Abel群上的Fourier分析

1 特征

定义. 若Abel群G上的复值函数$\chi : G \to \mathbb{C}$满足

$$\chi(gh) = \chi(g)\chi(h), \ \forall g, h \in G$$

即χ是群$G \to \mathbb{C}^*$的同态，则称χ是群G的**特征**(*character*).若对于任意G中的元素g，$\chi(g) = 1$则称χ是**平凡特征**(*trivial character*)或**单位特征**(*unit character*).

注意到对于任意Abel群G的特征χ和任意群的元素g，$|\chi(g)| = 1$.这因为G是有限群，因而对于任意元素g，$g^{|G|} = 1$，故$\chi(g)^{|G|} = 1$，即$\chi(g)$是单位根，故$|\chi(g)| = 1$.于是，$\chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)}$.

若G是Abel群，记$\hat{G}$为G的所有特征，并赋予乘法

$$\chi_1 \cdot \chi_2(g) = \chi_1(g) \cdot \chi_2(g),$$

称$\hat{G}$为G的**对偶群**(*dual group*).

2 正交关系

设V是有限Abel群G上所有的复值函数组成的集合，它自然是一个$\mathbb{C}$向量空间.容易验证

$$\pi_g(x) := \begin{cases} 1 & x = g \\ 0 & x \neq g \end{cases}$$

是V的一组基，于是$\dim\ V = |G|$.在V上可以定义一个Hermite内积

$$(f,g) := \frac{1}{|G|}\sum_{x\in G} f(x)\overline{g(x)}$$

其中，这里的求和是对G中所有的元素进行的.我们研究特征一方面因为它有良好的代数性质，另一方面因为所有的特征组成了V的一组基.

引理. 若$\chi : G \to \mathbb{C}$是Abel群G上的非平凡特征，那么

$$\sum_{x\in G}\chi(x) = 0.$$

证明 由于χ是非平凡特征，于是存在$g\in G$使得$\chi(g)\neq 1$，故我们有

$$\chi(g)\sum_{x\in G}\chi(x) = \sum_{x\in G}\chi(g)\chi(x) = \sum_{x\in G}\chi(gx) = \sum_{x\in G}\chi(x),$$

最后一个等式因为左乘变换后gx也取遍G中所有元素.于是命题得证. ■

定理1. 有限Abel群G上的所有特征组成V的正交子集.

证明 为此，我们需要验证两件事情，首先$|\chi(g)| = 1$，于是

$$(\chi,\chi) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi(g)\overline{\chi(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|\chi(g)|^2 = 1.$$

另一方面，若χ_1,χ_2是不同的特征，那么

$$(\chi_1,\chi_2) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\overline{\chi_2(g)} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_1(g)\chi_2(g)^{-1} = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}(\chi_1\cdot\chi_2^{-1})(g).$$

显然$\chi_1\cdot\chi_2^{-1}$是$\hat{G}$中的元素，故$\chi_1\cdot\chi_2^{-1}$是特征.但$\chi_1\neq\chi_2$，因而$\chi_1\cdot\chi_2^{-1}$非平凡.根据引理，最后一个求和为0，得证. ■

下面的定理是本小节的主要结果，也是建立有限Abel群上Fourier分析的核心：

定理2. 有限Abel群G上的所有特征组成V的正交基.

证明 由前面的定理，只需证明所有特征张成V即可.

3 Fourier系数及逆变换公式

现在，我们类比Fourier分析的方法，建立下面一系列结果.给定Abel群G和上面的复值函数f，设χ是G的特征.定义f关于χ的**Fourier系数**(*Fourier coefficient*)为

$$\hat{f}(\chi) := (f, \chi) = \frac{1}{|G|} \sum_{x \in G} f(x) \overline{\chi(x)},$$