抽象代数

G.Li

目录

第一部分

模理论

第一章　模的基本理论

1.1　环上的模

为简化记号，给定左R模M，我们也常用rm表示R中元素r和M中元素m的数乘，即$rm := r \cdot m$.对偶地，给定右R模M，$mr := m \cdot r$.

定义. 给定环R和左R模M, N，若映射

$$f : M \to N$$

满足对任意的$r_1, r_2 \in R$和$m_1, m_2 \in M$，

$$f(r_1 m_1 + r_2 m_2) = r_1 \cdot f(m_1) + r_2 \cdot f(m_2),$$

其中rm表示M中的数乘，$\cdot$表示N中的数乘，则称$f : M \to N$是一个左R模同态(homomorphism of left R-modules).

习题 1.1. 给定环R, S和环同态$\varphi : R \to S$，证明定义

$$r \cdot s := \varphi(r)s,\ \forall r \in R, s \in S$$

给出的数乘使得S成为左R模，并且φ由此是一个R模同态.

证明. 为验证$\varphi : R \to S$是（左）R模同态，任取$r_1, r_2 \in R$和$t_1, t_2 \in R$，由于φ本身是环同态，

$$\varphi(r_1 t_1 + r_2 t_2) = \varphi(r_1)\varphi(t_1) + \varphi(r_2)\varphi(t_2) = r_1 \cdot \varphi(t_1) + r_2 \cdot \varphi(t_2),$$

刚好满足定义. □

1.2　直和与直积

1.2.1　自由模

定义. 给定环R，

命题 1.1. 给定环R和自由模R^n,R^m，则存在R模的同构

$$\mathrm{Hom}_R(R^n,R^m)\cong M_{m\times n}(R).$$

证明. □

习题 1.2. 给定环同态$\alpha:R\to A$，$f:R^m\to R^n$是R模同态，那么

1. f由一个矩阵$\left(f_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\cdots,m,\\ j=1,\cdots,n}}$决定，其中
2. A模同态$f\otimes\mathrm{id}:A^m\to A^n$由矩阵$\left(\alpha(f_{i,j})\right)_{\substack{i=1,\cdots,m,\\ j=1,\cdots,n}}$决定.

1.3　Hom函子

定理 1.2.

$$\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I}M_i,N\right)\cong\prod_{i\in I}\mathrm{Hom}_R\left(M_i,N\right)$$

并且，如果我们有一族模同态$f_i:M_i\to N$，那么有如下交换图

1.4　向量空间与矩阵

定理 1.3. 给定含幺环R，则

$$Z(M_{n\times n}(R))=\{r\cdot I\mid r\in Z(R)\},$$

其中I是$M_{n\times n}(R)$中的单位矩阵.

证明. 对任意$A\in M_{n\times n}(R)$，$AE_{i,i}=E_{i,i}A$意味着A是对角矩阵，$AE_{i,j}=E_{i,j}A$意味着$a_{i,i}=a_{j,j}$，最后 □

第二章　PID上的模

2.1　Smith标准型

定理 2.1. 设F是域，$R = F[x]$，矩阵$A \in M_{m,n}(R)$.则存在$P \in GL_m(R)$和$Q \in GL_n(R)$使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

证明. □

设F是域，V是F上的有限维线性空间，$T : V \to V$是线性映射，于是V自然地是一个$F[x]$模，其中$x \cdot \alpha = T(\alpha)$.选取$V$的一组基$\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$，并且定义矩阵$A$使得

$$x \cdot \epsilon_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j}\epsilon_i,$$

再定义$B = xI - A \in M_n(R)$，那么作为R模，$V \cong R^n/BR^n$.

第三章　函子与正合列

定理 3.1. 任意给定环R和R模M，函子$\mathrm{Hom}_R(M,-)$是左正合的，即对任意R模短正合列

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

有正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,A) \to \mathrm{Hom}_R(M,B) \to \mathrm{Hom}_R(M,C).$$

3.1　张量积

定义. 设R是含单位元的（不必要交换的）环，M,N分别是左右R模.给定Abel群L（用加法记号），若Abel群同态

$$\varphi : M \times N \to L$$

满足对任意的$r \in R$都有

$$\varphi(mr,n) = \varphi(m,rn),$$

则称φ是R平衡的(R balanced).

定理 3.2. 给定含单位元的（不必要交换的）环R和左右R模M,N.那么存在$Abel$群$M \otimes_R N$和R平衡的$Abel$群同态$\iota : M \times N \to M \otimes_R N$，满足

- 对任意的R平衡的$Abel$群同态$\varphi : M \times N \to L$，都存在唯一的$Abel$群同态$\tilde{\varphi} : M \otimes_R N \to L$，满足$\tilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$，即有交换图

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & M \otimes_R N \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\ & L. \end{tikzcd}$$

定义. 假定R, S是含单位元的（不必要交换的）环，若Abel群M同时有左R模和右S模结构，满足对任意的$m \in M, r \in R, s \in S$都有

$$(r \cdot m) \cdot s = r \cdot (m \cdot s),$$

则称M是(R, S)双模((R, S)-bimodule).

习题 3.1. 给定环R, S，给定$R - S$双模N和右S模L，求证$\mathrm{Hom}_S(N, L)$有自然的左R模结构.

证明. □

定理 3.3. 给定含幺环R, S，假设M是右R模，N是(R, S)双模，L是右S模，那么存在自然的同构

$$\mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, L) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N, L)).$$

证明. 构造

$$\begin{aligned} \alpha : \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R N, L) &\leftrightarrows \mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_S(N, L)) : \beta \\ f &\mapsto f^\flat : (m \mapsto f(m \otimes -)) \\ g^\sharp : \left(\sum_i m_i \otimes n_i \mapsto \sum_i g(m_i)(n_i) \right) &\leftarrow g, \end{aligned}$$

□

3.1.1 基变换和系数的扩张

第四章　特殊的R模

4.1　投射模

定义. 设R是含幺环.若左R模P满足对任意满同态$g: M \to N$和任意模同态$h: P \to N$，都存在$\tilde{h}: P \to M$使得$g \circ \tilde{h} = h$，即有如下交换图则称P是**投射模**(projective module).

定理 4.1. 给定R模P，那么P是投射模当且仅当$\mathrm{Hom}_R(P, -)$是正合函子.

定义. 设R是含幺环.若任意左投射R模P的子模还是左投射R模，则称R是左承袭环(left hereditary ring)；若任意左投射R模P的有限生成子模还是左投射R模，则称R是左半承袭环(left semi-hereditary ring)

命题 4.2. 给定R模P，则P是投射模当且仅当P是（某个）自由模的直和项.

证明. 设$\{x_i\}_{i\in I}$是P的一组生成元，取$F := \bigoplus_{i\in I} R \cdot x_i$是这些生成元张成的自由模，那么 □

projective modules are flat

第五章　模

习题 5.1. 求证R模M的零化子$\operatorname{ann} M$是同构不变的，即若R模N与M同构，则$\operatorname{ann} M = \operatorname{ann} N$.

习题 5.2. 设m, n是两个不同的正整数.求证$\mathbb{R}^m$和$\mathbb{R}^n$是同构的Abel群.

证明. 我们只需要证明作为$\mathbb{Q}$-向量空间$\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$，进而我们需要的结果是自然的.

我们可以找到$\mathbb{R}^m$的一组基$\{\epsilon_i\}_{i\in I}$（作为$\mathbb{Q}$-向量空间）和$\mathbb{R}^n$的一组基$\{\eta_j\}_{j\in J}$.这样我们只要证明I与J有相同的集合势即可. $\square$

习题 5.3. 求证任给定环R中的理想I, J，

$$R/I \otimes_R R/J \cong R/(I+J).$$

第二部分

域和Galois理论

第六章　域理论和Galois理论

习题 6.1. 设$F(\alpha)$是域F的扩张，$[F(\alpha):F]$是奇数.求证$[F(\alpha^2):F]=[F(\alpha):F]$.

习题 6.2. 设F是域，$A,B\in M_n(F)$.求证AB和BA有相同的特征多项式.

证明. 考虑扩域$F(y)$，则$\det(yI-A)\neq 0$，故$yI-A$可逆，于是$(yI-A)B=(yI-A)(B(yI-A))(yI-A)^{-1}$与$B(yI-A)$相似. □

习题 6.3. 如果域F满足-1不能写成平方和的形式，即不存在$a_i\in F, 1\leq i\leq n$使得$-1=\sum_{i=1}^n a_i^2$，则称F是形式实数域(formally real).求证如下论断是等价的：

(i) F是形式实数域；

(ii) F是有序域；

(iii) $\sum_{i=1}^n a_i^2=0$意味着$a_i=0$对任意i成立.

习题 6.4. 设F是域，且E是F上多项式$f(x)\in F[x]$的分裂域.求证

(i) Show that for any element α of some extension of F , $E(\alpha)$ is a splitting field of f over $F(\alpha)$.

(ii) Show that every irreducible polynomial $g\in F[X]$ with a root in E has all roots in E.

习题 6.5.

1. 设G是循环群，并且我们用乘法记号.设$g,h\in G$都不是平方元素，即不存在$x\in G$使得$x^2=g$或$x^2=h$.求证gh^{-1}是平方元素.

2. 设K/F是域扩张，a是F中的非零元素.假设s,t是$\langle a\rangle\in F^\times$中的元素，且满足在$F$中$s$和$t$都不是平方元素，但存在$\alpha,\beta\in K$使得$s=\alpha^2, t=\beta^2$.证明$K$的子域$F(\alpha)=F(\beta)$.

3. 证明若F是有限域且特征不为2，那么F的任意扩域K都包含且仅包含一个阶数为2的F的扩域.

习题 6.6. 题目中我们将证明，存在不可约多项式$f(x)\in\mathbb{Z}[x]$满足它在$\mathbb{F}_p[x]$中的像不都是不可约的.

(i) 求证$f(x)=x^4+1$在$\mathbb{Z}[x]$中不可约.

(ii) 求证$f(x)=x^4+1$在$\mathbb{F}_p[x]$中可约.

习题 6.7. Let K 1 and K 2 be finite extensions of F contained in the field K, and assume both are splitting fields over F .

1. Prove that their composite K 1 K 2 is a splitting field over F .

2. Prove that K 1 ∩ K 2 is a splitting field over F .

习题 6.8. Let α, β be two algebraic elements over a field F . Assume that the degree of the minimal polynomial of α over F is relatively prime to the degree of the minimal polynomial of β over F . Prove that the minimal polynomial of β over F is irreducible over $F(\alpha)$.

习题 6.9. Let E and K be finite field extensions of F such that [EK : F] = [E : F][K : F]. Show that $K \cap E = F$.

第三部分

范畴论

第七章　作为语言的范畴

数学家们最重要的武器是抽象化.最初，人们从日常生活中抽象出了数、点、平面、直线等概念，进而我们有了加法、乘法、有理数，和相交、平行，甚至有了函数、微分和积分.后来数学家们发现这些概念依然可以抽象，于是有了集合、映射、向量空间、群环域、流形和代数簇.

抽象化方法的本质是发现不同事物之间共同的特征，进而把满足这些共性的对象归为一类，研究它们的性质.比如，空间中自由向量的全体和$\mathbb{R}$上实值函数的全体都具有一些特征：它们中的元素都可以进行“加法”，关于$\mathbb{R}$中元素都有“数乘”，并且数乘与加法之间也满足一定关系.我们把这样满足这些性质的对象成为向量空间，进而发现向量空间都有一组基，它们之间保持结构的映射具有很好的特性.这样的性质是自由向量全体和实值函数全体所共有的.抽象化方法可以帮助我们忽略无关信息，更好地把我本质的结构.

我们已经学过许多数学对象，包括群环域这样的代数结构，也包括拓扑空间，流形等其他对象.如果把同类对象看成一个族，不仅族内对象有许多共性，不同族与族之间也有相同的结构或特点：给出一个群可以考虑它的子群和商群，已知的群可以由直积生成新的群，不同群之间可以由同态相互联系.如果把前面叙述中的群改成环或者模，相应的结论仍然有效.像这样由同类对象构成的族的共性抽象出来的结构即是范畴.利用范畴的语言，我们可以对数学系统及系统内特有的映射作一般性的描述，从而给大的数学系统的研究提供一个粗糙的框架.可以说范畴是数学对象中最高层次的抽象.

自S.Zilerberg（）和S.Maclane（麦克莱恩）为研究代数拓扑于1942年引入范畴和函子的概念以来，范畴理论本身已成为了一个独立的研究领域并对绝大多数的数学产生了深远影响.一个重要例子即是代数几何，它主要归功于A.Grothendieck.就现代数学而言，范畴更像是一门语言，为我们提供了描述数学结构与对象的工具.

7.1　定义和基本概念

简言之，范畴的概念由两部分组成：一族对象与它们之间的态射，定义把对象和对象之间的态射列于同等地位，这与我们通常认知的对象第一态射第二的想法并不相同，甚至当我们有更多结构后，可以说箭头比对象重要，箭头的箭头比箭头重要.

定义. 范畴(category)是一个数学对象，记为$\mathcal{C}$，有下列要素构成：

(i) 一些对象(object)（通常用大写字母A, B, C表示）构成的族$\operatorname{ob}\mathcal{C}$，

(ii) 对任意的有序对象二元组(A, B)，存在被称为态射集(hom set)集合$\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$，其中的元素f称为以A为定义域(domain)，以B为余定义域(codomain)的态射(morphism)，或简称为从A到B(morphism from A to B)的态射，记为$f : A \to B$.当范畴$\mathcal{C}$明确时，可简记为$\hom(A, B)$，

(iii) 对任意的有序对象三元组(A,B,C)，存在映射

$$\hom_{\mathcal{C}}(B,C)\times\hom_{\mathcal{C}}(A,B)\to\hom_{\mathcal{C}}(A,C)$$
$$(g,f)\mapsto g\circ f,$$

其中$g\circ f$被称为态射g与f的乘积(product)或复合(composition).

这些要素必需满足如下公理：

C1). 当二元数组(A,B)不等于(C,D)时，$\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$与$\hom_{\mathcal{C}}(C,D)$互不相交；

C2). (结合律， associativity)，若$f\in\hom_{\mathcal{C}}(A,B), g\in\hom_{\mathcal{C}}(B,C), h\in\hom_{\mathcal{C}}(C,D)$，则有$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$；

C3). (单位态射，identity)对每个对象A都有一个属于$\hom_{\mathcal{C}}(A,A)$的态射id_A使得对任意的$f\in\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$有$f\circ\mathrm{id}_A=f$，以及对任意的$g\in\hom_{\mathcal{C}}(B,A)$，有$\mathrm{id}_A\circ g=g$.

在用范畴的语言描述数学实体时，图（同时包含了对象，箭头与复合关系）可以帮助我们更清晰直观地理解对象与态射之间的关系.例如，$g\circ f=h$等价于图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "h"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

是交换的，而$g\circ f=k\circ h$意味着

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "g"] \\ C \arrow[r, "k"] & D \end{tikzcd}$$

是交换的.结合律$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$可表达为如下图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g\circ f"'] & B \arrow[d, "h\circ g"] \\ C \arrow[r, "h"] & D \end{tikzcd}$$

的交换性，单位态射id_A的性质也可这样刻画

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] \arrow[dr, "f"] & & \\ A \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g"'] & A \arrow[d, "\mathrm{id}_A"] \\ & & A, \end{tikzcd}$$

其中f,g是$\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$与$\hom_{\mathcal{C}}(B,A)$中的任意元素.更抽象一点，如同定义我们把复合看成hom集合之间的映射，结合性是说图

$$\begin{tikzcd} \hom_{\mathcal{C}}(C,D)\times\hom_{\mathcal{C}}(B,C)\times\hom_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "\circ\times\mathrm{id}_{\hom_{\mathcal{C}}(A,B)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\hom_{\mathcal{C}}(C,D)}\times\circ"'] & \hom_{\mathcal{C}}(B,D)\times\hom_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[d, "\circ"] \\ \hom_{\mathcal{C}}(C,D)\times\hom_{\mathcal{C}}(A,C) \arrow[r, "\circ"] & \hom_{\mathcal{C}}(A,D) \end{tikzcd}$$

是交换的，其中第一行的映射表示对前两项取复合并取后一项不动，第一列的映射是取第一项不动但对后两项取复合.类似地，记$\{*\}$是只包含一点的集合，$\underline{\mathrm{id}}_A:\{*\}\to \hom_{\mathcal{C}}(A,A), \underline{\mathrm{id}}_B:\{*\}\to \hom_{\mathcal{C}}(B,B)$是确定了单位态射$\mathrm{id}_A,\mathrm{id}_B$的映射，那么单位态射的相容性就是图

$$\begin{tikzcd}
\{*\}\times\hom_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[d, "\underline{\mathrm{id}}_B\times\mathrm{id}"'] & \hom_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d, equal] & \hom_{\mathcal{C}}(A,B)\times\{*\} \arrow[d, "\mathrm{id}\times\underline{\mathrm{id}}_A"] \\
\hom_{\mathcal{C}}(B,B)\times\hom_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "\circ"] & \hom_{\mathcal{C}}(A,B) & \hom_{\mathcal{C}}(A,B)\times\hom_{\mathcal{C}}(A,A) \arrow[l, "\circ"']
\end{tikzcd}$$

的交换性.

另一方面，公理中第一条的不相交性质实际不是必需的.当它不满足时，我们可以作如下技术性处理：对于任意$\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$中的态射f，规定其为三元组(A,B,f)，这样即使存在$f\in\hom_{\mathcal{C}}(C,D)\cap\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$，三元组不同也将其视为不同的态射.

下面的这些例子将会不断在后面出现.

例 7.1. 集合的范畴**Set**：其中，ob **Set**是所有集合构成的类，$\hom_{\mathbf{Set}}(A,B)$是所有从集合A到集合B的集合间映射构成的集合，态射的复合恰是集合间映射的复合，id_A是集合A上的恒等映射.三条公理是显然满足的.

例 7.2. 群的范畴**Gp**：其中，ob **Gp**是所有的群构成的类，$\hom_{\mathbf{Gp}}(G,H)$是所有从群G到群H的群同态，态射的复合是群同态的复合，id_G是G上的恒等映射.

例 7.3. Abel群范畴**Ab**：ob **Ab**群，态射和态射的复合含义同于群范畴.

容易观察到，例7.2中的**Gp**与例7.1中的**Set**有一定“子结构”关系：ob **Gp**是ob **Set**的子类，而且对**Gp**中的任意两个对象G，H，hom Gp （G，H）属于 hom Set（G，H）。我们把这种关系抽象出来，行程如下概念：C，D是两个范畴，满足ob C是ob D的子族，且对C的任意对象A，B， homC（A，B）属于homD（A，B），则称C是D的子范畴（subcategory）。若homC（A，B）=homD（A，B）对任意C中对象A，B成立，则称C是D的满子范畴(fully subcategory).显然，Ab是Gp的满子范畴，而Cp仅是Set的子范畴非满子范畴。

例 7.4. 环的范畴**Ring**：ob **Ring**是所有的含幺（结合）环，对于任意对象R,S，$\hom_{\mathbf{Ring}}(R,S)$是所有$R$到$S$将单位元映到单位元的环同态.

有时候

例 7.5. 环R上的模范畴$R-\mathbf{Mod}$：对象是所有R上的（左）模，对于任意R模M,N，$\hom_{R-\mathbf{Mod}}(M,N)$是$R$模同态的全体，同样地可以定义环$R$上的右模范畴$\mathbf{Mod}-R$.

例 7.6. 拓扑空间的范畴**Top**：对象是所有拓扑空间，任意两个拓扑空间X,Y，$\hom_{\mathbf{Top}}(X,Y)$是X到Y的连续映射全体.

以上范畴都是以集合为基础的（更准确的定义出现在？？节），具体来说，这些范畴中的对象都是集合，态射也是集合间的映射，但并不是所有的范畴都是这样的.

例 7.7. 给定群G，BG定义如下：ob B$G=*$，$\hom_{\mathrm{B}G}(*,*)=G$.

例 7.8. 设$(P,\le)$是一个偏序集，定义如下范畴P：ob $P=P$，对于任意P中元素a,b，$\hom_P(a,b)$有唯一一个元素当且仅当$a\le b$.于是，态射的合成也只有唯一合理的定义.

例 7.9. 设M是一个幺半群，由此可以定义范畴M：ob M=A是含有一个元素的集合。hom（A，A）=M，1A是M中的单位元，态射的复合是半群乘法。反过来，若M是对象唯一的范畴，则hom（A，A）是一个幺半群，其中A是M中唯一的对象，幺元是1A，半群乘法是态射的复合。于是，我们建立了幺半群与仅含一个对象的范畴的一一对应，从这个意义上来讲范畴可以看作幺半群的推广。

将这个例子与之前的对比，我们发现，例7和例8的对象全体是一个集合，像这样对象全体是集合的范畴成为小（small）范畴。在更一般的情况下我们并不要求homC（A，B）是集合，故相对应的定义1中给出的homC（A，B）的范畴称为局部小（locally small）范畴，我们所涉及的范畴都是局部小的范畴。

前面的6个例子中态射都是集合间的映射，我们可以利用元素来对这些态射进行讨论（如），但对于例7和例8和一般范畴当中，对于态射的讨论我们不能借助元素的概念，这是极为重要的。

通过已知的范畴，我们可以构造新的范畴。下面两个例子是很重要的，本节习题中还会出现几种不同的构造范畴的方法，它们更多地应用在范畴中特殊对象的描述。

设$\mathcal{C}$是范畴，我们可以按如下方式构造它的对偶范畴(dual category)，记为$\mathcal{C}^\circ$：它与$\mathcal{C}$有相同的对象，即$\mathrm{ob}\,\mathcal{C}^\circ = \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，有时为区分$\mathcal{C}$中的对象$A$在$\mathcal{C}^\circ$中记为$A^\circ$；$\mathrm{hom}_{\mathcal{C}^\circ}(A^\circ, B^\circ) = \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$，即$f : A \to B$与$f : B^\circ \to A^\circ$一一对应.此外，$f \circ g\circ = (gf)^\circ$，$\mathrm{id}_{A^\circ} = \mathrm{id}_A^\circ$换言之，对偶范畴中对象不变箭头反向。用图对偶范畴可表示为若A-f-B在C中则

（图）在$\mathcal{C}^\circ$中，若

（图）在C中交换，则（图）在$\mathcal{C}^\circ$中交换。

再设$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$是两个范畴，于是它们的乘积范畴（product category）C乘D包含如下要素：C乘D的对象全体是所有的二元组（A，B），其中A属于ob C，B属于ob D，即ob C乘D=ob C 乘 ob D：若A，C属于ob C，B，D属于ob D，则（一个集合），并且1（A，B）=（1A，1B）；若f属于hom C（A，B），g属于hom C（B，C），h属于homD （D，E），k属于homD （E，F），则（g，k）（f，h）=（gf，kh）。

此外，范畴中可能存在一些具有特殊性质的对象或态射，它们不一定存在，但在一些范畴中是结构研究的核心。

定义. 若范畴C中的对象A满足对C的任意对象B，hom（A，B）只含一个元素，则称这样的对象A为始对象（initial object）。对偶地，若范畴C中的对象D满足对C的任意对象C，hom（C，D）只含一个元素，则称这样的对象为终对象（terminal object）。

容易验证，**Set**中空集是始对象，单点集是终对象；**Gp**中$\{e\}$既是始对象也是终对象；环R上的模范畴$R-$**Mod**中0既是始对象也是终对象.

定义. A，B是范畴C中的对象，若对于态射f：AB，存在g：BA使得gf=1A，fg=1B，则称f是范畴C中的一个同构（isomorphism），g是f的逆（inverse），对象A与对象B是同构的（isomorphic）

在Gp，Ring，$R-$**Mod**中同构的含义与代数结构中同构的含义相同；Set中同构的含义就是集合间的一一映射。同构是描述对象唯一性的基础，也是描述范畴间相似结构的工具.

命题 7.1. *同构态射的逆唯一.*

同意范畴中的始（终）对象是同构的。

证明. 设C是一范畴，A，B属于ob C。f：AB，g，h：BA满足fg=fh=1B，gf=hf=1A。于是g=g1B=gfh=1Ah=h。唯一行得证。

设C是一范畴，A1，A2是C中的始对象。于是存在唯一的f属于hom（A1，A2），g属于hom（A2，A1），故fg属于hom（A2，A2）。gf属于hom（A1，A1），但A1，A2是始对象。hom（A1，A1）与hom（A2，A2）中都只含有唯一的元素，因此gf=1A1，fg=1A2。

终对象同构的证明同上 □

若对同构的概念稍作一般化，可以得到特殊的态射.同时这两类态射也可以看作Set中单映射和满映射的推广：

定义. 设f：AB是范畴C中的态射。C是C中的对象。若对于任意满足gf=hf的态射g，h属于hom（B，C），都有g=h，则称f是满态射（epimorphism）或满的（epic）。

对偶地，f：BC是范畴C中的态射，A是C中的对象。若对于任意满足fg=fh的态射g，h属于hom（A，B），都有g=h，则称f是单态射（monomorphism）或单的（monic）

例 7.10. 本节最后一个例子是7.7的推广.给定群G，可以定义它的轨道范畴(orbit category)Orb(G)，其中Orb(G)的对象囊括了G的左陪集G/H，H是任意给定的子群，对任意的对象$G/H, G/K$，$\hom_{\mathrm{Orb}(G)}(G/H, G/K)$是所有$G$等变的映射，习题**??**给出了态射的具体描述.

给定域F及其扩域E，定义范畴$\mathbf{Field}_F^E$是

于是Galois理论基本定理说明函子是范畴的等价.

我们以如下的结果结束本节：

命题 7.2. *设f：AB和g：BC都是范畴C中的态射：*

若f和g都是单态射，则gf也是单态射；

若gf是单态射，则f也是单态射；

若f和g是满态射，则gf也是满态射；

若gf是满态射，则g也是满态射；

同构同时是单态射也是满态射

习题 7.1. 设X是一个拓扑空间，证明X可以成为一个范畴，记为$\mathbf{Open}(X)$，其中X的对象是所有的开集，$\hom_{\mathbf{Open}(X)}(U, V)$是单点集当且仅当$U \subseteq V$，否则$\hom_{\mathbf{Open}(X)}(U, V) = \emptyset$.若$U \subseteq V$，我们称$\hom_{\mathbf{Open}(X)}(U, V)$中的元素为包含映射，记为$i : U \to V$.

习题 7.2. 设$\mathcal{C}$是范畴，$A \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}$.定义$A$的自同构群是$\hom_{\mathcal{C}}(A, A)$中的所有同构态射组成的集合，群的乘法是态射的复合，即$\mathrm{Aut}(A) = \{f : A \to A \mid f \text{ 是同构}\}$.求证同构对象的自同构群是同构的.

7.2　范畴中的泛性质对象

7.2.1　积和余积

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$中的一族对象$\{A_i\}_{i\in I}$，若对象$\prod_{i\in I} A_i$和一族态射$\{\pi_i : \prod_{i\in I} A_i \to A_i\}_{i\in I}$

$$\begin{tikzcd}
A_j & \prod_{i\in I} A_i \arrow[l, "\pi_j"'] \arrow[r, "\pi_i"] & A_i \\
& B \arrow[ul, "f_j"] \arrow[u, dashed, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] &
\end{tikzcd}$$

则称对象为积(product).特别地，两个对象A, B的积记为$A \times B$.

下面的命题

命题 7.3.

作为对偶，还有如下的定义：

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$中的一族对象$\{A_i\}_{i\in I}$，若对象$\coprod_{i\in I} A_i$和一族态射$\{\iota_i : A_i \to \coprod_{i\in I} A_i\}_{i\in I}$

$$\begin{tikzcd}
A_j \arrow[r, "\iota_i"] & \coprod_{i\in I} A_i \arrow[d, dashed] & A_j \arrow[l, "\iota_j"'] \\
& B &
\end{tikzcd}$$

则称

例 7.11. 集合范畴**Set**中的积就是集合的笛卡尔积，可用如下方式构造：若$\{S_i\}_{i\in I}$是一族集合，定义

$$P = \{\varphi : I \to \bigsqcup_{i\in I} S_i \mid \varphi(i) \in S_i\}$$

和$\pi_i : P \to S_i, \varphi \mapsto \varphi(i)$，则$(P, \{\pi_i\})$是$\{S_i\}$在**Set**中的积.对偶地，**Set**中的余积是不交并，即$\coprod_{i\in I} S_i = \{(i, x) \mid i \in I, x \in S_i\}$.

习题 7.3.

$$(f \circ g) \times h = (f \times \mathrm{id}) \circ (g \times h).$$

7.2.2　自由对象

定义.

7.2.3 泛性质对象

例 7.12. 纤维积

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed] & & \\
& A \times_C B & B \arrow[d] \\
& A \arrow[r] & C
\end{tikzcd}$$

习题 7.4. 设$f : B \to A$和$g : C \to A$是两个集合间的映射，求证$\mathbf{Set}$中存在纤维积$B \times_A C$.

证明. 令$B \times_A C := \{(b, c) \mid f(b) = g(c)\}$，我们要证明这样定义的纤维积满足相应的泛性质. □

习题 7.5. 设$\{*\}$是范畴$\mathcal{C}$中的终对象，A, B是$\mathcal{C}$的对象，求证

$$A \times B \cong A \times_{\{*\}} B.$$

任意给定态射$f : A \to B$，求证

$$A \cong A \times_B B.$$

证明. 1. 我们来验证$A \times_{\{*\}} B$满足$A \times B$的泛性质即可.

2. 同样地验证

□

习题 7.6. 在习题7.1中我们对任意拓扑空间X定义了一个范畴$\mathbf{Open}(X)$，设U, V是范畴中的两个对象，即两个开集，证明 $U \times_X V$存在.此外，对任意一族开集$\{U_i\}_{i\in I}$，证明$\coprod_{i\in I} U_i$存在，且$\coprod_{i\in I} U_i$是U的开覆盖当且仅当$\coprod_{i\in I} U_i \cong U$.

习题 7.7. 设范畴$\mathcal{C}$中存在任意两个对象的乘积，则纤维积

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] \arrow[d] & A \arrow[d, "{(f,g)}"] \\
B \arrow[r, "{(\mathrm{id},\mathrm{id})}"] & B \times B
\end{tikzcd}$$

给出了态射$f, g : A \rightrightarrows B$的等值子$K$.

习题 7.8. 求证单态射的拉回是单态射，具体而言，给定范畴$\mathcal{C}$和态射$f : A \to C, g : B \to C$，其中g是单态射，求证拉回给出的结构态射$p_1 : A \times_C B \to A$也是单态射.

证明. 考虑态射$h, k : X \to A \times_C B$，满足$p_1 \circ h = p_1 \circ k$，那么$f \circ p_1 \circ h = f \circ p_1 \circ k$，根据交换性$g \circ p_2 \circ h = g \circ p_2 \circ k$，再根据$g$的单性，$p_2 \circ h = p_2 \circ k$，因此有交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, shift left, "h"] \arrow[dr, shift right, "k"'] \arrow[drr, bend left, "p_2\circ h=p_2\circ k"] \arrow[ddr, bend right, "p_1\circ h=p_1\circ k"'] & & \\
& A\times_C B \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & B \arrow[d] \\
& A \arrow[r] & C.
\end{tikzcd}$$

根据拉回的泛性质，存在唯一的$X\to A\times_C B$满足交换图，但h,k都满足，故$h=k$. □

习题 7.9. 设$\mathcal{C}$是范畴，A,B是$\mathcal{C}$的对象，若存在态射$s:A\to B$和$r:B\to A$使得$rs=\mathrm{id}_A$，则称r是s的*收缩*(retract)或者*左逆*(left inverse)，s是r的*截面*(section)或*右逆*(right inverse)，A是B的一个*收缩*(retract).一个简单的例子是在R模范畴$R-\mathbf{Mod}$中，N是M的收缩当且仅当存在R模P使得$M=N\oplus P$.如果$f:X_1\to Y_1,g:X_2\to Y_2$是范畴$\mathcal{C}$的态射，且满足以下交换图

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "f"] & Y_1 \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "g"] & X_1 \arrow[d, "f"] \\
X_2 \arrow[r, "s_2"] & Y_2 \arrow[r, "r_2"] & X_1,
\end{tikzcd}$$

其中X_j是Y_j的收缩，$s_jr_j=\mathrm{id}_{X_j}$（$j=1,2$），则称f是g的*收缩*(retract).求证：若f是g的收缩，g是同构，则f也是同构.

7.3　函子与自然变换

7.3.1　积的函子性和抽象无意义的自然性

习题 7.10. 设$\mathcal{C},\mathcal{J}$是范畴，A是$\mathcal{C}$的对象，证明下面的定义构成一个函子

$$\begin{aligned}
\mathrm{Const}_A:\mathcal{J}&\to\mathcal{C}\\
j&\mapsto A\\
(a:i\to j)&\mapsto \mathrm{id}_A
\end{aligned}$$

我们称之为*常值函子*(constant function).证明，任意$\mathcal{C}$中的态射$f:A\longrightarrow B$可以诱导一个自然变换

$$f_*:\mathrm{Const}_A\Rightarrow\mathrm{Const}_B.$$

进一步，存在函子$\Delta:\mathcal{C}\to\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{C})$，把对象$A$映为$\mathrm{Const}_A$，态射$f:A\to B$映为$f_*:\mathrm{Const}_A\Rightarrow\mathrm{Const}_B$.

习题 7.11. 设X是一个集合，定义$F(X)$是以X为基生成的自由群.给出合理的定义说明$F:\mathbf{Set}\to\mathbf{Gp}$是一个函子，这个函子被称为*自由函子*(free functor).

习题 7.12. 设G是一个群，例7.7中定义了范畴$\mathrm{B}G$.

(i) 证明函子$F:\mathrm{B}G\to\mathbf{Set}$定义了$G$在集合$F(*)$上的一个（左）群作用.
在(ii)中我们并没有必要限定构造的函子的值域为$\mathbf{Set}$.函子$F:\mathrm{B}G\to\mathbf{Vec}_k$定义了一个$k$线性表示，函子$F:\mathrm{B}G\to\mathbf{Top}$定义了一个$G$空间.

(ii) 假定我们有两个函子$F,G:\mathrm{B}G\to\mathcal{C}$，显式地写出自然变换所满足的交换条件.由这样自然变换所确定的范畴$\mathcal{C}$中的态射称为G-*等变的*(G-equivariant).

习题 7.13. 设n是任意一个自然数.定义$[n]$是有$n+1$个对象的小范畴，且其中的箭头是序列$\{0 \to 1 \to \cdots \to n\}$.设$\mathbf{\Delta}$是所有$[n]$组成的范畴，态射是$[n]$到$[m]$的函子.

(i) 求证：与范畴$[0]$等价的范畴当且仅当每个hom集合都仅有一个元素.

(ii) 定义$[n]'$是$n+1$元的全序集，其元素记为$\{0 \le 1 \le \cdots \le n\}$.设$\mathbf{\Delta}'$是所有$[n]'$组成的范畴，态射是$[n]'$到$[m]'$的保序映射，即$f : [n]' \to [m]'$满足$i \le j$必有$f(i) \le f(j)$.证明$\mathbf{\Delta}'$是一个范畴，且存在一个范畴的同构$\mathbf{\Delta}' \rightrightarrows \mathbf{\Delta}$.于是我们无意区分两个范畴，都称为*单纯范畴*(simplicial category)或者*全序范畴*(ordering category)，也无意区分两个范畴不同的对象.

(iii) 证明

$$d^i_{n+1} : [n] \to [n+1]$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots \arrow[r] & n \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & i+1 \arrow[r] & \cdots \arrow[rr] & & n+1
\end{tikzcd}$$

和

$$s^i_n : [n+1] \to [n]$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[d] & i+1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[rr] & & n+1 \arrow[dl] \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[rr] & & \cdots \arrow[r] & n &
\end{tikzcd}$$

都是范畴$\mathbf{\Delta}$中的态射，且满足

$$\begin{aligned}
d^j_{[n+1]} d^i_{[n]} &= d^i_{[n+1]} d^{j-1}_{[n]}, && \forall\, i < j \\
s^j_{[n]} s^i_{[n+1]} &= s^i_{[n]} s^{j+1}_{[n+1]}, && \forall\, i \le j \\
s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} &= d^i_{[n]} s^{j-1}_{[n-1]}, && \forall\, i < j \\
s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} &= \mathrm{id}_{[n]}, && i = j \text{ 或 } i = j+1 \\
s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} &= d^{i-1}_{[n]} s^j_{[n-1]}, && \forall\, i > j+1.
\end{aligned}$$

其中，d^i称为第i个*对偶面映射*(coface map)，s^i称为第i个*对偶退化映射*(codegeneracy map).

(iv) 证明$\mathbf{\Delta}$中所有的态射都可以由d^i和s^j生成.更准确地说，任意$f \in \hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m])$有唯一的分解

$$f = d^{i_1} \circ \cdots \circ d^{i_r} \circ s^{j_1} \circ \cdots \circ s^{j_s},$$

其中$m = n + r - s$，$i_1 < \cdots < i_r$且$j_1 < \cdots < j_s$.

习题 7.14. (i) 设$\mathcal{C}$是范畴，A, B是$\mathcal{C}$的对象，$f \in \hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.证明$f$诱导了自然变换

$$f_* : \hom_{\mathcal{C}}(-,A) \Rightarrow \hom_{\mathcal{C}}(-,B)$$

和

$$f^* : \hom_{\mathcal{C}}(B,-) \Rightarrow \hom_{\mathcal{C}}(A,-).$$

(ii) 在(i)的记号下，证明f是一个同构当且仅当f_*是同构，当且仅当f^*是同构.

习题 7.15. 设F_1, F_2是函子$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$\eta : F_1 \Rightarrow F_2$.

1. 若G是函子$\mathcal{D} \to \mathcal{E}$，证明$G\eta : GF_1 \Rightarrow GF_2$，$(G\eta)_A := G(\eta_A)$是自然变换.

2. 若G是函子$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$，证明$\eta G : F_1 G \Rightarrow F_2 G$，$(\eta G)_A := \eta_{G(A)}$是自然变换.

习题 7.16. 给定范畴$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}, \mathcal{T}$和函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{T}$，求证

1. 当$\mathcal{C}$是小范畴时$\mathrm{Nat}(F, -), \mathrm{Nat}(-, F) : \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathbf{Set}$可以自然地成为函子.

2. $- \circ F : \mathrm{Funct}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$和$F \circ - : \mathrm{Funct}(\mathcal{E}, \mathcal{C}) \to \mathrm{Funct}(\mathcal{E}, \mathcal{D})$在练习7.15的意义下是函子，分别记为$F^*$和$F_*$.

3. $(G \circ F)_* = G_* \circ F_*$，$(G \circ F)^* = F^* \circ G^*$.

证明. □

习题 7.17. 给定范畴$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$和函子$F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，

1. 由习题7.16存在函子$\mathrm{Nat}(-, F), \mathrm{Nat}(-, G), \mathrm{Nat}(F, -), \mathrm{Nat}(G, -) : \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \to \mathbf{Set}$，求证任意自然变换$\eta : F \Rightarrow G$诱导了自然变换
$$\mathrm{Nat}(-, \eta) : \mathrm{Nat}(-, F) \Rightarrow \mathrm{Nat}(-, G)$$
和
$$\mathrm{Nat}(\eta, -) : \mathrm{Nat}(G, -) \Rightarrow \mathrm{Nat}(F, -).$$

2. 由习题7.16存在函子$- \circ F, - \circ G : \mathrm{Funct}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$和$F \circ -, G \circ - : \mathrm{Funct}(\mathcal{E}, \mathcal{C}) \to \mathrm{Funct}(\mathcal{E}, \mathcal{D})$，求证任意自然变换$\eta : F \Rightarrow G$诱导了自然变换
$$\eta_* : - \circ F \Rightarrow - \circ G$$
和
$$\eta_* : F \circ - \Rightarrow G \circ -.$$

3. $(H\eta)_* = H_* \eta_*$，$(\eta K)_* = \eta_* K_*$，$(H\eta)^* = \eta_* H^*$且$(\eta K)^* = K^* \eta_*$.

证明. □

习题 7.18 (Categories for the Working Mathematician, P37). 设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$和$\mathcal{E}$是范畴，如果F是函子$\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$，则称$F$是定义在$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$上的双函子(bifunctor)，其中函子性条件显式地写为：对任意$\mathcal{C}$中的态射$f : A \to B$和$\mathcal{D}$中的态射$g : C \to D$.如果对于任意$\mathcal{C}$中的对象A和$\mathcal{D}$中的对象C，都有证明存在$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$上的双函子$F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$，满足
$$F(-, C) = L_C$$
且
$$F(A, -) = R_A.$$

习题 7.19.

习题 7.20. 给定范畴$\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}$和函子$F:\mathcal{D}\to\mathcal{C},G:\mathcal{E}\to\mathcal{C}$.构造范畴$\mathcal{M}$和函子$P:\mathcal{M}\to\mathcal{D},Q:\mathcal{M}\to\mathcal{E}$使得对任意范畴$\mathcal{N}$和函子$K:\mathcal{N}\to\mathcal{D},G:\mathcal{N}\to\mathcal{E}$，若有图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N} \arrow[r, "K"] \arrow[d, "H"] & \mathcal{E} \arrow[d, "G"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

交换，都有唯一存在的函子: $\mathcal{N}\to\mathcal{M}$.这个范畴$\mathcal{M}$同构意义下是唯一的，我们记为$\mathcal{E}\times_{\mathcal{C}}\mathcal{D}$.

证明. 定义 □

7.4　范畴的等价与同构

例 7.13. 给定局部小的范畴$\mathcal{C}$，考虑协变函子$\hom_{\mathcal{C}}(A,-):\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$和任意其他的函子$F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$，给定$F(A)$中的元素$a$，那么自然地可以给定一个自然变换

$$\begin{aligned}
\eta^a &: \hom_{\mathcal{C}}(A,-)\Rightarrow F \\
\eta^a_B &: \hom_{\mathcal{C}}(A,B)\to F(B) \\
& \qquad\qquad h\mapsto F(h)(a),
\end{aligned}$$

由于F是函子，如上明显是良定义的；自然性交换图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "\eta^a_B"] \arrow[d, "\hom_{\mathcal{C}}(A,f)"'] & F(B) \arrow[d, "F(f)"] \\
\hom_{\mathcal{C}}(A,C) \arrow[r, "\eta^a_C"] & F(C)
\end{tikzcd}$$

由计算

$$F(f)(\eta^a_B(h))=F(f)(F(h)(a))=F(fh)(a)=\eta^a_C(fh)=\eta^a_C(\hom_{\mathcal{C}}(A,f)(h))$$

给出.

7.4.1　范畴的高阶结构

引理 7.1 (纵向复合). 给定范畴$\mathcal{C},\mathcal{D}$和函子$F,G,H:\mathcal{C}\rightrightarrows\mathcal{D}$，若有自然变换$\eta:F\Rightarrow G$和$\xi:G\Rightarrow H$

引理 7.2 (横向复合). 给定范畴$\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}$和函子$F,G:\mathcal{C}\rightrightarrows\mathcal{D},H,K:\mathcal{D}\rightrightarrows\mathcal{E}$.若有自然变换$\eta:F\Rightarrow G$和$\xi:H\Rightarrow K$，则对于任意$\mathcal{C}$中的对象$A$存在交换图

$$\begin{tikzcd}
HF(A) \arrow[r, "\xi_{F(A)}"] \arrow[d, "H(\eta_A)"'] & KF(A) \arrow[d, "K(\eta_A)"] \\
HG(A) \arrow[r, "\xi_{G(A)}"] & KG(A),
\end{tikzcd}$$

这于是定义了自然变换$\alpha*\beta:H\circ F\Rightarrow K\circ G$.

证明. 首先证明图的交换性.ξ的自然性说明对任意$\mathcal{D}$中的对象B, D和态射$g : B \to D$，存在交换图

$$\begin{tikzcd}
H(B) \arrow[r, "\xi_B"] \arrow[d, "H(g)"'] & K(B) \arrow[d, "K(g)"] \\
H(D) \arrow[r, "\xi_D"] & K(D),
\end{tikzcd}$$

于是取$B := F(A), D := G(A)$和$g := \eta_A$就得到了需要的图.因而可以定义

$$\alpha * \beta : H \circ F \Rightarrow K \circ G$$
$$(\alpha * \beta)_A : HF(A) \to KG(A)$$
$$(\alpha * \beta)_A := K(\eta_A) \circ \xi_{F(A)} = \xi_{G(A)} \circ H(\eta_A).$$

再证明如上定义的自然性.任意给定$\mathcal{C}$中的对象A, C和态射$f : A \to C$，ξ和η的自然性说明存在交换图

$$\begin{tikzcd}
HF(A) \arrow[r, "\xi_{F(A)}"] \arrow[d, "HF(f)"'] & KF(A) \arrow[r, "K(\eta_A)"] \arrow[d, "KF(f)"] & KG(A) \arrow[d, "KG(f)"] \\
HF(C) \arrow[r, "\xi_{F(C)}"] & KF(C) \arrow[r, "K(\eta_C)"] & KG(C),
\end{tikzcd}$$

这即是所要的自然性. □

　　引理7.2可以借由下图表述

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "G"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "H"] \arrow[r, bend right, "K"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{E} \arrow[r, squiggly] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "HF"] \arrow[r, bend right, "KG"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha*\beta"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

引理 7.3 (四项交换(middle four interchange)). 给定范畴$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$和函子$F, G, H : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$和$J, K, L : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=large]
\mathcal{C} \arrow[r, bend left=60, "F"] \arrow[r, "G" description] \arrow[r, bend right=60, "H"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\alpha"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\beta"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left=60, "J"] \arrow[r, "K" description] \arrow[r, bend right=60, "L"'] \arrow[r, phantom, shift left=3ex, "\Downarrow\gamma"] \arrow[r, phantom, shift right=3ex, "\Downarrow\delta"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

那么，即有交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "H"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\beta\circ\alpha"] & \mathcal{D} \arrow[r, bend left, "J"] \arrow[r, bend right, "L"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\delta\circ\gamma"] & \mathcal{E} \arrow[r, equal] & \mathcal{C} \arrow[r, bend left, "HF"] \arrow[r, bend right, "KG"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\alpha*\beta"] & \mathcal{E}
\end{tikzcd}$$

定义. 2范畴$\mathcal{C}$是一个数学对象：

(i) 一些对象(object)（通常用大写字母A, B, C表示）构成的族ob $\mathcal{C}$，

(ii) 对任意的有序对象二元组(A, B)，存在被称为态射集(hom set)集合$\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$，其中的元素f称为以A为定义域(domain)，以B为余定义域(codomain)的态射(morphism)，或简称为从A到B(morphism from A to B)的态射，记为$f : A \to B$.当范畴$\mathcal{C}$明确时，可简记为$\hom(A, B)$，

(iii) 对任意的有序对象三元组(A, B, C)，存在映射

$$\begin{aligned} \hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times \hom_{\mathcal{C}}(A, B) &\to \hom_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (g, f) &\mapsto g \circ f, \end{aligned}$$

其中$g \circ f$被称为态射g与f的乘积(product)或复合(composition).

这些要素必需满足如下公理：

C1). 当二元数组(A, B)不等于(C, D)时，$\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$与$\hom_{\mathcal{C}}(C, D)$互不相交；

C2). (结合律，associativity)，若$f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B), g \in \hom_{\mathcal{C}}(B, C), h \in \hom_{\mathcal{C}}(C, D)$，则有$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$；

C3). (单位态射，identity)对每个对象A都有一个属于$\hom_{\mathcal{C}}(A, A)$的态射id_A使得对任意的$f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)$有$f \circ \mathrm{id}_A = f$，以及对任意的$g \in \hom_{\mathcal{C}}(B, A)$，有$\mathrm{id}_A \circ g = g$.

习题 7.21. 设$\mathcal{C}$与$\mathcal{D}$是等价的范畴.若$\mathcal{C}$中存在始对象，证明$\mathcal{D}$也存在始对象.

习题 7.22. 若函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是范畴间的等价，求证对任意$\mathcal{C}$中的态射$f, g : A \to B$，

$$F(f) = F(g)$$

意味着$f = g$.

习题 7.23. 给定函子$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$和$G : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$，我们称如下构造是$\mathcal{D}, \mathcal{E}$的纤维范畴(comma category)，记为$(F, G)$：

1. 它的对象是三元组(X, Y, f)，其中X是$\mathcal{D}$的对象，Y是$\mathcal{E}$的对象，$f \in \hom_{\mathcal{C}}(F(X), G(Y))$；

2. 二元组(h, k)是(X_1, Y_1, f_1)到(X_2, Y_2, f_2)的态射当且仅当

$$G(k) f_1 = f_2 F(h),$$

即有如下$\mathcal{C}$中的交换图

$$\begin{tikzcd} F(X_1) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "F(h)"] & G(Y_1) \arrow[d, "G(k)"] \\ F(X_2) \arrow[r, "f_2"] & G(Y_2), \end{tikzcd}$$

其中，$h \in \hom_{\mathcal{D}}(X_1, X_2)$，$k \in \hom_{\mathcal{E}}(Y_1, Y_2)$.

证明：

(i) 如此构造的(F, G)是一个范畴，特别地，当F是Const_A时，该范畴记为$A\backslash G$，也称为G在A下的范畴(the category of G under A)（对偶地当G是Const_A时，该范畴记为F/A，也称为F在A上的范畴(the category of G over A)），更特别地当G还是$\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$时范畴记为$A\backslash\mathcal{C}$（对偶地进一步当$F$还是$\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$时范畴记为$\mathcal{C}/A$）.

(ii) 考虑G是Const_A的情形，若F是满忠实的，那么对任意$\mathcal{D}$中的对象X存在范畴的同构$\mathcal{D}/X \cong F/F(X)$.

接下来的习题中我们将详细地用范畴的语言讨论范畴当中“图”的概念，并讨论追图（*diagram chasing*）和用图表示交换性的技术.

定义. 设$\mathcal{C}$是一个范畴，则$\mathcal{C}$的一个**图(diagram)**是一个函子$F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$.其中，$\mathcal{J}$是一个小范畴，被称为**指标范畴(indexing category)**.

习题 7.24. 设$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是忠实函子.求证任意在$\mathcal{D}$中交换的$\mathcal{C}$中的图都在$\mathcal{C}$中交换.

习题 7.25. 任意给定集合X，X可以看作一个离散范畴X^δ，其中对象的全体是X，且态射只有恒等态射.求证如此的对应

$$X \mapsto X^\delta$$

给出了范畴间的嵌入

$$\mathbf{Set} \hookrightarrow \mathbf{Cat}.$$

第八章　范畴中的泛性质

8.1　Yoneda引理

8.1.1　函子的可表性

8.1.2　Yoneda引理

定理 8.1 (Yoneda). 任意给定局部小的范畴$\mathcal{C}$，则对任意的协变函子$F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$，存在关于$\mathcal{C}$中对象$A$的自然同构

$$\mathrm{Nat}(h^A,F)\cong F(A),$$

并且可以构造使得该同构关于函子F和对象A都是自然的.

对偶地，对于局部小的范畴$\mathcal{C}$和反变函子$G:\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Set}$，则存在的自然同构

$$\mathrm{Nat}(h_A,F)\cong G(A).$$

证明. 考虑如下定义的映射

$$\begin{aligned}\Phi:\mathrm{Nat}(h^A,F)&\leftrightarrows F(A):\Psi\\ \alpha&\mapsto\alpha_A(\mathrm{id}_A)\\ \eta^a&\leftarrow\!\shortmid a,\end{aligned}$$

其中η^a是例7.13中定义的自然变换. □

习题 8.1. 设$k-\mathbf{Vec}$是域k上向量空间全体组成的范畴，$k-\mathbf{FinVec}$是k上有限维向量空间全体组成的满子范畴，U是有限维k向量空间，求证函子$F:k-\mathbf{FinVec}\to k-\mathbf{FinVec},V\mapsto V\otimes_k U$是可表的，其代表元素为$(U^*,\mathrm{id}_U\in F((U^*)=U^*\otimes_k U)$.

习题 8.2. 设R是交换环，$\varphi:M\to N$是R模同态$\varphi:M\to N$，定义函子$K:R-\mathbf{Mod}\to\mathbf{Ab}$，满足对任意对象$P$，

$$K(P):=\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(P,M)\xrightarrow{f_*}\mathrm{Hom}_R(P,N)),$$

对任意R模同态$f:P\to Q$

$$K(f):=h_M|_{K(P)}$$

求证函子K是可表的.

习题 8.3. 求证反变幂集函子是可表的.

习题 8.4. 证明以下函子是不可表的：

1. $F:\mathbf{Ring}\to\mathbf{Set}$，$R\mapsto\{r^2\mid r\in R\}$；

2. $G:\mathbf{Ring}\to\mathbf{Set}$，其中$G$把环$R$映到$R$的所有幂零元素组成的集合；

3. $O:\mathbf{Top}\to\mathbf{Set}$，其中$O$把Hausdorff空间$X$映到$X$的所有开集组成的集合；

4. $P:\mathbf{Set}\to\mathbf{Set}$，；

5. $S:\mathbf{Gp}\to\mathbf{Set}$，其中$S$把群$G$映到$G$的所有子群组成的集合.

证明. 反设函子F是可表的，于是存在环R使得$\eta:F\cong\hom_{\mathbf{Ring}}(R,-)$.特别地，$F(R)\cong\hom_{\mathbf{Ring}}(R,R)$.取$F(R)$中的在这个同构下对应到$\mathrm{id}_R$的元素$u$，由$F$的构造，存在$r\in R$使得$u=r^2$.我们将会证明$u$具有如下泛性质：对任意环$S$和任意$S$中的平方元素$s^2$，存在唯一的同态$f:R\to S$使得$f(u)=s^2$.这是因为我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathbf{Ring}}(R,R) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\eta_R"] & \hom_{\mathbf{Ring}}(R,S) \arrow[d, "\eta_S"] \\
F(R) \arrow[r, "F(g)"] & F(S),
\end{tikzcd}$$

并且对于任意$g\in\hom_{\mathbf{Ring}}(R,S)\leftrightsquigarrow s^2$，存在唯一的$g^*$使得$g^*(\mathrm{id}_R)=g$，具体来说，令$g:=\eta_S^{-1}(s^2)$，那么

$$F(g)(u)=F(g)(\eta_R(\mathrm{id}_R))=\eta_S(g^*(\mathrm{id}_R))=\eta_S(g)=s^2.$$

假设还有一个态射h满足条件，那么

$$h^*(\mathrm{id}_R)=(\eta_S^{-1}\circ F(h)\circ\eta_R)(\mathrm{id}_R)=(\eta_S^{-1}\circ F(h))(u)=\eta_S^{-1}(s^2)=g,$$

于是我们的论断得证.

考虑$S=\mathbb{Z}[x]$，$s=x$，根据刚刚所证明的，存在唯一的环同态$g:R\to\mathbb{Z}[x]$使得$g(u)=x^2$.零$m:\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z}[x]$，$x\mapsto -x$，那么$m\circ g$也是将$u$映到$x^2$的态射.故矛盾. □

8.2　元素范畴与泛性质

定义. 给定局部小的范畴$\mathcal{C}$和协变函子$F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$，如下范畴

1. 对象包含了所有的有序对(A,a)，其中A是$\mathcal{C}$中的对象，a是$F(A)$中的元素，

2. $\hom((A,a),(B,b)):=\{f\in\hom_{\mathcal{C}}(A,B)\mid F(f)(a)=b\}$

被称为F的元素范畴(category of elements)，记为$\int_{\mathcal{C}}F$.

命题 8.2. 协变函子$F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$是可表的当且仅当其元素范畴$\int_{\mathcal{C}} F$有始对象.

证明. □

习题 8.5. 设函子$F, G : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$是自然同构的.证明自然同构$\eta : F \Rightarrow G$诱导了它们元素范畴的同构：

$$\int_{\mathcal{C}} F \cong \int_{\mathcal{C}} G.$$

习题 8.6. 证明反变函子$F : \mathcal{C}^{\circ} \to \mathbf{Set}$可表当且仅当其元素范畴$\int_{\mathcal{C}^{\circ}} F$存在终对象.

习题 8.7. 回顾习题7.23中的定义，求证对任意协变函子$F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$存在范畴的同构

$$(y, F) \cong \int_{\mathcal{C}} F,$$

其中y是Yoneda嵌入.

习题 8.8 (Grothendieck构造). 给定局部小的范畴$\mathcal{C}$和协变函子$F : \mathcal{C} \to \mathbf{Cat}$，如下范畴

1. 对象包含了所有的有序对(A, a)，其中A是$\mathcal{C}$中的对象，a是$F(A)$中的对象，
2. $\hom((A, a), (B, b)) := \{f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B) \mid F(f)(a) = b\}$

被称为F的Grothendieck构造(Grothendieck construction)，记为$\int_{\mathcal{C}} F$.求证任意给定函子$G : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$，存在范畴的同构

$$i_* : \int_{\mathcal{C}} G \xrightarrow{\cong} \int_{\mathcal{C}} i^*(G),$$

其中，$i : \mathbf{Set} \hookrightarrow \mathbf{Cat}$是习题7.25给出的嵌入，前者是元素范畴，后者是Grothendieck构造.由此，我们并不在记号上实际区分元素范畴和Grothendieck构造.

习题 8.9. 给定群K, N和群作用$\varphi : K \to \mathrm{Aut}(N)$.定义函子

$$\Phi : \mathrm{B}K \to \mathbf{Cat}$$
$$\{*\} \mapsto N,$$

求证Grothendieck构造

$$\int_{\mathrm{B}K} \Phi$$

恰好是半直积K

习题 8.10. 给定范畴$\mathcal{C}$，它的分解范畴(category of factorisation)（或者叫扭曲箭头范畴(twisted arrow category)）$\mathrm{Tw}(\mathcal{C})$是

1. 对象是$\mathcal{C}$中的态射$f : A \to B$，
2. 态射是目标沿源的分解

$$\hom_{\mathrm{Tw}(\mathcal{C})}(f : A \to B, g : C \to D) := \left\{ (p, q) \;\middle|\; \begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{p} & C \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ B & \xrightarrow[q]{} & D \end{array}, g = q \circ f \circ p \right\},$$

求证
$$\mathrm{Tw}(\mathcal{C}) \cong \int_{\mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C}} \mathrm{hom}.$$

8.3 伴随函子

在第一节中，我们引入了对偶范畴的概念。一个自然的想法是，对一个给定的函子，我们是否也能找到一个类似对偶的构造？我们类比一个具体的情形，考虑两个有限维实向量空间V，W带有内积... 是线性映射。若存在线性映射... 使得 ....

则称...是T的伴随映射。

如果我们将范畴类比为空间，将函子类比为映射，这样只要能构造合适的“内积”就可以得到函子的伴随。事实上，这样的“内积”不需要构造，存在自然的结构使定义是合适的。

定义. 给定范畴$\mathcal{C},\mathcal{D}$和函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}, G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$，若对任意$\mathcal{C}$中的对象$A$和$\mathcal{D}$中的对象$B$，都存在自然的集合之间的同构
$$\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(F(A),B)\cong\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A,G(B)),$$
则称F是G的左伴随，G是F的右伴随函子(right adjoint functor).

首先我们解释一下如上定义中的自然性.记自然同构为
$$\begin{aligned}\alpha_{A,B}:\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(F(A),B)&\cong\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A,G(B))\\ f^\sharp:F(A)\to B&\mapsto f^\flat:A\to G(B),\end{aligned}$$

那么对$\mathcal{D}$中的任意态射$h:B\to D$，有如下交换图
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(F(A),B) \arrow[r, "\alpha_{A,B}"] \arrow[d, "h_*"'] & \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A,G(B)) \arrow[d, "G(h)_*"] \\
\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(F(A),D) \arrow[r, "\alpha_{A,D}"] & \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A,G(D)),
\end{tikzcd}$$

具体来说，对任意$f^\sharp:F(A)\to B$都有交换图
$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f^\flat"] \arrow[dr, "(h\circ f^\sharp)^\flat"'] & G(B) \arrow[d, "G(h)"] \\
 & G(D).
\end{tikzcd}$$

对偶地，还有对$\mathcal{C}$中的态射的自然性，即对任意$\mathcal{C}$中态射$k:A\to C$，有交换图
$$\begin{tikzcd}
\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(F(A),B) \arrow[r, "\alpha_{A,B}"] \arrow[d, "F(k)_*"'] & \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A,G(B)) \arrow[d, "k_*"] \\
\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(F(C),B) \arrow[r, "\alpha_{C,B}"] & \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(C,G(B)),
\end{tikzcd}$$

或者是如先前相同的图

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[d, "F(k)"'] \arrow[dr, "(g^\flat \circ k)^\sharp"] & \\ F(C) \arrow[r, "g^\sharp"] & D. \end{tikzcd}$$

自然性来源于定义的要求.

例 8.1. 考虑忘却函子$U:\mathbf{Top}\to\mathbf{Set}$，它将拓扑空间$(X,\tau)$映到它的底集$X$，我们可以证明$U$同时有左伴随和右伴随.考虑$D:\mathbf{Set}\to\mathbf{Top}$，其中对任意集合$S$，拓扑空间$D(S)$的底集是$S$，它具有离散拓扑，即任意$S$的子集都是开集，为证明

$$\hom_{\mathbf{Top}}(D(S),X)\cong\hom_{\mathbf{Set}}(S,U(X)),$$

显然有$\hom_{\mathbf{Top}}(D(S),X)\subseteq\hom_{\mathbf{Set}}(S,U(X))$，但$D(S)$有离散拓扑说明任意集合间的映射都是连续的，故$D$是$U$的左伴随.

再考虑$I:\mathbf{Set}\to\mathbf{Top}$，它把集合$S$映为具有底集$S$和开集$\emptyset$的拓扑空间$I(S)$.为证明

$$\hom_{\mathbf{Set}}(U(X),S)\cong\hom_{\mathbf{Top}}(X,I(S)),$$

只要说明任意$U(X)$到S的集合间映射都是连续的，但$\emptyset$的原象必然为$\emptyset$, S的原象必然是X，故任意集合的映射$f:X\to I(S)$是连续的.

由于以上的同构都是恒等，故自然性显然.

例 8.2. 考虑忘却函子$U:\mathbf{Gp}\to\mathbf{Set}$，将群$G$映到它自身的集合，将群同态映到它本身作为集合间的映射，我们将说明它具有左伴随函子.

考虑函子

$$\begin{aligned} F:\mathbf{Set}&\to\mathbf{Gp}\\ S&\mapsto\langle S\rangle, \end{aligned}$$

其中$\langle S\rangle$是由集合S生成的自由群，于是

$$\alpha_{S,G}:\hom_{\mathbf{Gp}}(\langle S\rangle,G)\cong\hom_{\mathbf{Set}}(S,U(G))$$

是$f\mapsto f\circ\iota$，其中$\iota:S\to F(S)$定理**??**中的嵌入，泛性质说明这是集合间的同构，只要证明自然性即可.

如上的伴随实际上是一组被称为“自由-忘却伴随”(free-forgetful adjunction)的特例，常见的许多伴随都可以归到这一类.

例 8.3. 给定含幺环R,S，假设M是右R模，N是(R,S)双模，L是右S模，定理3.3给出了自然的同构

$$\alpha_{M,L}:\mathrm{Hom}_S(M\otimes_R N,L)\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_S(N,L)),$$

这意味着函子对

$$-\otimes_R N:R-\mathbf{Mod}\leftrightarrows\mathbf{Mod}-S:\mathrm{Hom}_S(N,-)$$

是伴随，这个伴随被称为“张量-态射伴随”(tensor-hom adjunction).

下面的引理给出了同构自然性的一个等价定义，在通常伴随性的证明中它都是有用的.

引理 8.1. 给定一组函子$F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$，且给定一族同构

$$\alpha_{A,B}:\hom_{\mathcal{D}}(F(A),B)\cong\hom_{\mathcal{C}}(A,G(B)),\quad\forall A\in\mathcal{C},B\in\mathcal{D},$$

则F,G是伴随函子当且仅当图

$$\begin{tikzcd} F(A_1) \arrow[r, "f^\sharp"] \arrow[d, "F(h)"'] & B_1 \arrow[d, "k"] \\ F(A_2) \arrow[r, "g^\sharp"] & B_2 \end{tikzcd}$$

在$\mathcal{D}$中交换等价于图

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[r, "f^\flat"] \arrow[d, "h"'] & G(B_1) \arrow[d, "G(k)"] \\ A_2 \arrow[r, "g^\flat"] & G(B_2) \end{tikzcd}$$

在$\mathcal{C}$中交换，其中A,C是$\mathcal{C}$中的对象，B,D是$\mathcal{D}$中的对象.

证明. 证明中我们依旧使用$\sharp,\flat$来表示$\mathcal{D}$中和$\mathcal{C}$中的对应的态射.

假设$F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$是伴随，且图

$$\begin{tikzcd} F(A_1) \arrow[r, "f^\sharp"] \arrow[d, "F(h)"'] & B_1 \arrow[d, "k"] \\ F(A_2) \arrow[r, "g^\sharp"] & B_2 \end{tikzcd}$$

交换，即$k\circ f^\sharp=g^\sharp\circ F(h)$，则由$\mathcal{D}$中的自然性

$$G(h)\circ f^\flat=(h\circ f^\sharp)^\flat=(g^\sharp\circ F(h))^\flat$$

但$\mathcal{C}$中的自然性说明

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[d, "F(k)"'] \arrow[dr, "(g^\flat\circ k)^\sharp"] & \\ F(C) \arrow[r, "g^\sharp"'] & D \end{tikzcd}$$

是交换的，故$(g^\sharp\circ F(h))^\flat=(g^\flat\circ k)^{\flat\sharp}=g^\flat\circ k$，即第二幅图交换.同理，若第二幅图交换等价于第一幅图.

另一方面，若两幅图交换性等价，取$A_1=A_2=A,B_1=B,B_2=D,h=\mathrm{id}_A,g^\sharp=k\circ f^\sharp$，那么第一幅图交换，等价性说明第二幅图交换，这意味着$G(h)\circ f^\flat=(h\circ f^\sharp)^\flat$，即$\mathcal{D}$中的自然性.同理，可以证明$\mathcal{C}$中自然性。 □

命题 8.3. 协变函子$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$有左伴随函子当且仅当对$\mathcal{C}$中的任意对象$A$，函子$\hom_{\mathcal{C}}(A,G(-))$可表.

证明. 证明：必要性。设... 是G的左伴随函子。固定... 中的对象A，我们证明... 是函子... 的代表。但... 是自然态射且对任意... 中的对象B，... 都是同构，故得证。充分性。我们将构造G的左伴随。对任意... 中的对象A，由于... 可表，故可以找到其代表，记其中的一个对象为F(A)。若... 是... 中的任意态射，于是f诱导了一个自然态射 ... 根据函子的可表性， ... 且..., 于是... 在这两个自然同构下是自然变换 ... 我们记为... ，由Yoneda引理 ... 故存在... 是该同构下... 的对应，为证明这样的定义构成函子，若... 都是... 中的态射，则... 的函子性说明... 于是函子的可表性说明... 这样F的函子性就归结为在Yoneda引理中的自然同构 ... 将... 映到... ，我们再来考虑定义 Yoneda引理中 ... 定义为 ... 故 ... 由于... 关于对象的自然性，我们有 (图) 这意味着 ... 但同时，... 这证明了F是函子，最后我们需要说明同构是自然的。任取... 中的态射... 则... 是自然态射意味着图 (图) 是交换的，这是第一个自然性。对于反变的自然性，我们考虑... 是... 中的态射，则

由于Yoneda中的定义... 故要说明... 即可，我们知道... ，故... ，于是... 。但Yoneda 引理中的定义... ... 这就完成了证明.

□

8.3.1 单位和余单位

在上一小节的讨论中，我们知道，对任意的对象$A \in \operatorname{ob}\mathcal{C}$，若$F$是$G$的左伴随，则有自然同构

$$\alpha_{A,-} : \hom_{\mathcal{D}}(F(A), -) \Rightarrow \hom_{\mathcal{C}}(A, G(-)),$$

而Yoneda引理说明

$$\hom_{\hat{\mathcal{D}}}(h_{F(A)}, \hom_{\mathcal{C}}(A, G(-))) \cong \hom_{\mathcal{C}}(A, GF(A)),$$

因而自然变换$\alpha_{A,-}$对应到唯一的态射$\eta_A : A \to GF(A)$，具体而言，在Yoneda引理的映射下$\eta_A = \alpha_{A,F(A)}(\mathrm{id}_{F(A)})$，于是当存在态射$f : A \to C$时，根据$\alpha$的自然性

$$\begin{aligned}
\alpha_{C,F(C)}(\mathrm{id}_{F(C)}) \circ f &= (\alpha_{C,F(C)}(\mathrm{id}_{F(C)}) \circ f)^{\sharp\flat} \\
&= (\mathrm{id}_{F(C)} \circ F(f))^{\flat} \\
&= (F(f) \circ \mathrm{id}_{F(C)})^{\flat} \\
&= GF(f) \circ \alpha_{A,F(A)}(\mathrm{id}_C),
\end{aligned}$$

这意味着存在交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & GF(A) \arrow[d, "GF(f)"] \\
C \arrow[r, "\eta_C"] & GF(C),
\end{tikzcd}$$

即η是自然变换$\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$，它被称为伴随对$(F, G)$的单位(unit).

例 8.4. 考虑例8.2中给出的伴随

$$F : \mathbf{Set} \leftrightarrows \mathbf{Gp} : U,$$

按照上面的讨论，自然变换$\eta : \mathrm{id}_{\mathbf{Set}} \Rightarrow UF$定义为对任意集合$S$，

$$\eta_S(x) := \alpha_{S,F(S)}(\mathrm{id}_{F(S)})(x) = \mathrm{id}_{F(S)} \circ \iota(x) = \iota(x) = x,$$

它是单位映射，因而η被称为单位.

例 8.5. 考虑例8.3中给出的伴随

$$-\otimes_R N : R-\mathbf{Mod} \leftrightarrows \mathbf{Mod}-S : \mathrm{Hom}_S(N,-),$$

按照上面的讨论，自然变换$\eta : \mathrm{id}_{R-\mathbf{Mod}} \Rightarrow \mathrm{Hom}_S(N, -\otimes_R N)$定义为，对任意左$R$模$M$，

$$\eta_M(m) := \alpha_{M,M\otimes_R N}(\mathrm{id}_{M\otimes_R N})(m) = m\otimes -.$$

对偶地，$\epsilon_B = \alpha_{G(B),B}(\mathrm{id}_{G(B)}) : FG(B) \to B$关于$\mathcal{D}$中的对象也具有类似的自然性，用图表示就是

$$\begin{tikzcd} FG(B) \arrow[r, "\epsilon_B"] \arrow[d, "FG(g)"'] & B \arrow[d, "g"] \\ FG(D) \arrow[r, "\epsilon_D"] & D, \end{tikzcd}$$

因此这得到了另一个自然变换$\epsilon : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$，称为伴随对$(F,G)$的余单位(counit)，或赋值(evaluation).

例 8.6. 接例8.4中的讨论，伴随

$$F : \mathbf{Set} \leftrightarrows \mathbf{Gp} : U,$$

的余单位是

$$\epsilon_G(g_1^{\delta_1}\cdots g_m^{\delta_m}) = \alpha_{U(G),G}(\mathrm{id}_{U(G)})(g_1^{\delta_1}\cdots g_m^{\delta_m}) = g_1^{\delta_1} * \cdots * g_m^{\delta_m},$$

其中$*$是G中的乘法.

例 8.7. 接例8.5中的讨论，伴随

$$-\otimes_R N : R-\mathbf{Mod} \leftrightarrows \mathbf{Mod}-S : \mathrm{Hom}_S(N,-)$$

的余单位是

$$\epsilon_L\left(\sum_i f_i\otimes n_i\right) = \alpha_{\mathrm{Hom}_S(N,L),L}(\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_S(N,L)})\left(\sum_i f_i\otimes n_i\right) = \sum_i f_i(n_i),$$

这解释了为何ϵ被称为赋值.

任意给$\mathcal{C}$中的对象A，$\eta : A \to GF(A)$是$\mathcal{C}$中的态射，因而$F(\eta) : F(A) \to FGF(A)$是$\mathcal{D}$中的态射；同理$\epsilon_{F(A)} : FGF(A) \to F(A)$也是$\mathcal{D}$中的态射，我们尝试求得它们的复合.交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "\eta_A"'] & GF(A) \arrow[d, "\mathrm{id}_{GF(A)}"] \\ GF(A) \arrow[r, "\mathrm{id}_{GF(A)}"] & GF(A) \end{tikzcd}$$

根据引理8.1知等价于

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\mathrm{id}_{F(A)}"] \arrow[d, "F(\eta_A)"'] & F(A) \arrow[d, "\mathrm{id}_{F(A)}"] \\ FGF(A) \arrow[r, "\epsilon_{F(A)}"] & F(A), \end{tikzcd}$$

即$\epsilon_{F(A)}\circ F(\eta_A) = \mathrm{id}_{F(A)}$，用交换图表示是

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "F\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}"'] & FGF \arrow[d, Rightarrow, "\epsilon F"] \\ & F. \end{tikzcd}$$

对偶地，交换图

$$\begin{tikzcd} FG(B) \arrow[r, "\mathrm{id}_{FG(B)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{FG(B)}"'] & FG(B) \arrow[d, "\epsilon_B"] \\ FG(B) \arrow[r, "\epsilon_B"] & B \end{tikzcd}$$

等价于

$$\begin{tikzcd} G(B) \arrow[r, "\eta_{G(B)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{G(B)}"'] & GFG(B) \arrow[d, "G(\epsilon_B)"] \\ G(B) \arrow[r, "\mathrm{id}_{G(B)}"'] & G(B), \end{tikzcd}$$

即$G(\epsilon_B)\circ\eta_{G(B)} = \mathrm{id}_{G(B)}$，用交换图表示是

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, Rightarrow, "\eta G"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}"'] & GFG \arrow[d, Rightarrow, "G\epsilon"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

定理 8.4. 给定函子对$F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$，则二者是伴随当且仅当存在自然变换$\eta:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\Rightarrow GF, \epsilon: FG\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$满足如下两幅交换图

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "F\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}"'] & FGF \arrow[d, Rightarrow, "\epsilon F"] \\ & F, \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, Rightarrow, "\eta G"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}"'] & GFG \arrow[d, Rightarrow, "G\epsilon"] \\ & G. \end{tikzcd}$$

证明. 之前的讨论我们已经证明了伴随可以给出单位和余单位，且满足交换图.

另一方面，给定$\mathcal{C}$中的对象A和$\mathcal{D}$中的对象B，我们需要证明满足交换图的自然变换η,ϵ给出了集合间的同构

$$\alpha_{A,B}:\hom_{\mathcal{D}}(F(A),B)\cong\hom_{\mathcal{C}}(A,G(B))$$

且满足在$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$中的自然性.习题8.13第一部分给出了想法.给定$f^\sharp: F(A)\to B$，定义

$$\alpha_{A,B}(f^\sharp) = f^\flat := G(f^\sharp)\circ\eta_A : A\to GF(A)\to G(B),$$

和

$$\begin{aligned} \hom_{\mathcal{D}}(F(A),B) &\leftarrow \hom_{\mathcal{C}}(A,G(B)) : \beta_{A,B} \\ g^\sharp := \epsilon_B\circ F(g^\flat) &\leftarrow\!\shortmid g^\flat, \end{aligned}$$

我们需要验证二者互逆和（任意一个的）自然性.

注意到

$$\begin{aligned}&\beta_{A,B}\circ\alpha_{A,B}(f^\sharp:F(A)\to B)\\=&\beta_{A,B}(G(f^\sharp)\circ\eta_A)\\=&\epsilon_B\circ FG(f^\sharp)\circ F(\eta_A),\end{aligned}$$

根据ϵ的自然性我们有

$$\begin{tikzcd} FGF(A) \arrow[r, "FG(f^\sharp)"] \arrow[d, "\epsilon_{F(A)}"'] & FG(B) \arrow[d, "\epsilon_B"] \\ F(A) \arrow[r, "f^\sharp"'] & B, \end{tikzcd}$$

即$\epsilon_B\circ FG(f^\sharp)=f^\sharp\circ\epsilon_{F(A)}$，于是

$$\epsilon_B\circ FG(f^\sharp)\circ F(\eta_A)=f^\sharp\circ\epsilon_{F(A)}\circ F(\eta_A)=f^\sharp,$$

这样$\beta_{A,B}\circ\alpha_{A,B}=\mathrm{id}$.同理可以证明$\alpha_{A,B}\circ\beta_{A,B}=\mathrm{id}$.

$\alpha_{A,B}$关于$\mathcal{D}$的自然性是交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f^\flat"] \arrow[dr, "(h\circ f^\sharp)^\flat"'] & G(B) \arrow[d, "G(h)"] \\ & G(D). \end{tikzcd}$$

□

8.3.2 反变伴随和多变量伴随

命题 8.5. 给定协变函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，满足对任意$\mathcal{D}$中的对象$B$，都能找到$\mathcal{C}$中的对象$G(B)$，满足

$$\hom_{\mathcal{D}}(F(A),B)\cong\hom_{\mathcal{C}}(A,G(B))$$

对任意$\mathcal{C}$中的对象A成立且关于A自然，则存在唯一的方式使得对应$B\mapsto G(B)$扩张为一个函子$G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$，右伴随于$F$.

证明. □

定理 8.6. 若双函子$F:\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$满足对任意$\mathcal{C}$中的对象$A$，函子$F(A,-):\mathcal{D}\to\mathcal{E}$都有一个右伴随函子$G_A:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$，那么存在唯一一个双函子

$$G:\mathcal{C}^\circ\times\mathcal{E}\to\mathcal{D}$$

满足$G(A,-)=G_A$，且同构

$$\hom_{\mathcal{E}}(F(A,B),C)\cong \hom_{\mathcal{D}}(B,G(A,C))$$

关于对象$A\in \operatorname{ob}\mathcal{C},B\in \operatorname{ob}\mathcal{D},C\in \operatorname{ob}\mathcal{E}$都自然.

若对$\mathcal{D}$中的任意对象B，函子$F(-,B)$还存在右伴随$H_B:\mathcal{E}\to\mathcal{C}$，那么

1. 存在唯一的双函子$H:\mathcal{D}^\circ\times\mathcal{E}\to\mathcal{C}$满足$H(B,-)=H_B$且同构

$$\hom_{\mathcal{E}}(F(A,B),C)\cong \hom_{\mathcal{D}}(B,G(A,C))\cong \hom_{\mathcal{C}}(A,H(B,C))$$

   关于对象$A\in \operatorname{ob}\mathcal{C},B\in \operatorname{ob}\mathcal{D},C\in \operatorname{ob}\mathcal{E}$都自然，

2. 对任意对象$C\in \operatorname{ob}\mathcal{E}$，$G(-,C):\mathcal{C}^\circ\to\mathcal{D}$和$H(-,C):\mathcal{D}^\circ\to\mathcal{C}$互为右伴随.

定义. 给定双函子$F:\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E},G:\mathcal{C}^\circ\times\mathcal{E}\to\mathcal{D},H:\mathcal{D}^\circ\times\mathcal{E}\to\mathcal{C}$，若存在关于对象$A\in \operatorname{ob}\mathcal{C},B\in \operatorname{ob}\mathcal{D},C\in \operatorname{ob}\mathcal{E}$都自然的同构

$$\hom_{\mathcal{E}}(F(A,B),C)\cong \hom_{\mathcal{D}}(B,G(A,C))\cong \hom_{\mathcal{C}}(A,H(B,C))$$

则称(F,H,G)组成双变量伴随(two-variable adjunction).

8.3.3 一些计算

命题 8.7.

命题 8.8.

习题 8.11. 求证嵌入函子

$$U:\mathbf{Gp}\hookrightarrow\mathbf{Mon}$$

同时有左右伴随.

证明. 对于函子U的左伴随，这是一个自由-遗忘伴随

$$L:\mathbf{Mon}\leftrightarrows\mathbf{Gp}:U,$$

其中函子L给出幺半群M的局部化（或者称为完备化），具体而言

对于函子U的右伴随，

$$U : \mathbf{Gp} \leftrightarrows \mathbf{Mon} : (-)^{\times}$$

$\square$

习题 8.12. 设范畴$\mathcal{C},\mathcal{D}$间的函子$F:\mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}:G$为左右伴随，证明$\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$当且仅当这个伴随给出的单位$\eta$和余单位$\epsilon$都是自然同构.

习题 8.13. 给定范畴$\mathcal{C},\mathcal{D}$和它们之间的函子$F:\mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D}:G$.

1. 若F,G为左右伴随，伴随给出了单位η和余单位ϵ，求证对任意$\mathcal{C}$中的对象A和$\mathcal{D}$中的对象B，复合映射

$$\hom_{\mathcal{C}}(A,G(B)) \xrightarrow{F} \hom_{\mathcal{D}}(F(A),FG(B)) \xrightarrow{\epsilon_B\circ -} \hom_{\mathcal{D}}(F(A),B)$$

恰好是$\alpha_{A,B}^{-1}$.对偶地，复合映射

$$\hom_{\mathcal{D}}(F(A),B) \xrightarrow{G} \hom_{\mathcal{C}}(GF(A),G(B)) \xrightarrow{-\circ\eta_A} \hom_{\mathcal{C}}(A,G(B))$$

是$\alpha_{A,B}$.

2. 若存在自然变换$\eta:\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF,\epsilon:FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$满足定理8.4中的两幅交换图，则定理8.4给出的伴随恰好是η,ϵ.

证明. 1. 我们只证明前半部分.伴随在$\mathcal{C}$中的自然性说明存在交换图

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[d, "F(k)"'] \arrow[dr, "(g^\flat\circ k)^\sharp"] & \\ F(C) \arrow[r, "g^\sharp"'] & D, \end{tikzcd}$$

其中$k:A\to C$是$\mathcal{C}$中的态射，$g^\sharp:F(C)\to D$是$\mathcal{D}$中的态射.取$C=G(B),D=B$且$g^\sharp:A\to G(B)$，则对于任意$\mathcal{C}$中的态射$k=f^\flat:A\to G(B)$，交换图为

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[d, "F(f^\flat)"'] \arrow[dr, "(\mathrm{id}_{G(B)}\circ f^\flat)^\sharp"] & \\ FG(B) \arrow[r, "\epsilon_B"'] & B, \end{tikzcd}$$

这就是所需要的.

2. 我们需要证明习题第一部分定义的$\alpha_{A,B}$满足$\eta_A=\alpha_{A,F(A)}(\mathrm{id}_{F(A)}):GF(A)\to A$和$\epsilon_B=\alpha_{G(B),B}(\mathrm{id}_{G(B)}):FG(B)\to B$，但这根据定义是明显的.

$\square$

习题 8.14. 给定伴随$F_1:\mathcal{C}_1 \leftrightarrows \mathcal{D}_1:G_1$和$F_2:\mathcal{C}_2 \leftrightarrows \mathcal{D}_2:G_2$，若函子$H:\mathcal{C}_1\to\mathcal{C}_2$和$K:\mathcal{D}_1\to\mathcal{D}_2$满足$KF_1=F_2H,G_2K=HG_1$，即有交换图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "H"] \arrow[d, "F_1"'] & \mathcal{C}_2 \arrow[d, "F_2"] \\ \mathcal{D}_1 \arrow[r, "K"] & \mathcal{D}_2 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}_1 \arrow[r, "H"] & \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{D}_1 \arrow[r, "K"] \arrow[u, "G_1"] & \mathcal{D}_2, \arrow[u, "G_2"'] \end{tikzcd}$$

求证如下条件等价

1. $H\eta_1 = \eta_2 H$，其中η_i是伴随对应的单位，

2. $K\epsilon_1 = \epsilon_2 K$，其中$\epsilon_i$是伴随对应的余单位，

3. 态射的换位与H, K是交换的，即有交换图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{D}_1}(F_1(A), B) \arrow[r, "\alpha_{A,B}"] \arrow[d, "K"] & \hom_{\mathcal{C}_1}(A, G_1(B)) \arrow[d, "H"] \\
\hom_{\mathcal{D}_2}(KF_1(A), K(B)) \arrow[d, equal] & \hom_{\mathcal{C}_2}(H(A), HG_1(B)) \arrow[d, equal] \\
\hom_{\mathcal{D}_2}(F_2H(A), K(B)) \arrow[r, "\beta_{H(A),K(B)}"] & \hom_{\mathcal{C}_2}(H(A), G_2K(B))
\end{tikzcd}$$

称满足这样条件的一对函子(H, K)是伴随的态射(morphism of adjunctions)$(F_1, G_1) \to (F_2, G_2)$.

证明. 根据习题8.13，$\alpha_{A,B} : f \mapsto G(f) \circ \epsilon_B$且$\beta_{H(A),K(B)} : g \mapsto G(g) \circ \epsilon_{K(B)}$ □

习题 8.15. 设范畴$\mathcal{C}, \mathcal{D}$间的函子$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$互为左右伴随，对任意给定的函子$H : \mathcal{J} \to \mathcal{C}, K : \mathcal{J} \to \mathcal{D}$，构造自然的同构

$$\mathrm{Nat}(F \circ H, K) \cong \mathrm{Nat}(H, G \circ K).$$

结合习题这实际上说明了$F : \mathcal{C} \rightleftarrows \mathcal{D} : G$诱导了伴随函子

$$F_* : \mathrm{Funct}(\mathcal{J}, \mathcal{C}) \rightleftarrows \mathrm{Funct}(\mathcal{J}, \mathcal{D}) : G_*.$$

证明. 分别记$\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$和$\epsilon : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$为伴随的单位和余单位，那么对任意$\alpha : F \circ H \Rightarrow K$，$G\alpha$是自然变换$GF \circ H \Rightarrow GK$，复合$\eta H$得到$G\alpha \circ \eta H : H \Rightarrow GF \circ H \Rightarrow GK$.对偶地任意给定$\xi : H \Rightarrow G \circ K$，$F\xi$是自然变换$FH \Rightarrow FG \circ K$复合$\epsilon K$得到$\epsilon K \circ F\xi : FH \Rightarrow FG \circ K \Rightarrow K$.这样有映射

$$\begin{aligned}
\mathrm{Nat}(F \circ H, K) &\rightleftarrows \mathrm{Nat}(H, G \circ K) \\
\alpha &\mapsto G\alpha \circ \eta H \\
\epsilon K \circ F\xi &\leftarrow\!\shortmid \xi.
\end{aligned}$$

接下来只要验证二者互逆.

根据$\epsilon : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$的自然性，对任意$\mathcal{D}$中的对象$A, B$和态射$f : A \to B$，有交换图

$$\begin{tikzcd}
FG(A) \arrow[r, "\epsilon_A"] \arrow[d, "FG(f)"'] & A \arrow[d, "f"] \\
FG(B) \arrow[r, "\epsilon_B"] & B,
\end{tikzcd}$$

对任意$\mathcal{E}$中的对象X，取上图中$A = FH(X), B = K(X), f = \alpha_X : FH(X) \to K(X)$，那么有交换图

$$\begin{tikzcd}
FGFH(X) \arrow[r, "\epsilon_{FH(X)}"] \arrow[d, "FG(\alpha_X)"'] & FH(X) \arrow[d, "\alpha_X"] \\
FGK(X) \arrow[r, "\epsilon_{K(X)}"] & K(X),
\end{tikzcd}$$

根据对象选取的任意性，即交换图

$$\begin{tikzcd} FH \arrow[r, Rightarrow, "F\eta H"] & FGFH \arrow[r, Rightarrow, "\epsilon FH"] \arrow[d, Rightarrow, "FG\alpha"'] & FH \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"] \\ & FGK \arrow[r, Rightarrow, "\epsilon K"] & K. \end{tikzcd}$$

因此之前构造映射的复合给出

$$\begin{aligned} \alpha \mapsto G\alpha \circ \eta H \mapsto \epsilon K \circ F(G\alpha \circ \eta H) \\ &= \epsilon K \circ FG\alpha \circ F\eta H \\ &= \alpha \circ \epsilon FH \circ F\eta H \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

其中倒数第二步的等号用到了刚刚证明的交换图，最后一步用到了8.3.1节中单位和余单位的性质.这证明了一方面的逆，另一方面的对偶地可证.

如上构造的自然性是明显的. □

习题 8.16. 设范畴$\mathcal{C},\mathcal{D}$间的函子$F:\mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D}:G$互为左右伴随，利用单位$\eta:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\Rightarrow G\circ F$和余单位$\epsilon:F\circ G\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$（定理8.4，而不是如习题8.15中的直接构造）证明

1. 对任意指标范畴$\mathcal{J}$，F,G诱导了伴随$F_*:\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{C})\rightleftarrows\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{D}):G_*$，
2. 对任意局部小范畴$\mathcal{E}$，F,G诱导了伴随$G^*:\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{E})\rightleftarrows\mathrm{Funct}(\mathcal{D},\mathcal{E}):F^*$.

证明. 根据习题7.17，存在自然变换

$$\eta_*:\mathrm{id}_{\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{C})}\Rightarrow G_*\circ F_*$$

和

$$\epsilon_*:F_*\circ G_*\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{D})},$$

于是单位和余单位关系 □

8.4 极限和余极限

范畴理论始终希望统一地解决结构性的问题。在8.1节中我们讨论了Yoneda引理，它提供了一种途径。但是它始终需要借助外部范畴来讨论。我们希望用范畴内部的语言建立统一的框架来描述结构。首先我们还是考虑简单的情形：假设有一个两边无界的集合列

那么集合范畴中，有两个对象是特殊的，分别是.......和........。首先它们两个与这个集合列是相容的——对任意$i<j$，有..... 并且任意被所有X_i包含的集合都被...包含，且任意包含所有X_i的集合都包含... 这可以说......是该列的上下界，是集合范畴中距离该列“最近”的对象。当我们把包含用单射代替时，之前的观察恰好是某一种泛性质。更广泛地说，如果存在范畴当中一族相容的箭头，那么从这族箭头映出或映入的所有具有泛性质的对象就是我们所想研究的，这也就是极限和余极限。本节我们会给出定义，说明只要给出适当的一族箭头，它可以几乎包含所有的有用的结构。之后，会讨论极限和余极限的函子性和它们与其他函子的关系.

8.4.1 由图确定的极限和余极限

我们首先回顾之前在习题中提到的一些术语：一个图是一个函子.... 其中范畴... 称为图的形状（shape），任取...中的对象A，存在常值函子

...

将任意...中的对象映为A，任意....中的态射映为...，对范畴...我们有对角嵌入

...

将对象A映射到常值函子...，映射...映为自然同态....

定义. 给定图$F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$，称自然变换$\lambda : \mathrm{Const}_A \Rightarrow F$为图$F$上的锥(cone over the diagram F)，其中对象A称为锥的顶点(summit, apex)，对于...中的对象......称为锥的支架（leg）

我们尝试把一个锥的信息具体地写出来。当给定自然变换λ后，考虑到...只能映到对象A与态射...，故一个自然变换交换图即为

其中...是J中的态射。因而，一个锥给出的信息就是一族态射...满足与F的“象”相容。

对偶地，我们可以定义图...下的锥(cone under the diagram F)（或者叫做余锥(cocone)），是一个自然变换... 对象A称为底点（nadir）。同前，图下的锥包含的信息是一族被称为支架（legs）的态射... 满足如下

（图）

对任意J中的对象j,k都成立的相容性。

现在我们限制考虑的对象与态射——它们组成...的子范畴...，对象A在范畴中当且仅当存在图F上的锥....，.... 在范畴中当且仅当f与两个锥相容。具体来说，若... 和... 是两个锥，则有

（图）

即交换图（右）对所有... 成立。假设我们定义函子

...

把对象A映到所有的以A为顶点的F上的锥的集合，将... 映到 ... 。这个集合间的映射将... 映为 ... 。这样刚刚描述的范畴同构于 ...

定义. 给定图$F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$，范畴$\int^{\mathcal{C}} \mathrm{Cone}(-, F)$的终对象（若存在）称为图$F$的极限(limit)，记为$\lim F$.

具体地说，图F的极限是...中的一个对象 lim F 和 ...的态射，使得它们构成图...上的锥，且对于任意图上的锥... 都只有唯一的态射... 使得所有的图都相容。

对偶地，给定图$F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$，我们可以考虑函子

将... 中的对象A映为以A为底点的F下的锥的集合，将态射... 映到... 。于是称范畴$\int^{\mathcal{C}} \mathrm{Cone}(F, -)$的始对象（若存在）称为图$F$的余极限(colimit)，记为colim F.

如上定义意味着$\lim F$存在当且仅当$\mathrm{Cone}(-, F)$是可表函子（命题8.2），其代表元恰是$\lim F$.

例 8.8. 设J是空范畴，F是... 的函子，于是... 即为... 本身。因而，lim F 即是... 的终对象。对偶地 F的余极限 colim是... 的始对象。

例 8.9. 设J是小范畴，且对任意... 这样的范畴被称为离散范畴（discrete category)。如前例，我们只有唯一的函子... 考虑lim F是... 中的元素。满足对任意... 中的对象B，若有... 则有唯一的态射... 相容。这恰是...的泛性质，故... 同理，

例 8.10. 38) 设J是范畴... 那么取定... 即是... 中的元素 A, B, C 和 ... 于是，F中的锥X是一个交换图

（图）

故lim F满足纤维积（拉回）的泛性质，因而 ... 。对偶地，若... 是反变函子，colim G是推出。

例 8.11. 38) 设J是范畴 ... ，那么函子... 给出的信息是范畴中的两个对象 A=F(0) 和 B=F(1)，和两个态射 ... ，我们称函子F的极限lim F （若存在）为f与g的等值子（equalizer）。它满足对任意... 和 ... ，若... 则存在唯一的分解... 。对偶地，F的余极限被称为余等值子（coequalizer)。关于极限与余极限，它们还具有函子性。但更多地我们可以在证明中发现，函子性由定义轻松地保证，可以理解为函子性意味着部分极限与整体极限相容。

命题 8.9. *设F，G是范畴...中以J为形状的图... 是自然变换，则存在... 与图都相容。*

证明. ：任取J中的对象i,j，我们有交换图

（图）

故lim F是一个G上的锥。由lim G的定义，存在唯一的态射... 与所有的图相容，这即是要找的。

对偶地，对于余极限colim，一个自然变换... 给出lim G是F下的锥，由colim F定义存在唯一的... 于是我们证明了... 与... 都是协变函子。 □

当J取为所有小基数的范畴... 时（这是个偏序集），极限也被称为逆极限（inverse limit）或投影极限(projective limit)。余极限也被称为正极限（direct limit）或诱导极限（inductive limit）。

定理 8.10. *设J是小范畴，$F : J \to \mathcal{C}$是范畴$\mathcal{C}$上的图.若$\mathcal{C}$中的任意等值子存在且积$\prod_{j\in J} F(j)$和$\prod_{f\in \mathrm{mor}\ J} F(\mathrm{codom}\ f)$，那么极限$\lim_J F$存在.*

证明. 考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & F(\mathrm{codom}\ f) \\
\lim_J F \arrow[r] & \prod_{j\in J} F(j) \arrow[ur, "\pi_{\mathrm{codom}\ f}"] \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{dom}\ f}"] & \prod_{f\in \mathrm{mor}\ J} F(\mathrm{codom}\ f) \arrow[u, "\pi_f"'] \arrow[d, "\pi_f"] \\
 & F(\mathrm{dom}\ f) \arrow[r, "F(f)"] & F(\mathrm{codom}\ f),
\end{tikzcd}$$

其中根据积的泛性质，h由自然的投影$h_f : \prod_{j\in J} F(j) \xrightarrow{\mathrm{pr}} F(\mathrm{codom}\ f)$诱导，$g$由复合$g_f : \prod_{j\in J} F(j) \xrightarrow{F(f)\circ\pi_{\mathrm{codom}\ f}} F(\mathrm{codom}\ f)$诱导. □

命题 8.11.

定理 8.12.

$$
\begin{tikzcd}
F(\mathrm{dom}\ f) \arrow[d, "\iota_f"] \arrow[dr, "\iota_{\mathrm{dom}\ f}"] & & \\
\coprod_{f\in \mathrm{mor}\ J} F(\mathrm{dom}\ f) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \coprod_{j\in J} F(j) \arrow[r, two heads] & \mathrm{colim}_J F \\
F(\mathrm{dom}\ f) \arrow[u, "\iota_f"] \arrow[r, "F(f)"] & F(\mathrm{codom}\ f) \arrow[u, "\iota_{\mathrm{codom}\ f}"'] &
\end{tikzcd}
$$

命题 8.13. 设$\mathcal{J}$是小范畴，则对任意图$F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$，只要$\lim_{\mathcal{J}} F$存在，那么对任意的$A\in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，存在自然同构

$$\hom_{\mathcal{C}}(A,\lim_{\mathcal{J}} F)\cong \lim_{\mathcal{J}} \hom_{\mathcal{C}}(A,F).$$

对偶地，

习题 8.17. 给定图$F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$，求证

$$\lim_{\mathcal{J}} F\cong \mathrm{colim}_{\mathcal{J}^\circ} F^\circ.$$

习题 8.18. 求证若$\mathcal{J}$中含有终对象$\{*\}$，则对任意图$F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$，

$$\mathrm{colim}_{\mathcal{J}} F\cong F(\{*\}).$$

习题 8.19. 给定一个小范畴$\mathcal{J}$，回顾练习7.13，记i_0是自然的嵌入函子$\mathcal{J}\to\mathcal{J}\times[1]$，将对象$j$映到$(j,0)$，求证推出图

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{J} \arrow[r] \arrow[d, "i_0"'] & {[0]} \arrow[d] \\
\mathcal{J}\times[1] \arrow[r] & \mathrm{Cone}(\mathcal{J})
\end{tikzcd}
$$

定义的范畴$\mathrm{Cone}(\mathcal{J})$给出了以$\mathcal{J}$为图的锥，准确地说对任意图$F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$，满足$\tilde{F}\circ i_0=F$的函子$\tilde{F}:\mathrm{Cone}(\mathcal{J})\to\mathcal{F}$给出了$F$上的锥，且$F$上的所有锥都由此给出.

如果取嵌入i_1则得到范畴$\mathrm{Cocone}(\mathcal{J})$，它的图与$\mathcal{J}$下的锥对应.

习题 8.20. 给定指标范畴$\mathcal{J}$，证明若范畴$\mathcal{C}$满足对任意图$F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$极限$\lim_{\mathcal{J}} F$都存在，那么任意图$G:j\backslash\mathcal{J}\to\mathcal{C}$的极限也都存在.

习题 8.21. 任意给定小范畴$\mathcal{J}$和局部小范畴$\mathcal{C}$，那么任意给定的两个函子$F,G:\mathcal{J}\rightrightarrows\mathcal{C}$都有等值子图

$$\begin{tikzcd}
 & \hom_{\mathcal{C}}(F(\mathrm{codom}\ f), G(\mathrm{codom}\ f)) \arrow[r, "F(f)^*"] & \hom_{\mathcal{C}}(F(\mathrm{dom}\ f), G(\mathrm{codom}\ f)) \\
\mathrm{Nat}(F,G) \arrow[r] & \prod_{j\in J}\hom_{\mathcal{C}}(F(j),G(j)) \arrow[u, "\pi_{\mathrm{codom}\ f}"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{dom}\ f}"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{f\in \mathrm{mor}\ J}\hom_{\mathcal{C}}(F(\mathrm{dom}\ f), G(\mathrm{codom}\ f)) \arrow[u, "\pi_f"'] \arrow[d, "\pi_f"] \\
 & \hom_{\mathcal{C}}(F(\mathrm{dom}\ f), G(\mathrm{dom}\ f)) \arrow[r, "G(f)_*"] & \hom_{\mathcal{C}}(F(\mathrm{dom}\ f), G(\mathrm{codom}\ f)).
\end{tikzcd}$$

习题 8.22. 设$\mathcal{C}$是一个小范畴，$\mathcal{D}$是一个上完备的局部小范畴，考虑2函子

$$S:\mathcal{C}^\circ\times\mathcal{C}\to\mathcal{D},$$

那么我们称f_*与f^*的上等值子

$$\prod_{f:A_0\to A_1} S(A_0,A_1)\rightrightarrows\prod_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}} S(A,A)$$

为S的上终止(co-end)，其中f_*是复合$S(A_0,A_1)\xrightarrow{S(f,\mathrm{id})}S(A_1,A_1)\hookrightarrow\prod_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S(A,A)$，$f^*$是复合$S(A_0,A_1)\xrightarrow{S(\mathrm{id},f)}S(A_0,A_0)\hookrightarrow\prod_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S(A,A)$，记为$\int_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S(A,A)$.

1. 求证$\int^{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S$具有如下泛性质：对任意$\mathcal{C}$中的态射$f:A_1\to A_0$，存在唯一的$\varphi_{A_0}$和$\varphi_{A_1}$使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
S(A_0,A_1) \arrow[r, "S(A_0,f)"] \arrow[d, "S(f,A_1)"] & S(A_1,A_1) \arrow[d, "\varphi_{A_0}"] \\
S(A_0,A_0) \arrow[r, "\varphi_{A_1}"] & \int_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S(A,A),
\end{tikzcd}$$

并且对满足如此交换图性质的所有对象，$\int_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S(A,A)$是始对象.

2. 求证

$$\int_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S(A,A)\cong\mathrm{colim}_{\int_{\mathrm{Tw}(\mathcal{C})}\hom}\pi^*(S),$$

其中$\mathrm{Tw}(\mathcal{C})$是$\mathcal{C}$的扭曲箭头范畴（习题8.10），$\pi:\mathrm{Tw}(\mathcal{C})\to\mathcal{C}^\circ\times\mathcal{C}$是自然的忘却函子.

3. 设R是环，F,G是函子$F:\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Mod}-R$和$G:\mathcal{C}\to R-\mathbf{Mod}$.定义函子$S:=F\boxplus_R G:\mathcal{C}^\circ\times\mathcal{C}\to\mathbf{Ab}$，将对象$(A,B)$映为$F(A)\otimes_R G(B)$，将态射$(f:C\to A,g:B\to D)$映到$F(f)\boxtimes_R G(g):F(A)\otimes_R G(B)\to F(C)\otimes_R G(D),x\otimes y\mapsto F(f)(x)\otimes G(g)(y)$.在此基础上定义对象

$$F\otimes_{A,R}G:=\int^{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}F(f)\boxtimes_R G(g).$$

若函子$R^\circ[\hom_{\mathcal{C}}(-,A)]:\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Mod}-R$，将对象$C$映到$\hom_{\mathcal{C}}(C,A)$生成的自由$R$模，证明

$$R^\circ[\hom_{\mathcal{C}}(-,A)]\otimes_{A,R}G\cong G(A).$$

证明对R作为自己的右模的常值函子$Const_R:\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Mod}-R$满足

$$Const_R\otimes_{A,R}G\cong\mathrm{colim}_{\mathcal{C}}G.$$

第四部分

线性空间和表示理论

第九章　线性形式

习题 9.1. 设V是有限维的F向量空间，且$\mathrm{char}\,F \neq 2$.对域扩张F/F，定义二次型$q: V \to F$的基变换为

$$\begin{gathered} q_E : E \otimes_F V \to E \\ a \otimes v \mapsto a^2 q(v). \end{gathered}$$

1. 若q是迷向的，且$[E:F]$是奇数，求证q_E也是迷向的.
2. 以上叙述在$[E:F]$是偶数时是否成立？

9.1　外形式

第十章　代数理论

10.1　代数及其范畴

我们首先用范畴的方式重述环的定义.注意到含幺环$(R,+,\cdot,0,1)$首先是一个Abel群$(R,+,0)$，并且带有一个乘法结构，乘法的分配律说明乘法实际上是一个满足一定性质Abel群同态

$$\begin{aligned} R\times R &\to R \\ (r,s) &\mapsto r\cdot s, \end{aligned}$$

根据张量积的泛性质，这对应到Abel群同态

$$\begin{aligned} \mu: R\otimes_{\mathbb{Z}} R &\to R \\ r\otimes s &\mapsto r\cdot s. \end{aligned}$$

此时，结合律可以描述为交换图

$$\begin{tikzcd} R\otimes_{\mathbb{Z}} R\otimes_{\mathbb{Z}} R \arrow[r, "{(\mu,\mathrm{id}_R)}"] \arrow[d, "{(\mathrm{id}_R,\mu)}"'] & R\otimes_{\mathbb{Z}} R \arrow[d, "\mu"] \\ R\otimes_{\mathbb{Z}} R \arrow[r, "\mu"] & R, \end{tikzcd}$$

单位元可视作环同态$\eta:\mathbb{Z}\to R$，因为规定中同态必将单位元映到单位元（在此情形下有唯一一个同态），明显地单位元的性质给出了交换图

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}\otimes_{\mathbb{Z}} R = R = R\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z} \arrow[r, "{(\mathrm{id},1)}"] \arrow[d, "{(1,\mathrm{id})}"'] \arrow[dr, equal] & R\otimes_{\mathbb{Z}} R \arrow[d, "\mu"] \\ R\otimes_{\mathbb{Z}} R \arrow[r, "\mu"'] & R. \end{tikzcd}$$

$\mathbb{Z}-\mathbf{Alg}\cong\mathbf{Ring}$

在本章和之后的内容中，代数都特定指代结合代数，其他类型的代数（如李代数）都会特别指出.

定理 10.1. *给定R模M，存在R代数T_RM和模的嵌入$\iota: M\to T_RM$，满足对任意的R代数A和R模同态*

$$\varphi: M\to A,$$

都存在唯一的R代数同态$\tilde{\varphi}: T_RM\to A$满足交换图

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\iota"] \arrow[dr, "\varphi"'] & T_R M \arrow[d, dashed, "\tilde{\varphi}"] \\ & A. \end{tikzcd}$$

证明. 构造

$$T_R M := \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_R^n M = \bigoplus_{n=0}^{\infty} M^{\otimes n},$$

其中 □

10.1.1 增广代数

定义. 给定R代数A，若存在R代数同态$\epsilon : A \to R$，则称A是增广R代数(augmented R-algebra)

任意给定增广R代数A，$\operatorname{Ker} \epsilon$称为$A$的增广理想(augmentation ideal)，记为$\bar{A}$.反过来，对任意的（可能不包含单位的）R代数I，存在对应的增广R代数

$$I_+ := R \oplus I$$

满足乘法

$$(a, x)(b, y) := (ab, ay + bx + xy),$$

我们有

命题 10.2. *存在伴随*

$$(-)_+ : R - \mathbf{Alg}^{\text{non}} \leftrightarrows R - \mathbf{Alg}_{/R} : \overline{-}$$

证明. 我们需要证明

$$\hom_{R-\mathbf{Alg}_{/R}}(I_+, A) \cong \hom_{R-\mathbf{Alg}^{\text{non}}}(I, \overline{A})$$

□

习题 10.1. 这个习题中我们对范畴$R - \mathbf{Alg}$稍作推广，得到新的范畴$R - \mathbf{ALG}$，满足$\operatorname{ob} R - \mathbf{ALG} := \operatorname{ob} R - \mathbf{Alg}$，给定$R$代数$A, B$，

$$\hom_{R-\mathbf{ALG}}(A, B) := \{{}_A M_B \mid {}_A M_B \text{是}(A, B)\text{双模且作为右}B\text{模是投射且有限生成的}\},$$

求证复合${}_B N_C \circ_A M_B$给出一个范畴结构.

定理 10.3. 给定有限生成的自由R模$M := R^n$，则存在范畴的等价

$$R-\mathbf{Alg} \leftrightarrows_{\mathrm{End}_R(M)\backslash} R-\mathbf{Alg}.$$

证明. 给定

定理1.3 □

10.1.2 余代数和双代数

定义.

10.1.3 Hopf代数

例 10.1. 定理10.1中构造的T_RM上有两个自然的余代数结构：

1. 第一个

$$\Delta : T_R^nM \to \bigoplus_{k=0}^{n} T_R^kM \otimes_R T_R^{n-k}M$$

$$\Delta : T_RM \to T_RM \otimes_R T_RM,$$
$$1 \mapsto 1 \otimes 1$$
$$m_1 \otimes \cdots \otimes m_n \mapsto$$

例 10.2. 1. 任意给定群G和域k，群代数$k[G]$是一个Hopf代数

引理 10.1. 给定交换环R和R-*Hopf*代数H_1, H_2，则$H_1 \otimes_R H_2$也是*Hopf*代数，其中

$$\Delta(\alpha \otimes \beta) = \Delta(\alpha) \otimes \Delta(\beta).$$

10.2 Morita理论

给定右R模M，记

$$M^* := \mathrm{Hom}_R(M, R).$$

此时，M^*不仅是左R模，同时也是右$\mathrm{End}_R(M)$模.

引理 10.2. 给定$R-S$双模M，M^*是$S-R$双模.

定义. 给定右R模M，称

$$\mathrm{Tr}(M) := \sum_{f \in M^*} f(M) \subseteq R$$

为M的迹理想(trace ideal).

由于M是右模，$\mathrm{Tr}(M)$也是一个右理想，但它同时还是一个左理想：

考虑

$$\begin{aligned} \varphi : M^* \otimes_{\mathrm{End}_R(M)} M &\to R \\ (f, m) &\mapsto f(m), \end{aligned}$$

显然这是一个同态，按定义$\mathrm{Tr}(M) = \mathrm{Im}\,\varphi$.对偶地，同态

$$\begin{aligned} \psi : M \otimes_R M^* &\to \mathrm{End}_R(M) \\ (m, f) &\mapsto (x \mapsto x \cdot f(m)) \end{aligned}$$

的像被称为对偶迹理想(dual trace ideal).

定义. 范畴$\mathcal{C}$中的对象P若满足$h^P := \hom_{\mathcal{C}}(P, -)$是忠实的，则称$P$是$\mathcal{C}$的一个生成元(generator).

命题 10.4. 范畴$\mathbf{Mod}-R$中的模P是生成元当且仅当$P^*P = \mathrm{Tr}(P) = R$.

推论 10.4.1. 若R是单环，则任意R模都是生成元.

例 10.3. $A_1 = \frac{k\langle x,y\rangle}{[x,y]=1}$是单环.

习题 10.2. R模P是生成元当且仅当存在R模Q使得

$$P \oplus Q \cong P^{\oplus N}.$$

引理 10.3. 范畴$\mathbf{Mod}-R$中的投射模P是生成元当且仅当h^P将非零对象映为非零对象.

10.2.1

我们的想法来自于如下事实：任意给定有限生成的投射模P，存在自然的同构

$$\begin{aligned}\alpha_P : P &\xrightarrow{\sim} P^{**}\\ x &\mapsto (P^* \to R, f \mapsto f(x)).\end{aligned}$$

引理 10.4. 1. $(-)^*$是左正合的反变函子，

2. 若R是左*Noether*的且M是有限生成的右R模，则M^*是有限生成的左R模.

命题 10.5. 给定左右*Noether*环R上的有限生成模M，那么自然的映射

$$\begin{aligned}\alpha_M : M &\xrightarrow{\sim} M^{**}\\ x &\mapsto (M^* \to R, f \mapsto f(x))\end{aligned}$$

是单射当且仅当M是有限生成自由模的子模.

定理 10.6 (对偶基引理(Dual basis lemma))**.** 给定有R模P，那么

1. P是投射的当且仅当存在$\{x_i\}_{i\in I} \subseteq P$和$\{f_i\}_{i\in I} \subseteq P^*$，满足对任意的$x \in P$，只有有限多个$i \in I$满足$f_i(x) \neq 0$，并且
$$x = \sum_{i\in I} x_i f_i(x).$$
若满足$|I| < +\infty$，则也有对任意$f \in P^*$，
$$f = \sum_{i\in I} f(x_i) f_i.$$

2. P是有限生成的投射模当且仅当$PP^* = \mathrm{End}_R(P)$.

例 10.4. $A_1 = \frac{k\langle x,y\rangle}{[x,y]=1}$中的$P := \langle x^{n+1}, xy+n\rangle = \langle (\frac{\partial}{\partial z})^{n+1}, \frac{\partial}{\partial z} z + n\rangle$.

10.2.2

定理 10.7 (Watt)**.** 给定环R, S，$F : \mathbf{Mod} - R \to \mathbf{Mod} - S$是正合函子，且$F$保直和，那么

$$F \cong - \otimes_R Q,$$

其中$Q := F(R_R)$是$R-S$双模.

定理 10.8 (Morita)**.** 函子$F : \mathbf{Mod}-R \to \mathbf{Mod}-S$是范畴的等价当且仅当存在$R-S$双模$Q$，使得

$$F \cong - \otimes_R Q,$$

满足

1. Q是有限生成的投射生成元，
2. $\mathrm{End}_S(Q_S) \cong R$是环同态.

证明. 考虑伴随$\otimes$ □

第十一章　有限群的表示理论

11.1　群作用

设G是一个群.

定义. G空间

11.1.1　G模

定义. 给定Abel群A，若G在A上右一个（左）作用，则称A是一个G模(G-module).

注意到给定G模A等价于给定Abel群A和群同态$G \to \mathrm{Aut}(A)$.由于Abel群等同于$\mathbb{Z}$模，因而G模等同于$\mathbb{Z}[G]$模.

定义. 给定G模A，记
$$A^G := \{a \in A \mid g \cdot a = a\text{对所有}g \in G\text{成立}\}$$
是A中被G作用不变的元素的全体.

引理 11.1. *给定G模A和具有平凡作用的G模$\mathbb{Z}$，则*
$$A^G \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A).$$

证明. 任意给定$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$，由于$G$在$\mathbb{Z}$上的作用是平凡的，$\alpha(1) = \alpha(g \cdot 1) = g\alpha(1)$，于是映射
$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) &\to A^G\\ \alpha &\mapsto \alpha(1)\end{aligned}$$
是良定义的，这显然是一个Abel群同态.注意到$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$完全由$\alpha(1)$决定，因此这是一个单射；同时该映射是满射，得证. □

第五部分

进阶范畴论和群论

第十二章　进阶范畴理论

12.1　范畴中的代数对象

12.1.1　对象上的结构

我们还是从具体的例子来考虑.假设G是一个群，那么G本身作为一个集合也就是集合范畴中的对象.我们想用范畴的语言描述G的群结构时，自然的想法是G作为一个群，它的结构性质是否可以被范畴中的信息所刻画.这样我们无外乎要处理G中的单位元、乘法和求逆，而它们刚刚好可以从态射和它们的交换性得出.假设范畴$\mathcal{C}$满足：

1. 存在终对象E；
2. 对对象G，$G\times G$和$G\times G\times G$都存在.

如果我们有三个态射

$$\begin{aligned}
&\mu : G\times G\to G && \text{(multiplication)}\\
&i : G\to G && \text{(inversion)}\\
&e : E\to G && \text{(identity)}
\end{aligned}$$

满足以下交换图，分别被称为：结合性(associativity)

$$\begin{tikzcd}
G\times G\times G \arrow[r, "(\mu,\mathrm{id}_G)"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_G,\mu)"'] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\
G\times G \arrow[r, "\mu"] & G,
\end{tikzcd}$$

左右单位(left and right identity)

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id},1)"] \arrow[d, "(1,\mathrm{id})"'] \arrow[dr, equal] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\
G\times G \arrow[r, "\mu"'] & G
\end{tikzcd}$$

和左右逆(left and right inverses)

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "(\mathrm{id},i)"] \arrow[d, "(i,\mathrm{id})"'] \arrow[dr, equal] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\
G\times G \arrow[r, "\mu"'] & G,
\end{tikzcd}$$

其中$1: G \to G$是复合$G \to E \xrightarrow{e} G$，则称$G$是范畴$\mathcal{C}$中的**群对象**(group object)，三个态射称为G上的**群结构**(group structure).下面的命题说明这样的定义是合理的，于是在不同的范畴中我们有了群结构的推广：

命题 12.1. *集合范畴*$\mathbf{Set}$*中的对象*G*是群对象当且仅当*G*是一个群.*

证明. 范畴$\mathbf{Set}$中的终对象是$\{*\}$，因而对任意集合S，态射$\{*\} \to S$等同于确定S中的一个元素. □

定义. 若G, H是范畴$\mathcal{C}$中的群对象，态射$f: G \to H$满足

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu_G"] \arrow[d, "f \times f"'] & G \arrow[d, "f"] \\ H \times H \arrow[r, "\mu_H"] & H \end{tikzcd}$$

是交换图，则称f是一个同态(homomorphism).

定理 12.2. *设*G*是范畴*$\mathcal{C}$*中的对象，那么*G*是群对象当且仅当函子*$h_G := \hom_{\mathcal{C}}(-, G)$*有分解*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "h_G"] \arrow[d, dashed] & \mathbf{Set} \\ \mathbf{Gp}, \arrow[ur, "U"'] & \end{tikzcd}$$

其中$U: \mathbf{Gp} \to \mathbf{Set}$*是自然的忘却函子.*

证明. 假定G是群对象，则对任意$\mathcal{C}$中的对象A，可以定义$\hom_{\mathcal{C}}(A, G)$上的群结构

1. 乘法

$$\begin{aligned} * : \hom_{\mathcal{C}}(A, G) \times \hom_{\mathcal{C}}(A, G) &\to \hom_{\mathcal{C}}(A, G) \\ (g, h) &\mapsto \mu \circ (g \times h), \end{aligned}$$

   其中用到了同构$\hom_{\mathcal{C}}(A, G) \times \hom_{\mathcal{C}}(A, G) \cong \hom_{\mathcal{C}}(A, G \times G), (g, h) \mapsto g \times h$（命题8.13）.

2. 单位

$$e_* : \hom_{\mathcal{C}}(A, E) \to \hom_{\mathcal{C}}(A, G),$$

   由于E是终对象，该映射确定了$\hom_{\mathcal{C}}(A, G)$中的唯一元素，记为e_A.

3. 左逆

$$\begin{aligned} -^{-1} : \hom_{\mathcal{C}}(A, G) &\to \hom_{\mathcal{C}}(A, G) \\ g &\mapsto i \circ g. \end{aligned}$$

接下来需要验证相应的性质.

1. 结合律

$$\begin{aligned}(f*g)*h &:= (\mu\circ(f\times g))*h\\ &= \mu\circ((\mu\circ(f\times g))\times h)\\ &= \mu\circ((\mu\times \mathrm{id}_G)\circ((f\times g)\times h))\\ &\leftrightsquigarrow \mu\circ((\mathrm{id}_G\times\mu)\circ(f\times(g\times h)))\\ &= \mu\circ(f\times(\mu\circ(g\times h))\\ &=: f*(g*h)\end{aligned}$$

其中第三个等式用到了习题7.3，第四个对应用到了G定义的结合性与同构$(G\times G)\times G\cong G\times(G\times G)$.

2. 左单位

$$\begin{aligned}e_A*f &:= \mu\circ(e_A\times f)\\ &= \mu\circ((e\times\mathrm{id})\circ(*\times f))\\ &= (\mu\circ(e\times\mathrm{id}))\circ(*\times f)\\ &\leftrightsquigarrow \mathrm{id}\circ f = f\end{aligned}$$

其中最后一行的对应是左单位的定义.如上计算对应了交换图

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r] \arrow[rrr, bend left, equal] & E\times G \arrow[r, "(e\times\mathrm{id})"] & G\times G \arrow[r, "\mu"] & G \\ & A. \arrow[ul, "f"] \arrow[u, "e_A\times f"'] & & \end{tikzcd}$$

3. 左逆

$$\begin{aligned}f^{-1}*f &:= \mu\circ((i\circ f))\times f)\\ &= \mu\circ((i\times\mathrm{id})\circ(f\times f))\\ &= (\mu\circ(i\times\mathrm{id}))\circ(f\times f)\\ &\leftrightsquigarrow (\mu\circ(i,\mathrm{id}))\circ f\\ &= \mathrm{id}\circ f = f\end{aligned}$$

其中最后一行是左逆的定义.

这意味着$\hom_{\mathcal{C}}(A,G)$上有群结构，并且这个群结构关于A是自然的（这个可以从定义中得出，因为群结构都是关于固定态射的复合），于是$\hom_{\mathcal{C}}(-,G)$是函子$\mathcal{C}\to\mathbf{Gp}$.

反过来假设$h_G:=\hom_{\mathcal{C}}(-,G)$事实上是函子$\mathcal{C}\to\mathbf{Gp}$，对任意$\mathcal{C}$中的对象$A$，记群$\hom_{\mathcal{C}}(A,G)$的乘法为

$$\mu_A:\hom_{\mathcal{C}}(A,G)\times\hom_{\mathcal{C}}(A,G)\to\hom_{\mathcal{C}}(A,G),$$

群$\hom_{\mathcal{C}}(A,G)$的单位为

$$e_A:\hom_{\mathcal{C}}(A,E)\to\hom_{\mathcal{C}}(A,G),$$

群$\hom_{\mathcal{C}}(A,G)$的逆为

$$i_A:\hom_{\mathcal{C}}(A,G)\to\hom_{\mathcal{C}}(A,G),$$

若我们能证明三个变换关于A都是自然的（即这些是自然变换），则根据Yoneda引理（定理8.1），这些自然变换对应了态射

$$\mu:G\times G\to G$$
$$i:G\to G$$
$$e:E\to G,$$

群乘法的结合性、单位和逆的性质给出了μ,i,e所需要的条件.

任取$\mathcal{C}$中的态射$f:A\to B$，h_G的函子性说明$f^*:=\hom_{\mathcal{C}}(-,G)$是群同态，这意味着对任意的$g,h\in\hom_{\mathcal{C}}(A,G)$，关于乘法有

$$f^*(\mu_A(g,h))=\mu_B(f^*(g),f^*(h)),$$

即μ是自然变换；其余证明类似. □

同样地，我们可以用图的方式描述群作用.注意到我们在不同范畴中对作用映射的要求不同，比方说在集合范畴中作用只是普通的映射，但在拓扑范畴中作用就必然是连续的.这刚刚好可以用范畴的语言简单地表达

定义. 设G是范畴$\mathcal{C}$中的群对象，X是$\mathcal{C}$中的对象，且$G\times X, G\times G\times X$存在.那么群对象$G$在$X$上的作用(action)是一个态射$\sigma:G\times X\to X$，满足

$$\begin{tikzcd}
G\times G\times X \arrow[r, "(\mu,\mathrm{id}_X)"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_G,\sigma)"'] & G\times X \arrow[d, "\sigma"] \\
G\times X \arrow[r, "\sigma"] & X,
\end{tikzcd}$$

其中μ是群对象G的乘法.

定义. 给定$\mathcal{C}$中的群对象G和G作用的对象X,Y，若态射$f:X\to Y$满足

G等变

习题 12.1. 求证$\mathbf{Gp}$中的群对象是Abel群.

当我们在范畴中有一个用交换图定义的对象时，我们自然地会考虑它的对偶定义

12.2 单子和代数

12.2.1 来源于伴随的单子

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$和函子$\top : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，若有自然变换$\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \top$和$\mu : \top^2 \Rightarrow \top$，分别称为单位(identity)和乘法(multiplication)，满足交换图

$$\begin{tikzcd}
\top^3 \arrow[r, Rightarrow, "\top\mu"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu\top"'] & \top^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
\top^2 \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] & \top
\end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd}
\top \arrow[r, Rightarrow, "\top\eta"] \arrow[d, Rightarrow, "\eta\top"'] \arrow[dr, equal] & \top^2 \arrow[d, Rightarrow, "\mu"] \\
\top^2 \arrow[r, Rightarrow, "\mu"] & \top,
\end{tikzcd}$$

则称$(\top, \eta, \mu)$为一个单子(monad).

如果我们将μ类比为一个幺半群的乘法，第一个交换图是结合性的类比，第二个交换图是单位元的存在性（由η给出）.对偶地，$\mathcal{C}$上的余单子结构是$\mathcal{C}^{\circ}$上的单子结构，更具体地，

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$和函子$\perp : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，若有自然变换$\epsilon : \perp \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$和$\mu : \perp \Rightarrow \perp^2$，分别称为余单位(coidentity)和余乘法(comultiplication)，满足交换图

$$\begin{tikzcd}
\perp^3 & \perp^2 \arrow[l, Rightarrow, "\perp\Delta"'] \\
\perp^2 \arrow[u, Rightarrow, "\Delta\perp"] & \perp \arrow[l, Rightarrow, "\Delta"] \arrow[u, Rightarrow, "\Delta"']
\end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd}
\perp \arrow[r, Rightarrow, "\Delta"] \arrow[d, Rightarrow, "\Delta"'] \arrow[dr, equal] & \perp^2 \arrow[d, Rightarrow, "\perp\epsilon"] \\
\perp^2 \arrow[r, Rightarrow, "\epsilon\perp"] & \perp,
\end{tikzcd}$$

则称$(\perp, \epsilon, \Delta)$为一个余单子(comonad).

例 12.1. 考虑函子（）

$$\begin{aligned}(-)_+ : \mathbf{Set} &\to \mathbf{Set}\\ X &\mapsto X_+ := X \coprod \{*\}\\ (f : X \to Y) &\mapsto \left(f_+ : X_+ \to Y_+, x \mapsto \begin{cases} f(x) & \text{若} x \in X \\ * & \text{若} x = * \end{cases}\right),\end{aligned}$$

若定义自然变换η是自然的嵌入$\eta_A : A \to A_+$，且$\mu_A : (A_+)_+ \to A_+$定义为将A中的元素映到本身，将$(A_+)_+$的两个基点映到A_+中唯一的基点.明显地，η和μ关于选定的集合都是自然的，并且

$$\begin{tikzcd} ((A_+)_+)_+ \arrow[r, "(\mu_A)_+"] \arrow[d, "\mu_{A_+}"'] & (A_+)_+ \arrow[d, "\mu_A"] \\ (A_+)_+ \arrow[r, "\mu_A"] & A_+ \end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd} A_+ \arrow[r, "(\eta_A)_+"] \arrow[d, "\eta_{A_+}"'] \arrow[dr, equal] & (A_+)_+ \arrow[d, "\mu_A"] \\ (A_+)_+ \arrow[r, "\mu_A"'] & A_+ \end{tikzcd}$$

是明显的交换图，这个单子被称为可能单子(maybe monad).

例 12.2. 考虑在范畴$\mathbf{Set}$上，定义如下函子：对任意集合X，$\top(X)$是集合X的势集$\mathcal{P}(X)$(power set)，即所有子集组成的集合

$$\top(X) := \mathcal{P}(X) = \{W \mid W \subseteq X\},$$

对于任意映射$f : X \to Y$，定义

$$\begin{aligned}\top(f) : \top(X) &\to \top(Y)\\ W &\mapsto f(W),\end{aligned}$$

并且自然变换η定义为对任意集合X

$$\begin{aligned}\eta_X : X &\to \top(X)\\ x &\mapsto \{x\},\end{aligned}$$

μ定义为对任意集合X

$$\begin{aligned}\mu_X : \top(\top(X)) &\to \top(X)\\ \mathcal{W} &\mapsto \bigcup_{W \in \mathcal{W}} W,\end{aligned}$$

我们需要验证这是一个单子.

首先η的自然性是显然的，

例 12.3. 给定域F和F向量空间V，非空集合A若满足存在平移函数

$$+ : V \times A \to A$$

满足

1. $0+a=a$对所有的$a\in A$都成立，

2. $(v+w)+a=v+(w+a)$对所有的$a\in A, v,w\in V$都成立，

3. 对任意的$a\in A$，映射$-+a: V\to A$是双射.

同样地，放射空间还可以不借助辅助向量空间V来定义：首先我们考虑固定A中的任意点o，那么集合的双射$-+o: V\to A$给出了唯一满足

$$c-o=\lambda(a-o)+(1-\lambda)(b-o)$$

的元素$c\in A$.可以证明，这个元素与原点o的选取无关.并且，

习题 12.2.

命题 12.3. 任意伴随函子对$F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$诱导了单子$\top:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$.

证明. 考虑$\top:=G\circ F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，根据定理8.4，伴随函子给出了单位$\eta:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\Rightarrow\top$和余单位$\epsilon:\top\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$，并且余单位给出了

$$\mu:\top^2=G\circ F\circ G\circ F\overset{G\circ\epsilon\circ F}{\Longrightarrow}G\circ F=\top.$$

接下来需要验证单子的相容性.

定理8.4说明存在交换图

$$\begin{tikzcd} F \arrow[r, Rightarrow, "F\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}"'] & FGF \arrow[d, Rightarrow, "\epsilon F"] \\ & F \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, Rightarrow, "\eta G"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}"'] & GFG \arrow[d, Rightarrow, "G\epsilon"] \\ & G, \end{tikzcd}$$

这给出了交换图

$$\begin{tikzcd} GF \arrow[r, Rightarrow, "GF\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}"'] & GFGF \arrow[d, Rightarrow, "G\epsilon F"] \\ & GF \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} GF \arrow[r, Rightarrow, "\eta GF"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}"'] & GFGF \arrow[d, Rightarrow, "G\epsilon F"] \\ & GF, \end{tikzcd}$$

这两幅交换图恰好是单位所需要的，而引理7.2说明图

$$\begin{tikzcd} & & \mathcal{C} \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & & \mathcal{C} \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & & \\ \mathcal{C} \arrow[r, "F"] & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, equal] & {} & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, equal] & {} & \mathcal{D} \arrow[r, "G"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

给出了两种相同的纵向复合，这给出了交换图

$$\begin{tikzcd} GFGFGF \arrow[r, Rightarrow, "GFG\epsilon F"] \arrow[d, Rightarrow, "G\epsilon FGF"'] & GFGF \arrow[d, Rightarrow, "G\epsilon F"] \\ GFGF \arrow[r, Rightarrow, "G\epsilon F"] & GF. \end{tikzcd}$$

□

例 12.4. 1. 例12.1中的单子也来自于伴随.

2. 给定$R-S$模N，例8.3中给出的伴随
$$-\otimes_R N : R-\mathbf{Mod} \leftrightarrows \mathbf{Mod}-S : \mathrm{Hom}_S(N,-)$$
给出了单子
$$\mathrm{Hom}_S(N,-\otimes_R N) : R-\mathbf{Mod} \leftrightarrows R-\mathbf{Mod},$$
其中对任意R模M，

3. 伴随$F:\mathbf{Set}\leftrightarrows\mathbf{Gp}:U$给出了单子
$$\top := F : \mathbf{Set}\to\mathbf{Set},$$
其中对任意集合S，$F(S)$是所有由S和S^{-1}中元素组成的字符串的全体（），根据例8.4和例8.6中单位和余单位的讨论，单位$\eta_S : S\to\top(S)$定义为$s\mapsto s$，乘法$\mu:\top^2(S)\to\top(S)$定义为字符串的连接.

4. 给定含幺环R，伴随$R[-]:\mathbf{Set}\leftrightarrows R-\mathbf{Mod}:U$给出了自由$R$模单子
$$R[-]:\mathbf{Set}\to\mathbf{Set},$$
对任意集合S，定义
$$R[S] := \left\{\sum_{s\in S}\xi(s)\cdot s\right\},$$
其中$\xi : S\to R$是具有有限支集的映射（即只存在有限多个$x\in S$使得$\xi(s)=0$），单位映射η_S将元素s映到$\chi_s\cdot s$，其中χ_s是仅在s上取1且在其他元素上取0的映射，而乘法$\mu:\top^2(S)\to\top(S)$为形式地乘积，即

5. 伴随$F:\mathbf{Set}\leftrightarrows\mathbf{Mon}:U$给出了自由幺半群单子(free monoid monad)
$$\top : \mathbf{Set}\to\mathbf{Set},$$
对任意集合S，定义
$$\top(S) := \coprod_{n\geq 0} S^n,$$
即S上的字符串的全体.此时，单位映射η_S是自然的嵌入，乘法$\mu:\top^2(S)\to\top(S)$恰好是字符串的连接.

特别地，如果伴随函子对是忘却函子给出的，比方说，

12.2.2 单子上的代数

命题12.3说明，那么一个自然的问题是是否所有的单子都来源于伴随函子对.这个问题的回答需要新的构造，而这个构造也统一了许多代数上的定义.

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$和函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，一个$F$代数($F$-algebra)是态射$\alpha:F(A)\to A$，其中对象$A$称为代数的载体(carrier).给定两个$F$代数$(A,\alpha),(B,\beta)$，若态射$f:A\to B$满足交换图
$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "F(f)"'] & A \arrow[d, "f"] \\ F(B) \arrow[r, "\beta"] & B, \end{tikzcd}$$
则称f是一个F代数同态(homomorphism).

特别地，

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$和其上的单子$(\top,\eta,\mu)$，此时一个$\top$代数($\top$-algebra)是一个$\mathcal{C}$中的态射$\alpha:\top(A)\to A$，满足交换图

$$\begin{tikzcd} \top^2(A) \arrow[r, "\top\alpha"] \arrow[d, "\mu_A"'] & \top(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ \top(A) \arrow[r, "\alpha"] & A \end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, equal] & \top(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ & A, \end{tikzcd}$$

其中α称为结构态射(structure morphism).

例 12.5. 1. 给定含幺环R，伴随$-\otimes_{\mathbb{Z}} R:\mathbf{Ab}\leftrightarrows\mathbf{Mod}-R:U$给出的单子是$\top:=-\otimes_{\mathbb{Z}} R:\mathbf{Ab}\to\mathbf{Ab}$，若Abel群$A$是一个$\top$代数，则给出了一个态射

$$\alpha:A\otimes_{\mathbb{Z}} R\to A,$$

根据张量积的泛性质，这对应了映射

$$A\times R\to A$$
$$(a,r)\mapsto r\cdot a,$$

交换图

$$\begin{tikzcd} A\otimes_{\mathbb{Z}} R\otimes_{\mathbb{Z}} R \arrow[r, "\top\alpha"] \arrow[d, "\mu_A"'] & A\otimes_{\mathbb{Z}} R \arrow[d, "\alpha"] \\ A\otimes_{\mathbb{Z}} R \arrow[r, "\alpha"] & A \end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, equal] & \top(A) \arrow[d, "\alpha"] \\ & A, \end{tikzcd}$$

说明了，即A是一个右R模.

2. 例12.4中我们讨论了几个自由忘却函子给出的单子，我们考虑$F:\mathbf{Set}\leftrightarrows\mathbf{Mon}:U$给出的单子$\top=UF$，它将集合$S$映到$\coprod_{n\geq 0}S^n$.于是，该单子上的一个代数是映射

$$\alpha:\coprod_{n\geq 0}S^n\to S,$$

其中α在S^n上的限制给出了S上的n元运算，代数满足的交换图

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\eta_S"] \arrow[dr, equal] & \coprod_{n\geq 0} S^n \arrow[d, "\alpha"] \\ & S \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \coprod_{n\geq 0}\left(\coprod_{m\geq 0} S^m\right)^n \arrow[r, "\top\alpha"] \arrow[d, "\mu_S"'] & \coprod_{n\geq 0} S^n \arrow[d, "\alpha"] \\ \coprod_{n\geq 0} S^n \arrow[r, "\alpha"] & S \end{tikzcd}$$

给出了这些n元运算满足的性质.

若M是一个$\top$代数，取M上的二元运算$\alpha_2 : M \times M \to M$和$M$中的元素$\alpha_0 : \{*\} \to M$，即$e := \alpha_0(*)$.单位的性质说明$\alpha_1 = \mathrm{id}_M$.于是，对任意的元素$m, n, p \in M$，结合性交换图说明

$$\alpha_2(\alpha_2(m, n), p) = \alpha_3(m, n, p) = \alpha_2(m, \alpha_2(n, p))$$

和

$$\alpha_2(e, m) = \alpha_2(\alpha_0(*), m) = \alpha_1(m) = m$$

这也意味着M在如上的定义下是一个幺半群.

另一方面，如果M是一个幺半群，那么按照上面的讨论可以定义$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$，其余$\alpha_n$定义为

$$(m_1, \cdots, m_n) \mapsto \alpha_2(\cdots \alpha_2(m_1, m_2), \cdots, m_n)$$

则说明M是一个$\top$代数.

例 12.6. 给定域F和其上的向量空间V，那么V上的仿射空间(affine space)是集合A和其上的平移函数(translation)$V \times A \xrightarrow{+} A$，满足

1. $0 + a = a$对所有A中的元素a都成立，
2. $(v + w) + a = v + (w + a)$对所有$A$中的元素$a$和所有$V$中的元素$v, w$都成立，
3. 对任意A中的元素a，映射$- + a : V \to A$是集合之间的双射.

还存在不需要辅助向量空间V的定义方式：任取A中的点$o \in A$，双射$- + o : V \to A$说明存在唯一的元素$c \in A$满足

$$c - o = \lambda(a - o)(1 - \lambda)(b - o),$$

并且这个点c与o的选取无关.更一般地，对任意n个A中的点$a_1, \cdots, a_n$和F中的满足$\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$的数$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$，存在唯一的元素$\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \in A$.

于是，对于任意集合A，定义$\mathrm{Aff}_F(A)$为集合

$$\{\lambda_1 a_1 + \cdots + \lambda_n a_n \mid a_i \in A,\ \lambda_i \in F,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1\},$$

即所有形式线性组合的全体，那么类似于例12.4中(iv)的构造，

$$\eta_A : A \to \mathrm{Aff}_F(A)$$
$$a \mapsto a$$

和

$$\mu_A : \mathrm{Aff}_F(\mathrm{Aff}_F(A)) \to \mathrm{Aff}_F(A)$$
$$\lambda_1(\mu_{1,1}a_{1,1} + \cdots + \mu_{1,n_1}a_{1,n_1}) + \cdots + \lambda_m(\mu_{m,1}a_{m,1} + \cdots + \mu_{m,n_m}a_{m,n_m}) \mapsto \lambda_1\mu_{1,1}a_{1,1} + \cdots + \lambda_m\mu_{m,n_m}a_{m,n_m}$$

使得$\mathrm{Aff}_F(-)$成为单子$\mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$.

若A是$\mathrm{Aff}_F(-)$单子，则存在映射$\mathrm{ev}_A : \mathrm{Aff}_F(A) \to A$，这相当于给了$A$上的线性组合一个赋值，并且代数的定义说明此赋值满足一定的相容性：a的赋值一定是a，并且赋值满足分配律，于是我们可以定义仿射空间是单子$\mathrm{Aff}_F(-)$上的代数.

习题 12.3.

事实上，我们可以构造某个范畴上的单子，使得其上代数的范畴恰好是某个R代数范畴$R - \mathbf{Alg}$.

按定义，一个单子$\top$上的代数也是单纯作为函子$\top$上的代数，因此作为单子的$\top$代数同态就是作为函子的$\top$代数的代数同态，范畴$\mathcal{C}$上$\top$代数全体和$\top$代数同态组成的范畴记为$\mathcal{C}^\top$，这个范畴也被称为Eilenberg–Moore范畴，这样我们就可以来回答本小节开始提出的问题了：

定理 12.4. 任意的单子都是由某个伴随函子对给出的.

证明. 给定范畴$\mathcal{C}$和单子$\top : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，考虑忘却函子$U^\top : \mathcal{C}^\top \to \mathcal{C}$，我们首先证明它有左伴随函子

$$\begin{aligned} F^\top : \mathcal{C} &\to \mathcal{C}^\top \\ A &\mapsto (\top(A), \mu_A : \top^2(A) \to \top(A)) \\ (f : A \to B) &\mapsto (\top(A), \mu_A) \xrightarrow{\top(f)} (\top(B), \mu_B), \end{aligned}$$

其中对任意$\mathcal{C}$中的对象A，$F^\top(A)$被称为自由$\top$代数.根据定理8.4，只要能找到单位$\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow U^\top F^\top = \top$和余单位$\epsilon : F^\top U^\top = \top \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}^\top}$并且它们满足定理8.4的相容性条件.

取伴随的单位为单子$\top$的单位$\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \top = U^\top F^\top$，并且对任意代数$(A, a : \top A \to A)$取$\epsilon_A : (\top A, \mu_A) \xrightarrow{a} (A, a)$.为此，要验证$a : \top A \to A$是一个$\top$代数同态，而这对应了交换图

$$\begin{tikzcd} \top^2(A) \arrow[r, "\top a"] \arrow[d, "\mu_A"'] & \top A \arrow[d, "a"] \\ \top A \arrow[r, "a"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \top A \arrow[r, "\eta_{\top A}"] \arrow[dr, equal] & \top^2(A) \arrow[d, "a"] \\ & \top A, \end{tikzcd}$$

并且ϵ的自然性对应了交换图

$$\begin{tikzcd} \top A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "\top f"'] & A \arrow[d, "f"] \\ \top B \arrow[r, "a"] & B, \end{tikzcd}$$

而该图交换是因为$f : (A, a) \to (B, b)$是代数同态.

对任意$\mathcal{C}$中的对象A和$\mathcal{C}^\top$中的对象B，单位和余单位的相容性方程$\epsilon_{F^\top(A)} \circ F^\top(\eta_A) = \mathrm{id}_{F^\top(A)}$和$U^\top(\epsilon_B) \circ \eta_{U^\top(B)} = \mathrm{id}_{U^\top(B)}$对应了图

$$\begin{tikzcd} \top A \arrow[r, "\eta_{\top A}"] \arrow[dr, equal] & \top^2(A) \arrow[d, "a"] \\ & \top A \end{tikzcd} \quad 和 \quad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "\eta_B"] \arrow[dr, equal] & \top B \arrow[d, "b"] \\ & B, \end{tikzcd}$$

于是函子对$(F^\top,U^\top)$是伴随对.

最后注意到对任意$\mathcal{C}$中的对象A，按定义$U^\top\circ F^\top=\top$且$(U^\top\epsilon F^\top)_A=\mu_A$，因而伴随对$(F^\top,U^\top)$诱导的单子是$\top$. □

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$和其上的单子$(\top,\eta,\mu)$，Kleisli范畴$\mathcal{C}_\top$(Kleisli category)定义为

1. 对象同于$\mathcal{C}$中的对象，
2. $\hom_{\mathcal{C}_\top}(A,B):=\hom_{\mathcal{C}}(A,\top B)$，且记$\mathcal{C}$中的态射为$A\rightsquigarrow B$，
3. 单位态射$\mathrm{id}_A:A\rightsquigarrow A$是单子的单位$\eta_A:A\to\top A$，
4. 给定态射$f:A\rightsquigarrow B,g:B\rightsquigarrow C$，复合映射$g\circ f:A\rightsquigarrow C$是

$$A\xrightarrow{f}\top B\xrightarrow{\top g}\top^2C\xrightarrow{\mu_C}\top C.$$

习题 12.4. 求证如上定义使得$\mathcal{C}_\top$是一个范畴.

证明. 我们需要证明单位态射、和复合的性质.

给定态射$f:A\rightsquigarrow B$和单位态射$\mathrm{id}_A:A\rightsquigarrow A,\mathrm{id}_B:B\rightsquigarrow B$，那么按定义复合

$$f\circ\mathrm{id}_B=A\xrightarrow{f}\top B\xrightarrow{\top\eta_B}\top^2B\xrightarrow{\mu_B}\top B,$$

其中根据单子的定义，$\mu_B\circ\top\eta_B=\mathrm{id}_B$，因此$f\circ\mathrm{id}_B=f$.另一方面，根据$\eta$的自然性，存在交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & \top A \arrow[d, "\top f"] \\ \top B \arrow[r, "\top\eta_B"] & \top^2 B, \end{tikzcd}$$

于是

$$\mathrm{id}_A\circ f=A\xrightarrow{\eta_A}\top A\xrightarrow{\top f}\top^2B\xrightarrow{\mu_B}\top B=A\xrightarrow{f}\top B\xrightarrow{\top\eta_B}\top^2B\xrightarrow{\mu_B}\top B=f,$$

这证明了单位态射.

为证明复合的性质，首先根据μ的自然性，对任意的对象C,D和态射$h:C\to\top D$，存在交换图

$$\begin{tikzcd} \top^2 C \arrow[r, "\top^2 h"] \arrow[d, "\mu_C"'] & \top^3 D \arrow[d, "\top\mu_D"] \\ \top C \arrow[r, "\top h"] & \top^2 D, \end{tikzcd}$$

于是给定态射$f:A\rightsquigarrow B,g:B\rightsquigarrow C,h:C\rightsquigarrow D$，

$$\begin{aligned} h\circ(g\circ f)&=A\xrightarrow{f}\top B\xrightarrow{\top g}\top^2C\xrightarrow{\mu_C}\top C\xrightarrow{\top h}\top^2D\xrightarrow{\mu_D}\top D\\ &=A\xrightarrow{f}\top B\xrightarrow{\top g}\top^2C\xrightarrow{\top^2h}\top^3D\xrightarrow{\top\mu_D}\top^2D\xrightarrow{\mu_D}\top D\\ &=A\xrightarrow{f}\top B\xrightarrow{\top(\mu_D\circ\top h\circ g)}\top^2D\xrightarrow{\mu_D}\top D\\ &=(h\circ g)\circ f. \end{aligned}$$

□

例 12.7. 例12.4中，$F : \mathbf{Set} \leftrightarrows \mathbf{Mon} : U$给出的自由幺半群单子的Kleisli范畴满足其中的态射是映射

$$A \to \coprod_{n \geq 0} B^n,$$

即对任意A中的元素a，它对应的是B中元素组成的一个列表$(b_1, \cdots, b_k) \in \coprod_{n \geq 0} B^n$.

命题 12.5. 给定范畴$\mathcal{C}$和其上的单子$(\top, \eta, \mu)$，存在伴随

$$F_\top : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{C}_\top : U_\top,$$

它给出的$\mathcal{C}$上的单子恰好是$\top$.

证明. 定义$F_\top$是函子，将对象A映到A，将态射$f : A \to B$映到$F_\top : A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{\mu_B} \top B$.定义$U_\top$是函子，将对象$A$映到$\top(A)$，将$g : A \rightsquigarrow B = A \xrightarrow{g} \top B$映到$U_\top(g) : \top A \xrightarrow{\top g} \top^2 B \xrightarrow{\mu_B} \top B$.我们需要证明如此定义的函子性.

$$\hom_{\mathcal{C}_\top}(A, B) \cong \hom_{\mathcal{C}}(A, \top B) \cong \hom_{\mathcal{C}}(A, U_\top B)$$

此时，$\epsilon_A : FG(A) \rightsquigarrow A$在此伴随下刚好对应到$\mathrm{id}_{G(A)}$. □

给定范畴$\mathcal{C}$和其上的单子$(\top, \eta, \mu)$，我们定义范畴$\mathbf{Adj}_\top$如下，其中

1. 对象是伴随$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$（包括了单位$\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$、余单位$\epsilon : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$），满足该伴随诱导的单子（命题12.3）恰好是$(\top, \eta, \mu)$，
2. 给定对象$(\mathcal{D}_1, F_1, G_1, \eta, \epsilon_1)$和$(\mathcal{D}_2, F_2, G_2, \eta, \epsilon_2)$，态射是函子$K : \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$，满足交换图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D}_1 \arrow[rr, "K"] & & \mathcal{D}_2 \\ & \mathcal{C} \arrow[ul, "F_1"] \arrow[ur, "F_2"'] & \end{tikzcd} \quad 和 \quad \begin{tikzcd} \mathcal{D}_1 \arrow[rr, "K"] \arrow[dr, "G_1"'] & & \mathcal{D}_2 \arrow[dl, "G_2"] \\ & \mathcal{C}. & \end{tikzcd}$$

习题 12.5. 求证这样描述的函子K是伴随之间的态射（习题8.14）.

证明. 这里取函子$H : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$为单位函子，根据习题8.14，我们需要证明$H\eta_1 = \eta_2 H$，但伴随诱导的单子相同，因此$\eta_1 = \eta_2$（二者都是相同单子的单位），得证. □

定理 12.6. 给定范畴$\mathcal{C}$和其上的单子$(\top, \eta, \mu)$，*Kleisli*范畴$\mathcal{C}_\top$是$\mathbf{Adj}_\top$的始对象，*Eilenberg–Moore*范畴$\mathcal{C}^\top$是$\mathbf{Adj}_\top$的始对象.

换句话说，交换图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}_\top \arrow[r, dashed, "J"] \arrow[dr, shift left, "U_\top"] & \mathcal{D} \arrow[r, dashed, "K"] \arrow[d, shift left, "G"] & \mathcal{C}^\top \arrow[dl, shift left, "U^\top"] \\ & \mathcal{C} \arrow[ul, shift left, "F_\top"] \arrow[u, shift left, "F"] \arrow[ur, shift left, "F^\top"] & \end{tikzcd}$$

中的虚线箭头都是存在且唯一的.

证明. 我们来说明相容性必然给出唯一存在的函子，并证明它的函子性.

注意到伴随(F,G)诱导的单子是$\top$，根据命题12.3的构造，这意味着$G\epsilon F=\mu$.

假定存在$J:\mathcal{C}_\top\to\mathcal{D}$，则根据$F=JF_\top$知，对任意$\mathcal{C}_\top$中的对象$A$，$F(A)=JF_\top(A)=J(A)$.对任意的$\mathcal{C}_\top$中的态射$f:A\rightsquigarrow B$，若它对应于$\mathcal{C}$中的态射$f:A\to\top B$，根据函子与态射换位的交换性（习题8.14），存在交换图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}_\top}(F_\top(A),B) \arrow[r] \arrow[d, "J"] & \hom_{\mathcal{C}}(A,U_\top(B)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \\
\hom_{\mathcal{D}}(JF_\top(A),J(B)) \arrow[d, equal] & \hom_{\mathcal{C}}(A,U_\top(B)) \arrow[d, equal] \\
\hom_{\mathcal{D}}(F(A),F(B)) \arrow[r, "\beta_{A,J(B)}"] & \hom_{\mathcal{C}}(A,GF(B)),
\end{tikzcd}$$

$J(f)\in\hom_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$换位对应到$f\in\hom_{\mathcal{C}}(A,GF(B))$，根据习题8.13，

$$J(f):=F(A)\xrightarrow{F(f)}FGF(B)\xrightarrow{\epsilon_{F(B)}}F(B).$$

我们需要验证如此定义的函子性.

假定存在函子$K:\mathcal{D}\to\mathcal{C}^\top$，$U^\top\circ K=G$说明对任意对象$B\in\mathrm{ob}\,\mathcal{D}$，$K(B)$的对象是$G(B)$；对任意态射$f:B\to D$，$K(f):=G(f)$.此时的函子性是显然的.接下来我们需要给出$G(B)$上的一个代数结构.任意给定代数$(A,a:\top A\to A)$，根据定理12.4的证明，$a$可以看作代数之间的态射$a:(\top A,\mu_A)\to(A,a)$，因而它可以被看作$\mathcal{C}^\top$中的态射；同时定理12.4的证明中，余单位$\epsilon$定义为$\epsilon_A:=a$，因此$a$在伴随$(F^\top,U^\top)$下对应到$\mathrm{id}_A$.根据函子与态射换位的交换性（习题8.14），存在交换图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{D}}(FG(B),B) \arrow[r] \arrow[d, "K"] & \hom_{\mathcal{C}}(G(B),G(B)) \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"] \\
\hom_{\mathcal{C}^\top}(KFG(B),K(B)) \arrow[d, equal] & \hom_{\mathcal{C}}(G(B),G(B)) \arrow[d, equal] \\
\hom_{\mathcal{C}^\top}(F^\top(G(B)),K(B)) \arrow[r, "\alpha^\top_{G(B),K(B)}"] & \hom_{\mathcal{C}}(G(B),U^\top K(B)),
\end{tikzcd}$$

代数结构定义为$K(B):=(G(B),G(\epsilon_B))$，其中$G(\epsilon_B):GFG(B)\to G(B)$.如此定义确实给出了一个代数结构，这因为对所需证明的交换图

$$\begin{tikzcd}
\top^2G(B) \arrow[r, "\top G(\epsilon_B)"] \arrow[d, "\mu_{G(B)}"'] & \top G(B) \arrow[d, "G(\epsilon_B)"] \\
\top G(B) \arrow[r, "G(\epsilon_B)"] & G(B)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G(B) \arrow[r, "\eta_{G(B)}"] \arrow[dr, equal] & \top G(B) \arrow[d, "G(\epsilon_B)"] \\
& G(B),
\end{tikzcd}$$

$G\epsilon F=\mu$说明$\mu_{G(B)}=G(\epsilon_{FG(B)})$，因而第一幅图是$\epsilon$自然性的推论，而第二幅图则直接来源于定理8.4中的交换图

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, Rightarrow, "\eta G"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}"'] & GFG \arrow[d, Rightarrow, "G\epsilon"] \\
& G.
\end{tikzcd}$$

□

定理12.6说明存在唯一的函子$K:\mathcal{C}_\top\to\mathcal{C}^\top$与定理12.4和命题12.5给出的函子都相容，下面的命题说明了它的性质：

命题 12.7. *典范函子$K:\mathcal{C}_\top\to\mathcal{C}^\top$是忠实的，其像是$\mathcal{C}^\top$中所有自由代数组成的满子范畴.*

证明. 按定理12.6给出的构造，对$\mathcal{C}_\top$中的对象A，$K(A):=(U_\top(A),U_\top(\epsilon_A))=(\top(A),\mu_A)$，其中最后一个等式来自于命题12.5中的构造.于是，K的像是自由代数的子范畴.

考虑复合

$$\hom_{\mathcal{C}_\top}(F_\top(A),B)=\hom_{\mathcal{C}_\top}(A,B)\xrightarrow{K}\hom_{\mathcal{C}^\top}(K(A),K(B))=\hom_{\mathcal{C}^\top}(\top(A),\top(B)),$$

集合$\hom_{\mathcal{C}_\top}(F_\top(A),B)$和$\hom_{\mathcal{C}^\top}(\top(A),\top(B))$在相应的伴随下面都对应到$\hom_{\mathcal{C}}(A,\top(B))$，并且复合映射对应到恒等映射，因此复合映射是集合的同构，于是函子是满忠实的. □

习题 12.6. 给定单子$\top:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，记$K:\mathcal{C}_\top\to\mathcal{C}^\top$是命题12.7中将Kleisli范畴映到Eilenberg-Moore范畴的典范函子，那么可以定义函子

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^\top&\to\mathrm{Funct}(\mathcal{C}_\top,\mathbf{Set})\\(A,a)&\mapsto\hom_{\mathcal{C}^\top}(K(-),(A,a)),\end{aligned}$$

它对每个$\top$代数都构造了一个$\mathcal{C}_\top$预层.求证，

12.2.3 单子化

例 12.8. 考虑自由忘却伴随

$$F=\mathbb{Z}[-]:\mathbf{Set}\leftrightarrows\mathbf{Ab}:U$$

和它诱导的单子$\top:=\mathbb{Z}[-]:\mathbf{Set}\leftrightarrows\mathbf{Set}$，它将集合$S$映到$S$上的整系数线性组合的全体$\mathbb{Z}[S]$，将映射$f:S\to T$映到

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}[f]:\mathbb{Z}[S]&\to\mathbb{Z}[T]\\\sum_{i=1}^N n_is_i&\mapsto\sum_{i=1}^N n_if(s_i).\end{aligned}$$

根据定理12.6，存在唯一的函子$K:\mathbf{Ab}\to\mathbf{Set}^{\mathbb{Z}[-]}$满足交换图

$$\begin{tikzcd}\mathbf{Ab} \arrow[rr, dashed, "K"] \arrow[dr, shift left, "U"] & & \mathbf{Set}^{\mathbb{Z}[-]} \arrow[dl, shift left, "U^{\mathbb{Z}[-]}"] \\ & \mathbf{Set}, \arrow[ul, shift left, "F"] \arrow[ur, shift left, "F^{\mathbb{Z}[-]}"] & \end{tikzcd}$$

其中$\mathbf{Set}^{\mathbb{Z}[-]}$是单子$\top:=\mathbb{Z}[-]$的代数组成的范畴.按照定理12.6的构造，$K$将Abel群$A$映到以$A$为底集且有“赋值”映射$a_A:\mathbb{Z}[A]\to A$的代数，满足交换图

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[\mathbb{Z}[A]] \arrow[r, "{\mathbb{Z}[a_A]}"] \arrow[d, "\mu_A"'] & \mathbb{Z}[A] \arrow[d, "a_A"] \\ \mathbb{Z}[A] \arrow[r, "a_A"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, equal] & \mathbb{Z}[A] \arrow[d, "a_A"] \\ & A, \end{tikzcd}$$

这恰好等价于A上的一个Abel群结构.

此外，对任意的$\mathbb{Z}[-]$代数同态$f: A \to B$，它所需要的交换图

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[A] \arrow[r, "{\mathbb{Z}[f]}"] \arrow[d, "a_A"'] & \mathbb{Z}[B] \arrow[d, "a_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B, \end{tikzcd}$$

刚好是f是Abel群同态所需要的条件.综上，K是一个范畴的等价.

更一般地，给定单子$\top : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$和$\mathbf{Adj}_\top$中的伴随函子对$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$，它对应的单子是$\top = GF$，定理12.6说明函子$G$都存在分解

$$\mathcal{D} \xrightarrow{K} \mathcal{C}^\top \xrightarrow{U^\top} \mathcal{C},$$

在此分解给出范畴等价的时候，范畴$\mathcal{D}$的许多性质可以由$\mathcal{C}^\top$得出.

定义. 给定伴随函子对$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$，若定理12.6给出的分解

$$\mathcal{D} \xrightarrow{K} \mathcal{C}^\top \xrightarrow{U^\top} \mathcal{C},$$

中，K是范畴的等价，则称伴随函子是单子化(monadic)的；对任意函子G若有左伴随F使得(F, G)是单子化伴随，则称G是单子化的.

若函子K是范畴的同构（如例12.8），则称G是严格单子化的(strictly monadic).

例 12.9. 给定范畴$\mathcal{C}$及其满子范畴$\mathcal{D}$，若自然的嵌入函子$i : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$有左伴随函子$L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，则称$\mathcal{D}$是$\mathcal{C}$的自反子范畴(reflective subcategory).根据定理12.6，$i \circ L = L$是$\mathcal{C}$上的单子.

习题 12.7. 给定范畴$\mathcal{C}$及其自反子范畴$\mathcal{D}$，其左伴随是$L : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，求证

1. $\eta L = L\eta$，且该自然变换是自然同构；
2. $\mathcal{C}$中的对象A在i的本质像(essential image)中，即存在$\mathcal{D}$中的对象B使得$A \cong i(B)$，当且仅当$\eta_A : A \to L \circ i(A)$是同构；
3. i的本质像包括所有对被L取逆局部(local)的对象，即对象A在本质像当中当且仅当对所有态射$f : B \to C$，若$L(f)$是$\mathcal{D}$中的同构，则
$$f^* : \hom_{\mathcal{C}}(C, A) \to \hom_{\mathcal{C}}(B, A)$$
是同构.

习题 12.8. 给定范畴$\mathcal{C}$及其上的单子$(\top : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \eta, \mu)$，求证如下描述是等价的：

1. 单子的乘法$\mu : \top^2 \Rightarrow \top$是自然同构（于是该单子被称为幂等的(idempotent)），

2. 对任意对象A，$\mu_A : \top^2(A) \to \top(A)$是单态射，

3. 自然变换$\eta\top, \top\eta : \top \Rightarrow \top^2$相等.

命题 12.8. 自反子范畴的嵌入函子$i : \mathcal{D} \hookrightarrow \mathcal{C}$是单子化的，即典范诱导的交换图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr, "K"] \arrow[dr, shift left, "i"] & & \mathcal{C}^L \arrow[dl, shift left, "U^L"] \\ & \mathcal{C} \arrow[ul, shift left, "L"] \arrow[ur, shift left, "F^L"] & \end{tikzcd}$$

中，K是范畴的等价.

证明. □

例 12.10. 接例12.8中的讨论，伴随$F = \mathbb{Z}[-] : \mathbf{Set} \leftrightarrows \mathbf{Ab} : U$是单子化的.

在??? 中，我们知道Abel群的表示方式可以通过生成元和关系来表现，即存在集合G和R，使得$\mathbb{Z}[G] \to A$是满射，并且存在自然的“赋值”态射$\mathbb{Z}[R] \to \mathbb{Z}[G]$使得该映射的像在$\mathbb{Z}[G] \to A$下表现为0.于是，图

$$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}[R]] \rightrightarrows \mathbb{Z}[G] \to A$$

是余等值子图，其中两个映射$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}[R]] \rightrightarrows \mathbb{Z}[G]$分别是零映射和赋值映射，Abel群$A$也有表示$A = \langle G | R \rangle$.

明显存在的问题是，这样的表现是依赖于生成元和关系的选取，但我们希望这样的构造是具有函子性的.这样对应的解决办法是，与其找一组特定的生成元，不如将A中的所有元素都作为生成元，于是自然的态射$\mathbb{Z}[A] \to A$必然是满射；同时，我们取A中的“关系”为所有A中的元素——当然，这不是说所有的形式和都是0，否则这成了平凡群，我们希望此时同样有类似的余等值子图

$$\mathbb{Z}[\mathbb{Z}[A]] \rightrightarrows \mathbb{Z}[A] \to A,$$

而这依赖于该伴随是单子化的事实.

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$和其中的态射$f, g : A \to B$，若存在$\mathcal{C}$中的交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[l, bend right, dashed, "t"'] \arrow[r, "h"] & C \arrow[l, bend right, dashed, "s"'] \end{tikzcd}$$

和截面s, t（具体而言$h \circ s = \mathrm{id}_C, g \circ t = \mathrm{id}_B$）满足$h \circ f = h \circ g$且$f \circ t = s \circ h$，则称$C$是$f, g$是分裂余等值子(split coequaliser).

习题 12.9. 求证范畴$\mathcal{C}$中的分裂余等值子

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[l, bend right, dashed, "t"'] \arrow[r, "h"] & C \arrow[l, bend right, dashed, "s"'] \end{tikzcd}$$

使得C是f, g的余等值子.并且，这个余等值子是绝对的(absolute)，即对任意给定函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$F(C)$是$F(f), F(g)$的余等值子.

证明. 任取态射$k: B \to D$满足$kf = kg$，若存在$l: A \to C$满足$l \circ h = k$，则由于$h \circ s = \mathrm{id}_C$，$l = l \circ \mathrm{id}_C = l \circ h \circ s = k \circ s$.于是只要证明$l := k \circ s$使得$l \circ h = k$，而这是显然的.

F的函子性说明在$\mathcal{D}$中同样有分裂余等值子

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, shift left, "F(f)"] \arrow[r, shift right, "F(g)"'] & F(B) \arrow[l, bend right, dashed, "F(t)"'] \arrow[r, "F(h)"] & F(C), \arrow[l, bend right, dashed, "F(s)"'] \end{tikzcd}$$

因此这个余等值子是绝对的. □

例 12.11. 给定$\mathcal{C}$及其上的单子$(\top: \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \eta, \mu)$，对任意$\top$代数$(A, a)$，图

$$\begin{tikzcd} \top^2 A \arrow[r, shift left, "\top a"] \arrow[r, shift right, "\mu_A"'] & \top A \arrow[l, bend right, dashed, "\eta_{\top A}"'] \arrow[r, "a"] & A \arrow[l, bend right, dashed, "\eta_A"'] \end{tikzcd}$$

给出了一个$\mathcal{C}$中的分裂余等值子.但是，注意到η_A和$\eta_{\top A}$都不是代数代数同态，因此这不是$\mathcal{C}^\top$中的分裂余等值子.

定义. 给定函子$G: \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，

1. 若$\mathcal{D}$中的态射$f, g: B \rightrightarrows D$和$\mathcal{C}$中的态射$k: G(D) \to C$使得$C$是$G(f), G(g)$的分裂余等值子，则称态射$f, g$是$G$分裂的($G$-split).
2. 若任意的G分裂态射对f, g，都存在$\mathcal{C}$中的态射$h: D \to A$使得图

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & D \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd}$$

在G下是G分裂给出的分裂余等值子，且，则称G创造G分裂对的余等值子(create coequaliser of split pair).
3. 若对任意的G分裂态射对$f, g: B \rightrightarrows D$，都存在唯一的$\mathcal{D}$中的图使得它在$U$下的像是需要的分裂余等值子，则称$G$严格创造$G$分裂对的余等值子(strictly create coequaliser of split pair).

换句话说，创造分裂对的余等值子满足分裂对都可以“提升”，而严格创造给出了唯一的提升.下面的定理说明了我们引入如此概念的意义.

定理 12.9. 给定$\mathcal{C}$及其上的单子$(\top: \mathcal{C} \to \mathcal{C}, \eta, \mu)$，则忘却函子$U^\top$严格创造$U^\top$分裂对的余等值子.

证明. 给定$\mathcal{C}^\top$中的态射$f, g: (A, a) \rightrightarrows (B, b)$，且存在$U^\top$分裂的余等值子（注意到按照构造$U^\top$是忘却函子，因而这是$\mathcal{C}$中的分裂余等值子）：

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[l, bend right, dashed, "t"'] \arrow[r, "h"] & C. \arrow[l, bend right, dashed, "s"'] \end{tikzcd}$$

我们必须证明C可以提升为一个$\top$代数(C,c)，并且这个提升是唯一的（即存在唯一的C上的代数结构使得图是$\mathcal{C}^{\top}$中的交换图）.

根据习题12.9，$\top C$是$\mathcal{C}$中$\top f,\top g$的余等值子，因而存在$\mathcal{C}$中的交换图

$$\begin{tikzcd}
\top A \arrow[r, shift left, "\top f"] \arrow[r, shift right, "\top g"'] \arrow[d, "a"] & \top B \arrow[r, "\top h"] \arrow[d, "b"] & \top C \arrow[d, dashed, "c"] \\
A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] & C,
\end{tikzcd}$$

其中左侧方块（分别）交换是因为f,g都是代数同态，并且

$$h\circ b\circ \top f = h\circ f\circ a = h\circ g\circ a = h\circ b\circ \top g$$

于是根据余等值子的泛性质，存在唯一的$\mathcal{C}$中的态射$c:\top C\to C$使得上图中右侧的方块是交换的，只要我们证明了$c:\top C\to C$使得C是代数，则如上的交换图就证明了h是代数同态.

这样，我们需要验证交换图

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\eta_C"] \arrow[dr, equal] & \top C \arrow[d, "a"] \\
& C
\end{tikzcd}
\qquad 和 \qquad
\begin{tikzcd}
\top^2(C) \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "\top c"'] & \top C \arrow[d, "b"] \\
\top C \arrow[r, "c"] & C.
\end{tikzcd}$$

根据η,μ的自然性和B,C的代数的性质，在图

$$\begin{tikzcd}
& B \arrow[rr, two heads, "h"] \arrow[dl, "\eta_B"'] \arrow[dd, equal] & & C \arrow[dl, "\eta_C"'] \arrow[dd, equal] \\
\top B \arrow[rr, "\top h"] \arrow[dr, "b"'] & & \top C \arrow[dr, dashed, "c"'] & \\
& B \arrow[rr, "h"] & & C
\end{tikzcd}$$

和图

$$\begin{tikzcd}
& \top^2(B) \arrow[rr, two heads, "\top^2(h)"] \arrow[dr, "\top(b)"] \arrow[ddl, "\mu_B"'] & & \top^2(C) \arrow[ddl, "\mu_C"'] \arrow[dr, dashed, "\top(c)"] & \\
& & \top B \arrow[rr, "\top h"] \arrow[ddl, "b"'] & & \top C \arrow[ddl, dashed, "c"] \\
\top B \arrow[rr, "\top h"] \arrow[dr, "b"'] & & \top C \arrow[dr, dashed, "c"'] & & \\
& B \arrow[rr, "h"] & & C &
\end{tikzcd}$$

中，除了最右侧的图形其余都是交换的，因此我们有

$$c\circ\eta_C\circ h = \circ\top(h)\circ\eta_B = h\circ b\circ\eta_B = h$$

和

$$c\circ\mu_C\circ\top^2(h)$$

由于h和$\top^2(h)$都是满态射，因而最右侧的图形也都是交换的.

最后，我们要证明$h:(B,b)\to(C,c)$是$\mathcal{C}^{\top}$中的余等值子.给定$\mathcal{C}^{\top}$中的图

$$A \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} B \xrightarrow{h} C,$$

和代数映射$k:(B,b)\to(D,d)$使得$k\circ f=k\circ g$，于是在$\mathcal{C}$中存在分解

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "k"'] & C \arrow[d, dashed, "j"] \\ & & D, \end{tikzcd}$$

为验证j是代数同态，只要验证图

$$\begin{tikzcd} \top C \arrow[r, "\top(j)"] \arrow[d, "c"'] & \top D \arrow[d, "d"] \\ C \arrow[r, "j"] & D \end{tikzcd}$$

是交换的即可.考虑到h,k都是代数同态，

$$j\circ c\circ\top h=j\circ h\circ b=k\circ b=d\circ\top k=d\circ\top j\circ\top h,$$

考虑到$\top(h)$是满态射，我们有$j\circ c=d\circ\top j$. □

推论 12.9.1. *若伴随$F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$是单子化的，则*

1. *函子G创造G分裂对的余等值子，*
2. *对任意$\mathcal{D}$中的对象B，存在余等值子图*

$$FGFG(B) \underset{\epsilon_{FG(B)}}{\overset{FG(\epsilon_B)}{\rightrightarrows}} FG(B) \xrightarrow{\epsilon_B} B.$$

证明. 记$\top:=GF$为该伴随给出的单子，伴随是单子化的说明存在范畴之间的等价$K:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$使得图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr, "K"] \arrow[dr, shift left, "G"] & & \mathcal{C}^{\top} \arrow[dl, shift left, "U^{\top}"] \\ & \mathcal{C} \arrow[ul, shift left, "F"] \arrow[ur, shift left, "F^{\top}"] & \end{tikzcd}$$

是交换的. □

> **定理 12.10** (单子化定理(Barr-Beck))**.** *给定伴随$F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$，它是单子化当且仅当$G$创造$G$分裂对的余等值子.*

考虑伴随给出的范畴的等价

$$\begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr, "K"] \arrow[dr, shift left, "G"] & & \mathcal{C}^{\top} \arrow[dl, shift left, "U^{\top}"] \\ & \mathcal{C}, \arrow[ul, shift left, "F"] \arrow[ur, shift left, "F^{\top}"] & \end{tikzcd}$$

那么定理12.10说明了

1. 典范的函子K是范畴的等价，
2. G创造G分裂对的余等值子

是等价的.对应地，同一幅图也可以证明

1. 典范的函子K是范畴的同构，
2. G严格创造G分裂对的余等值子

是等价的.

定理12.10的证明. 推论12.9.1说明了必要性，接下来我们证明充分性.此时，我们需要构造$K : \mathcal{D} \to \mathcal{C}^\top$的等价逆$L : \mathcal{C}^\top \to \mathcal{D}$.

由于交换图，我们有$U^\top \circ K = G$和$K \circ F = F^\top$.因此，对于等价逆L，我们需要$U^\top = G \circ L$和$F = L \circ F^\top$ □

推论 12.10.1. *自由忘却伴随$F : \mathbf{Set} \leftrightarrows \mathbf{Mon} : U$是单子化的.*

证明. □

12.2.4 代数范畴中的极限

定理 12.11.

例 12.12. 设$f : R \to S$是交换环的同态，那么存在伴随

$$f^* : R-\mathbf{Mod} \leftrightarrows S-\mathbf{Mod} : f_*,$$

该伴随是comonadic的当且仅当f是忠实平坦的.

12.3 Kan扩张

在之前范畴论的讨论中，我们

虽然我们不会在此讨论，但Kan扩张最重要的应用当属一般导出函子的定义.如果给定的范畴$\mathcal{C}$中有一族被称为弱等价的态射W，那么这个范畴被视为携带了同伦信息，这样的范畴被称为同伦范畴(homotopical category).同伦范畴之间的函子并不一定将弱等价映到弱等价，而后者是我们更关心的对象，因此寻找和构造将弱等价映到弱等价，且与给定函子“最相近”的函子在很多问题的解决上是关键的，这样的函子被称为（相对于给定函子的）导出函子(derived functor)，它的构造就是依赖Kan扩张.一般意义下的导出函子并不是非常有用，它或多或少缺少某些具有实际意义的性质，于是当导出函子满足相应性质时，我们会更为关心这样的对象，这些导出函子对应于后面介绍的逐点Kan扩张和绝对Kan扩张.

12.3.1　定义与基本的例子

定义. 给定函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$和$G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，那么$F$关于$G$的左Kan扩张(the left Kan extension of F along G)是函子$\mathcal{L}_G(F):\mathcal{E}\to\mathcal{D}$和自然变换$\eta:F\Rightarrow\mathcal{L}_G(F)\circ G$，满足图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_\eta"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"'] & \end{tikzcd}$$

交换且对任意满足如此交换图的函子$H:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$和自然变换$\xi:F\Rightarrow H\circ G$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_\xi"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E} \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd}$$

使得存在唯一的自然变换$\delta:\mathcal{L}_G(F)\Rightarrow H$满足$\xi=G\delta\circ\eta$，即

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E}, \arrow[ur, bend left, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[ur, bend right, "H"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta"] & \end{tikzcd}$$

或者换句话说，$(\mathcal{L}_G(F),\eta)$在所有满足相应交换图的对象中是始对象.对偶地，我们有F关于G的右Kan扩张(the right Kan extension of F along G)是函子$\mathcal{R}_G(F):\mathcal{E}\to\mathcal{D}$和自然变换$\eta:F\Rightarrow\mathcal{L}_G(F)\circ G$，满足图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "{}_\epsilon\Uparrow"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{R}_G(F)"'] & \end{tikzcd}$$

例 12.13.

例 12.14. 给定范畴$\mathcal{C}$和对象A，对任意函子$F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$，Yoneda引理说明存在自然的同构

$$\varphi:\hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h^A,F)\cong F(A):\psi,$$

其中$\varphi(\eta)=\eta_A(\mathrm{id}_A)$.令$[0]$表示有一个对象和该对象上的恒等态射组成的范畴，

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[rr, "*"] \arrow[dr, "\mathrm{Const}_A"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_{\eta^a}"] & \mathbf{Set} \\ & \mathcal{C} \arrow[ur, "F"'] & \end{tikzcd}$$

其中函子$*$把$[0]$映到只有一个元素的集合$\{*\}$.对任意$a\in F(A)$，有自然变换$\eta^a:\{*\}\to F(A),*\mapsto a$，并且所有的自然变换$*\Rightarrow F\circ\mathrm{Const}_A$都是某个$\eta^a$.特别地，有交换图

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[rr, "*"] \arrow[dr, "\mathrm{Const}_A"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_{\eta^{\mathrm{id}_A}}"] & \mathbf{Set} \\ & \mathcal{C} \arrow[ur, "h^A"'] & \end{tikzcd} .$$

根据Yoneda引理中的证明，$\psi(a)\circ\eta^{\mathrm{id}_A}=\eta^{\psi(a)_A(\mathrm{id}_A)}=\eta^a$，于是证明了有唯一的分解

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[rr, "*"] \arrow[dr, "\mathrm{Const}_A"'] & & \mathbf{Set} \\
& \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "h^A"] \arrow[ur, bend right, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\psi(a)\Downarrow"] &
\end{tikzcd},$$

因此$\mathcal{L}_{\mathrm{Const}_A}(*)=h^A$.

将$\mathcal{C}$换为$\mathcal{C}^\circ$，那么同样地可以证明$\mathcal{R}_{\mathrm{Const}_A}(*)=h_A$.

例 12.15. 任意给定群G，那么存在唯一的函子$[0]\to BG$.对于$\mathcal{C}$中的任意G对象$X:BG\to\mathcal{C}$，自然变换

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[rr, "\mathrm{Const}_A"] \arrow[dr] & \Downarrow & \mathcal{C} \\
& BG \arrow[ur, "X"'] &
\end{tikzcd}$$

对应A到$X(*)$的态射.于是若$\mathcal{C}$中有余积，那么态射$A\to X(*)$对应到G等变的态射

$$\coprod_{g\in G}A\to X(*),$$

其中G在左边的作用由G在指标上的左乘给出，再通过在单位$e\in G$上的限制得到

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[rr, "\mathrm{Const}_A"] \arrow[dr] & \Downarrow_{\iota_e} & \mathcal{C} \\
& BG \arrow[ur, "\coprod_{g\in G}A"'] &
\end{tikzcd}$$

是左Kan扩张$\mathcal{L}(\mathrm{Const}_A)$.

引理 12.1. $\mathcal{L}_G(F)$具有关于F的函子性.

证明. □

Kan扩张的万有性质可以给出特定自然变换之间的一一对应，但问题是，实际中的范畴$\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{D})$和$\mathrm{Fun}(\mathcal{C},\mathcal{E})$可能并不是局部小的.我们并不想借助更高级的集合理论讨论真类之间的双射，因此为了计算$\mathcal{L}_G(F)$和$\mathcal{R}_G(F)$，转而考虑函子

$$\mathrm{Nat}(F,-\circ G):\mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{D})\to\mathbf{SET},$$

它把函子$H:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$映到$F$到该函子复合$H\circ G$的自然变换的全体.如前定义，对于任意的函子$H:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$和自然变换$\xi:F\Rightarrow H\circ G$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \Downarrow_{\xi} & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd},$$

习题7.16说明$-\circ G$和$\mathrm{Nat}(H,-)$都是函子，因此它诱导了

$$\begin{aligned}\mathrm{Nat}(H,-)&\Rightarrow \mathrm{Nat}(F,-\circ G)\\ \mathrm{Nat}(H,K)&\to \mathrm{Nat}(F,K\circ G)\\ \zeta:H\Rightarrow K&\mapsto (\zeta G)\circ\xi:F\Rightarrow H\circ G\Rightarrow K\circ G,\end{aligned}$$

而Kan扩张的泛性质说明了

$$\mathrm{Nat}(\mathcal{L}_G(F),-)\Rightarrow \mathrm{Nat}(F,-\circ G)$$

是自然同构，即$(\mathcal{L}_G(F),\eta)$是函子$\mathrm{Nat}(F,-\circ G)$的代表.对偶地，对于任意的函子$H:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$和自然变换$\xi: H\circ G\Rightarrow F$

$$\begin{tikzcd}\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\xi\Uparrow"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E} \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd},$$

存在相应的

$$\begin{aligned}\mathrm{Nat}(F,-\circ G)&\Rightarrow \mathrm{Nat}(H,-)\\ (\xi\circ(\zeta G),K\circ G)&\mapsto (\zeta:H\Rightarrow K,K),\end{aligned}$$

而Kan扩张的泛性质说明了

$$\mathrm{Nat}(F,-\circ G)\Rightarrow \mathrm{Nat}(\mathcal{R}_G(F),-)$$

是自然同构.对比伴随函子的定义，我们有

定理 12.12. *给定$G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$和范畴$\mathcal{D}$，且任意函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$关于$G$的左Kan扩张与右Kan扩张都存在，那么函子*

$$\begin{aligned}G^*:\mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{D})&\to \mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{D})\\ H&\mapsto H\circ G\end{aligned}$$

的左右伴随存在，分别由$\mathcal{L}_G(-)$和$\mathcal{R}_G(-)$给出.

证明. 根据对称性，我们只需要验证左伴随.事实上，根据前面的讨论只需要说明

$$\begin{aligned}\mathrm{Nat}(H,-)&\Rightarrow \mathrm{Nat}(F,-\circ G)\\ \mathrm{Nat}(H,K)&\to \mathrm{Nat}(F,K\circ G)\\ \zeta:H\Rightarrow K&\mapsto (\zeta G)\circ\xi:F\Rightarrow H\circ G\Rightarrow K\circ G,\end{aligned}$$

对于任意H的自然性，即对任意$\lambda:K_1\Rightarrow K_2$是函子$K_1,K_2:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$间的自然态射，需要验证诱导图

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Nat}(H,K_1) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_*"'] & \mathrm{Nat}(F,K_1\circ G) \arrow[d, "(\lambda G)_*"] \\ \mathrm{Nat}(H,K_2) \arrow[r] & \mathrm{Nat}(F,K_2\circ G)\end{tikzcd}$$

的交换性.一方面，对$\zeta : H \Rightarrow K_1$，向下再向右的映射给出了

$$\zeta \mapsto \lambda \circ \zeta \mapsto (\lambda \circ \zeta)G \circ \xi = (\lambda G) \circ (\zeta G) \circ \xi.$$

另一方面，向右再向下的映射给出了

$$\zeta \mapsto (\zeta G) \circ \xi \mapsto (\lambda G) \circ (\zeta G) \circ \xi,$$

这证明了自然性. □

例 12.16. 设k是域，G是给定的群，$k-\mathbf{Rep}_G$是所有k上的G表示组成的范畴，那么习题??说明存在范畴的等价

$$\mathrm{Funct}(\mathrm{B}G, k-\mathbf{Vec}) \simeq k-\mathbf{Rep}_G.$$

若H是G的子群，那么嵌入自然地给出了函子$i : \mathrm{B}H \hookrightarrow \mathrm{B}G$，于是存在函子

$$i^* : k-\mathbf{Rep}_G \to k-\mathbf{Rep}_H$$

这实际上是群表示的限制，也记为Res_H^G.函子Res_H^G的左右伴随都存在，它的左伴随称为诱导，记为Ind_H^G，它的右伴随称为余诱导，记为Coind_H^G.同样地我们可以对G集合、G空间等进行类似的讨论.

12.3.2 Kan扩张的计算

对于给定的图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{D} \\ \mathcal{E}, & \end{tikzcd}$$

我们尝试构造F沿G的左Kan扩张.对于任意的$B \in \mathrm{ob}\ \mathcal{E}$，按定义$\mathcal{L}_G F(B)$是在$G$的像集中最接近$\mathcal{C}$中该对象在$F$下的像；注意到范畴$G/B$包含了所有$\mathcal{C}$中"在$G$下映到$\mathcal{E}/B$"的态射，它有到$\mathcal{C}$的自然的投影$P_{/B} : G/B \to \mathcal{C}$，其中的终对象是$G$下与$B$最接近的对象；再经过$F$的作用后我们可以在$\mathcal{D}$中衡量与要定义的$\mathcal{L}_G F(B)$的距离，我们要选取最接近的，因此

$$\mathrm{colim}[G/B \xrightarrow{P_{/B}} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}]$$

理论上应该给出左Kan扩张在对象下的作用.于是

定理 12.13. *给定函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$和$G : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$，且对任意任意范畴$\mathcal{E}$中的对象$B$余极限*

$$\mathcal{L}_G F(B) := \mathrm{colim}[G/B \xrightarrow{P_{/B}} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}]$$

存在，那么如上的定义给出了左Kan扩张，并且单位变换

$$\eta : F \Rightarrow \mathcal{L}_G F \circ G$$

*由*colim*的泛性质给出.*

首先回顾范畴G/B的定义（习题7.23），它的对象是配对(A,f)，其中A是$\mathcal{C}$中的对象，$f:G(A)\to B$是$\mathcal{E}$中的态射，并且

$$\hom_{G/B}((A_1,f_1),(A_2,f_2))=\{g\in\hom_{\mathcal{C}}(A_1,A_2)\mid f_1=f_2\circ G(g)\},$$

即有如下交换图

$$\begin{tikzcd} G(A_1) \arrow[rr, "G(g)"] \arrow[dr, "f_1"'] & & G(A_2) \arrow[dl, "f_2"] \\ & B. & \end{tikzcd}$$

同时，若$h:B_1\to B_2$是范畴$\mathcal{E}$中的态射，那么它诱导了函子

$$\begin{aligned} h_*:G/B_1&\to G/B_2\\ (A,f)&\mapsto(A,h\circ f)\\ [g:(A_1,f_1)\to(A_2,f_2)]&\mapsto[g:(A_1,h\circ f_1)\to(A_2,h\circ f_2)], \end{aligned}$$

并且有交换图

$$\begin{tikzcd} G/B_1 \arrow[rr, "h_*"] \arrow[dr, "P_{/B_1}"'] & & G/B_2 \arrow[dl, "P_{/B_2}"] \\ & \mathcal{C}. & \end{tikzcd}$$

证明. 首先我们来说明$\mathcal{L}_GF$的函子性并给出$\eta:F\Rightarrow\mathcal{L}_GF\circ G$.考虑$\mathcal{E}$中$\mathcal{L}_GF$的定义图

$$\begin{tikzcd} F(A_1) \arrow[rr] \arrow[dr, "\lambda_{A_1}"'] & & F(A_2) \arrow[dl, "\lambda_{A_2}"] \\ & \mathcal{L}_GF(B), & \end{tikzcd}$$

其中λ_{A_i}是余极限定义中给出的结构态射.给定范畴$\mathcal{E}$中的态射$h:B_1\to B_2$，由前讨论

$$G/B_1\xrightarrow{P_{/B_1}}\mathcal{C}\xrightarrow{F}\mathcal{D}=G/B_1\xrightarrow{h_*}G/B_2\xrightarrow{P_{/B_2}}\mathcal{C}\xrightarrow{F}\mathcal{D},$$

即$\mathcal{L}_GF(B_1)$的定义图都有到$\mathcal{L}_GF(B_2)$的态射

$$\begin{tikzcd} F(A_1) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{A_1}"'] \arrow[drr, "\mu_{A_1}"] & F(A_2) \arrow[dl, "\lambda_{A_2}"'] \arrow[dr, "\mu_{A_2}"] & \\ \mathcal{L}_GF(B_1) \arrow[rr, dashed] & & \mathcal{L}_GF(B_2), \end{tikzcd}$$

根据余极限的定义，存在唯一的态射$\mathcal{L}_GF(h):\mathcal{L}_GF(B_1)\dashrightarrow\mathcal{L}_GF(B_2)$.若有$\mathcal{E}$中的态射$B_1\xrightarrow{h}B_2\xrightarrow{k}B_3$，那么上述的唯一性保证了

$$\mathcal{L}_GF(k\circ h)=\mathcal{L}_GF(k)\circ\mathcal{L}_GF(h).$$

对于自然变换$\eta:F\Rightarrow\mathcal{L}_GF\circ G$，对任意$\mathcal{C}$中的对象$A$，此时$B=G(A)$，那么$(A,\mathrm{id}_{G(A)})$是$G/B$的对象，于是根据余极限的定义，有结构态射

$$\eta_A=\lambda_A:F(A)\to\mathcal{L}_GF(B),$$

并且与上面相同的论证，对于任意$\mathcal{C}$中的态射$g:A_1\to A_2$有交换图

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "\lambda_{A_1}"'] \arrow[dr, "\mu_{A_1}"] & F(A_2) \arrow[d, "\mu_{A_2}"] \\
\mathcal{L}_G F(B_1) \arrow[r, dashed, "\mathcal{L}_G F(G(g))"'] & \mathcal{L}_G F(B_2),
\end{tikzcd}$$

其中λ, μ以区分不同余极限的定义结构态射，这意味着η是自然的.

接下来需要验证如上给出的$(\mathcal{L}_G F, \eta)$满足相应的泛性质.给定任意的函子$H : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$和自然变换$\xi : F \Rightarrow H \circ G$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\xi"] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd} ,$$

对任意G/B中的对象(A, f)，有

$$F(A) \xrightarrow{\xi_A} H(G(A)) \xrightarrow{H(f)} H(B),$$

根据ξ的自然性和H的函子性，如上给出的态射与$\mathcal{L}_G F(B) = \operatorname{colim}[G/B \xrightarrow{P_{/B}} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}]$的定义图相容，即有交换图

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[rr, "\xi_{A_1}"] \arrow[dr, "\lambda_{A_1}"] \arrow[dd, "F(g)"] & & H(G(A_1)) \arrow[dr, "H(f_1)"] \arrow[dd] & \\
& \mathcal{L}_G F(B) \arrow[rr, dashed, "H(G(g))"] & & H(B), \\
F(A_2) \arrow[rr, "\xi_{A_1}"] \arrow[ur, "\lambda_{A_2}"] & & H(G(A_2)) \arrow[ur, "H(f_2)"'] &
\end{tikzcd}$$

于是存在唯一的态射

$$\mathcal{L}_G F(B) \xrightarrow{\delta_B} H(B).$$

对于如此定义的δ的自然性，考虑$\mathcal{E}$中的态射$h : B_1 \to B_2$，$\mathcal{L}_G F(B_1) \xrightarrow{\delta_{B_1}} H(B_1) \xrightarrow{H(g)} H(B_2)$是下图中唯一的与整幅（其中$\mathcal{L}_G F(B_1)$的定义图只有一部分）图交换的态射

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[rr, "\xi_{A_1}"] \arrow[dr, "\lambda_{A_1}"] \arrow[dd, "F(g)"] & & H(G(A_1)) \arrow[dr, "H(f_1)"] \arrow[dd] & & \\
& \mathcal{L}_G F(B_1) \arrow[rr, dashed, "H(G(g))"] & & H(B_1) \arrow[r, "H(h)"] & H(B_2), \\
F(A_2) \arrow[rr, "\xi_{A_1}"] \arrow[ur, "\lambda_{A_2}"] & & H(G(A_2)) \arrow[ur, "H(f_2)"'] & &
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

同时还有另一部分定义图

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[rr, "\xi_{A_1}"] \arrow[dr, "\mu_{A_1}"] \arrow[dd, "F(g)"] & & H(G(A_1)) \arrow[dr, "H(h \circ f_1)"] \arrow[dd] & \\
& \mathcal{L}_G F(B_2) \arrow[rr, dashed, "H(G(g))"] & & H(B_2), \\
F(A_2) \arrow[rr, "\xi_{A_1}"] \arrow[ur, "\mu_{A_2}"] & & H(G(A_2)) \arrow[ur, "H(h \circ f_2)"'] &
\end{tikzcd}$$

注意到$\mathcal{L}_G F(B_1)$的定义图是$\mathcal{L}_G F(B_2)$的定义图的子图，因此$\mathcal{L}_G F(B_1) \xrightarrow{\mathcal{L}_G F(h)} \mathcal{L}_G F(B_2) \xrightarrow{\delta_{B_2}} H(B_2)$也是与图$(*)$相容的唯一的态射，那么存在交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_G F(B_1) \arrow[r, dashed, "\mathcal{L}_G F(h)"] \arrow[d, "\delta_{B_1}"] & \mathcal{L}_G F(B_2) \arrow[d, "\delta_{B_2}"] \\
H(B_1) \arrow[r, "H(g)"] & H(B_2),
\end{tikzcd}$$

也就是自然性.

接下来验证$\xi = G\delta \circ \eta$，对于任意$\mathcal{C}$中的对象A，取$B = G(A)$和G/B中的对象$(A, \mathrm{id}_{G(A)})$，那么$\mathcal{L}_G F(B)$的定义说明有交换图

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\xi_A"] \arrow[d, "\lambda_A"] & H(G(A)) \arrow[d, "H(\mathrm{id}_{G(A)})"] \\
\mathcal{L}_G F(B) \arrow[r, dashed] & H(G(A)),
\end{tikzcd}$$

即是想要的等式.最后，关于δ的唯一性，交换性意味着有如上的交换图，但根据$\mathcal{L}_G F(B)$的定义虚线的态射必然是唯一的，因此唯一性也得证. □

例 12.17. 考虑偏序集$(\mathbb{Q}, \leq)$和$(\mathbb{R}_+, \leq)$，函数

$$e^x : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

由于是单调函数，因而是函子.

例 12.18. 我们回到例12.16中的讨论，来说明定理12.13可以给出诱导表示和余诱导表示的具体构造.假设子群$H \hookrightarrow G$给出了函子$BH \to BG$，那么它诱导的函子

$$\mathrm{res}_H^G : \mathrm{Funct}(BG, \mathcal{C}) \to \mathrm{Funct}(BH, \mathcal{C})$$

由定理12.12存在左右伴随，分别记为Ind_H^G和Coind_H^G.

任意给定表示$X : BH \to \mathcal{C}$，那么定理12.13说明Ind_H^G是图

$$BH/{*_G} \xrightarrow{P_{/*_G}} BH \xrightarrow{X} \mathcal{C}$$

的余极限，其中$*_G$是BG中唯一的对象.具体而言，根据定理12.13证明之前的讨论，$BH/{*_G}$（这是极限图的指标范畴）中的对象是BG中的态射，即G中的元素，且$\hom_{BH/*_G}(g_1, g_2) = \{h \in H \mid g_1 = g_2 h\}$.依据定理8.10（的对偶），余极限可以用余等值子

$$\begin{tikzcd}
X(*) \arrow[d, "\iota_{(g,h)}"] \arrow[dr, "\iota_{gh}"] & & \\
\coprod_{G \times H} X(*) \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \coprod_G X(*) \arrow[r, two heads, "q"] & \mathrm{Ind}_H^G(X(*)) \\
X(*) \arrow[u, "\iota_{(g,h)}"] \arrow[r, "h_*"] & X(*) \arrow[u, "\iota_g"'] &
\end{tikzcd}$$

描述，其中任意给定$BH/*_G$中的态射$h\in H$，记它的定义域是gh，那么余定义域是g.

更具体地，存在$\mathrm{Ind}_H^G(X(*))$的表示$\coprod_{G/H}X$使得结构映射q可以被描述出来.给定G/H的一组代表元$G/H=\{g_iH\mid g_i\in G\}$，那么任意$g\in G$都可以表示为唯一的$g=g_jh_0$，其中$g_j$是某个代表元，$h_0\in H$.那么$q:\coprod_G X(*)\to\coprod_{G/H}X(*)$定义为

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "(h_0)_*"] \arrow[d, "\iota_g"] & X \arrow[d, "\iota_{g_j}"] \\
\coprod_G X(*) \arrow[r, dashed, "q"] & \coprod_{G/H} X(*).
\end{tikzcd}$$

任给定G中的元素g_0，它在$\coprod_{G/H}X(*)$上的作用是左乘在指标集上的，具体说是交换图

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{G\times H} X(*) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "{(g,h)\mapsto(g_0g,h)}"] & \coprod_G X(*) \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "g\mapsto g_0g"] & \mathrm{Ind}_H^G(X(*)) \arrow[d, "(g_0)_*"] \\
\coprod_{G\times H} X(*) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \coprod_G X(*) \arrow[r, two heads, "q"] & \mathrm{Ind}_H^G(X(*)).
\end{tikzcd}$$

对偶地，等值子图

$$\begin{tikzcd}
 & & & X(*) \\
\mathrm{coind}_H^G X\cong\prod_{H\backslash G}X(*) \arrow[r, hook, "m"] & \prod_G X(*) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\pi_g"] \arrow[urr, "\pi_{hg}"] & & \prod_{H\times G} X(*) \arrow[u, "\pi_{(h,g)}"] \arrow[d, "\pi_{(h,g)}"] \\
 & X(*) \arrow[rr, "h_*"] & & X(*),
\end{tikzcd}$$

定义了余诱导表示，单态射m有类似的描述，G在$\mathrm{coind}_H^G X$上的作用由G在指标集上的右乘诱导.特别地，当$\mathcal{C}=k-\mathbf{Vect}$是域$k$上的向量空间且$H$是$G$中的有限指标子群时，有限多个对象的积和余积是同构的，因此如上讨论的两个定义图给出了相同的乘积（余乘积），因此$\mathrm{ind}_H^G X\cong\mathrm{coind}_H^G X$，并且这个同构还是保持$G$作用的，因而此时的左右Kan扩张相同.

习题 12.10. 根据例12.18中q的定义证明$\coprod_{G/H}X(*)$是$\mathrm{Ind}_H^G(X(*))$.

证明. 首先对例12.18中q的定义解释：按照余积的泛性质，确定$q:\coprod_G X(*)\to\coprod_{G/H}X(*)$只需要知道每个$g\in G$作为指标所对应的$X(*)$到$\coprod_{G/H}X(*)$的态射，而这恰是$\iota_{g_j}\circ(h_0)_*$.

接下来验证如此的定义与图相容，即$q\circ\alpha=q\circ\beta$.根据$\coprod_{G\times H}X(*)$对应的泛性质，如上当且仅当$q\circ\alpha\circ$

$\iota_{(g,h)} = q \circ \beta \circ \iota_{(g,h)}$对任意$g \in G, h \in H$成立.验证得

$$\begin{aligned}
q \circ \alpha \circ \iota_{(g,h)} &= X \xrightarrow{\iota_{gh}} \coprod_G X(*) \xrightarrow{q} \coprod_{G/H} X(*) \\
&= X \xrightarrow{\iota_{g_j h_0 h}} \coprod_G X(*) \xrightarrow{q} \coprod_{G/H} X(*) \\
&= X \xrightarrow{(h_0 h)_*} X \xrightarrow{\iota_{g_j}} \coprod_{G/H} X(*) \\
&= X \xrightarrow{h_*} X \xrightarrow{(h_0)_*} X \xrightarrow{\iota_{g_j}} \coprod_{G/H} X(*) \\
&= X \xrightarrow{h_*} X \xrightarrow{\iota_g} \coprod_G X(*) \xrightarrow{q} \coprod_{G/H} X(*) \\
&= q \circ \beta \circ \iota_{(g,h)}.
\end{aligned}$$

最后来验证所给的态射和对象满足相应的泛性质，对任意满足$f \circ \alpha = f \circ \beta$的态射$f : \coprod_G X(*) \to Y$，都有唯一的态射$\tilde{f} : \coprod_{G/H} X(*) \to Y$使得$f = \tilde{f} \circ q$即交换图

$$\begin{tikzcd}
\coprod_G X(*) \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Ind}_H^G(X(*)) \arrow[d, "\tilde{f}"] \\
& Y.
\end{tikzcd}$$

由于$f \circ \alpha = f \circ \beta$，自然有$f \circ \alpha \circ \iota_{(g,h)} = f \circ \beta \circ \iota_{(g,h)}$，这意味着$f \circ \iota_{gh} = f \circ \iota_g \circ h_*$.那么对任意$g \in G$，记$g = g_j h_0$，定义$\tilde{f}$是由$\tilde{f} \circ \iota_{g_j} \circ (h_0)_* = f \circ \iota_g$诱导的态射，由如上关系显然$f = \tilde{f} \circ q$；对于唯一性，假设存在如此的$\tilde{f}$，那么

$$\begin{aligned}
\tilde{f} \circ \iota_{g_j} &= \tilde{f} \circ \iota_{g_j} \circ (h_0)_* \circ (h_0^{-1})_* \\
&= f \circ \iota_g \circ (h_0^{-1})_* \\
&= f \circ \iota_{g_j},
\end{aligned}$$

这依然是确定的，故唯一性得证. □

例 12.19. 在例7.10中，我们介绍了群G的轨道范畴$\mathrm{Orb}(G)$.注意到$\hom_{\mathrm{Orb}(G)}(G/\{e\}, G/\{e\}) = G^\circ$，于是我们有自然的嵌入

$$\mathrm{B}G \hookrightarrow \mathrm{Orb}(G).$$

任意给定集合X上的G作用$X : \mathrm{B}G \to \mathbf{Set}$，定理12.13可以用来构造右Kan扩张

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}G \arrow[rr, "X"] \arrow[dr, hook] & \arrow[d, phantom, "\epsilon\Uparrow"] & \mathbf{Set} \\
& \mathrm{Orb}(G)^\circ. \arrow[ur, dashed, "\mathcal{R}_i(X)"'] &
\end{tikzcd}$$

总结下来，右Kan扩张$\mathcal{R}_i(X)$恰好是不动点函子，将对象G/H映到对象X^H，

12.3.3　逐点Kan扩张

通常情况下由Kan扩张定义的泛性质对象并不具有良好的性质，比如说在导出函子中的应用，这一方面是因为之前的定义太过宽泛，而对应它的方案是考虑特定的Kan扩张.为此，我们首先介绍定义：

定义. 给定函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$和$G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，那么$F$关于$G$的左Kan扩张是$(\mathcal{L}_G(F),\eta)$，如图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_\eta"] & \mathcal{D} \arrow[r, "L"] & \mathcal{M} \\
& \mathcal{E}, \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"'] & &
\end{tikzcd}$$

若函子$L:\mathcal{D}\to\mathcal{M}$满足复合$(L\circ\mathcal{L}_G(F),L\eta)$是$L\circ F$关于$G$的左Kan扩张，则称$L$保左Kan扩张(preserves left Kan extensions).

有一类特殊的Kan扩张

定义. 给定函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$和$G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，左Kan扩张

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_\eta"] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"'] &
\end{tikzcd}$$

存在，若任意的函子$L:\mathcal{D}\to\mathcal{M}$都保Kan扩张$\mathcal{L}_G(F)$，则称这个Kan扩张$\mathcal{L}_G(F)$是绝对的(absolute).

引理 12.2. *左伴随保左Kan扩张.*

证明1. 给定函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$和$G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，$F$关于$G$的左Kan扩张是$(\mathcal{L}_G(F),\eta)$，

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_\eta"] & \mathcal{D} \arrow[r, "L"] & \mathcal{M} \\
& \mathcal{E}, \arrow[ur, dashed, "\mathcal{L}_G(F)"'] & &
\end{tikzcd}$$

函子$L:\mathcal{D}\to\mathcal{M}$有右伴随$R:\mathcal{M}\to\mathcal{D}$，且对应了单位$\theta:\mathrm{id}_\mathcal{D}\Rightarrow RL$和余单位$\epsilon:LR\Rightarrow\mathrm{id}_\mathcal{M}$，那么任意给定函子$H:\mathcal{E}\to\mathcal{M}$，

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{M})}(L\circ\mathcal{L}_G(F),H) &\cong \hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{D})}(\mathcal{L}_G(F),R\circ H)\\
&\cong \hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F,R\circ H\circ G)\\
&\cong \hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(L\circ F,H\circ G),
\end{aligned}$$

其中第一、三个同构是因为习题8.15，第二个同构是因为定理12.12.于是取$H=L\circ\mathcal{L}_G(F)$，那么习题8.15和定理12.12中的映射给出

$$\mathrm{id}_{L\circ\mathcal{L}_G(F)}\mapsto\theta\mathcal{L}_G(F)\mapsto\theta(\mathcal{L}_G(F)\circ G)\circ\eta\mapsto\epsilon L(\mathcal{L}_G(F)\circ G)\circ L\theta(\mathcal{L}_G(F)\circ G)\circ L\eta$$

注意到$\epsilon L(\mathcal{L}_G(F)\circ G)\circ L\theta(\mathcal{L}_G(F)\circ G)\circ L\eta=(\epsilon L\circ L\theta)(\mathcal{L}_G(F)\circ G)\circ L\eta=L\eta$，于是我们证明了函子的同构

$$\mathrm{Nat}(L\circ\mathcal{L}_G(F),-)\cong\hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(L\circ F,-\circ G):\mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{M})\to\mathbf{Set},$$

那么$(L\circ\mathcal{L}_G(F),\mathrm{id}_{L\circ\mathcal{L}_G(F)})$关于$\mathrm{Nat}(L\circ\mathcal{L}_G(F),-)$的泛性质说明了$(L\circ\mathcal{L}_G(F),L\eta)$关于$\hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{M})}$的泛性质，因此$(L\circ\mathcal{L}_G(F),L\eta)$是左Kan扩张. □

事实上我们还可以构造性地完成证明：

证明2. 任意给定自然变换$\alpha:LF\Rightarrow HG$，

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r,"F"] \arrow[dr,"G"'] & \mathcal{D} \arrow[rr,equal] \arrow[d,phantom,"\Downarrow\alpha"] \arrow[dr,"L"] & \arrow[d,phantom,"\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E} \arrow[r,"H"'] & \mathcal{M} \arrow[ur,"R"'] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr,"F"] \arrow[dr,"G"'] & \arrow[d,phantom,"\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \arrow[r,equal] \arrow[d,phantom,"\Downarrow\exists!\xi"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E} \arrow[ur,dashed,"\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[r,"H"'] & \mathcal{M} \arrow[ur,"R"'] & \end{tikzcd}$$

根据$(\mathcal{L}_G(F),\eta)$的泛性质存在唯一的$\xi:\mathcal{L}_G(F)\Rightarrow R\circ H$，即左图可以对应到右图.进一步地，与余单位$\epsilon:LR\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$的复合（如下图）

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r,"F"] \arrow[dr,"G"'] & \mathcal{D} \arrow[d,phantom,"\Downarrow\alpha"] \arrow[dr,"L"] & \\ & \mathcal{E} \arrow[r,"H"'] & \mathcal{M} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r] \arrow[dr,"G"'] & \mathcal{D} \arrow[rr,equal] \arrow[d,phantom,"\Downarrow\alpha"] \arrow[dr,"L"] & \arrow[d,phantom,"\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \arrow[d,phantom,"\Downarrow\epsilon"] \arrow[dr,"L"] & \\ & \mathcal{E} \arrow[r,"H"'] & \mathcal{M} \arrow[ur,"R"'] \arrow[rr,equal] & & \mathcal{M} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr] \arrow[dr,"G"'] & \arrow[d,phantom,"\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \arrow[r,equal] \arrow[d,phantom,"\Downarrow\exists!\xi"] & \mathcal{D} \arrow[d,phantom,"\Downarrow\epsilon"] \arrow[dr,"L"] & \\ & \mathcal{E} \arrow[ur,dashed,"\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[r,"H"'] & \mathcal{M} \arrow[ur,"R"'] \arrow[rr,equal] & & \mathcal{M} \end{tikzcd}$$

说明了α有沿$L\eta$的分解，分解的另一部分恰是复合$(\epsilon H\circ L\xi)G:L\circ\mathcal{L}_G(F)\circ G\Rightarrow H\circ G$.

再来证明如上分解的唯一性.给定任意分解

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r,"F"] \arrow[dr,"G"'] & \mathcal{D} \arrow[d,phantom,"\Downarrow\alpha"] \arrow[dr,"L"] & \\ & \mathcal{E} \arrow[r,"H"'] & \mathcal{M} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr,"F"] \arrow[dr,"G"'] & \arrow[d,phantom,"\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \arrow[d,phantom,"\Downarrow\zeta"] \arrow[dr,"L"] & \\ & \mathcal{E} \arrow[ur,dashed,"\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[rr,"H"'] & & \mathcal{M}, \end{tikzcd}$$

再与单位$\theta:\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\Rightarrow RL$的复合给出

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r,"F"] \arrow[dr,"G"'] & \mathcal{D} \arrow[rr,equal] \arrow[d,phantom,"\Downarrow\alpha"] \arrow[dr,"L"] & \arrow[d,phantom,"\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E} \arrow[r,"H"'] & \mathcal{M} \arrow[ur,"R"'] & \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr,"F"] \arrow[dr,"G"'] & \arrow[d,phantom,"\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \arrow[rr,equal] \arrow[d,phantom,"\Downarrow\zeta"] \arrow[dr,"L"] & \arrow[d,phantom,"\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E} \arrow[ur,dashed,"\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[rr,"H"'] & & \mathcal{M} \arrow[ur,"R"'] & \end{tikzcd}$$

$R\alpha\circ\theta F:F\Rightarrow R\circ H\circ G$沿$\eta$的分解$R\alpha\circ\theta F=R(\zeta G\circ L\eta)\circ\theta F=R\zeta G\circ RL\eta\circ\theta F$，记$\xi=R\zeta\circ\theta\mathcal{L}_G(F):\mathcal{L}_G(F)\Rightarrow R\circ H$

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[rr,equal] \arrow[d,phantom,"\Downarrow\zeta"] \arrow[dr,"L"] & \arrow[d,phantom,"\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \\ \mathcal{E} \arrow[ur,dashed,"\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[rr,"H"'] & & \mathcal{M}, \arrow[ur,"R"'] & \end{tikzcd}$$

那么根据左Kan扩张$\mathcal{L}_G(F)$的泛性质如此的ξ唯一，恰是上一段证明存在性的ξ，并且$R\alpha\circ\theta F = R(\zeta G\circ L\eta)\circ\theta F = R\zeta G\circ RL\eta\circ\theta F = R\zeta G\circ\theta\mathcal{L}_G(F)G\circ\eta = \xi G\circ\eta$（这里如同证明1用到了$\eta$的自然性），再继续复合余单位$\epsilon : LR\Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$得到

$$\begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[r, equal] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\xi"] & \mathcal{D} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \\ \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[r, "H"'] & \mathcal{M} \arrow[ur, "R"'] \arrow[rr, equal] & & \mathcal{M} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\zeta"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \\ \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[rr, "H"'] & & \mathcal{M} \arrow[ur, "R"'] \arrow[rr, equal] & & \mathcal{M} \end{tikzcd} = \begin{tikzcd} & \mathcal{D} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\zeta"] & \\ \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[rr, "H"'] & & \mathcal{M}, \end{tikzcd}$$

这意味着$\zeta = \epsilon H\circ L\xi$是唯一的. □

例 12.20. 考虑忘却函子$U : \mathbf{Top}\to\mathbf{Set}$，根据例8.1函子$U$的左右伴随都存在，于是引理12.2（及其对偶）说明U同时保左右Kan扩张.这点在例12.18中也有体现.

例 12.21. 考虑忘却函子$U : k-\mathbf{Vec}\to\mathbf{Set}$，它是右伴随函子因此保极限，但注意到$\mathbf{Vec}$中的余极限并不是不交并，因此$U$不保余极限.例12.18也说明了，由$H$线性表示余诱导的$G$线性表示的底集和作为$H$集合诱导的$G$集合不相同（$\mathbf{Set}$和$k-\mathbf{Vec}$的余积不同），但由$H$线性表示诱导的$G$线性表示的底集和作为$H$集合诱导的$G$集合相同.

定义. 给定函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$和$G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，$\mathcal{D}$是局部小范畴，右Kan扩张$(\mathcal{R}_G(F),\epsilon)$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\epsilon"] & \mathcal{D} \arrow[r, "\hom_{\mathcal{D}}(X,-)"] & \mathbf{Set} \\ & \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{R}_G(F)"'] & & \end{tikzcd}$$

若满足对任意$X\in\mathrm{ob}\,\mathcal{D}$，$\hom_{\mathcal{D}}(X,-)$都保Kan扩张，则称$\mathcal{R}_G(F)$是逐点右Kan扩张(pointwise right Kan extension).

逐点左Kan扩张的定义是取对偶得来的：

定义. 给定函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$和$G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，$\mathcal{D}$是局部小范畴，作Kan扩张$(\mathcal{L}_G(F),\eta)$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E}, \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"'] & \end{tikzcd}$$

若取对偶后的图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}^\circ \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\eta^\circ\Uparrow"] & \mathcal{D}^\circ \arrow[r, "\hom_{\mathcal{D}}(-,X)"] & \mathbf{Set} \\ & \mathcal{E}^\circ, \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"'] & & \end{tikzcd}$$

满足对任意$\mathcal{D}$中的对象X，$\hom_{\mathcal{D}}(-,X)$都保Kan扩张，则称$(\mathcal{L}_G(F),\eta)$是逐点左Kan扩张(pointwise left Kan extension).

由于协变hom函子保极限（命题8.11），定理12.13（和对偶）中构造给出来的有Kan扩张是逐点的.值得注意的是，这个结果的逆也是正确的，如下定理也解释了如此命名的原因——逐点Kan扩张可以由极限或余极限逐点计算.

定理 12.14. *给定函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$和$G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，$\mathcal{D},\mathcal{E}$是局部小范畴，$F$沿$G$的Kan扩张$\mathcal{R}_GF$和$\mathcal{L}_GF$是逐点的当且仅当它们可以由*

$$\mathcal{R}_GF(B):=\lim[B\backslash G\xrightarrow{P_{B\backslash}}\mathcal{C}\xrightarrow{F}\mathcal{D}]$$

和

$$\mathcal{L}_GF(B):=\operatorname{colim}[G/B\xrightarrow{P_{/B}}\mathcal{C}\xrightarrow{F}\mathcal{D}]$$

计算得来.

为完成定理的证明，我们需要如下一个引理：

引理 12.3. *给定范畴$\mathcal{C},\mathcal{D}$和$\mathcal{E}$，函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D},G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，取$\mathcal{E}$中对象$B$，记$P_{B\backslash}:B\backslash G\to\mathcal{C}$是自然的投影函子，那么对$\mathcal{D}$中的任意对象$X$都存在集合间的同构*

$$\operatorname{Cone}(X,F\circ P_{B\backslash})\cong\operatorname{Nat}(\hom_{\mathcal{E}}(B,G(-)),\hom_{\mathcal{D}}(X,F(-))).$$

证明. 函子Cone的定义在8.4.1节中，按定义$\operatorname{Cone}(X,F\circ P_{B\backslash})$的对象是$(\lambda,\{f_i:B\to G(A_i)\}_{A_i\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}})$，其中$\lambda:\operatorname{Const}_X\Rightarrow F$是$\operatorname{Cone}(X,F)$中的锥，$\{f_i:B\to G(A_i)\}_{A_i\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}}$确定了$B\backslash G$中的一个对象，图$FP_{B\backslash}$内的态射$h:A_i\to A_j$必然满足$G(h)\circ f_i=f_j$.

考虑给定一个自然变换$\lambda:\hom_{\mathcal{E}}(B,G(-))\Rightarrow\hom_{\mathcal{D}}(X,F(-))$，按定义它将$\mathcal{D}$中的态射$f_i:B\to G(A_i)$映到$\lambda_{A_i}(f_i):X\to F(A_i)$，并且任意给定$\mathcal{C}$中的态射$h:A_i\to A_j$，图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{E}}(B,G(A_i)) \arrow[r, "\lambda_{A_i}"] \arrow[d, "(G(h))_*"'] & \hom_{\mathcal{D}}(X,F(A_i)) \arrow[d, "(F(h))_*"] \\
\hom_{\mathcal{E}}(B,G(A_j)) \arrow[r, "\lambda_{A_j}"] & \hom_{\mathcal{D}}(X,F(A_j))
\end{tikzcd}$$

交换（λ自然性的定义），即

$$F(h)\circ\lambda_{A_j}(f_i)=(F(h))_*(\lambda_{A_j}(f_i))=(F(h))_*\circ\lambda_{A_i}(f_i)=\lambda_{A_j}\circ(G(h))_*(f_i)=\lambda_{A_j}(G(h)\circ f_i),$$

这意味着交换图

$$\begin{tikzcd}
 & G(A_i) \arrow[dd, "G(h)"] \\
B \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & \\
 & G(A_j)
\end{tikzcd}$$

诱导了交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & F(A_i) \arrow[dd, "F(h)"] \\
X \arrow[ur, "\lambda_{A_i}(f_i)"] \arrow[dr, "\lambda_{A_j}(f_j)"'] & \\
 & F(A_j),
\end{tikzcd}
$$

于是给出了映射

$$\Psi : \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{E}}(B, G(-)), \hom_{\mathcal{D}}(X, F(-))) \to \mathrm{Cone}(X, F \circ P_{B\backslash}).$$

反过来任意给定锥

$$
\begin{tikzcd}
 & F \circ P_{B\backslash}(A_i, f_i) \arrow[dd, "F(h)"] \\
X \arrow[ur, "\lambda_i"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & \\
 & F \circ P_{B\backslash}(A_j, f_j),
\end{tikzcd}
$$

定义变换

$$\lambda : \hom_{\mathcal{E}}(B, G(-)) \Rightarrow \hom_{\mathcal{D}}(X, F(-))$$
$$\lambda_{A_i} : \hom_{\mathcal{E}}(B, G(A_i)) \to \hom_{\mathcal{D}}(X, F(A_i))$$
$$f_i \mapsto \lambda_i,$$

我们需要验证它的自然性，由前面的讨论需要验证对任意的$h : A_i \to A_j$，

$$F(h) \circ \lambda_{A_j}(f_i) = \lambda_{A_j}(G(h) \circ f_i).$$

此时，取$B\backslash G$中的对象满足$f_j = G(h) \circ f_i : B \to G(A_j)$，那么定义得$\lambda_j = \lambda_{A_j}(f_j) = \lambda_{A_j}(G(h) \circ f_i)$，根据原锥的交换性自然性得证.于是给出了映射

$$\Phi : \mathrm{Cone}(X, F \circ P_{B\backslash}) \to \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{E}}(B, G(-)), \hom_{\mathcal{D}}(X, F(-))).$$

明显地两个映射互为逆，得证. □

定理*12.14*的证明. 我们只证明一方面，另一方面对偶地可以得到.

假设右Kan扩张$\mathcal{R}_G(F)$是逐点的，那么对任意$\mathcal{D}$中的对象X，$\hom_{\mathcal{D}}(X, \mathcal{R}_G(F)(-))$是$\hom_{\mathcal{D}}(X, F(-))$沿$G$的有Kan扩张，那么根据Yoneda引理和定理12.12（的证明部分），

$$
\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{D}}(X, \mathcal{R}_G(F)(-)) &\cong \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{E}}(B, -), \hom_{\mathcal{D}}(X, \mathcal{R}_G(F)(-))) \\
&\cong \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{E}}(B, G(-)), \hom_{\mathcal{D}}(X, F(-))) \\
&\cong \mathrm{Cone}(X, F \circ P_{B\backslash}),
\end{aligned}
$$

其中最后一步用到了引理12.3，这意味着$\mathcal{R}_G(F)(B)$是$\lim[B\backslash G \xrightarrow{P_{B\backslash}} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}]$. □

值得注意的是，沿满忠实的函子给出的逐点Kan扩张事实上直接给出了沿该函子的分解：

推论 12.14.1. *沿用定理12.14的记号，若$G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$是满忠实的，则任意逐点左Kan扩张的单位定义了自然同构*

$$\mathcal{L}_G(F)\circ G\cong F.$$

证明. 根据习题7.23，存在范畴之间的同构$\mathcal{C}/A\cong G/G(A)$，并且这个同构显然与二者到$\mathcal{C}$的投影交换，因此根据定理12.14，

$$\mathcal{L}_G(F)\circ G(A):=\operatorname{colim}[\mathcal{C}/A\xrightarrow{P_{/A}}\mathcal{C}\xrightarrow{F}\mathcal{D}],$$

但此时指标范畴$\mathcal{C}/A$存在终对象(A,id_A)，根据习题8.18，这个余极限恰好是

$$F\circ P_{/A}(A,\mathrm{id}_A))=F(A).$$

此外，单位η的定义说明它实质给出了同构$\eta_A:F(A)\xrightarrow{\sim}\mathcal{L}_G(F)\circ G(A)$. □

另一方面，逐点Kan扩张也可以用来描述极限和余极限.在练习8.19中，我们构造了范畴$\mathrm{Cone}(\mathcal{J})$和$\mathrm{Cocone}(\mathcal{J})$，借助它们和逐点Kan扩张可以重新叙述极限和余极限：

命题 12.15. *范畴$\mathcal{C}$包含了图$\mathcal{J}$的所有极限当且仅当函子$\mathrm{res}:\mathrm{Funct}(\mathrm{Cone}(\mathcal{J}),\mathcal{C})\to\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{C})$有由逐点Kan扩张定义的右伴随*

$$\mathrm{res}:\mathrm{Funct}(\mathrm{Cone}(\mathcal{J}),\mathcal{C})\leftrightarrows\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{C}):\lim,$$

记为$\lim$.

证明. 根据习题7.20的构造，存在满忠实的嵌入函子$i:\mathcal{J}\hookrightarrow\mathrm{Cone}(\mathcal{J})$（这个嵌入函子不是习题8.19定义图中的对角函子；并且限制函子就是嵌入函子i的拉回）.记$\mathrm{Cone}(\mathcal{J})$的顶点对象为$S$.于是，由定理12.12，沿$i$的右Kan扩张（如果存在）恰好是函子res的右伴随.

若如此的右伴随存在，任意给定图$F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$，那么根据右Kan扩张的泛性质$\lim(F)(S)$恰好是图$F$的极限.反过来，若所有的极限存在，注意到对$\mathcal{J}$中的任意对象$j$，$j\backslash i=j\backslash\mathcal{J}$，特别地$S\backslash i=\mathcal{J}$，那么定理8.10给出的计算

$$\mathcal{R}_i(F)=\lim[A\backslash i\xrightarrow{P_{A\backslash}}\mathcal{J}\xrightarrow{F}\mathcal{C}]$$

由于lim的存在是可行的（习题8.20），于是右Kan扩张存在. □

注意如上命题的等价结论要远强于某个特定的图的极限的存在性，因为它描述的是所有以$\mathcal{J}$为指标的图的极限的存在性.实际上如上命题从另一个角度解释了lim的函子性（定理8.12）.

12.3.4 “Kan扩张包含所有概念”

本节的最后我们将试图用Kan扩张的概念来重述之前所有范畴体系下的泛性质概念，这可以看作是对MacLane著名论断“Kan扩张包含所有范畴论的其他概念”(The notion of Kan extensions subsumes all the other fundamental concepts of category theory)的解释.

命题 12.16 (极限（余极限）是Kan扩张). 给定函子$F:\mathcal{J}\to\mathcal{D}$，记$q:\mathcal{J}\to[0]$是唯一确定的收缩函子，那么$F$沿$q$的左Kan扩张

$$\begin{tikzcd} \mathcal{J} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "q"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_\eta"] & \mathcal{D} \\ & {[0]} \arrow[ur, dashed, "\mathcal{L}_q(F)"'] & \end{tikzcd}$$

给出了余极限$\mathrm{colim}_{\mathcal{J}}F$.

证明. 根据构造，函子的复合$\mathcal{L}_q(F)\circ q$在$\mathcal{D}$中只给出一个对象$\mathcal{L}_q(F)(\{*\})$，η确定的是一族态射$\eta_j:F(j)\to\mathcal{L}_q(F)(\{*\})$，自然性说明这恰是图$F$下的锥.

$\mathcal{L}_q(F)$的泛性质说明，对于任意给定的函子$H:[0]\to\mathcal{D}$和自然变换$\xi:F\Rightarrow H\circ q$（按照前一段的讨论这是一个图$F$下的锥），存在唯一的$\theta:\mathcal{L}_q(F)\Rightarrow H$使得$\xi=q\theta\circ\eta$.注意到$\mathcal{L}_q(F)\circ q$和$H\circ q$都只确定了一个对象，因此自然变换$\theta:\mathcal{L}_q(F)\Rightarrow H$是一个态射

$$\theta_{\{*\}}:\mathcal{L}_q(F)(\{*\})\to H(\{*\}),$$

这意味着$\mathcal{L}_q(F)$的泛性质恰是colim满足的泛性质，得证. □

命题 12.17 (伴随是Kan扩张). *1. 若$F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$是伴随函子对，且$\eta:\mathrm{id}\Rightarrow GF$是单位，$\delta:FG\Rightarrow\mathrm{id}$是余单位，那么$(G,\eta)$是$F$沿$\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$的左Kan扩张，$(F,\delta)$是$G$沿$\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$的右Kan扩张：*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_\eta"] & \mathcal{C} \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, dashed, "G\cong\mathcal{L}_F\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "{}_\epsilon\Uparrow"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{C}, \arrow[ur, dashed, "F\cong\mathcal{R}_G\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & \end{tikzcd}$$

并且这两个Kan扩张都是绝对Kan扩张.

2. 反过来，若给定函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，$(G,\eta:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\Rightarrow GF)$是$F$沿$\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$的左Kan扩张，且$F$保这个Kan扩张，那么$F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$是伴随函子对.

证明. 1. 习题8.16说明伴随对$F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$诱导了新的伴随对

$$G^*:\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{C})\leftrightarrows\mathrm{Funct}(\mathcal{D},\mathcal{C}):F^*,$$

这意味着对于任意函子$K:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$存在自然的同构

$$\mathrm{Nat}(G,K)\cong\mathrm{Nat}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}},K\circ F),$$

然而上式恰好说明了G满足左Kan扩张$\mathcal{L}_F\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$的泛性质.对偶于习题8.15，给定函子$H:\mathcal{C}\to\mathcal{E}=\mathcal{C},K:$

$\mathcal{D} \to \mathcal{E} = \mathcal{C}$，有自然的同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Nat}(H \circ G, K) &\cong \mathrm{Nat}(H, K \circ F) \\ \alpha &\mapsto \alpha F \circ H\eta \\ K\epsilon \circ \beta G &\leftarrow\!\shortmid \beta, \end{aligned}$$

在如上$H = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$的情形，$\alpha$对应的分解刚好是$\alpha F \circ \eta$，即$(G, \eta)$有相应的泛性质.

同样根据习题8.16，对任意局部小范畴$\mathcal{E}$，F, G诱导了伴随$G^* : \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \rightleftarrows \mathrm{Funct}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) : F^*$，于是对任意的函子$H : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$，上面的论述不变地成立，即$(HG, H\eta)$有相应的泛性质.

2. 根据定理8.4，伴随函子等价于满足粘贴图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, equal] & & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, bend right, "F"'] \arrow[d, bend left, "F"] \arrow[d, phantom, "\overset{\mathrm{id}_F}{\Rightarrow}"] \\
\mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \\
\mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, equal] & & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \\
\mathcal{D} \arrow[u, bend left, "G"] \arrow[u, bend right, "G"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\mathrm{id}_G}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}$$

的函子对$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$和单位$\eta$余单位$\epsilon$.根据假设，$F$保该Kan扩张意味着$(FG, F\eta)$是$F$沿本身的Kan扩张，这意味着分解

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[urr, equal, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

是存在的，即id_F沿$F\eta$的分解给出了自然变换

$$\epsilon : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}.$$

根据定义立即可以得到

$$\epsilon F \circ F\eta = \mathrm{id}_F,$$

这证明了第一个等式.同时图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, equal] & & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, bend left, "G"] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\mathrm{id}}{\Rightarrow}"] &
\end{tikzcd},$$

是自然变换$\mathrm{id}: G \Rightarrow G$的两个分解，其中第一个是$G\epsilon \circ \eta G$，这样根据Kan扩张的唯一性$G\epsilon \circ \eta G = \mathrm{id}_G$，这证明了$F, G$是伴随，$\eta, \epsilon$分别是单位和余单位.

$\square$

接下来我们将用简单图的逐点Kan扩张叙述并推广Yoneda引理.根据Kan扩张的泛性质，任意函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$沿$\mathrm{id} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$的右Kan扩张是（更准确地讲，同构于）$F$，根据定义这必然是逐点Kan扩张，于是根据定理12.14对任意$\mathcal{C}$中的对象A，

$$F(A) \cong \lim[A\backslash\mathcal{C} \xrightarrow{P_{A\backslash}} \mathcal{C} \to \mathcal{D}].$$

特别地当F是函子$\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$时，

$$\begin{aligned} F(A) &\cong \hom_{\mathbf{Set}}(\{*\}, F(A)) \cong \hom_{\mathbf{Set}}(\{*\}, \lim(F \circ P_{A\backslash})) \cong \mathrm{Cone}(\{*\}, F \circ P_{A\backslash}) \\ &\cong \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{C}}(A, -), \hom_{\mathbf{Set}}(\{*\}, F(-))) \cong \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{C}}(A, -), F), \end{aligned}$$

其中第三个同构（红色标注）来自于极限的泛性质，第二行第一个同构是习题8.18，这个结果恰是Yoneda引理.从上面的证明中可以看出，将$F(A)$用极限式表出是Yoneda的核心，因而我们也称此式为Yoneda引理.

如果考虑定理8.10，那么极限$\lim[A\backslash\mathcal{C} \xrightarrow{P_{A\backslash}} \mathcal{C} \to \mathcal{D}]$可以由定理中的等值子图来表示，具体来说，在定理8.10的描述中，图是$A\backslash\mathcal{C}$，它的对象恰好是所有的$A \xrightarrow{f} X$，态射对应于$A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y$，两个态射分别由$g : (A \xrightarrow{f} X) \to (A \xrightarrow{g\circ f} Y)$的自然作用和平凡作用诱导，于是我们证明了如下推广的Yoneda引理：

命题 12.18 (Yoneda引理). 给定小范畴$\mathcal{C}$和有乘积、等值子的范畴$\mathcal{D}$，$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是函子，那么图

$$F(A) \hookrightarrow \prod_{A\xrightarrow{f}X} F(X) \rightrightarrows \prod_{A\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}Y} F(Y)$$

是等值子图，其中映射$\prod_{A\xrightarrow{f}X} F(X) \rightrightarrows \prod_{A\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}Y} F(Y)$由图

$$\begin{tikzcd} & F(Y) \\ \prod_{A\xrightarrow{f}X} F(X) \arrow[ur, "\pi_{g\circ f}"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\pi_f"'] & \prod_{A\xrightarrow{f}X\xrightarrow{g}Y} F(Y) \arrow[u, "\pi_g"'] \arrow[d, "\pi_g"] \\ F(X) \arrow[r, "F(g)"] & F(Y), \end{tikzcd}$$

定义.

如同其他抽象废话，命题12.18表述的Yoneda引理有对偶的表述，称为余Yoneda引理：

命题 12.19 (coYoneda引理). 给定小范畴$\mathcal{C}$和有余乘积、余等值子的范畴$\mathcal{D}$，$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$是函子，那么图

$$\coprod_{Y\xrightarrow{g}X\xrightarrow{f}A} F(Y) \rightrightarrows \coprod_{X\xrightarrow{f}A} F(X) \twoheadrightarrow F(A)$$

是余等值子图，其中映射$\coprod_{Y\xrightarrow{g}X\xrightarrow{f}A} F(Y) \rightrightarrows \coprod_{X\xrightarrow{f}A} F(X)$由图

$$\begin{tikzcd}
F(Y) \arrow[d, "\iota_g"'] \arrow[dr, "\iota_{f\circ g}"] & \\
\coprod_{Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} A} F(Y) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \coprod_{X \xrightarrow{f} A} F(X) \\
F(Y) \arrow[u, "\iota_g"] \arrow[r, "F(g)"'] & F(X) \arrow[u, "\iota_f"']
\end{tikzcd}$$

定义.

当所选取的函子F是函子$F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$时，余Yoneda引理12.19有一个重要的推论，称为稠密性定理：

定理 12.20. *对任意局部小的范畴$\mathcal{C}$和函子$F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$，那么$F$是图*

$$\left(\int_{\mathcal{C}} F\right)^{\circ} \xrightarrow{P} \mathcal{C}^{\circ} \xrightarrow{y} \mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathbf{Set})$$

的余极限，其中y是Yoneda嵌入函子.

证明. 任意给定集合S,T，都存在集合之间的自然同构

$$\coprod_S T \cong S\times T\cong \coprod_T S,$$

于是命题12.19意味着图

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{X,Y\in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}}\coprod_{Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} A} F(Y) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\cong"] & \coprod_{X\in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}}\coprod_{X \xrightarrow{f} A} F(X) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\cong"] & F(A) \arrow[d, equal] \\
\coprod_{X,Y\in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}}\coprod_{F(Y)\times \hom_{\mathcal{C}}(Y,X)} \hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \coprod_{X\in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}}\coprod_{F(X)} \hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[r, two heads] & F(A)
\end{tikzcd}$$

的每一行都是余等值子，其中第一行的两个映射分别是

$$(Y\xrightarrow{g}X\xrightarrow{f}A, y\in F(Y))\mapsto (Y\xrightarrow{f\circ g}A, y\in F(Y))$$
$$(Y\xrightarrow{g}X\xrightarrow{f}A, y\in F(Y))\mapsto (X\xrightarrow{f}A, x\in F(X)),$$

于是映射α,β由图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[rr, "g^*"] \arrow[d, "\iota_{(X,Y,y\in F(Y),g:Y\to X)}"'] & & \hom_{\mathcal{C}}(Y,A) \arrow[d, "\iota_{(Y,y\in F(Y))}"] \\
\coprod_{X,Y\in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}}\coprod_{F(Y)\times \hom_{\mathcal{C}}(Y,X)} \hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[rr, shift left, "\alpha"] \arrow[rr, shift right, "\beta"'] & & \coprod_{X\in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}}\coprod_{F(X)} \hom_{\mathcal{C}}(X,A) \\
\hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[u, "\iota_{(X,Y,y\in F(Y),g:Y\to X)}"] \arrow[urr, "\iota_{(X,x=g(y)\in F(X))}"'] & &
\end{tikzcd}$$

定义，其中$g^*: \hom_{\mathcal{C}}(X,A) \to \hom_{\mathcal{C}}(Y,A)$是映射$f \mapsto f\circ g$.考虑图

$$\left(\int_{\mathcal{C}} F\right)^{\circ} \xrightarrow{P} \mathcal{C}^{\circ} \xrightarrow{h_A} \mathbf{Set}$$

的余极限，按照定理8.10（的对偶），这个极限是图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[d, "\iota_{g^\circ}"'] \arrow[drr, "\iota_{(X,x\in F(X))}"] & & \\
\coprod_{g^\circ:(X,x)\to(Y,y)} \hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[rr, shift left] \arrow[rr, shift right] & & \coprod_{(X,x\in F(X))} \hom_{\mathcal{C}}(X,A) \\
\hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[u, "\iota_{g^\circ}"] \arrow[rr, "(g^\circ)^*"'] & & \hom_{\mathcal{C}}(Y,A) \arrow[u, "\iota_{(Y,y\in F(Y))}"']
\end{tikzcd}$$

的余等值子，而图恰好是

$$\coprod_{X,Y\in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}} \coprod_{F(Y)\times \hom_{\mathcal{C}}(Y,X)} \hom_{\mathcal{C}}(X,A) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \coprod_{X\in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}} \coprod_{F(X)} \hom_{\mathcal{C}}(X,A),$$

因而余等值子是$F(A)$.考虑取遍$\mathcal{C}$中的所有对象，则证明了图

$$\left(\int_{\mathcal{C}} F\right)^{\circ} \xrightarrow{P} \mathcal{C}^{\circ} \xrightarrow{y} \mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathbf{Set})$$

的余极限是F. □

定理12.20名称中“稠密性”的解释为子范畴$\mathcal{C}$沿Yoneda嵌入在$\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set})$中形成了稠密的子范畴.如下的另一个表述也描述了同样的事情：

命题 12.21. 对任意的小范畴$\mathcal{C}$，恒等函子

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "y"'] & \Downarrow \mathrm{id}_y & \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set}) \\
& \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set}) \arrow[ur, dashed, "\mathcal{L}_y(y)\cong \mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

定义了Yoneda嵌入y沿自身的左Kan扩张.

证明. 根据定理12.13，对任意反变函子$F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$

$$\mathcal{L}_y(y)(F) := \mathrm{colim}[(y,F) \xrightarrow{P} \mathcal{C} \to \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set})],$$

而根据习题8.7，$(y,F)\cong \int_{\mathcal{C}} F$，因此定理12.20证明了$\mathcal{L}_y(y)(F)\cong F$. □

考虑协变函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，其中$\mathcal{C}$是一个小范畴且$\mathcal{D}$是余完备的.在这种情况下，$F$沿Yoneda函子的左Kan扩张

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "y"'] & & \mathcal{D} \\
& \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set}) \arrow[ur, dashed, "\mathcal{L}_y(F)"'] &
\end{tikzcd}$$

是存在的，这是由于Yoneda嵌入函子y是满忠实的，推论12.14.1保证了存在性，并且这是严格意义上的扩张（扩张所需要的自然变换是自然同构）.更重要的是，这个左Kan扩张$\mathcal{L}_y(F)$有右伴随函子

$$R : \mathcal{D} \to \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set}),$$

这是因为如果考虑任意$\mathcal{D}$中的对象B和任意$\mathcal{C}$中的对象A，

$$R(B)(A) \cong \hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set})}(h_A, R(B)) \cong \hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}_y(F) \circ h_A, B) \cong \hom_{\mathcal{D}}(F(A), B),$$

这提示我们函子性的构造

$$R(B) := \hom_{\mathcal{D}}(F(-), B)$$

应当给出右伴随函子，并且事实上根据稠密性定理12.20，任取$X \in \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})$和$B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$，

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set})}(X, R(B)) &\cong \hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set})}(\mathrm{colim}_{(A,a)\in \mathrm{ob} \int_{\mathcal{C}} X} h_A, R(B)) \\
&\cong \mathrm{colim}_{(A,a)\in \mathrm{ob} \int_{\mathcal{C}} X} \hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set})}(h_A, R(B)) \\
&\cong \mathrm{colim}_{(A,a)\in \mathrm{ob} \int_{\mathcal{C}} X} \hom_{\mathcal{D}}(F(A), B) \\
&\cong \hom_{\mathcal{D}}(\mathrm{colim}_{(A,a)\in \mathrm{ob} \int_{\mathcal{C}} X} F(A), B) \\
&\cong \hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}_y F(A), B),
\end{aligned}$$

其中第一个同构是稠密性定理12.20，第二、第四个同构因为命题8.11，最后一个等式用到了定理12.13，注意到每个同构都是自然的，这证明了伴随性.本节的习题中将会给出几个这样构造的伴随函子.

本节的最后我们引入用Kan扩张定义的单子的概念：

定义. 给定函子$G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，（只要存在就）称$G$沿自身的右Kan扩张为$G$的单子(monad)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "G"'] & {} \arrow[d, phantom, "\epsilon\Uparrow"] & \mathcal{C} \\
& \mathcal{C}, \arrow[ur, dashed, "T:=\mathcal{R}_G(G)"'] &
\end{tikzcd}$$

记为T.

给定单子T，有相应的单位(unit)和乘法，二者都是由$\epsilon : T \circ G \Rightarrow G$的泛性质所得到的，其中单位$\eta$的定义如图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "G"'] & {} \arrow[d, phantom, "\mathrm{id}_G\Uparrow"] & \mathcal{C} \\
& \mathcal{C} \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "G"'] & {} \arrow[d, phantom, "\epsilon\Uparrow"] & \mathcal{C} \\
& \mathcal{C}, \arrow[ur, bend left, "T"] \arrow[ur, bend right, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Uparrow"] &
\end{tikzcd}$$

乘法的定义如图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, bend left=40, "G"] \arrow[r, phantom, "\epsilon\Uparrow"] \arrow[drr, bend left, "G"] \arrow[d, "G"'] & {} & \mathcal{C} \\
\mathcal{C} \arrow[rr, "T"'] & {} \arrow[u, phantom, "\Uparrow\epsilon"] & \mathcal{C} \arrow[u, "T"']
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, bend left=40, "G"] \arrow[d, "G"'] \arrow[r, phantom, "\epsilon\Uparrow"] & {} & \mathcal{C} \\
\mathcal{C} \arrow[urr, bend left, "T"] \arrow[rr, "T"'] & {} \arrow[u, phantom, "\mu\Uparrow"] & \mathcal{C}. \arrow[u, "T"']
\end{tikzcd}$$

习题 12.11. 在习题7.1中我们对任意拓扑空间X定义了一个范畴$\mathbf{Open}(X)$，任意给定拓扑空间X，那么存在自然的嵌入函子

$$\mathbf{Open}(X) \hookrightarrow \mathbf{Top}_{/X},$$

求证应用命题12.21后面讨论的构造给出了伴随

$$\mathbf{Top}_{/X} \leftrightarrows \mathrm{Funct}(\mathbf{Open}(X)^{\circ}, \mathbf{Set}),$$

其中右半随给出了预层F的平展空间(étale space).

习题 12.12. 给定范畴$\mathcal{C}, \mathcal{D}$和伴随对$E : \mathcal{D} \leftrightarrows \mathcal{C} : F$，$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$，如图所示

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[d, "F"] \\ \mathcal{D}, \arrow[u, bend left=60, "E"] \arrow[u, bend right=60, "G"'] \end{tikzcd}$$

并且给定自然变换$\tau : G \Rightarrow E$.记$\eta : \mathrm{id} \Rightarrow G \circ F$是伴随对$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$的单位，$\epsilon : E \circ F \Rightarrow \mathrm{id}$是伴随对$E : \mathcal{D} \leftrightarrows \mathcal{C} : F$的余单位，那么对任意$\mathcal{C}$中的对象$A, B$，可以构造映射

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}_{A,B} : \hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)) &\to \hom_{\mathcal{C}}(A, B) \\ f &\mapsto (A \xrightarrow{\eta_A} GF(A) \xrightarrow{\tau_{F(A)}} EF(A) \xrightarrow{E(f)} EF(B) \xrightarrow{\epsilon_B} B), \end{aligned}$$

这事实上是一个自然变换.

1. 证明给定自然变换$\tau : G \Rightarrow E$同于给定自然变换$\tilde{\tau} : F \Rightarrow F$.

2. 在$B = A$的情形时，证明如上定义给出了

$$\mathrm{tr}_F : \mathrm{End}(F) \to \mathrm{End}(\mathrm{id}).$$

3. 考虑$\mathcal{C} = \mathcal{D} = k - \mathbf{Vec}$和$F = - \otimes_k V$，其中$V$是有限维$k$向量空间，$E = G = \mathrm{Hom}_k(V, -)$.取定$U \in k - \mathbf{Vec}$，对任意线性映射

$$f : U \otimes_k V \to U \otimes_k V,$$

如上定义给出了$\mathrm{tr}_F(f)$.求证当$U = k$时，$\mathrm{tr}_F(f)$恰好是线性代数中的迹.

12.4　幺半范畴和充实范畴

在我们非常多的关注的例子当中，一个（局部小）范畴的hom集合通常附带有其他的结构，这些结构很多时候也都是与态射的复合式相容的，忽略掉这些结构只关注hom的集合结构会导致很多重要信息的缺失，这是非常不明智的.充实范畴的目的就是将这些结构考虑进来，以此对问题的解决提供帮助.

12.4.1　幺半范畴和幺半函子

定义. 设$\mathcal{C}$是给定的范畴，则$\mathcal{C}$上的幺半结构(monoidal structure)包含如下信息：

1. 一个双函子$\otimes : \mathcal{C}\times\mathcal{C}\to\mathcal{C}$，一般被称为张量积(tensor product)或者幺半积(monoidal product);
2. $\mathcal{C}$中的对象I，被称为单位对象(unit object, identity object)；
3. 自然同构α,λ,ρ，分别被称为结合子(associator)、左单位子(left unitor)和右单位子(right)，其中$\alpha : (-\otimes -)\otimes - \Rightarrow -\otimes(-\otimes -)$是自然同构$\alpha_{A,B,C} : (A\otimes B)\otimes C \to A\otimes(B\otimes C)$，$\lambda,\rho$是自然同构$\lambda : I\otimes - \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$，$\lambda_A : I\otimes A\cong A$，$\rho : -\otimes I\Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$，满足对任意$\mathcal{C}$中的对象$A,B,C,D$，下图

$$\begin{tikzcd}
((A\otimes B)\otimes C)\otimes D \arrow[r, "\alpha_{A,B,C}\otimes \mathrm{id}_D"] \arrow[d, "\alpha_{A\otimes B,C,D}"'] & A\otimes(B\otimes C)\otimes D \arrow[r, "\alpha_{A,B\otimes C,D}"] & A\otimes((B\otimes C)\otimes D) \arrow[d, "\mathrm{id}_A\otimes\alpha_{B,C,D}"] \\
(A\otimes B)\otimes(C\otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C\otimes D}"] & & A\otimes(B\otimes(C\otimes D)),
\end{tikzcd}$$

交换，且对任意$\mathcal{C}$中的对象A,B，下图

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes I)\otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A\otimes\mathrm{id}_B"'] & & A\otimes(I\otimes B) \arrow[dl, "\mathrm{id}_A\otimes\lambda_B"] \\
& A\otimes B & ,
\end{tikzcd}$$

交换，

则称$(\mathcal{C},\otimes,I)$为幺半范畴(monoidal category)，若自然同构α,ρ,λ都是恒等，那么称$\mathcal{C}$是严格幺半范畴(strict monoidal category).

例 12.22. 设R是环，那么范畴$(R-\mathbf{Mod},\oplus)$和$(R-\mathbf{Mod},\otimes)$都是对称幺半范畴.

例 12.23. 任意有限乘积存在且终对象存在的范畴$\mathcal{C}$（比如$\mathbf{Set},\mathbf{Ab},\mathbf{Cat}$等等）都是幺半范畴，我们取单位对象$I=*$为终对象（习题12.13），幺半积定义为乘积

$$A\otimes B := A\times B,$$

引理 12.4. 在幺半范畴$(\mathcal{C},\otimes,I)$中，对任意的对象A,B，都有

$$\lambda_A\otimes\mathrm{id}_B = \lambda_{A\otimes B}\circ\alpha_{I,A,B},$$

即有交换图

$$\begin{tikzcd}
& (I\otimes A)\otimes B \arrow[dl, "\alpha_{I,A,B}"'] \arrow[dr, "\lambda_A\otimes\mathrm{id}_B"] & \\
I\otimes(A\otimes B) \arrow[rr, "\lambda_{A\otimes B}"] & & A\otimes B.
\end{tikzcd}$$

对偶地，也有$\rho_{A\otimes B} = (\mathrm{id}_A\circ\rho_B)\circ\alpha_{A,B,I}$.

证明. 注意到函子$I\otimes -$是范畴的等价，因此这等同于证明图

$$\begin{tikzcd}
((I\otimes I)\otimes A)\otimes B \arrow[r, "\alpha_{I,I,A}\otimes\mathrm{id}_B"] \arrow[dr, "(\rho_I\otimes\mathrm{id}_A)\otimes\mathrm{id}_B"'] & (I\otimes(I\otimes A))\otimes B \arrow[r, "\alpha_{I,I\otimes A,B}"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_A\otimes\lambda_A)\otimes\mathrm{id}_B"] & I\otimes((I\otimes A)\otimes B) \arrow[r, "\mathrm{id}_I\otimes\alpha_{I,A,B}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_\otimes(\lambda_A\otimes\mathrm{id}_B)"] & I\otimes(I\otimes(A\otimes B)) \arrow[dl, "\mathrm{id}_I\otimes\lambda_{A\otimes B}"] \\
 & (I\otimes A)\otimes B \arrow[r, "\alpha_{I,A,B}"'] & I\otimes(A\otimes B) &
\end{tikzcd}$$

最右侧三角形的交换性，其中中间方块的交换性是α的自然性，左侧三角形的交换性是左右单位的性质.由于图中每个态射都是同构，因而只要证明最外圈的图是交换的即可.但是，α的自然性和其作为结合子的性质说明存在交换图

$$\begin{tikzcd}
 & (I\otimes(I\otimes A))\otimes B \arrow[r, "\alpha_{I,I\otimes A,B}"] & I\otimes((I\otimes A))\otimes B) \arrow[d, "\mathrm{id}_I\otimes\alpha_{I,A,B}"] \\
((I\otimes I)\otimes A)\otimes B \arrow[ur, "\alpha_{I,I,B}\otimes\mathrm{id}_B"] \arrow[r, "\alpha_{I\otimes I,A,B}"] \arrow[d, "(\rho_I\otimes A)\otimes B"'] & (I\otimes I)\otimes(A\otimes B) \arrow[r, "\alpha_{I,I,A\otimes B}"] \arrow[d, "\rho_I\otimes\mathrm{id}_{A\otimes B}"] & I\otimes(I\otimes(A\otimes B)) \arrow[dl, "\mathrm{id}_I\otimes\mathrm{id}_{A\otimes B}"] \\
(I\otimes A)\otimes B \arrow[r, "\alpha_{I,A,B}"'] & I\otimes(A\otimes B), &
\end{tikzcd}$$

这就完成了证明. □

引理 12.5. *在幺半范畴$(\mathcal{C},\otimes,I)$中，恒有*

$$\lambda_I=\rho_I: I\otimes I\to I.$$

证明. 注意到函子$-\otimes I$是范畴的等价，因此这等同于证明（习题7.22）

$$\lambda_I\otimes\mathrm{id}_I=\rho_I\otimes\mathrm{id}_I.$$

λ的自然性说明图

$$\begin{tikzcd}
(I\otimes I)\otimes I \arrow[r, "\lambda_I\otimes\mathrm{id}_I"] \arrow[d, "\lambda_{I\otimes I}"'] & I\otimes I \arrow[d, "\lambda_I"] \\
I\otimes I \arrow[r, "\lambda_I"] & I
\end{tikzcd}$$

是交换的，因此$\lambda_{I\otimes I}=\lambda_I\otimes\mathrm{id}_I$，于是

$$\lambda_I\otimes\mathrm{id}_I=\lambda_{I\otimes I}\circ\alpha_{I,I,I}=(\lambda_I\otimes\mathrm{id}_I)\circ\alpha_{I,I,I}=\rho_I\otimes\mathrm{id}_I,$$

其中第一个等式是引理12.4，最后一个等式是交换子的性质. □

习题 12.13. 求证若范畴$(\mathcal{C},\times,I)$是幺半范畴，其中$\times$是范畴积且$\mathcal{C}$中包含终对象，那么I是终对象（对比习题7.5）.

证明. 取$\{*\}$为$\mathcal{C}$的终对象，由于$(\mathcal{C},\times,I)$是幺半范畴，存在同构

$$\lambda_{\{*\}}: I\times\{*\}\xrightarrow{\sim}\{*\},$$

但另一方面习题7.5说明

$$I \times \{*\} \cong I,$$

于是I是终对象. □

定义. 设$(\mathcal{C}, \otimes, I)$为幺半范畴，若我们还有

1.

则称$(\mathcal{C}, \otimes)$为对称幺半范畴(symmetric monoidal category)，若自然同构α, ρ, λ都还是恒等，那么称$\mathcal{C}$是对称严格幺半范畴(strict symmetric monoidal category).

通常情况下（如例12.22和例12.23中）

定义. 给定幺半范畴$(\mathcal{C}, \otimes, I)$，若对于任意$S \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}$，函子$- \otimes S$存在右伴随函子$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(S, -)$，则称$\mathcal{C}$是闭幺半范畴(closed monoidal categories).特别地当幺半积是范畴积的时候，称闭幺半范畴是笛卡尔闭的(Cartesian closed).

具体来说，对任意$\mathcal{C}$中的对象A, B，有自然的同构

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes S, B) \cong \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(S, B)),$$

当幺半结构是笛卡尔积的时候，只需要取$\otimes := \times$即可.

例 12.24. 给定交换环R，那么定理3.3说明范畴$R-\mathbf{Mod}$闭的对称幺半范畴.

例 12.25. 范畴$\mathbf{Cat}$是笛卡尔闭的.

习题 12.14. 给定闭幺半范畴$(\mathcal{C}, \otimes, I)$，求证对任意$\mathcal{C}$中的对象$B$，

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(I, B) \cong B,$$

并且这个同构是自然的.

证明. 任意给定对象A，根据定义有自然的同构

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cong \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes I, B) \cong \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(I, B)),$$

其中第一个同构由ρ_A诱导，于是Yoneda引理说明$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(I, B) \cong B$. □

习题 12.15. 给定闭幺半范畴$(\mathcal{C}, \otimes, I)$，验证$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(-, -)$的函子性.

证明. □

习题 12.16. 给定幺半范畴$(\mathcal{C}, \otimes, I)$，且$\mathcal{C}$中的有限余积都存在且与$\otimes$交换（即$(A \coprod B) \otimes (C \coprod D) \cong (A \otimes C) \coprod (A \otimes D) \coprod (B \otimes C) \coprod (B \otimes D)$），求证$\top : \mathcal{C} \to \mathcal{C}, A \to \top(A) := \coprod_{n \geq 0} A^{\otimes n}$和幺半结构给出了一个单子.

证明. 定义η :和μ : $\square$

例 12.26. 给定笛卡尔闭幺半范畴$(\mathcal{C},\times,I)$，假设它是完备和余完备的，那么存在如下构造，使得$({}_{I\backslash}\mathcal{C},\wedge,S^0)$也是一个闭幺半范畴，其中${}_{I\backslash}\mathcal{C}$是对象$I$下的范畴（习题7.23），单位对象$S^0$定义为$I\coprod I$，其中的余积是$\mathcal{C}$中的余积；$A\wedge B$是（$\mathcal{C}$中的）推出

$$\begin{tikzcd} A\coprod B \arrow[r] \arrow[d] & A\prod B \arrow[d] \\ I \arrow[r] & A\wedge B, \end{tikzcd}$$

其中为了映射$A\coprod B\to A\prod B$需要分别给出映射$A\coprod B\to A$和$A\coprod B\to B$，而给出后者分别需要$A\to A, B\to A, A\to B, B\to B$，这些映射分别是id或者$A\to I\to B$和$B\to I\to A$.最后$\underline{\hom}_{{}_{I\backslash}\mathcal{C}}(-,-)$是拉回

$$\begin{tikzcd} \underline{\hom}_{{}_{I\backslash}\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[d] \\ \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,I) \arrow[r] & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,B), \end{tikzcd}$$

其中的态射都是与基点态射$I\to A$或$I\to B$的复合.

习题 12.17. 验证例12.26的构造给出了一个闭幺半范畴.

定义. 给定幺半范畴$(\mathcal{C},\otimes_{\mathcal{C}},I)$和$(\mathcal{D},\otimes_{\mathcal{D}},J)$，若函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$满足存在自然变换（或态射）

$$\eta: F(-)\otimes_{\mathcal{D}} F(-)\Rightarrow F(-\otimes_{\mathcal{C}}-)$$

和

$$u: J\to F(I),$$

则称函子是弱幺半的(lax monoidal).若其中的自然变换都是自然同构，则称该函子是强幺半的(strong monoidal).

例 12.27.

$$k[-]:\mathbf{Set}\to k-\mathbf{Vec}$$

值得注意的是，对任意给定闭幺半范畴$(\mathcal{C},\otimes,I)$，$\hom_{\mathcal{C}}(I,-)$都是弱幺半的函子.这是因为，映射

$$\hom_{\mathcal{C}}(I,A)\times\hom_{\mathcal{C}}(I,B)\to\hom_{\mathcal{C}}(I,A\otimes B)$$

定义为函子$-\times-$在态射对$(I\to A, I\to B)$上作用后与自然同构$I\otimes I\cong I$的复合.特别地当$\mathcal{C}$还是笛卡尔幺半的（即幺半张量是范畴积），则如上的给出的态射还是同构（命题?? 和习题7.5）.

例 12.28. 接例12.26的讨论，自然的嵌入函子（实际是$\mathcal{C}\to_{I\backslash}\mathcal{C}$忘却掉$I$之下结构的函子）有左伴随

$$(-)_+:\mathcal{C}\leftrightarrows_{I\backslash}\mathcal{C}:U,$$

其中函子$(-)_+$定义为

$$\begin{aligned}(-)_+ : \mathcal{C} &\to_{I\backslash} \mathcal{C}\\ A &\mapsto (A \coprod I, \iota_2).\end{aligned}$$

接下来我们要证明，函子$(-)_+$是强幺半的.

单位对象需要的同构是明显的，于是只需要证明存在自然的同构

$$A_+ \bigwedge B_+ \cong (A \times B)_+$$

即可.注意到存在一系列（$\mathcal{C}$中和${}_{I\backslash}\mathcal{C}$中的）自然同构

$$\left(A \coprod \{*\}\right) \times \left(B \coprod \{*\}\right) \cong (A \times B) \coprod (A \times \{*\}) \coprod (\{*\} \times B) \coprod (\{*\} \times \{*\}) \cong (A \times B) \coprod A \coprod B \coprod \{*\},$$

并且态射$A_+ \coprod B_+$可分解为

$$A_+ \coprod B_+ \twoheadrightarrow A \coprod B \coprod \{*\} \to (A \times B) \coprod A \coprod B \coprod \{*\},$$

于是$A_+ \bigwedge B_+$是${}_{I\backslash}\mathcal{C}$中的推出

$$\begin{tikzcd} A_+ \coprod B_+ \arrow[r] \arrow[d] & A \coprod B \coprod \{*\} \arrow[r] \arrow[d] & (A \times B) \coprod A \coprod B \coprod \{*\} \arrow[d] \\ \{*\} \arrow[r] & \{*\} \arrow[r] & A_+ \bigwedge B_+, \end{tikzcd}$$

但是上图中左右两个正方形图都是推出，并且

$$\begin{tikzcd} A \coprod B \coprod \{*\} \arrow[r] \arrow[d] & (A \times B) \coprod A \coprod B \coprod \{*\} \arrow[d] \\ \{*\} \arrow[r] & A \coprod B \coprod \{*\} \end{tikzcd}$$

也是推出图，于是习题?? 说明存在自然的同构.

12.4.2　充实范畴和底范畴

定义. 设$(\mathcal{B}, \otimes, I)$是一个对称幺半范畴，那么一个$\mathcal{B}$范畴($\mathcal{B}$-category)$\mathcal{C}$包含如下信息：

1. 对象的全体$\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，
2. 任意$A, B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$给出态射对象$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) \in \mathrm{ob}\,\mathcal{B}$，
3. 对任意$A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，存在态射$\underline{\mathrm{id}}_A : I \to \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, A)$，且
4. 对任意$A, B, C \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，存在态射

$$\circ : \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B, C) \otimes \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(C, A),$$

对任意$A, B, C, D \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，满足以下交换图

1. 符合的结合性

$$\begin{tikzcd}
\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(C,D)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\circ"] \arrow[d, "\circ\otimes\mathrm{id}"'] & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(C,D)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C) \arrow[d, "\circ"] \\
\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,D)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "\circ"] & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,D),
\end{tikzcd}$$

2. 单位态射

$$\begin{tikzcd}
\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes I \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes\underline{\mathrm{id}}_A"] \arrow[dr, "\rho_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}"'] & & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A) \arrow[dl, "\circ"] \\
& \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) &
\end{tikzcd},$$

和

$$\begin{tikzcd}
\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,B)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[dr, "\circ"'] & & I\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[ll, "\underline{\mathrm{id}}_B\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\lambda_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}"] \\
& \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) &
\end{tikzcd}.$$

称$\mathcal{B}$为基范畴，也称$\mathcal{C}$是充实于$\mathcal{B}$的范畴(enriched category over $\mathcal{B}$)或者$\mathcal{B}$范畴.

换句话说，这里我们将范畴定义中的态射集改成基范畴$\mathcal{B}$中的对象，符合和恒等用$\mathcal{B}$中的态射表示，而所要求的相容性与普通范畴的态射集hom在**Set**中的交换图一致.

注意，对象$\underline{\hom}$是$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}$的信息，一个$\mathcal{B}$范畴不需要成为一个范畴——它不需要有hom集合.

例 12.29. 一个最简单的例子是对于任意的范畴$\mathcal{C}$，它自然地是 **Set**上的范畴.

例 12.30. 设A是只包含一个对象的**Ab**范畴，那么A是含幺环——$\underline{\hom}(\{*\},\{*\})$是一个Abel群，复合态射和单位态射都是群态射因而刚好给出了含幺环结构.

例 12.31. 当基范畴$\mathcal{B}$包含单位对象的余指数存在（及对任意指标范畴$\mathcal{J}$，$\coprod_{\mathcal{J}} I$都存在），那么任意范畴$\mathcal{C}$都可以成为一个$\mathcal{B}$范畴，其中

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) := \coprod_{\hom_{\mathcal{C}}(A,B)} I,$$

单位态射$\underline{\mathrm{id}}_A$由$I$到$\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$中$\mathrm{id}_A$所指示的嵌入给出，并且由于幺半积与所给的余积交换（习题??），存在一系列自然同构

$$\begin{aligned}
\left(\coprod_{\hom_{\mathcal{C}}(A,B)} I\right)\times\left(\coprod_{\hom_{\mathcal{C}}(B,C)} I\right) &\cong \coprod_{\hom_{\mathcal{C}}(A,B)}\left(I\times\left(\coprod_{\hom_{\mathcal{C}}(B,C)} I\right)\right)\\
&\cong \coprod_{\hom_{\mathcal{C}}(A,B)}\left(\coprod_{\hom_{\mathcal{C}}(B,C)} I\times I\right) \cong \coprod_{\hom_{\mathcal{C}}(A,B)\times\hom_{\mathcal{C}}(B,C)} I,
\end{aligned}$$

这意味着复合态射由$\mathcal{C}$中原本的复合重排指标给出.

引理 12.6. 若$\mathcal{C}$是闭的幺半范畴，那么$\mathcal{C}$是充实于自身的范畴.

证明. 按定义，对于闭幺半范畴$\mathcal{C}$，$-\otimes-$的（双）函子性使得子$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$也是（双）函子，并且有

$$\hom_{\mathcal{C}}(A\otimes B,C)\cong\hom_{\mathcal{C}}(A,\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)).$$

为说明$\mathcal{C}$是本身上的范畴，只要给出单位态射和态射的复合并验证相容性即可.

对$\mathcal{C}$中的任意对象A，$\underline{\mathrm{id}}_A:I\to\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A)$在如上所述的伴随函子对

$$\hom_{\mathcal{C}}(I\otimes A,A)\cong\hom_{\mathcal{C}}(I,\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A)).$$

下对应于自然同构$\lambda_A:I\otimes A\cong A$.若$\epsilon(B):\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,-)\otimes B\Rightarrow\mathrm{id}$是伴随函子对$(-\otimes B,\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,-))$的余单位，那么复合

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\to\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

是如下态射

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\epsilon(A)_B}\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes B\xrightarrow{\epsilon(B)_C}C,$$

在伴随下的对应.

为证明相容性，我们首先证明有交换图

$$\begin{tikzcd}
\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A \arrow[r, "\circ\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)}\otimes\epsilon(A)_B"'] & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C)\otimes A \arrow[d, "\epsilon(A)_C"] \\
\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes B \arrow[r, "\epsilon(B)_C"] & C.
\end{tikzcd}$$

根据伴随$\hom_{\mathcal{C}}(-\otimes-,-)\cong\hom_{\mathcal{C}}(-,\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(-,-))$的自然性（作用在复合态射$\circ:\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\to\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$上），有交换图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B),\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C)) \arrow[d, leftrightarrow] & \hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C),\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C)) \arrow[l, "\circ^*"'] \arrow[d, leftrightarrow] \\
\hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A,C) & \hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C)\otimes A,C), \arrow[l, "(\circ\otimes\mathrm{id}_A)^*"]
\end{tikzcd}$$

其中竖直的箭头是由伴随给出的，取$\epsilon(A)_C\in\hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C)\otimes A,C)$，它在该交换图中给出$\hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A,C)$中的等式

$$\epsilon(A)_C(\circ\otimes\mathrm{id}_A)=\epsilon(B)_C(\mathrm{id}_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)}\otimes\epsilon(A)_B),$$

即所要的交换图.同理也有$\epsilon(B)_D(\circ\otimes\mathrm{id}_B)=\epsilon(C)_D(\mathrm{id}_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(C,D)}\otimes\epsilon(B)_C)$.于是，对任意的对象$A,B,C,D$，

$$\begin{aligned}
\epsilon(C)_D(\mathrm{id}\otimes\epsilon(A)_C)(\mathrm{id}\otimes\circ\otimes\mathrm{id})&=\epsilon(C)_D(\mathrm{id}\otimes(\epsilon(B)_C(\mathrm{id}\otimes\epsilon(A)_B))\\
&=\epsilon(C)_D(\mathrm{id}\otimes\epsilon(B)_C)(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\epsilon(A)_B)\\
&=\epsilon(B)_D(\circ\otimes\mathrm{id})(\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}\otimes\epsilon(A)_B)\\
&=\epsilon(B)_D(\mathrm{id}\otimes\epsilon(A)_B)(\circ\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}).
\end{aligned}$$

类似于之前，交换图

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(C,D)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B),\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,D)) \arrow[d, leftrightarrow] & \hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(C,D)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C),\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,D)) \arrow[l, "(\mathrm{id}\otimes\circ)^*"'] \arrow[d, leftrightarrow] \\
\hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(C,D)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A,D) & \hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(C,D)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C)\otimes A,D) \arrow[l, "(\mathrm{id}\otimes\circ\otimes\mathrm{id}_A)^*"]
\end{tikzcd}$$

说明$\circ(\mathrm{id}\otimes\circ)$经过伴随对应到$\epsilon(C)_D(\mathrm{id}\otimes\epsilon(A)_C)(\mathrm{id}\otimes\circ\otimes\mathrm{id})$，交换图

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
\hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(C,D)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B),\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,D)) \arrow[d, leftrightarrow] & \hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,D)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B),\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,D)) \arrow[l, "(\circ\otimes\mathrm{id})^*"'] \arrow[d, leftrightarrow] \\
\hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(C,D)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A,D) & \hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,D)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A,D) \arrow[l, "(\circ\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}_A)^*"]
\end{tikzcd}$$

说明$\circ(\circ\otimes\mathrm{id})$经过伴随对应到$\epsilon(B)_D(\mathrm{id}\otimes\epsilon(A)_B)(\circ\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id})$，这即完成了结合性的验证.

对单位态射，我们只验证

$$\begin{tikzcd}
\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes I \arrow[rr, "\mathrm{id}\otimes\underline{\mathrm{id}}_A"] \arrow[dr, "\rho_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}"'] & & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A) \arrow[dl, "\circ"] \\
& \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) &
\end{tikzcd}\quad ,$$

另一部分是完全对偶的.同样由伴随的自然性，存在交换图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A),\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A)) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "\underline{\mathrm{id}}_A^*"'] & \hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A)\otimes A,A) \arrow[d, "(\underline{\mathrm{id}}_A\otimes\mathrm{id}_A)^*"] \\
\hom_{\mathcal{C}}(I,\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A)) \arrow[r, leftrightarrow] & \hom_{\mathcal{C}}(I\otimes A,A),
\end{tikzcd}$$

那么$\mathrm{id}_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A)}\in\hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A),\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A))$在图中分别被对应到$\lambda_A\in\hom_{\mathcal{C}}(I\otimes A,A)$和$\epsilon(A)_A(\underline{\mathrm{id}}_A\otimes\mathrm{id}_A)\in\hom_{\mathcal{C}}(I\otimes A,A)$，这意味着$\epsilon(A)_A(\underline{\mathrm{id}}_A\otimes\mathrm{id}_A)=\lambda_A$，即交换图

$$\begin{tikzcd}
I\otimes A \arrow[rr, "\underline{\mathrm{id}}_A\otimes\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\lambda_A"'] & & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A)\otimes A \arrow[dl, "\epsilon(A)_A"] \\
& A. &
\end{tikzcd}$$

再根据伴随的自然性，存在交换图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A),\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\underline{\mathrm{id}}_A)^*"'] & \hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A)\otimes A,B) \arrow[d, "(\mathrm{id}\otimes\underline{\mathrm{id}}_A\otimes\mathrm{id}_A)^*"] \\
\hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes I,\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)) \arrow[r, leftrightarrow] & \hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes I\otimes A,B) \\
\hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B),\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)) \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[u, "\underline{\rho_{\hom_{\mathcal{C}}(A,B)}}^*"] & \hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A,B), \arrow[u, "(\rho_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}\otimes\mathrm{id}_A)^*"']
\end{tikzcd}$$

于是下方的交换图将$\mathrm{id}:\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\to\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$映到

$$\rho_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}:\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A)\to\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$$

和

$$\epsilon(A)_B(\rho_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}\otimes\mathrm{id}_A):\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes I\otimes A,B,$$

这说明上面两个态射是伴随给出的对应.另一方面，$\circ : \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A)\to\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$被映到

$$\circ(\mathrm{id}\otimes\underline{\mathrm{id}}_A) : \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes I\to\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$$

和

$$\begin{aligned}\epsilon(A)_B(\mathrm{id}\otimes\epsilon(A)_A)(\mathrm{id}\otimes\underline{\mathrm{id}}_A\otimes\mathrm{id}_A) &= \epsilon(A)_B(\mathrm{id}\otimes(\epsilon(A)_A(\underline{\mathrm{id}}_A\otimes\mathrm{id}_A)))\\ &= \epsilon(A)_B(\mathrm{id}\otimes\lambda_A)\\ &= \epsilon(A)_B(\rho_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)}\otimes\mathrm{id}_A),\end{aligned}$$

结合之前的对应刚好给出了所要证的结果. □

在上面的证明中，我们其实都省略了结合子自然变换α，它的自然性保证如同上面的证明，在使用中并不需要特别区分$-\otimes(-\otimes-)$和$(-\otimes-)\otimes-$.引理12.6所要求的条件只有闭，但给我们带来了丰富的结构.

例 12.32. 根据例12.22，$(\mathbf{Ab},\otimes_{\mathbb{Z}})$是幺半范畴.对于环$R$，考虑$R-\mathbf{Mod}$中的态射集$\hom_{R-\mathbf{Mod}}(M,N)$，可以自然地定义上面的加法使得它是一个Abel群，记这个Abel群为$\underline{\hom}_{R-\mathbf{Mod}}(M,N)$（以区别于没有任何结构的集合）.按定义，模态射的复合是$\mathbb{Z}$线性的，因此复合是一个Abel群同态，而且复合的结合性从**Set**中复合的结合性直接得到.

$(\mathbf{Ab},\otimes_{\mathbb{Z}})$中的单位对象是$\mathbb{Z}$，并且作为集合和Abel群都存在同态$\underline{\hom}_{R-\mathbf{Mod}}(\mathbb{Z},M)\cong M$，这个同构也给出了所谓的单位态射（区分于Abel群中的单位元），于是$R-\mathbf{Mod}$是 $(\mathbf{Ab},\otimes_{\mathbb{Z}})$上的范畴.

例 12.33. 这个例子是充实范畴理论建立的动机之一，并且理论在这个例子中的应用被推广到了数学中几乎最重要部分当中.

记$\underline{\mathbf{Top}}$是“好的”拓扑空间的全体（不同于例??中定义对拓扑空间不加限制），这里的“好”代指技术条件紧生成且Hausdorff（见[?]），$\hom_{\underline{\mathbf{Top}}}(X,Y)$依旧定义为全体的连续映射，如此的技术条件使得$\underline{\mathbf{Top}}$成为了一个笛卡尔闭的范畴，于是根据引理12.6，$\underline{\mathbf{Top}}$是充实于自身的范畴，其中的伴随函子对是

$$-\times Y : \underline{\mathbf{Top}}\leftrightarrows\underline{\mathbf{Top}} : \mathrm{Map}(Y,-),$$

其中对于任意（好的）空间Z，$\mathrm{Map}(Y,Z)$是一个拓扑空间，其中其底集是Y到Z的全体连续函数，并赋有紧开拓扑.

这个范畴也被称为“代数拓扑学家的空间范畴”.由这个例子出发

引理 12.7. *任意给定弱幺半函子$F:\mathcal{B}\to\mathcal{D}$，都使得$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}$有一个由$F$诱导的$\mathcal{D}$范畴结构.*

证明. 考虑如下定义的$\mathcal{D}$范畴$F_*\mathcal{C}$：它的对象和通常的hom结构同于$\mathcal{C}$，且

$$\underline{\hom}_{F_*\mathcal{C}}(A,B) := F(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)),$$

复合态射和单位态射分别定义为

$$F(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C))\otimes_{\mathcal{D}}F(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B))\to F(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes_{\mathcal{C}}\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B))\xrightarrow{F(\circ)}F(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C))=\underline{\hom}_{F_*\mathcal{C}}(A,C)$$

和

$$I\to F(J)\xrightarrow{F(\mathrm{id}_A)}F(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A))=\underline{\hom}_{F_*\mathcal{C}}(A,A).$$

这给出了$\mathcal{D}$范畴结构. □

对于充实范畴，我们依旧希望能够建立它们与普通范畴理论之间的联系，

定义. 给定$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}$，那么它的底范畴(underlying category)$\mathcal{C}_0$是一个范畴，满足

1. $\mathcal{C}_0$的对象同于$\mathcal{C}$，
2. $\hom_{\mathcal{C}_0}(A,B) := \hom_{\mathcal{B}}(I, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B))$，且单位态射$\mathrm{id}_A \in \hom_{\mathcal{C}_0}(A,A)$是$\underline{\mathrm{id}}_A \in \hom_{\mathcal{B}}(I, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A))$，
3. 态射的复合是

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}_0}(B,C) \times \hom_{\mathcal{C}_0}(A,B) \arrow[rr, dashed] \arrow[d, equal] & & \hom_{\mathcal{C}_0}(A,C) \arrow[d, equal] \\
\hom_{\mathcal{B}}(I, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)) \times \hom_{\mathcal{B}}(I, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)) \arrow[dr] & & \hom_{\mathcal{B}}(I, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C)). \\
& \hom_{\mathcal{B}}(I, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C) \otimes \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

例 12.34. 给定群G，记$\mathbf{Top}^G$是由G空间和G等变的连续映射组成的范畴，于是$\mathbf{Top}^G$是对称的幺半范畴，其中给定G空间X,Y，$X \otimes Y$定义为$X \times Y$并赋有对角作用，那么对该范畴有两种不同的充实于$\mathbf{Top}$中的方式：

1. 一种方式是给定G空间X,Y，取$\mathrm{Map}(X,Y)$的子集
$$\{f \in \mathrm{Map}(X,Y) \mid f\text{是}G\text{等变的}\},$$
并且赋予子空间拓扑，记为$\mathrm{Map}^G(X,Y)$；
2. 另一种方式考虑对任意给定G空间X,Y，$\mathrm{Map}(X,Y)$上有自然的G作用
$$g \cdot f : x \mapsto g \cdot f(g^{-1} \cdot x),$$
记$\mathrm{Map}(X,Y)$上有此G作用的G空间为$\mathrm{Map}_G(X,Y)$.

以上两种方式都使得$\mathbf{Top}^G$是充实于自身的范畴，类似于例12.33分别记为$\underline{\mathbf{Top}}^G$和$\underline{\mathbf{Top}}_G$.

值得注意的是两种充实的方式给出的底范畴都是$\mathbf{Top}^G$：

1. 对于$\underline{\mathbf{Top}}^G$，
$$\mathrm{Map}(\{*\}, \mathrm{Map}^G(X,Y)) \cong \mathrm{Map}^G(X,Y),$$
这一部分是明显的；
2. 对于$\underline{\mathbf{Top}}_G$，由于$G$在$\{*\}$上只有平凡作用，因此$\mathrm{Map}(\{*\}, \mathrm{Map}_G(X,Y))$给出了$\mathrm{Map}_G(X,Y)$中$G$不变的部分，恰好也是$\mathrm{Map}^G(X,Y)$.

我们这里补全对定义的验证：

引理 12.8. 给定$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}$，那么它的底范畴是一个范畴.

证明. 这里只需要验证态射满足复合和单位态射的相容性即可.

复合的相容性是图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{hom}_{\mathcal{C}_0}(C,D)\times\mathrm{hom}_{\mathcal{C}_0}(B,C)\times\mathrm{hom}_{\mathcal{C}_0}(A,B) \arrow[r, "\circ\times\mathrm{id}_{\mathrm{hom}_{\mathcal{C}_0}(A,B)}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathrm{hom}_{\mathcal{C}_0}(C,D)}\times\circ"'] & \mathrm{hom}_{\mathcal{C}_0}(B,D)\times\mathrm{hom}_{\mathcal{C}_0}(A,B) \arrow[d, "\circ"] \\
\mathrm{hom}_{\mathcal{C}_0}(C,D)\times\mathrm{hom}_{\mathcal{C}_0}(A,C) \arrow[r, "\circ"] & \mathrm{hom}_{\mathcal{C}_0}(A,D)
\end{tikzcd}$$

的交换性，根据自然变换$\mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,-)\times\mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,-)\Rightarrow\mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,-\otimes-)$的自然性存在交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(C,D))\times\mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B,C))\times\mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(C,D)\otimes\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B,C))\times\mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)) \arrow[d] \\
\mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(C,D))\times\mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)) \arrow[d] & \mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(C,D)\otimes\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B,C))\times\mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)) \arrow[d] \\
\mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(C,D)\otimes(\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B))) \arrow[r, "\alpha_*"] & \mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(I,\underline{\mathrm{hom}}_{(\mathcal{C}}(C,D)\otimes\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B,C))\otimes\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)),
\end{tikzcd}$$

结合$-\times-$的函子性和充实范畴中复合态射$\circ$的结合性，$\mathcal{C}_0$中态射的复合也具有相容性.

对于单位态射，任取$f\in\mathrm{hom}_{\mathcal{C}_0}(A,B)$，那么作为$\mathcal{B}$中的态射

$$\begin{aligned}
f\circ\mathrm{id}_A : I &\xrightarrow{\lambda_I^{-1}} I\otimes I \xrightarrow{f\circ\underline{\mathrm{id}}_A} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,A) \xrightarrow{\circ} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)\\
&= I \xrightarrow{\lambda_I^{-1}} I\otimes I \xrightarrow{f\circ\mathrm{id}_I} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes I \xrightarrow{\mathrm{id}\circ\underline{\mathrm{id}}_A} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,A) \xrightarrow{\circ} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)\\
&= I \xrightarrow{\lambda_I^{-1}} I\otimes I \xrightarrow{f\circ\mathrm{id}_I} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes I \xrightarrow{\rho_{\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)}} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B).
\end{aligned}$$

根据$\rho:-\otimes I\Rightarrow -$的自然性，有交换图

$$\begin{tikzcd}
I\otimes I \arrow[r, "\rho_I"] \arrow[d, "f\otimes\mathrm{id}"'] & I \arrow[d, "f"] \\
\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes I \arrow[r, "\rho_{\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)}"] & \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B),
\end{tikzcd}$$

于是

$$I\otimes I \xrightarrow{f\circ\mathrm{id}_I} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes I \xrightarrow{\rho_{\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B)}} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B) = I\otimes I \xrightarrow{\rho_I} I \xrightarrow{f} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B),$$

再根据引理12.5，$f\circ\mathrm{id}_A=f$.另一个单位态射也是类似的. □

命题 12.22. 给定闭对称幺半范畴$\mathcal{C}$，那么$\mathcal{C}$作为充实于自身范畴（引理*12.6*）的底范畴是其本身.

证明. 构造

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(I,-):\mathcal{C}_0 &\to \mathcal{C}\\
A &\mapsto \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(I,A)\\
f\in\mathrm{hom}_{\mathcal{C}_0}(A,B) &\mapsto \tilde{f},
\end{aligned}$$

我们证明如上是范畴的等价即可，其中$\tilde{f}$是复合

$$A \xrightarrow{\lambda_A^{-1}} I\otimes A \xrightarrow{f\otimes \mathrm{id}} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A \xrightarrow{\epsilon(A)_B} B,$$

这当中$\epsilon(A):\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,-)\otimes A\Rightarrow \mathrm{id}$是伴随函子对$(-\otimes A,\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,-))$的余单位.

首先验证定义的函子性，即给定$f\in\hom_{\mathcal{C}_0}(A,B)$和$g\in\hom_{\mathcal{C}_0}(B,C)$，

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,gf)=\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,g)\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,f).$$

在$\mathcal{C}_0$中复合gf按定义是

$$I\xrightarrow{\lambda_I^{-1}} I\otimes I\xrightarrow{g\otimes f}\hom_{\mathcal{C}_0}(B,C)\otimes\hom_{\mathcal{C}_0}(A,B)\xrightarrow{\circ}\hom_{\mathcal{C}_0}(A,C),$$

于是

$$\begin{aligned}
\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,gf)&=A\xrightarrow{\lambda_A^{-1}} I\otimes A\xrightarrow{gf\otimes\mathrm{id}}\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C)\otimes A\xrightarrow{\epsilon(A)_C} C\\
&=A\xrightarrow{\lambda_A^{-1}} I\otimes A\xrightarrow{\lambda_I^{-1}\otimes\mathrm{id}_A} I\otimes I\otimes A\xrightarrow{g\otimes f\otimes\mathrm{id}_A}\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A\xrightarrow{\epsilon(A)_C(\circ\otimes\mathrm{id}_A)} C\\
&=\epsilon(A)_C(\circ\otimes\mathrm{id}_A)(g\otimes f\otimes\mathrm{id}_A)(\lambda_I^{-1}\otimes\mathrm{id}_A)\lambda_A^{-1}\\
&=\epsilon(B)_C(\mathrm{id}_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)}\otimes\epsilon(A)_B)(g\otimes f\otimes\mathrm{id}_A)(\lambda_I^{-1}\otimes\mathrm{id}_A)\lambda_A^{-1}\\
&=\epsilon(B)_C(\mathrm{id}_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)}\otimes\epsilon(A)_B)(g\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}_A)(\mathrm{id}\otimes f\otimes\mathrm{id}_A)(\lambda_I^{-1}\otimes\mathrm{id}_A)\lambda_A^{-1},
\end{aligned}$$

其中等式

$$\epsilon(A)_C(\circ\otimes\mathrm{id}_A)=\epsilon(B)_C(\mathrm{id}_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)}\otimes\epsilon(A)_B)$$

在引理12.6中已经证明.根据$-\otimes-$的函子性，存在交换图

$$\begin{tikzcd}
I\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A \arrow[r, "g\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\epsilon(A)_B"'] & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\epsilon(A)_B"] \\
I\otimes B \arrow[r, "g\otimes\mathrm{id}"'] & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes B,
\end{tikzcd}$$

即

$$(\mathrm{id}_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)}\otimes\epsilon(A)_B)(g\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}_A)=(g\otimes\mathrm{id}_B)(\mathrm{id}_I\otimes\epsilon(A)_B),$$

这样

$$\begin{aligned}
\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,gf)&=\epsilon(B)_C(\mathrm{id}_{\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)}\otimes\epsilon(A)_B)(g\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}_A)(\mathrm{id}\otimes f\otimes\mathrm{id}_A)(\lambda_I^{-1}\otimes\mathrm{id}_A)\lambda_A^{-1}\\
&=\epsilon(B)_C(g\otimes\mathrm{id}_B)(\mathrm{id}_I\otimes\epsilon(A)_B)(\mathrm{id}\otimes f\otimes\mathrm{id}_A)(\lambda_I^{-1}\otimes\mathrm{id}_A)\lambda_A^{-1}\\
&=\epsilon(B)_C(g\otimes\mathrm{id}_B)(\mathrm{id}_I\otimes\epsilon(A)_B)(\mathrm{id}\otimes f\otimes\mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_I\otimes\lambda_A^{-1})\lambda_A^{-1},
\end{aligned}$$

其中最后一个等式来源于单位的相容性条件和引理12.5给出的交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\lambda_A^{-1}"] \arrow[d, "\lambda_A^{-1}"'] & I\otimes A \arrow[d, "\lambda_I^{-1}\otimes\mathrm{id}"] \\
I\otimes A \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\lambda_A^{-1}"] & I\otimes I\otimes A.
\end{tikzcd}$$

进一步

$$\begin{aligned}\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,gf) &= \epsilon(B)_C(g\otimes \mathrm{id}_B)(\mathrm{id}_I\otimes\epsilon(A)_B)(\mathrm{id}\otimes f\otimes \mathrm{id}_A)(\mathrm{id}_I\otimes\lambda_A^{-1})\lambda_A^{-1}\\ &= \epsilon(B)_C(g\otimes \mathrm{id}_B)(\mathrm{id}_I\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,f))\lambda_A^{-1},\end{aligned}$$

再注意到λ的自然性给出的交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\lambda_A^{-1}"] \arrow[d, "\tilde f"'] & I\otimes A \arrow[d, "\mathrm{id}_I\otimes\tilde f"] \\ B \arrow[r, "\lambda_B^{-1}"] & I\otimes B, \end{tikzcd}$$

于是

$$\epsilon(B)_C(g\otimes \mathrm{id}_B)(\mathrm{id}_I\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,f))\lambda_A^{-1} = \epsilon(B)_C(g\otimes \mathrm{id}_B)\lambda_B^{-1}\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,f) = \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,g)\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,f).$$

另一方面，按定义，

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,\underline{\mathrm{id}}_A) = A\xrightarrow{\lambda_A^{-1}} I\otimes A\xrightarrow{\underline{\mathrm{id}}_A\otimes\mathrm{id}}\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A)\otimes A\xrightarrow{\epsilon(A)_A} A = \epsilon(A)_A(\underline{\mathrm{id}}_A\otimes\mathrm{id}_A)\lambda_A^{-1} = \lambda_A\lambda_A^{-1} = \mathrm{id}_A,$$

其中$\epsilon(A)_A(\underline{\mathrm{id}}_A\otimes\mathrm{id}_A)=\lambda_A$也在引理12.6中证明.如此说明了$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,-)$是一个函子.

习题12.14说明了对任意的对象A，

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,A)\cong A,$$

于是函子是本质满的，因而只要证明它是满忠实的即可.为此，只要找到对任意对象$A,B\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}_0$，映射

$$\begin{aligned}\hom_{\mathcal{C}_0}(A,B)&\to\hom_{\mathcal{C}}(A,B)\\ f&\mapsto\tilde f\end{aligned}$$

的逆映射即可.考虑复合

$$I\otimes A\xrightarrow{f\otimes\mathrm{id}}\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A\xrightarrow{\epsilon(A)_B} B$$

在伴随对$(-\otimes B,\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,-))$下的对应，同样交换图

$$\begin{tikzcd} \hom_{\mathcal{C}}(I,\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)) \arrow[d, leftrightarrow] & \hom_{\mathcal{B}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B),\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)) \arrow[l, "f^*"'] \arrow[d, leftrightarrow] \\ \hom_{\mathcal{C}}(I\otimes A,B) & \hom_{\mathcal{C}}(\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A,B) \arrow[l, "(f\otimes\mathrm{id})^*"] \end{tikzcd}$$

说明这个对应恰好是f，因而

$$\begin{aligned}\hom_{\mathcal{C}_0}(A,B)&\leftarrow\hom_{\mathcal{C}}(A,B)\\ (\lambda_A^{-1})^*(f^\sharp)&\mapsfrom f^\flat\end{aligned}$$

是逆映射，其中$f^\sharp\leftrightarrow f^\flat$表示伴随对下的对应. □

如上的证明实际上在说明原本对于底范畴的定义方式几乎就是取“函子”$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I,-)$，并且在给定的特殊情形下这是一个范畴的等价（如上证明中的函子性并不需要条件闭）.类似地取任意的对象A，$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,-)$也应该是一个函子.下面的习题技术上说明了这一点：

习题 12.18. [推出和拉回] 给定一个$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}$，$f : I \to \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B, C)$是$\mathcal{C}_0$中的一个态射，那么对于任意$\mathcal{C}$中的对象$A$，定义

$$f_* : \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \cong I \otimes \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{f \otimes \mathrm{id}} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \otimes \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \xrightarrow{\circ} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, C),$$

证明

1. 如此的构造给出了一个可表函子
$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}_0}(A, -) : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{B},$$
2. 类似地构造g^*和可表函子
$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}_0}(-, B) : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{B},$$
3. 该函子与函子$\hom_{\mathcal{B}}(I, -)$的复合给出了可表函子
$$\hom_{\mathcal{C}_0}(A, -) : \mathcal{C}_0 \to \mathbf{Set}.$$

证明. 1. 为了验证函子性，

□

12.4.3 充实函子和充实自然变换

定义. 给定$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}$和$\mathcal{D}$，若F给出了，并且对任意$\mathcal{C}$中的对象A, B，都有$\mathcal{B}$中的态射

$$F_{A,B} : \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \underline{\hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)),$$

满足

1. 与复合相容，即有交换图
$$\begin{tikzcd} \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \arrow[r, "\circ"] \arrow[d, "F_{B,C} \times F_{A,B}"'] & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, C) \arrow[d, "F_{A,C}"] \\ \underline{\hom}_{\mathcal{D}}(F(B), F(C)) \times \underline{\hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B)) \arrow[r, "\circ"] & \underline{\hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(C)), \end{tikzcd}$$
2. 与单位相容，即有交换图
$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{F(A)}"'] & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, A) \arrow[d, "F_{A,A}"] \\ & \underline{\hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(A)), \end{tikzcd}$$

则称函子F是充实于$\mathcal{B}$中的函子(functor enriched in $\mathcal{B}$)，简称$\mathcal{B}$函子.

注意$\mathcal{B}$函子不需要是函子.

例 12.35 (可表函子). 习题12.18说明了

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}_0}(A,-):\mathcal{C}_0\to\mathcal{B}$$

是一个函子，并且在取底之后是可表的，那么自然会考虑对应的

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,-):\mathcal{C}\to\mathcal{B}$$

是否是$\mathcal{B}$函子；但为保证定义的有效性，$\mathcal{B}$必然是充实于自身的，因而不妨考虑$\mathcal{B}$是闭幺半范畴的情形.

于是为说明$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,-)$是$\mathcal{B}$函子，定义

特别地，若$\mathcal{C}$是闭幺半范畴，那么对任意对象A，$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,-)$是$\mathcal{C}$函子，

例 12.36.

定义. 给定$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C},\mathcal{D}$和$\mathcal{B}$函子$F,G:\mathcal{C}\rightrightarrows\mathcal{D}$，若对任意$\mathcal{C}$中的对象$A$都存在$\mathcal{B}$中的态射$\alpha_A:I\to\underline{\hom}_{\mathcal{D}}(F(A),G(A))$，满足

$$\begin{tikzcd}
\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "F_{A,B}"] \arrow[d, "G_{A,B}"'] & \underline{\hom}_{\mathcal{D}}(F(A),F(B)) \arrow[d, "(\alpha_B)_*"] \\
\underline{\hom}_{\mathcal{D}}(G(A),G(B)) \arrow[r, "(\alpha_A)^*"] & \underline{\hom}_{\mathcal{D}}(F(A),G(B)),
\end{tikzcd}$$

则称α是充实自然变换（$\mathcal{B}$自然变换($\mathcal{B}$-natural transformation)），其中.

例 12.37. 例12.30说明了只含有单个对象的**Ab**范畴是含幺环，记这个环为R，对应的只含有单个对象的**Ab**范畴之间的协变（反变）**Ab**函子是左（右）R模.

如同前面构造

命题 12.23. 底范畴$(-)_0$:是2函子.

引理 12.9. 任意给定弱幺半函子$F:\mathcal{B}\to\mathcal{D}$，都诱导了一个2函子

证明. □

注意到在一个$\mathcal{B}$范畴中，不存在具体的态射因此无法对态射进行复合（注意之前的复合抽象地定义为一个$\mathcal{B}$中的态射），于是无法定义态射的逆，进而无法通过通常的方式定义对象的同构，但我们有如下的“$\mathcal{B}$-Yoneda引理”：

引理 12.10. 给定$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}$，A,B是$\mathcal{C}$中的对象，那么下列陈述等价：

1. A, B是$\mathcal{C}_0$中的同构对象，
2. 可表函子$\hom_{\mathcal{C}_0}(A,-):\mathcal{C}_0\to\mathbf{Set}$和$\hom_{\mathcal{C}_0}(B,-):\mathcal{C}_0\to\mathbf{Set}$是自然同构的函子，
3. 可表函子$\underline{\hom}_{\mathcal{C}_0}(A,-):\mathcal{C}_0\to\mathcal{B}$和$\underline{\hom}_{\mathcal{C}_0}(B,-):\mathcal{C}_0\to\mathcal{B}$是自然同构的函子，
4. 可表$\mathcal{B}$函子$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,-):\mathcal{C}\to\mathcal{B}$和$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,-):\mathcal{C}\to\mathcal{B}$是自然同构的函子.

于是我们称满足如上任意条件$\mathcal{C}$中的对象A, B是同构的*(isomorphic)*.

证明. □

最后，类比通常范畴的情形，同样可以定义$\mathcal{B}$范畴的等价和伴随$\mathcal{B}$函子对.

定义. 若$\mathcal{B}$函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$满足

1. 本质满的(essentially surjective)，即对任意$\mathcal{D}$中的对象B，都存在$\mathcal{C}$中的对象A满足$F(A)$同构于（在引理12.10意义下）B，
2. $\mathcal{B}$满忠实的($\mathcal{B}$-fully faithful)，即对任意$\mathcal{C}$中的对象A, B，$F_{A,B}:\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\to\underline{\hom}_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$是$\mathcal{B}$中的同构，

则称F是$\mathcal{B}$范畴等价($\mathcal{B}$-equivalence of categories).

定义. 给定$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C},\mathcal{D}$和$\mathcal{B}$函子$F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$，若存在$\mathcal{B}$自然同构

$$\alpha:\underline{\hom}_{\mathcal{D}}(F(-),-)\Rightarrow\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(-,G(-)),$$

则称(F,G)是$\mathcal{B}$伴随($\mathcal{B}$-adjunction).

完全同于普通范畴的情形（定理8.4），可以用单位和余单位来描述伴随函子对：

命题 12.24. 给定$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C},\mathcal{D}$和$\mathcal{B}$函子$F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$，那么$(F,G)$是伴随当且仅当存在$\mathcal{B}$自然变换$\eta:\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\Rightarrow GF$和$\epsilon:FG\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$满足$G\epsilon\circ\eta G=\mathrm{id}_G$和$\epsilon F\circ F\eta=\mathrm{id}_F$.

证明. □

12.4.4 张量积和余张量积

在上一节中，我们定义并讨论了$\mathcal{B}$范畴之间的$\mathcal{B}$伴随.给定闭范畴$\mathcal{C}$，$(-\otimes,\underline{\hom}_{\mathcal{C}})$是$\mathbf{Set}$伴随（即原本意义下的伴随）；但引理12.6提示，作为充实于自身的范畴，$\mathcal{C}$的底（返回经典范畴的视角）也是本身，因而有理

由相信这个伴随可以是$\mathcal{C}$伴随.这是正确地，注意到对任意对象X, A, B, C，存在一族自然的同构

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(X, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A\otimes B, C)) \cong \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(X\otimes A\otimes B, C) \cong \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(X\otimes A, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B, C)) \cong \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(X, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B, C))),$$

于是根据Yoneda引理，$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A\otimes B, C)$自然同构于$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B, C))$，即这个伴随可以是$\mathcal{C}$伴随.

这一节中我们始终假定$\mathcal{B}$是闭对称幺半范畴，因此引理12.6说明$\mathcal{B}$是充实于自身的范畴.

借助如上的讨论，闭幺半范畴的张量积$-\otimes B$作为$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B, -)$的伴随也应当是一个充实函子，定义函子所需要的态射是

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, C) \xrightarrow{\eta^B_C} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B, C\otimes B)) \cong \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A\otimes B, C\otimes B),$$

其中$\eta^B : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B, -\otimes B)$是$\mathcal{C}$伴随对应的单位.

更一般地，我们考虑如下问题：给定$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}, \mathcal{D}$，并且给定底范畴之间的伴随

$$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G,$$

是否可以将这个伴随扩张为一个$\mathcal{B}$伴随？或者，在什么条件下可以将这个伴随扩张？

仿照刚刚的讨论，我们会想能否用$\mathcal{B}$中的对象和Yoneda引理考虑$\mathrm{hom}_{\mathcal{B}}(X, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, G(B)))$，但之前论断的第一步就无法进行下去了.但仿照先前的推理，如果此时对任意$\mathcal{C}$中的对象A和$\mathcal{D}$中的对象B，函子$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, -)$和$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{D}}(B$存在左伴随，且$F$保左伴随；或者函子$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(-, A)$和$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{D}}(-, B)$都存在右伴随，且$G$保右伴随.

定义. 给定$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}$，若对任意$\mathcal{B}$中的对象X和$\mathcal{C}$中的对象A，都存在对应的$\mathcal{C}$中的对象$X\otimes A$使得存在关于X, A和$\mathcal{C}$中的对象B都成立的同构

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(X\otimes A, B) \cong \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{B}}(X, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B)),$$

则称$\mathcal{C}$是张量化的(tensored).

习题 12.19. 给定张量化的$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}$，求证存在唯一的方式使得定义中的

$$-\otimes - : \mathcal{B}\times\mathcal{C} \to \mathcal{C}$$

给出了一个函子.

证明. □

习题12.19说明同构

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(X\otimes A, B) \cong \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{B}}(X, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B))$$

关于X, A和B都自然的，于是对任意可表$\mathcal{B}$函子$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, -) : \mathcal{C} \to \mathcal{B}$，都存在它的左$\mathcal{B}$伴随$-\otimes A : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$.

定义. 给定$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}$，若对任意$\mathcal{B}$中的对象X和$\mathcal{C}$中的对象B，都存在对应的$\mathcal{C}$中的对象$\underline{\mathrm{Hom}}(X, B)$使得存在关于$X, B$和$\mathcal{C}$中的对象$A$都自然的同构

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\mathrm{Hom}}(X, B)) \cong \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{B}}(X, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B)),$$

则称$\mathcal{C}$是余张量化的(cotensored).

若给定的$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}$同时是张量化和余张量化的，那么存在一个双变量$\mathcal{B}$伴随

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes A, B) \cong \underline{\hom}_{\mathcal{B}}(X, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B)) \cong \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\mathrm{Hom}}(X, B)).$$

读者可以自行尝试完善这个定义.

例 12.38. 任意给定积和余积都存在的局部小范畴$\mathcal{C}$，$\mathcal{C}$都是**Set**张量化和**Set**余张量化的.具体而言，对任意$\mathcal{C}$中的对象A和集合X：

1. $X \otimes A := \coprod_{x \in X} A$
2. $\underline{\mathrm{Hom}}(X, A) := \prod_{x \in X} A$

在继续给出其他例子之前，我们先来讨论一些一般的理论.首先下面的引理解释了为何如上的定义被称为张量化和余张量化.

引理 12.11. *给定闭幺半范畴$(\mathcal{B}, \otimes, I)$，并假设$\mathcal{C}$是$\mathcal{B}$张量化的（为区别，张量化的函子记为$\otimes_{\mathcal{C}}$），那么张量$\otimes_{\mathcal{C}}$是单位的(unital)且是分配的(associative)，即对任意$\mathcal{B}$中的对象X, Y和$\mathcal{C}$中的对象A，存在自然的同构*

$$I \otimes_{\mathcal{C}} A \cong A$$

和

$$(X \otimes Y) \otimes_{\mathcal{C}} A \cong X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} A).$$

证明. 这里的主要工具是Yoneda引理和充实Yoneda引理（引理12.10）.

习题12.14说明对任意$\mathcal{B}$中的对象Z，$\underline{\hom}_{\mathcal{B}}(I, Z) \cong Z$，因此

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(I \otimes_{\mathcal{C}} A, B) \cong \underline{\hom}_{\mathcal{B}}(I, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B)) \cong \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B),$$

根据引理12.10，有自然的同构$I \otimes_{\mathcal{C}} A \cong A$.

类似地，对任意$\mathcal{M}$中的对象B，

$$\begin{aligned}\underline{\hom}_{\mathcal{C}}((X \otimes Y) \otimes_{\mathcal{C}} A, B) &\cong \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B)) \cong \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(X, \underline{\hom}_{\mathcal{B}}(Y, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B))) \\ &= \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(X, \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(Y \otimes_{\mathcal{C}} A, B)) \cong \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} A), B),\end{aligned}$$

同样根据充实Yoneda引理，存在自然的同构$(X \otimes Y) \otimes_{\mathcal{C}} A \cong X \otimes_{\mathcal{C}} (Y \otimes_{\mathcal{C}} A)$. □

此时我们可以回答我们在本小节最初提出来的问题了，即什么时候底范畴之间的伴随可以扩张为充实伴随：

命题 12.25. *给定张量化$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}$和余张量化$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{D}$，*

$$F_0 : \mathcal{C}_0 \leftrightarrows \mathcal{D}_0 : G_0$$

是底范畴间的伴随，那么如下信息是互相决定的：

1. $\mathcal{B}$伴随
$$\alpha : \underline{\hom}_{\mathcal{D}}(F(-),-) \Rightarrow \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(-,G(-)),$$
2. $\mathcal{B}$函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$满足存在自然的$\mathcal{B}$同构
$$F(X \otimes_{\mathcal{C}} A) \cong X \otimes_{\mathcal{D}} F(A),$$
3. $\mathcal{B}$函子$\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{D} : G$满足存在自然的$\mathcal{B}$同构
$$F(X \otimes_{\mathcal{C}} A) \cong X \otimes_{\mathcal{D}} F(A).$$

证明. □

定理 12.26. 给定闭对称幺半范畴之间的伴随
$$F : \mathcal{A} \leftrightarrows \mathcal{B} : G,$$
满足F是强幺半的函子，那么任意张量化且余张量化的$\mathcal{B}$范畴$\mathcal{C}$都自然地成为张量化且余张量化的$\mathcal{A}$范畴.

在给出证明之前，我们首先想要说明，定理12.26中的伴随$F : \mathcal{A} \leftrightarrows \mathcal{B} : G$意味着函子$G$是弱幺半的（[?]），再结合引理12.7，$\mathcal{C}$有$\mathcal{A}$范畴结构.

证明. 由于$\mathcal{C}$是张量化且余张量化的$\mathcal{B}$范畴，对任意$\mathcal{B}$中的对象X和$\mathcal{C}$中的对象A, B，存在自然的同构
$$\mathcal{B} - \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes_{\mathcal{C}} A, B) \cong \hom_{\mathcal{B}}(X, \mathcal{B} - \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)) \cong \mathcal{B} - \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\mathrm{Hom}}(X,B)),$$
其中$\mathcal{B} - \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$表示$\mathcal{C}$作为$\mathcal{B}$范畴的结构，以区别于$\mathcal{A}$范畴结构$\mathcal{A} - \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(-,-) := G(\mathcal{B} - \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(-,-))$.

定义
$$\begin{aligned} - \star - : \mathcal{A} \times \mathcal{C} &\to \mathcal{C} \\ (U, A) &\mapsto U \star A := F(U) \otimes_{\mathcal{C}} A \end{aligned}$$
和
$$\begin{aligned} [-,-] : \mathcal{A}^{\circ} \times \mathcal{C} &\to \mathcal{C} \\ (U, A) &\mapsto [U, A] := \underline{\mathrm{Hom}}(F(U), A), \end{aligned}$$
于是需要证明对象$\mathcal{A} - \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(U \star A, B), \underline{\hom}_{\mathcal{A}}(U, \mathcal{A} - \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B))$和$\mathcal{A} - \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, [U,B])$是同构的，这里的工具依旧是充实Yoneda引理（引理12.10）.

对于第一部分，对任意$\mathcal{A}$中的对象W，

$$\begin{aligned}
\underline{\hom}_{\mathcal{A}}(W, \mathcal{A}-\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(U\star A, B)) &= \underline{\hom}_{\mathcal{A}}(W, G(\mathcal{B}-\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F(U)\otimes_{\mathcal{C}} A, B)))\\
&\cong \underline{\hom}_{\mathcal{B}}(F(W), \mathcal{B}-\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F(U)\otimes_{\mathcal{C}} A, B))\\
&\cong \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(F(W)\otimes_{\mathcal{C}}(F(U)\otimes_{\mathcal{C}} A), B)\\
&\cong \underline{\hom}_{\mathcal{C}}((F(W)\otimes F(U))\otimes_{\mathcal{C}} A, B)\\
&\cong \underline{\hom}_{\mathcal{B}}(F(W)\otimes F(U), \mathcal{B}-\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B))\\
&\cong \underline{\hom}_{\mathcal{B}}(F(W\otimes U), \mathcal{B}-\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B))\\
&\cong \underline{\hom}_{\mathcal{A}}(W\otimes U, G(\mathcal{B}-\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B)))\\
&= \underline{\hom}_{\mathcal{A}}(W\otimes U, \mathcal{A}-\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B))\\
&\cong \underline{\hom}_{\mathcal{A}}(W, \underline{\hom}_{\mathcal{A}}(U, \mathcal{A}-\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A, B))),
\end{aligned}$$

这就证明了前两个对象是同构的.另一部分对偶于这里的讨论. □

习题 12.20. 验证定理12.26中定义的$-\star-$与$[-,-]$的函子性.

推论 12.26.1. *给定定理12.26中的伴随$F:\mathcal{A}\leftrightarrows\mathcal{B}:G$，那么它是$\mathcal{B}$作为$\mathcal{A}$范畴（引理12.7）下的$\mathcal{A}$伴随.*

证明. 注意到范畴$\mathcal{B}$本身是充实于自身的范畴（命题12.6），为做区别记$\mathcal{B}$作为$\mathcal{A}$范畴的结构为$\mathcal{A}-\underline{\hom}_{\mathcal{B}}(-,-)$.于是

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{A}}(W, \mathcal{A}-\underline{\hom}_{\mathcal{B}}(F(U), V)) &= \hom_{\mathcal{A}}(W, G(\underline{\hom}_{\mathcal{B}}(F(U), V)))\\
&\cong \hom_{\mathcal{B}}(F(W), \underline{\hom}_{\mathcal{B}}(F(U), V))\\
&\cong \hom_{\mathcal{B}}(F(W)\otimes F(U), V)\\
&\cong \hom_{\mathcal{B}}(F(W\otimes U), V)\\
&\cong \hom_{\mathcal{A}}(W\otimes U, G(V))\\
&\cong \hom_{\mathcal{A}}(W, \underline{\hom}_{\mathcal{A}}(U, G(V))),
\end{aligned}$$

于是根据命题12.25，得证. □

例 12.39. 考虑例12.28的特殊情形，

例 12.40.

第六部分

Lie理论

第十三章 Lie代数

13.1 定义和基本结构

例 13.1.

$$\{E_{i,j}\}_{\substack{i,j=1,\cdots,n \\ i\neq j}} \cup \{E_{i,i} - E_{i+1,i+1}\}_{i=1,\cdots,n-1}$$

存在伴随

$$U : \mathbf{Lie}_k \leftrightarrows k - \mathbf{Alg} : (-)_{\mathrm{Lie}}$$
$$\hom_{k-\mathbf{Alg}}(U\mathfrak{g}, A) \cong \hom_{\mathbf{Lie}_k}(\mathfrak{g}, A_{\mathrm{Lie}})$$

$$U\mathfrak{g} := T\mathfrak{g}/\langle a \otimes b - b \otimes a - [a,b] \rangle$$

其中$\langle a \otimes b - b \otimes a - [a,b] \rangle$是形如

13.1.1 Lie代数的系数变换

我们先从一个例子开始讨论.

13.2 单Lie代数和半单Lie代数

例 13.2. 我们来证明$\mathfrak{sl}_n$是单Lie代数.例13.1中提到了$\mathfrak{sl}_n$的一组基$\{E_{i,j}\}_{\substack{i,j=1,\cdots,n \\ i\neq j}} \cup \{E_{i,i} - E_{i+1,i+1}\}_{i=1,\cdots,n-1}$,

13.3 Cartan子代数

定义. 设$\mathfrak{h}$是Lie代数$\mathfrak{g}$的子代数，子集

$$N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h}) := \{a \in \mathfrak{g} \mid [a, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}\}$$

被称为$\mathfrak{h}$在$\mathfrak{g}$中的正规化子(normaliser).

引理 13.1. 设$\mathfrak{g}$是幂零*Lie*代数，$\mathfrak{h}$是其子*Lie*代数且$\mathfrak{h} \subsetneqq \mathfrak{g}$，则$\mathfrak{h} \subsetneqq N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$.

证明. 由于$\mathfrak{g}$是幂零Lie代数， □

定义. 设$\mathfrak{h}$是Lie代数$\mathfrak{g}$的子代数，满足

1. $\mathfrak{h}$是幂零Lie代数，
2. $\mathfrak{h} = N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{h})$，

则称$\mathfrak{h}$是$\mathfrak{g}$的Cartan子代数(Cartan subalgebra).

第十四章　复Lie代数的分类和分解

给定李代数$\mathfrak{g}$，$x \in \mathfrak{g}$，称映射$y \mapsto \mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$为伴随表示

对李代数$\mathfrak{g}$，称由

$$C^1\mathfrak{g} := \mathfrak{g}$$
$$C^{n+1}\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, C^n\mathfrak{g}]$$

定义的$\mathfrak{g}$的递降子代数为$\mathfrak{g}$的lower central series.明显地，

$$[C^m\mathfrak{g}, C^n\mathfrak{g}] \subseteq C^{m+n}\mathfrak{g}.$$

定义. 给定李代数$\mathfrak{g}$，若存在正整数n使得$C^n\mathfrak{g} = 0$，则称$\mathfrak{g}$是幂零的(nilpotent).

定义. 若李代数$\mathfrak{g}$满足存在自然数n使得$C^n\mathfrak{g} = 0$，则称$\mathfrak{g}$是幂零的.

命题 14.1. *给定特征0的域F上的有限维李代数$\mathfrak{g}$，那么下列条件等价：*

1. *$\mathfrak{g}$是幂零的，且$C^{r+1}\mathfrak{g} = 0$，*
2. *对任意$x_0, \cdots, x_r \in \mathfrak{g}$，*

$$[x_0, [x_1, [\cdots, x_r]\cdots]] = (\mathrm{ad}_{x_0})\cdots(\mathrm{ad}_{x_{r-1}})(x_r) = 0,$$

3. *存在$\mathfrak{g}$的一个递降理想滤子*

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \cdots \mathfrak{a}_r = 0$$

满足$[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subseteq \mathfrak{a}_{i+1}$对所有$0 \le i \le r-1$成立.

定义. 对于李代数$\mathfrak{g}$，子集

$$\{x \in \mathfrak{g} \mid [x, y] = 0\text{对于所有}y \in \mathfrak{g}\text{成立}\}$$

称为$\mathfrak{g}$的中心(center).

命题 14.2. *给定李代数$\mathfrak{g}$和包含在中心的理想$\mathfrak{a}$，那么$\mathfrak{g}$是幂零的当且仅当$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$是幂零的.*

例 14.1. 设V是n维向量空间，给定V的上升子空间序列$D = \{D_i\}_{1 \le i \le n}$

$$0 = D_0 \subseteq D_1 \subseteq \cdots \subseteq D_n = V$$

满足$\dim V_i = i$，并且定义

$$\mathfrak{n}(D) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid xD_{i+1} \subseteq D_i\},$$

那么$\mathfrak{n}(D)$是幂零的且$C^n\mathfrak{n}(D) = 0$.我们称这样的一个子空间序列为V的一个旗帜(flag).

事实上，

用矩阵表示这个例子是说存在V的一组基使得所有矩阵是严格上三角的.

定理 14.3. *有限维李代数$\mathfrak{g}$，那么它是幂零的当且仅当对任意的$x \in \mathfrak{g}$，ad_x是幂零的.*

定理 14.4. *设V是有限维线性空间，$\mathfrak{g}$是$\mathfrak{gl}(V)$的子李代数，那么如下叙述等价：*

1. *$\mathfrak{g}$是幂零的；*
2. *存在V的旗帜D满足$\mathfrak{g} \subseteq \mathfrak{gl}(V)$.*

类似群和代数的情形，给定李代数$\mathfrak{g}$和向量空间$V \neq 0$，那么称一个李代数同态$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$为$\mathfrak{g}$在$V$上的一个线性表示(linear representation)，也称V是一个$\mathfrak{g}$模.V中的向量v若满足对任意$x \in \mathfrak{g}$，$\varphi(x)(v) = 0$都成了，则称v是一个$\mathfrak{g}$作用下的不变量(invariant).

推论 14.4.1. *给定李代数$\mathfrak{g}$的有限维线性表示$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$，若$\varphi(x)$对任意$x \in \mathfrak{g}$都是幂零的，那么存在$v \in V$是$\mathfrak{g}$作用下的不变量.*

对李代数$\mathfrak{g}$，称由

$$D^1\mathfrak{g} := \mathfrak{g}$$
$$D^{n+1}\mathfrak{g} := [D^n\mathfrak{g}, D^n\mathfrak{g}]$$

定义的$\mathfrak{g}$的递降子代数为$\mathfrak{g}$的导出序列(derived series).

定义. 若李代数$\mathfrak{g}$满足存在自然数n使得$D^n\mathfrak{g}=0$，则称$\mathfrak{g}$是可解的(solvable).

命题 14.5. *1.* 幂零李代数是可解的，

2. 可解李代数的子李代数、商李代数和扩张都是可解的，

3. 给定有限维向量空间V的旗帜D，令

$$\mathfrak{b}(D) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid xD_i \subseteq D_i\}$$

是D对应的$Borel$代数，那么$\mathfrak{b}(D)$是可解的.

命题 14.6. 给定有限维李代数$\mathfrak{g}$，则如下是等价的：

1. $\mathfrak{g}$是可解的且$D^r\mathfrak{g}=0$，

2. 存在$\mathfrak{g}$的递降理想

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_r = 0$$

使得$[\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_i] \subseteq \mathfrak{a}_{i+1}$成立（即$\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$是交换的）.

第三项可以理解为（非严格的）上三角矩阵.

定理 14.7 (Lie)**.** 设k是特征0的代数闭域，$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$是有限维李代数$\mathfrak{g}$的有限维线性表示.若$\mathfrak{g}$是可解的，则存在$V$的旗帜$D$使得$\varphi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{b}(D)$.

推论 14.7.1. 设k是特征0的代数闭域，$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$是有限维李代数$\mathfrak{g}$的有限维线性表示，且$\mathfrak{g}$是可解的，那么有限维$\mathfrak{g}$单模必是1维的.

推论 14.7.2. 设k是特征0的代数闭域，$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$是有限维李代数$\mathfrak{g}$的有限维线性表示，且$\mathfrak{g}$是可解的，那么存在$v \in V$对任意$x \in \mathfrak{g}$都是$\varphi(x)$的特征向量.

引理 14.1. 设k是特征0的代数闭域，$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$是有限维李代数$\mathfrak{g}$的有限维线性表示，$\mathfrak{h}$是$\mathfrak{g}$的理想，$v \neq 0$是$V$中的元素，那么

定理 14.8 (Cartan's Criterion). *设k是特征0的代数闭域，$\mathfrak{g}$是$\mathfrak{gl}(V)$的有限维子李代数，那么$\mathfrak{g}$是可解的当且仅当*

$$\mathrm{Tr}(x \circ y) = 0$$

对任意$x \in \mathfrak{g}, y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$成立.

14.1 半单李代数

根据命题，若$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$是李代数$\mathfrak{g}$的可解理想，那么扩张

$$0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \to 0$$

说明$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$也是李代数$\mathfrak{g}$的可解理想，于是存在$\mathfrak{g}$的极大可解子理想，记为$\mathfrak{r}$，称为根理想(radical).

定义. 李代数$\mathfrak{g}$的根理想$\mathfrak{r}$满足$\mathfrak{r} = 0$，则称$\mathfrak{g}$是半单的(semi-simple).

例 14.2. 给定有限维线性空间V，那么$\mathfrak{sl}(V)$是半单的.

定理 14.9. *给定李代数$\mathfrak{g}$和根理想$\mathfrak{r}$，那么*

1. *$\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$是半单的，且*
2. *存在$\mathfrak{g}$的子李代数$\mathfrak{s}$使得$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$.*

事实上，投影$\mathfrak{s} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$是同构，于是$\mathfrak{g}$是一个半单李代数与一个可解理想的半直积，这称为Levi分解.

定义. 给定双线性形式$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$，若满足

$$B([x, y], z) + B(y, [x, z]) = 0$$

对任意$x, y, z \in \mathfrak{g}$都成立，则称该双线性形式是不变的(invariant).

例 14.3. 定义双线性形式

$$K(x, y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y),$$

称其为Killing形式(Killing form)，它是一个不变双线性形.

定理 14.10 (Cartan-Killing)**.** 李代数$\mathfrak{g}$是半单的当且仅当它的*Killing*形式是非退化的.

定理 14.11. 给定半单李代数$\mathfrak{g}$及其理想$\mathfrak{a}$，那么$\mathfrak{a}$关于*Killing*形式的垂直空间$\mathfrak{b}$也是$\mathfrak{a}$的直和补，并且存在自然的同构

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}.$$

推论 14.11.1. 任意半单李代数的子李代数、商李代数和乘积都是半单的.

定义. 给定李代数$\mathfrak{s}$，若$\mathfrak{s}$是非交换的且它的理想仅有0及其本身，则称$\mathfrak{s}$是单的(simple).

例 14.4. 任意给定维数不小于2的向量空间V，则$\mathfrak{sl}(V)$是单李代数.

定理 14.12. 李代数$\mathfrak{g}$是半单的当且仅当它是单李代数的乘积.

定义. 给定李代数$\mathfrak{g}$，若k线性映射$D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$满足

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

对所有$x, y \in \mathfrak{g}$都成立，则称D是$\mathfrak{g}$的一个微分(derivation)，若存在$z \in \mathfrak{g}$使得$D = \mathfrak{ad}_z$，则称D是一个内微分(inner derivation).

定理 14.13. 半单李代数的微分一定是内微分.

定义. 给定半单李代数$\mathfrak{g}$，$x \in \mathfrak{g}$，

1. 若ad_x是幂零的，则称x是幂零的，
2. 若ad_x是半单的，即对应的矩阵在k的代数闭包中可对角化，则称x是半单的.

定理 14.14. 若$\mathfrak{g}$是半单李代数，那么任意元素$x \in \mathfrak{g}$都可以写成

$$x = s + n$$

的形式，其中s是半单元素，n是幂零元素，且$[s, n] = 0$.特别地，若元素$y \in \mathfrak{g}$与x交换，则也与s和n交换.

定理 14.15. 给定半单李代数$\mathfrak{g}$的表示$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$，若$x$是幂零的，则$\varphi(x)$也是幂零的.

定理 14.16 (Weyl)**.** 任意（有限维）的半单李代数表示都是完全可约的.

定理 14.17. 给定有限维$\mathbb{R}$李代数$\mathfrak{g}$，那么$\mathfrak{g}$是交换的（对应地，幂零、可解、半单的）当且仅当$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$是交换的（对应地，幂零、可解、半单的）.

14.2 $\mathfrak{sl}_2$

依照定义

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a + d = 0 \right\},$$

其中的Lie括号满足

$$[A, B] := AB - BA,$$

于是$\mathfrak{sl}_2$自然有一组基

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

且满足

$$[X, Y] = H,\ [H, X] = 2X,\ [H, Y] = -2Y.$$

显然元素H是半单的，并且它生成的子Lie代数

$$\mathfrak{h} := \mathbb{C} \cdot H$$

是$\mathfrak{sl}_2$中的Cartan子代数.

定义. 给定$\mathfrak{sl}_2$模V，对任意$\lambda \in \mathbb{C}$，令

$$V^\lambda := \{v \in V \mid H \cdot v = \lambda v\},$$

称V^λ中的元素的权重(weight)是λ.

命题 14.18. 给定$\mathfrak{sl}_2$模V，那么

1. 和$\sum_{\lambda \in \mathbb{C}} V^\lambda$是直和，
2. 若元素x具有权重λ，则Xx具有权重$\lambda - 2$.

证明.

$$HXx = [H, X] + XHx = 2Xx + \lambda Xx = (\lambda + 2)Xx,$$

□

定义. 给定$\mathfrak{sl}_2$模V和$\lambda \in \mathbb{C}$，若元素$e \in V$具有权重λ且

$$Xe = 0,$$

则称e具有权重λ的原元素(primitive of weight λ).

命题 14.19. 给定$\mathfrak{sl}_2$模V和$\lambda \in \mathbb{C}$，元素$e \in V$是具有权重λ的原元素当且仅当e张成的直线在$\mathfrak{sl}_2$的$Borel$群作用下不变.

命题 14.20. 任意有限维$\mathfrak{sl}_2$模V都有一个原元素.

习题 14.1. 考虑序列$\{Xx, X^2x, X^3, \cdots\}$，证明其中最后一个非零元素是一个原元素.

定理 14.21. 给定$\mathfrak{sl}_2$模V和其中的原元素e，令$e_n := \frac{Y^n e}{n!}, n \geq 0$且$e_{-1} = 0$，那么

$$\begin{aligned} He_n &= (\lambda - 2n)e_n, \\ Ye_n &= (n+1)e_{n+1}, \\ Xe_n &= (\lambda - n + 1)e_{n-1} \end{aligned}$$

对任意的$n \geq 0$都成立.

推论 14.21.1. 如定理条件，那么如下两种情况必有一成立且仅有一种成立

1. $\{e_n\}_{n \geq 0}$是线性无关的，
2. e的权重λ是整数m，$\{e_0, \cdots, e_m\}$是线性无关的且$e_i = 0$对任意$i > m$都成立.

推论 14.21.2. 若V是有限维$\mathfrak{sl}_2$模，那么推论中的情形2成立，且$\{e_0, \cdots, e_m\}$张成了$\mathfrak{sl}_2$不变的子模.

记$\{e_0, \cdots, e_m\}$张成的模为W_m.

定理 14.22.
1. W_m是不可约$\mathfrak{sl}_2$模，
2. 所有的有限维$\mathfrak{sl}_2$不可约模都同构于某个W_m.

14.3 根系

给定一个有限维$\mathbb{R}$线性空间V，α是V中的向量，s是V的线性自同构，满足

1. $s(\alpha) = -\alpha$，
2. V的子集$H := \{v \in V \mid s(v) = v\}$是$V$的超平面，

则称s是V关于α的对称(symmetry with vector α).

习题 14.2. 求证$V = H \oplus \mathbb{R}\alpha$.设$V^*$是$V$的对偶空间，求证存在唯一的$\alpha^* \in V^*$使得$\alpha^*(\alpha) = 2$且$\alpha^*(H) = 0$.

一方面，给定一个关于α的对称s，令$H := \mathrm{Ker}\ s$，α^*是练习给出的线性函数，那么

$$s(x) = x - \alpha^*(x)\alpha$$

对任意$x \in V$成立，也记为$s = \mathrm{id} - \alpha^* \otimes \alpha$.反过来，任给定向量和超平面$H$，记$\alpha^*$是练习确定的线性函数，那么

$$\begin{aligned} s : V &\to V \\ x &\mapsto x - \alpha^*(x)\alpha \end{aligned}$$

是一个对称.

引理 14.2. 给定一个有限维线性空间V和其中的非零向量α，设R是V的有限集且张成V，那么至多存在唯一的V关于α的对称s使得$s(R)=R$.

证明. 设s_1, s_2是两个满足要求的对称，令$u := s_1^{-1}\circ s_2$，那么u是V的自同构且$u(\alpha)=\alpha, u(R)=R$. □

定义. 给定有限维$\mathbb{R}$向量空间V和它的子集R，满足

1. R是有限集，不包含0且R张成了V，
2. 对任意的$\alpha\in R$，存在关于α的对称s_α使得R是不变的，
3. 对任意的$\alpha,\beta\in R$，$s_\alpha(\beta)-\beta$是α的整数倍，

则称R是V的一个根系(root system).

根据之前的讨论，对称s_α可以写为$\mathrm{id}-\alpha^*\otimes\alpha$，此时性质3等价于

$$\langle\alpha^*,\beta\rangle\in\mathbb{Z}.$$

此外，由性质2立即得到$-\alpha=s_\alpha(\alpha)\in R$.

定义. 给定V中的根系R，称

$$\langle s_\alpha\rangle_{\alpha\in R}\le GL(V)$$

为R对应的Weyl群(Weyl group).

索引