

Hopf 纤维化

G.Li

在这一个小故事中，我们要详细地探讨 Hopf 纤维化的来源、定义、性质等等，并尝试探讨它在拓扑当中的重要性. 想写这篇的原因是偶然间见到了 2012 年的丘赛中的一道题：

问题 1. 求证

$$\pi_3(S^2) \neq 0.$$

实话说，这个题目基本上等同于绝大多数的数学题：见过就会，而且是半句话就能讲明白的，没见过，对不起想破脑袋也不一定能想出来. Hopf 纤维化就是求解这个题的核心，只要证明纤维化

$$h : S^3 \rightarrow S^2$$

不是同伦平凡的，这样就完成了证明. 然而，这个映射的存在性显得非常不自然，我们也很难直接从表达式当中理解这个映射是如何被发现的. 因此，我们会通过别的角度去研究和探索这个映射，并尝试去“看见”这个映射.

我们都知道， n 维单位球面 S^n 是 \mathbb{R}^n 中与原点距离为 1 的点组成的集合，即

$$S^n := \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}.$$

二维球面是容易想象的几何对象，它可以嵌入到 \mathbb{R}^3 中. 但是三维球面就不能容易地想象，因为它需要被嵌入 \mathbb{R}^4 中——于是，于是需要另外的方式去研究 S^3 .

回顾在对 S^2 的处理中，通常使用的方法是球极投影 (stereographic projection)，将二维球面映射到平面上. 对 S^3 的处理略有不同，我们考虑投影到 S^2 上而非坐标平面上：

$$\begin{aligned} h : S^3 &\rightarrow S^2 \\ (x, y, z, w) &\mapsto (x^2 + y^2 - z^2 - w^2, 2(xw + yz), 2(yw - xz)), \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2 - z^2 - w^2)^2 + 4(xw + yz)^2 + 4(yw - xz)^2 \\ &= x^4 + y^4 + z^4 + w^4 + 2x^2y^2 + 2z^2w^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 - 2x^2w^2 - 2y^2w^2 \\ &\quad + 4x^2w^2 + 4y^2z^2 + 8xyzw + 4y^2w^2 + 4x^2z^2 - 8xyzw \\ &= x^4 + y^4 + z^4 + w^4 + 2x^2y^2 + 2z^2w^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 + 2x^2w^2 + 2y^2w^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 = 1, \end{aligned}$$

映射是良定义的，再根据每个分量函数的连续性，该映射是连续函数. 这个映射就是我们所谓的 Hopf 纤维化.

一方面, 我们想研究该函数的纤维——对给定的点 $x \in S^2$, 求得 $h^{-1}(x)$ 是一个有趣的问题. 另一方面, 这个函数的出现并不自然, 我们始终想找到一种合适的描述这个函数的方法, 使得它的出现、对纤维的求解等问题都是可以自然解决的.

1 四元数环

起初四元数环 \mathbb{H} 是看起来完全不相关的一个主题, 但一方面, S^3 是 \mathbb{R}^4 中的对象, 另一方面, 我们需要对 \mathbb{R}^3 中的旋转的全体进行描述——我们理论上需要两个参数, 一个是旋转轴另一个是旋转角度, 这样我们同样需要一个 \mathbb{R}^4 中的向量来记录旋转的信息 (之后将会看到, 这样的对应并不是一对一的).

定义. 四元数环 \mathbb{H} 是非交换的 \mathbb{R} 代数, 作为向量空间同构于 \mathbb{R}^4 , 其中三个不同的向量 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 分别

用 i, j, k 表示, 因而对任意 $q \in \mathbb{H}$,

$$q = a + bi + cj + dk, a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

且乘法满足关系

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

$$ji = -k, kj = -i, ik = -j.$$

问题 2. 验证 \mathbb{R} 中的乘法满足结合律.[提示: 尝试将 \mathbb{H} 嵌入到一个矩阵代数当中.]

定义中的乘法关系已经说明了 \mathbb{H} 的非交换性, 但这是一个可除代数, 即它的非零元素都有逆. 对任意 $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$, 令 $\bar{q} = a - bi - cj - dk \in \mathbb{H}$, 于是

$$q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

我们记这个数是 $|q|^2 := a^2 + b^2 + c^2 + d^2$, 因此当 $q \neq 0$ 时, $q \cdot \frac{\bar{q}}{|q|^2} = 1$, 故了 \mathbb{H} 是一个可除代数.

2 \mathbb{R}^3 中的旋转

现在我们来考虑 \mathbb{R}^3 中的旋转与 \mathbb{H} 的关系.

3 Hopf 纤维化

4 Hopf 纤维化的可视化