)$.

习题 3.1. 这个习题中我们证明存在 GL_n 的子群 $\mathfrak{S}_n$ 是一个 k 上的代数群，具体的嵌入是将 $\mathfrak{S}_n$ 对应到 GL_n 中的置换矩阵.

1. 对任意 $\sigma\in\mathfrak{S}_n$，定义 $k[x_{i,j},]_{1\le i,j\le n}$ 中的理想
$$I_\sigma := (\{x_{i,\sigma(i)}-1\}_{1\le i\le n}, \{x_{i,j}\}_{1\le i,j\le n, j\ne\sigma(i)}),$$
求证 $k[x_{i,j},]_{1\le i,j\le n}/I_\sigma \cong k$.
2. 求证
$$k[\mathfrak{S}_n] := k[x_{i,j},]_{1\le i,j\le n} \Big/ \bigcap_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} I_\sigma$$
是 Artin 环，且有 $n!$ 个 k 点.
3. 在 Spec $k[\mathfrak{S}_n]$ 上定义乘法使得它作为一个群同构于 $\mathfrak{S}_n$.[提示：考虑 $k[\mathfrak{S}_n]$ 作为 Artin 环的分解.]
4. 证明 Spec $k[\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}]$ 是 Spec $k[\mathfrak{S}_n]$ 的子群，于是这个定义包含了之前关于有限 Abel 群的定义.

习题 3.2. 设 $G=\mathbb{G}_m^n(k)$ 是 n 维环，证明 $\mathscr{O}_G$ 上模的范畴与 $\mathbb{Z}^n$ 分次 k 向量空间的范畴等价.

定义. 设 G 是代数群，一个 G 的表示 (representation) 就是一个态射 $\rho: G\to GL_n$，且满足如下交换图

$$\begin{tikzcd} G\times_S G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\rho\times\rho"'] & G \arrow[d, "\rho"] \\ GL_n\times_S GL_n \arrow[r, "m"] & GL_n, \end{tikzcd}$$

其中 μ 是 G 中的乘法，m 是 GL_n 中的乘法.

假设 G 是线性代数群，$S:=\Gamma(G,\mathscr{O}_X)$，那么群乘法自然诱导了一个环同态 $\hat{\mu}: S\to S\otimes_k S$，单位态射诱导了 $\hat{i}: S\to k$，因此对任意一个 k 向量空间 V，我们可以定义 G 在 V 上的对偶作用为线性空间的同态

$$\hat{\sigma}: V\to S\otimes_k V,$$

满足

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[d, "\hat{\sigma}"'] & S \otimes_k V \arrow[d, "\hat{\mu} \otimes \mathrm{id}_V"] \\ S \otimes_k V \arrow[r, "\mathrm{id}_S \otimes \hat{\sigma}"] & S \otimes_k S \otimes_k V \end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_V"'] & S \otimes_k V \arrow[r, "\hat{i} \otimes \mathrm{id}_V"] & V \end{tikzcd}$$

定义. 设 G 是代数群，$\hat{\sigma}$ 是 G 在 V 上的对偶作用，若 V 的子空间 W 满足 $\hat{\sigma}(W) \subseteq S \otimes_k W$，则称 W 是 V 的不变子空间 (invariant subspace).

引理 3.1. *设 G 是代数群，$\hat{\sigma}$ 是 G 在 V 上的对偶作用，那么 V 是自己有限维不变子空间的并 (逆极限).*

给定代数群 G 在概型 X 上的作用 σ，那么存在一个 k 代数的同态

$$\begin{aligned} \sigma^* : \mathscr{O}_X(X) \to \mathscr{O}_{G \times X}(G \times X) &\cong \mathscr{O}_G(G) \otimes_k \mathscr{O}_X(X) \\ f \mapsto \sum_{i=1}^{N} h_i &\otimes f_i \end{aligned}$$

这给出了群态射 $G \to \mathrm{Aut}(\mathscr{O}_X(X))$，对于每个 $g \in G$，

$$f \mapsto \sum_{i=1}^{N} h_i(g) f_i.$$

定义. 设 G 是一个 k 上的代数群，V 是 k 线性空间，那么 G 在 V 上的作用是如下的信息，对任意的 k 代数 R，都有 $G(R)$ 在 $V \otimes_k R$ 上的作用

$$\sigma_R : G(R) \times (V \otimes_k R) \to V \otimes_k R,$$

对任意 $g \in G(R)$，$\sigma_R(g, -)$ 都是一个 R 模同态，而且 σ_R 关于 R 是自然的.

引理 3.2. *设 G 是仿射代数群，作用在仿射概型 X 上，那么对于任意 $f \in \mathscr{O}_X(X)$，存在一个有限维的 G 等变子空间 $W \subseteq \mathscr{O}_X(X)$ 包含 f.*

证明. 记 $\sigma : G \times X \to X$ 是给定的作用，那么 $\sigma^* : \mathscr{O}_X(X) \to \mathscr{O}_G(G) \otimes_k \mathscr{O}_X(X)$ 是对偶作用. 若有 $\sigma^*(f) = \sum_{i=1}^{N} h_i(g) f_i$，那么 □

定理 3.1. *任意 k 上的仿射代数群都是线性仿射代数群.*

定义. 设 G 作用在概型 X 上，T 是另一个概型，$f : T \to X$ 是一个 T 值点，那么我们有映射 $G \times_S T \xrightarrow{\mathrm{id}_G \times f} G \times_S X \xrightarrow{\sigma} X$，进而可以定义

$$\psi_f^G : G \times_S T \to G \times_S T$$

为 $(\sigma \circ (\mathrm{id}_G \times f), p_2)$，简记为 ψ_f. 我们称 ψ_f 的像为 f 的轨道 (orbit)，记为 $o(f)$. 另一方面，$X \times_S T$ 是 T 上的概型，于是我们自然地有截面

$$(f, \mathrm{id}_T) : T \to X \times_S T.$$

我们定义 $S(f)$ 为纤维积

$$\begin{tikzcd}
S(f) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "{(f,\mathrm{id}_T)}"] \\
G \times_S T \arrow[r, "\psi_f"] & X \times_S T,
\end{tikzcd}$$

这是 G 的子群，称为 f 的 (stabilizer).

命题 3.2. 设 G 作用在概型 X 上. 那么

定义. 给定代数群 G 在概型 X 上的作用 σ，若

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \to X$，若存在 S 上的态射 $\varphi : X \to Y$ 满足

1. 有交换图：

$$\begin{tikzcd}
G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\
X \arrow[r, "\varphi"] & Y,
\end{tikzcd}$$

2. Y 在上图意义下具有泛性质，即若有 S 上的概型 Z 和态射 $\phi : X \to Z$ 满足图

$$\begin{tikzcd}
G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\
X \arrow[r, "\phi"] & Z,
\end{tikzcd}$$

   交换，则存在唯一的态射 $\chi : Y \to Z$ 使得 $\phi = \chi \circ \varphi$，

那么称 Y 是 G 作用在 X 上的一个范畴商 (categorical quotient).

换言之，G 作用在 X 上的范畴商是作用映射和投影映射的推出.

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \to X$，若存在 S 上的态射 $\varphi : X \to Y$ 满足

1. 有交换图：

$$\begin{tikzcd}
G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\
X \arrow[r, "\varphi"] & Y,
\end{tikzcd}$$

2. φ 是满态射，且

$$\Psi = (\sigma, p_2) : G \times_S X \to X \times_S X$$

   的像是 $X \times_Y X$，

3. φ 是拓扑商，也就是说，$U \subseteq Y$ 是开集当且仅当 $\varphi^{-1}(U) \subseteq X$ 是开集，

4. Y 的结构层 $\mathscr{O}_Y$ 是 $\varphi_*\mathscr{O}_X$ 的包含不变函数的子层，即对于 $f \in \Gamma(U, \varphi_*\mathscr{O}_X) = \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathscr{O}_X)$ 是 $\Gamma(U, \mathscr{O}_Y)$ 的元素当且仅当下图交换

$$\begin{tikzcd}
G \times_S \varphi^{-1}(U) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & \varphi^{-1}(U) \arrow[d, "F"] \\
\varphi^{-1}(U) \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^1,
\end{tikzcd}$$

其中 F 是 f 对应的态射,

那么称 Y 是 G 作用在 X 上的一个几何商 (geometric quotient).

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \to X$ 和作用的范畴/几何商 $\varphi : X \to Y$，若对任意 $f : Y' \to Y$，下面的纤维积

$$\begin{tikzcd}
X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & Y' \arrow[d, "f"] \\
X \arrow[r, "\varphi"] & Y
\end{tikzcd}$$

都使 f' 是一个范畴/几何商，则称 Y 是万有范畴/几何商 (universal - quotient). 若以上只对平坦 (flat) 的成立，则称 Y 是一致范畴/几何商 (uniform - quotient)

命题 3.3. 设 $\varphi : X \to Y$ 是 G 作用在 X 上的几何商，那么 $\varphi : X \to Y$ 也是范畴商.

命题 3.4. 设 X, Y 都是 S 上的不可约、正规、*Noetherian* 概型，$\varphi : X \to Y$ 是有限型的、*dominating* 态射，Y 中 *generic point* 的剩余域是特征 *0* 的,

4 可约（reductive）代数群

定义. 设 G 是代数群，若它的 radical 是一个环（torus），那么称 G 是 reductive 的.

定理 4.1. 设 X 是 k 上的仿射概形，G 是可约代数群，且 $\sigma : G \times_k X \to X$ 是 G 在 X 上的作用. 那么作用存在一致范畴商 (Y, φ)，且 φ 是 *universially submersive*，且 Y 是仿射概形. 若 X 还是代数的，那么 Y 也是 k 上代数的.

5 GIT 商

6 空间和层

定义. Grothendieck 拓扑

例 4 (fidèlement plat de présentation finie)**.**

定理 6.1. 嵌入函子

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$$

存在左伴随函子.

定义. 一个等价于位形上的层范畴的范畴成为拓扑斯 (topos).

例 5. **Sch** 上的层范畴等价于 **AffSch** 上的层范畴.

引理 6.1. 若 $\mathscr{F}:\mathbf{Sch}^\circ\to\mathbf{Set}$ 是 *Zariski* 层，那么它是 *fppf* 层当且仅当对任意 *fppf* 映射 $f:U\to V$，

$$F(U)\to F(V)\rightrightarrows F(V\times_U V)$$

是等值子.

定理 6.2. 若 $f:X\to Y$ 是概型的态射，那么 h_X 是 $\mathbf{Sch}_Y$ 上的 *fppf* 层.

7 纤维范畴

定义. 设 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的范畴, 给定 $\mathcal{F}$ 中的态射 $f:A\to B$, 若对任意 $\mathcal{F}$ 中的对象 C 和态射 $h:C\to B$, 只要有 $\mathcal{C}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd}
P(C) \arrow[d, "\tilde{g}"'] \arrow[dr, "P(h)"] & \\
P(A) \arrow[r, "P(f)"] & P(B),
\end{tikzcd}$$

都存在唯一 $\mathcal{F}$ 中的态射 $g:C\to A$ 使得 $P(g)=\tilde{g}$，即

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, dashed, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\
A \arrow[r, "f"] & B,
\end{tikzcd}$$

则称 f 是（强）笛卡尔态射 ((strongly) cartesian morphism).

例 6. 设 $\mathcal{C}$ 是给定的范畴，A 是 $\mathcal{C}$ 中的对象，于是我们有 A 上的斜线范畴 $\mathcal{C}/A$ 和自然的函子 $P:\mathcal{C}/A\to\mathcal{C}$. 对任意的 $f_{/A}:B\to D$，由定义 $P(f_{/A})=f:B\to D$. 给定 $\mathcal{C}/A$ 中的对象 $u:B\to A$ 和 $w:D\to A$ 对任意 $\mathcal{C}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\
B \arrow[r, "f"] & D,
\end{tikzcd}$$

给出了 $\mathcal{C}/A$ 中的对象 $C\xrightarrow{w\circ h=w\circ f\circ g}D$，且由于 $w\circ f=u$，$g:C\to B$ 是 $\mathcal{C}/A$ 中的态射，这意味着 $\mathcal{C}/A$ 中的态射都是笛卡尔的.

例 7. 设 $\mathcal{C}$ 是给定的范畴，且其中任意的纤维积存在，定义范畴 $\mathrm{Arr}(\mathcal{C})$ 如下，它的对象是 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f:X\to A$，态射 $\alpha=(h,k):f:X\to A\Rightarrow g:Y\to B$ 是交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "k"] \\
Y \arrow[r, "g"] & B.
\end{tikzcd}$$

考虑函子 $P:\mathrm{Arr}(\mathcal{C})\to\mathcal{C}$，它将 $\mathrm{Arr}(\mathcal{C})$ 中对象 $f:X\to A$ 映到 A，将态射 $\alpha=(h,k)$ 映到 $k:A\to B$. 我们要证明 α 是笛卡尔态射当且仅当 X 是 α 的定义交换图的拉回，简称 α 是一个笛卡尔图.

首先如果我们有 $\mathcal{C}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rrd, bend left, "v"] \arrow[rd, dashed, "w"'] \arrow[dd, "u"'] & & \\
& X \arrow[r, "h"] \arrow[dd, "f"] & Y \arrow[dd, "g"] \\
C \arrow[rrd, bend left, "q"] \arrow[rd, "p"'] & & \\
& A \arrow[r, "k"] & B,
\end{tikzcd}$$

使得 X 是 $\mathcal{C}$ 中的拉回，那么存在（唯一的）$w : Z \dashrightarrow X$ 使得图交换，因此这是一个笛卡尔态射. 另一方面我们考虑若 $\alpha = (h, k)$ 是一个笛卡尔态射，由定义下图

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[rrd, bend left, "v"] \arrow[rd, dashed, "w"'] \arrow[dd, "u"'] & & \\
& X \arrow[r, "h"] \arrow[dd, "f"] & Y \arrow[dd, "g"] \\
A \arrow[rrd, bend left, "k"] \arrow[rd, equal] & & \\
& A \arrow[r, "k"] & B
\end{tikzcd}$$

有唯一的 $w : Z \dashrightarrow X$ 使得整幅图交换，因此 X 是拉回.

引理 7.1. 设 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的范畴，给定 $\mathcal{F}$ 中的态射 $f : A \to B$，那么 f 是笛卡尔态射当且仅当对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 C，映射

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{F}}(C, A) &\to \hom_{\mathcal{F}}(C, B) \times_{\hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(B))} \hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(A)) \\
g &\mapsto (f \circ g, P(g))
\end{aligned}$$

是一个双射.

证明. 首先注意到，在纤维积 $\hom_{\mathcal{F}}(C, B) \times_{\hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(B))} \hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(A))$ 中，$\hom_{\mathcal{F}}(C, B) \to \hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(B))$ 是映射 $h \mapsto P(h)$，$\hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(A)) \to \hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(B))$ 是映射 $\tilde{g} \mapsto P(f) \circ \tilde{g}$.

若 f 是笛卡尔态射，任意给定 $(h, \tilde{g}) \in \hom_{\mathcal{F}}(C, B) \times_{\hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(B))} \hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(A))$，那么根据纤维积的定义 $P(h) = P(f) \circ \tilde{g}$，于是存在唯一的 $g : C \to A$ 使得 $P(g) = \tilde{g}$ 且 $f \circ g = h$，即该映射是双射. 另一方面，若这个映射是双射，那么给定对象 C 和 $h : C \to B, \tilde{g} : P(C) \to P(A)$ 满足 $P(h) = P(f) \circ \tilde{g}$ 恰好给出了纤维积 $\hom_{\mathcal{F}}(C, B) \times_{\hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(B))} \hom_{\mathcal{C}}(P(C), P(A))$ 中的一个元素 $(h, \tilde{g})$，因此存在唯一的 $h : C \to A$，这就是笛卡尔态射的定义. □

引理 7.2. 设 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的范畴，给定 $\mathcal{F}$ 中的态射 $f : A \to C$ 和 $g : B \to C$，满足

1. $f : A \to C$ 是笛卡尔态射，
2. $P(A) \times_{P(C)} P(B)$ 存在，
3. 存在 $\mathcal{F}$ 中的笛卡尔态射 $k : D \to B$ 满足 $P(D) = P(A) \times_{P(C)} P(B)$ 且 $P(k) = \mathrm{pr}_2 : P(A) \times_{P(C)} P(B) \to P(B)$，

那么 $A \times_C B$ 存在且同构于 D.

证明. □

习题 7.1. 给定 $\mathcal{C}$ 上的范畴 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$，那么

1. 笛卡尔态射的复合是笛卡尔态射，
2. 若态射 $A \to B, B \to C$ 满足复合 $A \to B \to C$ 是笛卡尔态射，那么 $A \to B$ 是笛卡尔态射当且仅当 $B \to C$ 是笛卡尔态射，
3. 若 $\mathcal{F}$ 中的态射 $A \to B$ 满足是 $P(f) : P(A) \to P(B)$ 同构，那么它是笛卡尔的当且仅当它本身是同构，
4. 若 $Q : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ 是函子，$A \to B$ 是 $\mathcal{G}$ 中的态射，若 $A \to B$ 是 $Q : \mathcal{G} \to \mathcal{F}$ 的笛卡尔态射，$P(A) \to P(B)$ 是 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ 的笛卡尔态射，那么 $A \to B$ 是 $P \circ Q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}$ 的笛卡尔态射.

定义. 设 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的范畴，若对任意 $\mathcal{F}$ 中的对象 B 和 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : X \to P(B)$，都存在 $\mathcal{F}$ 中的笛卡尔态射 $h : A \to B$ 使得 $P(h) = f$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, squiggly] & B \arrow[d, squiggly] \\
X \arrow[r, "f=P(g)"] & P(B),
\end{tikzcd}$$

则称 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 (fibred category).

如上定义可以看作纤维范畴保证在另一种形式下（因为有的对应不是真正的态射）拉回图总是存在的，并且习题??? 说明纤维范畴具有传递性.

当给定一个纤维范畴 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ 时，$\mathcal{F}$ 自然地可以看作一个 “函子” $\mathcal{C} \to \mathrm{CAT}$，它将 $\mathcal{C}$ 中的对象 X 映到 $\mathcal{F}(X) := \{A \in \mathrm{ob}\, \mathcal{F} \mid P(A) = X\}$，且

$$\hom_{\mathcal{F}(X)}(A, B) = \begin{cases} \{f \mid P(f) = \mathrm{id}_{P(A)}\} & P(A) = P(B) \\ \emptyset & P(A) \neq P(B) \end{cases}.$$

我们之后会具体解释这一个对应的函子性.

例 8. 给定范畴 $\mathbf{Sch}_S$，$f : X \to Y$ 是其中取定的态射，那么对于任意的 $T \to S$，拉回 $X \times_S T$ 存在，并且范畴论一般的理论说明所有的拉回在同构上是唯一的. 但是，在通常的使用中我们需要选取一个对象作为拉回，而不是自然地取唯一的一个拉回，这样的现象是叠理论发展中非平凡的技术性障碍. 纤维范畴的引入就是为了解决这一困难.

取范畴 $\mathcal{F}$ 满足对象是 $\mathbf{Sch}_S$ 中的拉回图

$$\begin{tikzcd}
X \times_S T \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
T \arrow[r] & S,
\end{tikzcd}$$

态射是 $\mathbf{Sch}_S$ 中的态射 $T_1 \dashrightarrow T_2$ 和 $X \times_S T_1 \dashrightarrow X \times_S T_2$ 满足交换图

$$\begin{tikzcd}
X \times_S T_2 \arrow[r, dashed] \arrow[d] \arrow[rr, bend left] & X \times_S T_1 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
T_2 \arrow[r, dashed] \arrow[rr, bend right] & T_1 \arrow[r] & S,
\end{tikzcd}$$

并且函子 $P : \mathcal{F} \to \mathbf{Sch}_S$ 将拉回图

$$\begin{tikzcd}
X \times_S T \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\
T \arrow[r] & S
\end{tikzcd}$$

映为 $T \to S$，那么对于任意 $T \in \mathbf{Sch}_S$，$\mathcal{F}(T)$ 包含了所有的同构的 $X \times_S T$，并且任意 $\mathcal{F}(T)$ 中的两个对象都是唯一同构的，即 $\mathcal{F}(T)$ 中的同构是唯一的（这由拉回的定义保证）.

定义. 给定 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}, Q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}$，若函子 $H : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 将 $\mathcal{F}$ 中的笛卡尔态射映到 $\mathcal{G}$ 中的笛卡尔态射，且满足交换图（作为函子是相等而不是同构）

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{G} \arrow[dl, "Q"] \\
\mathcal{C}, &
\end{tikzcd}$$

则称 H 是纤维范畴的态射 (morphism of fibred categories). 我们记 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的所有态射为

$$\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{G}).$$

若 $H_1, H_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是两个纤维范畴的态射，若自然变换 $\eta : H_1 \Rightarrow H_2$ 若满足对任意的 $A \in \mathrm{ob}\, \mathcal{F}$，$\mathcal{G}$ 中的态射 $\eta_A : H_1(A) \to H_2(A)$ 在 $\mathcal{G}(P(A))$ 中，即 $Q(\eta_A) = \mathrm{id}_{P(A)}$，则称 η 是保基自然变换 (base-preserving natural transformation). 这样 $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ 按照自然变换的复合事实上是一个范畴.

定理 7.1 (2-Yoneda)**.** 映射

$$\begin{aligned} \eta : \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/A, \mathcal{F}) &\to \mathcal{F}(A) \\ (g : \mathcal{C}/A \to \mathcal{F}) &\mapsto g(\mathrm{id}_A) \end{aligned}$$

是纤维范畴的态射，并且诱导了两个范畴的等价.

推论 7.1.1. 给定范畴 $\mathcal{C}$ 和对象 A, B，那么

$$\begin{aligned} \eta : \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/A, \mathcal{C}/B) &\to \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \\ (g : \mathcal{C}/A \to \mathcal{C}/B) &\mapsto g(\mathrm{id}_A) \end{aligned}$$

是范畴的等价.

7.1 拟函子

任意给定纤维范畴 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C},Q:\mathcal{G}\to\mathcal{C}$ 之间的态射 $H:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$，那么对于任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A，如上定义保证了 H 将 $\mathcal{F}(A)$ 映到 $\mathcal{G}(A)$，因此可以考虑函子 $H_A:\mathcal{F}(A)\to\mathcal{G}(A)$.

如果我们考虑的 $\mathcal{C}$ 上的范畴 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$ 过于一般，那么对于任意 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f:A\to B$，存在可能性使得 $\mathcal{F}(A)$ 是空但 $\mathcal{F}(B)$ 不是. 这时候，纤维范畴的性质就解决了这样的问题.

给定 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f:X\to P(B)$，那么由定义存在 $A\in\operatorname{ob}\mathcal{F}$ 和 $h:A\to B$ 使得 $P(h)=f$，通常称 A 是 B 关于 f 的拉回 (pull-back)，记为 $A=f^*B$. 若同时存在 B_1,B_2 和 $g:B_1\to B_2$，那么交换图

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[drr, bend left, "v"] \arrow[dr, dashed, "w"'] \arrow[dd, "u"'] & & \\
& X \arrow[r, "h"] \arrow[dd, "k"] & Y \arrow[dd, "g"] \\
A \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, equal] & & \\
& A \arrow[r, "k"] & B
\end{tikzcd}$$

说明存在唯一的 $f^*(g):f^*B_1\to f^*B_2$

定义.

引理 7.3. 给定 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$，那么 $\mathcal{F}$ 中的任意态射 $f:A\to B$ 都可以分解为

$$A\xrightarrow{h}C\xrightarrow{u}B,$$

其中 $h:A\to C$ 是 $\mathcal{F}(P(A))$ 中的态射，且 $u:C\to B$ 是笛卡尔态射.

命题 7.2.

定义. $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$ 若满足对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A，$\mathcal{F}(A)$ 都是群胚，即 $\mathcal{F}$ 中被映到 id 的态射都是可逆的，则称 $\mathcal{F}$ 是群胚纤维范畴 (category fibred over groupoid).

命题 7.3. 设 $\mathcal{C}$ 上有纤维范畴 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C},Q:\mathcal{G}\to\mathcal{C}$，若 $\mathcal{F}$ 是集合纤维范畴，则范畴 $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 是一个集合，若 $\mathcal{F}$ 是群胚纤维范畴，则范畴 $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 是一个群胚.

定义. 给定 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$，对于 $\mathcal{C}$ 中的对象 X 和 $\mathcal{F}(X)$ 中的对象 A,B，存在如下的预层:

$$\operatorname{Iso}(A,B):\mathcal{C}^\circ/X\to\mathbf{Set},$$

对于 $Y\xrightarrow{f}X$，由给定的 cleavage 选定拉回 f^*A 和 f^*B（它们都是 $\mathcal{F}(Y)$ 中的对象），那么

$$\operatorname{Iso}(A,B)(Y\xrightarrow{f}X):=\hom_{\mathcal{F}(Y)}(f^*A,f^*B).$$

对于 $\mathcal{C}/X$ 中的态射 $h:Y\to Z$，函子得到的限制映射是

$$\hom_{\mathcal{F}(Y)}(f^*A,f^*B)\xrightarrow{h^*}\hom_{\mathcal{F}(Z)}(g^*f^*A,g^*f^*B)\cong\hom_{\mathcal{F}(Z)}((fg)^*A,(fg)^*B).$$

习题 7.2. 验证上述定义中的 h^* 是良定义的.

例 9. 给定拓扑群 G，定义 G 的分类叠 *(classfying stack)* 如下，BG 是 $\mathbf{Top}$，对象是 G 主丛 $P\to X$，态射是丛态射

7.2 拉回和推出

习题 7.3. 若 $\mathcal{G}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 都是群胚，且存在函子 $F_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{G}$，那么 $\mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{G}} \mathcal{H}_2$.

定义. 设 $\mathcal{D}$ 上的范畴 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{D}$ 是纤维范畴，$G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是函子，则对象是配对 $(X \in \operatorname{ob} \mathcal{C}, A \in \mathcal{F}(f(X)))$，态射 $f : (X, A) \to (Y, B)$ 是满足 $P(f) \in \hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(f(X)), \mathcal{F}(f(Y)))$ 的 $\mathcal{F}$ 中的态射 $f : X \to Y$ 的范畴 $G^{-1}(\mathcal{F})$ 被称为 $\mathcal{F}$ 关于 G 的拉回.

$$\begin{tikzcd}
G^{-1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "G^{-1}(P)"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "P"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "G"] & \mathcal{D}.
\end{tikzcd}$$

在上面的定义中，我们没有把纤维范畴的拉回写为“对称”的，这是因为，虽然我们可以证明 $G^{-1}(\mathcal{F})$ 就是范畴的纤维积 $\mathcal{F} \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}$，但是下面的事情说明定义对于纤维性并不对称：

引理 7.4. $G^{-1}(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴.

定义.

例 10.

8 下降法

在代数几何当中，我们知道，当局部存在拟凝聚层时，只要它们满足被称为“条件”的相容性，就存在同构意义下唯一的拟凝聚层使得它在局部的限制恰好为给定的拟凝聚层. 当前一段中的“局部”所指是“Zariski 局部”的时候，这个命题并不难证明，但我们同样可以证明命题在“平坦局部”的情形下依旧成立，而这个命题的证明就会困难很多. 对这个局部性的讨论就需要 Grothendieck 拓扑，但只要接受对一个层 $\mathscr{F}$ 复合态射的拉回有自然的同构 $f^* g^* \mathscr{F} \cong (gf)^* \mathscr{F}$，它依旧是一个自然并且简单的命题.

但问题是，之前得到的只是一个同构而不是一个相等，为保证证明的严格性，我们必须建立一套理论，使得可以最终得到想要的由局部信息“粘合”的对象，这样的理论就是下降法 (descent theory)，而下降法成立的范畴就被称为叠 (stack).

引理 8.1. 设 $\mathcal{C}$ 是存在纤维积的范畴，$\{*\}$ 是终对象，那么对任意 $A \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$，$f : A \to \{*\}$ 给出了范畴的嵌入

$$f^* : \mathcal{C}_{/A} \to \mathcal{C}$$

使得 f^* 是一个函子.

证明. $\square$

引理 8.2. 设 $\mathcal{C}$ 是存在纤维积的范畴，$A \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$ 且 $\mathcal{C}_{/A}$ 是对象 A 上的范畴，那么对于任意 $B \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$，函子 $h_B := \hom_{\mathcal{C}}(-, B)$ 在 $\mathcal{C}_{/A}$ 上的限制是 $h_{B \times A} := \hom_{\mathcal{C}_{/A}}(-, B \times A)$.

证明. $\square$

考虑范畴 $\mathbf{Sch}_S$，X 是其中的对象，若函子 $F : \mathbf{Sch}_S^{\circ} \to \mathbf{Set}$ 满足它在 $\mathbf{Sch}_X$ 上的限制是可表的，

定义. 给定一个位形 $\mathcal{C}$ 和上面的纤维范畴 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$，且我们选定一个 cleavage. 设 $\mathcal{U}:=\{\iota_i:U_i\to U\}_{i\in I}$ 是 $\mathcal{C}$ 中 U 的一个覆盖.$\mathcal{U}$ 上的一个下降信息对象 (an object with descent data on $\mathcal{U}$) 是一族对象 $(A_i,\varphi_{i,j})$，其中 A_i 是 $\mathcal{F}(U_i)$ 中的对象，$\varphi_{i,j}$ 是同构

$$\varphi_{i,j}:\mathrm{pr}_1^*A_i\cong\mathrm{pr}_2^*A_j,$$

且对于任意的 i,j,k 满足如下的上闭链条件 (cocycle condition)：

$$\mathrm{pr}_{1,3}^*\varphi_{i,k}=\mathrm{pr}_{2,3}^*\varphi_{j,k}\circ\mathrm{pr}_{1,2}^*\varphi_{i,j}:\mathrm{pr}_1^*A_i\to\mathrm{pr}_2^*A_j\to\mathrm{pr}_3^*A_k.$$

其中，$\varphi_{i,j}$ 被称为转移同构 (transition isomorphism).

下降对象的态射

$$\eta:(A_i,\varphi_{i,j})\to(B_i,\psi_{i,j})$$

是一族态射 $\eta_i:A_i\to B_i$ 满足交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{pr}_1^*A_i \arrow[r, "\varphi_{i,j}"] \arrow[d, "\mathrm{pr}_1^*\eta_i"'] & \mathrm{pr}_2^*A_j \arrow[d, "\mathrm{pr}_2^*\eta_j"] \\
\mathrm{pr}_1^*B_i \arrow[r, "\psi_{i,j}"] & \mathrm{pr}_2^*B_j.
\end{tikzcd}$$

我们记所有下降对象组成的范畴为 $\mathcal{F}(\mathcal{U})=\mathcal{F}(\{\iota_i:U_i\to U\}_{i\in I})$.

给定一个拉回的选择，那么对于任意的对象 $A\in\mathcal{F}(U)$，都存在一个 $\mathcal{U}:=\{\iota_i:U_i\to U\}_{i\in I}$ 上的下降对象 $(A_i,\varphi_{i,j})$，其中 A_i 根据拉回的选择而给出，而同构恰好由笛卡尔映射的性质??? 给出，因为 $\mathrm{pr}_1^*A_i,\mathrm{pr}_2^*A_j$ 都是 $\mathcal{F}(U_i\times_U U_j)$ 中的对象. 同样地，对任意的 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f:U\to V$，我们可以得到 $\iota_i^*f:A_i\to B_i$，于是这是一个函子 $\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(\mathcal{U})$.

习题 8.1. 假定给定两个拉回的选择，分别得到下降对象的范畴 $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ 和 $\mathcal{F}(\overline{\mathcal{U})}$. 求证两个范畴同构，且这个同构与之前提到的函子 $\mathcal{F}(U)\to\mathcal{F}(\mathcal{U})$ 交换.

定义. $\mathcal{F}(\mathcal{U})$ 中的对象 $(A_i,\varphi_{i,j})$ 若同构于 $\mathcal{F}(U)$ 的象，则称它是有效的 (effective).

事实上，我们还有不需要给定拉回选择定义下降资料的方法：

定义. 给定一个位形 $\mathcal{C}$ 和上面的纤维范畴 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$，$\mathcal{U}:=\{\iota_i:U_i\to U\}_{i\in I}$ 是 $\mathcal{C}$ 中 U 的一个覆盖.$\mathcal{U}$ 上的一个下降信息对象是一族对象 $(\{A_i\}_{i\in I},\{A_{i,j}\}_{i,j\in I},\{A_{i,j,k}\}_{i,j,k\in I})$，其中 $A_i\in\mathcal{F}(U_i),A_{i,j}\in\mathcal{F}(U_{i,j}),A_{i,j,k}\in\mathcal{F}(U_{i,j,k})$，且对任意三个指标都有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & A_{i,j,k} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & A_{j,k} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
A_{i,j} \arrow[rr] \arrow[dd] & & A_j & \\
 & A_{i,k} \arrow[rr] \arrow[dl] & & A_k, \\
A_i & & &
\end{tikzcd}$$

其中每个箭头都是笛卡尔态射，且函子 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$ 作用在图上得到 $\mathcal{C}$ 中的一个覆盖图.

两个对象 $(\{A_i\}_{i\in I},\{A_{i,j}\}_{i,j\in I},\{A_{i,j,k}\}_{i,j,k\in I})$ 和 $(\{B_i\}_{i\in I},\{B_{i,j}\}_{i,j\in I},\{B_{i,j,k}\}_{i,j,k\in I})$ 之间的态射是一族 $\mathcal{F}$ 中的态射

$$\eta:(\{A_i\},\{A_{i,j}\},\{A_{i,j,k}\})\to(\{B_i\},\{B_{i,j}\},\{B_{i,j,k}\})$$
$$\eta_i:A_i\to B_i,$$

满足

$$\mathrm{pr}_1^*\eta_i=\mathrm{pr}_2^*\eta_j:A_{i,j}\to B_{i,j}.$$

我们记这个范畴为 $\mathcal{F}_{\mathrm{desc}}(\mathcal{U})$.

习题 8.2. 验证 $\mathcal{F}_{\mathrm{desc}}(\mathcal{U})$ 中态射的定义同于给定态射 $\eta_i:A_i\to B_i,\eta_{i,j}:A_{i,j}\to B_{i,j},\eta_{i,j,k}:A_{i,j,k}\to B_{i,j,k}$，且它们满足相应的相容性关系.

一旦给定一个拉回的选择，就存在一个函子 $\mathcal{F}_{\mathrm{desc}}(\mathcal{U})\to\mathcal{F}(\mathcal{U})$，将对象 $(\{A_i\}_{i\in I},\{A_{i,j}\}_{i,j\in I},\{A_{i,j,k}\}_{i,j,k\in I})$ 映到 $(A_i,\varphi_{i,j})$，其中

$$\varphi_{i,j}:\mathrm{pr}_1^*A_i\cong A_{i,j}\to\mathrm{pr}_2^*A_j\cong A_{i,j}$$

由拉回给出. 同样给定拉回的选择后，也有函子 $\mathcal{F}(\mathcal{U})\to\mathcal{F}(\mathcal{U})_{\mathrm{desc}}$.

习题 8.3. 验证范畴的同构

$$\mathcal{F}_{\mathrm{desc}}(\mathcal{U})\simeq\mathcal{F}(\mathcal{U}).$$

注意到定义中并不存在交换图右下角的对象，这个对象恰好对应覆盖图当中的终对象. 但是如果我们定义范畴 $\mathcal{F}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{U})$，其中的对象是 $(A,\{A_i\}_{i\in I},\{A_{i,j}\}_{i,j\in I},\{A_{i,j,k}\}_{i,j,k\in I})$ 满足 $A\in\mathcal{F}(U),A_i\in\mathcal{F}(U_i),A_{i,j}\in\mathcal{F}(U_{i,j}),A_{i,j,k}\in\mathcal{F}(U_{i,j,k})$，且如下交换图

$$\begin{tikzcd}
& A_{i,j,k} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & A_{j,k} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
A_{i,j} \arrow[rr] \arrow[dd] & & A_j \arrow[dd] & \\
& A_{i,k} \arrow[rr] \arrow[dl] & & A_k \arrow[dl] \\
A_i \arrow[rr] & & A &
\end{tikzcd}$$

成立，其中所有的箭头都是笛卡尔态射. 类似于范畴 $\mathcal{F}_{\mathrm{desc}}(\mathcal{U})$，对象之间的态射定义为相应项之间的满足相容性条件的态射. 值得注意的是，$\mathcal{F}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{U})$ 与范畴 $\mathcal{F}(U)$ 同构.

习题 8.4. 验证范畴的同构

$$\mathcal{F}_{\mathrm{comp}}(\mathcal{U})\simeq\mathcal{F}(U).$$

9 叠

定义. 设 F, G 是函子 $\mathcal{C}^{\circ} \to \mathbf{Set}$，自然态射 $\eta : F \Rightarrow G$ 若满足对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A 和自然态射 $\epsilon : h_A \Rightarrow G$，纤维积函子

$$h_A \times_G F : \mathcal{C}^{\circ} \to \mathbf{Set}$$

是可表的，则称 F 是相对于 G 可表的 (representable relative to G).

定义. 给定函子 $F, G : \mathbf{Aff}^{\circ}_{/S} \to \mathbf{Set}$，自然态射 $\eta : F \Rightarrow G$ 若满足

1. η 是相对可表的，
2. 对任意 $\mathbf{Aff}^{\circ}_{/S}$ 中的对象 A 和自然态射 $\epsilon : h_A \Rightarrow G$，$h_A \times_G F \Rightarrow h_A$ 是一个开（相对的闭）嵌入，

则称 η 是仿射开（相对的，闭）嵌入 (affine open (resp. closed) embedding).

定义. 给定一个位形 $\mathcal{C}$ 和上面的纤维范畴 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$，若对于任意覆盖 $\mathcal{U} := \{\iota_i : U_i \to U\}_{i \in I}$，函子 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ 是范畴的等价，则称 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的叠 (stack). 若函子 $\mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(\mathcal{U})$ 是满忠实的，则称 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的预叠 (pre-stack).

例 11. 设 $\mathcal{C}$ 是一个位形，

例 12. 我们来验证若 X 是 S 上的概型，则自然的忘却函子 $P : \mathbf{Sch}_X \to \mathbf{Sch}_{/S}$ 是叠. 另一方面，任取

10 BG

定义. 设 $\mathcal{C}$ 位形，且 $\mathscr{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的群层

定义. 设 G 是代数群，$P, X \in \mathbf{Sch}_{/S}$ 且 $\pi : P \to X$ 是光滑的满态射，若存在态射 $\sigma : G \times_S P \to P$ 满足

1. 下图交换：

$$\begin{tikzcd}
G \times G \times P \arrow[r, "{(\mu, \mathrm{id}_P)}"] \arrow[d, "{(\mathrm{id}_G, \sigma)}"'] & G \times P \arrow[d, "\sigma"] \\
G \times P \arrow[r, "\sigma"] & P,
\end{tikzcd}$$

2. 存在恒等截面 $e : X \to P$ 满足

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "{(e, \mathrm{id}_P)}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_P"'] & G \times_S P \arrow[r] & P
\end{tikzcd}$$

交换，

3. 态射 $\sigma \times \mathrm{pr}_2 : G \times P \to P \times P$ 是同构，

则称 P 是 G 主从 (principal G-bundle).

11 商叠

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & X/G \arrow[d] \\ \{*\} \arrow[r] & BG \end{tikzcd}$$

A 附录：点函子

定义. 设 X 是 S 上的概型，则 X 的一个 T 点是一个态射 $f : T \to X$ 满足交换图

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\ & S. & \end{tikzcd}$$

任意给定概形 X，我们说明所有 X 上的点都是某个 T 点. 令 $(R, \mathfrak{m})$ 是局部环，$f : \mathrm{Spec}\ R \to X$ 是态射，x 是 $\mathfrak{m}$ 对应的（闭）点，于是这给出了芽局部环之间的局部态射

$$f^{\#} : \mathscr{O}_{X,x} \to \mathscr{O}_{\mathrm{Spec}\ R,\mathfrak{m}} = R_{\mathfrak{m}} = R.$$

引理 A.1 (01J5)**.** 设 X 概形，$(R, \mathfrak{m})$ 是局部环，那么如上给出了一一对应

$$\{\text{态射} f : \mathrm{Spec}\ R \to X\} \leftrightarrow \{(x, \varphi) \mid x \in X, \varphi : \mathscr{O}_{X,x} \to R\}.$$

证明. □

进一步地，

定理 A.1. 给定概形 X，那么 X 上的点一一对应于某个 K 点，其中 K 是域.

如果给定一个 S 上的概型 X，那么函子

$$h_X := \hom_{S-\mathbf{Sch}}(-, X) : S - \mathbf{Sch} \to \mathbf{Set}$$

给出了所有可能的 T 点，即给定的概型确定其上所有的点. 反过来这个事情是否成立？下面的命题给出了部分答案：

命题 A.2. 设 R 是交换环，$S = \mathrm{Spec}\ R$，那么函子

$$h : S - \mathbf{Sch} \to \mathbf{Funct}(R - \mathbf{Alg}, \mathbf{Set})$$
$$X \mapsto h_X$$

是范畴的等价.

证明. url □

例 13. 考虑函子

$$F : \mathbf{CommRing} \to \mathbf{Set}$$
$$R \mapsto h_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[x]}(\mathrm{Spec}\ R),$$

可以证明 $h_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[x]}(\mathrm{Spec}\ R)$ 自然同构于 R, 理解为 $\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[x]$ 的 R 点具有 R 的特征, 这也是我们称 $\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[x]$ 为仿射直线的原因.

例 14. 考虑函子

$$
\begin{aligned}
F : \mathbf{CommRing} &\to \mathbf{Set} \\
R &\mapsto R^{\times},
\end{aligned}
$$

可以证明 $F \cong \hom_{\mathbf{CommRing}}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}], -)$.

例 15. 给定素数 p，考虑函子

$$
\begin{aligned}
F : \mathbf{CommRing} &\to \mathbf{Set} \\
R &\mapsto \{x \in R \mid px = 0\},
\end{aligned}
$$

可以证明 $F \cong h_{\mathrm{Spec}\ \mathbb{F}_p[x]/(x^p)}$.

习题 A.1. 设 X 是局部 Noether 的概型，求证 h_X 可以被限制到 Noether 环的满子范畴上.

我们考虑如下的例子：$X = \mathrm{Spec}\ \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$，由于 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$ 是个域，故该概形只有一个点，但是如果考虑 $X_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[x]/(x^2+1) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]/(x+i) \times \mathbb{C}[x]/(x-i))$. 注意到 X 不是一个 $\mathbb{R}$ 点（因为若有环同态 $\varphi : \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{R}$，那么 $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ 满足 $0 = \varphi(x^2+1) = \varphi(x)^2+1$)，这很容易理解——在这个点上的层不是 $\mathbb{R}$. 对于一个概型，即便它是定义在

例 16. 给定函子

$$
\begin{aligned}
F : R - \mathbf{Algebra} &\to \mathbf{Set} \\
A &\mapsto \{(P, s_1, \cdots, s_r) \mid \text{满足 } P \text{ 是投射 } A \text{ 模，} s_i \in P \text{且} s_0, \cdots, s_n \text{生成} P\}/\sim,
\end{aligned}
$$

其中 $(P, s_0, \cdots, s_n) \sim (Q, t_0, \cdots, t_n)$ 当且仅当存在 A 模的同构 $f : P \to Q$ 使得 $f(s_i) = t_i$，那么可以证明这个函子同构于 $h_{\mathbb{P}^n}$.

我们考虑复合函子

$$\mathbf{Sch}_S \to \mathrm{Fun}(\mathbf{Sch}_S^{\circ}, \mathbf{Set}) \to \mathrm{Fun}(\mathbf{Ring}, \mathbf{Set}),$$

其中第一个是 Yoneda 嵌入，第二个函子是 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Spec}\ -, \mathbf{Set})$. 第一个函子显然是满忠实的，但第二个函子不是的. 考虑 $\hom_{\mathbf{Sch}_S}(\mathrm{Spec}\ -, \mathbb{P}_S^n)$ 和 $\hom_{\mathbf{Sch}_S}(\mathrm{Spec}\ -, \mathbb{P}_S^m)$ 两个函子，它们都是映到空集的常值函子（从仿射概型到射影），但他们间有非平凡的态射诱导的自然变换. 问题在于它们的复合是满忠实的

定义. 设 $F, G : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ 是两个给定的函子，若自然变换 $\eta : F \Rightarrow G$ 满足对任意对象 $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，映射

$$\eta_A : F(X) \to G(X)$$

都是单射，则称 F 是 G 的子函子 (subfunctor).

定义. 设 $F, G, H : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ 是给定的函子，$\eta : F \Rightarrow H, \xi : G \Rightarrow H$ 是自然变换，那么 F 与 G 的纤维积 (fibre product)$F \times_H G$ 是函子

$$
\begin{aligned}
F \times_H G : \mathcal{C} &\to \mathbf{Set} \\
A &\mapsto \{(a, b) \in F(A) \times G(A) \mid \eta_A(a) = \xi_A(b) \in H(A)\}
\end{aligned}
$$

定义. 设 $\eta : F \Rightarrow G : \mathbf{Sch}_{/S} \to \mathbf{Set}$ 是子函子，若对任意