Hopf 纤维化

G.Li

在这一个小故事中，我们要详细地探讨 Hopf 纤维化的来源、定义、性质等等，并尝试探讨它在拓扑当中的重要性. 想写这篇的原因是偶然间见到了哪年的丘赛中的一道题：

问题 1. 求证

$$\pi_3(S^2) \neq 0.$$

实话说，这个题目基本上等同于绝大多数的数学题：见过就会，而且是半句话就能讲明白的，没见过，对不起想破脑袋也不一定能想出来.Hopf 纤维化就是求解这个题的核心，只要证明纤维化

$$h : S^3 \to S^2$$

不是同伦平凡的，这样就完成了证明. 然而，这个映射的存在性显得非常不自然，我们也很难直接从表达式当中理解这个映射是如何被发现的. 因此，我们会通过别的角度去研究和探索这个映射，并尝试去“看见”这个映射.

我们都知道，n 维单位球面 S^n 是 $\mathbb{R}^n$ 中与原点距离为 1 的点组成的集合，即

$$S^n := \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

二维球面是容易想象的几何对象，它可以嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中. 但是三维球面就并不能让我们容易地想象，因为它需要被嵌入 $\mathbb{R}^4$ 中——于是，我们需要另外的方式去研究 S^3.

回顾在对 S^2 的处理中，我们使用过球极投影（stereographic projection），将二维球面映射到平面上. 对 S^3 的处理略有不同，我们