余切复形

G.Li

在交换代数中，环同态 $\alpha : R \to A$ 的光滑性可以通过相对微分模 $\Omega_{A/R}$ 来描述，由于

$$\Omega_{-/R} : R - \textbf{Algebra} \to R - \textbf{Mod}$$

是一个函子，因而给定一个单纯 R 代数 A_*，都可以由这个函子得到一个单纯 R 模 $(\Omega_{A/R})_*$，且一个单纯 R 代数态射 $f : A_* \to B_*$ 也给出单纯 R 模态射 $(\Omega_{f/R})_*$.

定义. 给定环同态 $f : R \to S$，若 P_* 是 $s(S)_*$ 在 $s(R)_*$ 上的单纯消解，令

$$\mathcal{L}_{S/R} := \Omega_{P/R} \otimes_P s(S)_*,$$

于是 $\mathcal{L}_{S/R}$ 是一个单纯 $s(S)_*$ 模，称它对应的复形 $L_{S/R}$ 为 S 在 R 上的余切复形 (cotangent complex of S over R). 当 R 的特征是 0 时，单纯消解可以由 DG 消解代替，在实际情形中 DG 消解远比单纯消解容易计算.

由于单纯消解是同伦下唯一的，于是 $L_{S/R}$ 是良定义的.

练习 1. 设 $s(R)_* \hookrightarrow P_* \twoheadrightarrow s(S)_*$ 是一个单纯消解，令

$$I := \text{Ker } P_* \to s(S)_*,$$

证明存在单纯 $s(S)_*$ 模同构

$$I/I^2 \cong \mathcal{L}_{S/R}.$$

定义. 给定 R 代数 A 和 A 模 M，借助余切复形可以定义 André-Quillen 同调 (André-Quillen homology)（对应地，André-Quillen 上同调 (André-Quillen cohomology)）为

$$D_n(A/R, M) := H_n(L_{A/R} \otimes_S M)$$

（对应地，$D^n(A/R, M) := H_{-n}(\text{Hom}(L_{A/R}, M))$）.

例 1. 设 R 是交换环且 $S = R[x]$ 是以 x 为未定元的 R 多项式代数，那么

$$\mathcal{L}_{S/R} \simeq s(\Omega_{S/R})_*,$$

进而对任意 $n > 0$，$D^n(S/R, M) = D_n(S/R, M) = 0$.

取 $R \hookrightarrow R[x]$ 的单纯消解为 $R \hookrightarrow s(R[x])_* \to R[x]$，于是

$$\mathcal{L}_{S/R} := \Omega_{s(R[x])_*/R} \otimes_{s(R[x])_*} s(R[x])_* \cong s(\Omega_{S/R})_*.$$

考虑它对应的 $R[x]$ 模链为

$$0 \leftarrow \Omega_{R[x]/R} \xleftarrow{0} \Omega_{R[x]/R} \xleftarrow{1} \Omega_{R[x]/R} \xleftarrow{0} \Omega_{R[x]/R} \xleftarrow{1} \cdots,$$

于是 $L_{R[x]/R} \cong \Omega_{R[x]/R}[0]$.

例 2. 设 r 是交换环 R 的非零因子，$S:=R/(r)$. 取 $R\to S$ 的单纯消解为 Q_*，于是

$$\mathcal{L}_{S/R}:=\Omega_{Q_*/R}\otimes_{Q_*}s(R/(r))_*\simeq s(\Omega_{S/R})_*.$$

引理 1. *设 R 是交换环.*

1. *若 P 是投射 R 模，那么扩张*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Sym}_R(P)/R}\to s(\Omega_{\mathrm{Sym}_R(P)/R})_*$$

是弱等价.

2. *若 A,B 是 R 代数，且 A,B 中至少一个是 R 平坦的，那么*

$$s(A\otimes_R B)_*\otimes_{s(A)_*}\mathcal{L}_{A/R}\oplus s(A\otimes_R B)_*\otimes_{s(B)_*}\mathcal{L}_{B/R}\to\mathcal{L}_{s(A\otimes_R B)_*/R}$$

是 $s(A\otimes_R B)_*$ 模同构.

命题 1 (基变换)**.** *设 R 是交换环，A 是 R 代数，$f:R\to S$ 是交换环间的态射，因此有*

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A\otimes_R S, \end{array}$$

这诱导了单纯 $s(A\otimes_R S)_*$ 模同态

$$\mathcal{L}_{A/R}\otimes_{s(A)_*}s(A\otimes_R S)_*\to\mathcal{L}_{A\otimes_R S/S}.$$

定理 2 (平坦基变换)**.** *如定理1中的条件，若 f,α 中任意一个是平坦的，则定理1中诱导的同态是弱等价.*

定理 3. *设 $R\to S\to T$ 是交换环的映射，那么*

$$s(T)_*\otimes\mathcal{L}_{S/R}\to\mathcal{L}_{T/R}\to\mathcal{L}_{T/S}$$

是单纯 $s(T)_*$ 模的余纤维序列，于是对任意的 T 模 P，存在 T 模长正合序列

$$\cdots\to D_1(S/R,M)\to D_1(T/R,M)\to D_1(T/S,M)\to P\otimes_T\Omega_{S/R}\to P\otimes_T\Omega_{T/R}\to P\otimes_T\Omega_{T/S}\to 0,$$

特别地，当 $M=T$ 时，这个序列是相对余切序列的延申.

定理 4. *交换环的态射 $f:R\to S$ 是光滑的当且仅当 $L_{S/R}\to\Omega_{S/R}$ 是弱等价且 $\Omega_{S/R}$ 是投射 S 模. 特别地，f 是平展的当且仅当 $L_{S/R}$ 只有平凡上同调.*

定理 5 (第一消去定理)**.**

以上的三个定理证明都需要用到模型范畴，我们略过.

除此之外，我们还有一种对余切复形更加范畴化的构造方式，它来源于 Quillen. 定理3告诉我们，$L_{A/R}$ 事实上是 $\Omega_{A/R}$ 的导出函子，但在之前的构造我们并没有用同调代数中已经存在的结果，这主要的原因是范畴 $R-\textbf{Algebra}$ 不是一个 Abel 范畴（原因：一个 R 代数同态 $f:A\to B$ 没有核）.Quillen 的想法是将这个范畴“Abel 化”，这就是在后面讨论的内容. 引理3在另一方面说明范畴 $R-\textbf{Algebra}$ 不是合适的范畴.

我们尝试用两个例子说明这样的考虑是合适的：考虑 Y 是一个拓扑空间，X 是它的 CW 逼近. 令 $\mathrm{Ab}(X)$ 是 X 上的自由拓扑 Abel 群，那么 Dold-Thom 定理说明

$$\pi_*(\mathrm{Ab}(X)) \cong H_*(X) \cong H_*(Y).$$

注意到我们在求 $\mathrm{Ab}(-)$ 之前必须要找一个 CW 逼近，用模型范畴的语言来说，这是一个余纤维替代 (cofibrant replacement). 所以我们可以把奇异复形看作 $\mathrm{Ab}(-)$ 的导出函子. 另一个例子来源于单纯代数的同伦群，Dold-Kan 对应说明一个单纯代数 A_* 的同伦群与它的 Abel 化的同调群是一样的. 这里我们不需要取余纤维替代，只是因为单纯代数的范畴中所有的对象都是余纤维.

定义. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，若 $\mathcal{C}$ 中的对象 A 满足函子 $\hom_{\mathcal{C}}(-,A) : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ 可以分解为

$$\mathcal{C} \to \mathbf{Ab} \xrightarrow{U} \mathbf{Set},$$

则称 A 是 Abel 群对象 (abelian group object). 对 Abel 群对象 A, B，态射 $f : A \to B$ 若满足对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 C，映射

$$\hom_{\mathcal{C}}(C, f) : \hom_{\mathcal{C}}(C, A) \to \hom_{\mathcal{C}}(C, B)$$

都是群同态，则称 f 是 Abel 群对象态射 (a morphism of abelian group objects).

对范畴 $\mathcal{C}$ 记它的 Abel 群对象和 Abel 群对象态射组成的范畴为 $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$.

引理 2. *对任意范畴 $\mathcal{C}$,*

$$s(\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}) \simeq (s\mathcal{C})_{\mathrm{ab}}.$$

练习 2. 设范畴的嵌入 $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 有左伴随 $\mathrm{Ab} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$，那么嵌入 $s\mathcal{C}_{\mathrm{ab}} \hookrightarrow s\mathcal{C}$ 也有左伴随，在每一层都是 Ab.

定义. 设 $\mathcal{C}$ 是一个模型范畴，且 $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ 上也有模型范畴结构，满足 $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 是右 Quillen 伴随，有左 Quillen 伴随 $\mathrm{Ab} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$，称为 Abel 化 (abelianisation).

引理 3. *$R-\mathbf{Algebra}$ 中的 Abel 群对象只有零代数.*

设 R 是给定的交换环，A 是给定的 R 代数，接下来我们的讨论都限定在范畴 $R-\mathbf{Algebra}/A$ 中，即所有的 R 代数映射 $f : B \to$ 的全体. 考虑函子

$$\begin{aligned} \ltimes : A - \mathbf{Mod} &\to R - \mathbf{Algebra}/A \\ M &\mapsto A \ltimes M, \end{aligned}$$

其中，$A \ltimes M$ 作为 A 模是 $A \oplus M$，且乘法满足

$$(a, m) \cdot (b, n) := (ab, an + bm).$$

命题 6. *函子 $\ltimes : A-\mathbf{Mod} \to R-\mathbf{Algebra}/A$ 有分解 $A-\mathbf{Mod} \to (R-\mathbf{Algebra}/A)_{\mathrm{ab}} \hookrightarrow R-\mathbf{Algebra}/A$，并且给出了范畴的等价*

$$A-\mathbf{Mod} \simeq (R-\mathbf{Algebra}/A)_{\mathrm{ab}}.$$

证明. □

定理 7.

$$\Omega_{-/R}\otimes_{-} A : R-\mathbf{Algebra}/A \leftrightarrows A-\mathbf{Mod} : \ltimes$$

是一对伴随函子.

于是根据练习2，这个伴随可以扩张到

$$s(R-\mathbf{Algebra}/A) \leftrightarrows s(A-\mathbf{Mod}).$$

在给定两个范畴正确的模型范畴结构后，可以证明

引理 4. *上述提到的左右伴随函子都是 Quillen 伴随.*

定义. 余切复形函子是全左导出函子

$$\mathcal{L}\mathrm{Ab} : D(s(R-\mathbf{Algebra}/A)) \to D(s(A-\mathbf{Mod})).$$

R 代数 A 的余切复形是

$$\mathcal{L}_{A/R} := \mathcal{L}\mathrm{Ab}(s(A)_*).$$

1　一些计算

余切复形的计算是非常困难的，这其中最根本的原因在于单纯预解是非常大的，里面包含了非常多的信息. 当环的特征为 0 时，DG 消解会极大地减少计算量.

例 3. 设 $f\in k[x_1,\cdots,x_n]$ 是多项式，$X=\mathrm{Spec}\ k[x_1,\cdots,x_n]/(f)=\mathrm{Spec}\ R$ 是超平面. 那么 R 有 DG 消解

$$R[y]=k[x_1,\cdots,x_n,y]$$

其中 $\deg x_i=0,\deg y=-1$，微分映射满足 $d(y)=f$. 于是存在序列

$$0\to k[x_1,\cdots,x_n]\cdot y\xrightarrow{d} k[x_1,\cdots,x_n]\to 0,$$

将函子 $\Omega_{-/k}$ 作用在以上序列得到余切序列

$$0\to k[x_1,\cdots,x_n]\cdot dy\xrightarrow{D}\bigoplus_{i=1}^{n} k[x_1,\cdots,x_n]dx_i\to 0, \tag{1}$$

其中 D 将 dy 映到 $D(dy)=dd(y)=df=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i$，基变换后得到

$$0\to A\cdot dy\xrightarrow{D}\bigoplus_{i=1}^{n} Adx_i\to 0,$$

于是我们得到了 X 的余切复形，其中

$$L^0_{X/k}=\bigoplus_{i=1}^{n} Adx_i/(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}dx_i)=\Omega_{X/k},$$

若 f 是不可约多项式，那么 $d:A\cdot dy\to A$ 是单射，进而 $D:A\cdot dy\to\bigoplus_{i=1}^{n}Adx_i$ 也是单射，

这里对余切序列 (1) 多做一点解释，事实上 $P=R[y]$ 并不是真正意义上自由的，它只是 DG 代数范畴中的自由对象——变量 y 满足关系 $y^2=0$，因此 $\Omega_{P/k}$ 中存在关系 $ydy=0$，故 DG 阶数为 -1 的直和项如上所示.

例 4. 设 k 是一个域，$k[\epsilon]=k[x]/(x^2)$ 且 $k[\epsilon]\to k$ 是一阶加厚，那么我们有正合列

$$0\to(\epsilon)\to k[\epsilon]\to k\to 0.$$

根据前面的结果，

$$0\to k[x]\cdot y\xrightarrow{d} k[x]\to 0$$

是单纯消解，其中 $d(y)=x^2$，那么 $k[\epsilon]$ 的余切复形为

$$0\to k[\epsilon]\cdot dy\xrightarrow{D} k[\epsilon]dx\to 0$$

满足 $D(dy)=2\epsilon d\epsilon$. 于是，$L^1=(\epsilon)=(x)/(x^2)$.

设 R 是交换环且 M 是 R 模，若元素 $x_1,\cdots,x_n\in M$ 满足 $(x_1,\cdots,x_n)M\neq M$，且对任意 $1\leq i\leq n$，x_i 都是 $M/(x_1,\cdots,x_i)M$ 的非零因子，则称 $x_1,\cdots,x_n$ 是正则序列 (regular sequence). 给定的 Noether 环同态 $f:R\to S$，若 f 是满射且 Ker f 被一组正则序列生成，则称 f 是完全交 (complete intersection). 若对 S 中的任意素理想 $\mathfrak{q}$，诱导同态 $f_{\mathfrak{q}}:R_{\mathfrak{q}\cap R}\to S_{\mathfrak{q}}$ 都是完全交，则称 f 是局部完全交 (locally complete intersection).

对于概型的态射 $f:X\to Y$，若存在开覆盖 $\{U_i\}_{i\in I}$，在每个仿射局部分解

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[dr, "f"'] & U \arrow[d] \\ & Y, \end{tikzcd}$$

使得

2　形变理论

定义 (Tag 04EW). 1. 给定概型 Y，若概型 $X\to Y$ 是闭子概型且 X 与 Y 有相同的底空间 (underlying space)，则称 Y 是 X 的加厚 (thickening).

2. 若 Y 是 X 的加厚，且 $X\hookrightarrow Y$ 的定义理想层 $\mathscr{I}$ 满足 $\mathscr{I}^2=0$，则称 Y 是 X 的一阶加厚 (first order thickening).

3. 给定两个加厚 $X\hookrightarrow Y, Z\hookrightarrow W$，若态射 $f:Y\to W$ 满足 $f|_X$ 是态射 $X\to Z$，则称 $(f,f|_X):(X\subseteq Y)\to(Z\subseteq W)$ 是加厚的态射 (morphism of thickings).

4. 类似地可以定义 S 上的概型的加厚和加厚的态射，这只要把以上定义中的概型和映射换为 $\mathbf{Sch}_{/S}$ 中的对象和映射即可.

引理 5.

定义. 设 $S\hookrightarrow T$ 是一阶加厚，且 $f:X\to S$ 是概型的态射. 若 X 的一阶加厚 X' 满足存在平坦态射 $g:X'\to T$ 使得图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, dashed] \arrow[d, "f"'] & X' \arrow[d, dashed, "g"] \\ S \arrow[r, hook] & T, \end{tikzcd}$$

交换且是拉回，则称 X' 是 X 的形变 (deformation).

练习 3 (Tag 08KY). 记 $\mathscr{I}, \mathscr{J}$ 分别是一阶加厚 $S \hookrightarrow T$ 和 $X \hookrightarrow X'$ 的定义层，那么存在自然的 $\mathscr{O}_X$ 模态射 $f^*\mathscr{I} \to \mathscr{J}$. 求证态射 $f^*\mathscr{I} \to \mathscr{J}$ 是满态射当且仅当定义中的交换图是拉回，且在此情况下，$f^*\mathscr{I} \to \mathscr{J}$ 是同构当且仅当 g 是平坦的.

定理 8 (Tag 08UX)**.** *设 $S \hookrightarrow T$ 是由 $\mathscr{I}$ 定义的一阶加厚，$f : X \to S$ 是概型的态射.*

1. 存在自然的元素 $o(f) \in \mathrm{Ext}^2_X(L_{X/S}, f^*\mathscr{I})$，满足形变存在当且仅当 $o(f) = 0$.

元素 $o(f)$ 被称为 (obstruction class).

3 Lichtenbaum-Schlessinger 构造

历史上对余切复形的构造最初并不是如前描述的. 在 Lichtenbaum-Schlessinger 中，余切复形是这样构造的：对于环同态 $R \to S$，选定正合序列

$$0 \to E_2 \xrightarrow{e_2} E_1 \xrightarrow{e_1} E_0 \xrightarrow{e_0} S \to 0$$

满足 $e_0 : E_0 \to S$ 是环的满同态，e_2, e_1 是 E_0 模同态，且对任意 $x, y \in E_1$ 满足

$$e_1(x)y - xe_1(y) = 0.$$

注意此时 E_2 是一个 S 模，取 $a \in I := \mathrm{Ker}\ E_0 \to S$，$z \in E_2$，根据正合性存在 $x \in E_1$ 满足 $e_1(x) = a$，于是

$$e_2(az) = ae_2(z) = e_1(x)e_2(z) = xe_1(e_2(z)) = 0,$$

注意到 e_2 是单射，于是 $IE_2 = 0$.

这样就诱导了一个 3 项 S 模复形

$$0 \to E_2 = E_2 \otimes_{E_0} S \xrightarrow{d_2} E_1 \otimes_{E_0} S \xrightarrow{d_1} \Omega_{E_0/R} \otimes_{E_0} S \to 0,$$

其中 $d_2 := e_2 \otimes \mathrm{id}_S$，注意到 $\mathrm{Im}\ e_1 = I$，且有同态 $d : I/I^2 \to \Omega_{E_0/R} \otimes_{E_0} S$，$d_1$ 取 $d \circ (e_1 \otimes_{E_0} \mathrm{id})$.