复变函数辅导笔记（第一次）

2018 年 4 月 22 日

1.关于无穷远点的Cauchy定理和Cauchy公式.

(i) 设函数$f(z)$在$|z|>R$时是连续的.令$M(r)$表示$|f(z)|$在$|z|=r$ $(r\geq R)$上的最大值，并且假定

$$\lim_{r\to\infty} rM(r)=0.$$

那么

$$\lim_{r\to\infty}\int_{C(0,r)} f(z)\mathrm{d}z=0,$$

其中$C(0,r)$是以0为圆心，以r为半径的圆，积分按逆时针方向取到.

(ii) 若函数$f(z)$还满足在$|z|\geq R$上解析，那么对任何$r\geq R$

$$\int_{C(0,r)} f(z)\mathrm{d}z=0.$$

(iii) 如果函数$f(z)$在$|z|\geq R$上解析，并且$\lim_{z\to\infty} zf(z)=\alpha$，那么对于任意$r\geq R$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} f(z)\mathrm{d}z=\alpha.$$

(iv) 如果函数$f(z)$在简单闭曲线C的外部解析，且$\lim_{z\to\infty} f(z)=\alpha$，那么

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\mathrm{d}\zeta=\begin{cases}-f(z)+\alpha, & z\text{在}C\text{的外部}\\ \alpha, & z\text{在}C\text{的内部}\end{cases}$$

其中积分按逆时针方向取到.

Solution (i) 首先$M(r)$的存在性由$f(z)$是连续的保证.考虑

$$\left|\int_{C(0,r)} f(z)\mathrm{d}z\right|\leq\int_{C(0,r)}|f(z)|\,\mathrm{d}z\leq 2\pi rM(r),$$

于是$\lim_{r\to\infty} rM(r)=0$.

(ii) 设$r_2 \geq r_1 \geq R$，于是函数$f(z)$在$C(0,r_2)$与$C(0,r_1)$之间（包含边界）的任意点解析，于是由Cauchy定理

$$\int_{C(0,r_2)-C(0,r_1)} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

移项得到

$$\int_{C(0,r_2)} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C(0,r_2)} f(z)\mathrm{d}z.$$

这说明了，当$r \geq R$时，关于r的函数$\int_{C(0,r)} f(z)\mathrm{d}z$是定值.另一方面，由上题

$$\int_{C(0,r)} f(z)\mathrm{d}z = \lim_{r\to\infty}\int_{C(0,r)} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

(iii) 令$g(z) = f(z) - \frac{\alpha}{z}$，于是$\lim_{r\to\infty} zf(z) = \alpha$意味着$\lim_{r\to\infty} zg(z) = 0$.另一方面，由定义显然$g(z)$在$|z| \geq R$上解析，于是由(ii)中的结论，对于任意$r \geq R$

$$0 = \int_{C(0,r)} g(z)\mathrm{d}z = \int_{C(0,r)} f(z) - \frac{\alpha}{z}\mathrm{d}z = \int_{C(0,r)} f(z)\mathrm{d}z - \int_{C(0,r)} \frac{\alpha}{z}\mathrm{d}z,$$

于是

$$\int_{C(0,r)} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C(0,r)} \frac{\alpha}{z}\mathrm{d}z = 2\pi i\alpha.$$

(iv) 首先考虑z在C的内部的情形.令$g(\zeta - z) = \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$，于是$\alpha = \lim_{\zeta\to\infty} f(\zeta) = \lim_{\zeta - z\to\infty} \frac{1}{\zeta - z} g(\zeta - z)$，根据(iii)中的结论，对于充分大的$r$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} g(z)\mathrm{d}\zeta = \alpha.$$

但是z在C的内部，故$f(z)$在C与$C(0,r)$之间（包含边界）的任意点解析，于是由Cauchy定理

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \alpha.$$

当z在C的外部时，可以找到充分大的R使得z与C都在$C(0,R)$的内部，根据刚刚证明的结论

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \alpha.$$

另一方面$f(z)$在C与$C(0,R)$之间解析，因此由Cauchy公式

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)-C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = f(z),$$

两式相减得

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta - \frac{1}{2\pi i}\int_{C(0,r)-C} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\mathrm{d}\zeta = -f(z) + \alpha.$$

$\blacksquare$