抽象代数

2020 年 10 月 11 日

第一章　群论

练习1.1. 设S是一个半群，那么下面论断等价：

(i) $\forall a, b \in S$，$ab = a$或$\forall a, b \in S$，$ab = b$；

(ii) $\forall a, b, c, d \in S$，$ac = bd \Rightarrow a = b$或$c = d$；

(iii) 设f是S上的任意映射，$f(ab) = f(a)f(b)$.

练习1.2. 设G是一个半群.证明G是一个群当且仅当方程$gx = h$和$xg = h$对于任意$g, h \in G$成立.

Proof. 只需要证明单位元的存在性即可.

若$gx_0 = g$，取$z \in G$使得$zg = h$，于是$hx_0 = h$对于任意$h \in G$成立.若$gx_1 = g = x_2 g$，则$x_1 = x_2 x_1 = x_2$. □

练习1.3. 我们如此定义平面$\mathbb{R}^2$的旋转变换群G：它的元素是R_θ其中$\theta \in [0, 2\pi)$，元素R_φ与R_θ的乘法定义为

$$R_\varphi * R_\theta = \begin{cases} R_{\varphi+\theta} & 若\varphi + \theta < 2\pi \\ R_{\varphi+\theta-2\pi} & 若\varphi + \theta \geq 2\pi \end{cases}.$$

证明$G \cong S^1 = \mathbb{C}^* \cong \mathrm{SO}(2)$.

练习1.4. 设N是群G的正规子群，则G/N交换当且仅当$G' \subseteq N$.

练习1.5. 设群G满足$\forall g \in G$，$g^2 = 1$.求证G是Abel群.

Proof. 任取$g, h \in G$，由条件知$(gh)^2 = 1$，于是$ghgh = 1$.但是$g = g^{-1}$且$h = h^{-1}$，于是$g^{-1}hgh^{-1} = 1$，即$gh = hg$. □

练习1.6. 设群$G := \langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = 1 \rangle$.求证

$$G \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{I, -I\}$$

[提示：$a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.]

练习1.7. 设G是有限群，群同态$\varphi : G \to G$满足$\varphi(x) = x^n$.求证φ是自同构当且仅当$(n, |G|) = 1$.

Proof. 一方面，若$(n, |G|) = 1$，任取$g \in \operatorname{Ker} \varphi$，那么

$$1 = \varphi(g) = g^n,$$

于是若$g\neq 1$，则存在素数$p\mid (n,|g|)$，但$p\mid |G|$，因此与$(n,|G|)=1$矛盾，故$G=1$.由于G是有限的，故φ也是满射，因此是自同构.

另一方面，若$\varphi: G\to G$是自同构，若$(n,|G|)\neq 1$，则存在素数$p\mid (n,|G|)$，由Cauchy定理，存在$g\in G$使得$|g|=p$，故

$$\varphi(g)=g^n=g^{pt}=(g^p)t=1,$$

与$\varphi: G\to G$是自同构矛盾. □

练习1.8. (i)求证A_n作用在$\{1,\cdots,n\}$是$(n-2)-$传递的.

(ii)设群G作用在X上是2-传递的，则对任意$x\in X$，G_x是G的极大子群.

(iii)由前面的结果证明A_n是单群.

练习1.9. 设G是一个有限群，H是G得一个真子群，证明存在G的一个等价类C使得$H\cap C=\emptyset$.

Proof. 由Jordan引理，存在一个G的元素g使得g左乘作用在$X:=G/H$上无不动点，于是$g\cdot aH\neq aH$.故$a^{-1}ga\notin H$对任意$a\in G$成立，取$C=G\cdot g$即可. □

练习1.10. 有限群G非平凡地作用在集合A上，满足$|G|>|A|!$，求证G存在非平凡的正规子群.

Proof. 考虑映射

$$\begin{aligned}\varphi: G&\to \mathfrak{S}_A\\ g&\mapsto \sigma_g\end{aligned}$$

□

练习1.11 (不动点定理(fixed points theorem)). 设G是一个p群，作用在一个有限集X上，令$X^G:=\{x\in X\mid gx=x,\forall g\in G\}$，求证

$$|X|\equiv |X^G| \pmod p.$$

Proof. 令$\mathcal{O}$是一个G-轨道，满足$\mathcal{O}\subseteq X-X^G$，于是存在$x\in X$使得$\mathcal{O}=G\cdot x$.由稳定子等式知$|\mathcal{O}|=|G\cdot x|=[G:G_x]$.但$G$是一个$p$群，故$[G:G_x]$是$p$的次方，故$|\mathcal{O}|\equiv 0 \pmod p$.注意到$X-X^G$是这样一些轨道的无交并，故

$$|X|-|X^G|=\left|\coprod_{\mathcal{O}\subseteq X-X^G}\mathcal{O}\right|=\sum_{\mathcal{O}\subseteq X-X^G}|\mathcal{O}|\equiv 0 \pmod p.$$

□

练习1.12. 设G是一个有限群，素数p整除$|G|$.求证存在G的p阶元素.

Proof. 定义

$$X:=\{(g_1,\cdots,g_p)|g_i\in G, g_1\cdots g_p=1\},$$

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$按照如下方式作用在X上：

$$1\cdot(g_1,\cdots,g_p)=(g_p,g_1,\cdots,g_{p-1}).$$

注意到$g_pg_1\cdots g_{p-1}=g_p(g_1\cdots g_{p-1}g_p)g_p^{-1}=1$，群作用是良定义的.注意到本质上这$p$个坐标中$p-1$个是自由的，于是$|X|=|G|^{p-1}\pmod p$.考虑

$$X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}=\{(g,\cdots,g)|g\in G,g^p=1\},$$

于是$|X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}|=\#\{(g,\cdots,g)|g\in G,g^p=1\}$.由不动点定理，

$$|X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}|\cong|X|\cong 0\pmod p.$$

但是$(1,\cdots,1)\in X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$，故$|X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}|\geq p$. □

练习1.13. 设p是一素数，$G=GL_n(F_p)$，写出一个G的Sylow-p子群，算出它的阶并求出G中全部Sylow-p子群的个数.

Proof. $|G|=(p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{n-1})$，于是$p^{\frac{n(n-1)}{2}}$恰好整除$|G|$，因而Sylow-$p$子群阶数为$p^{\frac{n(n-1)}{2}}$.由此，显然所有对角元素为1的上三角矩阵组成的子群是G的Sylow-p子群，记为U.

由Sylow第二定理，为计算Sylow-p子群个数，我们只需要求得U的所有共轭子群的个数，设X是所有U的共轭子群组成的集合，$N=\{g\in G|gUg^{-1}=U\}$是U的正规化子，于是由计数公式，我们有

$$|G|=|X||U|.$$

另一方面，容易验证N是所有上三角矩阵组成的子群，故$|N|=(p-1)^np^{\frac{n(n-1)}{2}}$，于是 □

练习1.14. 设21阶群G中元素g的等价类$C(g)$的阶为3,试求g的阶.

Proof. 由计数公式，$|Z(g)|=7$，故$|g|\neq 21$，否则G为循环群.若$|g|=3$，则除g^n外，存在$h\in G$使得$gh=hg$，由于$h\in Z(g)$因此$|h|=7$，这样与$|Z(g)|=7$矛盾，于是$|g|=7$. □

练习1.15. 12阶群G含有一个4阶等价类，证明G的中心是平凡的.

Proof. 反设$Z(G)$不平凡，则存在$x\in G$满足$x\neq 1$且与G中所有元素交换.设$g\in G$的等价类是四阶，故$Z(g)$是G的三阶循环子群；另一方面显然$x\in Z(g)$，因此x的阶恰为3，即$Z(G)$有3个不同的元素.考虑类方程

$$12=1+1+1+|C_1|+|C_2|+4$$

只能有$|C_1|=2,|C_2|=3$.但这导致存在元素的中心化子阶为4，从而$Z(G)$不能是其子群，矛盾. □

练习1.16. 设群G的自同构群$\mathrm{Aut}(G)$是循环群，证明G是交换群.

练习1.17. 设群G作用在集合X上，使得所有的轨道都是无限集.求证对X的任意有限子集A,B，存在$g\in G$使得$gA\cap B=\emptyset$.

练习1.18. 设H是有限群G的子群，G有p-Sylow子群S.求证存在$g\in G$使得$H\cap gSg^{-1}$是H的p-Sylow子群.

第二章　环

求证交换环的极大理想一定是素理想. [假设环R中的极大理想$\mathfrak{m}$不是素理想，则存在$ab \in \mathfrak{m}$满足$a \notin \mathfrak{m}$, $b \notin \mathfrak{m}$.构造$I = \{c + ra | c \in \mathfrak{m},\ r \in R\}$.证明$\mathfrak{m} \subsetneq I \subsetneq R$.]

Solution 设$\mathfrak{m}$是环R中的极大理想，且不是素理想，于是存在$ab \in \mathfrak{m}$满足$a \notin \mathfrak{m}$, $b \notin \mathfrak{m}$.令$I = \{c+ra | c \in \mathfrak{m},\ r \in R\}$，显然$\mathfrak{m} \subsetneq I$.任取$c_1 + r_1 a$, $c_2 + r_2 a \in I$，于是$(c_1 + r_1 a) + (c_2 + r_2 a) = (c_1 + c_2) + (r_1 + r_2)a$，由$\mathfrak{m}$是理想$c_1 + c_2 \in \mathfrak{m}$，因而$(c_1 + r_1 a) + (c_2 + r_2 a) = (c_1 + c_2) + (r_1 + r_2)a \in I$；再任取$c + ra \in I$, $s \in R$，由$\mathfrak{m}$是理想可知$sc \in \mathfrak{m}$，故$s(c+ra) = sc + (sr)a \in I$，即$I$是理想.最后证明$I \subsetneq R$.否则，存在$c + ra \in I$使得$c + ra = 1$，于是$cb + rab = b$，注意到$c$, $ab \in \mathfrak{m}$，这导致了$b \in \mathfrak{m}$，矛盾.于是理想I满足$\mathfrak{m} \subsetneqq I \subsetneqq R$，这与$\mathfrak{m}$是极大理想矛盾，因此$\mathfrak{m}$素理想. ■

练习2.1. 证明

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

作为环同构于$\mathbb{C}$.

练习2.2. 证明

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$$

作为环同构于$\mathbb{H}$.

试说明任意交换环都是某个集合上的映射. [考虑环R中元素在$\mathrm{Spec}\, R$上的映射，$f \mapsto f + \mathfrak{p}$.]

练习2.3. 设k是域，求$k[x]/(x^2)$的所有素理想.

Proof. 显然(0)不是素理想.由于$k[x]$主理想整环，故$k[x]/(x^2)$也是主理想整环，因此其中的理想都是形如$(p(x))/(x^2)$的.由于在$k[x]/(x^2)$中$x^2 = 0$，故$(p(x))/(x^2)$由一个零次或一次多项式生成，记为$(p(x))/(x^2) = (ax + b)/(x^2)$.若$b \neq 0$，则在$k[x]/(x^2)$中

$$(ax + b)\frac{ax - b}{-b^2} = \frac{a^2x^2 - b^2}{-b^2} = 1$$

因此$(ax + b)/(x^2)$是单位理想，故只有素理想(x). □

求证整环R上的齐次多项式的因子必为齐次多项式.

设$f(x_1, \cdots, x_n)$是R上的多项式，考虑$\hat{f}(x_1, \cdots, x_n, t) = f(tx_1, \cdots, tx_n) \in R[x_1, \cdots, x_n, t]$，则$f(x_1, \cdots, x_n)$是齐次多项式当且仅当$\hat{f}(x_1, \cdots, x_n, t) = t^d f(x_1, \cdots, x_n)$.

设$f(x_1,\cdots,x_n)=g(x_1,\cdots,x_n)h(x_1,\cdots,x_n)$，于是

$$\hat{f}(x_1,\cdots,x_n)=\hat{g}(x_1,\cdots,x_n)\hat{h}(x_1,\cdots,x_n)=g(tx_1,\cdots,tx_n)h(tx_1,\cdots,tx_n)$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\hat{g}(x_1,\cdots,x_n)&=g_0+g_1t+\cdots+g_at^a\\ \hat{h}(x_1,\cdots,x_n)&=h_0+h_1t+\cdots+h_bt^b\end{aligned}$$

其中$g_i,h_j\in R[x_1,\cdots,x_n]$且$g_a,h_b\neq 0$.由$f(x_1,\cdots,x_n)$是齐次多项式知

$$f(x_1,\cdots,x_n)t^d=\hat{g}(x_1,\cdots,x_n)\hat{h}(x_1,\cdots,x_n)=(g_0+g_1t+\cdots+g_at^a)(h_0+h_1t+\cdots+h_bt^b)$$

看作整环$R[x_1,\cdots,x_n]$上关于t的多项式展开并对比系数，可以递归地得到$g_j=h_j=0,i\neq a,j\neq b$. ■

练习2.4. 求证有限整环R必为除环.

Solution 任取$s\in R$，构造环同态

$$\varphi_s:R\longrightarrow R \tag{2.1}$$

$$r\longmapsto sr \tag{2.2}$$

由R是整环知，φ_s是R到自身的单同态，但R是有限的，故φ_s必然也是满同态，故存在$v\in R$使得$sv=\varphi_s(v)=1$.同理，存在$u\in R$使得$us=1$，故R是除环. ■

练习2.5. 求证若交换环R是整环且仅有有限多个理想，则R必为域.

Solution. 任取$0\neq u\in R$，考虑理想

$$(u)\supseteq(u^2)\supseteq\cdots(u^n)\supseteq\cdots$$

是无穷多个理想，故存在正整数m使得$(u^m)=(u^{m+1})$，因此存在$v\in R$使得

$$u^m=cu^{m+1}.$$

根据消去律$1=uv$，因此R中任意非零元素可逆，是域. □

设R是一个带单位元的环，$f:R\to R$是R上Abel群的自同态.求证$\forall a,b\in R,f(ab)=f(a)f(b)$或$\forall a,b\in R,f(ab)=f(b)f(a)$当且仅当$\forall a,b\in R$，$f(ab)=f(a)f(b)$或$f(ab)=f(b)f(a)$.

Solution 令$S_a=\{b\in R|f(ab)=f(a)f(b)\},T_b=\{a\in R|f(ab)=f(a)f(b)\}$，容易证明$S_a$和$T_b$是$R$的子群.但是$S_a\cup T_b=R$，故仅有平凡的情况. ■

求证$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$是唯一分解整环.

Proof. 任取$\alpha=a+b\sqrt{-2},\beta=c+d\sqrt{-2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$，在$\mathbb{C}$中计算$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{ac+2bd}{c^2+2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+2d^2}\sqrt{-2}=q+r\sqrt{-2}$，其中$q,r\in\mathbb{Q}$.取$e=[q+\frac{1}{2}],f=[r+\frac{1}{2}]$，则$|q-e|\leq\frac{1}{2},|r-f|\leq\frac{1}{2}$，进而

$$\begin{aligned}\alpha-(e+f\sqrt{-2})\beta&=(q+r\sqrt{-2})\beta-(e+f\sqrt{-2})\beta\\&=[(q-e)+(r-f)\sqrt{-2})]\beta,\end{aligned}$$

故

$$
\begin{aligned}
|\alpha-(e+f\sqrt{-2})\beta| &= |(q-e)+(r-f)\sqrt{-2})||\beta| \\
&= (|q-e|^2+2|r-f|^2)|\beta| \\
&\leq \frac{3}{4}|\beta| < |\beta|.
\end{aligned}
$$

于是$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$是Euclid整环，进而是唯一分解整环. □

练习2.6. 设R是交换环，F是R的分式域.$f(x), g(x) \in R[x]$，于是$f(x), g(x)$自然地可以看作$F[x]$中的元素.证明$f(x), g(x)$在$R[x]$中的最大公因式同于在$F[x]$中的最大公因式.

练习2.7. 设整环R不是主理想整环.求证R中存在极大的不能由一个元素生成的理想.

Proof. 我们将用Zorn引理来证明这个事实.令$\mathcal{P}$为R中非主理想的全体，$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots I_n \subseteq \cdots$是$\mathcal{P}$中的一条链，我们需要证明$I := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$是理想，且不是主理想.

任取$a, b \in I$和$r, s \in R$，由定义存在m, n使得$a \in I_m, b \in I_n$.假设$m \leq n$，则$a, b \in I_n$，因而$ra + sb \in I_n \in I$，故I是理想.若I是主理想，那么存在$a \in R$使得$I = (a)$.但是根据定义，存在自然数n使得$a \in I_n$，这样$I_n \subseteq I = (a) \subseteq I_n$，$I_n$也是主理想，矛盾.故$I$不是主理想. □

练习2.8. 正文中我们证明了

练习2.9. 设F是域，R是$\times_{i=1}^{n} F$的子环，且R作为Abel群是有限生成的.若R是整环，求证任意非零元素$(a_1, \cdots, a_n) \in R$满足$\prod_{i=1}^{n} a_i \neq 0 \in F$.

第三章　模

练习3.1. 求证R模M的零化子$\operatorname{ann} M$是同构不变的，即若R模N与M同构，则$\operatorname{ann} M = \operatorname{ann} N$.

练习3.2. 设m, n是两个不同的正整数.求证$\mathbb{R}^m$和$\mathbb{R}^n$是同构的Abel群.

Proof. 我们只需要证明作为$\mathbb{Q}$-向量空间$\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$，进而我们需要的结果是自然的.

我们可以找到$\mathbb{R}^m$的一组基$\{\epsilon_i\}_{i\in I}$（作为$\mathbb{Q}$-向量空间）和$\mathbb{R}^n$的一组基$\{\eta_j\}_{j\in J}$.这样我们只要证明I与J有相同的集合势即可. □

练习3.3. 求证任给定环R中的理想I, J，

$$R/I \otimes_R R/J \cong R/(I+J).$$

第四章　域理论和Galois理论

练习4.1. 设$F(\alpha)$是域F的扩张，$[F(\alpha):F]$是奇数.求证$[F(\alpha^2):F]=[F(\alpha):F]$.

练习4.2. 设F是域，$A,B\in M_n(F)$.求证AB和BA有相同的特征多项式.

Proof. 考虑扩域$F(y)$，则$\det(yI-A)\neq 0$，故$yI-A$可逆，于是$(yI-A)B=(yI-A)(B(yI-A))(yI-A)^{-1}$与$B(yI-A)$相似. □

练习4.3. 如果域F满足-1不能写成平方和的形式，即不存在$a_i\in F,1\le i\le n$使得$-1=\sum_{i=1}^n a_i^2$，则称F是形式实数域(formally real).求证如下论断是等价的：

(i) F是形式实数域；

(ii) F是有序域；

(iii) $\sum_{i=1}^n a_i^2=0$意味着$a_i=0$对任意i成立.

练习4.4. 设F是域，且E是F上多项式$f(x)\in F[x]$的分裂域.求证

(i)

(ii)

练习4.5.

1. 设G是循环群，并且我们用乘法记号.设$g,h\in G$都不是平方元素，即不存在$x\in G$使得$x^2=g$或$x^2=h$.求证gh^{-1}是平方元素.
2. 设K/F是域扩张，a是F中的非零元素.假设s,t是$\langle a\rangle\in F^\times$中的元素，且满足在$F$中$s$和$t$都不是平方元素，但存在$\alpha,\beta\in K$使得$s=\alpha^2,t=\beta^2$.证明$K$的子域$F(\alpha)=F(\beta)$.
3. 证明若F是有限域且特征不为2，那么F的任意扩域K都包含且仅包含一个阶数为2的F的扩域.

练习4.6. 题目中我们将证明，存在不可约多项式$f(x)\in\mathbb{Z}[x]$满足它在$\mathbb{F}_p[x]$中的像不都是不可约的.

(i) 求证$f(x)=x^4+1$在$\mathbb{Z}[x]$中不可约.

(ii) 求证$f(x)=x^4+1$在$\mathbb{F}_p[x]$中可约.

第五章　范畴论

5.1　Cat

练习5.1. 设X是一个拓扑空间，证明X可以成为一个范畴，其中X的对象是所有的开集，$\hom_X(U,V)$是单点集当且仅当$U \subseteq V$，否则$\hom_X(U,V) = \emptyset$.若$U \subseteq V$，我们称$\hom_X(U,V)$中的元素为包含映射，记为$i : U \to V$.

练习5.2. 设$\mathcal{C}$是范畴，$A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$.定义$A$的自同构群是$\hom_{\mathcal{C}}(A,A)$中的所有同构态射组成的集合，群的乘法是态射的复合，即$\mathrm{Aut}(A) = \{f : A \to A \mid f \text{ 是同构}\}$.求证同构对象的自同构群是同构的.

5.2

练习5.3. 设$f : B \to A$和$g : C \to A$是两个集合间的映射，求证$\mathbf{Set}$中存在纤维积$B \times_A C$.

Proof. 令$B \times_A C := \{(b,c) \mid f(b) = g(c)\}$，我们要证明这样定义的纤维积满足相应的泛性质. □

练习5.4. 设T是范畴$\mathcal{C}$中的终对象，A,B是$\mathcal{C}$的对象，求证

$$A \times B \cong A \times_T B.$$

练习5.5. 在习题**??**中我们对任意拓扑空间X定义了一个范畴$\mathbf{Open}(X)$，设U,V是范畴中的两个对象，即两个开集，证明$U \times_X V$存在.此外，对任意一族开集$\{U_i\}_{i\in I}$，证明$\coprod_{i\in I} U_i$存在，且$\coprod_{i\in I} U_i$是U的开覆盖当且仅当$\coprod_{i\in I} U_i \cong U$.

练习5.6. 设范畴$\mathcal{C}$中存在任意两个对象的乘积，则纤维积

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k} & A \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (f,g)} \\ B & \xrightarrow{(\mathrm{id},\mathrm{id})} & B \times B \end{array}$$

给出了态射$f,g : A \rightrightarrows B$的等值子$K$.

练习5.7. 设$\mathcal{C}$是范畴，A,B是$\mathcal{C}$的对象，若存在态射$s : A \to B$和$r : B \to A$使得$rs = \mathrm{id}_A$，则称r是s的*收缩*(retract)或者*左逆*(left inverse)，s是r的*截面*(section)或*右逆*(right inverse)，A是B的一个*收缩*(retract).一个简单的例子是在R模范畴$R-\mathbf{Mod}$中，N是M的收缩当且仅当存在R模P使得$M = N \oplus P$.如果$f : X_1 \to Y_1, g : X_2 \to Y_2$是范畴$\mathcal{C}$的态射，且满足以下交换图

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "f"] & Y_1 \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "g"] & X_1 \arrow[d, "f"] \\
X_2 \arrow[r, "s_2"] & Y_2 \arrow[r, "r_2"] & X_1,
\end{tikzcd}
$$

其中X_j是Y_j的收缩，$s_jr_j = \mathrm{id}_{X_j}$（$j = 1, 2$），则称$f$是$g$的*收缩*(retract).求证：若$f$是$g$的收缩，$g$是同构，则$f$也是同构.

5.3

练习5.8. 设X是一个集合，定义$F(X)$是以X为基生成的自由群.给出合理的定义说明$F : \mathbf{Set} \rightrightarrows \mathbf{Gp}$是一个函子，这个函子被称为*自由函子*(free functor).

练习5.9. 设G是一个群，$\mathrm{B}G$定义如下：$\mathrm{ob}\,\mathrm{B}G = *$，$\hom_{\mathrm{B}G}(*, *) = G$.

(i) 证明$\mathrm{B}G$是一个范畴.

(ii) 证明函子$F : \mathrm{B}G \rightrightarrows \mathbf{Set}$定义了$G$在集合$F(*)$上的一个（左）群作用.
在(ii)中我们并没有必要限定构造的函子的值域为$\mathbf{Set}$*.函子*$F : \mathrm{B}G \rightrightarrows \mathbf{Vec}_k$*定义了一个*$k$*线性表示，函子*$F : \mathrm{B}G \rightrightarrows \mathbf{Top}$*定义了一个*$G$*空间.*

(iii) 假定我们有两个函子$F, G : \mathrm{B}G \rightrightarrows \mathcal{C}$，显式地写出自然变换所满足的交换条件.由这样自然变换所确定的范畴$\mathcal{C}$中的态射称为*G-等变的*(G-equivariant).

练习5.10. 设n是任意一个自然数.定义$[n]$是有$n+1$个对象的小范畴，且其中的箭头是序列$\{0 \to 1 \to \cdots \to n\}$.设$\mathbf{\Delta}$是所有$[n]$组成的范畴，态射是$[n]$到$[m]$的函子.

(i) 求证：与范畴$[0]$等价的范畴当且仅当每个hom集合都仅有一个元素.

(ii) 定义$[n]'$是$n+1$元的全序集，其元素记为$\{0 \leq 1 \leq \cdots \leq n\}$.设$\mathbf{\Delta}'$是所有$[n]'$组成的范畴，态射是$[n]'$到$[m]'$的保序映射，即$f : [n]' \to [m]'$满足$i \leq j$必有$f(i) \leq f(j)$.证明$\mathbf{\Delta}'$是一个范畴，且存在一个范畴的同构$\mathbf{\Delta}' \rightrightarrows \mathbf{\Delta}$.于是我们无意区分两个范畴，都称为*单纯范畴*(simplicial category)或者*全序范畴*(ordering category)，也无意区分两个范畴不同的对象.

(iii) 证明

$$d^i_{n+1} : [n] \to [n+1]$$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & n \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & i+1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n+1
\end{tikzcd}
$$

和

$$s^i_n : [n+1] \to [n]$$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[d] & i+1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & n+1 \arrow[dl] \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n &
\end{tikzcd}
$$

都是范畴$\mathbf{\Delta}$中的态射，且满足

$$\begin{aligned}
&d^j_{[n+1]}d^i_{[n]} = d^i_{[n+1]}d^{j-1}_{[n]}, && \forall\, i < j\\
&s^j_{[n]}s^i_{[n+1]} = s^i_{[n]}s^{j+1}_{[n+1]}, && \forall\, i \le j\\
&s^j_{[n]}d^i_{[n+1]} = d^i_{[n]}s^{j-1}_{[n-1]}, && \forall\, i < j\\
&s^j_{[n]}d^i_{[n+1]} = \mathrm{id}_{[n]}, && i = j \text{ 或 } i = j+1\\
&s^j_{[n]}d^i_{[n+1]} = d^{i-1}_{[n]}s^j_{[n-1]}, && \forall\, i > j+1.
\end{aligned}$$

其中，d^i称为第i个对偶面映射(coface map)，s^i称为第i个对偶退化映射(codegeneracy map).

(iv) 证明$\mathbf{\Delta}$中所有的态射都可以由d^i和s^j生成.更准确地说，任意$f \in \hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m])$有唯一的分解

$$f = d^{i_1} \circ \cdots \circ d^{i_r} \circ s^{j_1} \circ \cdots \circ s^{j_s},$$

其中$m = n + r - s$，$i_1 < \cdots < i_r$且$j_1 < \cdots < j_s$.

练习5.11. (i) 设$\mathcal{C}$是范畴，A, B是$\mathcal{C}$的对象，$f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$.证明$f$诱导了自然变换

$$f_* : \hom_{\mathcal{C}}(-, A) \Rightarrow \hom_{\mathcal{C}}(-, B)$$

和

$$f^* : \hom_{\mathcal{C}}(B, -) \Rightarrow \hom_{\mathcal{C}}(A, -).$$

(ii) 在(i)的记号下，证明f是一个同构当且仅当f_*是同构，当且仅当f^*是同构.

练习5.12. 设$\mathcal{C}, \mathcal{J}$是范畴，A是$\mathcal{C}$的对象，证明下面的定义构成一个函子

$$\begin{aligned}
Const_A : \mathcal{J} &\rightrightarrows \mathcal{C}\\
j &\mapsto A\\
(a : i \to j) &\mapsto \mathrm{id}_A
\end{aligned}$$

我们称之为常值函子(constant function).证明，任意$\mathcal{C}$中的态射$f : A \longrightarrow B$可以诱导一个自然变换

$$f_* : Const_A \Rightarrow Const_B.$$

进一步，存在函子$\Delta : \mathcal{C} \rightrightarrows Funct(\mathcal{J}, \mathcal{C})$，把对象$A$映为$Const_A$，态射$f : A \to B$映为$f_* : Const_A \Rightarrow Const_B$.

练习5.13. 设F_1, F_2是函子$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$\eta : F_1 \Rightarrow F_2$.

1. 若G是函子$\mathcal{D} \to \mathcal{E}$，证明$G\eta : GF_1 \Rightarrow GF_2$，$(G\eta)_A := G(\eta_A)$是自然态射.
2. 若G是函子$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$，证明$\eta G : F_1G \Rightarrow F_2G$，$(\eta G)_A := \eta_{G(A)}$是自然态射.

练习5.14 (Categories for the Working Mathematician, P37). 设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$和$\mathcal{E}$是范畴，如果F是函子$\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{E}$，则称$F$是定义在$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$上的**双函子**(bifunctor)，其中函子性条件显式地写为：对任意$\mathcal{C}$中的态射$f : A \to B$和$\mathcal{D}$中的态射$g : C \to D$.如果对于任意$\mathcal{C}$中的对象A和$\mathcal{D}$中的对象C，都有证明存在$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$上的双函子$F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{E}$，满足

$$F(-, C) = L_C$$

且

$$F(A, -) = R_A.$$

练习5.15.

练习5.16. 给定范畴$\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}$和函子$F:\mathcal{D}\to\mathcal{C},G:\mathcal{E}\to\mathcal{C}$.构造范畴$\mathcal{M}$和函子$P:\mathcal{M}\to\mathcal{D},Q:\mathcal{M}\to\mathcal{E}$使得对任意范畴$\mathcal{N}$和函子$K:\mathcal{N}\to\mathcal{D},G:\mathcal{N}\to\mathcal{E}$，若有图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{N} \arrow[r, "K"] \arrow[d, "H"] & \mathcal{E} \arrow[d, "G"] \\ \mathcal{D} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

交换，都有唯一存在的函子: $\mathcal{N}\to\mathcal{M}$.这个范畴同构意义下是唯一的，我们记为$\mathcal{E}\times_{\mathcal{C}}\mathcal{D}$.

Proof. 定义 □

练习5.17. 给定函子$F:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$，任取$\mathcal{C}$中的对象$A$，都可以给出$\mathcal{C}$的只包含$A$一个对象和一个态射$\mathrm{id}_A:A\to A$的子范畴，记为$*_A$，求证$\mathcal{F}\times_{\mathcal{C}}*_A$是$\mathcal{F}$的子范畴，它包含所有被$F$映到$A$的对象和映为$\mathrm{id}_A:A\to A$的态射.于是$\mathcal{F}$可以被看做函子$\mathcal{C}\to\mathbf{CAT}$.

5.4

练习5.18. 设$\mathcal{C}$与$\mathcal{D}$是等价的范畴.若$\mathcal{C}$中存在始对象，证明$\mathcal{D}$也存在始对象.

练习5.19. 给定函子$F:\mathcal{D}\rightrightarrows\mathcal{C}$和$G:\mathcal{E}\rightrightarrows\mathcal{C}$，证明如下构造是范畴，我们称之为$\mathcal{D},\mathcal{E}$的纤维范畴(comma category)，记为$(F,G)$：

1. 它的对象是三元组(X,Y,f)，其中X是$\mathcal{D}$的对象，Y是$\mathcal{E}$的对象，$f\in\hom_{\mathcal{C}}(F(X),G(Y))$；
2. 二元组(h,k)是(X_1,Y_1,f_1)到(X_2,Y_2,f_2)的态射当且仅当

$$G(k)f_1=f_2F(h),$$

即有如下交换图

$$\begin{tikzcd} F(X_1) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "F(h)"] & G(Y_1) \arrow[d, "G(k)"] \\ F(X_2) \arrow[r, "f_2"] & G(Y_2), \end{tikzcd}$$

其中，$h\in\hom_{\mathcal{D}}(X_1,X_2)$，$k\in\hom_{\mathcal{E}}(Y_1,Y_2)$.

接下来的习题中我们将详细地用范畴的语言讨论范畴当中“图”的概念，并讨论追图（*diagram chasing*）和用图表示交换性的技术.

定义. 设$\mathcal{C}$是一个范畴，则$\mathcal{C}$的一个**图(diagram)**是一个函子$F:\mathcal{J}\rightrightarrows\mathcal{C}$.其中，$\mathcal{J}$是一个小范畴，被称为**指标范畴(indexing category)**.

练习5.20. 设$F:\mathcal{C}\rightrightarrows\mathcal{D}$是忠实函子.求证任意在$\mathcal{D}$中交换的$\mathcal{C}$中的图都在$\mathcal{C}$中交换.

5.5

练习5.21. 设R是交换环，$\varphi : M \to N$是R模同态$\varphi : M \to N$，定义函子$K : R-\mathbf{Mod} \rightrightarrows \mathbf{Ab}$，满足对任意对象$P$，

$$K(P) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P, N)),$$

对任意R模同态$f : P \to Q$

$$K(f) := h_M|_{K(P)}$$

求证函子K是可表的.

练习5.22. 求证反变幂集函子是可表的.

练习5.23. 证明以下函子是不可表的：

1. $F : \mathbf{Ring} \rightrightarrows \mathbf{Set}$，$R \mapsto \{r^2 \mid r \in R\}$；

2. $G : \mathbf{Ring} \rightrightarrows \mathbf{Set}$，其中$G$把环$R$映到$R$的所有幂零元素组成的集合；

3. $O : \mathbf{Top} \rightrightarrows \mathbf{Set}$，其中$O$把Hausdorff空间$X$映到$X$的所有开集组成的集合；

4. $P : \mathbf{Set} \rightrightarrows \mathbf{Set}$,；

5. $S : \mathbf{Gp} \rightrightarrows \mathbf{Set}$，其中$S$把群$G$映到$G$的所有子群组成的集合.

Proof. 反设函子F是可表的，于是存在环R使得$\eta : F \cong \hom_{\mathbf{Ring}}(R, -)$.特别地，$F(R) \cong \hom_{\mathbf{Ring}}(R, R)$.取$F(R)$中的在这个同构下对应到$\mathrm{id}_R$的元素$u$，由$F$的构造，存在$r \in R$使得$u = r^2$.我们将会证明$u$具有如下泛性质：对任意环$S$和任意$S$中的平方元素$s^2$，存在唯一的同态$f : R \to S$使得$f(u) = s^2$.这是因为我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathbf{Ring}}(R, R) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\eta_R"] & \hom_{\mathbf{Ring}}(R, S) \arrow[d, "\eta_S"] \\
F(R) \arrow[r, "F(g)"] & F(S),
\end{tikzcd}$$

并且对于任意$g \in \hom_{\mathbf{Ring}}(R, S) \rightsquigarrow s^2$，存在唯一的$g^*$使得$g^*(\mathrm{id}_R) = g$，具体来说，令$g := \eta_S^{-1}(s^2)$，那么

$$F(g)(u) = F(g)(\eta_R(\mathrm{id}_R)) = \eta_S(g^*(\mathrm{id}_R)) = \eta_S(g) = s^2.$$

假设还有一个态射h满足条件，那么

$$h^*(\mathrm{id}_R) = (\eta_S^{-1} \circ F(h) \circ \eta_R)(\mathrm{id}_R) = (\eta_S^{-1} \circ F(h))(u) = \eta_S^{-1}(s^2) = g,$$

于是我们的论断得证.

考虑$S = \mathbb{Z}[x]$，$s = x$，根据刚刚所证明的，存在唯一的环同态$g : R \to \mathbb{Z}[x]$使得$g(u) = x^2$.零$m : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$，$x \mapsto -x$，那么$m \circ g$也是将$u$映到$x^2$的态射.故矛盾. $\square$

5.6

练习5.24. 设函子$F, G : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathbf{Set}$是自然同构的.证明自然同构$\eta : F \Rightarrow G$诱导了它们元素范畴的同构:

$$\int F \cong \int G.$$

练习5.25. 证明反变函子$F : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathbf{Set}$可表当且仅当其元素范畴$\int F$存在终对象.

练习5.26. 设$\mathcal{C}$是一个小范畴,$\mathcal{D}$是一个上完备的局部小范畴,考虑2函子

$$S : \mathcal{C}^{\circ} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D},$$

那么我们称f_*与f^*的上等值子

$$\prod_{f : A_0 \to A_1} S(A_0, A_1) \rightrightarrows \prod_{A \in \mathbf{ob}\ \mathcal{C}} S(A, A)$$

为S的上终止(co-end),其中f_*是复合$S(A_0, A_1) \xrightarrow{S(f,\mathrm{id})} S(A_1, A_1) \hookrightarrow \prod_{A \in \mathbf{ob}\ \mathcal{C}} S(A, A)$,$f^*$是复合$S(A_0, A_1) \xrightarrow{S(\mathrm{id},f)} S(A_0, A_0) \hookrightarrow \prod_{A \in \mathbf{ob}\ \mathcal{C}} S(A, A)$,记为$\int^{A \in \mathbf{ob}\ \mathcal{C}} S$.

1. 求证$\int^{A \in \mathbf{ob}\ \mathcal{C}} S$具有如下泛性质:对任意$\mathcal{C}$中的态射$f : A_0 \to A_1$,存在唯一的$\varphi_{A_0}$和$\varphi_{A_1}$使得下图交换

$$\begin{tikzcd} S(A_0, A_1) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "f^*"] & S(A_1, A_1) \arrow[d, "\varphi_{A_0}"] \\ S(A_0, A_0) \arrow[r, "\varphi_{A_1}"] & \int^{A \in \mathbf{ob}\ \mathcal{C}} S. \end{tikzcd}$$

2. 设R是环,F, G是函子$F : \mathcal{C}^{\circ} \to \mathbf{Mod} - R$和$G : \mathcal{C} \to R - \mathbf{Mod}$.定义函子$S := F \boxplus_R G : \mathcal{C}^{\circ} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Ab}$,将对象$(A, B)$映为$F(A) \otimes_R G(B)$,将态射$(f : C \to A, g : B \to D)$映到$F(f) \boxtimes_R G(g) : F(A) \otimes_R G(B) \to F(C) \otimes_R G(D), x \otimes y \mapsto F(f)(x) \otimes G(g)(y)$.在此基础上定义对象

$$F \otimes_{A,R} G := \int^{A \in \mathbf{ob}\ \mathcal{C}} F(f) \boxtimes_R G(g).$$

若函子$R^{\circ}[\hom_{\mathcal{C}}(-, A)] : \mathcal{C}^{\circ} \to \mathbf{Mod} - R$,将对象$C$映到$\hom_{\mathcal{C}}(C, A)$生成的自由$R$模,证明

$$R^{\circ}[\hom_{\mathcal{C}}(-, A)] \otimes_{A,R} G \cong G(A).$$

证明对R作为自己的右模的常值函子$Const_R : \mathcal{C}^{\circ} \to \mathbf{Mod} - R$满足

$$Const_R \otimes_{A,R} G \cong \mathrm{colim}_{\mathcal{C}} G.$$

5.7

练习5.27. 设范畴$\mathcal{C}, \mathcal{D}$间的函子$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$互为左右伴随,证明$\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$当且仅当这个伴随给出的单位$\eta$和余单位$\xi$都是自然同构.