定义. 设R是交换环，A是R代数且M是A模.若Abel群同态$d : A \to M$满足如下Leibniz法则

$$d(fg) = fd(g) + d(f)g$$

对任意$f, g \in A$都成立，则称d为一个微分(derivation).若$d : A \to M$还是R模同态，则称d是R线性的(R-linear).我们将所有的R线性微分$A \to M$记为$\mathrm{Der}_R(A, M)$.

对于任意R-线性微分$d \in \mathrm{Der}_R(A, M)$，Leibniz法则说明

$$d(1) = d(1 \cdot 1) = 1d(1) + d(1)1,$$

于是$d(1) = 0$.再根据R线性性，对任意R中的元素r，$d(r) = rd(1) = 0$.这也符合“常值函数的微分为零”的直觉.很容易看出，$\mathrm{Der}_R(A, M)$有自然的A模结构，于是也有R模结构.

虽然R-线性微分是值得研究的，但我们希望完全用A模同态来描述所有的微分.之前有过相同的处理方式：对于所有的R双线性映射，我们构造了具有一定泛性质的R模——张量积，在这里我们同样可以构造A模使得所有的R-线性微分被A模同态对应.

定义. 设R是交换环，A是R代数，那么由$\{d(f) \mid f \in A\}$生成的A模，模去对任意$f, g \in A, r, s \in R$

$$\begin{aligned} d(fg) - fd(g) - d(f)g &\quad \text{(Leibniz)} \\ d(rf + sg) - rd(f) - sd(g) &\quad (R\text{-linearity}) \end{aligned}$$

生成的理想，得到的A模称为R线性的A-Kähler微分模(the module of Kähler differentials of A over R)，记为$\Omega_{A/R}$.R线性映射

$$\begin{aligned} d : A &\to \Omega_{A/R} \\ f &\mapsto d(f) \end{aligned}$$

称为泛R微分(universal R-linear derivation).通常，我们记$df = d(f)$.

类似于张量积，$\Omega_{A/R}$满足如下泛性质：

引理0.1. 设R是交换环，A是R代数，微分模$\Omega_{A/R}$使得对任意微分$D : A \to M$，都存在唯一的A线性映射$\varphi : \Omega_{A/R} \to M$使得

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "D"'] & \Omega_{A/R} \arrow[d, "\varphi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

交换.

Proof. 首先证明唯一性.对任意$\Omega_{A/R}$中的元素$\sum_{i=1}^n a_i df_i$，根据φ的线性性

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i df_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(df_i).$$

但图的交换性说明$df_i = D(f_i)$，故

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i df_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i D(f_i).$$

这意味着φ的取值是固定的.

再证明存在性.我们定义

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i df_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i D(f_i),$$

于是需要验证(i)φ是良定义的；(ii)φ关于图是交换的.后一条根据定义是显然的，前一条因为使得D是R线性微分的关系恰好由Leibnitz等式和R线性性生成，故良定义. □

$\Omega_{A/R}$的泛性质等价于存在自然的同构

$$\mathrm{Der}_R(A, M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M),$$

自然的意义是通过态射替换A与M诱导了相应的交换图，具体来说，对任意R代数映射$\varphi: B \to A$，下图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_R(A, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Der}_R(B, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/R}, M) \end{array}$$

交换且对任意A模同态$\psi: M \to N$，下图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Der}_R(A, M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Der}_R(A, N) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, N) \end{array}$$

交换.

命题0.1. 若R是交换环且$A := R[x_1, \cdots, x_n]$，那么$\Omega_{A/R} = \bigoplus_{i=1}^n A dx_i$.

Proof. 我们构造两个互逆的A模同态，来说明二者同构.首先，我们有显然的映射

$$\begin{aligned} \varphi: \bigoplus_{i=1}^n A dx_i &\to \Omega_{A/R} \\ \sum_{i=1}^n a_i dx_i &\mapsto \sum_{i=1}^n a_i dx_i. \end{aligned}$$

另一方面，由dx_i的对偶基底诱导的线性函数给出了A的R线性微分$\frac{\partial}{\partial x_i}$，令

$$\begin{aligned}\psi:\Omega_{A/R}&\to\bigoplus_{i=1}^{n}Adx_i\\ h&\mapsto\begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial x_1}\\ \vdots\\ \frac{\partial h}{\partial x_n}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

容易验证φ与ψ互为逆映射，故命题成立. □

此外，$\Omega_{A/R}$本身关于A和R都是函子：给定R代数态射$\varphi:A\to B$，那么我们有诱导的R模态射

$$\begin{aligned}\Omega_{\varphi/R}:\Omega_{A/R}&\to\Omega_{B/R}\\ df&\mapsto d\varphi(f),\end{aligned}$$

事实上，由于B是A模，这个态射也是A模态射.另一方面，若$R\xrightarrow{\varphi}S\xrightarrow{\psi}T$是环态射，那么也有态射

$$\begin{aligned}\Omega_{T/\varphi}:\Omega_{T/R}&\to\Omega_{T/S}\\ dh&\mapsto dh,\end{aligned}$$

这是一个T模态射.考虑到$\Omega_{T/R}$和$\Omega_{T/S}$的定义，它们的生成元是相同的，且$\Omega_{T/\varphi}$把生成元映到生成元，于是这是一个满态射，但一般而言这不是一个单态射，于是我们自然地希望知道这个映射的核.我们考虑这个态射不是单态射的原因：两个模拥有相同的生成元，Leibnitz法则也是一样的，但$\Omega_{T/R}$需要模掉R线性关系，$\Omega_{T/S}$需要模掉S线性关系，因此出现了差别.模同态$\Omega_{T/\varphi}$把R线性关系映为S线性关系，但是存在一些S线性关系不能成为R线性关系，于是这些关系就生成了$\Omega_{T/\varphi}$的核.

任取$\sum_{i=1}^{n}t_idf_i\in\Omega_{T/R}$，若它不为0但被映为$\Omega_{T/S}$中的0，那么存在

命题0.2 (相对余切序列(Relative Cotangent Sequence)). *若$R\to S\to T$是交换环态射，那么有T模正合序列*

$$T\otimes_S\Omega_{S/R}\to\Omega_{T/R}\to\Omega_{T/S}\to 0$$

其中映射$\Omega_{T/R}\to\Omega_{T/S}$将$dh$映到$dh$，映射$T\otimes_S\Omega_{S/R}\to\Omega_{T/R}$是系数变换，即将$t\otimes dg$映到$td\psi(g)$.

在上同调理论中，我们

命题0.3 (余法序列(Conormal Sequence)). *若$\varphi:A\to B$是R模满态射，且具有核I，那么有B模正合序列*

$$I/I^2\xrightarrow{d}B\otimes_A\Omega_{A/R}\xrightarrow{D\varphi}\Omega_{B/R}\to 0$$

其中映射$I/I^2\xrightarrow{d}B\otimes_A\Omega_{A/R}$将$f$的等价类映到$df$，映射$B\otimes_A\Omega_{A/R}\xrightarrow{D\varphi}\Omega_{B/R}$将$g\otimes df$映到$gdf$.

Proof. □

设$A = R[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_r)$是给定的$R$代数，那么余法序列告诉我们

$$\Omega_{A/R} = \mathrm{coker}(d : I/I^2 \to A \otimes_R \Omega_{R[x_1,\cdots,x_n]/R} = \bigoplus_{i=1}^{n} Adx_i).$$

命题0.4. 微分模的构造与基变换交换，即给定交换环R和R代数S, A，存在同构$\varphi : S \otimes_R \Omega_{A/R} \cong \Omega_{S\otimes_R A/R}$使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} S \otimes_R A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes d"'] \arrow[dr, "d"] & \\ S \otimes_R \Omega_{A/R} \arrow[r, "\varphi"] & \Omega_{S\otimes_R A/R}. \end{tikzcd}$$

命题0.5. 微分模的构造与基变换交换，即给定交换环R和R代数S, A，存在同构$\varphi : S \otimes_R \Omega_{A/R} \cong \Omega_{S\otimes_R A/R}$使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} S \otimes_R A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes d"'] \arrow[dr, "d"] & \\ S \otimes_R \Omega_{A/R} \arrow[r, "\varphi"] & \Omega_{S\otimes_R A/R}. \end{tikzcd}$$

定理0.6 (Jacobi判别法)**.** 设k是给定的域，$I = (f_1, \cdots, f_r)$是$k[x_1, \cdots, x_n]$中的理想，$R := k[x_1, \cdots, x_n]/I$.若$\mathfrak{p}$是$k[x_1, \cdots, x_n]$中包含$I$的素理想，$c$是$I_{\mathfrak{p}}$在$R_{\mathfrak{p}}$中的余维数，那么

1. *Jacobi*矩阵在模$\mathfrak{p}$的意义下秩小于c.
2. 。。。

在微分几何当中，我们有自然引入的光滑性概念.但是在代数几何当中，光滑性的概念并不是自然存在的——我们所研究的几何空间可能存在奇点，因而需要重新引入光滑性的概念.一个问题在于同于微分几何的定义，在有足够的工具之前我们只能定义局部的光滑性，而微分模给出了光滑性本质的刻画.

定义. 设R, S是交换环，$f : R \to S$是环同态.如果对任意的交换环T和T的满足$I^2 = 0$的理想I，只要下图

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \arrow[d] \arrow[dl, dashed] \\ T \arrow[r] & T/I. \end{tikzcd}$$

交换，就有至少一个（对应的，最多一个，恰有一个）环同态$S \to T$使得整个图是交换的，则称f是形式光滑的(formally smooth)（对应的，形式不分叉的(formally unramified)和形式平展的(formally étale)）.

引理0.2. 环同态$f : R \to S$是形式不分叉的当且仅当$\Omega_{S/R} = 0$.

引理0.3. 设环$B := R[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_r)$，记$A := R[x_1, \cdots, x_n]$，$I := (f_1, \cdots, f_r)$.于是$f : R \to T$是光滑的当且仅当

$$0 \to I/I^2 \xrightarrow{d} B \otimes_A \Omega_{A/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{B/R} \to 0$$

是分裂正合的.