交换代数

G.Li

第零章　从几何开始

练习0.1. 设I是交换环R的理想，M是R模，定义

$$\Gamma_I(M) = \{x \in M \mid I^n x = 0,\ \exists n \in \mathbb{N}\}.$$

求证：R的两个理想I, J满足对任意R模M，$\Gamma_I(M) = \Gamma_J(M)$当且仅当$\sqrt{I} = \sqrt{J}$.

$$\Gamma_I(M) = \lim_{\rightarrow} \mathrm{Hom}_R(R/I^t, M).$$

Proof. 必要性：令$M = R/I$，于是$M = \Gamma_I(M) = \Gamma_J(M)$，即对任意$r \in R$，$J^n r \subseteq I$.取$r = 1$得到$J^n \subseteq I$，两边取根理想得到$\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$.同理可得另一方向.

任取$x \in \Gamma_I(M)$，可知存在自然数n满足$I^n x = 0$.又由于$\sqrt{I} = \sqrt{J}$，存在自然数m满足$J^m \subseteq I$，于是$J^{mn} x = 0$，即$x \in \Gamma_J(M)$. □

0.1　习题

练习0.2. 设k是域，$M_n(k)$是$n \times n$以k为系数矩阵的全体，作为仿射空间$M_n(k) \cong \mathbb{A}_k^{n^2}$.

1. 证明$GL_n(k) \subseteq M_n(k)$是Zariski开的.
2. 根据上面的结论证明$GL_n(k)$不是$M_n(k)$中的代数集.
3. 证明$GL_n(k)$是$\mathbb{A}_k^{n^2+1}$中的代数集.
4. 当$k = \mathbb{C}$时，证明

$$U_n(\mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = I\}$$

不是$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n^2}$中的代数集，但它是$\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^{4n^2}$中的代数集.

练习0.3. 求证$M_n(k)$中所有秩不大于给定整数$1 \leq r \leq n$的矩阵组成代数集，这个代数集称为行列式代数簇(determinantal variety).[考虑所有$(k+1) \times (k+1)$子矩阵的行列式.]

练习0.4. 求证$\mathbb{A}^2$的Zariski拓扑不同于$\mathbb{A} \times \mathbb{A}$的乘积拓扑.[考虑对角线.]

练习0.5.
1. 证明$\mathbb{A}_k^n$中的代数集都是有限个超平面的交；
2. 证明$\mathbb{A}_k^n$中的超平面的定义方程是某个不可约多项式的方幂.
3. 证明代数集上的Zariski拓扑是紧的.

练习0.6. 求证平面$\mathbb{A}_k^2$中的曲线具有余有限拓扑.注意，这并不意味着平面曲线与$\mathbb{A}^1$同构.

Proof. 设$C := V(p(x,y)) \subseteq \mathbb{A}^2$是曲线，其中$p(x,y)$是不可约理想，那么只要证明$C$中的任意闭集都是有限的即可.

取C中的闭集$C \cap V(f_1,\cdots,f_n)$，其中$f_1,\cdots,f_n \in k[x,y]$.注意到$V(f_1,\cdots,f_n) \subseteq V(f_i)$，因而只需要证明$C \cap V(f_i) = V(p) \cap V(f_i) = V(p(x,y), f_i(x,y))$是有限集即可.考虑

$$f_i(x,y) = f_{i,0}(x) + f_{i,1}(x)y + \cdots + f_{i,d}(x)y^d,$$

作为y的多项式在$\overline{\mathrm{Frac}(k[x])}$中有全部的解$g_1(x),\cdots,g_d(x)$.由于$g_1(x),\cdots,g_d(x)$在$\mathrm{Frac}(k[x])$上是代数的 $\square$

练习0.7. 证明仿射代数簇是quasi-compact的.

练习0.8. 证明仿射代数簇是有限维的.

练习0.9. 设$f: V \to W$是代数簇间的满态射，证明$\dim V \geq \dim W$，进而证明维数是代数簇的同构不变量.

练习0.10. 设$f: V \to W$是代数簇间的态射，证明f是Zariski连续的.

练习0.11. 设V是代数闭域k上的代数簇，求证坐标环$k(V)$是有限生成的约化环.

练习0.12. 证明$\mathrm{Spec}\ R$是quasi-compact的.

练习0.13. 证明$\mathrm{Spec}\ R$中的点$\mathfrak{p}$是闭的当且仅当$\mathfrak{p}$是极大理想.

练习0.14. 考虑$\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$中的点$(0)$，证明它的闭包是$\mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}$.

第一章　链条件

1.1　分次环

设S是一个分次环，那么由齐次元素生成的理想I成为齐次理想(homogeneous ideal).
分次环S中的理想I是齐次理想当且仅当

$$I = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I \cap S_n.$$

第二章　局部化

练习2.1. 设交换环R的零理想是有限多个极小素理想的交，即$(0)=\bigcap_{i=1}^{n}\mathfrak{p}_i$，设$U$是所有不被$\mathfrak{p}_i$包含的元素的全体，证明$R[U^{-1}]=\prod_{i=1}^{n}\mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p}_i)$.

Proof. 由$\mathfrak{p}_i$的极小性，$\mathfrak{m}_i:=R[U^{-1}]\mathfrak{p}_i, i=1,\cdots,n$是$R[U^{-1}]$中仅有的素理想，并且$\mathfrak{m}_i\cap R=\mathfrak{p}_i$. □

练习2.2. 证明局部化和取幂零理想可交换.

练习2.3. 设M是一个有限表现的R模，A是一个平坦R代数，那么对任意R模N，有A模的同构

$$\mathrm{Hom}_R(M,N)\otimes_R A\cong\mathrm{Hom}_A(M\otimes_R A,N\otimes_R A).$$

第三章　微分和光滑性

定义. 设R是交换环，A是R代数且M是A模.若Abel群同态$d: A \to M$满足如下Leibniz法则

$$d(fg) = fd(g) + d(f)g$$

对任意$f, g \in A$都成立，则称d为一个微分(derivation).若$d: A \to M$还是R模同态，则称d是R线性的(R-linear).我们将所有的R线性微分$A \to M$记为$\mathrm{Der}_R(A, M)$.

对于任意R-线性微分$d \in \mathrm{Der}_R(A, M)$，Leibniz法则说明

$$d(1) = d(1 \cdot 1) = 1d(1) + d(1)1,$$

于是$d(1) = 0$.再根据R线性性，对任意R中的元素r，$d(r) = rd(1) = 0$.这也符合“常值函数的微分为零”的直觉.很容易看出，$\mathrm{Der}_R(A, M)$有自然的A模结构，于是也有R模结构.

虽然R-线性微分是值得研究的，但我们希望完全用A模同态来描述所有的微分.之前有过相同的处理方式：对于所有的R双线性映射，我们构造了具有一定泛性质的R模——张量积，在这里我们同样可以构造A模使得所有的R-线性微分被A模同态对应.

定义. 设R是交换环，A是R代数，那么由$\{d(f) \mid f \in A\}$生成的A模，模去对任意$f, g \in A, r, s \in R$

$$d(fg) - fd(g) - d(f)g \quad \text{(Leibniz)}$$
$$d(rf + sg) - rd(f) - sd(g) \quad \text{(R-linearity)}$$

生成的理想，得到的A模称为R线性的A-Kähler微分模(the module of Kähler differentials of A over R)，记为$\Omega_{A/R}$.R线性映射

$$\begin{aligned} d: A &\to \Omega_{A/R} \\ f &\mapsto d(f) \end{aligned}$$

称为泛R微分(universal R-linear derivation).通常，我们记$df = d(f)$.

类似于张量积，$\Omega_{A/R}$满足如下泛性质：

引理3.1. 设R是交换环，A是R代数，微分模$\Omega_{A/R}$使得对任意微分$D: A\to M$，都存在唯一的A线性映射$\varphi:\Omega_{A/R}\to M$使得

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "D"'] & \Omega_{A/R} \arrow[d, "\varphi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

交换.

Proof. 首先证明唯一性.对任意$\Omega_{A/R}$中的元素$\sum_{i=1}^n a_i df_i$，根据φ的线性性

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i df_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(df_i).$$

但图的交换性说明$df_i = D(f_i)$，故

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i df_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i D(f_i).$$

这意味着φ的取值是固定的.

再证明存在性.我们定义

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i df_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i D(f_i),$$

于是需要验证(i)φ是良定义的；(ii)φ关于图是交换的.后一条根据定义是显然的，前一条因为使得D是R线性微分的关系恰好由Leibnitz等式和R线性性生成，故良定义. □

$\Omega_{A/R}$的泛性质等价于存在自然的同构

$$\mathrm{Der}_R(A,M)\cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R},M),$$

自然的意义是通过态射替换A与M诱导了相应的交换图，具体来说，对任意R代数映射$\varphi: B\to A$，下图

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Der}_R(A,M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R},M) \arrow[d] \\ \mathrm{Der}_R(B,M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/R},M) \end{tikzcd}$$

交换且对任意A模同态$\psi: M\to N$，下图

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Der}_R(A,M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R},M) \arrow[d] \\ \mathrm{Der}_R(A,N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R},N) \end{tikzcd}$$

交换.

命题3.1. 若R是交换环且$A := R[x_1, \cdots, x_n]$，那么$\Omega_{A/R} = \bigoplus_{i=1}^n Adx_i$.

Proof. 我们构造两个互逆的A模同态，来说明二者同构.首先，我们有显然的映射

$$\begin{aligned} \varphi : \bigoplus_{i=1}^n Adx_i &\to \Omega_{A/R} \\ \sum_{i=1}^n a_i dx_i &\mapsto \sum_{i=1}^n a_i dx_i. \end{aligned}$$

另一方面，由dx_i的对偶基底诱导的线性函数给出了A的R线性微分$\frac{\partial}{\partial x_i}$，令

$$\begin{aligned} \psi : \Omega_{A/R} &\to \bigoplus_{i=1}^n Adx_i \\ h &\mapsto \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

容易验证φ与ψ互为逆映射，故命题成立. □

此外，$\Omega_{A/R}$本身关于A和R都是函子：给定R代数态射$\varphi : A \to B$，那么我们有诱导的R模态射

$$\begin{aligned} \Omega_{\varphi/R} : \Omega_{A/R} &\to \Omega_{B/R} \\ df &\mapsto d\varphi(f), \end{aligned}$$

事实上，由于B是A模，这个态射也是A模态射.另一方面，若$R \xrightarrow{\varphi} S \xrightarrow{\psi} T$是环态射，那么也有态射

$$\begin{aligned} \Omega_{T/\varphi} : \Omega_{T/R} &\to \Omega_{T/S} \\ dh &\mapsto dh, \end{aligned}$$

这是一个T模态射.考虑到$\Omega_{T/R}$和$\Omega_{T/S}$的定义，它们的生成元是相同的，且$\Omega_{T/\varphi}$把生成元映到生成元，于是这是一个满态射，但一般而言这不是一个单态射，于是我们自然地希望知道这个映射的核.我们考虑这个态射不是单态射的原因：两个模拥有相同的生成元，Leibnitz法则也是一样的，但$\Omega_{T/R}$需要模掉R线性关系，$\Omega_{T/S}$需要模掉S线性关系，因此出现了差别.模同态$\Omega_{T/\varphi}$把R线性关系映为S线性关系，但是存在一些S线性关系不能成为R线性关系，于是这些关系就生成了$\Omega_{T/\varphi}$的核.

任取$\sum_{i=1}^n t_i df_i \in \Omega_{T/R}$，若它不为0但被映为$\Omega_{T/S}$中的0，那么存在

命题3.2 (相对余切序列(Relative Cotangent Sequence))**.** 若$R \to S \to T$是交换环态射，那么有T模正合序列

$$T \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S} \to 0$$

其中映射$\Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S}$将$dh$映到$dh$，映射$T \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{T/R}$是系数变换，即将$t \otimes dg$映到$td\psi(g)$.

在上同调理论中，我们

命题3.3 (余法序列(Conormal Sequence))**.** 若$\varphi : A \to B$是R模满态射，且具有核I，那么有B模正合序列

$$I/I^2 \xrightarrow{d} B \otimes_A \Omega_{A/R} \xrightarrow{D\varphi} \Omega_{B/R} \to 0$$

其中映射$I/I^2 \xrightarrow{d} B \otimes_A \Omega_{A/R}$将$f$的等价类映到$df$，映射$B \otimes_A \Omega_{A/R} \xrightarrow{D\varphi} \Omega_{B/R}$将$g \otimes df$映到$gdf$.

Proof. □

设$A = R[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_r)$是给定的$R$代数，那么余法序列告诉我们

$$\Omega_{A/R} = \operatorname{coker}(d : I/I^2 \to A \otimes_R \Omega_{R[x_1,\cdots,x_n]/R} = \bigoplus_{i=1}^{n} Adx_i).$$

命题3.4. 微分模的构造与基变换交换，即给定交换环R和R代数S, A，存在同构$\varphi : S \otimes_R \Omega_{A/R} \cong \Omega_{S\otimes_R A/R}$使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} S \otimes_R A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes d"'] \arrow[dr, "d"] & \\ S \otimes_R \Omega_{A/R} \arrow[r, "\varphi"] & \Omega_{S\otimes_R A/R}. \end{tikzcd}$$

命题3.5. 微分模的构造与基变换交换，即给定交换环R和R代数S, A，存在同构$\varphi : S \otimes_R \Omega_{A/R} \cong \Omega_{S\otimes_R A/R}$使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} S \otimes_R A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes d"'] \arrow[dr, "d"] & \\ S \otimes_R \Omega_{A/R} \arrow[r, "\varphi"] & \Omega_{S\otimes_R A/R}. \end{tikzcd}$$

定理3.6 (Jacobi判别法)**.** 设k是给定的域，$I = (f_1, \cdots, f_r)$是$k[x_1, \cdots, x_n]$中的理想，$R := k[x_1, \cdots, x_n]/I$.若$\mathfrak{p}$是$k[x_1, \cdots, x_n]$中包含$I$的素理想，$c$是$I_\mathfrak{p}$在$R_\mathfrak{p}$中的余维数，那么

1. *Jacobi*矩阵在模$\mathfrak{p}$的意义下秩小于c.
2. 。。。

在微分几何当中，我们有自然引入的光滑性概念.但是在代数几何当中，光滑性的概念并不是自然存在的——我们所研究的几何空间可能存在奇点，因而需要重新引入光滑性的概念.一个问题在于同于微分几何的定义，在有足够的工具之前我们只能定义局部的光滑性，而微分模给出了光滑性本质的刻画.

定义. 设R,S是交换环，$f:R\to S$是环同态.如果对任意的交换环T和T的满足$I^2=0$的理想I，只要下图

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \arrow[d] \arrow[dl, dashed] \\ T \arrow[r] & T/I. \end{tikzcd}$$

交换，就有至少一个（对应的，最多一个，恰有一个）环同态$S\to T$使得整个图是交换的，则称f是形式光滑的(formally smooth)（对应的，形式不分叉的(formally unramified)和形式平展的(formally étale)）.

引理3.2. *环同态$f:R\to S$是形式不分叉的当且仅当$\Omega_{S/R}=0$.*

引理3.3. *设环$B:=R[x_1,\cdots,x_n]/(f_1,\cdots,f_r)$，记$A:=R[x_1,\cdots,x_n]$，$I:=(f_1,\cdots,f_r)$.于是$f:R\to T$是光滑的当且仅当*

$$0\to I/I^2\xrightarrow{d}B\otimes_A\Omega_{A/R}\xrightarrow{D\pi}\Omega_{B/R}\to 0$$

是分裂正合的.

练习3.1. 设k是域，R是有限生成的k代数，证明若$\Omega_{R/k}=0$，那么R中无幂零元.

Proof. 设$R=k[x_1,\cdots,x_n]/(f_1,\cdots,f_r)$，对$r$用归纳法证明命题.

当$r=1$时，根据conormal sequence

$$(f_1)/(f_1)^2\xrightarrow{d}\Omega_{k[x_1,\cdots,x_n]/k}\otimes_{k[x_1,\cdots,x_n]}R\to\Omega_{R/k}\to 0$$

是正合列.注意到

$$\Omega_{k[x_1,\cdots,x_n]/k}\otimes_{k[x_1,\cdots,x_n]}R\cong\bigoplus_{i=1}^n Rdx_i,$$

于是

$$\begin{aligned} d:(f_1)/(f_1)^2&\to\Omega_{k[x_1,\cdots,x_n]/k}\otimes_{k[x_1,\cdots,x_n]}R\\ f&\mapsto df, \end{aligned}$$

$\Omega_{R/k}=0$意味着d是满射.若R中存在非平凡幂零元g，那么存在$h\in k[x_1,\cdots,x_n]$使得$f_1=g^2h$，那么$df_1=2ghdg+g^2dh$，即$g\mid df_1$，于是d是满射意味着$\deg g=0$，矛盾.

假设完成了对r的证明，考虑$r+1$.依旧记$R = k[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_r)$，$S = k[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_r, f_{r+1}) = R/(f_{r+1})$，因而有自然的映射$R \twoheadrightarrow S$.再次用conormal sequence

$$(f_{r+1})/(f_{r+1})^2 \xrightarrow{d} \Omega_{R/k} \otimes_R S \to \Omega_{S/k} \to 0$$

$$I/I^2 \xrightarrow{d} \Omega_{F/k} \otimes_F R \to \Omega_{R/k} \to 0$$

$$I/I^2 \xrightarrow{d} \Omega_{F/(f_{r+1})/k} \otimes_{F/(f_{r+1})} S \to \Omega_{S/k} \to 0$$

□

3.1　Koszul复形

正则序列是非零因子的推广.

定义. 设R是交换环且M是R模，若元素$x_1, \cdots, x_n \in M$满足

1. $(x_1, \cdots, x_n)M \neq M$，且
2. 对任意$1 \leq i \leq n$，x_i都是$M/(x_1, \cdots, x_i)M$的非零因子，

则称$x_1, \cdots, x_n$是正则序列(regular sequence)或M序列(M-sequence).

考虑上链序列

$$K(x): 0 \to R \xrightarrow{x} R \to 0,$$

注意到$H^{-1}(K(x)) = (0 : x) := \{r \in R \mid xr = 0\}$，于是对$H^{-1}(K(x))$的计算可以告诉我们$x$是否是零因子.

考虑另一个R中的元素y，它给出了链映射

$$\begin{array}{lccccccc} K(x): & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{x} & R & \longrightarrow & 0 \\ & & & \big\downarrow{\scriptstyle y} & & \big\downarrow{\scriptstyle y} & & \\ K(x): & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{x} & R & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

这样我们可以构造一个更大的链

$$K(x,y): \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "-x"] \arrow[dr, "y"] & R \arrow[r] \arrow[dr, "y"] & 0 & \\ & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "x"] \arrow[u, phantom, "\oplus"] & R \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

或者更简洁地写为

$$K(x,y): 0 \to R \xrightarrow{\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}} R \oplus R \xrightarrow{\begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix}} R \to 0.$$

如同对前一个例子的分析，我们尝试计算该上链的上同调.由定义，

$$H^{-2}(K(x,y)) = \{r \in R \mid -xr = yr = 0\} = (0 : (x,y)),$$

于是x是非零因子当且仅当$H^{-2}(K(x,y)) = 0$.

对于$H^{-1}(K(x,y))$，首先$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \in R\oplus R$当且仅当$xs+yr=0$，于是这意味着$r\in(x:y)$，反过来，若$r\in(x:y)$，那么一定存在一个$s\in R$使得$xs+yr=0$——但可能存在不同的$s$使得条件成立；如果还假设$x$是非零因子，那么$s$就唯一地由$r$确定，此时$Z^{-1}(K(x,y))\cong(x:y)$.

另一方面，$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\in R\oplus R$若是$B^{-1}(K(x,y))$中的元素，则存在$r\in R$使得$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}=r\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -rx \\ ry \end{bmatrix}$，如果继续假设$x$是非零因子，那么给定$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$就唯一确定了$r$使得$-rx=a$，此时$B^{-1}(K(x,y))=(x)$.于是$H^{-1}(K(x,y))=(x:y)/(x)$.这样，当$H^{-2}(K(x,y))=0$时，$H^{-1}(K(x,y))=0$当且仅当所有满足$ry\in(x)$的元素$r$都是$(x)$中的元素，即$y$是$R/(x)$的非零元素.简言之，复形$K(x,y)$的上同调刻画了序列$(x,y)$的正则性.

在定义一般的Koszul复形之前，我们再对复形$K(x,y)$进行进一步的分析.图**??**说明存在如下正合列

$$0\to K(x)[-1]\to K(x,y)\to K(x)\to 0,$$

于是这诱导了长正合序列

$$H^{-2}(K(x)[-1])=H^{-3}(K(x))\longrightarrow H^{-2}(K(x,y))\longrightarrow H^{-2}(K(x))H^{-1}(K(x)[-1])=H^{-2}(K(x))\longrightarrow H^{-1}(K(x,y)$$

其中δ是连接同态.可以证明态射δ是左乘y，这因为

定义. 给定交换环R和R模M，$x\in M$是元素，那么如下复形

$$K(x):0\to R\to M\to\wedge^2M\to\cdots\to\wedge^dM\xrightarrow{d_x}\wedge^{d+1}M\to\cdots$$

被称为Koszul复形(Koszul complex)，其中$d_x:\wedge^dM\to\wedge^{d+1}M, m\mapsto x\wedge m$.特别地，如果$M=R^n$且$x=(x_1,\cdots,x_n)\in M$，我们用记号$K(x_1,\cdots,x_n)$.

作为一个例子，首先我们验证定义前给出的复形$K(x,y)$是Koszul复形.

引理3.4. 依定义中的记号，

$$H^0(K(x_1,\cdots,x_n))=R/(x_1,\cdots,x_n).$$

Proof. □

如同之前的讨论，Koszul复形是与序列的正则性相关，并且它实际上描述了理想$(x_1,\cdots,x_n)$中极大正则序列的长度.下面的定理说明了这个长度是不变的：

定理3.7. 设M是环R上的有限生成模，若存在正整数r使得

$$H^j(M \otimes_R K(x_1, \cdots, x_n)) = 0$$

对任意$0 \leq j < r$成立，且$H^r(M \otimes_R K(x_1, \cdots, x_n)) \neq 0$，那么理想$I = (x_1, \cdots, x_n)$中极大正则序列的长度都为$r$.

3.2 Koszul复形

正则序列是非零因子的推广.

定义. 设R是交换环且M是R模，若元素$x_1, \cdots, x_n \in M$满足

1. $(x_1, \cdots, x_n)M \neq M$，且
2. 对任意$1 \leq i \leq n$，x_i都是$M/(x_1, \cdots, x_i)M$的非零因子，

则称$x_1, \cdots, x_n$是正则序列(regular sequence)或M序列(M-sequence).

考虑上链序列

$$K(x) : 0 \to R \xrightarrow{x} R \to 0,$$

注意到$H^{-1}(K(x)) = (0 : x) := \{r \in R \mid xr = 0\}$，于是对$H^{-1}(K(x))$的计算可以告诉我们$x$是否是零因子.

考虑另一个R中的元素y，它给出了链映射

$$\begin{array}{lccccccc} K(x): & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{x} & R & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle y} & & \downarrow{\scriptstyle y} & & \\ K(x): & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{x} & R & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

这样我们可以构造一个更大的链

$$K(x,y): \quad \begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "-x"] \arrow[dr, "y"] & R \arrow[r] \arrow[dr, "y"] \arrow[d, phantom, "\oplus"] & 0 & \\ & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "x"] & R \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

或者更简洁地写为

$$K(x,y) : 0 \to R \xrightarrow{\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}} R \oplus R \xrightarrow{\begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix}} R \to 0.$$

如同对前一个例子的分析，我们尝试计算该上链的上同调.由定义，

$$H^{-2}(K(x,y)) = \{r \in R \mid -xr = yr = 0\} = (0 : (x,y)),$$

于是x是非零因子当且仅当$H^{-2}(K(x,y)) = 0$.

对于$H^{-1}(K(x,y))$，首先$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \in R\oplus R$当且仅当$xs+yr=0$，于是这意味着$r\in(x:y)$，反过来，若$r\in(x:y)$，那么一定存在一个$s\in R$使得$xs+yr=0$——但可能存在不同的$s$使得条件成立；如果还假设$x$是非零因子，那么$s$就唯一地由$r$确定，此时$Z^{-1}(K(x,y))\cong(x:y)$.

另一方面，$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in R\oplus R$若是$B^{-1}(K(x,y))$中的元素，则存在$r\in R$使得$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -rx \\ ry \end{bmatrix}$，如果继续假设$x$是非零因子，那么给定$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$就唯一确定了$r$使得$-rx=a$，此时$B^{-1}(K(x,y))=(x)$.于是$H^{-1}(K(x,y))=(x:y)/(x)$.这样，当$H^{-2}(K(x,y))=0$时，$H^{-1}(K(x,y))=0$当且仅当所有满足$ry\in(x)$的元素$r$都是$(x)$中的元素，即$y$是$R/(x)$的非零元素.简言之，复形$K(x,y)$的上同调刻画了序列$(x,y)$的正则性.

在定义一般的Koszul复形之前，我们再对复形$K(x,y)$进行进一步的分析.图**??**说明存在如下正合列

$$0\to K(x)[-1]\to K(x,y)\to K(x)\to 0,$$

于是这诱导了长正合序列

$$H^{-2}(K(x)[-1])=H^{-3}(K(x))\longrightarrow H^{-2}(K(x,y))\longrightarrow H^{-2}(K(x))H^{-1}(K(x)[-1])=H^{-2}(K(x))\longrightarrow H^{-1}(K(x,y)$$

其中δ是连接同态.可以证明态射δ是左乘y，这因为

定义. 给定交换环R和R模M，$x\in M$是元素，那么如下复形

$$K(x):0\to R\to M\to\wedge^2M\to\cdots\to\wedge^dM\xrightarrow{d_x}\wedge^{d+1}M\to\cdots$$

被称为Koszul复形(Koszul complex)，其中$d_x:\wedge^dM\to\wedge^{d+1}M, m\mapsto x\wedge m$.特别地，如果$M=R^n$且$x=(x_1,\cdots,x_n)\in M$，我们用记号$K(x_1,\cdots,x_n)$.

作为一个例子，首先我们验证定义前给出的复形$K(x,y)$是Koszul复形.

引理3.5. 依定义中的记号，

$$H^0(K(x_1,\cdots,x_n))=R/(x_1,\cdots,x_n).$$

Proof. □

如同之前的讨论，Koszul复形是与序列的正则性相关，并且它实际上描述了理想$(x_1,\cdots,x_n)$中极大正则序列的长度.下面的定理说明了这个长度是不变的：

定理3.8. 设M是环R上的有限生成模，若存在正整数r使得

$$H^j(M \otimes_R K(x_1, \cdots, x_n)) = 0$$

对任意$0 \leq j < r$成立，且$H^r(M \otimes_R K(x_1, \cdots, x_n)) \neq 0$，那么理想$I = (x_1, \cdots, x_n)$中极大正则序列的长度都为$r$.