Hopf 纤维化

G.Li

在这一个小故事中，我们要用比较现代的观点详细地探讨 Hopf 纤维化的来源、定义、性质等等，并尝试探讨它在拓扑当中的重要性. 想写这篇的原因是偶然间见到了 2012 年的丘赛中的一道题:

问题 1. 求证

$$\pi_3(S^2) \neq 0.$$

实话说，这个题目基本上等同于很多的数学题：见过就会，而且是半句话就能讲明白的，没见过，对不起想破脑袋也不一定能想出来.Hopf 纤维化就是求解这个题的核心，只要证明纤维化

$$h : S^3 \to S^2$$

不是同伦平凡的，这样就完成了证明. 然而，这个映射的存在性显得非常不自然，我们也很难直接从表达式当中理解这个映射是如何被发现的. 因此，我们会通过别的角度去研究和探索这个映射，并尝试去“看见”这个映射.

我们都知道，n 维单位球面 S^n 是 $\mathbb{R}^n$ 中与原点距离为 1 的点组成的集合，即

$$S^n := \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

二维球面是容易想象的几何对象，它可以嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中. 但是三维球面就并不能容易地想象，因为它需要被嵌入 $\mathbb{R}^4$ 中——于是，于是需要另外的方式去研究 S^3.

回顾在对 S^2 的处理中，通常使用的方法是球极投影（stereographic projection），将二维球面映射到平面上. 对 S^3 的处理略有不同，我们考虑投影到 S^2 上而非坐标平面上:

$$\begin{aligned} h : S^3 &\to S^2 \\ (x, y, z, w) &\mapsto (x^2 + y^2 - z^2 - w^2, 2(xw + yz), 2(yw - xz)), \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2 - z^2 - w^2)^2 + 4(xw + yz)^2 + 4(yw - xz)^2 \\ =&x^4 + y^4 + z^4 + w^4 + 2x^2y^2 + 2z^2w^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 - 2x^2w^2 - 2y^2w^2 \\ &+4x^2w^2 + 4y^2z^2 + 8xyzw + 4y^2w^2 + 4x^2z^2 - 8xyzw \\ =&x^4 + y^4 + z^4 + w^4 + 2x^2y^2 + 2z^2w^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 + 2x^2w^2 + 2y^2w^2 \\ =&(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 = 1, \end{aligned}$$

映射是良定义的，再根据每个分量函数的连续性，该映射是连续函数. 这个映射就是我们所谓的 Hopf 纤维化.

一方面，我们想研究该函数的纤维——对给定的点 $x \in S^2$，求得 $h^{-1}(x)$ 是一个有趣的问题. 另一方面，这个函数的出现并不自然，我们始终想找到一种合适的描述这个函数的方法，使得它的出现、对纤维的求解等等问题都是可以自然解决的.

1 四元数环

起初四元数环 $\mathbb{H}$ 是看起来完全不相关的一个主题，但一方面，S^3 是 $\mathbb{R}^4$ 中的对象，另一方面，我们需要对 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转的全体进行描述——我们理论上需要两个参数，一个是旋转轴另一个是旋转角度，这样我们同样需要一个 $\mathbb{R}^4$ 中的向量来记录旋转的信息（之后将会看到，这样的对应并不是一对一的）.

定义. 四元数环 $\mathbb{H}$ 是非交换的 $\mathbb{R}$ 代数，作为向量空间同构于 $\mathbb{R}^4$，其中三个不同的向量 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ 分别用 i, j, k 表示，因而对任意 $q \in \mathbb{H}$，

$$q = a + bi + cj + dk, a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

且乘法满足关系

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

$$ji = -k, kj = -i, ik = -j.$$

问题 2. 验证 $\mathbb{R}$ 中的乘法满足结合律.[提示：尝试将 $\mathbb{H}$ 嵌入到一个矩阵代数当中.]

定义中的乘法关系已经说明了 $\mathbb{H}$ 的非交换性，这导致了很多计算上的困难，但这是一个可除代数，即它的非零元素都有逆. 对任意 $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$，令 $\bar{q} = a - bi - cj - dk \in \mathbb{H}$，于是

$$q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

我们记这个数是 $|q|^2 := a^2 + b^2 + c^2 + d^2$，因此当 $q \neq 0$ 时，$q \cdot \frac{\bar{q}}{|q|^2} = 1$，故 $\mathbb{H}$ 是一个可除代数.

我们称 $|q| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ 为四元数 q 的范数，它是映射

$$|-| : \mathbb{H} \to \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

当 $|-|$ 限制到 $\mathbb{H}^\times$ 时，它是一个乘法群同态：

我们记 $S^3 := \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$，它上面有由 $\mathbb{H}^\times$ 继承的乘法，根据之前的讨论这是一个子群.

2 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转

现在我们来考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转与 $\mathbb{H}$ 的关系，这里我们证明对任意给定的四元数 $q = a + bi + cj + dk$，都有一个 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转与之对应.

定义. 对给定的 $\mathbb{R}^3$ 中的点 $P=(x,y,z)$，设 $p=xi+yj+zk$ 是 P 对应的（纯虚）四元数. 定义映射

$$\begin{aligned} R:\mathbb{H}-\{0\} &\to SO_3(\mathbb{R}) \\ q &\mapsto R_q, \end{aligned}$$

其中 R_q 是映射 $p\mapsto qpq^{-1}$

问题 3. 验证：若 $p=xi+yj+zk$ 是纯虚四元数，则对于任意的四元数 q，

$$qpq^{-1}$$

也是一个纯虚的四元数，即 qpq^{-1} 的实部为 0.

下面的命题说明了这个映射的很多好性质：

命题 1. *本节定义给出的映射 R 满足如下性质：*

1. *映射 R 是良定义的，*
2. *映射 R 是乘法群的群同态，*
3. *映射 R 保四元数 q 的模，*
4. *映射 R 是满射，且限制在 S^3 上时映射 R 有有限核.*

证明. 1. 这里要验证线性映射 R_q 的矩阵是 $SO_3(\mathbb{R})$ 中的元素.

2.

3.

4.

□

上面命题说明对于任意一个四元数 $q=(a,b,c,d)\in S^3$，R_q 是一个 $\mathbb{R}^3$ 的旋转. 证明过程中也给出了，旋转轴由 $\begin{bmatrix} b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ 给出，旋转角 $\theta=2\arccos a=2\arcsin\sqrt{b^2+c^2+d^2}$. 除去证明中直接写出矩阵验证的方法，还可以这样证明：首先证明 R_q 保范数 $|-|$，即对于任意四元数 p，$|R_q(p)|=|p|$；再证明 $bi+cj+dk$ 是 R_q 的特征向量；对于旋转角度的计算，选择一个垂直于 $bi+cj+dk$ 的向量 $t=ci-bj$（如果 $b=c=0$，取 $t=i$），于是

$$\cos\theta=\frac{t\cdot R_q(t)}{|t|^2},$$

在我们的讨论中，等式右边为 $a^2-b^2-c^2-d^2=2a^2-1$，故 $a=\cos\frac{\theta}{2}$.

推论 1.1.

$$S^3/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cong SO_3(\mathbb{R}).$$

证明. 映射

$$R|_{S^3}: S^3 \to SO_3(\mathbb{R})$$

是满射，且 □

问题 4. 设 $[\alpha]$ 是 S^3 的 de Rham 上同调群 $H^3_{\mathrm{dR}}(S^3;\mathbb{R})$ 的一个非零元素. 求证对任意的 Lie 群同构 $f: S^3 \to S^3$，$f_*([\alpha]) \neq -[\alpha]$.

3 Hopf 纤维化

现在我们可以来完成最重要的定义了：

定义. 给定 S^2 中的一个点 $P=(1,0,0)$，那么对于任意 S^3 中的点 (x,y,z,w)，记 $q = x+yi+zj+wk \in \mathbb{H}$ 是对应的四元数，R_q 是上节定义的 q 给出的旋转，那么称映射

$$h: q \mapsto R_q(P) = qiq^{-1} = qi\bar{q}$$

为 Hopf 纤维化 (Hopf fibration).

首先这个定义给出了与先前相同的定义. 直接验证

$$\begin{aligned}(x+yi+zj+wk)i(x-yi-zj-wk) &= (-y+xi+wj-zk)(x-yi-zj-wk)\\ &= -xy+xy+zw-zw\\ &\quad+(x^2+y^2-z^2-w^2)i\\ &\quad+(2xw+2yz)j\\ &\quad+(-2xz+2yw)k.\end{aligned}$$

考虑点 $i=(1,0,0)\in S^2$，要满足 $h(q)=h(x,y,z,w)=i$，那么由定义

$$qiq^{-1}=i,$$

于是 q 在 i 的中心中，于是

$$h^{-1}(i) = Z(i) = \{(\cos t, \sin t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

这意味着点 i 的纤维 (fibre) 是一个圆. 然而这是一个更一般的事实，S^2 的其他点的纤维也是一个圆（S^1），于是 S^3 是 S^2 的球丛 (sphere bundle). 事实上，考虑任意 $ai+bj+ck\in S^2$，由定义 $q\in h^{-1}(ai+bj+ck)$ 满足

$$qiq^{-1} = ai+bj+ck,$$

任取特定的 $q_0 \in h^{-1}(ai+bj+ck)$，那么

$$\begin{aligned}h^{-1}(ai+bj+ck) &= \{q\in S^3 \mid qiq^{-1} = ai+bj+ck\}\\ &= \{q \in S^3 \mid qiq^{-1} = q_0 i q_0^{-1}\}\\ &= q_0 h^{-1}(P) q_0^{-1}.\end{aligned}$$

刚刚证明了 $h^{-1}(P)$ 是 S^1，因此任意的纤维 $q_0h^{-1}(P)q_0^{-1}$ 都是 S^1.

再来考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转，任给定 S^2 上的两点 A, B，若旋转 R 将点 A 映到点 B，可以证明：

1. 要么 R 的旋转轴过两点 A, B 确定的 S^2 上的大圆的中点，此时旋转角度为 π，记这个旋转为 R_1，
2. 要么 R 的旋转轴垂直于两点 A, B 确定的 S^2 上的大圆，此时旋转角度为 $\arccos \vec{OA} \cdot \vec{OB}$，记这个旋转为 R_2.

命题 2.

给定 S^2 中的点 $P = (a, b, c)$，那么刚刚的讨论说明存在两个旋转 R_1, R_2 将点 i 映到点 P，再根据命题1，存在四元数 q_1, q_2 使得 $R_{q_1} = R_1, R_{q_2} = R_2$.

引理 1. 上述的四元数分别（可以）为

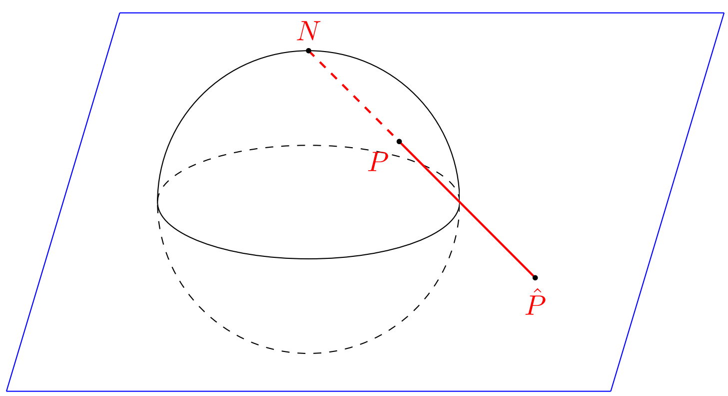
$$q_1 = \frac{1}{\sqrt{2(1+a)}}((1+a)i + bj + ck)$$
$$q_2 = \sqrt{\frac{1+a}{2}}\left(1 + \frac{-cj}{1+a} + \frac{bk}{1+a}\right).$$

于是，任意点 $P = (a, b, c)$ 的纤维是 $\mathbb{R}^4$ 中的圆，可以被如下任意方程参数化：

$$h^{-1}(P) = \{q_1(\cos t + i \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}$$
$$h^{-1}(P) = \{q_2(\cos t + i \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

4 Hopf 纤维化的可视化

最后这一部分我们将探讨如何用比较几何的方式建立 Hopf 纤维化的直观，尝试去“看到”Hopf 纤维化的作用. 这一部分主要用到的技巧被称为球极投影 (stereographic projection).



如上图，可以建立平面与去掉北极点的球面的一一对应，其中映射 $P \mapsto \hat{P}$ 定义为

$$(x, y, z) \mapsto \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right),$$

它将 S^2 上的不过点 N 的圆映为 $\mathbb{R}^2$ 中的圆，将 S^2 上的过点 N 的圆映为 $\mathbb{R}^2$ 中的直线. 类似地，也有 S^3 的球极投影

$$s : S^3 - \{(0,0,0,1)\} \to \mathbb{R}^3$$
$$(x, y, z, w) \mapsto \left(\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w}\right).$$

在以上的定义下，

$$s \circ h^{-1}((1,0,0)) = s(\{(\cos t, \sin t, 0, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}) = \{(\cos t, \sin t, 0) \mid t \in \mathbb{R}\},$$

这是 xOy 平面的单位圆，同时

$$s \circ h^{-1}((-1,0,0)) = s(\{(0, 0, \cos t, \sin t) \mid t \in \mathbb{R}\}) = \{(0, 0, z) \mid z \in \mathbb{R}\},$$

这是 z 轴. 对于任意不是 $\pm i$ 的点 P，$\mathbb{R}^3$ 中的圆 $s \circ h^{-1}(P)$ 恰与 xOy 平面交于两点 A, B，其中一点在单位圆内，一点在单位圆外，且 AB 的连线是经过原点和点 $(-c, b, 0)$ 的直线，圆 $s \circ h^{-1}(P)$ 所在的平面不能包含 z 轴.

这个视频动态地给出了我们刚刚的讨论（因为和视频中选择的球极投影不同，得到两个特殊位置的点可能不同，但这并不对结果产生影响，改变轴的顺序就可以了）.

问题 5. 给定 $\mathbb{R}^3$ 中的圆 $C = s \circ h^{-1}(P)$，任取 $r \in h^{-1}(P)$，定义 $f : \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ 为 $f(q) = kr^{-1}q$，求证映射

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R}^3 \\ x &\mapsto s \circ f \circ s^{-1}(x) \end{aligned}$$

将 C 映到 xOy 平面的单位圆.