交换代数

G.Li

第零章　从几何开始

练习0.1. 设I是交换环R的理想，M是R模，定义

$$\Gamma_I(M) = \{x \in M \mid I^n x = 0,\ \exists n \in \mathbb{N}\}.$$

求证：R的两个理想I, J满足对任意R模M，$\Gamma_I(M) = \Gamma_J(M)$当且仅当$\sqrt{I} = \sqrt{J}$.

$$\Gamma_I(M) = \varinjlim \mathrm{Hom}_R(R/I^t, M).$$

Proof. 必要性：令$M = R/I$，于是$M = \Gamma_I(M) = \Gamma_J(M)$，即对任意$r \in R$，$J^n r \subseteq I$.取$r = 1$得到$J^n \subseteq I$，两边取根理想得到$\sqrt{J} \subseteq \sqrt{I}$.同理可得另一方向.

任取$x \in \Gamma_I(M)$，可知存在自然数n满足$I^n x = 0$.又由于$\sqrt{I} = \sqrt{J}$，存在自然数m满足$J^m \subseteq I$，于是$J^{mn} x = 0$，即$x \in \Gamma_J(M)$. □

0.1　习题

练习0.2. 设k是域，$M_n(k)$是$n \times n$以k为系数矩阵的全体，作为仿射空间$M_n(k) \cong \mathbb{A}_k^{n^2}$.

1. 证明$GL_n(k) \subseteq M_n(k)$是Zariski开的.
2. 根据上面的结论证明$GL_n(k)$不是$M_n(k)$中的代数集.
3. 证明$GL_n(k)$是$\mathbb{A}_k^{n^2+1}$中的代数集.
4. 当$k = \mathbb{C}$时，证明

$$U_n(\mathbb{C}) := \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid AA^* = I\}$$

不是$\mathbb{A}_{\mathbb{C}}^{n^2}$中的代数集，但它是$\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^{4n^2}$中的代数集.

练习0.3. 求证$M_n(k)$中所有秩不大于给定整数$1 \leq r \leq n$的矩阵组成代数集，这个代数集称为行列式代数簇(determinantal variety).[考虑所有$(k+1) \times (k+1)$子矩阵的行列式.]

练习0.4. 求证$\mathbb{A}^2$的Zariski拓扑不同于$\mathbb{A} \times \mathbb{A}$的乘积拓扑.[考虑对角线.]

练习0.5.
1. 证明$\mathbb{A}_k^n$中的代数集都是有限个超平面的交；
2. 证明$\mathbb{A}_k^n$中的超平面的定义方程是某个不可约多项式的方幂.
3. 证明代数集上的Zariski拓扑是紧的.

练习0.6. 证明$\mathbb{A}_k^n$中的集合$D(f) :=$是$\mathbb{A}_k^{n+1}$中的代数集.

练习0.7. 求证平面$\mathbb{A}_k^2$中的曲线具有余有限拓扑.注意，这并不意味着平面曲线与$\mathbb{A}^1$同构.

Proof. 设$C := V(p(x,y)) \subseteq \mathbb{A}^2$是曲线，其中$p(x,y)$是不可约理想，那么只要证明$C$中的任意闭集都是有限的即可.

取C中的闭集$C \cap V(f_1,\cdots,f_n)$，其中$f_1,\cdots,f_n \in k[x,y]$.注意到$V(f_1,\cdots,f_n) \subseteq V(f_i)$，因而只需要证明$C \cap V(f_i) = V(p) \cap V(f_i) = V(p(x,y), f_i(x,y))$是有限集即可.考虑

$$f_i(x,y) = f_{i,0}(x) + f_{i,1}(x)y + \cdots + f_{i,d}(x)y^d,$$

作为y的多项式在$\overline{\mathrm{Frac}(k[x])}$中有全部的解$g_1(x),\cdots,g_d(x)$.由于$g_1(x),\cdots,g_d(x)$在$\mathrm{Frac}(k[x])$上是代数的 $\square$

练习0.8. 证明仿射代数簇是quasi-compact的.

练习0.9. 证明仿射代数簇是有限维的.

练习0.10. 设$f: V \to W$是代数簇间的满态射，证明$\dim V \geq \dim W$，进而证明维数是代数簇的同构不变量.

练习0.11. 设$f: V \to W$是代数簇间的态射，证明f是Zariski连续的.

练习0.12. 设V是代数闭域k上的代数簇，求证坐标环$k(V)$是有限生成的约化环.

练习0.13. 证明Spec R是quasi-compact的.

练习0.14. 证明Spec R中的点$\mathfrak{p}$是闭的当且仅当$\mathfrak{p}$是极大理想.

练习0.15. 考虑Spec $\mathbb{Z}$中的点(0)，证明它的闭包是Spec $\mathbb{Z}$.

第一章　链条件

1.1　分次环

设S是一个分次环，那么由齐次元素生成的理想I成为齐次理想(homogeneous ideal).
分次环S中的理想I是齐次理想当且仅当

$$I = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} I \cap S_n.$$

第二章　局部化

练习2.1. 设交换环R的零理想是有限多个极小素理想的交，即$(0)=\bigcap_{i=1}^n \mathfrak{p}_i$，设$U$是所有不被$\mathfrak{p}_i$包含的元素的全体，证明$R[U^{-1}]=\prod_{i=1}^n \mathrm{Frac}(R/\mathfrak{p}_i)$.

Proof. 由$\mathfrak{p}_i$的极小性，$\mathfrak{m}_i := R[U^{-1}]\mathfrak{p}_i, i=1,\cdots,n$是$R[U^{-1}]$中仅有的素理想，并且$\mathfrak{m}_i \cap R = \mathfrak{p}_i$. □

练习2.2. 证明局部化和取幂零理想可交换.

练习2.3. 设M是一个有限表现的R模，A是一个平坦R代数，那么对任意R模N，有A模的同构

$$\mathrm{Hom}_R(M,N)\otimes_R A \cong \mathrm{Hom}_A(M\otimes_R A, N\otimes_R A).$$

第三章　微分和光滑性

定义. 设R是交换环，A是R代数且M是A模.若Abel群同态$d: A \to M$满足如下Leibniz法则

$$d(fg) = fd(g) + d(f)g$$

对任意$f, g \in A$都成立，则称d为一个微分(derivation).若$d: A \to M$还是R模同态，则称d是R线性的(R-linear).我们将所有的R线性微分$A \to M$记为$\mathrm{Der}_R(A, M)$.

对于任意R-线性微分$d \in \mathrm{Der}_R(A, M)$，Leibnitz法则说明

$$d(1) = d(1 \cdot 1) = 1d(1) + d(1)1,$$

于是$d(1) = 0$.再根据R线性性，对任意R中的元素r，$d(r) = rd(1) = 0$.这也符合“常值函数的微分为零”的直觉.很容易看出，$\mathrm{Der}_R(A, M)$有自然的A模结构，于是也有R模结构.

虽然R-线性微分是值得研究的，但我们希望完全用A模同态来描述所有的微分.之前有过相同的处理方式：对于所有的R双线性映射，我们构造了具有一定泛性质的R模——张量积，在这里我们同样可以构造A模使得所有的R-线性微分被A模同态对应.

定义. 设R是交换环，A是R代数，那么由$\{d(f) \mid f \in A\}$生成的A模，模去对任意$f, g \in A, r, s \in R$

$$d(fg) - fd(g) - d(f)g \quad \text{(Leibnitz)}$$
$$d(rf + sg) - rd(f) - sd(g) \quad (R\text{-linearity})$$

生成的理想，得到的A模称为R线性的A-Kähler微分模(the module of Kähler differentials of A over R)，记为$\Omega_{A/R}$.R线性映射

$$\begin{aligned} d: A &\to \Omega_{A/R} \\ f &\mapsto d(f) \end{aligned}$$

称为泛R微分(universal R-linear derivation).通常，我们记$df = d(f)$.

类似于张量积，$\Omega_{A/R}$满足如下泛性质：

引理3.1. 设R是交换环，A是R代数，微分模$\Omega_{A/R}$使得对任意微分$D : A \to M$，都存在唯一的A线性映射$\varphi : \Omega_{A/R} \to M$使得

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d"] \arrow[dr, "D"'] & \Omega_{A/R} \arrow[d, "\varphi"] \\ & M \end{tikzcd}$$

交换.

Proof. 首先证明唯一性.对任意$\Omega_{A/R}$中的元素$\sum_{i=1}^n a_i df_i$，根据φ的线性性

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i df_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi(df_i).$$

但图的交换性说明$df_i = D(f_i)$，故

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i df_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i D(f_i).$$

这意味着φ的取值是固定的.

再证明存在性.我们定义

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^n a_i df_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i D(f_i),$$

于是需要验证(i)φ是良定义的；(ii)φ关于图是交换的.后一条根据定义是显然的，前一条因为使得D是R线性微分的关系恰好由Leibnitz等式和R线性性生成，故良定义. □

$\Omega_{A/R}$的泛性质等价于存在自然的同构

$$\mathrm{Der}_R(A, M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M),$$

自然的意义是通过态射替换A与M诱导了相应的交换图，具体来说，对任意R代数映射$\varphi : B \to A$，下图

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Der}_R(A, M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) \arrow[d] \\ \mathrm{Der}_R(B, M) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_B(\Omega_{B/R}, M) \end{tikzcd}$$

交换且对任意A模同态$\psi : M \to N$，下图

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Der}_R(A, M) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M) \arrow[d] \\ \mathrm{Der}_R(A, N) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A/R}, N) \end{tikzcd}$$

交换.

命题3.1. 若R是交换环且$A := R[x_1, \cdots, x_n]$，那么$\Omega_{A/R} = \bigoplus_{i=1}^n Adx_i$.

Proof. 我们构造两个互逆的A模同态，来说明二者同构.首先，我们有显然的映射

$$\begin{aligned}\varphi : \bigoplus_{i=1}^n Adx_i &\to \Omega_{A/R}\\ \sum_{i=1}^n a_i dx_i &\mapsto \sum_{i=1}^n a_i dx_i.\end{aligned}$$

另一方面，由dx_i的对偶基底诱导的线性函数给出了A的R线性微分$\frac{\partial}{\partial x_i}$，令

$$\begin{aligned}\psi : \Omega_{A/R} &\to \bigoplus_{i=1}^n Adx_i\\ h &\mapsto \begin{bmatrix}\frac{\partial h}{\partial x_1}\\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_n}\end{bmatrix},\end{aligned}$$

容易验证φ与ψ互为逆映射，故命题成立. □

此外，$\Omega_{A/R}$本身关于A和R都是函子：给定R代数态射$\varphi : A \to B$，那么我们有诱导的R模态射

$$\begin{aligned}\Omega_{\varphi/R} : \Omega_{A/R} &\to \Omega_{B/R}\\ df &\mapsto d\varphi(f),\end{aligned}$$

事实上，由于B是A模，这个态射也是A模态射.另一方面，若$R \xrightarrow{\varphi} S \xrightarrow{\psi} T$是环态射，那么也有态射

$$\begin{aligned}\Omega_{T/\varphi} : \Omega_{T/R} &\to \Omega_{T/S}\\ dh &\mapsto dh,\end{aligned}$$

这是一个T模态射.考虑到$\Omega_{T/R}$和$\Omega_{T/S}$的定义，它们的生成元是相同的，且$\Omega_{T/\varphi}$把生成元映到生成元，于是这是一个满态射，但一般而言这不是一个单态射，于是我们自然地希望知道这个映射的核.我们考虑这个态射不是单态射的原因：两个模拥有相同的生成元，Leibnitz法则也是一样的，但$\Omega_{T/R}$需要模掉R线性关系，$\Omega_{T/S}$需要模掉S线性关系，因此出现了差别.模同态$\Omega_{T/\varphi}$把R线性关系映为S线性关系，但是存在一些S线性关系不能成为R线性关系，于是这些关系就生成了$\Omega_{T/\varphi}$的核.

任取$\sum_{i=1}^n t_i df_i \in \Omega_{T/R}$，若它不为0但被映为$\Omega_{T/S}$中的0，那么存在

命题3.2 (相对余切序列(Relative Cotangent Sequence))**.** 若$R \to S \to T$是交换环态射，那么有T模正合序列

$$T \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S} \to 0$$

其中映射$\Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S}$将$dh$映到$dh$，映射$T \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{T/R}$是系数变换，即将$t \otimes dg$映到$td\psi(g)$.

在上同调理论中，我们

命题3.3 (余法序列(Conormal Sequence)). 若$\varphi: A \to B$是R模满态射，且具有核I，那么有B模正合序列

$$I/I^2 \xrightarrow{d} B \otimes_A \Omega_{A/R} \xrightarrow{D\varphi} \Omega_{B/R} \to 0$$

其中映射$I/I^2 \xrightarrow{d} B \otimes_A \Omega_{A/R}$将$f$的等价类映到$df$，映射$B \otimes_A \Omega_{A/R} \xrightarrow{D\varphi} \Omega_{B/R}$将$g \otimes df$映到$gdf$.

Proof. □

设$A = R[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_r)$是给定的$R$代数，那么余法序列告诉我们

$$\Omega_{A/R} = \mathrm{coker}(d: I/I^2 \to A \otimes_R \Omega_{R[x_1,\cdots,x_n]/R} = \bigoplus_{i=1}^{n} Adx_i).$$

命题3.4. 微分模的构造与基变换交换，即给定交换环R和R代数S, A，存在同构$\varphi: S \otimes_R \Omega_{A/R} \cong \Omega_{S \otimes_R A/R}$使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
S \otimes_R A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes d"'] \arrow[dr, "d"] & \\
S \otimes_R \Omega_{A/R} \arrow[r, "\varphi"] & \Omega_{S \otimes_R A/R}.
\end{tikzcd}$$

命题3.5. 微分模的构造与基变换交换，即给定交换环R和R代数S, A，存在同构$\varphi: S \otimes_R \Omega_{A/R} \cong \Omega_{S \otimes_R A/R}$使得下图交换：

$$\begin{tikzcd}
S \otimes_R A \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes d"'] \arrow[dr, "d"] & \\
S \otimes_R \Omega_{A/R} \arrow[r, "\varphi"] & \Omega_{S \otimes_R A/R}.
\end{tikzcd}$$

定理3.6 (Jacobi判别法). 设k是给定的域，$I = (f_1, \cdots, f_r)$是$k[x_1, \cdots, x_n]$中的理想，$R := k[x_1, \cdots, x_n]/I$.若$\mathfrak{p}$是$k[x_1, \cdots, x_n]$中包含$I$的素理想，$c$是$I_{\mathfrak{p}}$在$R_{\mathfrak{p}}$中的余维数，那么

1. *Jacobi*矩阵在模$\mathfrak{p}$的意义下秩小于c.

2. 。。。

在微分几何当中，我们有自然引入的光滑性概念.但是在代数几何当中，光滑性的概念并不是自然存在的——我们所研究的几何空间可能存在奇点，因而需要重新引入光滑性的概念.一个问题在于同于微分几何的定义，在有足够的工具之前我们只能定义局部的光滑性，而微分模给出了光滑性本质的刻画.

定义. 设R,S是交换环，$f:R\to S$是环同态.如果对任意的交换环T和T的满足$I^2=0$的理想I，只要下图

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[d] & S \arrow[d] \arrow[dl, dashed] \\ T \arrow[r] & T/I. \end{tikzcd}$$

交换，就有至少一个（对应的，最多一个，恰有一个）环同态$S\to T$使得整个图是交换的，则称f是形式光滑的(formally smooth)（对应的，形式不分叉的(formally unramified)和形式平展的(formally étale)）.

引理3.2. *环同态$f:R\to S$是形式不分叉的当且仅当$\Omega_{S/R}=0$.*

引理3.3. *设环$B:=R[x_1,\cdots,x_n]/(f_1,\cdots,f_r)$，记$A:=R[x_1,\cdots,x_n]$，$I:=(f_1,\cdots,f_r)$.于是$f:R\to T$是光滑的当且仅当*

$$0\to I/I^2\xrightarrow{d}B\otimes_A\Omega_{A/R}\xrightarrow{D\pi}\Omega_{B/R}\to 0$$

是分裂正合的.

练习3.1. 设k是域，R是有限生成的k代数，证明若$\Omega_{R/k}=0$，那么R中无幂零元.

Proof. 设$R=k[x_1,\cdots,x_n]/(f_1,\cdots,f_r)$，对$r$用归纳法证明命题.

当$r=1$时，根据conormal sequence

$$(f_1)/(f_1)^2\xrightarrow{d}\Omega_{k[x_1,\cdots,x_n]/k}\otimes_{k[x_1,\cdots,x_n]}R\to\Omega_{R/k}\to 0$$

是正合列.注意到

$$\Omega_{k[x_1,\cdots,x_n]/k}\otimes_{k[x_1,\cdots,x_n]}R\cong\bigoplus_{i=1}^n Rdx_i,$$

于是

$$\begin{aligned} d:(f_1)/(f_1)^2&\to\Omega_{k[x_1,\cdots,x_n]/k}\otimes_{k[x_1,\cdots,x_n]}R\\ f&\mapsto df, \end{aligned}$$

$\Omega_{R/k}=0$意味着d是满射.若R中存在非平凡幂零元g，那么存在$h\in k[x_1,\cdots,x_n]$使得$f_1=g^2h$，那么$df_1=2ghdg+g^2dh$，即$g\mid df_1$，于是d是满射意味着$\deg g=0$，矛盾.

假设完成了对r的证明，考虑$r+1$.依旧记$R=k[x_1,\cdots,x_n]/(f_1,\cdots,f_r)$，$S=k[x_1,\cdots,x_n]/(f_1,\cdots,f_r,f_{r+1})=R/(f_{r+1})$，因而有自然的映射$R\twoheadrightarrow S$.再次用conormal sequence

$$(f_{r+1})/(f_{r+1})^2\xrightarrow{d}\Omega_{R/k}\otimes_R S\to\Omega_{S/k}\to 0$$

$$I/I^2\xrightarrow{d}\Omega_{F/k}\otimes_F R\to\Omega_{R/k}\to 0$$

$$I/I^2\xrightarrow{d}\Omega_{F/(f_{r+1})/k}\otimes_{F/(f_{r+1})} S\to\Omega_{S/k}\to 0$$

□

3.1 Koszul复形

正则序列是非零因子的推广.

定义. 设R是交换环且M是R模，若元素$x_1,\cdots,x_n\in M$满足

1. $(x_1,\cdots,x_n)M\neq M$，且
2. 对任意$1\le i\le n$，x_i都是$M/(x_1,\cdots,x_i)M$的非零因子，

则称$x_1,\cdots,x_n$是正则序列(regular sequence)或M序列(M-sequence).

考虑上链序列

$$K(x):0\to R\xrightarrow{x}R\to 0,$$

注意到$H^{-1}(K(x))=(0:x):=\{r\in R\mid xr=0\}$，于是对$H^{-1}(K(x))$的计算可以告诉我们$x$是否是零因子.

考虑另一个R中的元素y，它给出了链映射

$$\begin{tikzcd} K(x): & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "x"] \arrow[d, "y"'] & R \arrow[r] \arrow[d, "y"] & 0 \\ K(x): & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "x"] & R \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

这样我们可以构造一个更大的链

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "-x"] \arrow[dr, "y"] & R \arrow[r] \arrow[dr, "y"] \arrow[d, phantom, "\oplus"] & 0 & \\ K(x,y): & & 0 \arrow[r] & R \arrow[r, "x"] & R \arrow[r] & 0, \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

或者更简洁地写为

$$K(x,y):0\to R\xrightarrow{\begin{bmatrix}-x\\ y\end{bmatrix}}R\oplus R\xrightarrow{\begin{bmatrix}y & x\end{bmatrix}}R\to 0.$$

如同对前一个例子的分析，我们尝试计算该上链的上同调.由定义，

$$H^{-2}(K(x,y))=\{r\in R\mid -xr=yr=0\}=(0:(x,y)),$$

于是x是非零因子当且仅当$H^{-2}(K(x,y))=0$.

对于$H^{-1}(K(x,y))$，首先$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \in R\oplus R$当且仅当$xs+yr=0$，于是这意味着$r\in(x:y)$，反过来，若$r\in(x:y)$，那么一定存在一个$s\in R$使得$xs+yr=0$——但可能存在不同的$s$使得条件成立；如果还假设$x$是非零因子，那么$s$就唯一地由$r$确定，此时$Z^{-1}(K(x,y))\cong(x:y)$.

另一方面，$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in R\oplus R$若是$B^{-1}(K(x,y))$中的元素，则存在$r\in R$使得$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -rx \\ ry \end{bmatrix}$，如果继续假设$x$是非零因子，那么给定$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$就唯一确定了$r$使得$-rx=a$，此时$B^{-1}(K(x,y))=(x)$.于是$H^{-1}(K(x,y))=(x:y)/(x)$.这样，当$H^{-2}(K(x,y))=0$时，$H^{-1}(K(x,y))=0$当且仅当所有满足$ry\in(x)$的元素$r$都是$(x)$中的元素，即$y$是$R/(x)$的非零元素.简言之，复形$K(x,y)$的上同调刻画了序列$(x,y)$的正则性.

在定义一般的Koszul复形之前，我们再对复形$K(x,y)$进行进一步的分析.图**??**说明存在如下正合列

$$0\to K(x)[-1]\to K(x,y)\to K(x)\to 0,$$

于是这诱导了长正合序列

$$H^{-2}(K(x)[-1])=H^{-3}(K(x))\longrightarrow H^{-2}(K(x,y))\longrightarrow H^{-2}(K(x))H^{-1}(K(x)[-1])=H^{-2}(K(x))\longrightarrow H^{-1}(K(x,y)$$

其中δ是连接同态.可以证明态射δ是左乘y，这因为

定义. 给定交换环R和R模M，$x\in M$是元素，那么如下复形

$$K(x):0\to R\to M\to\wedge^2M\to\cdots\to\wedge^dM\xrightarrow{d_x}\wedge^{d+1}M\to\cdots$$

被称为Koszul复形(Koszul complex)，其中$d_x:\wedge^dM\to\wedge^{d+1}M, m\mapsto x\wedge m$.特别地，如果$M=R^n$且$x=(x_1,\cdots,x_n)\in M$，我们用记号$K(x_1,\cdots,x_n)$.

作为一个例子，首先我们验证定义前给出的复形$K(x,y)$是Koszul复形.

引理3.4. 依定义中的记号，

$$H^0(K(x_1,\cdots,x_n))=R/(x_1,\cdots,x_n).$$

Proof. □

如同之前的讨论，Koszul复形是与序列的正则性相关，并且它实际上描述了理想$(x_1,\cdots,x_n)$中极大正则序列的长度.下面的定理说明了这个长度是不变的：

定理3.7. 设M是环R上的有限生成模，若存在正整数r使得

$$H^j(M \otimes_R K(x_1, \cdots, x_n)) = 0$$

对任意$0 \le j < r$成立，且$H^r(M \otimes_R K(x_1, \cdots, x_n)) \ne 0$，那么理想$I = (x_1, \cdots, x_n)$中极大正则序列的长度都为$r$.

3.2 Koszul复形

正则序列是非零因子的推广.

定义. 设R是交换环且M是R模，若元素$x_1, \cdots, x_n \in M$满足

1. $(x_1, \cdots, x_n)M \ne M$，且
2. 对任意$1 \le i \le n$，x_i都是$M/(x_1, \cdots, x_i)M$的非零因子，

则称$x_1, \cdots, x_n$是正则序列(regular sequence)或M序列(M-sequence).

考虑上链序列

$$K(x) : 0 \to R \xrightarrow{x} R \to 0,$$

注意到$H^{-1}(K(x)) = (0 : x) := \{r \in R \mid xr = 0\}$，于是对$H^{-1}(K(x))$的计算可以告诉我们$x$是否是零因子.

考虑另一个R中的元素y，它给出了链映射

$$\begin{array}{lccccccc} K(x): & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{x} & R & \longrightarrow & 0 \\ & & & \downarrow{\scriptstyle y} & & \downarrow{\scriptstyle y} & & \\ K(x): & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{x} & R & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

这样我们可以构造一个更大的链

$$K(x,y) : \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{-x} & R & \longrightarrow & 0 & & \\ & & & \searrow^{y} & \oplus & \searrow^{y} & & & \\ & & 0 & \longrightarrow & R & \xrightarrow{x} & R & \longrightarrow & 0, \end{array} \tag{3.2}$$

或者更简洁地写为

$$K(x,y) : 0 \to R \xrightarrow{\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}} R \oplus R \xrightarrow{\begin{bmatrix} y & x \end{bmatrix}} R \to 0.$$

如同对前一个例子的分析，我们尝试计算该上链的上同调.由定义，

$$H^{-2}(K(x,y)) = \{r \in R \mid -xr = yr = 0\} = (0 : (x,y)),$$

于是x是非零因子当且仅当$H^{-2}(K(x,y)) = 0$.

对于$H^{-1}(K(x,y))$，首先$\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix} \in R \oplus R$当且仅当$xs + yr = 0$，于是这意味着$r \in (x : y)$，反过来，若$r \in (x : y)$，那么一定存在一个$s \in R$使得$xs + yr = 0$——但可能存在不同的$s$使得条件成立；如果还假设$x$是非零因子，那么$s$就唯一地由$r$确定，此时$Z^{-1}(K(x,y)) \cong (x : y)$.

另一方面，$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \in R \oplus R$若是$B^{-1}(K(x,y))$中的元素，则存在$r \in R$使得$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -rx \\ ry \end{bmatrix}$，如果继续假设$x$是非零因子，那么给定$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$就唯一确定了$r$使得$-rx = a$，此时$B^{-1}(K(x,y)) = (x)$.于是$H^{-1}(K(x,y)) = (x : y)/(x)$.这样，当$H^{-2}(K(x,y)) = 0$时，$H^{-1}(K(x,y)) = 0$当且仅当所有满足$ry \in (x)$的元素$r$都是$(x)$中的元素，即$y$是$R/(x)$的非零元素.简言之，复形$K(x,y)$的上同调刻画了序列$(x,y)$的正则性.

在定义一般的Koszul复形之前，我们再对复形$K(x,y)$进行进一步的分析.图**??**说明存在如下正合列

$$0 \to K(x)[-1] \to K(x,y) \to K(x) \to 0,$$

于是这诱导了长正合序列

$$H^{-2}(K(x)[-1]) = H^{-3}(K(x)) \longrightarrow H^{-2}(K(x,y)) \longrightarrow H^{-2}(K(x))H^{-1}(K(x)[-1]) = H^{-2}(K(x)) \longrightarrow H^{-1}(K(x,y)$$

其中δ是连接同态.可以证明态射δ是左乘y，这因为

定义. 给定交换环R和R模M，$x \in M$是元素，那么如下复形

$$K(x) : 0 \to R \to M \to \wedge^2 M \to \cdots \to \wedge^d M \xrightarrow{d_x} \wedge^{d+1} M \to \cdots$$

被称为Koszul复形(Koszul complex)，其中$d_x : \wedge^d M \to \wedge^{d+1} M, m \mapsto x \wedge m$.特别地，如果$M = R^n$且$x = (x_1, \cdots, x_n) \in M$，我们用记号$K(x_1, \cdots, x_n)$.

作为一个例子，首先我们验证定义前给出的复形$K(x,y)$是Koszul复形.

引理3.5. 依定义中的记号，

$$H^0(K(x_1, \cdots, x_n)) = R/(x_1, \cdots, x_n).$$

Proof. □

如同之前的讨论，Koszul复形是与序列的正则性相关，并且它实际上描述了理想$(x_1, \cdots, x_n)$中极大正则序列的长度.下面的定理说明了这个长度是不变的：

定理3.8. 设M是环R上的有限生成模，若存在正整数r使得

$$H^j(M \otimes_R K(x_1, \cdots, x_n)) = 0$$

对任意$0 \leq j < r$成立，且$H^r(M \otimes_R K(x_1, \cdots, x_n)) \neq 0$，那么理想$I = (x_1, \cdots, x_n)$中极大正则序列的长度都为$r$.

第四章　（临时的）习题汇总

4.1　引言

练习4.1. 设F是无限域.借助Zariski拓扑证明Cayley-Hamilton定理.

Proof. 任取矩阵$A \in M_n(F)$，设$\chi_A(x)$是A的特征矩阵，那么

$$\chi_A : \mathbb{A}_F^{n^2} \to \mathbb{A}_F^{n^2}$$

是Zariski连续的.如果我们能证明可对角化的矩阵是稠密的，那么注意到可对角化的矩阵一定是$\chi_A(x)$的零点，那么$\chi_A(x)$的零点就必然是全体$\mathbb{A}_F^{n^2}$，即为要证.

于是只要证可对角化的矩阵是稠密的，而这个可由具有n个不同特征值的矩阵稠密导出.我们将任意矩阵视为$F[x_1, \cdots, x_{n^2}]$中的元素，因而$\chi_B(x) \in F[x_1, \cdots, x_{n^2}][x]$，这个多项式是$n$次的且有$n$个不同根（特征值）.于是$\chi_B(x)$的判别式 □

练习4.2. 设R是交换环，A是R代数，那么A是有限展示的当且仅当对任意R代数的可滤(filtered)余极限$B = \mathrm{colim}_{i \in I} B_i$，都有同态

$$\mathrm{colim}_{i \in I} \mathrm{Hom}_R(A, B_i) \cong \mathrm{Hom}_R(A, B).$$

练习4.3. 给定交换环R和有限展示R模M，若I是内射R模则对任意R模N

$$M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, I) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, N), I).$$

Proof. 给定正合列

$$K \to F \to M \to 0,$$

其中K, F都是自由模，由于M是有限展示的，因此可以假设K, F是有限生成的.于是我们得到了正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M, N) \to \mathrm{Hom}_R(F, N) \to \mathrm{Hom}_R(K, N).$$

又由于I是内射模，因而

$$\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(K, N), I) \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(F, N), I) \to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M, N), I) \to 0$$

是正合列.另一方面，根据M的生成序列存在正合列

$$K \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, I) \to F \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, I) \to M \otimes_R \mathrm{Hom}_R(N, I) \to 0,$$

定义

$$\begin{aligned}\eta : \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(-,N),I) &\Rightarrow -\otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,I)\\ \eta_T : \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(T,N),I) &\to T\otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,I)\\ f &\mapsto \end{aligned}$$

是自然变换，于是有交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(K,N),I) \arrow[r, "\eta_K"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(F,N),I) \arrow[r] \arrow[d, "\eta_F"'] & \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(M,N),I) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
K\otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,I) \arrow[r] & F\otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,I) \arrow[r] & M\otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,I) \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

根据之前的习题，η_K,η_F是同构，因而由五引理得到了所需的同构. □

练习4.4. 给定交换Noether环R和有限生成平坦R模P，求证P是投射模.

Proof. 任意给定R模满态射$f : M\to N$，只要证明

$$\mathrm{Hom}_R(P,M)\to \mathrm{Hom}_R(P,N)$$

是满射即可.任取内射模I，于是存在正合列

$$0\to \mathrm{Hom}_R(N,I)\to \mathrm{Hom}_R(M,I),$$

由于P平坦，于是

$$0\to P\otimes_R \mathrm{Hom}_R(N,I)\to P\otimes_R \mathrm{Hom}_R(M,I)$$

也正合.由于P是有限生成的，故P是有限展示的，由习题4.3

$$0\to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(P,N),I)\to \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(P,M),I)$$

是正合的，根据I的内射性

$$\mathrm{Hom}_R(P,M)\to \mathrm{Hom}_R(P,N)\to 0$$

也是正合的. □

练习4.5. 给定交换环R和它的理想I,J，定义I关于J的理想商$(I:J)$是

$$(I:J) := \{r\in R \mid rJ\subseteq I\}.$$

求证

1. $(I:J)$是R中的理想，且理想K被$(I:J)$包含当且仅当$KJ\subseteq I$，
2. 存在自然的R模同构
$$(I:J) = \mathrm{Ann}_R(I+J/I),$$
3. $(I:J+K) = (I:J)\cap(I:K)$，
4. $(I\cap J:K) = (I:K)\cap(J:K)$，

5. 若R还是整环，
$$(I:(r))=\frac{1}{r}(I\cap (r)).$$

称$(I:J^\infty):=\bigcup_{n\geq 1}(I:J^n)$为$I$关于$J$的饱和理想(saturation).求证在$\operatorname{Spec} R$中，
$$V((I:J^\infty))=\overline{V(I)-V(J)}.$$

4.2　链条件和分次

练习4.6. 设M是分次环S上的分次模，$m\in M$是齐次元素，求证$\operatorname{Ann} m$是S中的齐次理想.

练习4.7. 交换环R是Noether环当且仅当任意内射R模的直和是内射的.

Proof. 设$\{I_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是一族给定的内射$R$模，只要验证对任意的理想$J$和$R$模态射$f:J\to I:=\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$都可以提升为$\tilde{f}:R\to I$.$R$是Noether环意味着$J$是有限生成的，记生成元为$a_1,\cdots,a_n$，同时$f(a_i)$仅在有限多个$I_\lambda$中不为0，于是存在$\Lambda$的有限子集$\Lambda_0$使得$f$沿$\iota:\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda\hookrightarrow I$有分解.但是每个$I_\lambda$都是内射的，故$J\to I_\lambda$有提升$R\to I_\lambda$，这给出了$R\to\bigoplus_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda$，因而有提升$\tilde{f}:R\to I$.

另一方面，假设R不是Noether环，因此有严格的升链
$$J_1\subsetneqq J_2\subsetneqq\cdots J_n\subsetneqq\cdots,$$

令$J:=\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}J_n$，取$I_n$是包含$J/J_n$的内射模，$I:=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*}I_n$，那么存在自然的同态
$$f:J\to I=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*}I_n.$$

若I是内射模，则f可以扩张为$\tilde{f}:R\to I$，使得$\forall a\in J$，$f(a)=\tilde{f}(a)=a\tilde{f}(1)$.设$\tilde{f}(1)=\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^*}$，并找一个整数$N$使得$a\notin J_N$，注意到$0\neq\bar{a}\in J/J_N$，□

定理4.1. 设S是分次环，I是齐次理想且集合$A=\{a_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是$I$的一组齐次生成元，$f\in S$齐次且$f$阶为1，那么
$$(I[f^{-1}])\cap S[f^{-1}]_0$$
可以由
$$A_f=\left\{\frac{a_\lambda}{f^{\deg a_\lambda}}\right\}_{\lambda\in\Lambda}$$
生成.

Proof. □

练习4.8. 设R是交换环，若它的理想I满足对任意理想J_1,J_2只要$I=J_1\cap J_2$那么要么$I=J_1$要么$I=J_2$，则称I是不可约理想(irreducible ideal).求证若I是R的不可约理想，那么$IR[x]$是$R[x]$中的不可约理想.

Proof. 假设$I=(0)$，那么只需要证明若理想J_1,J_2满足$J_1\cap J_2=(0)$，取$f\in J_1,g\in J_2$，这样$(f)\cap(g)=0$.记
$$f=x^d\left(\sum_{i=0}^{n}a_ix^i\right),g=x^e\left(\sum_{j=0}^{m}b_jx^j\right),$$

满足$a_0, b_0 \neq 0$，且f, g取得使得$m+n$最小.如果令$h = \sum_{i=0}^n a_i x^i, k = \sum_{j=0}^m b_j x^j$，那么显然$(f) \subseteq (h), (g) \subseteq (k)$，于是$(h) \cap (k) = 0$意味着$(f) \cap (g) = 0$.反过来若$(h) \cap (k) \neq 0$，那么$0 \neq x^{d+e}((h) \cap (k)) = (x^{d+e}h) \cap (x^{d+e}k) = (x^e f) \cap (x^d g)$，注意到$(x^e f) \subseteq (f)$且$(x^d g) \subseteq (g)$，于是$(f) \cap (g) \neq 0$，这意味着$(f) \cap (g) = 0$当且仅当$(h) \cap (k) = 0$.这样可以直接假设

$$f = \sum_{i=0}^n a_i x^i, g = \sum_{j=0}^m b_j x^j.$$

若$m+n=0$，那么$f, g \in R$，于是直接由假设(0)是R中的不可约理想得证，因此$m+n>0$，不妨设$m \geq n$且$m > 0$.这样，R中的理想$(a_0) \cap (b_0) \neq 0$，否则与(0)在R中是不可约的矛盾.取$c \in (a_0) \cap (b_0)$，那么存在r, s使得$ra_0 = c = sb_0$.用rf, sg代替f, g，那么可以假设f, g有相同的非零常数项.

若$t \in R$满足$ta_0 = 0$，且$tf \neq 0$，那么$(tf) \cap (g) \subseteq (f) \cap (g) = 0$，但此时$ta_0 = 0$意味着$x \mid tf$，之前的讨论说明存在多项式$h(x) = \frac{f(x)}{x}$满足$\deg h < \deg f$和$(h) \cap (g) = 0$，这与$m+n$是最小的矛盾，于是$tf = 0$.同理，$tg = 0$.用与刚才相同的方法可以证明若$h(x) = \sum_{i=0}^l c_i x^i$使得$h(x)f(x) = 0$，那么$c_i f(x) = 0$.于是多项式$h(x)$满足$hf = 0$当且仅当$hg = 0$.

由于按假设f, g有相同的常数项故存在常数项非零的多项式$k(x)$使得$g - f = x^l k$.根据$m+n$的极小性，$(f) \cap (k) \neq 0$，于是存在多项式u, v使得$uf = vk \neq 0$，这样$x^l uf = v(g-f)$.同时$vg = (v + x^l u) f \in (f) \cap (g) = 0$，这由前一段说明$vf = 0$，$x^l uf = v(g-f) = 0$，这样$uf = 0$，矛盾. □

练习4.9 (Artin-Tate lemma).

4.3 局部化

练习4.10. 设$\mathfrak{p}$是R的素理想，$\varphi: R \to S$是给定的环同态.求证$S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$中的素理想一一对应于$S$中在$\varphi$的拉回下是$\mathfrak{p}$的素理想.

Proof. 设$\mathfrak{q}$满足$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$，于是首先$\varphi(R - \mathfrak{p}) \cap \mathfrak{q} = \emptyset$，这是因为若存在$a \in R - \mathfrak{p}$使得$\varphi(a) \in \mathfrak{q}$，按定义$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \{r \in R \mid \varphi(r) \in \mathfrak{q}\}$，于是$a \in \mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q})$，矛盾.这样根据局部化的一一理想对应，$S_\mathfrak{p}$中包含对应于$\mathfrak{q}$的理想，记为$\mathfrak{q}S_\mathfrak{p}$.

其次若$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$，那么$\varphi(\mathfrak{p}) \subseteq \mathfrak{q}$，于是$\mathfrak{q}S_\mathfrak{p} \supseteq \mathfrak{p}S_\mathfrak{p} = \varphi(\mathfrak{p})S_\mathfrak{p}$，这意味着商环的理想一一对应给出了$\mathfrak{q}$在$S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$的理想，这给出了单射

$$\{S\text{中满足}\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}\text{的素理想}\} \to \{S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}\text{中的素理想}\},$$

于是只要证明$S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$的素理想必然满足$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.

由于局部化和取商的素理想对应，我们只需要证明不满足$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$的$S$中的理想$\mathfrak{q}_\mathfrak{p}$要么被$\mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$包含，要么与$\varphi(R - \mathfrak{p})$的交不空.如果$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \neq \mathfrak{p}$，要么存在$a \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) - \mathfrak{p}$，此时$\varphi(a) \in \mathfrak{q} \cap \varphi(R - \mathfrak{p})$；要么$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \subseteq \mathfrak{p}$，于是$\mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}S$，进而$\mathfrak{q}_\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}S_\mathfrak{p}$.这样就完成了对应的证明. □

练习4.11. 设素理想$\mathfrak{p}$是R的任意极小理想，求证$R_\mathfrak{p}$中极大理想的元素都是幂零的.

Proof. 任取$R_\mathfrak{p}$中极大理想的元素$\frac{x}{f^n}$，其中$f \in R - \mathfrak{p}$.若 □

4.4 有限性

定理4.2 (Hilbert基定理)**.** *给定Noether环R，那么多项式环$R[x]$也是Noether的.*

Proof. 设I是$R[x]$的一个理想，L是I的元素的首项系数全体组成的集合（即$L := \{a_n \mid f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in I\}$），首先$L$是$R$的一个理想

由于R是Noether的，L是有限生成的，记$L = \langle c_1, \cdots, c_m \rangle$，其中$f_i(x) = \sum_{j=0}^{d_i} a_{i,j} x^j$是以$c_i$为首项系数的多项式，$N := \max\{d_1, \cdots, d_m\}$.

对任意的$d \in \{0, \cdots, N-1\}$，令L_d是I中d阶多项式的首项系数的全体组成的集合，与前面讨论相同的证明，L_d也是R中的一个理想，再次根据R是Noether的，L_d是有限生成的，记$L_d = \langle b_{1,d}, \cdots, b_{m_d,d} \rangle$，其中$f_{i,d}(x) = \sum_{j=0}^{d} a_{i,d,j} x^j$是以$b_{i,d}$为首项系数的多项式.

接下来只要证明

$$I = \langle \{f_1, \cdots, f_m\} \cup \{f_{i,d} \mid 0 \le d < N, 1 \le i \le m_d\} \rangle$$

即可. □

练习4.12. 设R是Noether环，求证下列等价：

1. R是Artin环；
2. R中只有有限多个素理想，且
3. R中只有有限多个素理想.

练习4.13. 设k是域且R是Noether的k代数，求证下列等价：

1. R是Artin环；
2. R是有限k代数.

练习4.14. 设$\varphi : R \to S$是有限型的环同态，$\mathfrak{p}$是R的任意极小理想，且S中只有有限多个$\mathfrak{q}$使得$\varphi^{-1}(\mathfrak{q}) = \mathfrak{p}$.求证存在$f \in R - \mathfrak{p}$使得$S_f$是有限生成的$R_f$模.

练习4.15. 设k是域且I是环$k[x_1, \cdots, x_n]$中由集合S（可能是无限的）生成的理想，那么存在S中的有限多个元素生成I.

4.5 反向极限

定义. 设R是Abel群，$R = I_0 \supseteq I_1 \supseteq \cdots \supseteq I_n \cdots$是子群序列（递降滤子），称

$$\hat{R} = \varprojlim := \{f = (f_1, f_2, \cdots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}^*} R/I_n \mid f_m \cong f_n \pmod{I_n} \forall m > n\}$$

为R关于I_n的完备化(completion).若R还是一个环，且每个I_n是理想，那么$\hat{R}$也是一个环.

4.6 Hilbert多项式

例4.1. 考虑$S = k[x_0, \cdots, x_n]$，那么它所有阶数为d的单项式有

$$\binom{n+d}{n} = \binom{n+d}{d}$$

个，因此$M = S$的阶数为d的部分的维数是

$$\binom{n+d}{d} = \frac{(n+d)(n+d-1)\cdots(n+1)}{d!},$$

将n看作变量的话，这是一个关于n的有理系数多项式，阶数为d且首项系数为$\frac{1}{d!}$.

例4.2. 考虑$S := k[x_0, \cdots, x_3]/(x_1^3 - x_0^2 x_3, x_2^3 - x_0 x_3^2, x_1 x_2 - x_0 x_3)$

注意到以上例子当中的多项式都满足特别的性质，即虽然多项式是有理系数多项式，但在比较大的整数处取值一定也是整数.若多项式$p(z) \in \mathbb{Q}[z]$满足对充分大的$n \in \mathbb{Z}$，$p(n) \in \mathbb{Z}$，则称$p(z)$是数值多项式(numerical polynomial).

引理4.1. *若$p(n)$是d阶数值多项式，那么存在整数$c_0, \cdots, c_d$使得*

$$p(z) = \sum_{i=0}^{d} c_i \binom{z}{i},$$

其中，$\binom{z}{i} = \frac{z(z-1)\cdots(z-i+1)}{i!}$.

Proof. 只需要证明对任意的单项式z^n引理成立即可.显然当$n = 0$和$n = 1$时成立.

归纳假设 □

引理4.2. *设函数$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$满足如下性质，存在数值多项式$q(z)$使得$f$的差值函数满足*

$$\Delta f(n) := f(n+1) - f(n) = q(n)$$

对于充分大n都成立，则存在数值多项式$p(z)$使得

$$f(n) = p(n)$$

对于充分大n都成立，且$\deg p(z) = \deg q(z) + 1$.

Proof. 这个组合引理实际上来源于等式

$$\binom{z}{i} + \binom{z}{i-1} = \binom{z+1}{i}.$$

根据引理 □

定理4.3 (Hilbert)**.** *设k是域，$S := k[x_0, \cdots, x_n]$，M是有限生成的分次S模，$h_M(n) := \dim_k M_n$是M的Hilbert函数，那么存在多项式$p_M(z) \in \mathbb{Q}[z]$使得对充分大的正整数d，*

$$h_M(d) = p_M(d).$$

称$p_M(z)$为M的Hilbert多项式(Hilbert polynomial).

命题4.4. 设S是$Noether$分次环，M是分次有限生成S模，那么存在M的分次子模滤子

$$0 = M_0 \subseteq M_1 \subseteq \cdots \subseteq M_d = M$$

使得

$$M_i/M_{i-1} \cong (S/\mathfrak{p}_i)[l_i]$$

对于任意$1 \leq i \leq n$成立，其中$\mathfrak{p}_i$是S的齐次素理想，$l_i \in \mathbb{Z}$.

Proof. 我们将用Zorn引理来证明该命题.令

$$\Sigma := \{N \leq M \mid N\text{是分次子模且有满足条件的滤子}\}$$

是有满足条件的滤子的子模N的全体，显然$0 \in \Sigma$意味着Σ非空；因为M是Noether环上的有限生成模，因此M是Noether的，因此Σ中有极大元，记为M_0.

若$M_0 = M$，则已完成证明.否则，令

$$\mathcal{I} := \{I_m = \mathrm{Ann}(m) \mid m\text{是}M/M_0\text{中的非零元素且齐次}\}$$

是S中理想的非空偏序集，由于S是Noether的，$\mathcal{I}$中有极大元，记为I_{m_0}，其中m_0是齐次元素意味着I_{m_0}是齐次理想，接下来证明I_{m_0}还是素理想.根据I_{m_0}的齐次性，只需要证明任意的齐次元素$a, b \in S$，若$ab \in I_{m_0}$则$a \in I_{m_0}$或$b \in I_{m_0}$.假设$b \notin I_{m_0}$，那么bm_0也是其次元素因此$I_{bm_0} \in \mathcal{I}$，显然$I_{m_0} \subseteq I_{bm_0}$，再根据极大性$I_{m_0} = I_{bm_0}$.但是$ab \in I_{m_0}$，这意味着$abm = 0$，于是$a \in I_{bm_0} = I_{m_0}$，得证.

根据如上的证明，记$\mathfrak{p} = I_{m_0}$，并且假定$m_0 \in (M/M_0)_l$，那么存在齐次S模同态

$$\begin{aligned}\varphi : (S/\mathfrak{p})[-l] &\to S \cdot m_0 \subseteq (M/M_0)\\ 1 &\mapsto m_0,\end{aligned}$$

其中齐次性由m_0的齐次性和阶数平移来保证，$\mathfrak{p}$是零化子说明映射是单射且良定义，而它显然是满射.令N是M中$S \cdot m_0 \subseteq (M/M_0)$的原像，那么$M_0 \subsetneq N$，但是$N/M_0 \cong (S/\mathfrak{p})[-l]$，这与$M_0$的极大性矛盾. □

此时我们可以回到定理的证明了：

Proof. 首先若

$$0 \to M \to N \to P \to 0$$

是分次S模的短正合序列，并且定理的论断对M, P都成立，那么根据加性性质$h_N = h_M + h_P$，于是定理的论断对于N也成立，即$h_N(d)$对充分大的d是一个多项式.

根据命题4.4，只需要证明形如$(S/\mathfrak{p})[l]$的模满足定理的论述即可；同时，阶数的平移只意味着函数变量的变更$z \mapsto z + l$，因此只需要考虑形如$S/\mathfrak{p}$的模.

若$\mathfrak{p} = (x_0, \cdots, x_n)$，只需要取$p_M(z) \equiv 0$即可.否则，存在$x_i \notin \mathfrak{p}$，那么正合列

$$0 \to S/\mathfrak{p}[-1] \xrightarrow{\cdot x_i} S/\mathfrak{p} \to (S/\mathfrak{p})/(x_i S/\mathfrak{p}) \to 0$$

给出了Hilbert函数的关系式

$$h_{(S/\mathfrak{p})/(x_i S/\mathfrak{p})}(z) = h_{S/\mathfrak{p}}(z) - h_{S/\mathfrak{p}}(z-1) = \Delta h_{S/\mathfrak{p}}(z),$$

经过有限步之后总会得到$\mathfrak{p} = (x_0, \cdots, x_n)$的情形，但这是已经说明的，因此$\Delta h_{S/\mathfrak{p}}(z)$对充分大的$d$满足$\Delta h_{S/\mathfrak{p}}(d)$是多项式，于是根据引理4.2，$h_{S/\mathfrak{p}}(z)$满足定理叙述，得证. □

例4.3. 令$v_d : \mathbb{P}^1_k \hookrightarrow \mathbb{P}^d_k$是射影曲线的$d$阶Veronese嵌入，

4.7 Gröbner基

首先我们回顾Hilbert基定理的证明.证明中对首项系数的选取起到了很重要的作用，而事实上在这个过程中，我们按照多项式的阶数给定了一个排序.在推论??? 中，一个多元多项式$f \in R[x_1, \cdots, x_n]$，它可以看成系数在$R[x_2, \cdots, x_n]$中的单元多项式，以此类推，$R[x_2, \cdots, x_n]$中的多项式可以视为系数在$R[x_3, \cdots, x_n]$中的单元多项式等等，这实际上给了$R[x_1, \cdots, x_n]$中所有单项式一个排序，我们称为字典序(lexicographic ordering)，即单项式$Ax_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$大于单项式$Bx_1^{b_1} \cdots x_n^{b_n}$当且仅当存在$1 \leq k \leq n$，满足$1 \leq i \leq k$时$a_i = b_i$，且$a_k > b_k$.

定义. 给定交换环R，$R[x_1, \cdots, x_n]$上的单项序(monomial ordering)是定义在$R[x_1, \cdots, x_n]$中所有单项式上的一个（全）序关系$\geq$，使得若单项式满足$m_1 \geq m_2$，那么对任意单项式m，$mm_1 \geq mm_2$.

定义. 给定交换环R和多项式环$R[x_1, \cdots, x_n]$上的单项序$\geq$，

1.
2. 给定$R[x_1, \cdots, x_n]$中的理想I，I的首项系数理想(ideal of leading terms)$LT(I)$是I的所有首项系数生成的（R中的）理想，即
$$LT(I) := \langle LT(f) \mid f \in I \rangle.$$

定义. 给定交换环R和多项式环$R[x_1, \cdots, x_n]$上的单项序$\geq$，理想$I \subseteq R[x_1, \cdots, x_n]$的Gröbner基(Gröbner basis)是I的一组生成元$\{g_1, \cdots, g_m\}$使得I的首项系数理想由这组生成元的首项系数生成，即
$$I = (g_1, \cdots, g_m), \;\; LT(I) = (LT(g_1), \cdots, LT(g_m)).$$

给定$F[x_1, \cdots, x_n]$上的一个单项序$\geq$和非零元素$\{g_1, \cdots, g_m\}$，任取$f \in F[x_1, \cdots, x_n]$，假定存在商$q_1, \cdots, q_m \in F[x_1, \cdots, x_n]$和余数$r \in F[x_1, \cdots, x_n]$满足
$$f = q_1 g_1 + \cdots + q_m g_m + r,$$
（初始值可以取$q_1 = \cdots = q_m = 0, r = f$）那么如下步骤可以递推地给出$f$关于$q_1, \cdots, q_m$的带余除法：

1. 若存在i使得$LT(f)$被$LT(g_i)$整除，即$LT(f) = a_i LT(g_i)$，那么做替代$q_i := q_i + a_i$和$f := f - a_i g_i$，并重复该过程，
2. 若$LT(f)$不被任意$LT(g_1), \cdots, LT(g_m)$整除，那么做替代$r := r + LT(f), f := f - LT(f)$.

当经过迭代后f成为0，我们终止这个过程，如上所给的算法称为一般多项式除法(general polynomial division)，最终它给出
$$f = q_1 g_1 + \cdots + q_m g_m + r,$$

满足$q_ig_i \le f$对任意i成立，且不存在g_i使得$LT(g_i) \mid r$.

例4.4. 给定$F[x,y]$并取上面的字典序，

1.

定理4.5. *给定$R=F[x_1,\cdots,x_n]$上的一个单项序$\geq$，且$\{g_1,\cdots,g_m\}$是非零理想I的一组Gröbner基，那么*

1. *任意多项式$f(x)\in R$可以唯一地写成*
$$f=f_I+r$$
的形式，其中$f_I\in I$且余数r的任意单项都不可以被首项系数$LT(g_1),\cdots,LT(g_m)$整除.

2. *f_I和r都可以用多项式带余除法来计算，且与$\{g_1,\cdots,g_m\}$的选取顺序无关.*

3. *余数r给出了R/I中的唯一代表元，特别地$f\in I$当且仅当$r=0$.*

Proof. 1.设$f_I=\sum_{i=1}^m q_ig_i$是f的多项式带余除法中$\{g_1,\cdots,g_m\}$所给出的项，因此这给出了分解$f=f_I+r$.假设存在两个分解$f=f_{I,1}+r_1=f_{I,2}+r_2$，那么$r_1-r_2=f_{I,2}-f_{I,1}\in I$，由于$\{g_1,\cdots,g_m\}$是$I$的一组Gröbner基，因此$LT(r_1-r_2)=LT(f_{I,2}-f_{I,1})$是$LT(I)=(LT(g_1),\cdots,LT(g_m))$中的元素，这意味着$r_1-r_2$是$LT(g_1),\cdots,LT(g_m)$的线性组合，但按多项式带余除法的构造，$r_1,r_2$中的任意单项式不能被$LT(g_1),\cdots,LT(g_m)$整除（这只对多项式环成立），因此若$r_1-r_2$非零那么其中的任意单项式也不能被$LT(g_1),\cdots,LT(g_m)$整除，这意味着$r_1-r_2=0$，即分解是唯一的.

2.之前我们已经证明了多项式带余除法可以求得分解$f=f_I+r$，并且这样的分解是唯一的，因此与$\{g_1,\cdots,g_m\}$中的顺序无关.

3.这是第一部分的直接推论. □

命题4.6. *给定多项式环$R=F[x_1,\cdots,x_n]$上的单项序$\geq$，I是R的非零理想，那么*

1. *若I中的元素$g_1,\cdots,g_m$满足$LT(I)=(LT(g_1),\cdots,LT(g_m))$，那么$\{g_1,\cdots,g_m\}$是$I$的Gröbner基，*

2. *理想I有Gröbner基.*

Proof. 1.与定义相比我们只需要证明$\{g_1,\cdots,g_m\}$生成了I即可.设$f\in I$是多项式且有带余除法

$$f=q_1g_1+\cdots+q_mg_m+r,$$

使得余数r的任意单项都不可以被首项系数$LT(g_1),\cdots,LT(g_m)$整除.由于$f\in I$，余数$r\in I$，这意味着$LT(r)\in LT(I)$，但这样必然存在$LT(g_1),\cdots,LT(g_m)$中的某个首项系数**整除**$LT(r)$，在$r\neq 0$时产生矛盾，因此$r=0$，即$f=q_1g_1+\cdots+q_mg_m$.由于f是任意取的，因此这说明了$\{g_1,\cdots,g_m\}$生成I.

2.根据习题4.15， □

命题??? 说明了$F[x_1,\cdots,x_n]$上的Gröbner基一定是存在的，接下来我们考虑对于任意给定的I的一组生成元，如何检验这是否是Gröbner基.

事实上，这样的想法是简单的，$LT(I)$中的其他元素都是I中生成元取线性组合后消掉首项系数得到的，那么这也应当是使得一组基不能成为Gröbner基的唯一障碍.

对任意的$f_1, f_2 \in F[x_1, \cdots, x_n]$，取$M = \text{l.c.m.}(LT(f_1), LT(f_2))$和

$$S(f_1, f_2) := \frac{M}{LT(f_1)} f_1 - \frac{M}{LT(f_2)} f_2.$$

引理4.3. 设$f_1, \cdots, f_m \in F[x_1, \cdots, x_n]$是给定的多项式，且它们的多项阶数都是$\alpha$，线性组合

$$h = a_1 f_1 + \cdots + a_m f_m$$

满足$a_i \in F$对所有$1 \leq i \leq m$成立，且h的多项阶数严格小于α，那么存在$b_i \in F$使得

$$h = \sum_{i=2}^{m} b_i S(f_{i-1}, f_i).$$

Proof. □

命题4.7 (Buchberger)**.** 给定多项式环$R = F[x_1, \cdots, x_n]$上的单项序$\geq$，$I = (g_1, \cdots, g_m)$是R的理想，那么$G = \{g_1, \cdots, g_m\}$是I的*Gröbner*基当且仅当对任意的$1 \leq i < j \leq m$，

$$S(g_i, g_j) \equiv 0 \pmod{G}.$$

Proof. □

Buchberger判别法不仅给出了如何判断一组元素是否是Gröbner基，并且给出了计算得到Gröbner基的方法.假设$I = (g_1, \cdots, g_m)$是多项式环$R = F[x_1, \cdots, x_n]$的理想，若$S(g_i, g_j)$在求取相对于$G = \{g_1, \cdots, g_m\}$的余数时有非零项，那么令g_{m+1}为该余数，取新的$G = \{g_1, \cdots, g_m, g_{m+1}\}$，并再次计算$S(g_i, g_j) \pmod{G}$.习题??? 说明这样的步骤总会在有限多步后停止，那么得到的就是Gröbner基.

定义.

4.8 平坦性

练习4.16. 设R是约化环(reduced ring)，M是局部有限展示的R模，若函数

$$\begin{aligned} \text{rank} : \operatorname{Spec} R &\to \mathbb{Z} \\ \mathfrak{p} &\mapsto \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) \end{aligned}$$

是局部常值函数，则M是平坦模.

Proof. 任取R中的素理想$\mathfrak{p}$，且假设存在一个R的表现

$$R^n \xrightarrow{A} R^m \to M \to 0,$$

满足$A \in M_{m\times n}(R)$.任取R中的素理想$\mathfrak{p}$，那么

$$\kappa(\mathfrak{p})^n \xrightarrow{A\otimes_R \kappa(\mathfrak{p})} \kappa(\mathfrak{p})^m \to M \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) \to 0$$

是正合的.我们断言，可以取$m = \dim_{\kappa(\mathfrak{p})} M \otimes_R \kappa(\mathfrak{p})$使得$R^m \to M$是满射. □

练习4.17. 给定交换环R和$f(x) \in R[x]$，求证$R \to R[x]/(f(x))$是平坦的当且仅当$f(x)$是首一的.

定义. 设M是平坦R模，若M满足$M \otimes_R N = 0$意味着$N = 0$，则称M是忠实平坦的(faithfully flat).

练习4.18. 设M是平坦R模，求证M是忠实平坦的当且仅当对任意$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$，$M \otimes_R \kappa(\mathfrak{p}) \neq 0$.

Proof. 一方面这是显然的

另一方面这是向量空间 □

练习4.19. 设$\varphi : R \to S$是环同态，S是平坦R模，求证S是忠实平坦的当且仅当$\varphi : R \to S$是平坦的，且诱导的$\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$是满射.

Proof. 一方面，若S是忠实平坦的，那么对任意$\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$，根据习题4.10作为集合$f^{-1}(\mathfrak{p}) = \operatorname{Spec}(S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}S_\mathfrak{p})$，这样只要说明$\operatorname{Spec}(S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}S_\mathfrak{p})$非空即可，这等价于$S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}S_\mathfrak{p} \neq 0$.由于$\mathfrak{p}$是给定的素理想，$R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}$非0，因此由忠实平坦性，$S_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}S_\mathfrak{p} \cong (R_\mathfrak{p}/\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}) \otimes_R S \neq 0$.

另一方面，假设$\operatorname{Spec} S \to \operatorname{Spec} R$是满射， □

练习4.20. 证明如下下降性质：设$R \to S$是满忠实的环同态，

1. 若S是Noether的，那R也是Noether的；
2. 若S是约化的，那R也是约化的；
3. 若S是正规的，那R也是正规的；
4. 若S是正则的，那R也是正则的.

Proof. □

4.9 光滑性

练习4.21. 1. 设k是特征为0的域，$R := k[x_1, \cdots, x_n]$，那么R模序列

$$0 \to k \to R \to \Omega^1_{R/k} \to \cdots \to \Omega^n_{R/k} \to 0$$

是正合的.

2. 说明$\mathbb{F}_p[x]$模序列

$$0 \to \mathbb{F}_p \to \mathbb{F}_p[x] \to \mathbb{F}_p[x]dx \to 0$$

不是正合的.

Proof. 1. 对n用归纳法. $\square$

练习4.22. 设$R := k[x,y]/(y^2 - x^3 - ax - b)$，满足$4a^3 + 27b^2 \neq 0$.

1. 证明$x^3 + ax + b$与$(x^3 + ax + b)' = 3x^2 + a$互素.
2. 证明$\Omega_{R/k}$作为R模同构于R.[提示：由前一部分，存在$u(x), v(x)$使得$u(x)(x^3+ax+b)+v(x)(x^3+ax+b)' = 1$，考虑$\omega = \frac{1}{2}u(x)ydx + v(x)dy$.]
3. 求Spec R的de Rham上同调.

Proof. 根据定义，$\Omega_{R/k} = Rdx \oplus Rdy/(2ydy - (3x^2 + a)dx)$，同时$4a^3 + 27b^2 \neq 0$说明曲线是光滑的，因此局部地$\Omega^2_{R/k} = 0$.因此de Rham复形是

$$0 \to R \xrightarrow{d} \Omega_{R/k} \to 0.$$

显然$H^0 = k$.由于曲线光滑，x^3+ax+b和$3x^2+a$没有公共根，$(x^3+ax+b, 3x^2+a) = 1$，因此存在$u(x), v(x)$使得

$$u(x)(x^3 + ax + b) + v(x)(3x^2 + a) = 1.$$

令$\omega = \frac{1}{2}u(x)ydx + v(x)dy$，那么

$$dx = (u(x)(x^3 + ax + b) + v(x)(3x^2 + a))dx = u(x)y^2dx + v(x)(2y)dy = 2y\omega$$

且

$$dy = (u(x)(x^3+ax+b)+v(x)(3x^2+a))dy = u(x)y^2dy+v(x)(3x^2+a)dy = \frac{1}{2}u(x)y(3x^2+a)dx+v(x)(3x^2+a)dy = (3x^2+a)\omega.$$

这意味着$\Omega_{R/k} = R\omega$.考虑

$$\begin{aligned} d : R &\to \Omega_{R/k} = R\omega \\ f(x,y) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{\partial f}{\partial x}(2y)\omega + \frac{\partial f}{\partial y}(3x^2 + a)\omega. \end{aligned}$$

对任意$g(x,y)\omega \in R\omega$，存在（唯一的）$k(x), l(x)$使得$g(x,y) = yk(x) + l(x) \in R$，且$l(x) = q(x)(3x^2 + a) + sx + t$.那么取

$$f(x,y) = q(x)y + \int k(x) - q'(x)(x^3 + ax + b)\mathrm{d}x$$

则有$df = (g(x,y) - sx - t)\omega$.因此

$$\text{Coker } d = k\omega \oplus kx\omega.$$

$\square$

练习4.23. 设I是交换环R的幂零理想，$R - \mathbf{Algebra}^{\text{et}}$是所有的平展$R$环组成的满子范畴，求证存在范畴的同构

$$R - \mathbf{Algebra}^{\text{et}} \simeq R/I - \mathbf{Algebra}^{\text{et}}.$$