谱序列

Guanyu Li

2020 年 3 月 2 日

1　双复形和全复形

定义. 分次模/分次对象

定义. 设M, N是分次R模，若R模态射$f: M \to N$满足存在整数d，使得对任意$n \in \mathbb{Z}$都有$f: M_n \to N_{n+k}$，则称f是阶数为k的分次映射(graded map of degree k).

命题1.1. *若$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$分别是阶数为$k, l$的分次映射，则$g \circ f$是阶数为$k+l$的分次映射.*

定义. 一个双分次模(bigraded module)是一族有两个指标的R模

$$M := \{M_{p,q}\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}},$$

一般我们记为$M_{\bullet\bullet}$.若M, N是双分次模，一族映射

$$f = \{f_{p,q} : M_{p,q} \to N_{p+k,q+l}\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$$

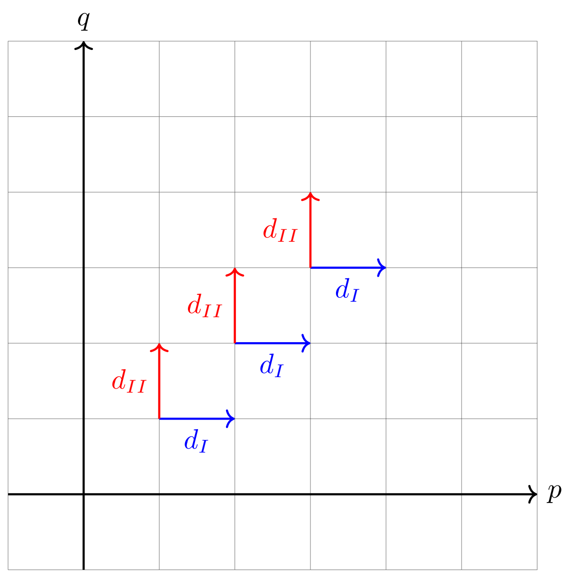
若都是R模映射，则称f是阶数为(k,l)的双分次映射.

接下来我们都用上同调的序号记号.

定义. 设M是双分次R模，d_I, d_{II}是两个阶数分别为$(1,0)$和$(0,1)$的双分次微分映射（即$d_I^{p+1,q} \circ d_I^{p,q} = 0$，$d_{II}^{p,q+1} \circ d_{II}^{p,q} = 0$）.若映射满足

$$d_I^{p,q+1} \circ d_{II}^{p,q} + d_{II}^{p+1,q} \circ d_I^{p,q} = 0,$$

则称(M, d_I, d_{II})是一个**双复形**(bicomplex).



例1. 设M是双分次R模，d_I, δ是两个阶数分别为$(1,0)$和$(0,1)$的双分次微分映射，使得M是一个交换图（注意这和双复形差了一个符号!），那么我们可以通过符号变换构造一个双复形.令$d_{II}^{p,q} = (-1)^p \delta^{p,q}$，那么

$$d_I^{p,q+1} \circ d_{II}^{p,q} + d_{II}^{p+1,q} \circ d_I^{p,q} =$$

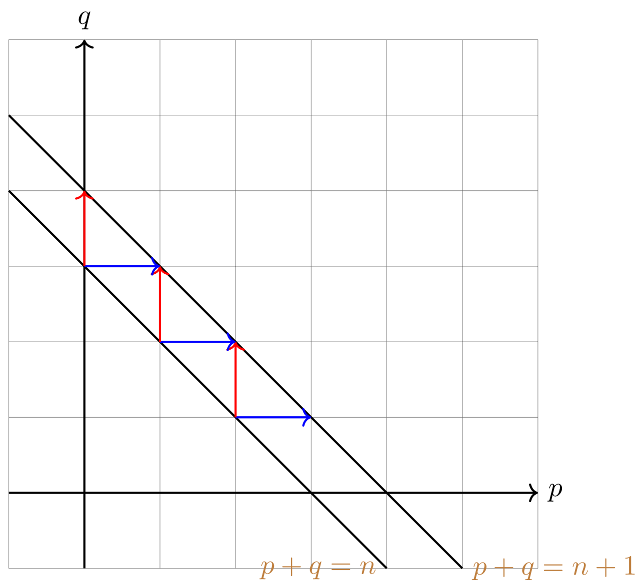
定义. 设M是双分次R模，那么

$$\mathrm{Tot}(M)^n := \bigoplus_{p+q=n} M^{p,q}$$

和$D^n : \mathrm{Tot}(M)^n \to \mathrm{Tot}(M)^{n+1}$，

$$D^n := \sum_{p+q=n} (d_I^{p,q} + d_{II}^{p,q})$$

称为M的全复形(total complex).



引理1.1. 若M是双复形，则$(\mathrm{Tot}(M), D)$是复形.

很多时候，我们关心的上同调问题是某个双复形的全复形的上同调群，而谱序列就是一种计算全复形上同调群的某种技巧.

例2. 设M是双分次R模，(M, d_I, d_{II})是一个双复形，那么我们可以定义双复形的转置M^T：这意味着

$$\mathrm{Tot}(M) = \mathrm{Tot}(M^T).$$

2 滤子和正合对

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，X是$\mathcal{A}$中的对象，则X的一个递降滤子(descending filtration)是一族X的子对象$\{F^nX\}_{n\in\mathbb{Z}}$满足

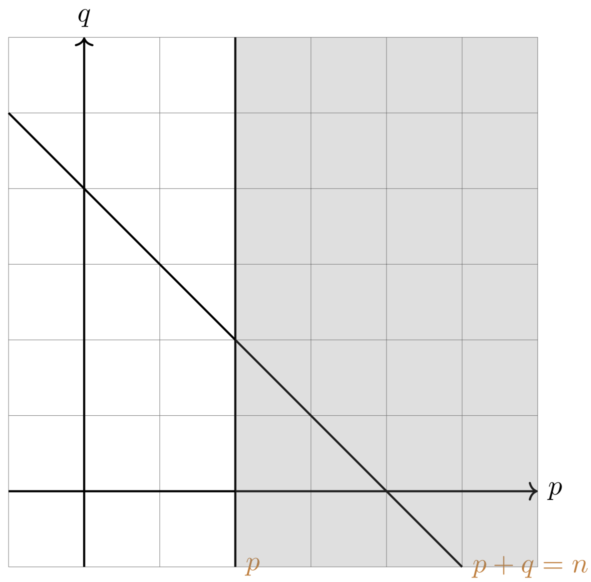
$$0 \subseteq \cdots \subseteq F^{n+1}X \subseteq F^nX \subseteq \cdots X.$$

定义. 设M是双分次R模，(M, d_I, d_{II})是一个双复形，那么称

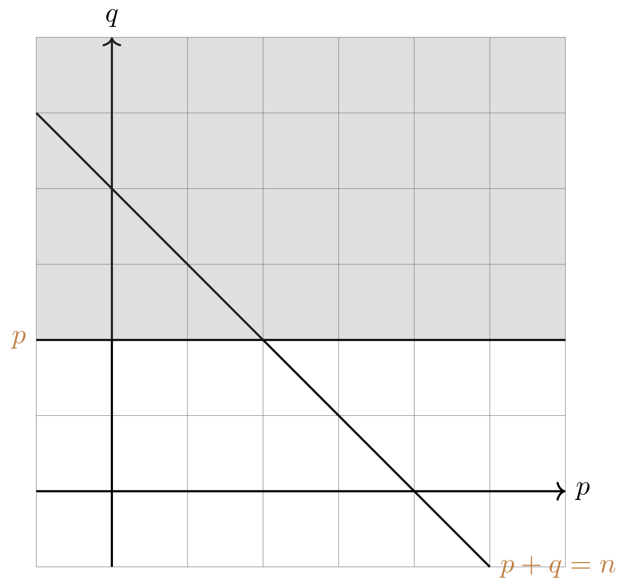
$$({}^IF^p\mathrm{Tot}(M))^n := \bigoplus_{i\geq p} M^{i,n-i} = \cdots \oplus M^{p+2,q-2} \oplus M^{p+1,q-1} \oplus M^{p,q}$$

为$\mathrm{Tot}(M)$的第一滤子(the first filtration)，称

$$({}^{II}F^p\mathrm{Tot}(M))^n := \bigoplus_{j\geq p} M^{n-j,j} = \cdots \oplus M^{p-2,q+2} \oplus M^{p-1,q+1} \oplus M^{p,q}$$



(a) 第一滤子



(b) 第二滤子

为Tot(M)的第二滤子(the second filtration).

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，D, E是$\mathcal{A}$中的双分次对象，f, g, h是双分次映射，若

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "f"] & & D \arrow[dl, "g"] \\ & E \arrow[ul, "h"] & \end{tikzcd}$$

是正合的，那么称(D, E, f, g, h)是正合对(exact couple).

定理2.1. 每一个*Abel*范畴$\mathcal{A}$中的上链$X^\bullet$的滤子$F^pX^\bullet$都给出一个正合对

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "f\ (-1{,}1)"] & & D \arrow[dl, "g\ (0{,}0)"] \\ & E, \arrow[ul, "h\ (1{,}0)"] & \end{tikzcd}$$

其中映射的度在图中已经标出.

Proof. 我们有复形的短正合列

$$0 \to F^{p+1}X^\bullet \xrightarrow{i^{p+1}} F^pX^\bullet \xrightarrow{\pi^p} F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet \to 0,$$

这诱导了上同调群的长正合序列

$$\cdots \to H^n(F^{p+1}X^\bullet) \xrightarrow{H^n(i^{p+1})} H^n(F^pX^\bullet) \xrightarrow{H^n(\pi^p)} H^n(F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet) \to$$
$$\xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(F^{p+1}X^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(i^{p+1})} H^{n+1}(F^pX^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(\pi^p)} H^{n+1}(F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet) \to \cdots.$$

我们取$n = p + q$，$f = H^\bullet(i^{p+1}), g = H^\bullet(\pi^p), h = \delta^\bullet$，并且

$$D = \{D^{p,q} := H^{p+q}(F^pX^\bullet)\}$$
$$E = \{E^{p,q} := H^{p+q}(F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet)\}$$

代入到长正合序列中即为

$$\cdots \to D^{p+1,q-1} \xrightarrow{f^{p+1,q-1}} D^{p,q} \xrightarrow{g^{p,q}} E^{p,q} \xrightarrow{h^{p,q}} D^{p+1,q} \to \cdots.$$

□

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，X是$\mathcal{A}$中的双分次对象，d是双分次映射满足$d \circ d = 0$，则称(X, d)是微分双分次对象(differential bigraded object).

若(X, d)是微分双分次对象，d的阶数为(k, l)，那么定义(X, d)的上同调为

$$H(X, d)^{p,q} := \frac{\ker d^{p,q}}{\operatorname{im} d^{p-k,q-l}}.$$

定理2.2. *若(D, E, f, g, h)是Abel范畴$\mathcal{A}$上的一个正合对，那么$d := h \circ g : E \to E$给出$\mathcal{A}$上的一个微分双分次对象(E, d)，且存在一个新的正合对$(D_2, E_2, f_2, g_2, h_2)$*

$$\begin{tikzcd} D_2 \arrow[rr, "f_2"] & & D_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & E_2, \arrow[ul, "h_2"] & \end{tikzcd}$$

满足$E_2 = H(E, d)$，称为导出对(derived couple).

Proof. 首先我们验证微分.按照定义，$d \circ d = (h \circ g) \circ (h \circ g) = h \circ (g \circ h) \circ g = h \circ 0 \circ g = 0$.

按照条件定义$E_2 = H(E, d)$，定义

$$D_2 := \operatorname{Im} f,$$

且$f_2 := f|_{D_2} = f \circ \iota$，其中$\iota : D_2 \to D$是嵌入. □

推论2.2.1. *每一个Abel范畴$\mathcal{A}$中的上链$X^\bullet$的滤子$F^pX^\bullet$都给出一族正合对*

$$\begin{tikzcd} D_r \arrow[rr, "f_r\ (1,-1)"] & & D_r \arrow[dl, "g_r\ (1-r,r-1)"] \\ & E_r, \arrow[ul, "h_r\ (-1,2)"] & \end{tikzcd}$$

且满足

1. 双分次映射f_r, g_r, h_r的度分别为$(1,-1), (1-r, r-1)$和$(-1,2)$.

2. 微分d_r的度为()，它由$hf_{-r+1}g$诱导.

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，$\mathcal{A}$上的谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$是一族$\mathcal{A}$中的对象和态射的全体$E=(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$，满足

1. 态射$d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$定义在第$r$页，且是微分映射，即$d_r^{p+r,q-r+1}\circ d_r^{p,q}=0$.

2. 有同构
$$H^{p,q}(E_r) := \frac{\mathrm{Ker}\ d_r^{p,q}}{\mathrm{Im}\ d_r^{p+r,q-r+1}} \cong E_{r+1}^{p,q}.$$

3 收敛性

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，X是$\mathcal{A}$的对象，Y是X的子对象，Z是Y的子对象，则Y/Z称为X的一个子商(subquotient).

若$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$是谱序列，那么$E_2 = H(E_2, d_2)$是E_1的子商：$E_2 := Z_2/B_2$.同理我们知道E_3是E_2的子商，且
$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots B_r \subseteq \cdots \subseteq Z_r \subseteq Z_2 \subseteq Z_1 \subseteq E_1.$$

定义. 给定谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$，定义$Z_\infty := \bigcap_{r\geq 1} Z_r$，$B_\infty := \bigcup_{r\geq 1} B_r$，则谱序列的极限项(limit term)为
$$E_\infty^{p,q} := \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q}}.$$

借用MacLane的描述，Z^r是出现到第r页的对象，B^r是被第r页限制的对象，而Z^∞和B^∞是一直出现和最终被限制的对象.

引理3.1. 设$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$是谱序列，那么

1. $E_{r+1} = E_r$当且仅当$Z_{r+1} = Z_r, B_{r+1} = B_r$.

2. 若存在s使得对任意$r \geq s$都有$E_{r+1} = E_r$，则$E_\infty = E_s$.

考虑$\mathcal{A}$中上链$X^\bullet$的一个滤子$F^pX^\bullet$，于是我们有单同态$i^p : F^pX^\bullet \to X^\bullet$，这诱导了$H^n(i^p) : H^n(F^pX^\bullet) \to H^n(X^\bullet)$.由于$F^pX^\bullet \subseteq F^{p-1}X^\bullet$，我们有$\mathrm{Im}\ H^n(i^p) \subseteq \mathrm{Im}\ H^n(i^{p-1}) \subseteq H^n(X^\bullet)$，这意味着

$$\Phi^p H^n(X^\bullet) := \mathrm{Im}\ H^n(i^p)$$

是$H^n(X^\bullet)$的一个滤子，称为$F^pX^\bullet$的诱导滤子(derived filtration).

定义. 设$X^\bullet$是Abel范畴$\mathcal{A}$上的上链，$F^pX^\bullet$是上链的滤子.若$\forall n \in \mathbb{Z}$都能找到整数$l(n)$和$u(n)$使得$F^{u(n)}X^n = 0$且$F^{l(n)}X^n = X^n$，则称滤子$F^pX^\bullet$是有界的(bounded).

定义. 给定Abel范畴中的谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$，若存在分次对象H^n和H^n的有界滤子Φ^pH^n满足

$$E_\infty^{p,q} \cong \frac{\Phi^p H^n}{\Phi^{p+1}H^n},$$

则称谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$收敛到(converges to)H^n，记为

$$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n.$$

定理3.1. *Abel范畴$\mathcal{A}$中的上链$X^\bullet$的滤子$F^pX^\bullet$给出的谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$都满足*

1. *对任意给定的p, q都存在r使得$E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.*
2. *$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$.*

Proof. □

命题3.2. *设$X^{\bullet\bullet}$是三象限双复形，且设${}^I E_r^{p,q}, {}^{II} E_r^{p,q}$是$\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet})$的第一滤子和第二滤子所诱导的谱序列，那么*

1. *第一滤子和第二滤子都是有界的.*
2. *对任意p, q都存在页数$r = r(p, q)$使得${}^I E_\infty^{p,q} = {}^I E_r^{p,q}, {}^{II} E_r^{p,q} = {}^{II} E_\infty^{p,q}$.*
3. *${}^I E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$且${}^{II} E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.*

虽然这个结果看上去很不错，但不论是符号上还是实际计算上这些都并不能够帮助我们.

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，称$H_I^p(H_{II}^q(X^{\bullet\bullet}))$为$X^{\bullet\bullet}$的第一上同调(the first iterated cohomology)，称$H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet}))$为$X^{\bullet\bullet}$的第二上同调(the second iterated cohomology).

定理3.3. 给定$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，则

1. ${}^IE_1^{p,q} = H_{II}^q(X^{p,\bullet})$.
2. ${}^IE_2^{p,q} = H_I^p(H_{II}^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.

对偶地，我们同样有

定理3.4. 给定$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，则

1. ${}^{II}E_1^{p,q} = H_I^q(X^{\bullet,p})$.
2. ${}^{II}E_2^{p,q} = H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.

例3. 给定R模范畴中的交换图

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & Q \\ {\scriptstyle h}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle k} \\ M & \xrightarrow{f} & N, \end{array}$$

做适当的变换我们得到一个三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，我们考虑N,P都是Q的子模的特殊情形，来计算该双复形的全复形

$$0 \to M \xrightarrow{()} P \oplus N \xrightarrow{g+k} Q$$

的上同调.

定义. 设$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$是Abel范畴中的谱序列，若$E_2^{p,q} = 0$对所有非零的q都成立，则称E_r落在p轴上(collapses on the p-axis).

命题3.5. 设$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$三象限谱序列，且$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$，若称$E_r$落在任意轴上，则

1. $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$对任意$p,q$成立.
2. 若E_r落在p轴上，则$H^n(X^\bullet) = E_2^{n,0}$；若$E_r$落在$q$轴上，则$H^n(X^\bullet) = E_2^{0,n}$.

定理3.6. 给定*Abel*范畴$\mathcal{A}$中的三象限谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$，且$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$，则

1. 对任意n都存在满同态$E_2^{n,0} \to E_\infty^{0,n}$和单同态$E_2^{0,n} \to E_\infty^{n,0}$.
2. 对任意n都存在满同态$E_\infty^{n,0} \to H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$和单同态$E_\infty^{0,n} \to H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.
3. 存在正合序列
$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet})) \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to H^2(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$$

4 Cartan-Eilenberg预解

定义. 设$X^\bullet$是Abel范畴$\mathcal{A}$上的上链，那么称

$$0 \to Z^n \to X^n \xrightarrow{d^n} B^{n+1} \to 0$$
$$0 \to B^n \hookrightarrow Z^n \to H^n \to 0$$

为$X^\bullet$的基本短正合列(fundamental exact sequence).若上链复形$X^\bullet$的基本短正合列都分裂，则称$X^\bullet$分裂(split).

定义. 设$X^\bullet$是Abel范畴$\mathcal{A}$上的上链，如果

$$0 \to X^\bullet \to I^{0,\bullet} \to I^{1,\bullet} \to \cdots$$

是整合列且对每个p以下每个整合列都是$\mathcal{A}$中的内射预解

$$0 \to X^p \to I^{0,p} \to I^{1,p} \to \cdots$$
$$0 \to Z^p(X^\bullet) \to Z^{0,p} \to Z^{1,p} \to \cdots$$
$$0 \to B^p(X^\bullet) \to B^{0,p} \to B^{1,p} \to \cdots$$
$$0 \to H^p(X^\bullet) \to H^{0,p} \to H^{1,p} \to \cdots$$

则称这是$X^\bullet$的一个Cartan-Eilenberg内射预解(Cartan-Eilenberg injective resolution).

定理4.1. 若*Abel*范畴$\mathcal{A}$中包含有足够多的内射对象，则$\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中的每个上链复形都有*Cartan-Eilenberg*内射预解.

5 Grothendieck谱序列

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，且含有足够多的内射对象，X是$\mathcal{A}$的对象，$F:\mathcal{A}\rightrightarrows\mathbf{Ab}$是加性函子.若$R^pF(X)=0$对于任意$p\geq 1$都成立，则称$X$是右$F$零调的(right F-acyclic).

定理5.1 (Grothendieck谱序列)**.** *设$F:\mathcal{A}\rightrightarrows\mathcal{B}, G:\mathcal{A}\rightrightarrows\mathcal{C}$是$Abel$范畴间的协变加性函子，且$\mathcal{B}$中包含足够多的内射对象，$F$将$\mathcal{A}$中的内射对象映为$\mathcal{B}$中的右$G$零调对象.那么对任意$\mathcal{A}$中的对象$X$，存在第一象限的收敛谱序列*

$$E_2^{p,q}:=(R^pG\circ R^qF)(X)\Rightarrow R^{p+q}(G\circ F)(X).$$

Proof. 选取X在$\mathcal{A}$中的一个内射预解

$$0\to X\to J^1\to J^2\to\cdots,$$

于是我们得到$\mathcal{B}$中的一个 □