几何中的向量丛

G.Li

1 流形的切丛

给定一个 n 维的微分流形 M，有光滑函数层 $C^\infty(-)$，进而可以定义一点 x 的光滑函数芽

$$C_x^\infty := \mathrm{colim}_{x\in U} C^\infty(U),$$

由于流形的局部完全由 $\mathbb{R}^n$ 中的开集决定，且可以选取足够小的的邻域而不改变光滑函数芽. 点 x 上的一个切向量是一个 $\mathbb{R}$ 线性映射

$$v : C_x^\infty \to \mathbb{R}$$

满足 Leibnitz 定律

$$v(f\cdot g) = v(f)g(x) + f(x)v(g).$$

例如，对 M 上过点 x 的可微曲线 $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$（满足 $\gamma(0) = x$），

$$v(f) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\gamma(t))\right|_{t=0}$$

是切向量. 切向量实际是方向导数.

一点 $x \in M$ 上的所有切向量组成的集合有自然的 $\mathbb{R}$ 线性空间结构，称这个空间为 M 在点 x 的切空间，记为 T_xM. 切空间 T_xM 的维数恰好等于流形 M 的维数，这因为可以选取 x 附近充分小的邻域 $(U, x^1, \cdots, x^n)$ 使得对应到 $\mathbb{R}^n$ 中是一个球 $B(0,\epsilon)$，如前例子取 M 中的曲线

$$\gamma_j : (-\epsilon, \epsilon) \to M, 1 \le j \le n,$$

满足 $x^i(\gamma_j(t)) = \delta^i_j t$，其中 δ^i_j 是 Kroneker 记号. 定义

$$\frac{\partial}{\partial x^j} := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\circ\gamma_j(t))\right|_{t=0},$$

这些构成了 T_xM 的一组基.T_xM 的对偶空间称为余切空间，它的对偶基记为 $\{\mathrm{d}x_i\}_{1\le i\le n}$，任给定一个函数 $f \in C_x^\infty$，都有余切向量 $\mathrm{d}f$ 满足

$$\left\langle \mathrm{d}f, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle = \mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j} f.$$

给定光滑流形间的光滑映射 $\varphi : M \to N$，自然诱导了一个映射

$$\begin{aligned}\varphi^* : C^\infty_{\varphi(x)} &\to C_x^\infty\\ f &\mapsto f\circ\varphi,\end{aligned}$$

于是这自然可以称为一个映射

$$\begin{aligned} \varphi_* : T_xM &\to T_{\varphi(x)}N \\ v &\mapsto v(- \circ \varphi), \end{aligned}$$

该映射称为切映射.

定理 1.1. 设 M 是 n 维光滑流形，令

$$TM := \coprod_{x \in M} T_xM$$

是 M 上的切向量的全体，那么存在 TM 上的拓扑和光滑结构使得 TM 是一个 $2n$ 维光滑流形.

证明. 按定义，TM 中的点是形如 (x, v) 的配对，其中 $x \in M$，$v \in T_xM$. 定义映射

$$\begin{aligned} \pi : TM &\to M \\ (x, v) &\mapsto x, \end{aligned}$$

这样对于任意一点 $x \in M$，$\pi^{-1}(x) = T_xM$.

假定 M 的光滑结构是 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n)\}_{\lambda \in \Lambda}$，考虑

$$\pi^{-1}(U_\lambda) = \bigcup_{x \in U_\lambda} T_xM,$$

于是 $TM = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \pi^{-1}(U_\lambda)$. 借助 φ_λ，我们给定局部的同胚

$$\psi_\lambda : U_\lambda \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_\lambda)$$

满足对于 $x \in U_\lambda, y = (y^1, \cdots, y^n) \in \mathbb{R}^n$，

$$\psi_\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^n y^i \left.\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\right|_x$$

其中 $x_\lambda^i = (\varphi_\lambda)^i, i = 1, \cdots, n$ 是 U_λ 上由坐标映射 φ_λ 给出的局部坐标系. 很明显这个映射是集合上的双射.

借助局部的乘积空间，可以给出 TM 一个拓扑结构. 考虑 TM 中的子集族

$$\mathcal{B} := \{\psi_\lambda(W) \mid W \text{是} U_\lambda \times \mathbb{R}^n \text{中的开集}\},$$

这可以构成 TM 的一个拓扑基: 首先 $\{(U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 M 的一个开覆盖, 因此 $\mathcal{B}$ 是 TM 的开覆盖; 接下来还需要验证对任意 $(x, v) \in TM$, 若有 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 使得 $(x, v) \in B_1 \cap B_2$ 则有 $B \in \mathcal{B}$ 满足 $(x, v) \in B \subseteq B_1 \cap B_2$. 由于 $U_\lambda \times \mathbb{R}^n$ 具有乘积拓扑结构, 因而可以找到 U_λ, U_μ 中的开集 D_1, D_2 和 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 V_1, V_2 使得 $\psi_\lambda(D_1 \times V_1) \subseteq B_1, \psi_\mu(D_2 \times V_2) \subseteq B_2$，这样只要证明存在某个 U_ν 中的开集 D 和 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 V 使得

$$(x, v) \in \psi_\nu(D \times V) \subseteq \psi_\lambda(D_1 \times V_1) \cap \psi_\mu(D_2 \times V_2),$$

如此可得到 TM 上的拓扑，并且这是一个第二可数的 Hausdorff 空间.

在上述假定下，

$$x = \pi(x, v) \in D_1 \cap D_2 \subseteq U_\lambda \cap U_\mu$$

且
$$v=\sum_{i=1}^n y^i\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\bigg|_x=\sum_{i=1}^n \tilde{y}^i\frac{\partial}{\partial x_\mu^i}\bigg|_x=\sum_{i,j=1}^n \tilde{y}^j\frac{\partial x_\lambda^i}{\partial x_\mu^j}(\varphi_\lambda(x))\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\bigg|_x,$$
其中 $(y^1,\cdots,y^n)\in V_1$，$(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n)\in V_2$，因此它们之间有关系式
$$y^i=\sum_{i=1}^n \tilde{y}^i\frac{\partial x_\lambda^i}{\partial x_\mu^j},$$
$\frac{\partial x_\lambda^i}{\partial x_\mu^j}$ 是光滑流形 M 从局部坐标系 (U_λ,x_λ^i) 到 (U_μ,x_μ^i) 的坐标变换 Jacobi 矩阵.

考虑映射 $\Phi_{\lambda,\mu}:(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n\subseteq U_\mu\times\mathbb{R}^n\to(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n\subseteq U_\lambda\times\mathbb{R}^n$ 使得
$$\Phi_{\lambda,\mu}(x,(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n))=(x,(y^1,\cdots,y^n)),$$
其中 $(y^1,\cdots,y^n)$ 与 $(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n)$ 服从之前计算的关系式，因此 y^i 是关于 $x,\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n$ 的光滑函数. 由于
$$\det\frac{\partial x_\lambda^i}{\partial x_\mu^j}\neq 0,$$
所以 $\Phi_{\lambda,\mu}$ 有逆映射 $\Phi_{\mu,\lambda}=\Phi_{\lambda,\mu}^{-1}$，且它也是光滑的，这意味着 $\Phi_{\lambda,\mu}:(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n\to(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n$ 是光滑同胚. 由定义可知
$$\psi_\lambda\circ\Phi_{\lambda,\mu}\circ\psi_\mu^{-1}=\mathrm{id}:\pi^{-1}(U_\lambda\cap U_\mu)\to\pi^{-1}(U_\lambda\cap U_\mu),$$
即有交换图
$$\begin{tikzcd}
U_\mu\times\mathbb{R}^n \arrow[rr, "\Psi_{\lambda,\mu}"] \arrow[dr, "\psi_\mu"'] & & U_\lambda\times\mathbb{R}^n \arrow[dl, "\psi_\lambda"] \\
& \pi^{-1}(U_\lambda\cap U_\mu). &
\end{tikzcd}$$
在先前的设定下不妨取 $D_1=D_2=D_1\cap D_2$，由于 $\Psi_{\lambda,\mu}(D_2\times V_2)$ 是 $U_\lambda\times\mathbb{R}^n$ 的开集，并且 $\Phi_{\lambda,\mu}\circ\psi_\mu^{-1}(x,v)=\psi_\lambda^{-1}(x,v)\in D_1\times V_1$，所以开集 $\Phi_{\lambda,\mu}(D_2\times V_2)$ 与开集 $D_1\times V_1$ 相交非空，因此存在点 $\Phi_{\lambda,\mu}\circ\psi_\mu^{-1}(x,v)=\psi_\lambda^{-1}(x,v)$ 在开集 $\Phi_{\lambda,\mu}(D_2\times V_2)\cap D_1\times V_1$ 中的邻域 $D\times V$，其中 D 是 U_λ 的开子集，V 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集. 这样 $\psi_\lambda(D\times V)\in\mathcal{B}$ 且
$$(x,v)\in\psi_\lambda(D\times V)\subseteq\psi_\mu(D_2\times V_2)\cap\psi_\lambda(D_1\times V_1),$$
于是 $\mathcal{B}$ 是 TM 的拓扑基.

事实上，在 TM 上建立拓扑的直观意义很明确，在给定两个邻近的切向量 $(x_1,v_1),(x_2,v_2)$ 时，首先它们的起点 x_1,x_2 是邻近的，因而可以落在同一个坐标邻域内，于是经过坐标变换 v_1,v_2 可以在同一个坐标系内表示出来. 那么，切向量 $(x_1,v_1),(x_2,v_2)$ 相互邻近的第二个要求就是当它们在同一个坐标系内表示出来时，分量的差别很小. 这就是这里给定的拓扑.

接下来再建立微分结构. 如前所述，$\{\pi^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 构成了 TM 的一个开覆盖，对每个指标 $\lambda\in\Lambda$，定义映射
$$\begin{aligned}\xi_\lambda:\pi^{-1}(U_\lambda)&\to\mathbb{R}^{2n}\\ \sum_{i=1}^n y^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x&\mapsto(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n,y^1,\cdots,y^n).\end{aligned}$$

这样 ξ_λ 是从 $\pi^{-1}(U_\lambda)$ 到 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的开集 $\varphi_\lambda(U_\lambda)\times\mathbb{R}^n$ 的同胚，因此 $(\pi^{-1}(U_\lambda),\xi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是 TM 的一个坐标卡，使得它成为一个拓扑流形. 如此，还需要证明坐标卡是 C^∞ 相关的. 注意到 $\pi^{-1}(U_\lambda)$ 与 $\pi^{-1}(U_\mu)$ 相交非空的充要条件是 $U_\lambda\cap U_\mu\neq\emptyset$，此时坐标变换

$$\xi_\mu\circ\xi_\lambda^{-1}:\varphi_\lambda(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n\to\varphi_\mu(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n$$

由下式给出

$$(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n,y^1,\cdots,y^n)\mapsto(x_\mu^1,\cdots,x_\mu^n,\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n),$$

其中 $x_\mu^i=(\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})^i(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n)$，且

$$\tilde{y}^i=\sum_{i=1}^n y^i\frac{\partial x_\mu^i}{\partial x_\lambda^j}.$$

这样，$x_\mu^i,\tilde{y}^i$ 都是 x_λ^i,y^i 的光滑函数，因此 TM 是光滑流形. $\square$

注意到在 TM 的这个光滑结构下，映射 $\pi:TM\to M$ 限制在局部坐标 $\pi^{-1}(U)$ 上的表达式为

$$\varphi_\lambda\circ\pi\circ\xi_\lambda^{-1}(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n,y^1,\cdots,y^n)=(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n),$$

于是 π 是光滑映射. 另外，

$$\xi_\lambda\circ\psi_\lambda(x,(y^1,\cdots,y^n))=\xi_\lambda\left(\sum_{i=1}^n y^i\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\bigg|_x\right)=(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n),$$

所以 $\psi_\lambda:U_\lambda\times\mathbb{R}^n\to\pi^{-1}(U_\lambda)$ 是光滑同胚. 同时该光滑同胚满足对所有的 $(x,y)\in U_\lambda\times\mathbb{R}^n$，

$$\pi\circ\psi_\lambda(x,y)=x,$$

即有交换图

$$\begin{tikzcd} U_\lambda\times\mathbb{R}^n \arrow[rr, "\psi_\lambda"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_\lambda) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_\lambda. & \end{tikzcd}$$

再固定 $x\in U_\lambda$，考虑映射

$$\begin{aligned}\psi_\lambda(x,-):\mathbb{R}^n&\to\pi^{-1}(x)\\ y&\mapsto\psi_\lambda(x,y),\end{aligned}$$

按定义它将 $(y^1,\cdots,y^n)$ 映到 $\sum_{i=1}^n y^i\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\Big|_x$，因此是一个线性同构. 这样当 $x\in U_\lambda\cap U_\mu$ 时，存在两个线性同构 $\psi_\lambda(x,-),\psi_\mu(x,-):\mathbb{R}^n\to\pi^{-1}(x)$，因而有线性同构

$$\psi_\mu(x,-)\circ\psi_\lambda(x,-)^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,$$

这个同构是证明中的映射

$$(y^1,\cdots,y^n)\mapsto(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n),$$

恰好是局部坐标变换 $\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1}$

例 1. 考虑 $S^2\subseteq\mathbb{R}^3$，有嵌入 $S^2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$. 那么 S^2 的切丛可表示为

$$TS^2=\{((x,y,z),(u,v,w))\mid xu+yv+zw=0\}\subseteq S^2\times\mathbb{R}^3.$$

2 流形的向量丛

将切丛的概念做推广，我们得到了如下流形上向量丛的概念：

定义. 设 E, B 是两个光滑流形，$\pi : E \to B$ 是光滑的满映射. 若存在 M 的一个开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 以及一组被称为局部平凡化 (local trivialization) 的光滑同胚

$$\psi_\lambda : U_\lambda \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_\lambda)$$

使得

1. 下图交换

$$\begin{tikzcd} U_\lambda \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\psi_\lambda"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_\lambda) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_\lambda. & \end{tikzcd}$$

2. 对任意给定的 $x \in U_\lambda$，由局部平凡化诱导的

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(x, -) : \mathbb{R}^n &\to \pi^{-1}(x) \\ \mathbf{v} &\mapsto \psi_\lambda(x, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

   是拓扑空间的同胚，且对于任意 $x \in U_\lambda \cap U_\mu$，复合映射

$$g_{\mu,\lambda}(x) := \psi_\mu^{-1}(x, -) \circ \psi_\lambda(x, -) : \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(x) \to \mathbb{R}^n$$

   是线性同构，即 $g_{\mu,\lambda} \in GL_n(\mathbb{R})$.

3. 上一部分确定的映射

$$g_{\mu,\lambda} : U_\lambda \cap U_\mu \to GL_n(\mathbb{R})$$

   是光滑的.

都满足，则称 (E, π) 是 B 上的秩 (rank) 为 n 的向量丛 (vector bundle).

对任意 $x \in B$，$E_x := \pi^{-1}(x)$ 被称为 E 在点 x 上的纤维 (fibre).

我们注意到，

例 2. 设 $G_k(\mathbb{R}^n)$ 是 *Grassmann* 流形，定义

$$\gamma_{k,n} := \{(V, v) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid v \in V \subseteq \mathbb{R}^n\},$$

$\pi : \gamma_{k,n} \to G_k(\mathbb{R}^n)$ 是映射 $(V, v) \mapsto V$. 如下的构造使得 $\pi : \gamma_{k,n} \to G_k(\mathbb{R}^n)$ 是一个向量丛，称为万有向量丛 *(universal bundle)*. 对于流形 $G_k(\mathbb{R}^n)$，存在开覆盖

$$U_{i_1,\cdots,i_k} := \{A \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \mid \det A_{i_1,\cdots,i_k} \neq 0\}$$

其中 $1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n$ 是 k 个不同的正整数，$A_{i_1,\cdots,i_k}$ 是取 A 中第 $i_1, \cdots, i_k$ 行组成的子矩阵. 存在唯一的列变换（这里只能用列变换，因为我们不想改变生成的子空间）使得 $A_{i_1,\cdots,i_k} = I_k$，而剩余行组成 A 对应到 $\mathbb{R}^{k\times(n-k)}$ 中的坐标. 于是，可以构造以下的结构

$$\begin{tikzcd}
U_{i_1,\cdots,i_k} \times \mathbb{R}^k \arrow[rr, "\psi_{i_1,\cdots,i_k}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_\lambda) \arrow[dl, "\pi"] \\
& U_{i_1,\cdots,i_k}, &
\end{tikzcd}$$

其中 $\psi_{i_1,\cdots,i_k}$ 是映射

命题 2.1. *若 $\pi : E \to B$ 是 n 秩光滑向量丛，则 E 上任意点 x 上的纤维 E_x 都有自然的线性结构使得 E_x 是 n 维向量空间.*

事实上，我们并不需要一个向量丛的基是流形，对于一般的（好的）拓扑空间，同样可以定义向量丛：

定义.

定理 2.2. *设 $f : D \to B$ 是连续映射，$p : E \to B$ 是秩为 n 的向量丛，那么拓扑空间*

$$f^*E := \{(d,e) \in D \times E \mid f(d) = p(e)\}$$

是 D 上的向量丛.f^*E 称为向量丛 E 的拉回 (pullback)，如下图

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "p"] \\
D \arrow[r, "p|_S"] & B.
\end{tikzcd}$$

证明. □

习题 2.1. 设 $i : Y \hookrightarrow X$ 是子空间的嵌入映射，证明

$$i^*(E) \cong E|_Y.$$

习题 2.2. $\mathbb{CP}^n$ 的 tautological 线丛的 Thom 空间是 $\mathbb{CP}^{n+1}$.

例 3. *所有光滑流形的切丛都可以称为某个向量丛的拉回.*

拓扑上，向量丛的分类是一个核心而且有趣的问题.

命题 2.3. *设 $\pi : E \to B$ 是秩为 n 的光滑向量丛，那么它的转移函数族 $\{g_{\mu,\lambda} : U_\lambda \cap U_\mu \to GL_n(\mathbb{R})\}$ 满足下列相容性条件：*

1. *$g_{\lambda,\lambda}(p) = I$ 对所有点 $p \in U_\lambda$ 成立，其中 I 是单位矩阵；*
2. *若 $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\eta \neq \emptyset$，那么对任意 $p \in U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\eta$，*

$$g_{\lambda,\mu}(p) \cdot g_{\mu,\eta}(p) = g_{\lambda,\eta}(p).$$

定理 2.4. *设 M 是 n 维流形，$\{M_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个开覆盖. 若对任意一对指标 λ, μ，在 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ 时都指定了一个光滑映射*

$$g_{\lambda,\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to GL_r(\mathbb{R}),$$

满足命题 2.3中的条件，则存在同构下唯一的 r 秩向量丛 $\pi : E \to M$，以 $\{g_{\lambda,\mu}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ 为转移函数.

定理 2.5. 设 E, F 是 B 上的两个向量丛，那么 $\mathscr{H}\mathrm{om}(E,F) := \coprod_{x\in B} \mathrm{Hom}(E_x, F_x)$ 有自然的拓扑结构使得 $\mathscr{H}\mathrm{om}(E,F)$ 成为 B 上的向量丛，且每个截面 $s : B \to \mathscr{H}\mathrm{om}(E,F)$ 都是一个向量丛态射 $E \to F$.

推论 2.5.1. 若 $\varphi \in \Gamma\mathscr{H}\mathrm{om}(E,F)$ 满足对每个 $x \in B$，φ_x 都是同构，那么 φ^{-1} 存在且 φ^{-1} 是连续的.

习题 2.3. 设 E 是 X 上的向量丛，证明存在自然同构

$$\mathscr{H}\mathrm{om}(E,F) \cong E^* \otimes F.$$

例 4. 设 $\pi_1 : E_1 \to B, \pi_2 : E_2 \to B$ 是两个

3 复流形的向量丛

4 概型的向量丛

例 5. 考虑 $X = \mathrm{Spec}\ \mathbb{R}[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2-1)$，$M$ 是 $R = \mathbb{R}[x,y,z]/(x^2+y^2+z^2-1)$ 模 $R\oplus R\oplus R$ 的子模

$$\{(u,v,w) \in R\oplus R\oplus R \mid xu+yv+zw=0\},$$

那么 $\tilde{M}$ 是局部自由的，它对应了一个向量丛.

例 6. 考虑 $X = \mathrm{Spec}\ \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \mathrm{Spec}\ R$，$I = (2, 1+\sqrt{-5})$. 这个理想不是主理想，因而 $R \ncong I$. 但是 $R_2 \cong I_2, R_3 \cong I_3$，且 $D(2), D(3)$ 是 $\mathrm{Spec}\ R$ 的开覆盖，因此 $\tilde{I}$ 是局部自由的.

5 G 主丛

考虑李群 G 作用在给定的流形 M 上，如果作用是自由的，那么任意点 $x \in M$ 的轨道 $O_x \cong G$. 例如，$SO(2)$ 在 $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ 的作用.

定义. 给定拓扑群 G 和纤维丛 $\pi : P \to B$，满足如下条件

1. G 在 P 上有自由的（右）作用，
2. 存在同胚 $f : B \to P/G$ 满足

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\mathrm{id}} & P \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow \\ B & \xrightarrow{f} & P/G, \end{array}$$

即 $P \to B$ 与 $P \to P/G$ 作为纤维丛是同构的，

则称 $P \to B$ 是一个 G 主丛 (principal G-bundle).

例 7. *Hopf* 纤维化 $S^1 \hookrightarrow S^3 \to S^2$ 是一个 S^1 主丛.

例 8. 任意给定一个光滑流形 M，且维数 $\dim M = n$，定义空间 $LM \to M$ 如下：对任意点 $x \in M$，

$$L_xM := \{(e_1, \cdots, e_n) \mid \{e_1, \cdots, e_n\}\text{构成}T_xM\text{的一组基}\} \cong GL(n, \mathbb{R}),$$

且 $LM := \coprod_{x\in M} L_xM$，类似于之前 TM 的构造，给 LM 一个由 M 诱导的坐标图卡.

接下来我们说明 LM 是一个 $GL(n, \mathbb{R})$ 主丛.

定义. 设 $P_1 \xrightarrow{\pi_1} B_1$ 和 $P_2 \xrightarrow{\pi_2} B_2$ 分别是给定的 G_1 主丛和 G_2 主丛，那么一个主丛态射 (morphism) 是映射对 $(f : P_1 \to P_2, g : B_1 \to B_2, \varphi : G_1 \to G_2)$，满足图

$$\begin{tikzcd} P_1 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi_1"'] & P_2 \arrow[d, "\pi_2"] \\ B_1 \arrow[r, "g"] & B_2 \end{tikzcd}$$

是交换图，且 f 关于 φ 是等变的.

引理 5.1. 给定流形 B 上的两个 G 主丛 $\pi_1 : P_1 \to B$ 和 $\pi_2 : P_2 \to B$，若 $f : P_1 \to P_2$ 是丛态射，那么 f 是同构.

证明. 1. 设 P_1 中的两点 x, y 满足 $f(x) = f(y)$，那么由于 f 是丛态射，因此 $\pi_1(x) = \pi_1(y)$，这样 x, y 在同一点的纤维上，于是存在唯一的 $g \in G$ 使得 $x = y \cdot g$. 这样，

$$f(x) = f(y \cdot g) = f(y) \cdot g = f(y),$$

于是 $g = e$，这意味着 $x = y$.

2. □

这意味着给定基流形的所有主丛的范畴是一个群胚.

定理 5.1. G 主丛 $\pi : P \to B$ 是平凡的当且仅当存在截面 $s : B \to P$.

证明. 给定截面 $s : B \to P$，那么对于任意 $x \in P$，那么存在唯一的（依赖于 x 的）$\chi(x) \in G$ 使得

$$s(\pi(x)) \cdot \chi(x) = x,$$

并且对于任意 $g \in G$，

$$\chi(x \cdot g) = \chi(x)g.$$

这是因为，一方面，对 $s(\pi(x)) \cdot \chi(x) = x$ 两边都取 g 的作用有 $s(\pi(x)) \cdot (\chi(x)g) = (s(\pi(x)) \cdot \chi(x)) \cdot g = x \cdot g$，另一方面 $s(\pi(x)) \cdot \chi(x \cdot g) = s(\pi(x \cdot g)) \cdot \chi(x \cdot g) = x \cdot g$，根据唯一性得证.

因此定义

$$\begin{aligned} f : P &\to B \times G \\ x &\mapsto (\pi(x), \chi(x)), \end{aligned}$$

这样只需要证明它是 G 等变的纤维丛映射. 纤维丛映射是显然的，并且

$$f(x \cdot g) = (\pi(x \cdot g), \chi(x \cdot g)) = (\pi(x), \chi(x)g) = f(x) \cdot g.$$

最后， □

例 9. 考虑 S^2 的 $GL(2,\mathbb{R})$ 主丛 LS^2,

定理 5.2. 给定 G 主丛 $\pi : P \to B$ 和 G 在空间 F 的左作用, 那么存在空间 $P \times^G F$ 使得 $P \times^G F \to B$ 是以 F 为纤维的纤维丛.

证明. 定义

$$P \times^G F := P \times F / \sim,$$

其中等价关系定义为 $(x \cdot g, y) \sim (x, g \cdot y)$. 于是，映射 $p : P \times^G F \to B$ 定义为

$$(x, y) \mapsto \pi(x),$$

注意到这是个良定义，因为若 $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2)$，那么存在 $g \in G$ 使得 $y_1 = g \cdot y_2$，这样 $x_2 = x_1 \cdot g$，因此二者在同一点的纤维上.

考虑任意 $b \in B$，那么对任意 $x \in \pi^{-1}(b)$，存在连续映射

$$\begin{aligned} F &\to p^{-1}(b) \\ y &\mapsto (x, y) \end{aligned}$$

和它的逆映射

最后来证明局部平凡化. □

例 10. 任意给定底空间 B 和 G 主丛 $P \to B$, 考虑 G 在空间 F 上的平凡作用, 那么直接由定义,

例 11. 设 M 是给定的 n 维流形, $LM \to M$ 是 $GL(n,\mathbb{R})$ 主丛, 考虑 $GL(n,\mathbb{R})$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上的自然作用, 那么

命题 5.3. 任意给定纤维丛 $F \hookrightarrow E \xrightarrow{p} B$ 并选定 F 的自同构群 $\mathrm{Aut}(F)$, 那么存在 $\mathrm{Aut}(F)$ 主丛 $\pi : P \to B$ 使得 $E \cong P \times^{\mathrm{Aut}(F)} F$.

证明. 任意给定 $b \in B$，令

$$P_b := \{\varphi : F \to p^{-1}(b) \mid \varphi\text{是同构}\},$$

那么有自然的 $\mathrm{Aut}(F)$ 在 P_b 上的作用. 于是定义

$$P := \coprod_{b \in B} P_b.$$

□