

几何中的向量丛

G.Li

1 流形的切丛

给定一个 n 维的微分流形 M , 有光滑函数层 $C^\infty(-)$, 进而可以定义一点 x 的光滑函数芽

$$C_x^\infty := \text{colim}_{x \in U} C^\infty(U),$$

由于流形的局部完全由 \mathbb{R}^n 中的开集决定, 且可以选取足够小的邻域而不改变光滑函数芽. 点 x 上的一个切向量是一个 \mathbb{R} 线性映射

$$v : C_x^\infty \rightarrow \mathbb{R}$$

满足 Leibnitz 定律

$$v(f \cdot g) = v(f)g(x) + f(x)v(g).$$

例如, 对 M 上过点 x 的可微曲线 $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ (满足 $\gamma(0) = x$),

$$v(f) := \left. \frac{d}{dt}(f \circ \gamma(t)) \right|_{t=0}$$

是切向量. 切向量实际是方向导数.

一点 $x \in M$ 上的所有切向量组成的集合有自然的 \mathbb{R} 线性空间结构, 称这个空间为 M 在点 x 的切空间, 记为 $T_x M$. 切空间 $T_x M$ 的维数恰好等于流形 M 的维数, 这因为可以选取 x 附近充分小的邻域 (U, x^1, \dots, x^n) 使得对应到 \mathbb{R}^n 中是一个球 $B(0, \epsilon)$, 如前例子取 M 中的曲线

$$\gamma_j : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M, 1 \leq j \leq n,$$

满足 $x^i(\gamma_j(t)) = \delta_j^i t$, 其中 δ_j^i 是 Kroneker 记号. 定义

$$\frac{\partial}{\partial x^j} := \left. \frac{d}{dt}(- \circ \gamma_j(t)) \right|_{t=0},$$

这些构成了 $T_x M$ 的一组基. $T_x M$ 的对偶空间称为余切空间, 它的对偶基记为 $\{dx_i\}_{1 \leq i \leq n}$, 任给定一个函数 $f \in C_x^\infty$, 都有余切向量 df 满足

$$\left\langle df, \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = df \left(\frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \frac{\partial}{\partial x^j} f.$$

给定光滑流形间的光滑映射 $\varphi : M \rightarrow N$, 自然诱导了一个映射

$$\begin{aligned} \varphi^* : C_{\varphi(x)}^\infty &\rightarrow C_x^\infty \\ f &\mapsto f \circ \varphi, \end{aligned}$$

于是这自然可以称为一个映射

$$\begin{aligned}\varphi_* : T_x M &\rightarrow T_{\varphi(x)} N \\ v &\mapsto v(- \circ \varphi),\end{aligned}$$

该映射称为切映射.

定理 1.1. 设 M 是 n 维光滑流形, 令

$$TM := \coprod_{x \in M} T_x M$$

是 M 上的切向量的全体, 那么存在 TM 上的拓扑和光滑结构使得 TM 是一个 $2n$ 维光滑流形.

证明. 按定义, TM 中的点是形如 (x, v) 的配对, 其中 $x \in M$, $v \in T_x M$. 定义映射

$$\begin{aligned}\pi : TM &\rightarrow M \\ (x, v) &\mapsto x,\end{aligned}$$

这样对于任意一点 $x \in M$, $\pi^{-1}(x) = T_x M$.

假定 M 的光滑结构是 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}^n)\}_{\lambda \in \Lambda}$, 考虑

$$\pi^{-1}(U_\lambda) = \bigcup_{x \in U_\lambda} T_x M,$$

于是 $TM = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \pi^{-1}(U_\lambda)$. 借助 φ_λ , 我们给定局部的同胚

$$\psi_\lambda : U_\lambda \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\lambda)$$

满足对于 $x \in U_\lambda, y = (y^1, \dots, y^n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\psi_\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial x_\lambda^i} \Big|_x$$

其中 $x_\lambda^i = (\varphi_\lambda)^i, i = 1, \dots, n$ 是 U_λ 上由坐标映射 φ_λ 给出的局部坐标系. 很明显这个映射是集合上的双射.

借助局部的乘积空间, 可以给出 TM 一个拓扑结构. 考虑 TM 中的子集族

$$\mathcal{B} := \{\psi_\lambda(W) \mid W \text{ 是 } U_\lambda \times \mathbb{R}^n \text{ 中的开集}\},$$

这可以构成 TM 的一个拓扑基: 首先 $\{(U_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}\}$ 是 M 的一个开覆盖, 因此 \mathcal{B} 是 TM 的开覆盖; 接下来还需要验证对任意 $(x, v) \in TM$, 若有 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 使得 $(x, v) \in B_1 \cap B_2$ 则有 $B \in \mathcal{B}$ 满足 $(x, v) \in B \subseteq B_1 \cap B_2$. 由于 $U_\lambda \times \mathbb{R}^n$ 具有乘积拓扑结构, 因而可以找到 U_λ, U_μ 中的开集 D_1, D_2 和 \mathbb{R}^n 中的开集 V_1, V_2 使得 $\psi_\lambda(D_1 \times V_1) \subseteq B_1, \psi_\mu(D_2 \times V_2) \subseteq B_2$, 这样只要证明存在某个 U_ν 中的开集 D 和 \mathbb{R}^n 中的开集 V 使得

$$(x, v) \in \psi_\nu(D \times V) \subseteq \psi_\lambda(D_1 \times V_1) \cap \psi_\mu(D_2 \times V_2),$$

如此可得到 TM 上的拓扑, 并且这是一个第二可数的 Hausdorff 空间.

在上述假定下,

$$x = \pi(x, v) \in D_1 \cap D_2 \subseteq U_\lambda \cap U_\mu$$

且

$$v = \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial x_\lambda^i} \Big|_x = \sum_{i=1}^n \tilde{y}^i \frac{\partial}{\partial x_\mu^i} \Big|_x = \sum_{i,j=1}^n \tilde{y}^j \frac{\partial x_\lambda^i}{\partial x_\mu^j}(\varphi_\lambda(x)) \frac{\partial}{\partial x_\lambda^i} \Big|_x,$$

其中 $(y^1, \dots, y^n) \in V_1$, $(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n) \in V_2$, 因此它们之间有关系式

$$y^i = \sum_{j=1}^n \tilde{y}^j \frac{\partial x_\lambda^i}{\partial x_\mu^j},$$

$\frac{\partial x_\lambda^i}{\partial x_\mu^j}$ 是光滑流形 M 从局部坐标系 (U_λ, x_λ^i) 到 (U_μ, x_μ^i) 的坐标变换 Jacobi 矩阵.

考虑映射 $\Phi_{\lambda,\mu} : (U_\lambda \cap U_\mu) \times \mathbb{R}^n \subseteq U_\mu \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_\lambda \cap U_\mu) \times \mathbb{R}^n \subseteq U_\lambda \times \mathbb{R}^n$ 使得

$$\Phi_{\lambda,\mu}(x, (\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n)) = (x, (y^1, \dots, y^n)),$$

其中 (y^1, \dots, y^n) 与 $(\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n)$ 服从之前计算的关系式, 因此 y^i 是关于 $x, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n$ 的光滑函数. 由于

$$\det \frac{\partial x_\lambda^i}{\partial x_\mu^j} \neq 0,$$

所以 $\Phi_{\lambda,\mu}$ 有逆映射 $\Phi_{\mu,\lambda} = \Phi_{\lambda,\mu}^{-1}$, 且它也是光滑的, 这意味着 $\Phi_{\lambda,\mu} : (U_\lambda \cap U_\mu) \times \mathbb{R}^n \rightarrow (U_\lambda \cap U_\mu) \times \mathbb{R}^n$ 是光滑同胚. 由定义可知

$$\psi_\lambda \circ \Phi_{\lambda,\mu} \circ \psi_\mu^{-1} = \text{id} : \pi^{-1}(U_\lambda \cap U_\mu) \rightarrow \pi^{-1}(U_\lambda \cap U_\mu),$$

即有交换图

$$\begin{array}{ccc} U_\mu \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\Psi_{\lambda,\mu}} & U_\lambda \times \mathbb{R}^n \\ & \searrow \psi_\mu \quad \swarrow \psi_\lambda & \\ & \pi^{-1}(U_\lambda \cap U_\mu). & \end{array}$$

在先前的设定下不妨取 $D_1 = D_2 = D_1 \cap D_2$, 由于 $\Psi_{\lambda,\mu}(D_2 \times V_2)$ 是 $U_\lambda \times \mathbb{R}^n$ 的开集, 并且 $\Phi_{\lambda,\mu} \circ \psi_\mu^{-1}(x, v) = \psi_\lambda^{-1}(x, v) \in D_1 \times V_1$, 所以开集 $\Phi_{\lambda,\mu}(D_2 \times V_2)$ 与开集 $D_1 \times V_1$ 相交非空, 因此存在点 $\Phi_{\lambda,\mu} \circ \psi_\mu^{-1}(x, v) = \psi_\lambda^{-1}(x, v)$ 在开集 $\Phi_{\lambda,\mu}(D_2 \times V_2) \cap D_1 \times V_1$ 中的邻域 $D \times V$, 其中 D 是 U_λ 的开子集, V 是 \mathbb{R}^n 的开子集. 这样 $\psi_\lambda(D \times V) \in \mathcal{B}$ 且

$$(x, v) \in \psi_\lambda(D \times V) \subseteq \psi_\mu(D_2 \times V_2) \cap \psi_\lambda(D_1 \times V_1),$$

于是 \mathcal{B} 是 TM 的拓扑基.

事实上, 在 TM 上建立拓扑的直观意义很明确, 在给定两个邻近的切向量 $(x_1, v_1), (x_2, v_2)$ 时, 首先它们的起点 x_1, x_2 是邻近的, 因而可以落在同一个坐标邻域内, 于是经过坐标变换 v_1, v_2 可以在同一个坐标系内表示出来. 那么, 切向量 $(x_1, v_1), (x_2, v_2)$ 相互邻近的第二个要求就是当它们在同一个坐标系内表示出来时, 分量的差别很小. 这就是这里给定的拓扑.

接下来再建立微分结构. 如前所述, $\{\pi^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ 构成了 TM 的一个开覆盖, 对每个指标 $\lambda \in \Lambda$, 定义映射

$$\begin{aligned} \xi_\lambda : \pi^{-1}(U_\lambda) &\rightarrow \mathbb{R}^{2n} \\ \sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_x &\mapsto (x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n, y^1, \dots, y^n). \end{aligned}$$

这样 ξ_λ 是从 $\pi^{-1}(U_\lambda)$ 到 \mathbb{R}^{2n} 中的开集 $\varphi_\lambda(U_\lambda) \times \mathbb{R}^n$ 的同胚, 因此 $(\pi^{-1}(U_\lambda), \xi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ 是 TM 的一个坐标卡, 使得它成为一个拓扑流形. 如此, 还需要证明坐标卡是 C^∞ 相关的. 注意到 $\pi^{-1}(U_\lambda)$ 与 $\pi^{-1}(U_\mu)$ 相交非空的充要条件是 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$, 此时坐标变换

$$\xi_\mu \circ \xi_\lambda^{-1} : \varphi_\lambda(U_\lambda \cap U_\mu) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \varphi_\mu(U_\lambda \cap U_\mu) \times \mathbb{R}^n$$

由下式给出

$$(x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n, y^1, \dots, y^n) \mapsto (x_\mu^1, \dots, x_\mu^n, \tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n),$$

其中 $x_\mu^i = (\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1})^i(x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n)$, 且

$$\tilde{y}^i = \sum_{j=1}^n y^j \frac{\partial x_\mu^i}{\partial x_\lambda^j}.$$

这样, x_μ^i, \tilde{y}^i 都是 x_λ^i, y^i 的光滑函数, 因此 TM 是光滑流形. □

注意到在 TM 的这个光滑结构下, 映射 $\pi : TM \rightarrow M$ 限制在局部坐标 $\pi^{-1}(U)$ 上的表达式为

$$\varphi_\lambda \circ \pi \circ \xi_\lambda^{-1}(x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n, y^1, \dots, y^n) = (x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n),$$

于是 π 是光滑映射. 另外,

$$\xi_\lambda \circ \psi_\lambda(x, (y^1, \dots, y^n)) = \xi_\lambda \left(\sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial x_\lambda^i} \Big|_x \right) = (x_\lambda^1, \dots, x_\lambda^n),$$

所以 $\psi_\lambda : U_\lambda \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\lambda)$ 是光滑同胚. 同时该光滑同胚满足对所有的 $(x, y) \in U_\lambda \times \mathbb{R}^n$,

$$\pi \circ \psi_\lambda(x, y) = x,$$

即有交换图

$$\begin{array}{ccc} U_\lambda \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi_\lambda} & \pi^{-1}(U_\lambda) \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow \pi \\ & U_\lambda & \end{array}$$

再固定 $x \in U_\lambda$, 考虑映射

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(x, -) : \mathbb{R}^n &\rightarrow \pi^{-1}(x) \\ y &\mapsto \psi_\lambda(x, y), \end{aligned}$$

按定义它将 (y^1, \dots, y^n) 映到 $\sum_{i=1}^n y^i \frac{\partial}{\partial x_\lambda^i} \Big|_x$, 因此是一个线性同构. 这样当 $x \in U_\lambda \cap U_\mu$ 时, 存在两个线性同构 $\psi_\lambda(x, -), \psi_\mu(x, -) : \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(x)$, 因而有线性同构

$$\psi_\mu(x, -) \circ \psi_\lambda(x, -)^{-1} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

这个同构是证明中的映射

$$(y^1, \dots, y^n) \mapsto (\tilde{y}^1, \dots, \tilde{y}^n),$$

恰好是局部坐标变换 $\varphi_\mu \circ \varphi_\lambda^{-1}$

例 1. 考虑 $S^2 \subseteq \mathbb{R}^3$, 有嵌入 $S^2 = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$. 那么 S^2 的切丛可表示为

$$TS^2 = \{((x, y, z), (u, v, w)) \mid xu + yv + zw = 0\} \subseteq S^2 \times \mathbb{R}^3.$$

2 流形的向量丛

将切丛的概念做推广，我们得到了如下流形上向量丛的概念：

定义. 设 E, B 是两个光滑流形， $\pi : E \rightarrow B$ 是光滑的满映射. 若存在 B 的一个开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 以及一组被称为局部平凡化 (local trivialization) 的光滑同胚

$$\psi_\lambda : U_\lambda \times \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(U_\lambda)$$

使得

1. 下图交换

$$\begin{array}{ccc} U_\lambda \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\psi_\lambda} & \pi^{-1}(U_\lambda) \\ & \searrow \text{pr}_1 & \swarrow \pi \\ & U_\lambda & \end{array}$$

2. 对任意给定的 $x \in U_\lambda$ ，由局部平凡化诱导的

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(x, -) : \mathbb{R}^n &\rightarrow \pi^{-1}(x) \\ \mathbf{v} &\mapsto \psi_\lambda(x, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

是拓扑空间的同胚，且对于任意 $x \in U_\lambda \cap U_\mu$ ，复合映射

$$g_{\mu, \lambda}(x) := \psi_\mu^{-1}(x, -) \circ \psi_\lambda(x, -) : \mathbb{R}^n \rightarrow \pi^{-1}(x) \rightarrow \mathbb{R}^n$$

是线性同构，即 $g_{\mu, \lambda} \in GL_n(\mathbb{R})$.

3. 上一部分确定的映射

$$g_{\mu, \lambda} : U_\lambda \cap U_\mu \rightarrow GL_n(\mathbb{R})$$

是光滑的.

都满足，则称 (E, π) 是 B 上的秩 (rank) 为 n 的向量丛 (vector bundle).

对任意 $x \in B$ ， $E_x := \pi^{-1}(x)$ 被称为 E 在点 x 上的纤维 (fibre)， ψ_λ 称为局部平凡化 (local trivialization). 其中第一条是描述局部平凡化是局部的“丛映射”，只在相同的纤维上做对应；第二条是说，不同的局部平凡化只是用不同的方式看纤维上的线性结构；第三条决定了丛的属性，这里是光滑向量丛.

我们注意到，

例 2. 设 $G_k(\mathbb{R}^n)$ 是 Grassmann 流形，定义

$$\gamma_{k, n} := \{(V, v) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid v \in V \subseteq \mathbb{R}^n\},$$

$\pi : \gamma_{k, n} \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$ 是映射 $(V, v) \mapsto V$. 如下的构造使得 $\pi : \gamma_{k, n} \rightarrow G_k(\mathbb{R}^n)$ 是一个向量丛，称为万有向量丛 (universal bundle). 对于流形 $G_k(\mathbb{R}^n)$ ，存在开覆盖

$$U_{i_1, \dots, i_k} := \{A \in M_{n, k}(\mathbb{R}) \mid \det A_{i_1, \dots, i_k} \neq 0\}$$

其中 $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$ 是 k 个不同的正整数， A_{i_1, \dots, i_k} 是取 A 中第 i_1, \dots, i_k 行组成的子矩阵. 存在唯一的列变换 (这里只能用列变换，因为我们不想改变生成的子空间) 使得 $A_{i_1, \dots, i_k} = I_k$ ，而剩余行组成 A 对应到 $\mathbb{R}^{k \times (n-k)}$ 中的坐标. 于是，可以构造以下的结构

$$\begin{array}{ccc}
 U_{i_1, \dots, i_k} \times \mathbb{R}^k & \xrightarrow{\psi_{i_1, \dots, i_k}} & \pi^{-1}(U_\lambda) \\
 \searrow \text{pr}_1 & & \swarrow \pi \\
 & U_{i_1, \dots, i_k} &
 \end{array}$$

其中 ψ_{i_1, \dots, i_k} 是映射

命题 2.1. 若 $\pi: E \rightarrow B$ 是 n 秩光滑向量丛, 则 E 上任意点 x 上的纤维 E_x 都有自然的线性结构使得 E_x 是 n 维向量空间.

事实上, 我们并不需要一个向量丛的基是流形, 对于一般的 (好的) 拓扑空间, 同样可以定义向量丛:

定义.

定义. 给定空间 B 及其上的两个向量丛 $\pi_1: E_1 \rightarrow B, \pi_2: E_2 \rightarrow B$,

定理 2.2. 设 $f: D \rightarrow B$ 是连续映射, $p: E \rightarrow B$ 是秩为 n 的向量丛, 那么拓扑空间

$$f^*E := \{(d, e) \in D \times E \mid f(d) = p(e)\}$$

是 D 上的向量丛. f^*E 称为向量丛 E 的拉回 (pullback), 如下图

$$\begin{array}{ccc}
 f^*E & \longrightarrow & E \\
 \downarrow & & \downarrow p \\
 D & \longrightarrow & B.
 \end{array}$$

证明. □

引理 2.1. 对任意丛态射

$$\begin{array}{ccc}
 D & \xrightarrow{\tilde{f}} & E \\
 \downarrow p & & \downarrow q \\
 B_1 & \xrightarrow{f} & B_2,
 \end{array}$$

都存在拓扑空间的同胚

$$\begin{aligned}
 g: D &\rightarrow f^*E \\
 x &\mapsto (p(x), \tilde{f}(x))
 \end{aligned}$$

使得二者是 B_1 上同构的纤维丛.

习题 2.1. 设 $i: Y \hookrightarrow X$ 是子空间的嵌入映射, 证明

$$i^*(E) \cong E|_Y.$$

习题 2.2. \mathbb{CP}^n 的 tautological 线丛的 Thom 空间是 \mathbb{CP}^{n+1} .

例 3. 所有光滑流形的切丛都可以称为某个向量丛的拉回.

拓扑上, 向量丛的分类是一个核心而且有趣的问题.

命题 2.3. 设 $\pi: E \rightarrow B$ 是秩为 n 的光滑向量丛, 那么它的转移函数族 $\{g_{\mu,\lambda}: U_\lambda \cap U_\mu \rightarrow GL_n(\mathbb{R})\}$ 满足下列相容性条件:

1. $g_{\lambda,\lambda}(p) = I$ 对所有点 $p \in U_\lambda$ 成立, 其中 I 是单位矩阵;
2. 若 $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\eta \neq \emptyset$, 那么对任意 $p \in U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\eta$,

$$g_{\lambda,\mu}(p) \cdot g_{\mu,\eta}(p) = g_{\lambda,\eta}(p).$$

定理 2.4. 设 M 是 n 维流形, $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是一个开覆盖. 若对任意一对指标 λ, μ , 在 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ 时都指定了一个光滑映射

$$g_{\lambda,\mu}: U_\lambda \cap U_\mu \rightarrow GL_r(\mathbb{R}),$$

满足命题 2.3 中的条件, 则存在同构下唯一的 r 秩向量丛 $\pi: E \rightarrow M$, 以 $\{g_{\lambda,\mu}\}_{\lambda,\mu \in \Lambda}$ 为转移函数.

2.1 截面

定义. 给定空间 B 及其上的向量丛 $\pi: E \rightarrow B$, 若连续映射 $s: B \rightarrow E$ 满足 $\pi \circ s = \text{id}_B$, 则称 s 是 E 的截面 (section). 空间 B 上的向量丛 E 的截面的全体记为 $\Gamma(M, E)$.

例 4. 考虑光滑流形 M 及其上的平凡线丛 $M \times \mathbb{R}$, 我们尝试写出截面的具体含义. 给定一个截面 s , 那么 s 是映射

$$M \rightarrow M \times \mathbb{R},$$

记 $s(x) = (s_1(x), s_2(x))$, 其中 $s_1(x) \in M$ 是流形中的点, $s_2(x) \in \mathbb{R}$. $\pi \circ s = \text{id}$ 说明 $s_1(x) = x$, 于是 s 完全由映射 $s_2: M \rightarrow \mathbb{R}$ 决定; 但由于 s 本身是连续的因此 s_2 也是连续的, 故上面的讨论说明 $M \times \mathbb{R}$ 上的截面对应于 M 上的连续函数.

当向量丛并不是平凡的时候, 截面则并不能如此简单地描述. 考虑向量丛 $\pi: E \rightarrow B$ 的截面 $s: B \rightarrow E$, 局部平凡化在开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 上给出了映射

$$\varphi_i: \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n,$$

因此复合

$$U_i \xrightarrow{s|_{U_i}} \pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\varphi_i} U_i \times \mathbb{R}^n$$

是映射 $x \mapsto (x, \mathbf{f}_i(x))$, 其中 $\mathbf{f}_i(x)$ 是 \mathbb{R}^n 中的向量, 且取值关于 $x \in U_i$ 是连续的. 类似地, 取另一个局部坐标的时候复合

$$(\text{id}, \mathbf{f}_j): U_j \xrightarrow{s|_{U_j}} \pi^{-1}(U_j) \xrightarrow{\varphi_j} U_j \times \mathbb{R}^n$$

同样给出了连续函数 $\mathbf{f}_j: U_j \rightarrow \mathbb{R}^n$. 同时, 交换图

$$\begin{array}{ccc} & & U_i \times \mathbb{R}^n \\ & \nearrow \varphi_i & \downarrow \varphi_j \circ \varphi_i^{-1} \\ U_i \xrightarrow{s|_{U_i \cap U_j}} \pi^{-1}(U_i \cap U_j) & & \\ & \searrow \varphi_j & \\ & & U_j \times \mathbb{R}^n \end{array}$$

例 5. 考虑光滑流形 M 及其上的切丛 TM ,

2.2 向量丛的构造

引理 2.2. 任意给定拓扑空间 X 的两个开覆盖 \mathcal{U}, \mathcal{V} , 都存在同时从属于它们的开覆盖 \mathcal{W} .

定理 2.5. 设 E, F 是 B 上的两个向量丛, 那么 $\mathcal{H}\text{om}(E, F) := \coprod_{x \in B} \text{Hom}(E_x, F_x) = \{(x, A) \mid x \in B, A \in \text{Hom}(E_x, F_x)\}$ 有自然的拓扑结构使得 $\mathcal{H}\text{om}(E, F)$ 成为 B 上的向量丛, 且每个截面 $s : B \rightarrow \mathcal{H}\text{om}(E, F)$ 都是一个向量丛态射 $E \rightarrow F$.

证明. 根据定义, 设 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 和 $\mathcal{V} = \{V_j\}_{j \in J}$ 是 B 的开覆盖, 分别可以给出 E 与 F 的局部平凡化. 依据拓扑中的结论, 可以找到 \mathcal{U} 与 \mathcal{V} 共同的加细使得 E, F 在这个开覆盖上都有平凡化, 依旧记这个加细为 \mathcal{U} .

明显地存在自然的投影映射

$$\begin{aligned} \pi : \mathcal{H}\text{om}(E, F) &\rightarrow B \\ (x, A) &\mapsto x, \end{aligned}$$

在这个映射下 $\pi^{-1}(x) = \text{Hom}(E_x, F_x)$, 我们需要给出 $\mathcal{H}\text{om}(E, F)$ 上的拓扑结构, 使得 π 是连续的, 并且可以给定转移函数. 取 B 从属于开覆盖 \mathcal{U} 的一组开集基,

对任意 $U_i \in \mathcal{U}$, E, F 在 U_i 上都有平凡化, 分别记为 $\varphi_i : \pi_E^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^n$ 和 $\psi_i : \pi_F^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \mathbb{R}^m$, 于是可以构造

$$\mathcal{H}\text{om}(\varphi_i, \psi_i) : \pi^{-1}(U_i) \rightarrow U_i \times \text{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$$

□

推论 2.5.1. 若 $\varphi \in \Gamma \mathcal{H}\text{om}(E, F)$ 满足对每个 $x \in B$, φ_x 都是同构, 那么 φ^{-1} 存在且 φ^{-1} 是连续的.

习题 2.3. 设 E 是 X 上的向量丛, 证明存在自然同构

$$\mathcal{H}\text{om}(E, F) \cong E^* \otimes F.$$

例 6. 设 $\pi_1 : E_1 \rightarrow B, \pi_2 : E_2 \rightarrow B$ 是两个

3 复流形的向量丛

在之前的一节中我们提到了

4 概型的向量丛

例 7. 考虑 $X = \text{Spec } \mathbb{R}[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$, M 是 $R = \mathbb{R}[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ 模 $R \oplus R \oplus R$ 的子模

$$\{(u, v, w) \in R \oplus R \oplus R \mid xu + yv + zw = 0\},$$

那么 \tilde{M} 是局部自由的, 它对应了一个向量丛.

例 8. 考虑 $X = \text{Spec } \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \text{Spec } R$, $I = (2, 1 + \sqrt{-5})$. 这个理想不是主理想, 因而 $R \not\cong I$. 但是 $R_2 \cong I_2, R_3 \cong I_3$, 且 $D(2), D(3)$ 是 $\text{Spec } R$ 的开覆盖, 因此 \tilde{I} 是局部自由的.

5 G 主丛

考虑李群 G 作用在给定的流形 M 上, 如果作用是自由的, 那么任意点 $x \in M$ 的轨道 $O_x \cong G$. 例如, $SO(2)$ 在 $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 的作用.

定义. 给定拓扑群 G 和纤维丛 $\pi: P \rightarrow B$, 满足如下条件

1. G 在 P 上有自由的 (右) 作用,
2. 存在同胚 $f: B \rightarrow P/G$ 满足

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\text{id}} & P \\ \pi \downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & P/G, \end{array}$$

即 $P \rightarrow B$ 与 $P \rightarrow P/G$ 作为纤维丛是同构的,

则称 $P \rightarrow B$ 是一个 G 主丛 (principal G -bundle).

例 9. Hopf 纤维化 $S^1 \hookrightarrow S^3 \rightarrow S^2$ 是一个 S^1 主丛.

例 10. 任意给定一个光滑流形 M , 且维数 $\dim M = n$, 定义空间 $LM \rightarrow M$ 如下: 对任意点 $x \in M$,

$$L_x M := \{(e_1, \dots, e_n) \mid \{e_1, \dots, e_n\} \text{ 构成 } T_x M \text{ 的一组基}\} \cong GL(n, \mathbb{R}),$$

且 $LM := \coprod_{x \in M} L_x M$, 类似于之前 TM 的构造, 给 LM 一个由 M 诱导的坐标图卡.

接下来我们说明 LM 是一个 $GL(n, \mathbb{R})$ 主丛.

定义. 设 $P_1 \xrightarrow{\pi_1} B_1$ 和 $P_2 \xrightarrow{\pi_2} B_2$ 分别是给定的 G_1 主丛和 G_2 主丛, 那么一个主丛态射 (morphism) 是映射对 $(f: P_1 \rightarrow P_2, g: B_1 \rightarrow B_2, \varphi: G_1 \rightarrow G_2)$, 满足图

$$\begin{array}{ccc} P_1 & \xrightarrow{f} & P_2 \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ B_1 & \xrightarrow{g} & B_2 \end{array}$$

是交换图, 且 f 关于 φ 是等变的.

引理 5.1. 给定流形 B 上的两个 G 主丛 $\pi_1: P_1 \rightarrow B$ 和 $\pi_2: P_2 \rightarrow B$, 若 $f: P_1 \rightarrow P_2$ 是丛态射, 那么 f 是同构.

证明. 1. 设 P_1 中的两点 x, y 满足 $f(x) = f(y)$, 那么由于 f 是丛态射, 因此 $\pi_1(x) = \pi_1(y)$, 这样 x, y 在同一点的纤维上, 于是存在唯一的 $g \in G$ 使得 $x = y \cdot g$. 这样,

$$f(x) = f(y \cdot g) = f(y) \cdot g = f(y),$$

于是 $g = e$, 这意味着 $x = y$.

2.

□

这意味着给定基流形的所有主丛的范畴是一个群胚.

定理 5.1. G 主丛 $\pi: P \rightarrow B$ 是平凡的当且仅当存在截面 $s: B \rightarrow P$.

证明. 给定截面 $s: B \rightarrow P$, 那么对于任意 $x \in P$, 那么存在唯一的 (依赖于 x 的) $\chi(x) \in G$ 使得

$$s(\pi(x)) \cdot \chi(x) = x,$$

并且对于任意 $g \in G$,

$$\chi(x \cdot g) = \chi(x)g.$$

这是因为, 一方面, 对 $s(\pi(x)) \cdot \chi(x) = x$ 两边都取 g 的作用有 $s(\pi(x)) \cdot (\chi(x)g) = (s(\pi(x)) \cdot \chi(x)) \cdot g = x \cdot g$, 另一方面 $s(\pi(x)) \cdot \chi(x \cdot g) = s(\pi(x \cdot g)) \cdot \chi(x \cdot g) = x \cdot g$, 根据唯一性得证.

因此定义

$$\begin{aligned} f: P &\rightarrow B \times G \\ x &\mapsto (\pi(x), \chi(x)), \end{aligned}$$

这样只需要证明它是 G 等变的纤维丛映射. 纤维丛映射是显然的, 并且

$$f(x \cdot g) = (\pi(x \cdot g), \chi(x \cdot g)) = (\pi(x), \chi(x)g) = f(x) \cdot g.$$

最后, □

例 11. 考虑 S^2 的 $GL(2, \mathbb{R})$ 主丛 LS^2 ,

定理 5.2. 给定 G 主丛 $\pi: P \rightarrow B$ 和 G 在空间 F 的左作用, 那么存在空间 $P \times^G F$ 使得 $P \times^G F \rightarrow B$ 是以 F 为纤维的纤维丛.

证明. 定义

$$P \times^G F := P \times F / \sim,$$

其中等价关系定义为 $(x \cdot g, y) \sim (x, g \cdot y)$. 于是, 映射 $p: P \times^G F \rightarrow B$ 定义为

$$(x, y) \mapsto \pi(x),$$

注意到这是个良定义, 因为若 $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$, 那么存在 $g \in G$ 使得 $y_1 = g \cdot y_2$, 这样 $x_2 = x_1 \cdot g$, 因此二者在同一点的纤维上.

考虑任意 $b \in B$, 那么对任意 $x \in \pi^{-1}(b)$, 存在连续映射

$$\begin{aligned} F &\rightarrow p^{-1}(b) \\ y &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

和它的逆映射

最后来证明局部平凡化. □

例 12. 任意给定底空间 B 和 G 主丛 $P \rightarrow B$, 考虑 G 在空间 F 上的平凡作用, 那么直接由定义,

例 13. 设 M 是给定的 n 维流形, $LM \rightarrow M$ 是 $GL(n, \mathbb{R})$ 主丛, 考虑 $GL(n, \mathbb{R})$ 在 \mathbb{R}^n 上的自然作用, 那么

命题 5.3. 任意给定纤维丛 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ 并选定 F 的自同构群 $\text{Aut}(F)$, 那么存在 $\text{Aut}(F)$ 主丛 $\pi: P \rightarrow B$ 使得 $E \cong P \times^{\text{Aut}(F)} F$.

证明. 任意给定 $b \in B$, 令

$$P_b := \{\varphi: F \rightarrow p^{-1}(b) \mid \varphi \text{ 是同构}\},$$

那么有自然的 $\text{Aut}(F)$ 在 P_b 上的作用. 于是定义

$$P := \coprod_{b \in B} P_b.$$

□