同调代数

G.Li

目录

第一章　导出函子

1.1　上链和正合性

定义. 给定加性范畴$\mathcal{A}$中的一族对象及态射构成的图

$$X^\bullet : \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots,$$

满足$d^n \circ d^{n-1} = 0$对任意n都成立，则称$(X^\bullet, d^\bullet)$是$\mathcal{A}$中的一个上链(cochain).

有时为强调，我们也记$(X^\bullet, d^\bullet)_{\mathbb{Z}}$.若$X^i = 0$对任意$i < 0$都成立，则记为$(X^\bullet, d^\bullet)_{\geq 0}$，称复形$X^\bullet$是正阶数的().

定义. 给定加性范畴$\mathcal{A}$中上链$(X^\bullet, d_X^\bullet), (Y^\bullet, d_Y^\bullet)$，一族$\mathcal{A}$中的态射$\{f^n : X^n \to Y^n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，满足

$$d_Y^n \circ f^n = f^{n+1} \circ d_X^n,$$

即图

$$\begin{tikzcd} X^n \arrow[r, "d_X^n"] \arrow[d, "f^n"'] & X^{n+1} \arrow[d, "f^{n+1}"] \\ Y^n \arrow[r, "d_Y^n"] & Y^{n+1} \end{tikzcd}$$

是交换的，则称这族态射是上链态射(morphism)，记为$f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$.

$\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$

引理 1.1. *给定$Abel$范畴$\mathcal{A}$，则$\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$也是$Abel$范畴.*

证明. 我们一步步完成验证：

1. 核和余核：给定上链间的态射$f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$，定义

□

定义. 设$(X^\bullet, d^\bullet)$是$\mathcal{A}$中的上链，满足$X^n = 0$对所有的$n < 0$都成立.若有$\eta : A \to X_0$使得$d^0 \circ \eta = 0$，则称$(X^\bullet, d^\bullet)$是增广的(augmented).若还有$H^n(X^\bullet) = 0$对所有的$n > 0$都成立，且η诱导了同构$A \cong H^0(X^\bullet)$，则称$(X^\bullet, d^\bullet)$是A的消解(resolution).

对偶地，我们也有加性范畴$\mathcal{A}$中的**链**(chain)的概念.我们记

例 1.1. 给定代数R，若M是R模，且$P^\bullet$和$I^\bullet$分别是M的投射消解和内射消解，则如下三个横向的序列是$R-\mathbf{Mod}$中的一个上链

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d^{-2}"] & P^{-2} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d] & P^{-1} \arrow[r, "d^{0}"] \arrow[d] & P^0 \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] & I^2 \arrow[r, "d^2"] & \cdots ,
\end{tikzcd}$$

且他们有相同的上同调.

例 1.2. 设$(X^\bullet, d^\bullet)$是$\mathcal{A}$中的一个上链，定义上链定义上链$\tilde{\tau}^{\le n}(X^\bullet, d^\bullet)$为

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-2}} X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{0} 0 \to \cdots ,$$

此时，

$$H^i(\tilde{\tau}^{\le n}(X^\bullet)) = \begin{cases} H^i(X^\bullet) & i < n \\ X^n/\mathrm{Im}\ d^{n-1} & i = n \\ 0 & i > n. \end{cases}$$

对偶地有构造$\tilde{\tau}_{\ge n}(X^\bullet, d^\bullet)$，

$$\cdots \to 0 \to X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} X^{n+2} \to \cdots ,$$

且

$$H^i(\tilde{\tau}_{\ge n}(X^\bullet)) = \begin{cases} H^i(X^\bullet) & i > n \\ \mathrm{Ker}\ d^{n+1} & i = n \\ 0 & i < n. \end{cases}$$

例 1.3. 设$(X^\bullet, d^\bullet)$是$\mathcal{A}$中的一个上链，给定整数n，定义上链$\tau^{\le n}(X^\bullet, d^\bullet)$为

$$\cdots \xrightarrow{d^{n-2}} X^{n-1} \xrightarrow{d^{n-1}} \mathrm{Ker}\ d^n \xrightarrow{0} 0 \to \cdots ,$$

那么我们可以证明，

$$H^i(\tau^{\le n}(X^\bullet)) = \begin{cases} H^i(X^\bullet) & i \le n \\ 0 & i > n \end{cases},$$

类似地我们也有构造$\tau_{\ge n}(X^\bullet, d^\bullet)$，

$$\cdots \to 0 \to X^n/\mathrm{Im}\ d^{n-1} \xrightarrow{\bar{d^n}} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} X^{n+2} \to \cdots ,$$

对比例1.2，

例 1.4. 给定交换环R和（可能非交换的）R代数A，M是A双模，那么可以定义Chevalley-Eilenberg映射

$$\begin{aligned}\delta_n : M \otimes_R \bigwedge_{i=1}^{n} A &\to M \otimes_R \bigwedge_{i=1}^{n-1} A\\ m \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge a_n &\mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [m, a_i] \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge a_n\\ &\qquad + \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j-1} m \otimes [a_i, a_j] \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge \hat{a}_j \wedge \cdots \wedge a_n,\end{aligned}$$

我们来验证这给出一个R模链复形.

事实上，Chevalley-Eilenberg同调只依赖于A的Lie代数结构和M的Lie代数模结构

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$中上链$(X^\bullet, d^\bullet)$，.

定理 1.1. 设

$$0 \to X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \to 0$$

是*Abel*范畴$\mathcal{A}$中上链的正合列，那么存在上同调的长正合列

$$\cdots \to H^n(X^\bullet) \to H^n(Y^\bullet) \to H^n(Z^\bullet) \to H^{n+1}(X^\bullet) \to \cdots.$$

链复形也有完全对偶的同调版本，表述与证明几乎是完全等同的，在此

证明. 我们将长正合序列具体写出来

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_X^n \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_Y^n \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_Z^n \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & X^n \arrow[r] \arrow[d] & Y^n \arrow[r] \arrow[d] & Z^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & Z^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & \operatorname{coker} d_X^n \arrow[r] & \operatorname{coker} d_Y^n \arrow[r] & \operatorname{coker} d_Z^n \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

于是存在如下交换图，且横向序列由蛇形引理都是正合的：

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{coker} d_X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_X^n"] & \operatorname{coker} d_Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Y^n"] & \operatorname{coker} d_Z^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Z^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker d_X^{n+1} \arrow[r] & \ker d_Y^{n+1} \arrow[r] & \ker d_Z^{n+1}, &
\end{tikzcd}$$

其中$\bar{d}_X^n : \operatorname{coker} d_X^{n-1} \to \ker d_X^{n+1}$是下图（习题A.4）

$$
\begin{tikzcd}
 & & \ker d_X^{n+1} \arrow[d] & \\
X^{n-1} \arrow[r] & X^n \arrow[r] \arrow[d] & X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+2} \\
 & \operatorname{coker} d_X^{n-1} \arrow[uur, dashed] \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}
$$

由$d_X^n : X^n \to X^{n+1}$诱导的$\operatorname{coker} d_X^{n-1} \dashrightarrow \ker d_X^{n+1}$（在$R$模的情形就是选取一个代表元素$X^n/\operatorname{im} d_X^{n-1} \cong \operatorname{coker} d_X^{n-1}$，然后用$d_X^n$将代表元映到$\ker d_X^{n+1}$中）.再次根据蛇形引理，有长正合序列

$$\ker \bar{d}_X^n \to \ker \bar{d}_Y^n \to \ker \bar{d}_Z^n \to \operatorname{coker} \bar{d}_X^n \to \operatorname{coker} \bar{d}_Y^n \to \operatorname{coker} \bar{d}_Z^n.$$

但是，分解

$$X^n \xrightarrow{d_X^n} X^{n+1} = X^n \to \operatorname{coker} d_X^{n-1} \xrightarrow{\bar{d}_X^n} \ker d_X^{n+1} \hookrightarrow X^{n+1}$$

说明$\ker \bar{d}_X^n = \ker(\operatorname{coker} d_X^{n-1} \xrightarrow{\bar{d}_X^n} \ker d_X^{n+1} \hookrightarrow X^{n+1})$，根据定义

$$\ker \bar{d}_X^n = H^n(X^\bullet),$$

对偶地

$$\operatorname{coker} \bar{d}_X^n = H^{n+1}(X^\bullet),$$

这样就得到了希望的长正合序列. □

在蛇形引理的证明中，态射$\ker \bar{d}_Z^n \to \operatorname{coker} \bar{d}_X^n$是困难的，并且在长正合序列中它对应了阶数提升的态射$H^n(Z^\bullet) \to H^{n+1}(X^\bullet)$.这里有必要将整个态射详细清楚地描述出来.定理A.13的证明中详细描述了一般的构造，特别地，当$\mathcal{A}$是R模复形时，

$$
\begin{tikzcd}
 & \operatorname{coker} d_X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_X^n"] & \operatorname{coker} d_Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Y^n"] & \operatorname{coker} d_Z^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Z^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker d_X^{n+1} \arrow[r] & \ker d_Y^{n+1} \arrow[r] & \ker d_Z^{n+1} &
\end{tikzcd}
$$

对应的连接同态是明确的：任取$\ker \bar{d}_Z^n$中的元素$\bar{z} \in \operatorname{coker} d_Z^n$，根据$\bar{g}$是满射，存在$\bar{y} \in \operatorname{coker} d_Y^n$使得它在$\bar{g}$下的像是$\bar{z}$，根据证明中的说明，$\bar{d}_Y^n(\bar{y})$是将$d_Y^n$作用在$\bar{y}$的任意代表元上得到$\ker d_Y^{n+1}$中的元素，根据右侧的交换性存在$x \in \ker d_X^{n+1}$使得$f^{n+1}|_{\ker d_X^{n+1}}(x) = \bar{d}_Y^n(\bar{y})$，于是

$$\delta : H^n(Z^\bullet) \to H^{n+1}(X^\bullet)$$

将$H^n(Z^\bullet)$中以$\bar{z}$代表的元素映到$H^{n+1}(X^\bullet)$中x代表的元素，满足

$$f^{n+1}|_{\ker d_X^{n+1}}(x) = \bar{d}_Y^n(\bar{y}).$$

换句话说，δ^n的行为基本同于$\bar{d}_Y^n$.

定义. (quasi-isomorphism)

例 1.5. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的短正合序列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0,$$

那么

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

和

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

都是拟同构.

习题 1.1. 给定一族Abel范畴$\mathcal{A}$中的对象$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$和态射

$$d_i^{[n]} : X_n \to X_{n-1}, 0 \le i \le n$$

满足单纯条件

$$d_i^{[n-1]} d_j^{[n]} = d_{j-1}^{[n-1]} d_i^{[n]}$$

对$0 \le i < j \le n$成立，则称$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是预单纯的(pre-simplicial)，且$d_i^{[n]}$是面映射(face maps).求证

1. 定义

$$\partial_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^{[n]}$$

   满足$\partial_{n-1}\partial_n = 0$，于是一个预单纯对象$\{X_n, d_i^{X,[n]}\}_{n\in\mathbb{N},0\le i\le n}$给出一个链复形.

2. 给定$\mathcal{A}$中的预单纯对象$\{X_n, d_i^{X,[n]}\}_{n\in\mathbb{N},0\le i\le n}, \{Y_n, d_i^{Y,[n]}\}_{n\in\mathbb{N},0\le i\le n}$，$\{f_n : X_n \to Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是$\mathcal{A}$中的一族态射，满足

$$f_{n-1} d_i^{X,[n]} = d_i^{Y,[n]} f_n,$$

   则f给出了链复形之间的态射.称这样一族态射为预单纯态射(pre-simplicial morphism).

证明. 1. 按定义，

$$\begin{aligned}
\partial_{n-1}\partial_n &= \left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i d_i^{[n-1]}\right)\left(\sum_{j=0}^{n}(-1)^j d_j^{[n]}\right)\\
&= \sum_{\substack{i=0,\cdots,n-1\\ j=0,\cdots,n}}(-1)^{i+j}d_i^{[n-1]}d_j^{[n]}\\
&= \sum_{\substack{i=0,\cdots,n-1\\ j=0,\cdots,n\\ i<j}}(-1)^{i+j}d_i^{[n-1]}d_j^{[n]} + \sum_{\substack{i=0,\cdots,n-1\\ j=0,\cdots,n\\ i\geq j}}(-1)^{i+j}d_i^{[n-1]}d_j^{[n]}\\
&= \sum_{\substack{i=0,\cdots,n-1\\ j=0,\cdots,n\\ i<j}}(-1)^{i+j}d_{j-1}^{[n-1]}d_i^{[n]} + \sum_{\substack{i=0,\cdots,n-1\\ j=0,\cdots,n\\ i\geq j}}(-1)^{i+j}d_i^{[n-1]}d_j^{[n]} \qquad \text{单纯条件}\\
&= \sum_{\substack{i=0,\cdots,n-1\\ j-1=0,\cdots,n-1\\ j-1\geq i}}(-1)^{i+(j-1)+1}d_{j-1}^{[n-1]}d_i^{[n]} + \sum_{\substack{i=0,\cdots,n-1\\ j=0,\cdots,n\\ i\geq j}}(-1)^{i+j}d_i^{[n-1]}d_j^{[n]}\\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. 直接验证

$$f_{n-1}\partial_n^X = f_{n-1}\left(\sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^{X,[n]}\right) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i f_{n-1}d_i^{X,[n]} = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^{Y,[n]}f_n = \partial_n^Y f_n.$$

□

习题 1.2 (Hopf迹定理). 设$V^\bullet, W^\bullet$是域k上有界（$\exists N > 0$使得当$|n| > N$时$V^n = 0$）上链，且对任意n，V^n和W^n都是有限维k向量空间，$f : V^\bullet \to W^\bullet$是链同态，$f_* : H^n(V^\bullet) \to H^n(W^\bullet)$是诱导的上同调群同态.求证

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n \mathrm{Tr}\ f^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n \mathrm{Tr}\ f_*^n.$$

[归纳地构造向量空间合适的基.]

1.2 链同伦

另一方面，我们希望从拓扑的角度解释这样称呼他们的原因，设$f : X \to Y$是拓扑空间的连续函数，那么f的映射柱是拓扑空间$(X\times I)\coprod_f Y$，其中粘合依赖于$f : X\times\{1\} \to Y$，它在同伦的定义中起到了重要的作用.回顾拓扑中映射f, g的一个同伦是一个连续映射$H : X\times I \to Y$，满足$H|_{X\times\{0\}} = f$且$H|_{X\times\{1\}} = g$，用交换图表示即为

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & X\times I \arrow[d, "H"] & X \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\
& Y &
\end{tikzcd},$$

其中$i : X \to X\times I, x \mapsto (x, 0)$且$j : X \to X\times I, x \mapsto (x, 1)$.用到拓扑空间中余积是不交并的事实，上图又可以表示为

$$\begin{tikzcd} X\coprod X \arrow[r, "i\coprod j"] \arrow[dr, "f\coprod g"'] & X\times I \arrow[d, "H"] \\ & Y, \end{tikzcd}$$

注意到$X \times I$恰是$\mathrm{id}_X : X \to X$的映射柱，因而映射同伦的存在性恰由映射柱描述.这样的事情同样发生在$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中，一个上链映射的同伦$s : f \simeq g$可以给出一个$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$的交换图

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \oplus X^\bullet \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Cyl}(\mathrm{id}_X)^\bullet \arrow[d] \\ & Y^\bullet, \end{tikzcd}$$

习题-将给出验证.

引理 1.2. *任意给定加性函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，那么$F$将$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中的同伦链映为同伦链.*

习题 1.3. 习题1.1中给了预单纯复形的定义.假定$\{X_n, d_i^{X,[n]}\}_{n\in\mathbb{N},0\le i\le n}, \{Y_n, d_i^{Y,[n]}\}_{n\in\mathbb{N},0\le i\le n}$是Abel范畴$\mathcal{A}$中的预单纯链复形，且态射$h_i^{[n]} : X_n \to X_{n+1}$满足关系

$$\begin{aligned}
d_i^{[n+1]}h_j^{[n]} &= h_{j-1}^{[n-1]}d_i^{[n]}, && \forall\, i<j\\
d_i^{[n+1]}h_i^{[n]} &= d_i^{[n+1]}h_{i-1}^{[n]}, && i=j \text{ 或 } i=j+1\\
d_i^{[n+1]}h_j^{[n]} &= h_j^{[n-1]}d_{i-1}^{[n]}, && \forall\, i>j+1,\\
d_0h_0 = f,\ & d_{n+1}h_n = g.
\end{aligned}$$

求证$h := \sum_{i=0}^n (-1)h^i$给出了链同伦.

证明. □

习题 1.4.

1. 习题1.2给出了对于有限复形的迹，求证迹映射是加性的，即若有上链短正合列间的态射

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "f"] & Y^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "g"] & Z^\bullet \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r] & Y^\bullet \arrow[r] & Z^\bullet \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

   则$\mathrm{Tr}\ g = \mathrm{Tr}\ f + \mathrm{Tr}\ h$.

2. 接下来的部分考虑若给出的f, g和h不再是链同态时（此时它们同伦交换），迹不再是加性的.[1]

   (a) 设R是包含平方为零元素e的（含幺）环，即$e \neq 0, e^2 = 0$.构造$X^\bullet = R[1], Z^\bullet = R[0]$，即$X, Z$是分别集中于$1, 0$阶的1维自由$R$模；$Y^0 = Y^1 = R$，$d^0 = e$，且其余$Y$的项都为0.这样

$$\begin{tikzcd} & R \arrow[r, equal] \arrow[d, "e"] & R \\ R \arrow[r, equal] & R & \end{tikzcd}$$

[1]这个反例取自[1].

给出了短正合列

$$0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0.$$

求证$f = 0, h = 0$且$g = \begin{pmatrix} 0 \\ e \end{pmatrix} : Y \to Y$给出了同伦交换的图

$$\begin{tikzcd}
 & & R \arrow[rr, equal] \arrow[d, "e"] \arrow[dr, "0"] & & R \arrow[dr, "0"] & \\
R \arrow[rr, equal] \arrow[ddr, "0"] \arrow[drrr, dashed, bend right, "e"] & & R \arrow[ddr] & & & \\
 & & & R \arrow[rr, equal] \arrow[d, "e"] & & R \\
 & R \arrow[rr, equal] & & R. & &
\end{tikzcd}$$

(b) 求证$\mathrm{Tr}\, g = -e$，且$\mathrm{Tr}\, f = \mathrm{Tr}\, h = 0$.

1.3　映射锥和映射柱

给定Abel范畴$\mathcal{A}$，且设$X^\bullet = (X^n, d_X^n) \in \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$是$\mathcal{A}$中对象组成的复形，那么我们可以定义一个新的复形$X[n]^\bullet$，满足$(X[n])^i = X^{n+i}$，$d^i_{X[n]} = (-1)^n d_X^{n+i} : (X[n])^i \to (X[n])^{i+1}$.若$f : X^\bullet \to Y^\bullet$是一个链同态，则我们有诱导的链同态$f[n] : X[n]^\bullet \to Y[n]^\bullet$，满足$f[n]^i = f^{n+i} : (X[n])^i \to (Y[n])^i$.

我们称[1]为平移函子(translation by 1 functor)，它是拓扑中$- \times [0,1]$的类比.之后这个函子将给出了????上的一个三角结构(triangulated structure).

对偶地，

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$的一个链同态$f : X^\bullet \to Y^\bullet$，那么$f$的映射锥(mapping cone)是$\mathcal{A}$中对象组成的一个链$\mathrm{Cone}(f)^\bullet$满足

$$\mathrm{Cone}(f)^i := X[1]^i \oplus Y^i$$

和

$$d^i_{\mathrm{Cone}(f)} := \begin{pmatrix} d^i_{X[1]} & 0 \\ f[1]^i & d^i_Y \end{pmatrix} : \begin{tikzcd} X^{n+1} \arrow[r] \arrow[ddr] & X^{n+2} \\ \oplus & \oplus \\ Y^n \arrow[r] & Y^{n+1}, \end{tikzcd}$$

类似地我们可以定义f的映射柱(mapping cylinder)，它是$\mathcal{A}$中对象组成的一个链$\mathrm{Cyl}(f)^\bullet := X^\bullet \oplus X[1]^\bullet \oplus Y^\bullet$，其中

$$d^i_{\mathrm{Cyl}(f)} := \begin{pmatrix} d^i_X & -\mathrm{id}_{X[1]} & 0 \\ 0 & d^i_{X[1]} & 0 \\ 0 & f[1]^i & d^i_Y \end{pmatrix}.$$

这样微分映射的定义很明显是合理的，它们都是上链：

$$d_{\mathrm{Cone}(f)}^{i+1}\circ d_{\mathrm{Cone}(f)}^{i}=\begin{pmatrix}d_{X[1]}^{i+1} & 0\\ f[1]^{i+1} & d_Y^{i+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_{X[1]}^{i} & 0\\ f[1]^{i} & d_Y^{i}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d_{X[1]}^{i+1}\circ d_{X[1]}^{i} & 0\\ f[1]^{i+1}\circ d_{X[1]}^{i}+d_Y^{i+1}\circ f[1]^{i} & d_Y^{i+1}\circ d_{X[1]}^{i}\end{pmatrix}=0,$$

且

$$d_{\mathrm{Cyl}(f)}^{i+1}\circ d_{\mathrm{Cyl}(f)}^{i}=\begin{pmatrix}d_X^{i+1} & -\mathrm{id}_{X[1]} & 0\\ 0 & d_{X[1]}^{i+1} & 0\\ 0 & f[1]^{i+1} & d_Y^{i+1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}d_X^{i} & -\mathrm{id}_{X[1]} & 0\\ 0 & d_{X[1]}^{i} & 0\\ 0 & f[1]^{i} & d_Y^{i}\end{pmatrix}$$

例 1.6. 设$X^\bullet, Y^\bullet$是单对象上链，$f: X^\bullet\to Y^\bullet$是链映射，那么由定义

$$\mathrm{Cone}(f)=\cdots\to 0\to X^0\xrightarrow{f} Y^0\to 0\to\cdots,$$

其中Y^0所在的位置是0阶位置，且有$H^0=\mathrm{coker}\, f, H^{-1}=\ker f$.这意味着我们可以将Cone可以视作ker和coker的推广，这在后面三角范畴的讨论中是关键的问题.

对偶地，

引理 1.3. *Abel*范畴$\mathcal{A}$的一个链同态$f: X^\bullet\to Y^\bullet$诱导了同构$f^*: H^*(X^\bullet)\to H^*(Y^\bullet)$当且仅当$H^*(\mathrm{Cone}(f))=0$.

证明. 如下短正合列

$$0\to Y^\bullet\xrightarrow{i}\mathrm{Cone}(f)\xrightarrow{p} X[1]^\bullet\to 0$$

（其中i是嵌入p是投影）诱导了上同调群的长正合列

$$\cdots\to H^n(\mathrm{Cone}(f))\to H^n(X[1])\to H^{n+1}(Y)\to H^{n+1}(\mathrm{Cone}(f))\to\cdots,$$

于是$H^n(X[1])=H^{n+1}(X)\cong H^{n+1}(X)$当且仅当$H^n(\mathrm{Cone}(f))=0$对所有$n$成立，于是只要说明诱导长正合序列的连接态射是由$f$诱导的即可.考虑？？？？？ □

命题 1.2. 设*Abel*范畴$\mathcal{A}$的一个链同态$f: X^\bullet\to Y^\bullet$满足$\mathrm{Cone}(f)\simeq 0$，那么$f$是链同伦等价.

证明. 令$i: Y^\bullet\to\mathrm{Cone}(f)$是嵌入$p:\mathrm{Cone}(f)\to X[1]^\bullet$是投影.

首先，$i\simeq 0$当且仅当f有右同伦逆，即存在链映射$g: Y^\bullet\to X^\bullet$使得$fg\simeq\mathrm{id}_{Y^\bullet}$.一方面，若$i\simeq 0$，那么存在$h: Y^\bullet\to\mathrm{Cone}(f)[-1]$满足

$$d_{\mathrm{Cone}(f)}^{n-1}\circ h^n+h^{n+1}\circ d_Y^n=i,$$

按照直和分解$\mathrm{Cone}(f):=X[1]^\bullet\oplus Y^\bullet$，存在$s: Y^\bullet\to Y[-1]^\bullet$和$g: Y^\bullet\to X^\bullet$满足$h=s+g$，于是上式可以写为

$$\begin{pmatrix}d_{X[1]}^{n-1} & 0\\ f[1]^{n-1} & d_Y^{n-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}g^n\\ s^n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}g^{n+1}\\ s^{n+1}\end{pmatrix}d_Y^n=\begin{pmatrix}0\\ \mathrm{id}_Y\end{pmatrix}.$$

这意味着$g : Y^\bullet \to X^\bullet$是链映射，且

$$f[1]^{n-1} \circ g^n + d_Y^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_Y^n = \mathrm{id}_Y,$$

即g是右同伦逆.另一方面，f有右同伦逆，记为链映射$g : Y^\bullet \to X^\bullet$和$s : Y^\bullet \to Y[-1]^\bullet$，那么之前证明中的矩阵等式成立，于是找到了$h := s + g$满足$d_{\mathrm{Cone}(f)}^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_Y^n = i$，即$i \simeq 0$.

再来，$p \simeq 0$当且仅当f有左同伦逆，即存在链映射$h : Y^\bullet \to X^\bullet$使得$hf \simeq \mathrm{id}_{Y^\bullet}$.

最后，我们回到命题的证明来.$\mathrm{Cone}(f) \simeq 0$意味着$\mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)} \simeq 0$，于是$i = \mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)} \circ i \simeq 0 \circ i = 0$并且$p = p \circ \mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)} \simeq p \circ 0 = 0$，于是根据前面的讨论，$f$同时有左右同伦逆，因此$f$是同伦等价. □

拓扑上，考虑

定理 1.3. *任给定Abel范畴$\mathcal{A}$的一个链同态$f : X^\bullet \to Y^\bullet$，都存在如下$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$的正合列：*

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & Y^\bullet \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & X^\bullet[1] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r] & 0 & \\
 & X^\bullet \arrow[r, "f"] & Y^\bullet & & &
\end{tikzcd}$$

推论 1.3.1.

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$，称$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中的图

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \xrightarrow{h} X^\bullet[1]$$

为其中的一个三角(triangle)，三角间的态射(morphism)是如下交换图

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & X^\bullet[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
K^\bullet \arrow[r, "i"] & L^\bullet \arrow[r, "j"] & M^\bullet \arrow[r, "k"] & K^\bullet[1]
\end{tikzcd}$$

给定三角，若存在f使得三角同构于

$$X^\bullet \xrightarrow{f} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{\delta} X^\bullet[1]$$

则称它是特异三角(distinguished triangle).

如上定义给出的是

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[dr, "u"'] & & Z^\bullet \arrow[ll, "w"] \\ & Y^\bullet, \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

其中w

命题 1.4. $\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中的任意短正合序列$0 \to X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \to 0$都拟同构于某个特异三角.

证明. 考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r, "f"] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

□

习题 1.5. 设$\left(X^\bullet \oplus Y^\bullet, d = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right)$是上链复形，$(Y^\bullet, \delta^\bullet)$可缩上链复形且$h : Y^\bullet \to Y^\bullet[-1]$是链同伦，求证

$$(\mathrm{id}, -h\gamma) : (X^\bullet, \alpha - \beta h\gamma) \hookrightarrow (X^\bullet \oplus Y^\bullet, d)$$

是拟同构.这个练习说明消去可缩子复形不影响上同调.

证明. 首先来验证$(X^\bullet, \alpha - \beta h\gamma)$是链复形.由于

$$d^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix} = 0,$$

因此

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta h\gamma)^2 &= \alpha^2 - \alpha\beta h\gamma - \beta h\gamma\alpha + (\beta h\gamma)^2 \\ &= \alpha^2 + \beta\delta h\gamma + \beta h\delta\gamma + \beta h\gamma\beta h\gamma \\ &= \alpha^2 + \beta(h\delta + \delta h)\gamma + \beta h\delta^2 h\gamma, \end{aligned}$$

由于δ是微分映射且$h : \mathrm{id} \simeq 0$是收缩同伦，故如上计算$(\alpha - \beta h\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta\gamma = 0$.

再来验证$(\mathrm{id}, -h\gamma)$是链映射，这等价于图

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] X^n \arrow[r, "\alpha^n - \beta^n h^{n+1}\gamma^n"] \arrow[d, "\begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ -h^{n+1}\gamma^n \end{pmatrix}"'] & X^{n+1} \arrow[d, "\begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ -h^{n+2}\gamma^{n+1} \end{pmatrix}"] \\ X^n \oplus Y^n \arrow[r, "\begin{pmatrix} \alpha^n & \beta^n \\ \gamma^n & \delta^n \end{pmatrix}"'] & X^{n+1} \oplus Y^{n+1} \end{tikzcd}$$

是交换的.注意到

$$\begin{pmatrix}\alpha^n & \beta^n\\ \gamma^n & \delta^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ -h^{n+1}\gamma^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^n-\beta^n h^{n+1}\gamma^n\\ \gamma^n-\delta^n h^{n+1}\gamma^n\end{pmatrix}$$

且

$$\begin{pmatrix}\mathrm{id}\\ -h^{n+2}\gamma^{n+1}\end{pmatrix}(\alpha^n-\beta^n h^{n+1}\gamma^n)=\begin{pmatrix}\alpha^n-\beta^n h^{n+1}\gamma^n\\ -h^{n+2}\gamma^{n+1}\alpha^n+h^{n+2}\gamma^{n+1}\beta^n h^{n+1}\gamma^n\end{pmatrix}.$$

根据$d^2=0$，$\gamma^{n+1}\beta^n=-\delta^{n+1}\delta^n=0$，于是

$$-h^{n+2}\gamma^{n+1}\alpha^n+h^{n+2}\gamma^{n+1}\beta^n h^{n+1}\gamma^n=-h^{n+2}\gamma^{n+1}\alpha^n.$$

又由于$\gamma^{n+1}\alpha^n=-\delta^{n+1}\gamma^n$，

$$\begin{aligned}\delta^n h^{n+1}\gamma^n-h^{n+2}\gamma^{n+1}\alpha^n&=\delta^n h^{n+1}\gamma^n+h^{n+2}\delta^{n+1}\gamma^n\\&=(\delta^n h^{n+1}+h^{n+2}\delta^{n+1})\gamma^n\\&=\gamma^n,\end{aligned}$$

这就证明了图的交换性.

最后，嵌入映射

$$(\mathrm{id},-h\gamma):(X^\bullet,\alpha-\beta h\gamma)\hookrightarrow(X^\bullet\oplus Y^\bullet,d)$$

的余核$(Y^\bullet,\delta)$是零调的，因此长正合序列说明了嵌入是拟同构. □

1.4 内射消解和投射消解

定义. (augmented)

1.5 δ函子和导出函子

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A},\mathcal{B}$，$\mathcal{A}\to\mathcal{B}$的（协变）上同调$\delta$函子($\delta$-functor)是一族函子$\{T^i:\mathcal{A}\to\mathcal{B}\}_{i\in\mathbb{N}}$，和对任意$\mathcal{A}$中的短正合序列

$$0\to X\to Y\to Z\to 0,$$

都有态射$\delta^i_{Z,X}:T^i(Z)\to T^{i+1}(X)$，满足

1. 对任意给定的$\mathcal{A}$中的短正合序列$0\to X\to Y\to Z\to 0$，都存在长正合列
2. 若有$\mathcal{A}$中的短正合列交换图那么态射$\delta^i_{Z,X}$给出了自然的交换图

$$\begin{array}{ccc}T^i(Z_1)&\xrightarrow{\delta^i_{Z_1,X_1}}&T^{i+1}(X_1)\\ \downarrow&&\downarrow\\ T^i(Z_2)&\xrightarrow{\delta^i_{Z_2,X_2}}&T^{i+1}(X_2).\end{array}$$

对偶地，（协变）上同调δ函子(δ-functor)是一族函子$\{T_i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}\}_{i\in\mathbb{N}}$，和对任意$\mathcal{A}$中的短正合序列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0,$$

都有态射$\delta_i^{Z,X} : T_i(Z) \to T_{i-1}(X)$，满足

1. 对任意给定的$\mathcal{A}$中的短正合序列$0 \to X \to Y \to Z \to 0$，都存在长正合列
2. 若有$\mathcal{A}$中的短正合列交换图那么态射$\delta_i^{Z,X}$给出了自然的交换图

$$\begin{tikzcd}
T_i(Z_1) \arrow[r, "\delta_i^{Z_1,X_1}"] \arrow[d] & T_{i-1}(X_1) \arrow[d] \\
T_i(Z_2) \arrow[r, "\delta_i^{Z_2,X_2}"] & T_{i-1}(X_2).
\end{tikzcd}$$

其中的态射族δ统称为链接态射(connecting morphism).

在定义的记号中，链接态射关于的肩标（脚标）只记录了短正合列的第一和第三项，但实际它与整个短正合列都相关，并且相关性是自然的.严格的表述如下：

习题 1.6.

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A},\mathcal{B}$和加性函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，若对任意$\mathcal{A}$中的对象$X$，都存在单态射$i : X \to I$使得$F(i) = 0$，则称$F$是effecable的.对偶地，若对于任意任意$\mathcal{A}$中的对象$Z$，都存在单态射$p : P \to Z$使得$F(p) = 0$，则称$F$是coeffecable的.

定理 1.5. *给定Abel范畴$\mathcal{A},\mathcal{B}$和δ函子$(T^i,\delta)_{i\in\mathbb{N}}$，若对于任意$i > 0$，$T^i$都是有效的函子，那么$(T^i,\delta)_{i\in\mathbb{N}}$在所有$\delta$函子中是始对象，即*

证明. □

推论 1.5.1. *右导出函子是有效的，反之也成立.*

第二章　Tor函子和Ext函子

2.1　R模同调与Tor函子

引理 2.1. 给定环同态$\varphi : R \to S$，$(C_\bullet, \partial_\bullet)$是$S$右模复形，那么存在自然的$R$右模同构

$$H_n(\tilde{C}_\bullet) \cong \tilde{H}_n(C_\bullet),$$

其中$\tilde{C}_\bullet$是将S模视作R模得到的复形，$H_n(\tilde{C}_\bullet)$是这个对应复形的同调；$\tilde{H}_n(C_\bullet)$是先取复形$C_\bullet$的同调$H_n(C_\bullet)$再将其视为R模得到的R右模.

换句话说，模范畴的复形同调与基环的选取无关.

定义. 给定（右）R模链复形$(C_\bullet, \partial_\bullet)$和（左）$R$模$N$，则以$N$为系数的$C_\bullet$的同调(the homology of $C_\bullet$ with coefficient in N)为

$$H_n(C_\bullet; N) := H_n(C_\bullet \otimes_R N),$$

其中复形$C_\bullet \otimes_R N$是

$$\cdots \to C_{n+1} \otimes_R N \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes_R N} C_n \otimes_R N \xrightarrow{\partial_n \otimes_R N} C_{n+1} \otimes_R N \to \cdots.$$

定理 2.1.

推论 2.1.1. 给定R模短正合列

$$0 \to M \to N \to P \to 0,$$

满足P是平坦的，那么

1. M是平坦的当且仅当N是平坦的，

2. 对任意R模Q，$0 \to M \otimes_R Q \to N \otimes_R Q \to P \otimes_R Q \to 0$也是正合列.

2.2 R模上同调与Ext函子

2.2.1 R模同调与上同调的转换

2.3 特殊链复形和万有系数定理

2.3.1 特殊链复形

引理 2.2. 设$(P_\bullet, \partial_\bullet)$是投射$R$模链复形，$H_n(P_\bullet) = 0$对任意$n$成立，且所有的$\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$也都是投射的，则$P_\bullet \simeq 0$.

证明. 令$Z_n := \mathrm{Ker}\ \partial_n, B_n := \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$，那么对所有的整数$n$我们有短正合序列

$$0 \to Z_n \hookrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \to 0.$$

根据投射R模的提升性质，存在$h_{n-1} : B_{n-1} \to P_n$使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} & & & B_{n-1} \arrow[dl, dashed, "h_{n-1}"'] \arrow[d, equal] & \\ 0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r, hook] & P_n \arrow[r, "\partial_n"] & B_{n-1} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

因此$P_n = Z_n \oplus h_{n-1}(B_{n-1})$.由于$H_n(P_\bullet) = 0$，$Z_n = B_n$，于是复形可以重写为

$$\cdots \to Z_{n+1} \oplus h_n Z_n \xrightarrow{\partial_{n+1}} Z_n \oplus h_{n-1} Z_{n-1} \xrightarrow{\partial_n} Z_{n-1} \oplus h_{n-2} Z_{n-2} \to \cdots,$$

满足$\partial_n|_{Z_n} = 0, \partial_n|_{h_{n-1}Z_{n-1}} = (h_{n-1})^{-1}$，于是

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & Z_{n+1} \oplus h_n Z_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z_n \oplus h_{n-1} Z_{n-1} \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] & Z_{n-1} \oplus h_{n-2} Z_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h_{n-2}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Z_{n+1} \oplus h_n Z_n \arrow[r] & Z_n \oplus h_{n-1} Z_{n-1} \arrow[r, "\partial_n"] & Z_{n-1} \oplus h_{n-2} Z_{n-2} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

给出了链同伦$\mathrm{id} \simeq 0$. □

作为推论，考虑投射R模链复形的态射$f : M_\bullet \to N_\bullet$诱导了同构$f_* : H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$，那么$H_n(\mathrm{Cone}(f)) = 0$对任意$n$成立.但是，$\mathrm{Cone}(f)$也是投射$R$模链复形，由刚刚的引理$\mathrm{Cone}(f) \simeq 0$，于是根据命题1.2的对偶，$f$是链同伦.这样我们证明了

命题 2.2. 若投射R模链复形的态射$f : M_\bullet \to N_\bullet$诱导了同构$f_* : H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$，那么$f$是链同伦.

事实上，我们还可以证明更强的结论：如果同调群的同构$H_*(M_\bullet) \cong H_*(N_\bullet)$并不是由特定的态射诱导的话，给定的自由$R$模链复形$M_\bullet, N_\bullet$依旧依旧是同伦等价的，即：

定理 2.3. 若是hereditary且$(M_\bullet, \partial_\bullet^M), (N_\bullet, \partial_\bullet^N)$是自由$R$模链复形，那么$M_\bullet \simeq N_\bullet$当且仅当$H_n(M_\bullet) = H_n(N_\bullet)$对任意$n$成立.

为了证明定理2.3，我们需要建立由同调群映射到链复形态射的提升，即

命题 2.4. 给定R模链复形$M_\bullet, N_\bullet$且$M^\bullet$是投射链复形，且$\mathrm{Ker}\ \partial_n^M, \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}^M$都是投射的，则对于任意上同调群的同态$\varphi_* : H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$都可以找到链复形态射$f : M_\bullet \to N_\bullet$，使得$f_* = \varphi_*$.

证明. 按照假设$Z_n^M := \mathrm{Ker}\ \partial_n, B_n^M := \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$都是投射的，于是存在交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_n^M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}_n|_{B_n^M}"] & Z_n^M \arrow[r, "\pi_n^M"] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}_n"] & H_n^M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_n^N \arrow[r] & Z_n^N \arrow[r, "\pi_n^N"] & H_n^N \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

其中上下两行的正合性说明，对任意$\partial_{n+1}^M(m) = b \in B_n^M$，

$$\pi_n^N \circ \tilde{f}_n(b) = \pi_n^N \circ \tilde{f}_n(\partial_{n+1}(m)) = \varphi_n(\pi_n^M \circ \partial_{n+1}^M(m)) = 0,$$

因此$\tilde{f}_n(b) \in \mathrm{Ker}\ \pi_n^N = B_n^N$，这样只需要将$\tilde{f}_n$扩张到$M_n$即可.

考虑2.2中的分解$M_n = Z_n^M \oplus h_{n-1}(B_{n-1}^M)$，在如下交换图中

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n^M \arrow[r] \arrow[dd, "\tilde{f}_n"] & M_n \arrow[r] & B_{n-1}^M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & & & B_{n-1}^M \arrow[ul, "h_{n-1}"'] \arrow[dl, dashed, "k_{n-1}"'] \arrow[d, "\tilde{f}_n|_{B_{n-1}^M}"] & \\
0 \arrow[r] & Z_n^N \arrow[r] & N_n \arrow[r] & B_{n-1}^N \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

再次根据自由模的投射性质存在$k_{n-1} : B_{n-1}^M \to N_n$.于是，定义

$$f_n : M_n \to N_n$$
$$(z, h_{n-1}(b)) \mapsto \tilde{f}_n(z) + k_{n-1}(b),$$

这样只需要验证f是链映射且$f_* = \varphi_*$即可.计算得

$$f_n \partial_{n+1}^M((z, h_n(b))) = f_n(b, 0) = \tilde{f}_n(b) = \partial_{n+1}^N \circ k_n(b) = \partial_{n+1}^N(\tilde{f}_{n+1}(z) + k_n(b)) = \partial_{n+1}^N f_{n+1}((z, h_n(b))),$$

于是f是链映射，且$f_*([z]) = [\tilde{f}_n(z)]$，$\tilde{f}_n$的定义交换图说明$\varphi_n \circ \pi_n^M = \pi_n^N \circ \tilde{f}_n$，这样$[\tilde{f}_n(z)] = \varphi_n([z])$，即$f_* = \varphi_*$. □

结合命题2.2，此时定理2.3已经完成了证明.更进一步地，我们还有

命题 2.5. 给定R模投射链复形$M_\bullet, N_\bullet$，且$\mathrm{Ker}\ \partial_n^M, \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}^M, \mathrm{Ker}\ \partial_n^N, \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}^N$都是投射的，若$H_*(M_\bullet), H_*(N_\bullet)$也都是投射的，且态射$f, g: M_\bullet \to N_\bullet$诱导相同的同态$f_* = g_* : H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$，那么$f \simeq g$.

证明. 令$Z_n^M := \mathrm{Ker}\ \partial_n^M, B_n^M := \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}^M, Z_n^N := \mathrm{Ker}\ \partial_n^N, B_n^N := \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}^N$，将$H_*(M_\bullet)$看作（边缘算子为0的）链复形，那么显然$H_*(M_\bullet) = H_*(H_*(M_\bullet))$（这里固定一个同构视为相等），根据命题2.4，存在链映射$j_\bullet : M_\bullet \to H_*(M_\bullet)$使得$j_*$是同构$H_*(M_\bullet) = H_*(H_*(M_\bullet))$.根据命题2.2，$j_\bullet$存在同伦逆，记为$j_\bullet^{-1}$.类似地，存在链映射$k_\bullet : N_\bullet \to H_*(N_\bullet)$使得$k_*$是同构$H_*(N_\bullet) = H_*(H_*(N_\bullet))$，$k_\bullet^{-1}$是同伦逆.于是

$$f \simeq (k \circ k^{-1}) \circ f \circ (j \circ j^{-1}) = k \circ (k^{-1} \circ f \circ j) \circ j^{-1}.$$

另一方面，链复形$H_*(M_\bullet), H_*(N_\bullet)$的边缘算子都是0，链映射$H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$和它诱导的$H_*(H_*(M_\bullet)) \to H_*(H_*(N_\bullet))$没有差别，因此

$$k^{-1} \circ f \circ j = (k^{-1} \circ f \circ j)_* = k_*^{-1} \circ f_* \circ j_* = \mathrm{id} \circ f_* \circ \mathrm{id} = f_*,$$

同理$k^{-1} \circ g \circ j = g_*$，综合起来

$$f \simeq k \circ (k^{-1} \circ f \circ j) \circ j^{-1} = k \circ f_* \circ j^{-1} = k \circ g_* \circ j^{-1} = k \circ (k^{-1} \circ g \circ j) \circ j^{-1} \simeq g.$$

□

2.3.2 万有系数定理

定理 2.6. 给定环R和平坦右R模组成的复形$P_\bullet$，使得所有的子模$\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$也都是平坦的，那么对于任意的左$R$模$N$和$n \in \mathbb{Z}$，都存在正合序列

$$0 \to H_n(P_\bullet) \otimes_R N \to H_n(P_\bullet; N) \to \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(P_\bullet), N) \to 0,$$

natural.

证明. 首先对任意$n \in \mathbb{Z}$存在正合列

$$0 \to Z_n \hookrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \to 0,$$

根据推论2.1.1，Z_n也都是平坦的，且诱导的

$$0 \to Z_n \otimes_R N \to P_n \otimes_R N \to B_{n-1} \otimes_R N \to 0$$

也是正合列.这样，存在Abel群复形的短正合序列

$$0 \to Z_\bullet \otimes_R N \to P_\bullet \otimes_R N \to B[-1]_\bullet \otimes_R N \to 0,$$

并且诱导了长正合序列

$$\cdots \to H_{n+1}(B[-1]_\bullet \otimes_R N) \xrightarrow{\delta} H_n(Z_\bullet \otimes_R N) \to H_n(P_\bullet \otimes_R N) \to H_n(B[-1]_\bullet \otimes_R N) \to \cdots.$$

注意到$(Z_\bullet, \partial_\bullet|_Z)$和$(B[-1]_\bullet, \partial_\bullet|_B)$的边缘算子都是0，故$H_n(Z_\bullet \otimes_R N) = Z_n \otimes_R N, H_n(B[-1]_\bullet \otimes_R N) = B_{n-1} \otimes_R N$.这样，之前的长正合序列是

$$\cdots \to B_n \otimes_R N \xrightarrow{\delta_n} Z_n \otimes_R N \to H_n(P_\bullet \otimes_R N) \to B_{n-1} \otimes_R N \to \cdots,$$

其中，映射$\delta : B_n \otimes_R N \to Z_n \otimes_R N$恰好是嵌入$i_n : B_n \to Z_n$在$- \otimes_R N$下的象，这样有正合列

$$0 \to \operatorname{Coker} \delta_n \to H_n(P_\bullet \otimes_R N) \to \operatorname{Ker} \delta_{n-1} \to 0.$$

注意到

$$0 \to B_n \to Z_n \to H_n(P_\bullet) \to 0$$

是$H_n(P_\bullet)$的平坦消解，因此根据Tor诱导的长正合序列

$$0 \to \operatorname{Tor}_1^R(H_n(P_\bullet), N) \to B_n \otimes_R N \xrightarrow{\delta_n} Z_n \otimes_R N \to H_n(P_\bullet) \otimes_R N \to 0,$$

代入即可. □

对偶地，有上同调的万有系数定理：

定理 2.7. *给定环R和投射右R模组成的复形$P_\bullet$，使得所有的子模$\operatorname{Im} \partial_{n+1}$也都是投射的，那么对于任意的左$R$模$N$和$n \in \mathbb{Z}$，都存在正合序列*

$$0 \to \operatorname{Ext}_R^1(H_{n-1}(P_\bullet), N) \to H^n(P_\bullet; N) \to \operatorname{Hom}_R(H_n(P_\bullet), N) \to 0.$$

引理 2.3. *给定主理想整环R和自由R模M，则M的子模也是自由的.*

定义. 设$M^\bullet$是R模上链复形，若对每一个$n \in \mathbb{Z}$，M^n都是自由R模，则称$M^\bullet$是自由链复形(free cochain complex).

推论 2.7.1. *若$P_\bullet$是承袭环R模的投射链复形，那么存在自然的正合序列*

$$0 \to H_n(P_\bullet) \otimes_R N \to H_n(P_\bullet; N) \to \operatorname{Tor}(H_{n-1}(P_\bullet), N) \to 0,$$

（非典范的）分裂.对偶地，

证明. □

例 2.1. 若$M_\bullet$是主理想整环R模的自由链复形，给定一个拓扑空间X，

2.3.3 零调模型

定理 2.8. *给定环R的链复形$C_\bullet, D_\bullet \in$，满足$C_\bullet$是自由链复形，且$D_\bullet$是零调的.设$\varphi_0 : H_0(C_\bullet) \to H_0(D_\bullet)$是同态，则*

1. *存在链同态$f : C_\bullet \to D_\bullet$使得$(f_*)_0 = \varphi_0$，*
2. *任意满足如上性质的链同态都是同伦的.*

2.4 双复形和链复形中的乘法对象

2.4.1 双复形和全复形

定义. 分次模/分次对象

定义. 设M, N是分次R模，若R模态射$f : M \to N$满足存在整数d，使得对任意$n \in \mathbb{Z}$都有$f : M_n \to N_{n+k}$，则称f是阶数为k的分次映射(graded map of degree k).

命题 2.9. *若$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$分别是阶数为$k, l$的分次映射，则$g \circ f$是阶数为$k + l$的分次映射.*

定义. 一个双分次模(bigraded module)是一族有两个指标的R模

$$M := \{M^{p,q}\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}},$$

一般我们记为$M^{\bullet\bullet}$.若M, N是双分次模，一族映射

$$f = \{f^{p,q} : M^{p,q} \to N^{p+k,q+l}\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$$

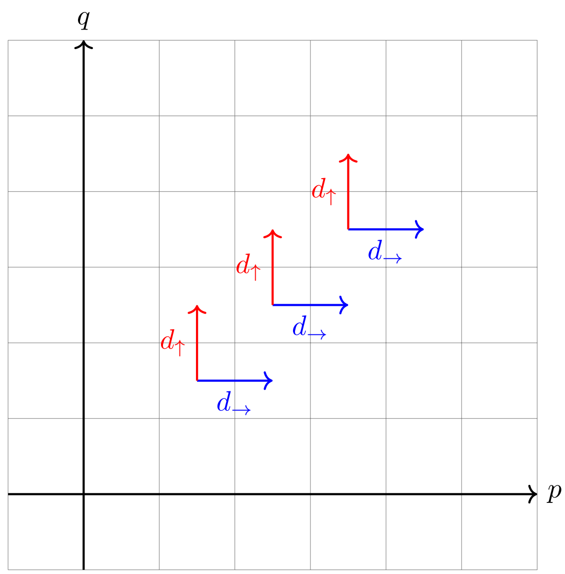
若都是R模映射，则称f是阶数为(k, l)的双分次映射.

接下来我们都用上同调的序号记号.

定义. 设M是双分次R模，$d_\rightarrow, d_\uparrow$是两个阶数分别为$(1,0)$和$(0,1)$的双分次微分映射（即$d_\rightarrow^{p+1,q}\circ d_\rightarrow^{p,q}=0$，$d_\uparrow^{p,q+1}\circ d_\uparrow^{p,q}=0$）.若映射满足

$$d_\rightarrow^{p,q+1}\circ d_\uparrow^{p,q}=d_\uparrow^{p+1,q}\circ d_\rightarrow^{p,q},$$

则称$(M,d_\rightarrow,d_\uparrow)$是一个**双复形**(bicomplex).



例 2.2. 设M是双分次R模，$d_\rightarrow,\delta$是两个阶数分别为$(1,0)$和$(0,1)$的双分次微分映射，使得$d_\rightarrow^{p,q+1}\circ\delta^{p,q}+\delta^{p+1,q}\circ d_\rightarrow^{p,q}=0$（注意这和双复形差了一个符号！），那么我们可以通过符号变换构造一个双复形.令$d_\uparrow^{p,q}=(-1)^p\delta^{p,q}$，那么

$$d_\rightarrow^{p,q+1}\circ d_\uparrow^{p,q}=d_\uparrow^{p+1,q}\circ d_\rightarrow^{p,q}.$$

定义. 给定环R和$M^\bullet\in\mathrm{Com}^\bullet(\mathbf{Mod}-R), N^\bullet\in\mathrm{Com}^\bullet(R-\mathbf{Mod})$，定义$M^\bullet\otimes N^\bullet$是一个$\mathbf{Ab}$上的双复形

$$\begin{aligned}M^\bullet\otimes N^\bullet=(M^i\otimes_R N^j, &d_\rightarrow^{i,j}=d_M^i\otimes_R\mathrm{id}_{N^j}:M^i\otimes_R N^j\to M^{i+1}\otimes_R N^j\\ &d_\uparrow^{i,j}=\mathrm{id}_{M^i}\otimes_R d_N^j:M^i\otimes_R N^j\to M^i\otimes_R N^{j+1})_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}},\end{aligned}$$

如下图

$$\begin{tikzcd}
M^i\otimes_R N^{j+1} \arrow[r, "d_\rightarrow^{i+1,j}"] & M^{i+1}\otimes_R N^{j+1} \\
M^i\otimes_R N^j \arrow[u, "d_\uparrow^{i,j}"] \arrow[r, "d_\rightarrow^{i,j}"'] & M^{i+1}\otimes_R N^j. \arrow[u, "d_\uparrow^{i,j+1}"']
\end{tikzcd}$$

注意到

$$\begin{aligned}&(d_{\rightarrow}^{i,j+1}\circ d_{\uparrow}^{i,j}+d_{\uparrow}^{i+1,j}\circ d_{\rightarrow}^{i,j})(m\otimes n)\\=&(-1)^i(d_M^i\otimes_R \mathrm{id}_{N^{j+1}})\circ(\mathrm{id}_{M^i}\otimes_R d_N^j)(m\otimes n)+(-1)^{i+1}(\mathrm{id}_{M^i}\otimes_R d_N^{j+1})\circ(d_M^i\otimes_R \mathrm{id}_{N^j})(m\otimes n)\\=&(-1)^i((d_M^i\otimes_R d_N^j)(m\otimes n)-(d_M^i\otimes_R d_N^j)(m\otimes n))\\=&0,\end{aligned}$$

因此$M^\bullet\otimes N^\bullet$是双复形.

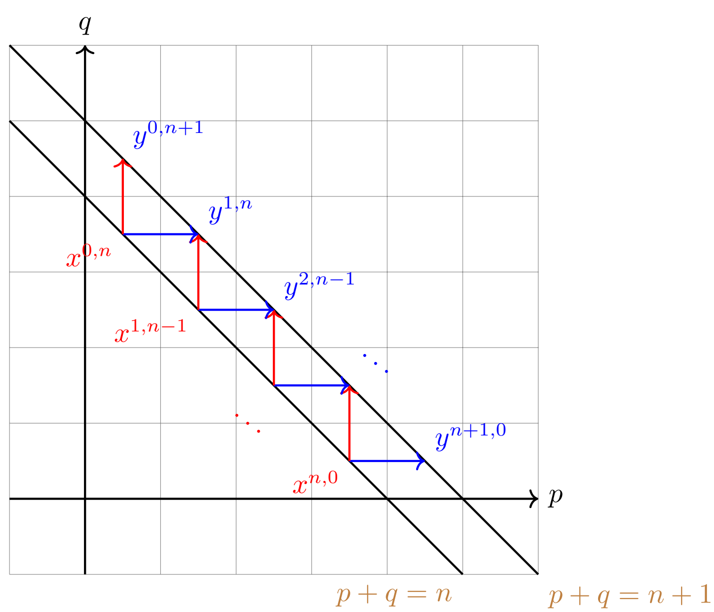
定义. 设M是双分次R模，那么

$$\mathrm{Tot}(M)^n:=\bigoplus_{p+q=n}M^{p,q}$$

和$D^n:\mathrm{Tot}(M)^n\to\mathrm{Tot}(M)^{n+1}$，

$$D^n:=\sum_{p+q=n}(d_{\rightarrow}^{p,q}+(-1)^p d_{\uparrow}^{p,q})$$

称为M的全复形(total complex).



(2.1)

引理 2.4. *若M是双复形，则$(\mathrm{Tot}(M),D)$是复形.*

很多时候，我们关心的上同调问题是某个双复形的全复形的上同调群，而谱序列就是一种计算全复形上同调群的某种技巧.

例 2.3. 给定一个第一象限的双复形$(D,d_{\rightarrow},d_{\uparrow})$，取

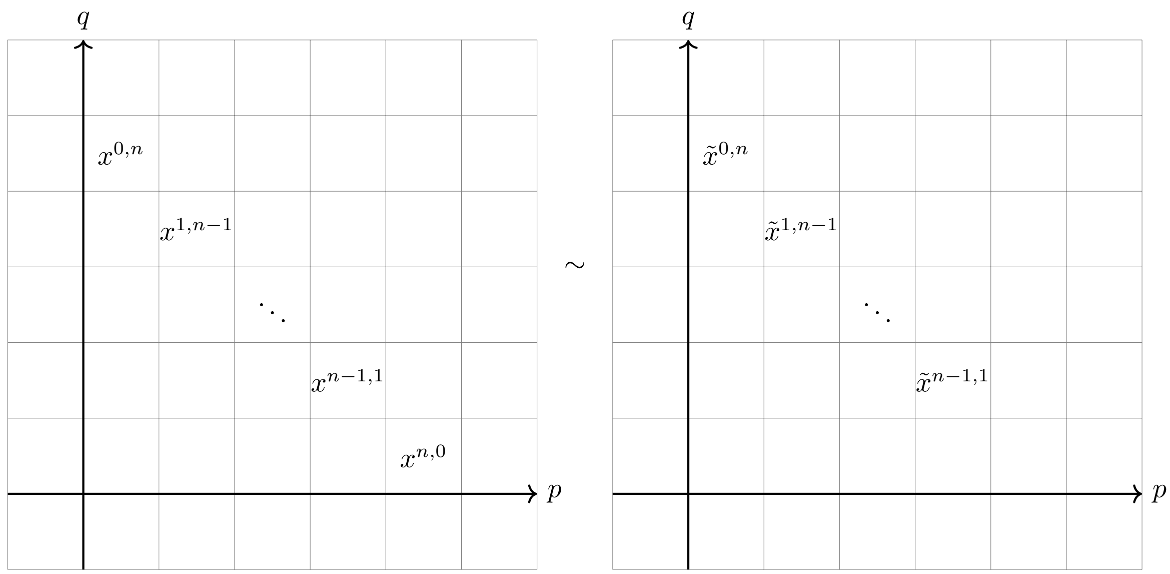
习题 2.1. 给定链复形的态射$f: X^\bullet \to Y^\bullet$，求证$\mathrm{Cone}\, f \cong \mathrm{Tot}$.

例 2.4. 设M是双分次R模，$(D, d_\to, d_\uparrow)$是一个双复形，那么我们可以定义双复形的转置M^T：这意味着

$$\mathrm{Tot}(M) = \mathrm{Tot}(M^T).$$

命题 2.10. 给定第一象限的双复形$(X^{\bullet,\bullet}, d_\to, d_\uparrow)$，若对任意$q \geq 0$，$X^{\bullet,q}$都是正合的，则$\mathrm{Tot}(X)$也是正合的.

证明. 任取n阶上闭链$x = \sum_{p=0}^n x^{p,n-p}$（若没有第一象限的有限性条件，这一步不正确，见习题2.2），我们首先证明存在与x在同一D同伦类的元素$\tilde{x} = \sum_{p=0}^{n-1} \tilde{x}^{p,n-p}$，即有如图



所示的代表元.由于$x = \sum_{p=0}^n x^{p,n-p}$是上闭链，$D(x) = D\left(\sum_{p=0}^n x^{p,n-p}\right) = 0$，特别地

$$d_\to(x^{n,0}) = 0.$$

由于双复形$X^{\bullet,\bullet}$的行都是正合的，因此存在$y^{n-1,0} \in X^{n-1,0}$使得$d_\to(y^{n-1,0}) = x^{n,0}$.按定义

$$D(y^{n-1,0}) = d_\to(y^{n-1,0}) + (-1)^{n-1} d_\uparrow(y^{n-1,0})$$

如上的讨论可以持续进行下去， □

推论 2.10.1. 给定第一象限的双复形$(X^{\bullet,\bullet}, d_\to, d_\uparrow)$，若存在$(C^\bullet, d_C)$和增广态射$a^\bullet : C^\bullet \to D^{\bullet,\bullet}$，对任意$p \geq 0$，

$$0 \to C^p \xrightarrow{a^p} D^{0,p} \xrightarrow{d_I^{0,p}} D^{1,p} \xrightarrow{d_I^{1,p}} D^{2,p} \to \cdots$$

都是正合列，则$a^\bullet$诱导了同构

$$H^*(C^\bullet) \cong H^*(\mathrm{Tot}(D^{\bullet,\bullet})).$$

证明. 我们要证明诱导的态射$a^*: H^*(C^\bullet) \to H^*(\mathrm{Tot}(D^{\bullet,\bullet}))$同时是单态射和满态射.

任取$H^*(C^\bullet)$中的上闭链α^n，并且假设它有代表元$\sum_{i=0}^n x^{i,n-i}$.由于$D(\alpha^n)=0$，第一象限意味着$d_I^{n,0}(x^{n,0})=0$，再根据行正合的性质存在$w^{n-1,0}$使得$d_I^{n-1,0}(w^{n-1,0})=x^{n,0}$. □

习题 2.2. 求证如下给出的双复形满足命题2.10的条件，即对任意q，$X^{\bullet,q}$都是正合的，但其全复形的上同调不为零：给定整数p，定义

$$X^{p,q} := \begin{cases} \mathbb{Z} & q=-p\text{或者}q=-p+1 \\ 0 & \text{其他情况}, \end{cases}$$

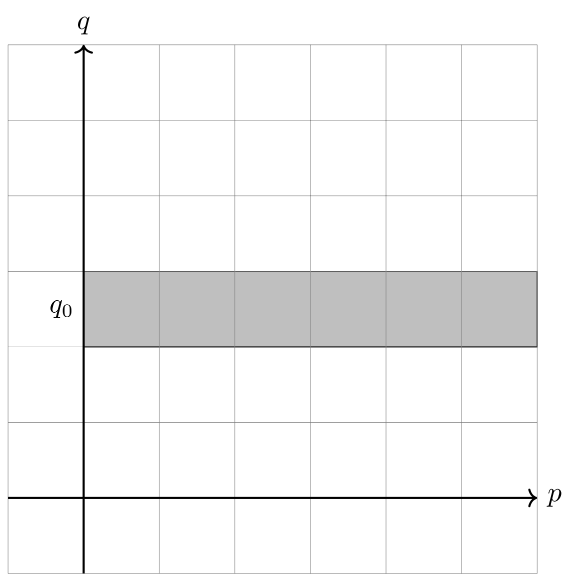
且$d_\uparrow^{p,-p}: X^{p,-p} \to X^{p,-p+1} = 2$，$d_\to^{p,-p}: X^{p,-p} \to X^{p+1,-p} = 1$，其余为0.

$$H^{p,q}(\mathrm{Tot}(X^{\bullet,\bullet})) := \begin{cases} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & q=-p+1 \\ 0 & \text{其他情况}. \end{cases}$$

定理 2.11. 给定第一象限的双复形$(X^{\bullet,\bullet}, d_\to, d_\uparrow)$，若$H_\to^{p,q}H_\uparrow(X)$只在某一行中，则

$$H_\to^{p,q}H_\uparrow(X) \cong H^{p+q}(\mathrm{Tot}(X)).$$

证明. 假设$H_\to^{p,q}H_\uparrow(X) \neq 0$当且仅当$q=q_0$，如图所示：



我们首先注意到以下事实：

1. 任意给定元素$[x] \in H_\to^{p,q}H_\uparrow(X)$，那么可以找到$x \in H_\uparrow^{p,q}(X)$是$[x]$的代表元，满足$d_\to^{p,q}(x) = 0 \in H_\uparrow^{p,q+1}(X)$，而这意味着存在代表元$x^{p,q} \in X^{p,q}$使得

$$d_\to(x^{p,q}) = d_\uparrow(x^{p+1,q-1}),$$

而$x^{p,q}$是x的代表元则意味着$d_\uparrow(x^{p,q})=0$，即

$$\begin{tikzcd} 0 & \\ x^{p,q} \arrow[u, "d_\uparrow"] \arrow[r, "d_\rightarrow"] & d_\rightarrow(x^{p,q}) = d_\uparrow(x^{p+1,q-1}) \\ & x^{p+1,q-1}. \arrow[u, "d_\uparrow"] \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

2. 若元素$[x]\in H^{p,q}_{\rightarrow}H_{\uparrow}(X)$为零，由$x^{p,q}\in X^{p,q}$给出的代表元$x\in H^{p,q}_{\uparrow}(X)$是$d_\rightarrow$的像，即存在$x^{p-1,q}$使得

$$d_\rightarrow([x^{p-1,q}]) = x = [x^{p,q}] \in H^{p,q}_{\uparrow}(X),$$

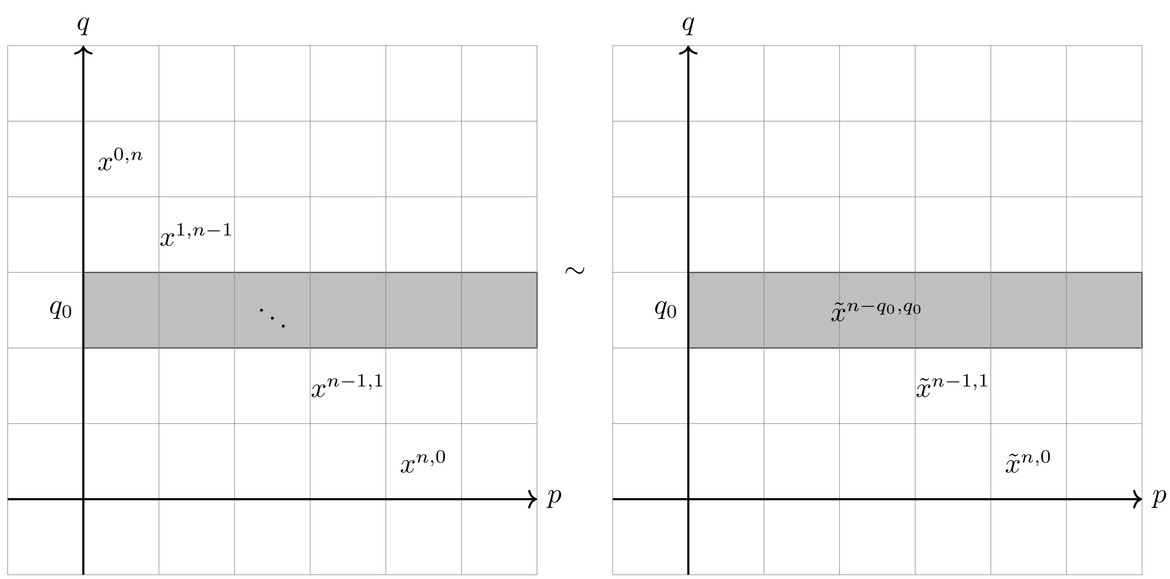
这意味着存在元素$x^{p,q-1}$使得

$$x^{p,q} - d_\rightarrow(x^{p-1,q}) = d_\uparrow(x^{p,q-1}),$$

其中由于$x^{p-1,q}$是$d_\uparrow$上同调的代表元$d_\uparrow(x^{p-1,q})=0$，即代表元为图

$$\begin{tikzcd} 0 & \\ x^{p-1,q} \arrow[u, "d_\uparrow"] \arrow[r, "d_\rightarrow"] & x^{p,q} = d_\uparrow(x^{p,q-1}) + d_\rightarrow(x^{p-1,q}) \\ & x^{p,q-1}. \arrow[u, "d_\uparrow"] \end{tikzcd} \tag{2.3}$$

一方面，任取n阶上闭链$x=\sum_{q=0}^{n} x^{n-q,q}$，不妨设$n>q_0$，我们首先证明存在与$x$在同一$D$同伦类的元素$\tilde{x}=\sum_{q=0}^{q_0}\tilde{x}^{n-q,q}$，即有如图



所示的代表元.根据定义，

$$D(x) = D\left(\sum_{q=0}^{n} x^{n-q,q}\right) = \sum_{q=0}^{n} D(x^{n-q,q}),$$

由于$X^{-1,n+1}=0$，$D(x)$的$(0,n+1)$项只能来源于$d_\uparrow(x^{0,n})$，因而由上闭链知$d_\uparrow(x^{0,n})=0$，进而根据等式2.2知$x^{0,n}$给出了$H^{0,n}_\to H_\uparrow(X)$中的一个元素，于是根据$H^{n,0}_\to H_\uparrow(X)=0$知，存在$y^{0,n-1}$使得

$$d_\uparrow(y^{0,n-1})=x^{0,n},$$

（实际上应当是$d_\uparrow(y^{0,n-1})+d_\to(z^{-1,n})=x^{0,n}$但$z^{-1,n}=0$）于是

$$\sum_{q=0}^n x^{n-q,q}=d_\uparrow(x^{0,n-1})+\sum_{q=1}^n x^{n-q,q}=D(x^{0,n-1})+(x^{1,n-1}-d_\to(x^{0,n-1}))+\sum_{q=2}^n x^{n-q,q},$$

令$\tilde{x}^{1,n-1}:=x^{1,n-1}-d_\to(x^{0,n-1})$，则意味着$x$与

$$\tilde{x}^{1,n-1}+\sum_{q=2}^n x^{n-q,q}$$

代表相同的D上同调类.同样的道理，$\tilde{x}^{1,n-1}$也给出了$H^{1,n-1}_\to H_\uparrow(X)$中的元素，若$H^{1,n-1}_\to H_\uparrow(X)=0$则存在$y^{1,n-2},z^{0,n-1}$使得

$$d_\to(z^{0,n-1})+(-1)^1 d_\uparrow(y^{1,n-2})=\tilde{x}^{1,n-1}$$

且$d_\uparrow(z^{0,n-1})=0$，于是

$$\begin{aligned}\tilde{x}^{1,n-1}+\sum_{q=2}^n x^{n-q,q}&=d_\to(z^{0,n-1})+(-1)^1 d_\uparrow(y^{1,n-2})+\sum_{q=2}^n x^{n-q,q}\\&=D(z^{0,n-1})+D(y^{1,n-2})+(x^{2,n-2}-(-1)^1 d_\to(y^{1,n-2}))+\sum_{q=3}^n x^{n-q,q},\end{aligned}$$

取$\tilde{x}^{2,n-2}=x^{2,n-2}-(-1)^1 d_\to(y^{1,n-2})$，则$x$与

$$\tilde{x}^{2,n-2}+\sum_{q=3}^n x^{n-q,q}$$

代表相同的D上同调类.这样的构造可以一直进行到第q_0行，使得

$$x\sim\tilde{x}^{n-q_0,q_0}+\sum_{q=q_0+1}^n x^{n-q,q} \tag{2.4}$$

此时我们定义

$$\begin{aligned}f:H^{p+q}(\mathrm{Tot}(X))&\to H^p_I H^q_{II}(X)\\ [x]&\mapsto[\tilde{x}^{n-q_0,q_0}].\end{aligned}$$

另一方面，任意给定满足图2.2的$H^{p,q}_\to H_\uparrow(X)$的代表元$x^{p,q}$，若$q\neq q_0$则按照图2.3存在元素$y^{p-1,q},y^{p,q-1}$使得

$$x^{p,q}=d_\to(y^{p-1,q})+d_\uparrow(y^{p,q-1})$$

且$d_\uparrow(y^{p-1,q})=0$.此时我们定义

$$\begin{aligned}g:H^p_\to H^q_\uparrow(X)&\to H^{p+q}(\mathrm{Tot}(X))\\ [x]&\mapsto[x^{p,q}+d_\to(y^{p,q-1})].\end{aligned} \tag{2.5}$$

接下来考虑$q=q_0$的情形.注意到

$$d_\uparrow d_\to(x^{p+1,q-1})=d_\to d_\uparrow(x^{p+1,q-1})=d_\to d_\to(x^{p-1,q})=0,$$

故$d_\to(x^{p+1,q-1})$给出了$H_\uparrow^{p+2,q-1}(X)$中元素的代表元，特别地此时$q=q_0$，$H_\to^{p+2,q-1}H_\uparrow(X)=0$，因此图2.3说明存在$y^{p+1,q-1}$和$x^{p+2,q-2}$满足

$$\begin{tikzcd}
0 & & \\
y^{p+1,q-1} \arrow[u, "d_\uparrow"] \arrow[r, "d_\to"] & d_\to(x^{p+1,q-1})=d_\uparrow(y^{p+1,q-1})+d_\to(x^{p+2,q-2}) \\
& x^{p+2,q-2}. \arrow[u, "d_\uparrow"]
\end{tikzcd}$$

取$\tilde{x}^{p+1,q-1}=x^{p+1,q-1}-y^{p+1,q-1}$，此时

$$\begin{tikzcd}
\tilde{x}^{p+1,q-1} \arrow[r, "d_\to"] & d_\to(\tilde{x}^{p+1,q-1})=d_\uparrow(x^{p+2,q-2}) \arrow[r, "d_\to"] & 0 \\
& x^{p+2,q-2}, \arrow[u, "d_\uparrow"] &
\end{tikzcd}$$

这意味着

$$\begin{aligned}
g: H_\to^p H_\uparrow^q(X) &\to H^{p+q}(\mathrm{Tot}(X)) \\
[x] &\mapsto [x+\tilde{x}^{p+1,q-1}+\tilde{x}^{p+2,q-2}+\cdots].
\end{aligned}$$

我们需要验证如上的映射是良定义的，并且互为逆. □

这就是说，横行正合的增广双复形的全上同调同于增广列的上同调.

2.4.2 复形中的乘法对象

定义. 给定R模复形$M^\bullet$和$N^\bullet$，那么它们的张量积(tensor product)$(M\otimes N)^\bullet$满足

$$(M\otimes N)^n:=\bigoplus_{i+j=n}M^i\otimes_R N^j,$$

微分映射由

$$\begin{aligned}
d^n:(M\otimes N)^n &\to (M\otimes N)^{n+1} \\
x\otimes y &\mapsto d_M^n(x)\otimes y+(-1)^{\deg x}x\otimes d_N^n(y)
\end{aligned}$$

扩张给出.

我们来验证如上定义给出了一个上链复形：

如下命题说明这样的定义是自然的：

命题 2.12. 给定R模复形$M^\bullet$和$N^\bullet$，记$M^\bullet \otimes N^\bullet$是双复形

此处有图

那么

$$\mathrm{Tot}(M^\bullet \otimes N^\bullet) \simeq (M \otimes N)^\bullet.$$

证明. □

引理 2.5. 给定R模复形同态的同伦$f_1^\bullet \simeq f_2^\bullet : M_1^\bullet \to M_2^\bullet$和$g_1^\bullet \simeq g_2^\bullet : N_1^\bullet \to N_2^\bullet$，那么存在链同伦

$$f_1^\bullet \otimes g_1^\bullet \simeq f_2^\bullet \otimes g_2^\bullet : (M_1 \otimes N_1)^\bullet \to (M_2 \otimes N_2)^\bullet,$$

特别地若有链同伦等价$M_1^\bullet \simeq M_2^\bullet, N_1^\bullet \simeq N_2^\bullet$，则有$(M_1 \otimes N_1)^\bullet \simeq (M_2 \otimes N_2)^\bullet$.

如果将引理的链同伦换为拟同构，则结论并不正确.

Mac Lane, Homology, Theorem 9.3 page 164.

例 2.5.

$$\mathbb{Z}[m] \otimes \mathbb{Z}[n] = \mathbb{Z}[m+n],$$

$$(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m] \otimes \mathbb{Z}[n] = \mathbb{Z}[m] \otimes (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[n] = (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m+n]$$

习题 2.3. 求证上链复形$(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m] \otimes (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})[n]$的上同调群是

$$H^q((\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m] \otimes (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})[n]) = \begin{cases} \mathbb{Z}/\gcd(k,l)\mathbb{Z} & q = m+n, m+n+1 \\ 0 & q \neq m+n, m+n+1. \end{cases}$$

命题 2.13. 给定R模复形$M^\bullet$和$N^\bullet$，那么双线性函数

$$M^p \times N^q \to (M \otimes N)^{p+q}$$
$$(x, y) \mapsto x \otimes y$$

诱导了上同调之间的映射

$$H^p(M^\bullet) \times H^q(N^\bullet) \to H^{p+q}((M \otimes N)^\bullet).$$

证明. 任取$(x, y) \in Z^p(M^\bullet) \times Z^q(N^\bullet)$，按照定义

$$d(x \otimes y) = d_M^p(x) \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes d_N^q(y) = 0,$$

于是$- \times -(Z^\bullet(M^\bullet) \times Z^\bullet(M^\bullet)) \subseteq Z^\bullet((M \otimes N)^\bullet)$.类似地，任意$(d_M^{n-1}(x), y) \in B^p(M^\bullet) \times Z^q(N^\bullet)$满足

$$d(x \otimes y) = d_M^{p-1}(x) \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes d_N^{q-1}(y) = d_M^{p-1}(x) \otimes y,$$

因此$- \times -(B^\bullet(M^\bullet) \times Z^\bullet(M^\bullet)) \subseteq B^\bullet((M \otimes N)^\bullet)$，对偶地$- \times -(Z^\bullet(M^\bullet) \times B^\bullet(M^\bullet)) \subseteq B^\bullet((M \otimes N)^\bullet)$.于是诱导的映射

$$H^p(M^\bullet) \times H^q(N^\bullet) \to H^{p+q}((M \otimes N)^\bullet)$$

满足$([z^p],[z^q]) \mapsto [z^p \otimes z^q]$是良定义的，线性性是根据定义直接的. □

推论 2.13.1. 给定交换环R和R模上链复形$S^\bullet$，对任意指标p,q存在双线性映射$- \smile - : S^p \times S^q \to S^{p+q}$满足

$$d(\alpha \smile \beta) = d(\alpha) \smile \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \smile d(\beta), \tag{2.6}$$

那么有诱导的“乘法”

$$- \smile - : H^p(S^\bullet) \times H^q(S^\bullet) \to H^{p+q}(S^\bullet).$$

证明. 根据张量积的泛性质，存在R线性映射$S^p \otimes_R S^q \dashrightarrow S^{p+q}$（也记为$\smile$）满足交换图

$$\begin{tikzcd} S^p \times S^q \arrow[r, "\smile"] \arrow[d, "\otimes"'] & S^{p+q} \\ S^p \otimes_R S^q, \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

于是等式2.6说明诱导的$\smile : S^p \otimes_R S^q \dashrightarrow S^{p+q}$是链映射，因此存在

$$\smile : H^{p+q}((S \otimes S)^\bullet) \to H^{p+q}(S^\bullet).$$

复合命题2.13给出的上同调之间的映射，这样得到了所希望的$- \smile - : H^p(S^\bullet) \times H^q(S^\bullet) \to H^{p+q}(S^\bullet)$. □

例 2.6. 给定拓扑空间，那么在$S^\bullet(X)$上有定义的乘积

命题 2.14. 上同调的张量积满足：

1. 结合性：对任意$x \in H^p(M^\bullet), y \in H^q(N^\bullet), z \in H^r(L^\bullet)$，

$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z),$$

2. 自然性：任意给定上链映射$f : M^\bullet \to U^\bullet$和$g : N^\bullet \to V^\bullet$，那么对任意的$x \in H^p(M^\bullet), y \in H^q(N^\bullet)$，

$$(f \otimes g)^{p+q}(x \otimes y) = f^p(x) \otimes g^q(y).$$

定理 2.15 (Künneth). 给定环R和平坦右R模组成的复形$P_\bullet$和左R模复形$Q_\bullet$，使得所有的子模$\mathrm{Im}\, \partial_{n+1}$也都是平坦的，那么对于任意的和$n \in \mathbb{Z}$，都存在正合序列

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(P_\bullet) \otimes_R H_q(Q_\bullet) \to H_n((P \otimes Q)_\bullet) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(P_\bullet), H_q(Q_\bullet)) \to 0.$$

推论 2.15.1. 给定主理想整环R的自由R模上链复形$M_1^\bullet, M_2^\bullet, N_1^\bullet, N_2^\bullet$，满足$H^n(M_1^\bullet) \cong H^n(M_2^\bullet), H^n(N_1^\bullet) \cong H^n(N_2^\bullet)$对所有的$n \in \mathbb{Z}$成立，那么$H^n(M_1^\bullet \otimes M_2^\bullet) \cong H^n(N_1^\bullet \otimes N_2^\bullet)$对所有的$n \in \mathbb{Z}$成立.

推论 2.15.2. 给定主理想整环R的自由R模上链复形$M^\bullet, N^\bullet$，使得$H^n(N^\bullet)$都是有限生成的自由模，那么

$$H^*(M^\bullet \otimes N^\bullet) \cong H^*(M^\bullet) \otimes H^*(N^\bullet).$$

这一小节的所有内容都可以形式地对偶到链复形的范畴上，得到相同的结果.

2.4.3 同调与上同调

这里我们只讨论上同调由同调给出的情形，另一种情形完全对偶地可以得出.此时，假定$(M_\bullet, \partial_\bullet^M), (N_\bullet, \partial_\bullet^N)$是给定的$R$模链复形，$(M^\bullet = \mathrm{Hom}_R(M_\bullet, R), d_M^\bullet = \mathrm{Hom}_R(\partial_\bullet^M, R)), (N^\bullet = \mathrm{Hom}_R(N_\bullet, R), d_N^\bullet = \mathrm{Hom}_R(\partial_\bullet^N, R))$是诱导的上链复形.

事实上，如此的设定并不是必须的，在后面的所有构造和证明中，我们真正用到的是给定一个R模复形$(M_\bullet, \partial_\bullet^M)$和$R$模上链复形$(M^\bullet, d_M^\bullet)$，存在$R$双线性的映射

$$\langle -, - \rangle : M^n \times M_n \to R$$

满足

$$\langle d(f), m \rangle = \langle f, \partial(m) \rangle$$

对任意$f \in M^n, m \in M_n, n \in \mathbb{Z}$都成立.但是，在本小节我们还是选择最初具体的假定，以帮助理解.

首先，命题2.13的对偶给出了链复形层面的张量积，而它本身给出了上链复形层面的张量积.当上链复形是由链复形诱导时，张量积同样可以被诱导：

引理 2.6. 双线性函数

$$\begin{aligned} M^p \times N^q &\to (M \otimes N)^{p+q} \\ (\alpha, \beta) &\mapsto (\alpha \otimes \beta : (m, n) \mapsto \alpha(a)\beta(n)) \end{aligned}$$

诱导了$(M \otimes N)^\bullet$的微分映射

$$\begin{aligned} d^n : (M \otimes N)^n &\to (M \otimes N)^{n+1} \\ \alpha \otimes \beta &\mapsto d_M^n(\alpha) \otimes \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \otimes d_N^n(\beta), \end{aligned}$$

且给出了上同调类的张量积

$$H^p(M^\bullet) \times H^q(N^\bullet) \to H^{p+q}((M \otimes N)^\bullet).$$

证明. 计算可得

$$\begin{aligned}
\langle d(\alpha\otimes\beta), a\otimes b\rangle &= \langle \alpha\otimes\beta, \partial(a\otimes b)\rangle \\
&= \langle \alpha\otimes\beta, \partial(a)\otimes b + (-1)^{\deg a} a\otimes\partial(b)\rangle \\
&= \langle \alpha, \partial(a)\rangle\langle\beta, b\rangle + (-1)^{\deg a}\langle\alpha, a\rangle\langle\beta,\partial(b)\rangle \\
&= \langle d\alpha, a\rangle\langle\beta, b\rangle + (-1)^{\deg\alpha}\langle\alpha, a\rangle\langle d\beta, b\rangle \\
&= \langle d(\alpha)\otimes\beta + (-1)^{\deg\alpha}\alpha\otimes d(\beta), a\otimes b\rangle,
\end{aligned}$$

于是 □

此时，同调与上同调存在相互的作用：

命题 2.16. 双线性函数

$$\begin{aligned}
-\frown - : N^q\times(M\otimes N)_{p+q} &\to M_p \\
(\beta, a\otimes b) &\mapsto \beta(b)a
\end{aligned}$$

对任意$\beta\in N^q, c\in(M\otimes N)_{p+q}$满足

$$\partial(\beta\frown c) = (-1)^p d\beta\frown c + \beta\frown(\partial c),$$

于是诱导了上同调在同调上的乘积

$$H^q(N^\bullet)\times H_{p+q}((M\otimes N)^\bullet)\to H_p(M_\bullet).$$

证明. 设$c=\sum_{i=0}^N a_i\otimes b_i$，那么

$$\begin{aligned}
\beta\frown(\partial c) &= \beta\frown\left(\sum_{i=0}^N \partial a_i\otimes b_i + \sum_{i=0}^N (-1)^{\deg a_i} a_i\otimes\partial b_i\right) \\
&= \sum_{i=0}^N \beta(b_i)\partial a_i + \sum_{i=0}^N (-1)^{\deg c-\deg b_i}\beta(\partial b_i)a_i \\
&= \partial\sum_{i=0}^N \beta(b_i)a_i + \sum_{i=0}^N (-1)^{\deg c-\deg\beta-1} d\beta(b_i)a_i \\
&= \partial(\beta\frown c) - (-1)^{\deg c-\deg\beta} d\beta\frown c.
\end{aligned}$$

□

例 2.7. 给定拓扑空间X，

命题 2.17. 任意给定$\alpha\in H^p(M^\bullet),\beta\in H^q(N^\bullet),\gamma\in H^r(L^\bullet), a\in H_{p+q}(M\otimes N), b\in H_{p+q+r}(M\otimes N\otimes L)$，满足

1. 结合性：$(\beta\otimes\gamma)\frown c=\beta\frown(\gamma\frown c)$，

2. 对偶性：$\langle\alpha\otimes\beta,b\rangle=\langle\alpha,\beta\frown b\rangle$，

3. 自然性：任意给定上链映射$f:M_\bullet\to U_\bullet$和$g:N_\bullet\to V_\bullet$，那么对任意的$x\in H^p(M^\bullet),y\in H^q(N^\bullet)$，

$$f_*((g^*\beta)\frown b)=\beta\frown(f\otimes g)(b),$$

用交换图表示为

$$\begin{tikzcd} N^q & \times & (M\otimes N)_{p+q} \arrow[r, "\frown"] \arrow[d, "f\otimes g"] & M_p \arrow[d, "f"] \\ V^q \arrow[u, "g"] & \times & (U\otimes V)_{p+q} \arrow[r, "\frown"] & U_p \end{tikzcd}$$

2.5 一个例子：

我们感兴趣的是一类特殊图的极限，被称为Abel群组成的塔(tower of abelian groups)，其中指标集$I=\mathbb{N}^\circ$是偏序集

$$\cdots\to2\to1\to0,$$

用$\mathbf{Ab}$中的对象表示就是

$$\cdots\to A_2\to A_1\to A_0,$$

或者更形式地，这样一个对象就是函子

$$A:\mathbb{N}^\circ\to\mathbf{Ab}.$$

它的极限$\lim_{\leftarrow}A_n$

$$\alpha:\prod_{i\in\mathbb{N}^\circ}A_i\to\prod_{i\in\mathbb{N}^\circ}A_i$$

定义. 给定一个Abel群塔$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，考虑映射

$$\Delta:\prod_{i\in\mathbb{N}^\circ}A_i\to\prod_{i\in\mathbb{N}^\circ}A_i,$$

其中$\Delta=\mathrm{id}-\alpha$，定义

$$\lim_{\leftarrow}{}^{n}A_i:=\begin{cases}\lim_{\leftarrow}A_i & n=0\\ \mathrm{Coker}\,\Delta & n=1\\ 0 & \text{其他情况}.\end{cases}$$

定义. 设一个Abel群塔$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$若满足对任意$m\geq 0$，都存在$n\geq m$使得$i\geq n$时，映射

$$A_i \to A_m$$

的像对所有的i都相同，则称$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$满足Mittag-Leffler条件.

定理 2.18. *若Abel群塔$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$满足Mittag-Leffler条件，那么*

$$\lim_{\leftarrow}{}^{1} A_n = 0.$$

证明. □

命题 2.19. *设$\cdots \to A_2 \to A_1 \to A_0$是一个正向系，满足任意$A_i$都是零调的Abel群上链复形，且所有的$A_{i+1}\to A_i$都是满射，那么$\lim_{\leftarrow} A_n$也是零调的.*

第三章　谱序列

同调代数关心了许多基本的问题，比如给定R模M的子模K同态$f: K \to N$，

3.1　正合对和导出正合对

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，D, E是$\mathcal{A}$中的对象，f, g, h是映射，若

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "f"] & & D \arrow[dl, "g"] \\ & E \arrow[ul, "h"] & \end{tikzcd}$$

是正合的，那么称(D, E, f, g, h)是正合对(exact couple).

定理 3.1. *若(D, E, f, g, h)是Abel范畴$\mathcal{A}$上的一个正合对，那么$d := g \circ h : E \to E$给出$\mathcal{A}$上的一个微分对象(E, d)，且存在一个新的正合对$(D_2, E_2, f_2, g_2, h_2)$*

$$\begin{tikzcd} D_2 \arrow[rr, "f_2"] & & D_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & E_2, \arrow[ul, "h_2"] & \end{tikzcd}$$

满足$E_2 = H(E, d)$，称为导出对(derived couple).

证明. 首先我们验证微分.按照定义，$d \circ d = (g \circ h) \circ (g \circ h) = g \circ (h \circ g) \circ h = g \circ 0 \circ h = 0$.

按照条件定义E_2是子商对象$H(E, d)$，定义D的子对象

$$D_2 := \operatorname{im} f \subseteq D,$$

且$f_2 := f|_{D_2} = f \circ \iota$，其中$\iota : D_2 \hookrightarrow D$是嵌入.接下来我们需要定义$h_2 : E_2 \to D_2$和$g_2 : D_2 \to E_2$，并且验证它们是正合对.

1. 首先我们证明复合态射

$$\operatorname{im} h = \ker f \hookrightarrow D \xrightarrow{g} E \twoheadrightarrow E_2 = \frac{\ker g \circ h}{\operatorname{im} g \circ h} = \operatorname{coker} g \circ h$$

是0态射：注意到由余核的定义，复合

$$D \xrightarrow{\tilde{h}} \mathrm{im}\, h \hookrightarrow D \xrightarrow{g} E \twoheadrightarrow E_2$$

为0，且由定理A.8，$\tilde{h}$是满态射，于是复合$\ker f \hookrightarrow D \xrightarrow{g} E \twoheadrightarrow E_2$为0.同时定理A.8说明$\mathrm{im}\, f = \mathrm{coker}\ker f$，于是根据余核的定义，存在唯一的态射$\mathrm{im}\, f \dashrightarrow E_2$使得图

$$\begin{tikzcd}
\ker f \arrow[r] & D \arrow[r, two heads] \arrow[d, "g"] & \mathrm{im}\, f \arrow[d, dashed] \\
 & E \arrow[r, two heads] & E_2
\end{tikzcd}$$

交换，记这个态射为g_2.

2. 根据正合性，运用与上一部分相同的论述可得

$$\mathrm{im}\, d \hookrightarrow E \xrightarrow{h} D = 0,$$

并且注意到

$$\ker d \xrightarrow{h|_{\ker d}} D \xrightarrow{g} E = \ker d \xrightarrow{d|_{\ker d}} E = 0,$$

正合性还说明$\mathrm{im}\, h|_{\ker d} \subseteq \ker g = \mathrm{im}\, f =: D_2$，于是余核的定义诱导了态射

$$E_2 = \frac{\ker d}{\mathrm{im}\, d} \to D_2,$$

记为h_2.

3. 对于正合性的验证

□

从证明中可以看出，诱导对中的D_2是子对象，诱导的态射f_2是限制，而E_2是E的子商对象.在$\mathcal{A}$是$R-$**Mod**时，g_2, h_2有简单的描述：

1. 任取$y \in D_2$，因此存在$x \in D$使得$y = f(x)$，且$g(x)$是上闭链（直接验证$d(g(x)) = g \circ h(g(x) = g(h \circ g(x))) = 0$），于是$g_2$可以定义为$g(x)$所代表的$H(E, d)$中的元素，即

$$\begin{aligned} g_2 : D_2 &\to E_2 \\ y = f(x) &\mapsto [g(x)]. \end{aligned}$$

2. 任取$[z] \in E_2$，其中$z \in E$是上闭链满足$0 = d(z) = g(h(z))$，于是$h(z) \in \mathrm{Ker}\ g = \mathrm{Im}\ f = D_2$，因而$h_2([z])$可以定义为$h(z)$，即

$$\begin{aligned} h_2 : E_2 &\to D_2 \\ [z] &\mapsto h(z). \end{aligned}$$

二者由于恰是证明中所描述的态射，因而良定义与正合性是已经证明的.

例 3.1. 给定正合对

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[rr, "f"] & & D \arrow[dl, "g"] \\
 & E \arrow[ul, "h"] &
\end{tikzcd}$$

满足h是0态射，则$d = g \circ h = 0$，于是根据正合性，$f : D \to D$是单射，因此$f : D \to \mathrm{im}\, f$是同构，

3.2 滤子和收敛性

3.2.1 滤子和谱序列

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，X是$\mathcal{A}$中的对象，则X的一个递降滤子(descending filtration)是一族X的子对象$\{F_nX\}_{n\in\mathbb{Z}}$满足

$$X = F_{-\infty}X \supseteq \cdots \supseteq F_nX \supseteq F_{n+1}X \supseteq \cdots 0 = F_{+\infty}X.$$

对偶地，若X的子对象$\{F^nX\}_{n\in\mathbb{Z}}$满足

$$0 \subseteq \cdots \subseteq F^nX \subseteq F^{n+1}X \subseteq \cdots X,$$

则称这是递增滤子(ascending filtration).

如上定义中递增与递降事实上只是对偶的存在，递降滤子用于处理上同调的情形，递增滤子处理同调的情形.略微不同于之前的讨论，谱序列中虽然同调与上同调依然是对偶的，但实际的处理会非常麻烦.因此我们这章选择列出包含对偶的结果，但证明则是完全对称的.

在给出任何例子之前，我们需要给出定义的详细解释：

- 给定X的上链滤子$\{F^nX\}_{n\in\mathbb{Z}}$，对任意的整数$n$，$F^nX$都是$X$的子对象，即存在单态射$i_n : F_nX \to X$；
- 对任意整数n，存在单态射$\iota_{n+1} : F_{n+1}X \to F_n$，满足交换图

$$\begin{tikzcd}
X & \\
F_nX \arrow[u, "i_n"] & F_{n+1}X \arrow[l, "\iota_{n+1}"] \arrow[ul, "i_{n+1}"']
\end{tikzcd}$$

即有$i_{n+1} \circ \iota_n = i_n$；

- 图

$$\cdots \xleftarrow{\iota_n} F_nX \xleftarrow{\iota_{n+1}} F_{n+1}X \xleftarrow{\iota_{n+2}} \cdots$$

在$\mathcal{A}$中的极限和余极限都存在，记为$F_{+\infty}X$和$F_{-\infty}X$，且满足$F_{-\infty}X = X$和$F_{+\infty}X = 0$.

mono limit

例 3.2. 假定$\mathcal{A}$是包含所有余积的Abel范畴（比如$\mathbf{Ab}$），给定$\mathcal{A}$上的复形$(C^\bullet, d)$，我们可以构造递降滤子如下：取$X := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C^n$，且

$$F_nX := \bigoplus_{q=n}^{\infty} C^q,$$

即递降滤子为

$$\cdots \longrightarrow C^{-1} \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow C^2 \longrightarrow \cdots$$

$$| \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad F_{-1}X \qquad\qquad\qquad}$$

$$| \xrightarrow{\qquad\qquad F_0X \qquad\qquad}$$

此时，微分态射$d : X \to X$是一个阶数为1的态射，即$d : X \to X[1]$.

考虑$A := \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} F_nX$，那么另一种写法$A = \bigoplus\limits_{n\in\mathbb{Z}} F_{n+1}X$给出了短正合列

$$0 \to A \xrightarrow{i} A \to B \to 0, \tag{3.1}$$

其中$i : A \to A$是$F_{n+1}X \hookrightarrow F_nX$给出的嵌入，那么此时

$$B = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \frac{F_nX}{F_{n+1}X} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} C^n.$$

同时，$C^\bullet$上的微分d诱导了滤子上的微分

$$\begin{tikzcd}
\cdots & \supseteq & F_{-1}X \arrow[drr, "d"] & \supseteq & F_0X \arrow[drr, "d"] & \supseteq & F_1X \arrow[drr, "d"] & \subseteq & \cdots \\
\cdots & \supseteq & F_{-1}X & \supseteq & F_0X & \supseteq & F_1X & \supseteq & \cdots,
\end{tikzcd}$$

这样也诱导了A, B上的微分，于是短正合列3.1给出了长正合序列

$$\cdots \to H^*(A) \to H^*(A[-1]) \to H^*(B) \to H^{*+1}(A) \to \cdots.$$

按定义，

$$H^q(i) : H^*(A) \to H^*(A[-1])$$

给出了自然的嵌入

$$\bigoplus_{q=n}^{\infty} H^q(C^\bullet) \hookrightarrow \bigoplus_{q=n-1}^{\infty} H^q(C^\bullet),$$

同时

$$H^q(B) = H^q(C^\bullet),$$

这刚好是$H^q(i)$的余核，也就意味着对于上链复形$(C^\bullet, d)$，链复形自身给出的滤子结构并不给出更多的信息.

例 3.3. 取Abel范畴$\mathcal{A}$和其上的复形$(X^\bullet, d^\bullet)$，按定义它的子对象是$\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中的单态射，具体写出来

1. 对任意整数n，存在单态射$i_n : Y_n \hookrightarrow X_n$；

2. 对任意整数n，图

$$\begin{tikzcd}
Y_n \arrow[r, "d_Y^n"] \arrow[d, "i_n"] & Y_{n+1} \arrow[d, "i_{n+1}"] \\
X_n \arrow[r, "d_X^n"] & X_{n+1}
\end{tikzcd}$$

交换，即$d_X^n \circ i_n = i_{n+1} \circ d_Y^n$，我们也记为$d(Y_n) \subseteq Y_{n+1}$.

我们称$(Y^\bullet, d_Y^\bullet)$是$(X^\bullet, d_X^\bullet)$的子复形.

结合例3.3，我们有

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$上的上链复形$(X^\bullet, d^\bullet)$，若对任意整数p，X^p上都存在递降滤子$\{F_n X^p\}_{n\in\mathbb{Z}}$，满足

$$d^n(F_p X^n) \subseteq F_p X^{n+1},$$

则称$(X^\bullet, d^\bullet)$是可滤上链复形(filtered cochain complex).

定理 3.2. *每一个Abel范畴$\mathcal{A}$中的上链$X^\bullet$的滤子$F_p X^\bullet$都给出一个正合对*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "f\ (-1{,}1)"] & & D \arrow[dl, "g\ (0{,}0)"] \\ & E, \arrow[ul, "h\ (1{,}0)"] & \end{tikzcd}$$

其中映射的度在图中已经标出.

证明. 我们有复形的短正合列

$$0 \to F_{p+1}X^\bullet \xrightarrow{i_{p+1}} F_p X^\bullet \xrightarrow{\pi_p} F_p X^\bullet / F_{p+1}X^\bullet \to 0,$$

这诱导了上同调群的长正合序列

$$\begin{aligned} \cdots \to & H^n(F_{p+1}X^\bullet) \xrightarrow{H^n(i_{p+1})} H^n(F_p X^\bullet) \xrightarrow{H^n(\pi_p)} H^n(F_p X^\bullet/F_{p+1}X^\bullet) \to \\ \xrightarrow{\delta^n} & H^{n+1}(F_{p+1}X^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(i_{p+1})} H^{n+1}(F_p X^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(\pi_p)} H^{n+1}(F_p X^\bullet/F_{p+1}X^\bullet) \to \cdots. \end{aligned}$$

我们取$n = p+q$，$f = H^\bullet(i_{p+1}), g = H^\bullet(\pi_p), h = \delta^\bullet$，并且

$$\begin{aligned} D &= \{D^{p,q} := H^{p+q}(F_p X^\bullet)\} \\ E &= \{E^{p,q} := H^{p+q}(F_p X^\bullet/F_{p+1}X^\bullet)\} \end{aligned}$$

代入到长正合序列中即为

$$\cdots \to D^{p+1,q-1} \xrightarrow{f^{p+1,q-1}} D^{p,q} \xrightarrow{g^{p,q}} E^{p,q} \xrightarrow{h^{p,q}} D^{p+1,q} \to \cdots.$$

□

定理3.2于是可以描述为，上链的（递降）滤子给出双分次正合对.

例 3.4. 我们换个角度来考虑定理3.2的结论.假定$\mathcal{A}$是包含所有余积的Abel范畴（比如**Ab**），$\mathcal{A}$中的上链$X^\bullet$有滤子$F_p X^\bullet$，定义$A := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} F_n X$，那么滤子的嵌入给出了短正合列

$$0 \to A \xrightarrow{i} A \to B \to 0,$$

推论 3.2.1. 每一个$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的上链$X^\bullet$的滤子$F_pX^\bullet$都给出一族正合对

$$\begin{tikzcd} D_r \arrow[rr, "f_r\ (1,-1)"] & & D_r \arrow[dl, "g_r\ (1-r,r-1)"] \\ & E_r, \arrow[ul, "h_r\ (-1,2)"] & \end{tikzcd}$$

且满足

1. 双分次映射f_r, g_r, h_r的度分别为$(1,-1), (1-r, r-1)$和$(-1,2)$.
2. 微分d_r的度为()，它由$hf_{-r+1}g$诱导.

证明. □

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，X是$\mathcal{A}$中的双分次对象，d是双分次映射满足$d \circ d = 0$，则称(X, d)是微分双分次对象(differential bigraded object).

若(X, d)是微分双分次对象，d的阶数为(k, l)，那么定义(X, d)的上同调为

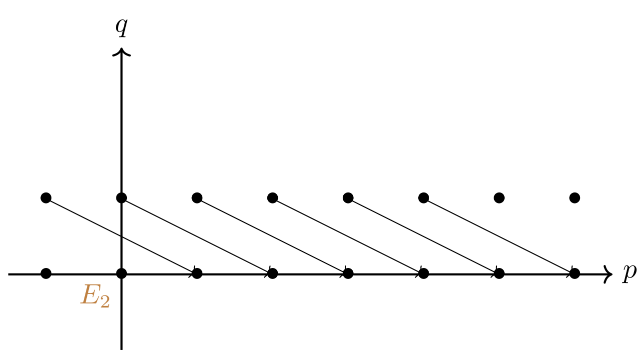
$$H(X, d)^{p,q} := \frac{\ker\, d^{p,q}}{\operatorname{im}\, d^{p-k,q-l}}.$$

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，$\mathcal{A}$上的谱序列(spectral sequence)$(E_r, d_r)_{r\geq 0}$是一族$\mathcal{A}$中的对象和态射的全体$E = (E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$，满足

1. 态射$d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$定义在第$r$页，且是微分映射，即$d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$.
2. 有同构
$$H^{p,q}(E_r) := \frac{\operatorname{Ker}\, d_r^{p,q}}{\operatorname{Im}\, d_r^{p+r,q-r+1}} \cong E_{r+1}^{p,q}.$$

推论3.2.1并没有给出第0页的描述，但实际上它是存在的，我们将会在后面讨论.

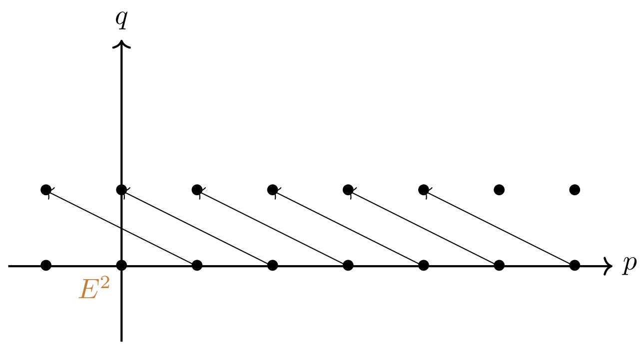
通常谱序列用图来表示更加容易，这里我们画出了第一页第二页



和第三页

的情形.可以看到，微分映射的阶数是随着页数的变化而变化的.

如上定义是上同调谱序列的定义，对偶地还有同调谱序列



习题 3.1. 给定谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 0}$，p, q是给定的整数.求证若

3.2.2 收敛性

考虑$\mathcal{A}$中上链$X^\bullet$的一个滤子$F_pX^\bullet$，将上同调函子作用在滤子上给出了图

$$
\begin{tikzcd}
0 = F_{+\infty}X \arrow[d, hook] & & 0 = H^n(F_{+\infty}X) \arrow[d] & 0 \arrow[d, hook] \\
\vdots \arrow[d, hook, "\iota_{p+1}"] & & \vdots \arrow[d, "H^n(\iota_{p+1})"] & \vdots \arrow[d, hook] \\
F_pX \arrow[d, hook, "\iota_p"] & \rightsquigarrow & H^n(F_pX) \arrow[r, "H^n(i_p)"] \arrow[d, "H^n(\iota_p)"] & \mathrm{Im}\, H^n(i_p) \arrow[d, hook] \\
F_{p-1}X \arrow[d, hook, "\iota_{p-1}"] & & H^n(F_{p-1}X) \arrow[r, "H^n(i_{p-1})"] \arrow[d, "H^n(\iota_{p-1})"] & \mathrm{Im}\, H^n(i_{p-1}) \arrow[d, hook] \\
\vdots \arrow[d, hook] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d, hook] \\
X = F_{-\infty}X & & H^n(X) = H^n(F_{-\infty}X) & H^n(X),
\end{tikzcd}
$$

此时$H^n(i_p)$不再是单射，但考虑$\mathrm{Im}\, H^n(i_p)$在$H^n(X)$中的像，我们有新的子对象关系（即上图的最右一列）

$$H^n(X) \supseteq \cdots \supseteq \mathrm{Im}\, H^n(i_p) \supseteq \mathrm{Im}\, H^n(i_{p+1}) \supseteq \cdots 0,$$

这意味着

$$\Phi_p H^n(X^\bullet) := \mathrm{Im}\, H^n(i_p)$$

是$H^n(X^\bullet)$的一个滤子，称为$F^pX^\bullet$在$H^*(X^\bullet)$上的诱导滤子(derived filtration).

例 3.5. 给定正阶数的复形$X^\bullet$，假定滤子

$$X \supseteq \cdots \supseteq F_nX \supseteq F_{n+1}X \supseteq \cdots 0.$$

满足$F_pX=F_0X=X$对任意$p<0$都成立，且$F_pX=0$对任意$p>3$都成立，

$$0\to A_\infty\xrightarrow{i_\infty}A_\infty\xrightarrow{q_\infty}B_\infty\to 0,$$

若$(E_r,d_r)_{r\geq 1}$是谱序列，那么$E_2=H(E_2,d_2)$是E_1的子商：$E_2:=Z_2/B_2$.同理我们知道E_3是E_2的子商，且

$$B_1\subseteq B_2\subseteq\cdots B_r\subseteq\cdots\subseteq Z_r\subseteq Z_2\subseteq Z_1\subseteq E_1.$$

定义. 给定谱序列$(E_r,d_r)_{r\geq 1}$，定义$Z_\infty:=\bigcap_{r\geq 1}Z_r$，$B_\infty:=\bigcup_{r\geq 1}B_r$，则谱序列的极限项(limit term)为

$$E_\infty^{p,q}:=\frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q}}.$$

借用MacLane的描述，Z^r是出现到第r页的对象，B^r是被第r页限制的对象，而Z^∞和B^∞是一直出现和最终被限制的对象.

引理 3.1. *设$(E_r,d_r)_{r\geq 1}$是谱序列，那么*

1. *$E_{r+1}=E_r$当且仅当$Z_{r+1}=Z_r,B_{r+1}=B_r$.*
2. *若存在s使得对任意$r\geq s$都有$E_{r+1}=E_r$，则$E_\infty=E_s$.*

例 3.6.

定义. 设$X^\bullet$是Abel范畴$\mathcal{A}$上的上链，$F^pX^\bullet$是上链的滤子.若$\forall n\in\mathbb{Z}$都能找到整数$l(n)$和$u(n)$使得$F^{u(n)}X^n=0$且$F^{l(n)}X^n=X^n$，则称滤子$F^pX^\bullet$是有界的(bounded).

另一个相关的概念是一致有界

定义. 给定Abel范畴中的谱序列$(E_r,d_r)_{r\geq 1}$，若存在(p,q)分次对象H^n和H^n的有界滤子Φ^pH^n满足

$$E_\infty^{p,q}\cong\frac{\Phi^pH^n}{\Phi^{p+1}H^n},$$

则称谱序列$(E_r,d_r)_{r\geq 1}$收敛到(converges to)H^n，记为

$$E_2^{p,q}\Rightarrow_p H^n.$$

换句话说，收敛性意味着所逼近的对象H^n上存在分次结构（有界递降滤子给出），使得谱序列的极限项按反对角线恰好对应该分次结构，即

$$\mathrm{Gr}\ H^n := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} \frac{\Phi^p H^n}{\Phi^{p+1} H^n} \cong \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} E_\infty^{p,n-p}.$$

注意到此时并不是意味着谱序列极限项能完全确定H^n.

定理 3.3. *Abel*范畴$\mathcal{A}$中的上链$X^\bullet$的有界滤子$F^pX^\bullet$给出的谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$都满足

1. 对任意给定的p,q都存在r使得$E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.
2. $E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$.

证明. 考虑短正合序列

$$0 \to \bigoplus F^{p+1}X^\bullet \to \bigoplus F^pX^\bullet \to \bigoplus F^{p+1}X^\bullet/F^pX^\bullet \to 0,$$

Bott-Tu 14.6

这会最终使得正合对中的$k: E \to D$最终为0， □

命题 3.4. 设$X^{\bullet\bullet}$是三象限双复形，且设${}^IE_r^{p,q}, {}^{II}E_r^{p,q}$是$\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet})$的第一滤子和第二滤子所诱导的谱序列，那么

1. 第一滤子和第二滤子都是有界的.
2. 对任意p,q都存在页数$r = r(p,q)$使得${}^IE_\infty^{p,q} = {}^IE_r^{p,q}, {}^{II}E_r^{p,q} = {}^{II}E_\infty^{p,q}$.
3. ${}^IE_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$且${}^{II}E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.

虽然这个结果看上去很不错，但不论是符号上还是实际计算上这些都并不能够帮助我们.

3.3 全复形的上同调

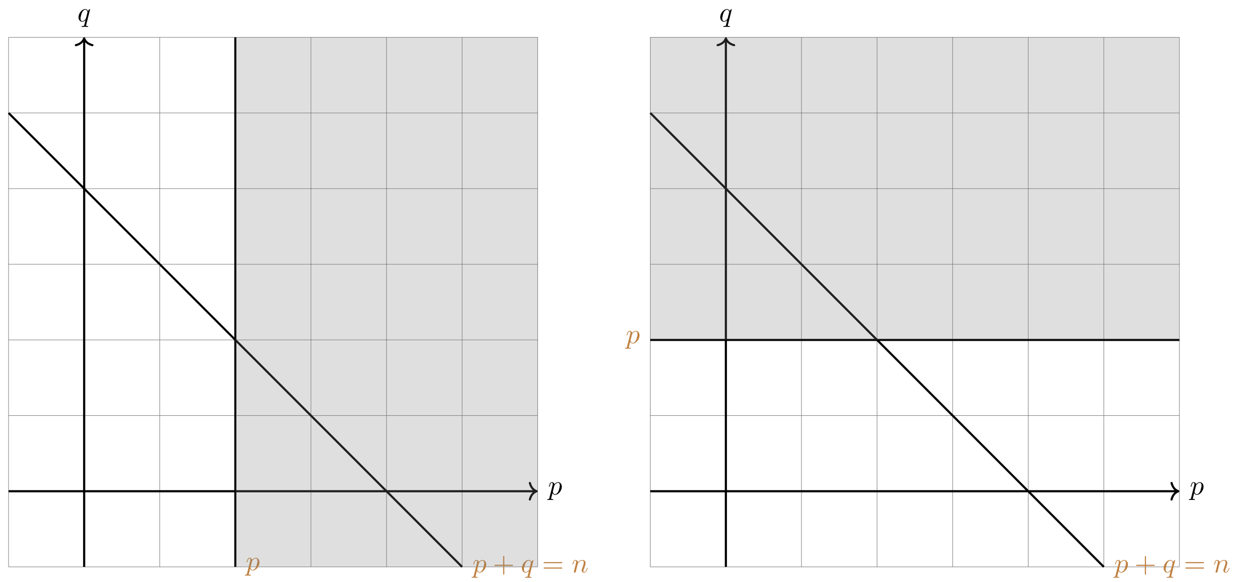
定义. 设M是双分次R模，(M, d_I, d_{II})是一个双复形，那么称

$$({}^IF^p\mathrm{Tot}(M))^n := \bigoplus_{i\geq p} M^{i,n-i} = \cdots \oplus M^{p+2,q-2} \oplus M^{p+1,q-1} \oplus M^{p,q}$$

为$\mathrm{Tot}(M)$的第一滤子(the first filtration)，称

$$({}^{II}F^p\mathrm{Tot}(M))^n := \bigoplus_{j\geq p} M^{n-j,j} = \cdots \oplus M^{p-2,q+2} \oplus M^{p-1,q+1} \oplus M^{p,q}$$

为$\mathrm{Tot}(M)$的第二滤子(the second filtration).



(a) 第一滤子 (b) 第二滤子

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，称$H_I^p(H_{II}^q(X^{\bullet\bullet}))$为$X^{\bullet\bullet}$的第一上同调(the first iterated cohomology)，称$H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet}))$为$X^{\bullet\bullet}$的第二上同调(the second iterated cohomology).

定理 3.5. *给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，则*

1. ${}^IE_1^{p,q} = H_{II}^q(X^{p,\bullet})$.
2. ${}^IE_2^{p,q} = H_I^p(H_{II}^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.

对偶地，我们同样有

定理 3.6. *给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，则*

1. ${}^{II}E_1^{p,q} = H_I^q(X^{\bullet,p})$.
2. ${}^{II}E_2^{p,q} = H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.

例 3.7. 给定R模范畴中的交换图

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & Q \\ {\scriptstyle h}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle k} \\ M & \xrightarrow{f} & N, \end{array}$$

做适当的变换我们得到一个三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，我们考虑N, P都是Q的子模的特殊情形，来计算该双复形的全复形

$$0 \to M \xrightarrow{()} P \oplus N \xrightarrow{g+k} Q$$

的上同调.

定义. 设$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$是Abel范畴中的谱序列，若$E_2^{p,q} = 0$对所有非零的q都成立，则称E_r落在p轴上(collapses on the p-axis).

以第一滤子为例，我们接下来会仔细分析双复形给出的谱序列的微分的含义.考虑定理3.3中给出的短正合列（Bott-Tu14）

$$E_1 = H_{\uparrow}(X^{\bullet,\bullet})$$

命题 3.7. 设$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$三象限谱序列，且$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$，若称$E_r$落在任意轴上，则

1. $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$对任意$p, q$成立.
2. 若E_r落在p轴上，则$H^n(X^\bullet) = E_2^{n,0}$；若$E_r$落在$q$轴上，则$H^n(X^\bullet) = E_2^{0,n}$.

定理 3.8. 给定*Abel*范畴$\mathcal{A}$中的三象限谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$，且$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$，则

1. 对任意n都存在满同态$E_2^{n,0} \to E_\infty^{0,n}$和单同态$E_2^{0,n} \to E_\infty^{n,0}$.
2. 对任意n都存在满同态$E_\infty^{n,0} \to H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$和单同态$E_\infty^{0,n} \to H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.
3. 存在正合序列
$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet})) \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to H^2(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$$

例 3.8. 给定Abel群的上链复形$C^\bullet$，$A^\bullet$是$C^\bullet$的子复形，考虑如下谱序列，其中第0页为

$$
\begin{array}{ccc}
C^0/A^0 & & \\
\downarrow & & \\
C^1/A^1 & & A^0 \\
\downarrow & & \downarrow \\
C^2/A^2 & & A^1 \\
\downarrow & & \downarrow \\
C^3/A^3 & & A^2 \\
\downarrow & & \downarrow \\
\vdots & & \vdots
\end{array}
$$

3.4 Cartan-Eilenberg预解

定义. 设$X^\bullet$是Abel范畴$\mathcal{A}$上的上链，那么称

$$0 \to Z^n \to X^n \xrightarrow{d^n} B^{n+1} \to 0$$
$$0 \to B^n \hookrightarrow Z^n \to H^n \to 0$$

为$X^\bullet$的基本短正合列(fundamental exact sequence).若上链复形$X^\bullet$的基本短正合列都分裂，则称$X^\bullet$分裂(split).

定义. 设$X^\bullet$是Abel范畴$\mathcal{A}$上的上链，如果

$$0 \to X^\bullet \to I^{0,\bullet} \to I^{1,\bullet} \to \cdots$$

是整合列且对每个p以下每个整合列都是$\mathcal{A}$中的内射预解

$$0 \to X^p \to I^{0,p} \to I^{1,p} \to \cdots$$
$$0 \to Z^p(X^\bullet) \to Z^{0,p} \to Z^{1,p} \to \cdots$$
$$0 \to B^p(X^\bullet) \to B^{0,p} \to B^{1,p} \to \cdots$$
$$0 \to H^p(X^\bullet) \to H^{0,p} \to H^{1,p} \to \cdots$$

则称这是$X^\bullet$的一个Cartan-Eilenberg内射预解(Cartan-Eilenberg injective resolution).

定理 3.9. *若Abel范畴$\mathcal{A}$中包含有足够多的内射对象，则$\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中的每个上链复形都有Cartan-Eilenberg内射预解.*

3.5 Kunneth谱序列

3.6 Grothendieck谱序列

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，且含有足够多的内射对象，X是$\mathcal{A}$的对象，$F:\mathcal{A}\rightrightarrows \mathbf{Ab}$是加性函子.若$R^pF(X)=0$对于任意$p\geq 1$都成立，则称$X$是右$F$零调的(right F-acyclic).

定理 3.10 (Grothendieck谱序列)**.** *设$F:\mathcal{A}\rightrightarrows\mathcal{B}, G:\mathcal{A}\rightrightarrows\mathcal{C}$是$Abel$范畴间的协变加性函子，且$\mathcal{B}$中包含足够多的内射对象，$F$将$\mathcal{A}$中的内射对象映为$\mathcal{B}$中的右$G$零调对象.那么对任意$\mathcal{A}$中的对象$X$，存在第一象限的收敛谱序列*

$$E_2^{p,q}:=(R^pG\circ R^qF)(X)\Rightarrow R^{p+q}(G\circ F)(X).$$

证明. 选取X在$\mathcal{A}$中的一个内射预解

$$0\to X\to J^1\to J^2\to\cdots,$$

于是我们得到$\mathcal{B}$中的一个 □

第四章　导出范畴

在之前非常多的情形中，当求得一个上链后，我们只关心它的上同调，对于上同调相同而各项和微分可能不同的上链并不做区别.形式上说，上链之间的同构过分严格，拟同构才是合适的进行分类的等价关系.但是在范畴

$$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$$

中，若态射$f^\bullet$是拟同构，它很难是同构，这就导致了很多问题，比如函子$\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M,-)$并不将拟同构映成拟同构.本章我们要建立形式化的语言，用同构的方式处理拟同构，也给导出函子建立更一般的框架.

4.1　范畴的局部化

定理 4.1. *设$\mathcal{C}$是一个范畴，U是其中的一族态射，则存在同构下唯一的范畴$\mathcal{C}[U^{-1}]$和函子$Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[U^{-1}]$，使得$U$中所有的态射都被$Q$映到$\mathcal{C}[U^{-1}]$中的同构，且满足如下泛性质：对任意范畴$\mathcal{D}$和任意函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，若$F$将$U$中所有的态射映到$\mathcal{D}$中的同构，则有唯一的分解*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{C}[U^{-1}] \arrow[d, dashed, "\tilde{F}"] \\ & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

我们称范畴$\mathcal{C}[U^{-1}]$为的$\mathcal{C}$局部化(localization).

习题 4.1. 定义范畴$\mathcal{D}$满足$\mathrm{ob}\,\mathcal{D} = \mathrm{ob}\,\mathbf{Ab}$，$\hom_\mathcal{D}(A,B) := \mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(A\otimes\mathbb{Q}, B\otimes\mathbb{Q})$.求证函子

$$\begin{aligned} \iota : \mathbf{Ab} &\to \mathcal{D} \\ M &\mapsto M \\ (f: M\to N) &\mapsto (f\otimes \mathrm{id}_\mathbb{Q} : M\otimes\mathbb{Q}, N\otimes\mathbb{Q}) \end{aligned}$$

是局部化.

这里需要注意，因为范畴中的一族态射U可以取得非常不理想，因此局部化之后的范畴可能并非再是局部小的.但这里我们忽略这样的问题，我们假定（虽然并不真实，但相较于主要问题，范畴本身的问题需要在其他的地方讨论）我们还是得到想要的范畴.

定义. 设U是范畴$\mathcal{C}$中的一族态射，满足如下条件：

1. 对任意$\mathcal{C}$中的对象A，$\mathrm{id}_A \in U$，且U关于态射的复合封闭，
2. (扩张条件)对任意$\mathcal{C}$中的态射$f: A \to B$和U中的态射$u: C \to B$，存在$\mathcal{C}$中的态射$g: D \to C$和U中的态射$v: D \to A$使得

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & C \arrow[d, "u"] \\ A \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

对偶地，对任意$\mathcal{C}$中的态射$f: B \to A$和U中的态射$u: B \to C$，存在$\mathcal{C}$中的态射$g: C \to D$和U中的态射$v: A \to D$使得

$$\begin{tikzcd} D & C \arrow[l, "g"'] \\ A \arrow[u, "v"] & B, \arrow[l, "f"] \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

3. 对任意$\mathcal{C}$中的态射$f, g: A \rightrightarrows B$，存在$u \in U$使得$uf = ug$当且仅当存在$v \in U$使得$fv = gv$，

则称这一族态射U是局部的(localizing).

习题 4.2. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，$\mathcal{B}$是$\mathcal{A}$的满子范畴，且$\mathcal{B}$对求子对象和商对象封闭.求证

$$U := \{f : X \to Y \mid \ker f, \mathrm{coker}\, f \in \mathcal{B}\}$$

是局部态射族.

我们大费周章地考虑对求逆态射的限制条件，重要的是当态射族U满足这些条件时，局部化范畴中的态射时非常容易描述的：

引理 4.1. 设U是范畴$\mathcal{C}$中的一族局部态射，那么$\mathcal{C}[U^{-1}]$可以被如下地描述：$\mathcal{C}[U^{-1}]$的对象同于$\mathcal{C}$中的对象，$A \to B$的态射可以被描述为如下的图的等价类：

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A & & B, \end{tikzcd}$$

其中，$u \in U$，$f: D \to B$是任意$\mathcal{C}$中的态射，记为$\frac{f}{u}$或者fu^{-1}.且$\frac{f}{u}$等价于$\frac{g}{v}$当且仅当存在$\frac{h}{w}$使得如下图交换

$$\begin{tikzcd} & & F \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[drrr, "f"' near end] & & E \arrow[dlll, "v" near end] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & & & B, \end{tikzcd}$$

其中图中$u, v, uw \in U$（但w可能不在U中），恒等态射是$\mathrm{id}_A = \frac{\mathrm{id}_A}{\mathrm{id}_A}$.最后，根据定义中的扩张条件，$\frac{f}{u} : A \to B$与$\frac{g}{v} : B \to C$的复合是

$$\begin{tikzcd}
 & & F \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
 & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & & E \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}
\Longrightarrow
\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, "uw"'] \arrow[dr, "gh"] & \\
A & & C.
\end{tikzcd}$$

证明. 我们首先验证如上定义了一个等价关系.自反性是考虑下图

$$\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[dl, "\mathrm{id}_D"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_D"] & & \\
 & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[drrr, "f"] & & D \arrow[dlll, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A & & & & B,
\end{tikzcd}$$

对称性是已知

$$\begin{tikzcd}
 & & F \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
 & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[drrr, "f"] & & E \arrow[dlll, "v"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & & & B,
\end{tikzcd}$$

其中按定义$vh = uw \in U$，于是

$$\begin{tikzcd}
 & & F \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "w"] & & \\
 & E \arrow[dl, "v"'] \arrow[drrr, "g"] & & D \arrow[dlll, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A & & & & B,
\end{tikzcd}$$

给出了等价关系.接下来是传递性，给定$X \to Y$的等价代表元

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[dl, green, "w"'] \arrow[dr, green, "h"] & & \\
 & A_1 \arrow[dl, red, "u"'] \arrow[drrr, "f"] & & A_2 \arrow[dlll, red, "v"'] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & & & Y
\end{tikzcd}$$

和$Y \to Z$的等价代表元

$$\begin{tikzcd}
 & & N \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
 & B_1 \arrow[dl, "u"'] \arrow[drrr, "f"] & & B_2 \arrow[dlll, "v"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Y & & & & Z,
\end{tikzcd}$$

为方便读图，红色表示U中的态射，绿色表示复合特定U中的态射后是U中的态射（例如w本身不是U中的态射但uw是U中的态射），于是根据扩张条件可以找到C_1, C_2使得交换图

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r] \arrow[d, "w_1"] & B_1 \arrow[d, "v_1"] \\
A_1 \arrow[r, "f_1"] & Y
\end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[r] \arrow[d, "w_2"] & B_2 \arrow[d, "v_2"] \\
A_2 \arrow[r, "f_2"] & Y
\end{tikzcd}$$

成立，这是在不同代表元下的复合.我们希望找到对象P给出交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & & & P \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \\
 & & & C_1 \arrow[ddll, bend right, "w_1"'] \arrow[ddrr] & & C_2 \arrow[ddll, "w_2"'] \arrow[ddrr, bend left] & & & \\
 & & M \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "h"] & & & & N \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "k"] & & \\
 & A_1 \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[drrr, "f_1"] & & A_2 \arrow[dlll, "u_2"'] \arrow[dr, "f_2"] & & B_1 \arrow[dl, "v_1"'] \arrow[drrr, "g_1"] & & B_2 \arrow[dlll, "v_2"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
X & & & & Y & & & & Z,
\end{tikzcd}$$

进而说明复合$[X \leftarrow C_1 \rightarrow Z]$与$[X \leftarrow C_2 \rightarrow Z]$是等价的.再次根据扩张条件可以找到

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d, "u_1 w_1"] \\
M \arrow[r, "u_1 p"] & X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Q_2 \arrow[r] \arrow[d] & Q_1 \arrow[d, "u_1 w_1"] \\
N \arrow[r, "u_1 p"] & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[d, "w_2"] \\
Q_2 \arrow[r, "u_1 p"] & A_2
\end{tikzcd}$$

接下来我们要验证态射的复合不依赖于代表元的选取.

最后我们验证这样构造的范畴具有相应的泛性质，因而这个范畴是我们希望的局部化.首先，存在自然的局部化函子

$$
\begin{aligned}
Q : \mathcal{C} &\to \mathcal{C}[U^{-1}] \\
A &\mapsto A \\
(f : A \to B) &\mapsto \frac{f}{\mathrm{id}_A},
\end{aligned}
$$

这样对于任意的$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，若$F$将$U$中所有的态射映到$\mathcal{D}$中的同构，可以定义

$$
\begin{aligned}
\bar{F} : \mathcal{C}[U^{-1}] &\to \mathcal{D} \\
A &\mapsto F(A) \\
\frac{f}{u} &\mapsto F(f)F(u)^{-1},
\end{aligned}
$$

（这里的顺序是重要的：） □

习题 4.3. 验证证明中给出的Q是函子.

定理 4.2. *设U是加性范畴$\mathcal{C}$中的一族局部态射，那么$\mathcal{C}[U^{-1}]$也是加性范畴.*

但是，我们希望研究的情形非常不幸地不满足这些局部的条件：对于Abel范畴$\mathcal{A}$的上链复形范畴$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$，拟同构不是局部的（习题???）.下一节我们将用合适的方式处理这个问题，使得我们这节建立的理论起到作用.结束之前，我们引入如下命题，在之后考虑有界复形时它会给我们理想的结果.

命题 4.3. *设U是范畴$\mathcal{C}$中的一族局部态射，$\mathcal{D}$是$\mathcal{C}$的满子范畴，如果$U_{\mathcal{D}} := U \cap \mathrm{mor}\,\mathcal{D}$是$\mathcal{D}$的局部态射，且如下的条件满足一条*

1. *对任意U中的态射$u : C \to D$，若$D \in \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$，则一定存在$B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{D}$和态射$f : B \to C$使得$u \circ f \in U$，*
2.

那么$\mathcal{D}[U_{\mathcal{D}}^{-1}] \hookrightarrow \mathcal{C}[U^{-1}]$是一个满忠实的嵌入.

本节的最后，我们讨论局部性与Serre子范畴之间的关系.练习

4.2 同伦范畴与导出范畴

引理 4.2. 设$\mathcal{A}$是*Abel*范畴，$D(\mathcal{A}) := \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})[Qiso^{-1}]$，且设$Q : \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$是局部化函子.求证若$f : X^\bullet \to X^\bullet$链同伦与$\mathrm{id}_X$，那么在$D(\mathcal{A})$中$Q(f) = \mathrm{id}_X$.

证明. 我们先假定如下事实： □

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$，定义$\mathcal{A}$的同伦范畴(homotopy category)$K(\mathcal{A})$如下：

1. $\mathrm{ob}\, K(\mathcal{A}) = \mathrm{ob}\, \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$，
2. 对任意$X^\bullet, Y^\bullet \in \mathrm{ob}\, \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$，$\mathrm{hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) := \mathrm{hom}_{\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)/\simeq$.

定理 4.4. 对*Abel*范畴$\mathcal{A}$，$* = +, -, b, \bullet$，那么

1. $f \in \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$是同构当且仅当它可以被图

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X^\bullet & & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

表示，且图中的两个态射都是拟同构.

2. $f \in \mathrm{Hom}_{K^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$且$Q(f) = 0$，那么$f^n : H^n(X^\bullet) \to H^n(Y^\bullet) = 0$对任意$n \in \mathbb{Z}$成立.
3. 嵌入函子$[0] : \mathcal{A} \to D^*(\mathcal{A})$是满忠实的，即存在集合的同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X[0], Y[0]).$$

命题 4.5. 若$X^\bullet$是*Abel*范畴$\mathcal{A}$上的零调复形，$I^\bullet$是内射复形，那么

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet) = 0.$$

命题 4.6. 若$X^\bullet \to Y^\bullet$是拟同构，$I^\bullet$是内射复形，那么

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Y^\bullet, I^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$$

是同构.

推论 4.6.1.

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$$

是同构.

定义.

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) :=$$

定理 4.7.

4.3 三角范畴

定义. 给定加性范畴$\mathcal{D}$，如果在$\mathcal{D}$上存在如下信息

1. 加性自同构$T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$，它被称为平移函子(translation functor)，通常对于对象$X \in \mathcal{D}$，记$X[1] := T(X)$，
2. 一族被称为特异三角(distingushed triangle)的图

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

和特异三角间的态射

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k"] & C \arrow[r, "l"] & A[1],
\end{tikzcd}$$

满足以下公理：

TR 1. (a) $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} X[1]$是特异三角；

(b) 任意同构于特异三角的图都是特异三角（特异三角在同构下封闭）；

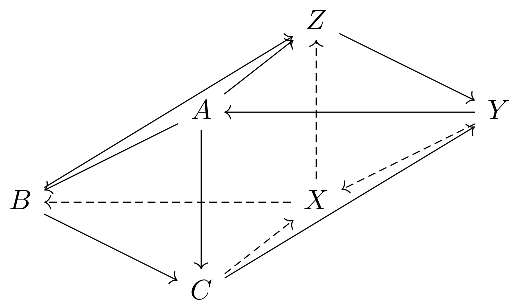
(c) 任意态射$X \xrightarrow{u} Y$都可以扩张为一个特异三角$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.

TR 2. 若$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$是特异三角，那么$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$也是特异三角.

TR 3. 给定两个特异三角$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$和$A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} C \xrightarrow{l} X[1]$，若存在$f : X \to A$和$g : Y \to B$使得$g \circ u = j \circ f$，那么存在（不要求唯一）的态射$h : Z \to C$构成特异三角间的态射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k"] & C \arrow[r, "l"] & A[1]. \end{tikzcd}$$

TR 4.



则称$\mathcal{D}$是一个三角范畴(triangulated category).若只有前三条公理成立，则称$\mathcal{D}$是预三角范畴(pre-triangulated categories).

习题 4.4. 若$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$是$\mathcal{D}$中的特异三角，求证$v \circ u, w \circ v, (-u[1]) \circ w$都是零态射.

习题 4.5. 若

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k"] & C \arrow[r, "l"] & A[1], \end{tikzcd}$$

是特异三角间的态射，且f, g都是同构，求证h也是同构.

定义. 给定（预）三角范畴$\mathcal{D}, \mathcal{E}$，若函子$F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$和自然态射$\eta : F(-[1]) \Rightarrow F(-)[1]$满足对任意$\mathcal{D}$中的特异三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1],$$

都能得到$\mathcal{E}$中的特异三角

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\eta_X \circ F(w)} F(X)[1],$$

则称函子F是正合的(exact)或三角的(triangulated).

定义. 给定（预）三角范畴$\mathcal{D}$和Abel范畴$\mathcal{A}$，若加性协变函子H将特异三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

映为$\mathcal{A}$中的正合序列

$$H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H(v)} H(Z) \xrightarrow{H(w)} H(X[1]),$$

则称函子H是上同调的(cohomological).若加性反变函子$H:\mathcal{D}^\circ \to \mathcal{A}$对应的函子$H^\circ:\mathcal{D} \to \mathcal{A}^\circ$是上同调的，则称$H$是反变同调的.

通常对于上同调函子，记$H^n(X) := H(X[n])$，于是$H^0(X) := H(X)$.于是，TR2说明给定一个特异三角就可以得到一个$\mathcal{A}$中的长正合序列.

定义. 给定三角范畴$\mathcal{D}$和Abel范畴$\mathcal{A}$，若函子$G:\mathcal{A}\to\mathcal{D}$满足对任意$\mathcal{A}$中的短正合序列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

都存在自然的同构$\delta_{X\to Y\to Z}$使得

$$X \to Y \to Z \xrightarrow{\delta_{X\to Y\to Z}} X[1]$$

是$\mathcal{D}$中的特异三角，则称G是δ函子(δ-functor).自然性意味着短正合序列的态射

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

给出特异三角的态射

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r, "\delta_{X\to Y\to Z}"] \arrow[d] & X[1] \arrow[d] \\
A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r, "\delta_{A\to B\to C}"] & A[1].
\end{tikzcd}$$

4.3.1 同伦范畴

4.3.2 导出范畴

命题 4.8. 对$Abel$范畴$\mathcal{A}$，$\mathrm{Com}^*(\mathcal{A})$中的短正合列

$$0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$$

诱导了$D^*(\mathcal{A})$中的特异三角.

4.3.3 生成元

定义. 给定三角范畴$\mathcal{D}$和对象E，若$\mathcal{D}$中包含E的最小的saturated满三角子范畴是$\mathcal{D}$，或者换句话说$\langle E\rangle = \mathcal{D}$，则称$E$是典型生成元(classical generator).

定义. 给定三角范畴$\mathcal{D}$和对象E，

1. 若存在正整数n使得$\langle E\rangle_n = \mathcal{D}$，则称$E$是强生成元(strong generator).
2. 若$\mathrm{Hom}(E, X[n]) = 0$对任意整数$n$都成立意味着$X \cong 0$，则称$E$是弱生成元(weak generator).

4.4 导出函子

给定Abel范畴间的函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，它自然诱导了函子$\mathrm{Com}^\bullet(F) : \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A}) \to \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{B})$和$K(F) : K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$.由于$F$与平移函子交换，诱导的函子保持范畴上面的三角结构.自然地我们会希望F诱导了导出范畴上的正合函子.在函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$本身是正合函子时，这是没问题的（命题4.9），但一般情形$K(F)$不将拟同构映为拟同构.不过退一步，当F是左正合或右正合时，在适当的情形我们可以找到相应的构造使得有对应诱导的函子.

在先前的章节中我们讨论过这个论题，这里我们用导出范畴的角度来定义导出函子，具体来说，给定一个Abel范畴的左（对应的，右）正合函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，在一定的情况下存在一个扩张函子$RF : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$（对应的，$LF : D^-(\mathcal{A}) \to D^-(\mathcal{B})$），称为$F$的右导出函子(right derived functor).

命题 4.9. *设Abel范畴间的函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$是正合的，那么*

1. *$K^*(F)$将拟同构映到拟同构，因此它诱导了函子$D^*(F) : D^*(\mathcal{A}) \to D^*(\mathcal{B})$，*
2. *$D^*(F)$是正合函子，即它将特异三角映到特异三角.*

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，$\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$是一族对象，对给定的左（右）正合函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$满足

1. F将$K^+(\mathcal{R})$（$K^-(\mathcal{R})$）中的零调序列映到零调序列，
2. $\mathcal{A}$中的任意对象都是$\mathcal{R}$中对象的子对象（商对象），

则称$\mathcal{R}$是适应于F的对象族(adapted to F).

例 4.1. 给定R模M，对函子$M \otimes_R -$，所有的平坦R模就是适应于该函子的一族对象.

定理 4.10. 设$\mathcal{R}$是$Abel$范畴$\mathcal{A}$中适应于左正合函子$F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$的对象，令$U_{\mathcal{R}}$为$K^+(\mathcal{R})$中的拟同构，那么$U_{\mathcal{R}}$在$K^+(\mathcal{R})$中是局部的，且自然的函子

$$K^+(\mathcal{R})[U_{\mathcal{R}}^{-1}]\to D^+(\mathcal{A})$$

是范畴的等价.

给定一个左正合函子$F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$，我们回顾一下经典意义下导出函子的构造，以$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,-)$为例：这是一个左正合函子，为了求得它的右导出函子$\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(M,-)$，首先取给定的Abel群$N$的内射消解$I^\bullet$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] & I^2 \arrow[r, "d^2"] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

再用$I^\bullet$代替$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,-)$中原本的$N$，得到上链

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,I^0)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,I^1)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,I^2)\longrightarrow\cdots,$$

它在$D^+(\mathbf{Ab})$中的像即是导出函子的像.这相当于选取一个范畴的同构（后面会说明如同经典情况的构造，不依赖于这个同构的选取）

$$P:D^+(\mathcal{A})\to K^+(\mathcal{R})[U_{\mathcal{R}}^{-1}],$$

然后

$$R\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,-):=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,P(-))$$

就是要找的导出函子.

定义. 对于左正合函子$F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$，存在如下的图

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^+(F)"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{B}}"] & D^+(\mathcal{B}) \\
& D^+(\mathcal{A}) &
\end{tikzcd}$$

若有函子$RF:D^+(\mathcal{A})\to D^+(\mathcal{A})$和自然态射$\eta:Q_{\mathcal{B}}\circ K^+(F)\Rightarrow RF\circ Q_{\mathcal{A}}$

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^+(F)"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & D^+(\mathcal{B}) \\
& D^+(\mathcal{A}) \arrow[ur, "RF"'] &
\end{tikzcd}$$

使得任意函子$G:D^+(\mathcal{A})\to D^+(\mathcal{A})$和自然态射$\xi:Q_{\mathcal{B}}\circ K^+(F)\Rightarrow RF\circ Q_{\mathcal{A}}$

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^+(F)"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\xi"] & D^+(\mathcal{B}) \\
& D^+(\mathcal{A}) \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

都存在唯一的自然变换δ :

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^+(F)"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{B}}"] & D^+(\mathcal{B}) \\
 & D^+(\mathcal{A}), \arrow[ur, bend left, "RF"] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta"] &
\end{tikzcd}$$

则称RF是F的右导出函子(right derived functor).

以上定义的交换图说明，一个左正合函子的右导出函子是对应图的左Kan扩张.根据Kan扩张的唯一性，导出函子若存在则一定唯一，这个事实对下面定理的证明非常关键.

定理 4.11. *假设左正合函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$有适应于$F$的对象族$\mathcal{R}$，那么$RF$存在且同构下唯一.*

4.5　例子

给定环R和$M \in \mathbf{Mod} - R$，函子

$$M \otimes_R - : R - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$$

是右正合的，

第五章　层及其上同调

5.1　层的基本理论

在几何中，我们经常遇到从局部性质到整体性质的过渡，例如我们在讲光滑函数时对光滑性的定义是局部的，但光滑性可以是整体的性质；任意一个流形都是局部可定向的，但一个流形并不一定是整体可定向的.在从局部到整体的过渡中，我们通常使用的方法是局部坐标，当局部坐标满足一定性质时我们可以找到更大的坐标，这个更大的坐标限制到小的坐标上与原来小的坐标有相同的性质.如果将这样的过程抽象出来就是层的构造.

5.1.1　预层与层的基本性质

定义. 设X是一个拓扑空间.对X的每个开集U，我们赋予其一个Abel群$\mathscr{F}(U)$，并且对任意满足$V \subseteq U$的开集U, V，存在映射$\rho_V^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$，满足如下条件：

(i) $\mathscr{F}(\emptyset) = 0$；

(ii) $\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(U)}$；

(iii) 对所有满足$W \subseteq V \subseteq U$的开集$U, V, W$，$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$；

这样的在拓扑空间X上的结构$\mathscr{F}$我们称为**预层**(presheaf)，$\mathscr{F}(U)$中的元素称为开集U的**截面**(section)，映射$\rho_V^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$称为**限制映射**(restriction map).

例 5.1. 设X是一个复流形，$\mathscr{M}$是如下定义的**亚纯函数层**(sheaf of meromorphic functions)

$$\mathscr{M}(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \mid f\text{是亚纯的}\},$$

且对于任意$f \in \mathscr{M}(U)$和开集$V \subseteq U$，定义$\rho_V^U(f)$是f在V上的限制，则$\mathscr{M}$是X上的预层.

在上面的例子中，预层$\mathscr{M}$的限制同态确实是函数的限制——但通常而言，限制同态可以是任意的映射.对于元素$s \in \mathscr{F}(U)$，我们也用通常的限制记号：$s|_V := \rho_V^U(s)$，然而这一般与真正函数的限制很不同.

注意到任意的拓扑空间X可以自然地成为一个范畴$\mathbf{Open}(X)$，这样每个预层都是一个反变函子$\mathbf{Open}(X) \to \mathbf{Ab}$，可以想到的是，我们并不需要将函子的值域限定为$\mathbf{Ab}$，其他任意合理的范畴都可以得到有用的预层.当值域范畴为$\mathbf{Ab}$、$\mathbf{Ring}$、$R-\mathbf{Mod}$时，我们分别称$\mathscr{F}$为X上的Abel群预层、环预层和R模预层.

这种对于预层的理解还有其他的好处——我们可以非常容易地定义预层之间的**态射**(morphism)——一个预层的态射就是函子间的自然变换.如果我们显式地将预层态射$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$的定义写出来，即是对任意$X$中的开集$V \subseteq U$，我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\theta_V^U"] \\
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathscr{G}(V),
\end{tikzcd}$$

其中ρ_V^U, θ_V^U分别是预层$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$的限制映射.这样对于拓扑空间X，我们得到了一个范畴$\mathbf{PShAb}(X)$，其对象是X上的Abel群预层，态射是预层的态射.

例 5.2. 设X是任意的拓扑空间，M是任意的Abel群，对开集U定义$M_X(U) = M$对于满足$V \subseteq U$的开集，限制映射都是恒等映射，则M_X是一个预层，称为常预层(constant sheaf).如果N也是一个Abel群，$\varphi : M \to N$是群同态，则我们自然地有预层的映射

$$\varphi_X : M_X \to N_X,$$

定义为

$$(\varphi_X)_U := \varphi : M_X(U) \to N_X(U).$$

例 5.3.

例 5.4.

预层的结构中蕴含了空间上“函数”的很多局部信息，对于一个预层我们有专门的结构刻画这样的信息：

定义. 设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的预层，那么称

$$\mathscr{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U)$$

为$\mathscr{F}$在点x处的**茎**(stalk)，其中U取遍所有包含点x的开集，正向系中的态射由限制态射给定.

根据正极限的定义，对于任意包含x的开集U，存在自然的态射$\rho_x^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$使得与正向系相容，即对于满足$V \subseteq U$的开集，

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_V^U"'] \arrow[dr, "\rho_x^U"] & \\
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "\rho_x^V"'] & \mathscr{F}_x.
\end{tikzcd}$$

为简化记号，通常对于截面$s \in \mathscr{F}(U)$，我们记$s_x := \rho_x^U(s)$.同样地，余极限的函子性告诉我们，对于任意X中的点x，若$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层间的态射，那么有诱导的点$x$处茎的态射

$$\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$$

使得对任意开集U有如下交换图

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "(\rho_{\mathscr{F}})_x^U"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "(\rho_{\mathscr{G}})_x^U"] \\ \mathscr{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathscr{G}_x, \end{tikzcd}$$

因此，我们有$\varphi_x(s_x) = \varphi_U(s)_x$.

习题 5.1. 证明我们有如下的显式构造：

$$\mathscr{F}_x \cong \left(\prod_{x\in U} \mathscr{F}(U)\right) / \sim,$$

其中，若$s \in \mathscr{F}(U), t \in \mathscr{F}(V)$的等价关系$s \sim t$定义为存在包含于$U \cap V$的$x$的邻域$W$使得$s|_W = t|_W$.

习题 5.2. 设U是X中包含点x的开集，求证

$$\mathscr{F}_x \cong (\mathscr{F}|_U)_x.$$

证明. 我们证明$\mathscr{F}_x$满足$(\mathscr{F}|_U)_x$的泛性质，那么根据唯一性二者必然同构.

一方面，U中任意包含x的开集W满足

$$\mathscr{F}|_U(W) = \mathscr{F}(W),$$

这自然地继承了与限制态射相容的态射$\mathscr{F}|_U(W) \to \mathscr{F}_x$.另一方面，对任意开集$V \subseteq X$，给定与$\mathbf{Open}(U)$相容的对象$\{A, \{\lambda_W : \mathscr{F}(W) \to A\}_{\{W\subseteq U\}}\}$，限制态射$\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(V \cap U)$使得它成为与$\mathbf{Open}(X)$相容的对象，因此根据泛性质存在唯一的态射$\mathscr{F}_x \to A$与$\mathbf{Open}(X)$中的限制态射相容，因而与与$\mathbf{Open}(U)$相容，这恰是$(\mathscr{F}|_U)_x$的泛性质. □

例 5.5. 设M是给定的Abel群，$x \in X$是拓扑空间中的一个点，定义预层$M(x)$满足

$$M(x)(U) := \begin{cases} M & x \in U \\ 0 & x \notin U, \end{cases}$$

限制态射要么是恒等映射要么是零映射.如果我们计算$M(x)$在点y的茎，

但是，预层并不是我们所希望的定义在拓扑空间上的代数结构.多数情况下我们希望的是从局部的信息中可以得到足够的整体信息，并且整体能够得到的信息一定程度上完全由局部信息得到，于是我们有下面的定义：

定义. 设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的预层，如果$\mathscr{F}$满足如下条件：

(i) （局部性(locality)）若$\{U_i\}_{i\in I}$是开集U的一族开覆盖，$s, t \in \mathscr{F}(U)$满足对于任意$i \in I$都有$s|_{U_i} = t_{U_i}$成立，则$s = t \in \mathscr{F}(U)$；

(ii) （粘合条件(gluing)）若$\{U_i\}_{i\in I}$是开集U的一族开覆盖，一族元素$s_i \in \mathscr{F}(U_i)$满足$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$，那么存在$s \in \mathscr{F}(U)$使得$s|_{U_i} = s_i$成立；

则称$\mathscr{F}$为X上的**层**(sheaf).

定义的合理性告诉我们并不是所有的预层都是层，对于某些拓扑空间X，常预层就不是层.但是，某些定义的预层本身就是层，如下例.最重要的是层的行为形态非常类似于全体可定义的函数，因此函数的全体必然是层.

例 5.6. 例5.1中的构造是一个层，更一般地，如果X是拓扑空间，$\mathscr{F}$是定义在X上满足某些性质（诸如连续、全纯、光滑等等）的函数预层，且限制映射就是函数的限制，那么这个预层是层.

例 5.7. 若$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的预层，U是开集，那么我们可以定义$\mathscr{F}$在U上的限制，记为$\mathscr{F}|_U$，它是U上的层，对任意U中的开集V，定义

$$\mathscr{F}|_U(V)=\mathscr{F}(U\cap V)=\mathscr{F}(V),$$

且对应$W\subseteq V$的限制同态$\mathscr{F}|_U(V)\to\mathscr{F}|_U(W)$定义为限制同态$\mathscr{F}(V)\to\mathscr{F}(W)$.明显的事实是，$\mathscr{F}|_U(V)\to\mathscr{F}|_U(W)$是预层，并且如果$\mathscr{F}$是层则$\mathscr{F}|_U(V)\to\mathscr{F}|_U(W)$也是层.

更抽象一些地，我们可以用范畴的语言描述层公理：若$\{U_i\}_{i\in I}$是开集U的一族开覆盖，那么层公理等价于下图

$$\mathscr{F}(U)\xrightarrow{p}\prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i)\rightrightarrows\prod_{i,j\in I}\mathscr{F}(U_i\cap U_j),$$

是一个等值子（equalizer），其中第一个态射由$\rho^U_{U_i}=\mathscr{F}(U_i\hookrightarrow U)$诱导，$f,g:\prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i)\rightrightarrows\prod_{i,j\in I}\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$分别由$\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}\circ\pi_i:\prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i)\to\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$和$\rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}\circ\pi_j:\prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_j)\to\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$诱导.

习题 5.3. 证明上述等价性.

证明. 根据范畴中乘积对象的泛性质，p,f,g的映射完全由$\pi_i\circ p,\pi_{i,j}\circ f,\pi_{i,j}\circ g$决定.

假设$\mathscr{F}$是层，且我们能找到集合间的映射$q:A\to\prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i)$使得$f\circ q=g\circ q$，于是对任意$A$中的元素$a$，$\pi_{i,j}\circ f\circ q(a)=\pi_{i,j}\circ g\circ q(a)$，这意味着对于$U_i$，我们能找到$\mathscr{F}(U_i)$中的元素$\pi_i\circ q(a)$使得

$$\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(\pi_i\circ q(a))=\pi_{i,j}\circ f\circ q(a)=\pi_{i,j}\circ g\circ q(a)=\rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(\pi_i\circ q(a)),$$

故由层的定义，存在唯一的元素$\tilde{q}(a)\in\mathscr{F}(U)$使得

$$\rho^U_{U_i}(\tilde{q}(a))=\pi_i\circ q(a),$$

即存在唯一的集合间的映射$\tilde{q}:A\to\mathscr{F}(U)$满足$q=p\circ\tilde{q}$，故$\mathscr{F}(U)$是等值子.

反过来，设$\mathscr{F}(U)$是f,g的等值子，若在每个$i\in I$，$\mathscr{F}(U_i)$中都有元素s_i满足$s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}$，根据乘积结构的泛性质，这意味着在$\prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i)$中存在元素$\{s_i\}_{i\in I}$满足

$$\pi_{i,j}\circ f(\{s_i\}_{i\in I})=s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}=\pi_{i,j}\circ g(\{s_i\}_{i\in I}),$$

故$f(\{s_i\}_{i\in I})=g(\{s_i\}_{i\in I})$.根据集合范畴中等值子的构造，存在唯一的$s\in\mathscr{F}(U)$使得$p(s)=\{s_i\}_{i\in I}$，因此

$$s|_{U_i}=\pi_i\circ p(s)=s_i,$$

$\mathscr{F}$是层. □

层之间的态射与预层之间态射的定义相同，即对于层$\mathscr{F}$,$\mathscr{G}$，$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是层态射当且仅当$\varphi$是预层的态射.这意味着我们可以定义范畴$\mathbf{ShAb}(X)$，且它是$\mathbf{PShAb}(X)$的满子范畴.在之后的内容我们会看到，当我们选取的范畴$\mathcal{A}$是Abel范畴时，$\mathbf{PSh}\mathcal{A}(X)$也是一个Abel范畴.

局部性可以用茎的语言来描述：

命题 5.1. 设$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是拓扑空间$X$上层的态射，那么$\varphi$是同构当且仅当对于任意$x\in X$，诱导的$\varphi_x:\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x$都是同构.

对层这种构造的一种理解方式是说，它是弯曲空间上满足一定性质的“函数”的全体，不同性质的选取决定了层结构的不同.

习题 5.4. 设$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$是X上的两个预层，验证$U\mapsto \hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathscr{F}|_U,\mathscr{G}|_U)$有自然的预层结构，且若$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$还是$X$上的层，则预层$U\mapsto \hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathscr{F}|_U,\mathscr{G}|_U)$是层，记为$\mathscr{H}\mathrm{om}(\mathscr{F},\mathscr{G})$，称作$\mathscr{F}$到$\mathscr{G}$的局部态射层(sheaf of local morphisms of $\mathscr{F}$ into $\mathscr{G}$).

习题 5.5. 设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的一个预层，则下面的构造给出一个拓扑空间，其中底集$\bar{\mathscr{F}}=\coprod_{x\in X}\mathscr{F}_x=\{(x,s_x)\mid x\in X,s_x\in\mathscr{F}_x\}$是所有茎的不交并，并对任意给定$X$中的开集$U$和$s\in\mathscr{F}(U)$给定如下一组拓扑基

$$(U,s):=\{(x,s_x)\mid x\in U\}.$$

求证：

(i) 存在自然的连续映射$\pi:\bar{\mathscr{F}}\to X$，将点$(x,s_x)$映到$x$.并且，对任意的开集$U$和$s\in\mathscr{F}(U)$，存在$\pi$在$U$上的截面(section)$\sigma:U\to\bar{\mathscr{F}}$（截面是指连续函数$\sigma$使得$\pi\circ\sigma$是$U$上的恒等函数）.记对应$\mathscr{F}$的$U$上所有截面为$\Gamma(U,\mathscr{F})$.

(ii) 反之，若$\mathscr{F}$还是层，求证任意U上的截面σ都是如上述方式构造的.

(iii) 由上证明若$\mathscr{F}$是层，则$\pi:\bar{\mathscr{F}}\to X$的连续函数截面层同构于$\mathscr{F}$.

(iv) 若$\mathscr{G}$也是拓扑空间X上的一个预层，$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是预层的态射，证明$\varphi$诱导了$\bar{\mathscr{F}}\to\bar{\mathscr{G}}$的连续映射.

空间$\bar{\mathscr{F}}$称为预层$\mathscr{F}$的平展空间(étale space).这实际上是Serre最初给的层的定义，我们用的是更现代的观点来看，但习题说明了两者是完全相同的.

Solution. (i) 根据定义，π显然是连续的.定义$\sigma:x\mapsto(x,s_x)$，注意到$\sigma^{-1}(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}\sigma^{-1}(A_i)$，因而为证明$\sigma$是连续的只需要证明对任意的$X$中的开集$V$，$\sigma^{-1}((V,t))$也是开集即可.但是若$t=s$则$\sigma^{-1}((V,t))=\sigma^{-1}((V,s))=V\cap U$，若$t\neq s$则$\sigma^{-1}((V,t))=\emptyset$.故得证.

(ii) 设$\sigma:U\to\bar{\mathscr{F}}$是$U$上的截面，于是对于任意的$x\in U$，存在$s\in\mathscr{F}(U)$使得$\sigma(x)=(x,s_x)$.若$x,y$是$U$中的两个点，$\sigma(x)=(x,s_x)$且$\sigma(y)=(y,t_y)$.根据芽的定义，我们可以找到$x,y$的邻域$V,W$使得$s\in\mathscr{F}(V),t\in\mathscr{F}(W)$.考虑开集

$$(V,s)=\{(z,s_z)\mid z\in V\}$$

和

$$(W,t)=\{(z,t_z)\mid t\in W\},$$

根据σ的连续性，$\tilde{V}:=\sigma^{-1}((V,s))$和$\tilde{W}:=\sigma^{-1}((W,t))$都是$U$中的非空开集，分别包含$x$和$y$.对于任意$z\in\tilde{V}\cap\tilde{W}$，由$\sigma$的映射性$(z,s_z)=\sigma(z)=(z,t_z)$，故存在$z$的一个邻域$O\subseteq\tilde{V}\cap\tilde{W}$使得$s|_O=t|_O$.但是$z$是任取的，故$s|_{\tilde{V}\cap\tilde{W}}=t|_{\tilde{V}\cap\tilde{W}}$.这样我们就得到了$U$的一个开覆盖，且在开集重合的部分截面是相容的.根据层公理，存在唯一的$r\in\mathscr{F}(U)$使得$\sigma(x)=(x,r_x)$.

(iii) 记$\mathscr{F}'$为$\pi:\bar{\mathscr{F}}\to X$的截面层.定义

$$
\begin{aligned}
\theta:\mathscr{F}&\to\mathscr{F}'\\
\theta_U:\mathscr{F}(U)&\to\mathscr{F}'(U)\\
s&\mapsto\sigma(x\mapsto(x,s_x)),
\end{aligned}
$$

于是我们需要验证对任意的开集U，θ_U是群同构，且对任意满足$V\subseteq U$的开集U,V都有图

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathscr{F}'(U) \arrow[d, "|_V"] \\
\mathscr{F}(V) \arrow[r, "\theta_V"] & \mathscr{F}'(V),
\end{tikzcd}
$$

交换，其中$|_V$是U上函数在V的限制.

对于$\mathscr{F}'(U)$中的截面σ,τ，$\sigma+\tau$的定义是$\sigma+\tau:x\mapsto(x,s_x+t_x)$，其中$\sigma(x)=(x,s_x)$，$\tau(x)=(x,t_x)$.于是，同态性由正极限的性质保证，再根据前一部分$\theta_U$是同构，其中，层公理的局部性对应$\theta$的单射性，在局部性的存在下粘合条件等价于满射（充分性由前一部分证明，必要性考虑到截面本质上是映射，是自动满足粘合条件的）.任取$x\in V$和$s\in\mathscr{F}(U)$，正极限保证$s_x=(s|_V)_x$，这即是图的交换性.

(iv) 定义

$$
\begin{aligned}
\bar{\varphi}:\bar{\mathscr{F}}&\to\bar{\mathscr{G}}\\
(x,s_x)&\mapsto(x,\varphi_x(s_x)),
\end{aligned}
$$

于是我们只要证明函数是连续的即可.对$\bar{\mathscr{G}}$的任意X中的开集U，若t是$\mathscr{G}(U)$中的截面，则对于(U,t)中的任意点(x,t_x)，若它在$\bar{\varphi}$的像中，则存在$(x,s_x)\in\mathscr{F}_x$使得$\varphi_x(s_x)=t_x$.这意味着，存在x的邻域W使得$\varphi_W(s)|_{W\cap U}=t|_{W\cap U}$.于是，开集基中的元素$(W\cap U,s|_{W\cap U})$包含于$\bar{\varphi}$的原像中，故

$$\varphi^{-1}((U,t))=\coprod_{W\text{是}U\text{中的开集，且}s\in\mathscr{F}(W)\text{满足}\varphi_W(s)=t|_W}(W,s),$$

按照定义这是一个开集. □

习题 5.6. 设$\varphi_i:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是拓扑空间$X$上层的态射，$i=1,2$，且对于任意$x\in X$，都有$(\varphi_1)_x=(\varphi_2)_x$，证明$\varphi_1=\varphi_2$.

5.1.2 层化

对于一个预层$\mathscr{F}$和X中的开集U，我们可以定义

$$\tilde{\mathscr{F}}(U):=\{s:U\to\coprod_{x\in U}\mathscr{F}_x\mid s\text{满足公理(i)和(ii)}\}$$

其中

(i) 对每个U中的点x，$s(x)\in\mathscr{F}_x$；

(ii) 对每个U中的点x，都存在开邻域$V\subseteq U$和截面$t\in\mathscr{F}(V)$使得对于所有的$y\in V$都有$s(y)=t_y$.

对于$\mathscr{F}$中的任意截面$s \in \mathscr{F}(U)$，我们都可以定义一个映射$\tilde{s} : U \to \coprod_{x \in U} \mathscr{F}_x, y \mapsto s_y$.显然$\tilde{s} \in \tilde{\mathscr{F}}(U)$，因此我们定义了一个预层的态射$\zeta : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$.

命题 5.2. *若预层$\mathscr{F}$是层，则$\zeta : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$是层的同构.*

如果尽可能具体地解释层化，这个构造就是把原本没有的截面加到层的对象当中去，进而形成我们需要的足够多的粘合信息，而我们是局部来完成这个扩充的.刚刚我们介绍的层化事实上就是用一个点的局部信息（茎）去构造相应的函数，可以说层公理所描述的本质信息就是一定类型的函数.我们对于层化的定义满足如下的泛性质和函子性：

命题 5.3 (函子性)**.** *设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层的态射，那么存在层态射$\tilde{\varphi} : \tilde{\mathscr{F}} \to \tilde{\mathscr{G}}$使得下面的图交换：*

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathscr{G} \\ {\scriptstyle \zeta_{\mathscr{F}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \zeta_{\mathscr{G}}} \\ \tilde{\mathscr{F}} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{\mathscr{G}}. \end{array}$$

证明. 对任意X中的开集U，考虑点$x \in U$和截面$s \in \tilde{\mathscr{F}}(U)$，我们定义

$$\tilde{\varphi}_U(s)(x) := \varphi_x(s(x)).$$

我们需要验证定义是层的态射，并验证图的交换性. □

推论 5.3.1 (泛性质)**.** *设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层的态射，若$\mathscr{G}$是层，则存在Abel群的同构*

$$\hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \cong \hom_{\mathbf{ShAb}(X)}(\tilde{\mathscr{F}}, \mathscr{G}).$$

事实上，我们并不需要拓扑空间X中所有开集U所对应的对象$\mathscr{F}(U)$，如果给定X的一组基$\mathscr{B}$中所有所有开集U对应的对象$\mathscr{F}(U)$，并且这些对象满足层公理，那么我们存在唯一的X上的层：

定理 5.4 ($\mathscr{B}$-层)**.** *设$\mathscr{B}$是拓扑空间X的一组开集基，对于每个$U, V \in \mathscr{B}$，存在Abel群$\mathscr{F}(U)$和限制同态$\rho_V^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$满足预层公理和层公理，那么称$\mathscr{F}$是一个**$\mathscr{B}$-层**($\mathscr{B}$-sheaf).于是*

1. *任意$\mathscr{B}$-层都可以唯一地扩张为一个X上的Abel群层.*
2. *给定X上的两个$\mathscr{B}$-层$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$，且对每个$\mathscr{B}$中的开集U都有群态射*

$$\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$$

与$\mathscr{B}$-层的限制态射相容，那么存在唯一的层态射$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是$\mathscr{B}$-层的扩张.

证明. 对任意X中的开集V，定义

$$\mathscr{F}(V) := \varprojlim_{U\in\mathscr{B}\text{满足}U\subseteq V} \mathscr{F}(U),$$

其中逆向系中的态射由限制态射给定.我们需要证明：(i)该定义与原定义相容；(ii)若$V \subseteq W$，则存在ρ_V^W : $\mathscr{F}(W) \to \mathscr{F}(V)$与原有的限制函数相容，且新构造的限制函数间也相容；(iii)如此定义的预层构成一个层.

(i)由极限的定义即可得到，因为若$V \in \mathscr{B}$，V就是被V包含的$\mathscr{B}$中开集在嵌入映射下的终对象，因此$\mathscr{F}(V)$是始对象.(ii)可以由极限的函子性推得.这样我们只要验证这是一个层即可，等价地，我们证明对任意的开覆盖，是一个等值子. □

推论 5.4.1 (层的粘合原理). 设$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$是拓扑空间$X$的开覆盖.若对任意$\mathcal{U}$中的开集$U$，$\mathscr{F}_U$都是$U$上的层，并且

$$\varphi_{U,V} : \mathscr{F}_U|_{U\cap V} \to \mathscr{F}_V|_{U\cap V}$$

都是同构，在$U \cap V \cap W$上满足

$$\varphi_{V,W} \circ \varphi_{U,V} = \varphi_{U,W},$$

则存在唯一的X上的层$\mathscr{F}$使得有层的同构$\psi : \mathscr{F}|_U \to \mathscr{F}_U$且满足如下相容性：对任意$U, V \in \mathcal{U}$

$$\varphi_{U,V} \circ \psi_U|_{U\cap V} = \psi_V|_{U\cap V} : \mathscr{F}|_{U\cap V} \to \mathscr{F}_V|_{U\cap V}.$$

证明. 我们将验证如下论断：(i) 被$\mathcal{U}$中的开集包含的所有的开集构成X的一组拓扑基$\mathscr{B}$；(ii) 所给出的粘合条件自然地给出了一个$\mathscr{B}$-层，于是根据定理5.4存在性和唯一性都得证.

(i) 这是一个单纯的拓扑问题，我们略过证明.(ii) 对任意$\mathscr{B}$中的开集W，我们可以找到$U \in \mathcal{U}$使得$W \subseteq U$，于是定义

$$\mathscr{F}(W) := \mathscr{F}_U(W),$$

且若$W_1 \subseteq W_2 \subseteq U$，那么限制态射$\rho_{W_1}^{W_2} : \mathscr{F}(W_2) \to \mathscr{F}(W_1)$定义为层$\mathscr{F}_U$从$W_1$到$W_2$的限制.这样定义首先出现的问题是，我们对于$U \in \mathcal{U}$的选取可能不是唯一的，因而，首先验证定义是合理的.

假设对于W，存在不同的

由于原本的$\mathscr{F}_U$是U上的层，根据例5.7，我们这样的定义也是层，于是根据之前的定理，这个层存在且同构下唯一. □

事实上，粘合后的层$\mathscr{F}$是容易描述的：对任意的开集W，$\mathscr{F}(W)$是所有$\{s_U\}_{U\in\mathcal{U}}$的全体，其中$s_U \in \mathscr{F}_U(W\cap U)$且满足$\varphi_{U,V}(s_U)$在$U \cap V \cap W$上等于$\varphi_{V,U}(s_V)$.

引入层化后我们其实有了对于层更进一步的认识——层完全由每点上的茎完全决定，而决定的方式就是寻找连续的截面（习题5.7）.在英语中，sheaf一词的含义是“a bundle of stalks”，即一捆稻谷，我们想象

习题 5.7. 设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的预层.证明平展空间$\tilde{\mathscr{F}}$的截面层$\mathscr{F}'$同构于$\mathscr{F}$的层化.

证明. 在习题5.5中我们定义了预层的态射

$$\begin{aligned} \theta : \mathscr{F} &\to \mathscr{F}' \\ \theta_U : \mathscr{F}(U) &\to \mathscr{F}'(U) \\ s &\mapsto \sigma(x \mapsto (x, s_x)), \end{aligned}$$

于是只要证明$\mathscr{F}'$的泛性质就能够说明同构.设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层到层的态射，于是根据习题5.5我们有连续映射$\bar{\varphi} : \bar{\mathscr{F}} \to \bar{\mathscr{G}}$，进而对于任意的截面$s : U \to \bar{\mathscr{F}}$，$\bar{\varphi} \circ s$也是$U$上的截面，这样我们定义了

$$\begin{aligned} \varphi' : \mathscr{F}' &\to \mathscr{G}' \cong \mathscr{G} \\ \varphi'_U : \mathscr{F}'(U) &\to \mathscr{G}'(U) \\ s &\mapsto \bar{\varphi} \circ s. \end{aligned}$$

φ'_U是群同态由由φ的预层的态射性保证，而它显然与两个层的限制态射相容，于是我们得到了层的态射.

再证明唯一性.假设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层到层的态射，层态射$\tilde{\varphi} : \mathscr{F}' \to \mathscr{G}$满足

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}' \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \mathscr{G} \\ \mathscr{F}. \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

任取$\sigma \in \mathscr{F}'(U)$，即截面$\sigma : U \to \bar{\mathscr{F}}$，对任意$x \in U$，若$\sigma(x) = (x, s_x)$，那么任取$\sigma_x$的代表元$\tau$，于是存在$W \subseteq U$使得$\sigma|_W = \tau|_W$，因此$\tau(x) = (x, s_x)$，于是可以定义$\eta_x : (\mathscr{F}')_x \to \mathscr{F}_x$，$\sigma_x \mapsto s_x$.根据截面加法的定义，这显然是一个群态射.一方面，我们显然有$\eta_x \circ \theta_x = \mathrm{id}_{\mathscr{F}_x}$.另一方面，仍然假定$\sigma(x) = (x, s_x)$，那么由连续性$V = \sigma^{-1}((U, s))$是$U$中的非空开集，这意味着对任意$y \in V$，$\sigma(y) = (y, s_y)$，于是$\sigma|_V = \theta(s)|_V$，$\theta_x(s_x) = \sigma_x$.因此，$\theta_x \circ \eta_x = \mathrm{id}_{(\mathscr{F}')_x}$.再根据习题5.6，$\tilde{\varphi}$是唯一确定的. □

5.1.3 底空间变换

这一节我们考虑这样的问题，

定义. 设$f : X \to Y$是拓扑空间的连续映射，如果$\mathscr{F}$是X上的预层，则如下定义的

$$\begin{aligned} f_*\mathscr{F} : \mathbf{Open}(Y) &\to \mathbf{Ab} \\ U &\mapsto f_*\mathscr{F}(U) := \mathscr{F}(f^{-1}(U)) \end{aligned}$$

是一个预层，称为预层$\mathscr{F}$的**推出**(pushfroward).

对于Y中的开集$V \subseteq U$，我们定义限制同态$f_*\mathscr{F}(U) \to f_*\mathscr{F}(V)$是$\mathscr{F}(f^{-1}(U))$到$\mathscr{F}(f^{-1}(V))$的限制同态，即若$s \in f_*\mathscr{F}(U)$，则

$$s|_V = (s \in \mathscr{F}(f^{-1}(U)))|_{f^{-1}(V)}.$$

引理 5.1. 设$f: X \to Y$是拓扑空间的连续映射，如果$\mathscr{F}$是X上的层，则推出$f_*\mathscr{F}$是Y上的层.

证明. 任取Y中的开集V，设$\mathcal{V} = \{V_i\}_{i\in I}$是$V$的开覆盖，那么$\mathcal{U} = \{U_i := f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$是$U := f^{-1}(V)$的开覆盖.于是，若给定$s_i \in f_*\mathscr{F}(V_i) = \mathscr{F}(U_i)$，满足$s_i|_{V_i\cap V_j} = s_j|_{V_i\cap V_j}$，于是$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$.由$\mathscr{F}$是层得知存在唯一的$s \in \mathscr{F}(U)$使得$s|_{U_i} = s_i$.按照层推出的定义，这个$s$就是$f_*\mathscr{F}(V)$中要找的唯一的元素，故$f_*\mathscr{F}$是层. □

如果我们还有一个X上的预层态射$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，则对于任意的$Y$中的开集$U$，同态映射$\varphi_{\varphi^{-1}(U)} : \mathscr{F}(\varphi^{-1}(U)) \to \mathscr{G}(\varphi^{-1}(U))$和限制映射$\rho^{\varphi^{-1}(U)}_{\varphi^{-1}(V)}$相容，于是$\varphi_{\varphi^{-1}(U)} : \mathscr{F}(\varphi^{-1}(U)) \to \mathscr{G}(\varphi^{-1}(U))$自然地可以看作$\varphi_{\varphi^{-1}(U)} : f_*\mathscr{F}(U) \to f_*\mathscr{G}(U)$，这样我们说明了$f_*\varphi$是预层态势$f_*\mathscr{F} \to f_*\mathscr{G}$.如果还有$\psi : \mathscr{G} \to \mathscr{H}$，那么很明显地有$f_*(\psi\circ\varphi) = f_*\psi \circ f_*\varphi$.于是$f_*$是一个函子$\mathbf{PShAb}(X) \to \mathbf{PShAb}(Y)$.

习题 5.8. 设$f: X \to Y$和$g: Y \to Z$是两个连续映射，那么

$$(g\circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

定义. 设$f: X \to Y$是拓扑空间的连续映射，如果$\mathscr{G}$是Y上的预层，则如下定义的

$$\begin{aligned} f_P\mathscr{G} : \mathbf{Open}(X) &\to \mathbf{Ab} \\ V \mapsto f_P\mathscr{G}(U) &:= \varinjlim_{\substack{V\in\mathbf{Open}(Y)\\ f(U)\subseteq V}} \mathscr{G}(V) \end{aligned}$$

是一个预层，称为预层$\mathscr{G}$的**拉回**(pullback).

引理 5.2. 设X和Y是拓扑空间，$f: X \to Y$是连续映射，那么下面的同构关于$\mathscr{G}$和$\mathscr{F}$是自然的：

$$\hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(f_P\mathscr{G}, \mathscr{F}) \cong \hom_{\mathbf{PShAb}(Y)}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

证明. 我们首先证明同构.设$\varphi \in \hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(f_P\mathscr{G}, \mathscr{F})$，于是任意给定$X$中的开集，按照极限的定义，$\varphi_U : f_P\mathscr{G}(U) \to \mathscr{F}(U)$完全由一族相容的态射

$$\varphi_V :$$

其中V取遍所有包含$f(U)$的开集. □

与推出不同的是，即使$\mathscr{G}$是Y上的层，$f_P\mathscr{G}$也可能并不是一个层，但作为预层，层的拉回也有很好的函子性质.我们称$f_P^{-1}\mathscr{G}$的层化为$\mathscr{G}$的**逆象层**(inverse sheaf)，记为$f^{-1}\mathscr{G}$.

定义. 设X是拓扑空间，$\mathscr{F}$是X上的层

5.1.4 层范畴及其中的正合性

设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是空间$X$上预层的态射，

引理 5.3. 层态射的单态射是范畴意义下的单态射，且层态射的满态射是范畴意义下的满态射.

证明. □

给定拓扑空间X和上面的层$\mathscr{F}$，若对于任意的$V \subseteq U$，限制映射$\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$都是满射，则称$\mathscr{F}$是flasque.

习题 5.9. 求证层态射单射（满射）的局部性：给定拓扑空间X和开覆盖$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$使得层态射$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$的限制

$$\varphi_{U_i} : \mathscr{F}_{U_i} \to \mathscr{G}_{U_i}$$

对所有的$i \in I$都是单射（满射），那么φ本身也是单射（满射）.

证明. □

习题 5.10 (层的零扩张). 设X是拓扑空间，Z是X的闭集，$i : Z \to X$是嵌入映射.令$U := X - Z$是Z在X中的补集，$j : U \to X$是嵌入映射.

1. 设$\mathscr{F}$是Z上的层，证明
$$(i_*\mathscr{F})_x = \begin{cases} \mathscr{F}_x & x \in Z \\ 0 & x \notin Z. \end{cases}$$
于是我们称$i_*\mathscr{F}$是$\mathscr{F}$在X上的零扩张.证明若X上的层$\mathscr{F}$对所有$x \notin Z$满足$\mathscr{F}_x = 0$，那么层的同态
$$\rho^X_Z : (i_*\mathscr{F})|_Z \to \mathscr{F}$$
是同构，并且由此推导出对任意Z上的层$\mathscr{G}$，存在唯一的X上的层$\mathscr{F}$满足对所有$x \in Z$满足$\mathscr{F}_x = \mathscr{G}_x$，对所有$x \notin Z$满足$\mathscr{F}_x = 0$.

2. 设$\mathscr{G}$是U上的层，定义X上的层$\mathscr{G}$满足对任意X中的开集V，
$$j_!\mathscr{G}(V) := \begin{cases} \mathscr{G}(V) & V \subseteq U \\ 0 & \text{其他情况}. \end{cases}$$
证明
$$(j_!\mathscr{G})_x = \begin{cases} \mathscr{G}_x & x \in U \\ 0 & \text{其他情况}, \end{cases}$$
并且证明$j_!\mathscr{G}$是满足以上条件且限制在U上是$\mathscr{G}$的唯一一个层.

3. 现在假设$\mathscr{F}$是X上的层，证明我们有如下层的正合列：
$$0 \to j_!(\mathscr{F}|_U) \to \mathscr{F} \to i_*(\mathscr{F}|_Z) \to 0.$$

证明. 1.直接由定义，若$x \in U$，那么存在x在X中的邻域V使得$V \cap Z = \emptyset$，此时$i_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(i^{-1}(V)) = \mathscr{F}(\emptyset) = 0$，因此对任意包含$x$的开集$W$，$i_*\mathscr{F}(W \cap V) = 0$，即$(i_*\mathscr{F})_x = 0$.另一方面，若$x \in Z$，那么

$$(i_*\mathscr{F})_x = \operatorname{colim}_{W\text{是包含}x\text{的开集}}(i_*\mathscr{F})(W) = \operatorname{colim}_{W\text{是包含}x\text{的开集}}\mathscr{F}(W \cap Z) = \mathscr{F}_x.$$

□

定义. 给定拓扑空间X和Abel群层$\mathscr{F}$，若对任意开集U，$\mathscr{F}(U)$是环，并且所有的限制映射都是环同态，则称$\mathscr{F}$是X上的环层(sheaf of rings).

5.2 Cech上同调

之前的理论中我们建立了层的上同调理论，但我们面临一个相当严重的问题——对于一个给定的层，它的上同调几乎是不可计算的.虽然任意层的内射都是存在的，但构造过于庞大 Čech上同调的主要思想是我们考虑拓扑空间中开覆盖所包含的组合信息，

设X是拓扑空间，$\mathscr{F}$是X上的层.给定全序集Λ和的X开覆盖$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，那么存在拓扑空间的图

$$\begin{tikzcd} X & \coprod_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda \arrow[l, "\partial_0"'] & \coprod_{\lambda_0<\lambda_1} U_{\lambda_0\lambda_1} \arrow[l, shift right, "\partial_1^0"'] \arrow[l, shift left, "\partial_1^1"'] & \coprod_{\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2} U_{\lambda_0\lambda_1\lambda_2} \arrow[l, shift right=2, "\partial_2^0"'] \arrow[l, "\partial_2^1"'] \arrow[l, shift left=2, "\partial_2^1"'] & \cdots \arrow[l] \end{tikzcd},$$

其中

$$U_{\lambda_0\cdots\lambda_n} := \bigcap_{i=0}^{n} U_{\lambda_i},$$

映射∂_i是自然的嵌入

$$U_{\lambda_0\cdots\lambda_n} \hookrightarrow U_{\lambda_0\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_n}$$

扩展到不交并的映射.

将层$\mathscr{F}$视为反变函子，去掉-1项M，我们可以得到一个上链，具体操作如下：对任意$q \geq 0$，我们定义$\mathscr{F}$（对于$\mathcal{U}$）的q上链群(group of q-cochain of $\mathscr{F}$ (relative to $\mathcal{U}$))为

$$C^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \prod_{\lambda_0<\cdots<\lambda_q} \mathscr{F}(U_{\lambda_0} \cap \cdots \cap U_{\lambda_q}),$$

它恰好是$\mathscr{F}\left(\coprod_{\lambda_0<\cdots<\lambda_q} U_{\lambda_0\cdots\lambda_q}\right)$；进而可以定义上边缘映射

$$d_i^{q-1} := \mathscr{F}(\partial_q^i) : \prod_{\lambda_0<\cdots<\hat{\lambda}_i<\cdots<\lambda_q} \mathscr{F}(U_{\lambda_0\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_q}) \to \prod_{\lambda_0<\cdots<\lambda_q} \mathscr{F}(U_{\lambda_0\cdots\lambda_q}),$$

具体而言，给定$f \in \prod_{\lambda_0<\cdots<\hat{\lambda}_i<\cdots<\lambda_q} \mathscr{F}(U_{\lambda_0\cdots\hat{\lambda}_i\cdots\lambda_q})$，确定$d_i^q(f)$只需要确定每一个序号为$(\lambda_0, \cdots, \lambda_q)$的项，而$\partial_q^i$只将$U_{\lambda_0\cdots\hat{\lambda_i}\cdots\lambda_q}$映入$U_{\lambda_0\cdots\lambda_q}$，于是$(\lambda_0, \cdots, \lambda_q)$项为$d_i^{q-1}(f)_{\lambda_0,\cdots,\lambda_q} = f_{\lambda_0,\cdots,\hat{\lambda_i},\cdots,\lambda_q} := (f_{\lambda_0,\cdots,\hat{\lambda_i},\cdots,\lambda_q})|_{U_{\lambda_0\cdots\lambda_q}}$.进

而d_i^{q-1}的交错和

$$\delta^{q-1} := \sum_{i=0}^{q-1}(-1)^i d_i^{q-1} : C^{q-1}(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to C^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$$

$$f \mapsto \left\{\sum_{i=0}^{q}(-1)^i f_{\lambda_0,\cdots,\hat{\lambda_i},\cdots,\lambda_q}\right\}_{\lambda_0,\cdots,\lambda_q}.$$

这给出了一个上链

$$0 \to C^0(\mathcal{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{\delta^0} C^1(\mathcal{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{\delta^1} C^2(\mathcal{U},\mathscr{F}) \xrightarrow{\delta^2} \cdots,$$

被称为X关于开覆盖$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$的$\mathscr{F}$系数Čech上链(Čech cochain of X with respect to $\mathcal{U}$ of coefficient $\mathscr{F}$).我们这里并不直接验证良定义，而是借用习题1.1（的对偶），于是我们只需要验证上单纯条件：

事实上，这里的上单纯条件来源于开覆盖$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$给出的单纯集

引理 5.4. 对任意拓扑空间X和X上的层$\mathscr{F}$，$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是$X$的一族开覆盖，都有

$$\check{H}^0(\mathscr{F},\mathcal{U}) \cong \Gamma(X,\mathscr{F}).$$

证明. 按定义，

$$\check{H}^0(\mathscr{F},\mathcal{U}) = \{f \in C^0(\mathcal{U},\mathscr{F})\}$$

□

引理说明Čech上链存在一个自然的增广$\Gamma(X,\mathscr{F})$.

定义. 给定拓扑空间X和开覆盖$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$和$\mathcal{V} = \{V_\theta\}_{\theta\in\Theta}$，若存在映射$\varphi : \Theta \to \Lambda$使得

$$V_\theta \subseteq U_{\varphi(\theta)}$$

对任意$\theta \in \Theta$成立，则称$\mathcal{V}$是$\mathcal{U}$的加细(refinement).

引理 5.5. 当给定$\mathcal{U}$的加细$\mathcal{V}$后，加细映射$\varphi : \Theta \to \Lambda$给出了$Cech$上链的映射

$$\varphi^* : C^q(\mathcal{U},\mathscr{F}) \to C^q(\mathcal{V},\mathscr{F})$$

满足

$$\varphi^*(f)_{\theta_0,\cdots,\theta_q} := f_{\lambda_0,\cdots,\lambda_q}$$

对任意$f \in C^q(\mathcal{U},\mathscr{F})$成立，其中$\lambda_i = \varphi(\theta_i)$.

证明. 直接验证

$$\begin{aligned}\varphi^*(\delta f)_{\theta_0,\cdots,\theta_q} &:= (\delta f)_{\varphi(\theta_0),\cdots,\varphi(\theta_q)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_{\varphi(\theta_0),\cdots,\widehat{\varphi(\theta_k)},\cdots,\varphi(\theta_q)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \varphi^*(f)_{\theta_0,\cdots,\widehat{\theta_k},\cdots,\theta_q}\\ &= \delta(\varphi^*(f)).\end{aligned}$$

□

命题 5.5. 若$\mathcal{V}$是拓扑空间X开覆盖$\mathcal{U}$的加细，且$\varphi,\psi:\mathcal{V}\to\mathcal{U}$是不同的加细映射，则$\varphi,\psi$诱导$Cech$上同调上相同的映射.

证明. 定义上链同伦

$$H: C^{q+1}(\mathcal{U},\mathscr{F})\to C^q(\mathcal{V},\mathscr{F})$$

满足

$$(Hf)_{\theta_0,\cdots,\theta_q} := \sum_{k=0}^{n}(-1)^k f_{\varphi(\theta_0),\cdots,\varphi(\theta_k),\psi(\theta_k),\cdots,\psi(\theta_q)},$$

于是

$$\begin{aligned}H\delta(f)-\delta H(f) &=\\ &=\end{aligned}$$

即

$$\varphi^*-\psi^* = H\delta-\delta H,$$

这就完成了证明. □

第六章　群的同调代数

6.1　群的同调和上同调

设G是一个群.

定义. 给定Abel群A，若G在A上右一个（左）作用，则称A是一个G模(G-module).

注意到给定G模A等价于给定Abel群A和群同态$G \to \mathrm{Aut}(A)$.由于Abel群等同于$\mathbb{Z}$模，因而G模等同于$\mathbb{Z}[G]$模.

定义. 给定G模A，记

$$A^G := \{a \in A \mid g \cdot a = a\text{对所有}g \in G\text{成立}\}$$

是A中被G作用不变的元素的全体.

引理 6.1. 给定G模A和具有平凡作用的G模$\mathbb{Z}$，则

$$A^G \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A).$$

证明. 任意给定$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$，由于$G$在$\mathbb{Z}$上的作用是平凡的，$\alpha(1) = \alpha(g \cdot 1) = g\alpha(1)$，于是映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) &\to A^G \\ \alpha &\mapsto \alpha(1) \end{aligned}$$

是良定义的，这显然是一个Abel群同态.注意到$\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$完全由$\alpha(1)$决定，因此这是一个单射；同时该映射是满射，得证. □

引理6.1说明给定G模的短正合列

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

存在诱导的Abel群（也是平凡G模）正合列

$$0 \to A^G \to B^G \to C^G,$$

即$-^G$是一个左正合的函子.因此，只要能够找到一个平凡G模$\mathbb{Z}$的投射消解，那么套用之前的理论可以得到$\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z},A)$，我们称其为群$G$以$A$为系数的上同调群

例 6.1. 考虑$G=\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}=\langle\sigma\rangle$是有限循环群，取

$$N:=1+\sigma+\cdots+\sigma^{n-1}\in\mathbb{Z}[G],$$

那么

$$(1-\sigma)N=N(1-\sigma)=0\in\mathbb{Z}[G],$$

于是可以验证

$$\xrightarrow{1-\sigma}\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{N}\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{1-\sigma}\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{N}\mathbb{Z}[G]\xrightarrow{\sigma\mapsto 1}\mathbb{Z}\to 0$$

是$\mathbb{Z}$的消解，于是对于任意G模A，由$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G],A)=A$我们得到了复形

$$0\to A$$

定义. 给定群G，取

$$F_n:=\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G]\otimes_{\mathbb{Z}}\cdots\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}[G]$$

（共有$n+1$个张量积项），G在F_n上的作用由

$$g\cdot(g_0\otimes g_1\otimes\cdots\otimes g_n):=(g\cdot g_0)\otimes g_1\otimes\cdots\otimes g_n$$

诱导，且有

$$d_i^{[n]}:F_n\to F_{n-1},\ \ 0\le i\le n$$

满足

$$d_i^{[n]}(1\otimes g_1\otimes\cdots\otimes g_n):=\begin{cases} g_1\cdot(1\otimes g_2\otimes\cdots\otimes g_n) & i=0,\\ (1\otimes g_1\otimes\cdots\otimes g_{i-1}\otimes g_ig_{i+1}\otimes\cdots\otimes g_n) & 0<i<n,\\ 1\otimes g_1\otimes\cdots\otimes g_{n-1} & i=n.\end{cases}$$

引理 6.2. *如上定义中，*

1. *F_n是自由$\mathbb{Z}[G]$模，且它的一组基可选为$\{1\otimes g_1\otimes\cdots\otimes g_n\}_{g_i\in G}$，*
2. *$\{d_i^{[n]}\}_{0\le i\le n}$扩张为一组$\mathbb{Z}[G]$模同态，满足*

$$d_i^{[n]}d_j^{[n]}=d_{j-1}^{[n]}d_i^{[n]},$$

因此根据习题1.1，

$$\partial_n:=\sum_{i=0}^n(-1)^id_i^{[n]}$$

给出了链复形

$$0\leftarrow F_0\xleftarrow{\partial_1}F_1\xleftarrow{\partial_2}\cdots\xleftarrow{\partial_n}F_n\xleftarrow{\partial_{n+1}}\cdots.$$

3. $\epsilon: F_0=\mathbb{Z}[G]\to\mathbb{Z}, \sum_{i=1}^N n_i g_i\mapsto\sum_{i=1}^N n_i$给出了增广链复形

$$0\leftarrow\mathbb{Z}\xleftarrow{\epsilon}F_0\xleftarrow{\partial_1}F_1\xleftarrow{\partial_2}\cdots\xleftarrow{\partial_n}F_n\xleftarrow{\partial_{n+1}}\cdots.$$

4.

引理6.2说明构造的$\{F_n\}$给出了平凡$\mathbb{Z}[G]$模$\mathbb{Z}$的一个消解，我们称之为标准消解(standard resolution)或bar消解(bar resolution).

习题 6.1. 除了bar消解外，

第七章　其他类型的同调

7.1　超上同调

我们考虑这样的问题：设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的层

$$\mathscr{F}:\mathbf{Open}(X)^{\circ}\to\mathcal{B},$$

其中$\mathcal{B}$是Abel范畴，此时$\mathscr{F}$是以$\mathcal{B}$中对象为对象的层.那么可以求X关于层$\mathscr{F}$的上同调

$$H^i(\mathscr{F},X),$$

它是$\mathcal{B}$中的对象.特别地，当$\mathcal{B}$是某个给定Abel范畴$\mathcal{A}$的上链复形范畴时，每个上同调都是一个$\mathcal{A}$的上链复形，此时还可以求上链复形$H^i(\mathscr{F},X)$的上同调

命题 7.1. 设$\mathscr{F}^\bullet$是拓扑空间X上的层上链复形，$f^\bullet:\mathscr{F}^\bullet\to\mathscr{G}^\bullet$是*injective*的拟同构.则对于任意的内射复形$\mathscr{I}^\bullet$和复形的态射$g^\bullet:\mathscr{F}^\bullet\to\mathscr{I}^\bullet$，存在态射$\tilde{g}^\bullet:\mathscr{G}^\bullet\to\mathscr{I}^\bullet$使得

$$g^\bullet=\tilde{g}^\bullet\circ f^\bullet.$$

命题 7.2. 设$f:C^\bullet\to D^\bullet$是链映射，$C^\bullet\to I^{\bullet,\bullet}$和$D^\bullet\to J^{\bullet,\bullet}$是两个*Cardan-Eilenburg*消解，那么存在链映射$\tilde{f}^{\bullet,\bullet}:I^{\bullet,\bullet}\to J^{\bullet,\bullet}$是$f^\bullet$上的映射.

给定一个n维复流形X，那么可以定义其上的$\mathbb{C}$向量空间层的复形

$$0\to\mathscr{O}_X\to\Omega_X^1\xrightarrow{\partial}\Omega_X^2\xrightarrow{\partial}\cdots\xrightarrow{\partial}\Omega_X^n\to 0,$$

其中Ω_X^q是X上的全纯q形式，那么如上复形是常层$\mathbb{C}$的消解.

7.2　Lie

定义. 给定k上的Lie代数$\mathfrak{g}$，M是$\mathfrak{g}$模，定义如下的

$$C_n^{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, M) := M \otimes_k \bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{g},$$

其中$\bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \wedge_k \cdots \wedge_k \mathfrak{g}$，并且有边缘映射

$$\begin{aligned}
\partial_n : M \otimes_k \bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{g} &\to M \otimes_k \bigwedge_{i=1}^{n-1} \mathfrak{g} \\
m \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge a_n &\mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [m, a_i] \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge a_n \\
&\qquad + \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j-1} m \otimes [a_i, a_j] \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge \hat{a}_j \wedge a_n,
\end{aligned}$$

称复形$(C_\bullet^{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, M), \partial_\bullet)$为Lie代数$\mathfrak{g}$以$M$为系数的Chevalley-Eilenberg复形(Chevalley-Eilenberg).对偶地，定义如下的

$$C_{\mathrm{CE}}^n(\mathfrak{g}, M) := \mathrm{Hom}_k\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{g}, M\right)$$

和微分映射

$$d^n : \mathrm{Hom}_k\left(\bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{g}, M\right) \to \mathrm{Hom}_k\left(\bigwedge_{i=1}^{n+1} \mathfrak{g}, M\right)$$

满足

$$\begin{aligned}
d\omega(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot \omega(x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n) \\
&\qquad + \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots x_n),
\end{aligned}$$

则称$(C_{\mathrm{CE}}^\bullet, d^\bullet)$是

7.3 Hochschild

本节中我们都假定k是交换环，理想的情况下它会是域.

定义. 给定交换基代数k和k代数A，若（对称）k模M同时具有左右A模结构，且满足对任意$a, b \in A, m \in M$都有

$$(am)b = a(mb),$$

且k在M上的左右作用与A在M上的左右作用相容，则称M是一个A双模(A-bimodule).若A还有单位元，则一般要求

$$1m = m = m1.$$

记$A^e = A \otimes_k A$，那么一个A双模M同时是一个左A^e模，作用由

$$(a \otimes b)m = amb$$

给出.或者，一个A双模M同时是一个右A^e模，作用由

$$m(a \otimes b) = b^{-1}ma$$

给出.

定义. 给定交换基代数k和k代数A，M是A双模，给定A模

$$C_n(A, M) := M \otimes_k A^{\otimes n},$$

其中$A^{\otimes n} := A \otimes_k \cdots \otimes_k A$，并且有如下Hochschild边缘映射

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n(A, M) &\to C_{n-1}(A, M) \\ m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto ma_1 \otimes \cdots \otimes a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}, \end{aligned}$$

那么$(C_\bullet^{\text{Hoch}}(A, M), \partial_\bullet)$称为Hochschild复形(Hochschild complex)，对应的同调群称为A以M为系数的Hochschild同调群(Hochschild homology group of A with coefficients in M)，记为$HH_\bullet(A, M)$.特别地若$M = A$，我们记$HH_\bullet(A)$.

引理 7.1. $(C_\bullet(A, M), \partial_\bullet)$是链复形.

证明. 定义

$$\begin{aligned} d_i^{[n]} : C_n(A, M) &\to C_{n-1}(A, M) \\ d_0(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= ma_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\ d_i(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= m \otimes a_1 \otimes \cdots a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ d_n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}, \end{aligned}$$

于是

$$d_i^{[n]} d_j^{[n]} = d_{j-1}^{[n]} d_i^{[n]}$$

对$0 \le i < j \le n$成立，这样$C_\bullet(A, M)$是预单纯的，因此根据习题1.1，$(C_\bullet(A, M), \partial_\bullet)$是链复形. □

事实上，如上定义的同调群$HH_\bullet(A, M)$关于M有函子性：给定一个A双模同态$\psi : M \to N$，那么它诱导

的

$$\psi_\bullet : C_\bullet(A, M) \to C_\bullet(A, N)$$
$$\psi_n : m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto \psi(m) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

是一个链映射，因此诱导了Hochschild同调群的同态；同时群$HH_\bullet(A, M)$关于A也有函子性：给定一个k代数同态$\varphi : A \to B$，它诱导的

$$\varphi_\bullet : C_\bullet(A, M) \to C_\bullet(B, M)$$
$$\varphi_n : m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto m \otimes \varphi(a_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(a_n)$$

是一个链映射，因此诱导了Hochschild同调群的同态.

例 7.1. 首先考虑$HH_0(A, M)$.按定义，$HH_0(A, M) = C_0(A, M)/\mathrm{Im}\,\partial_1$，注意到$\partial_1 : a \otimes m \mapsto ma - am$的定义使得$\mathrm{Im}\,\partial_1$中的元素都是形如$ma - am$这样的元素生成的，因此

$$HH_0(A, M) = M/\langle ma - am\rangle =: M/[M, A].$$

特别地，$HH_0(A) = A/[A, A]$.

例 7.2. 当$A = k$时，$C_n(A) = k$对于任意n都成立，并且$d_i^{[n]} = \mathrm{id}$对任意$1 \le i \le n$.于是，Hochschild复形是

$$\cdots \to k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} k,$$

因此$HH_*(k) = k[0]$.

习题 7.1. 给定k代数A，记$Z(A) := \{z \in A \mid az = za\ \forall a \in A\}$为$A$的中心，求证$Z(A)$在$C_\bullet(A, M)$上的作用

$$z \cdot (m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := zm \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

和

$$(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \cdot z := mz \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

是同伦的.事实上，这还是个单纯同伦.

命题 7.3. 若A是含幺的交换k代数，那么存在自然的同构

$$HH_1(A) \cong \Omega^1_{A/k}.$$

若M还是对称的A双模（即$am = ma$对任意$a \in A, m \in M$）都成立，那么存在自然同构

$$HH_1(A, M) \cong M \otimes_A \Omega^1_{A/k}.$$

证明. 由于A是交换代数，因此$\partial_1 : A \otimes_k A \to A$（例7.1）是0映射，因此

$$HH_1(A) \cong A \otimes_k A/\langle ab \otimes c - a \otimes bc + ca \otimes b\rangle.$$

这样对于映射

$$HH_1(A) \to \Omega^1_{A/k}$$
$$a \otimes b \mapsto adb$$

是良定义的，且是A模同态.容易验证这是一个同构. □

接下来我们希望用导出函子的语言来描述Hochschild同调.

定义. 给定k代数A，记A°为A的对偶代数（即与A具有相同的元素，但乘法定义为$a^\circ \cdot b^\circ := (ba)^\circ$），令$A^e := A \otimes_k A^\circ$，那么对于任意的$A$双模$M$都有$A^e$的左作用

$$(a \otimes b)m := amb.$$

那么如下链复形称为bar复形(Bar complex)：

$$C^{\text{bar}}_\bullet(A) : \cdots \xrightarrow{\partial^{\text{bar}}_{n+1}} A^{\otimes n+1} \xrightarrow{\partial^{\text{bar}}_n} A^{\otimes n} \xrightarrow{\partial^{\text{bar}}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial^{\text{bar}}_1} A^{\otimes 2} \to 0,$$

其中$A^{\otimes 2}$处于0阶位置，且$\partial^{\text{bar}}_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$（注意到求和不取到$n+1$）.由乘法定义的映射

$$\mu : A \otimes_k A \to A$$

是复形$C^{\text{bar}}_\bullet$的扩张.

很明显

$$HH_*(A) \cong H_*(M \otimes_{A^e} C^{\text{bar}}_\bullet(A)),$$

即Hochschild同调是A^e模链复形$C^{\text{bar}}_\bullet(A)$以$M$为系数的同调.

命题 7.4. *设k代数A是含幺的，那么复形$C^{\text{bar}}_\bullet(A)$（附有扩张$\mu : C^{\text{bar}}_\bullet(A) \to A$）是$A^e$模$A$的自由$A^e$模消解，它称为bar消解(Bar resolution).*

证明. 对于这里的证明我们通过构造新的称为退化映射(degeneracy may)的结构，来获得新的信息完成证明.定义

$$s : A^{\otimes n} \to A^{\otimes n+1}$$
$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n,$$

那么可以验证$d_i s = s d_{i-1}$对任意$i = 1, \cdots, n-1$成立，且$d_0 s = \text{id}$，于是

$$\bar{\partial} s + s \bar{\partial} = \text{id},$$

因此这证明了$\bar{C}_\bullet$是消解. □

在如上的证明中我们事实用到了A有左单位的事实，当A有右单位时，取

$$s : A^{\otimes n} \to A^{\otimes n+1}$$
$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1$$

即可.此外，复形$\bar{C}_\bullet$的边缘算子$\bar{\partial}$完全由如下性质决定：

1. $\bar{\partial}$是左A模同态，

2. $\bar{\partial}_0 = \mu$，

3. $\bar{\partial}s + s\bar{\partial} = \mathrm{id}$，

并且这给出了链同构$C_\bullet(A, A^e) \cong C_\bullet^{\mathrm{bar}}(A)$.

事实上，我们可以扩充如上的构造使得$C_\bullet(A, M)$成为一个单纯对象，因而可以通过商去退化对象得到正规化的Hochschild复形，鉴于这些讨论需要其他工具的建立，在此略去.

定理 7.5. 给定k代数A，若A是投射k模，那么对任意A双模M，存在自然的同构

$$HH_n(A, M) \cong \mathrm{Tor}_n^{A^e}(M, A).$$

证明. 根据假设，$A^{\otimes n}$对于任意自然数n也是投射k模，因此$A^{\otimes n+2} = A \otimes_k A^{\otimes n} \otimes_k A$是投射$A^e$模（其中模结构由$(a \otimes b)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) := aa_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}b$给出）.这是因为,???

于是，注意到$M \otimes_{A^e} A^{\otimes n+2} \cong M \otimes_k A^{\otimes n}$，定理成立. □

引理2.1说明？答案当然是否定的！这是因为命题7.4中的同伦是k模范畴中的同伦，而函子是A^e上的张量积.

例 7.3.

类似于拓扑中的同调理论，对于任意A的双边理想I，短正合列$0 \to I \to A \to A/I \to 0$诱导了同调群的长正合列

$$\cdots \to HH_n(A, I) \to HH_n(A) \to HH_n(A/I) \to HH_{n-1}(A, I) \to \cdots,$$

因此可以称$HH_n(A, I)$是相对Hochschild同调群.更一般地，对于任意的k代数同态$A \to B$，它诱导的链映射$C_\bullet(A) \to C_\bullet(B)$的映射锥给出了诱导的长正合列.

习题 7.2. 给定两个含幺k代数，那么存在自然同构

$$HH_*(A \oplus B) \cong HH_*(A) \oplus HH_*(B).$$

习题 7.3. 记$Z(A)$是A的中心，$U \subseteq Z(A)$是乘性子集且$1 \in U$，对任意左A模M定义$M[U^{-1}] := Z(A)[U^{-1}] \otimes_A M$，那么当$A$是$k$平坦时，存在自然的同构

$$HH_n(A, M)[U^{-1}] \cong HH_n(A, M[U^{-1}]) \cong HH_n(A[U^{-1}], M[U^{-1}]).$$

习题 7.4. 给定一族k代数同态$\{f_i : A_i \to A_{i+1}\}_{i\in\mathbb{N}}$，求证

$$\mathrm{colim}_i HH_n(A_i) \cong HH_n(\mathrm{colim}_i A_i).$$

习题 7.5 (MacLane). 给定（离散）群G并记$k[G]$为G的群代数，并且给定$k[G]$双模M.设G在M上的（右）作用是

$$m^g := g^{-1}mg,$$

求证存在自然同构

$$HH_*(k[G], M) \cong H_*(G, M),$$

其中$H_*(G, M)$是M系数的群同调.

证明.

$$\begin{aligned}
\varphi : C_\bullet^{\mathrm{Hoch}}(k[G], M) &\to C_\bullet^{\mathrm{EM}}(G, M)\\
\varphi_n : C_n^{\mathrm{Hoch}}(k[G], M) &\to C_n^{\mathrm{EM}}(G, M)\\
m \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n &\mapsto m^{g_1 \cdot \cdots \cdot g_n} \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n.
\end{aligned}$$

□

习题 7.6. 给定平坦A双模的短正合列$0 \to M \to N \to P \to 0$，求证存在长正合列

$$\cdots \to HH_n(A, M) \to HH_n(A, N) \to HH_n(A, P) \to HH_{n-1}(A, M) \to \cdots .$$

事实上，只要$0 \to M \to N \to P \to 0$是$k$分裂的即可.

习题 7.7. 给定k代数A的双边理想I, J，尝试定义双相对Hochschild同调$HH_*(A; I, J)$使得存在如下长整合列

$$\cdots \to HH_n(A, I) \to HH_n(A; I, J) \to HH_n(A, J) \to HH_{n-1}(A, I) \to \cdots ,$$

并且证明当$I \cap J = 0$时，$HH_0(A; I, J) = 0$且$HH_1(A; I, J) = I \otimes_{A^e} J$.

7.3.1 Cohomology

给定R代数A和A双模M，

$$HH^*(A) := H^*(\mathrm{Hom}_{A^e}(C_\bullet^{\mathrm{bar}}(A), M)),$$

具体地，按定义任意给定$\bar{f} \in \mathrm{Hom}_{A^e}(C_n^{\mathrm{bar}}(A), M)$，

$$\begin{aligned}
d\bar{f}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+2}) &:= \bar{f}(\partial_{n+1}^{\mathrm{bar}}(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+2}))\\
&= \bar{f}\left(a_0a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n+2} + \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^i a_0 \otimes \cdots \otimes a_ia_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_{n+2}\right)\\
&= a_0\bar{f}(a_1 \otimes \cdots \otimes 1)a_{n+2}\\
&\quad + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_0\bar{f}(1 \otimes \cdots \otimes a_ia_{i+1} \otimes \cdots \otimes 1)a_{n+2}\\
&\quad + (-1)^{n+1}a_0\bar{f}(1 \otimes \cdots \otimes a_{n+1})a_{n+2}.
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}\operatorname{Hom}_{A^e}(C_n^{\mathrm{bar}}(A), M) &\leftrightarrows \operatorname{Hom}_R(A^{\otimes n}, M)\\ \bar{f} &\mapsto f : (a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \mapsto [\bar{f}(1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1)]\\ [\bar{f} : (a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n+1}) \mapsto a_0 f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) a_{n+1}] &\leftarrow f\end{aligned}$$

给出了R模的同构，因此Hochschild上同调$HH^*(A;M)$也可由复形$(C^\bullet(A;M), d^\bullet)$来定义，其中

$$C^n(A;M) := \operatorname{Hom}_R(A^{\otimes n}, M),$$

微分映射$d^n : C^n(A;M) \to C^{n+1}(A;M)$定义为

$$\begin{aligned}df(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) :=& a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n)\\ &+ \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n)\\ &+ (-1)^n f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) a_n.\end{aligned}$$

例 7.4.

$$HH^0(A, M) = M^A := \{m \in M \mid ma = am\ \forall a \in A\}$$

$$HH^1(A, M) = \operatorname{Der}(A, M)/\{\text{内微分}\}$$

定理 7.6. 给定带单位元的k代数A和A双模M，那么存在自然的双射

$$HH^2(A, M) \cong \mathcal{E}xt(A, M),$$

其中$\mathcal{E}xt(A, M)$是A关于M的平方零扩张的等价类的全体.

例 7.5. 考虑$A := k[x_1, \cdots, x_n]$和任意A双模M（因此M可以看作A^e模），我们希望计算

$$HH_i(A, M) = \operatorname{Tor}_i^{A^e}(A, M).$$

7.3.2 Hochschild-Kostant-Rosenberg

定理 7.7.

7.4 循环上同调*

给定R代数A，上一节中我们定义了A的Hochschild复形$C_\bullet(A|R)$，这一节我们考虑$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$在复形上的作用，它诱导了一个新的同调，称为循环同调设t_n是$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$的一个生成元，定义$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$在$A^{\otimes n+1}$上的作用为

$$t_n \cdot (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := (-1)^n (a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}),$$

对其进行先行扩张，并称它为循环算子(cyclic operator).定义

$$N := 1 + t + \cdots + t^n$$

为t对应的范数算子(norm operator).

引理 7.2. 如上提到的算子满足

$$\begin{aligned}(1-t)\bar{\partial} &= \partial(1-t),\\ \bar{\partial}N &= N\partial,\end{aligned}$$

其中∂是*Hochschild*复形的边缘映射$\partial_n : C_n(A, M) \to C_{n-1}(A, M)$，$\bar{\partial}_n$是*bar*复形的边缘映射$\partial_n : \bar{C}_n(A) \to \bar{C}_{n-1}(A)$.

证明. 按定义， □

如上引理说明

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "\partial"] & {} \arrow[d, "-\bar{\partial}"] & {} \arrow[d, "\partial"] & {} \arrow[d, "-\bar{\partial}"] & \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "\partial"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-\bar{\partial}"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "\partial"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-\bar{\partial}"] & {} \arrow[l, "N"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "\partial"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-\bar{\partial}"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "\partial"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-\bar{\partial}"] & {} \arrow[l, "N"'] \\
A & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & {} \arrow[l, "N"']
\end{tikzcd}$$

是一个双复形，称为循环双复形(cyclic bicomplex)，记为$CC_{\bullet,\bullet}(A)$.

定义. 给定?? A，称

$$HC_n(A) := H_n(\mathrm{Tot}(CC_{\bullet,\bullet}(A)))$$

为A的循环同调(cyclic homology).在需要时，用$HC_n(A|R)$来强调基环R.

事实上，循环同调$HC_*(A|R)$关于A和R都有函子性.

注意到$\mathrm{Coker}(A^{\otimes n+1} \xrightarrow{1-t} A^{\otimes n+1})$是循环群$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$下不变的，记$C_n^\lambda(A) := \mathrm{Coker}(A^{\otimes n+1} \xrightarrow{1-t} A^{\otimes n+1})$，引理7.2说明存在如下复形

$$C_\bullet^\lambda(A) := \cdots \to C_n^\lambda(A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^\lambda(A) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0^\lambda(A)$$

是良定义的，称为Connes复形(Connes' complex)，记它的同调为$H_*^\lambda(A)$.此时，存在自然的映射$p_\bullet : \mathrm{Tot}(CC_{\bullet,\bullet}(A)) \to C_\bullet^\lambda(A)$，它在第一列上是取商，在其余列上是0.

命题 7.8. 若基环R包含$\mathbb{Q}$作为子环，那么诱导的映射$p_* : HC_*(A) \to H_*^\lambda(A)$是同构.

证明. □

7.4.1 Brylinski混合复形

假定A是可滤的代数，即A子空间的存在递增滤子

$$0 = A_{-1} \subseteq A_0 \subseteq A_1 \subseteq \cdots$$

使得$\bigcup_{q\geq 0} A_q = A$且滤子与乘法想容，即$A_p \cdot A_q \subseteq A_{p+q}$.此时，我们可以定义$A$的分次代数

$$\mathrm{Gr}\ A := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \frac{A_n}{A_{n-1}}.$$

若$\mathrm{Gr}\ A$恰好是交换的，那我们可以在上面定义一个Poisson括号$\{-,-\} : \mathrm{Gr}\ A \times \mathrm{Gr}\ A \to \mathrm{Gr}\ A$，满足

- $\{f, g\} = -\{g, f\}$，
- $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$，和
- $\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\}$.

构造如下：取$a \in A_p, b \in A_q$使得f, g是a, b在自然投射$A \to \mathrm{Gr}\ A$下的像，由于$\mathrm{Gr}\ A$是交换的，$[a, b] = ab-ba \in A_{p+q}$实际上在更小的空间$A_{p+q-1}$中，因此$\{f, g\}$就定义为$[a, b]$在$(\mathrm{Gr}\ A)_{p+q-1}$中的像.

Brylinski 88'证明了当$\mathrm{Gr}\ A$是交换，特征0且光滑的时候，存在双复形$(\Omega_{\mathrm{Gr}\ A}, \delta, d)$，其中$\delta$是在$\mathrm{Gr}\ A$中微分形式上的阶数为$-1$的边缘映射，满足

$$\delta(f_0 df_1 \cdots f_q) = \sum_{i=1}^{q+1} (-1)^{i+1} \{f_0, f_i\} df_1 \cdots \hat{f}_i \cdots df_q + \sum_{1\leq i<j\leq q} (-1)^{i+j} f_0 d\{f_i, f_j\} df_1 \cdots \hat{f}_i \cdots \hat{f}_j \cdots df_q$$

定理 7.9 (Kassel 88). *假设k是特征为0的域，A是可滤的代数且$\mathrm{Gr}\ A$是交换且光滑的代数，满足*

$$\mathrm{Gr}\ A \cong k[x_1, \cdots, x_n],$$

则$HH_q(A) \cong H_q(\Omega_{\mathrm{Gr}\ A}, \delta)$，$HC_q(A) \cong H_q(\Omega_{\mathrm{Gr}\ A}, \delta, d)$.

7.5 应用：形变与上同调

几何上，

7.5.1 一阶形变

给定k代数A，我们考虑如下问题：A上的乘法实际上是一个k映射$A \otimes_k A \to A$，在所有的这样映射的全体$\mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$中，并不是所有的元素都可以成为乘法——我们依旧要求乘法满足结合律，但这导致对这样元素的讨论变得困难了许多，因此相应的比较系统的方式考虑“切空间”问题，更准确地说，一阶形变的问题.

于是，考虑从旧的乘法中定义一个新的“乘法”

$$a * b := ab + \epsilon f(a, b),$$

其中$f \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$，那么结合律

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

就具体地写为

$$(ab+\epsilon f(a,b))c+\epsilon f(ab+\epsilon f(a,b),c)=a(bc+\epsilon f(b,c))+\epsilon f(a,bc+\epsilon f(b,c)),$$

根据f的双线性性，上式被化简为

$$abc+\epsilon f(a,b)c+\epsilon f(ab,c)+\epsilon^2 f(f(a,b),c)=abc+\epsilon af(b,c)+\epsilon f(a,bc)+\epsilon^2 f(a,f(b,c)).$$

注意到这里考虑的是一阶问题（即在环$k[\epsilon]/(\epsilon^2)$上考虑问题），视$\epsilon^2=0$，因此我们得到关于f的条件

$$f(a,b)c+f(ab,c)=af(b,c)+f(a,bc), \tag{7.1}$$

它对应于乘法的结合性条件.

另一方面，注意到$GL_k(A)$在A上的作用本质上不改变乘法，因此在考虑乘法的时候我们希望去除掉$GL_k(A)$的影响.假定$T\in GL_k(A)$满足

$$T(a):=a+\epsilon g(a),$$

其中$g\in \mathrm{Hom}_k(A\otimes_k A,A)$.这样，$T$对乘法$-*-$的拉回为

$$a*_T b:=T(T^{-1}(a)*T^{-1}(b)).$$

由于我们是在环$k[\epsilon]/(\epsilon^2)$上考虑问题，$T^{-1}=\mathrm{id}-\epsilon g$（习题7.8）.直接计算得到

$$\begin{aligned}
ab+\epsilon f_T(a,b)&=a*_T b:=T(T^{-1}(a)*T^{-1}(b))\\
&=T(T^{-1}(a)T^{-1}(b)+\epsilon f(T^{-1}(a),T^{-1}(b)))\\
&=T^{-1}(a)T^{-1}(b)+\epsilon f(T^{-1}(a),T^{-1}(b))+\epsilon g(T^{-1}(a)T^{-1}(b)+\epsilon f(T^{-1}(a),T^{-1}(b)))\\
&=(a-\epsilon g(a))(b-\epsilon g(b))+\epsilon f(a-\epsilon g(a),b-\epsilon g(b))\\
&\quad+\epsilon g((a-\epsilon g(a))(b-\epsilon g(b))+\epsilon f(a-\epsilon g(a),b-\epsilon g(b)))\\
&=ab-\epsilon(g(a)b+ag(b))+\epsilon^2 g(a)g(b)+\epsilon f(a-\epsilon g(a),b-\epsilon g(b))\\
&\quad+\epsilon g(ab-\epsilon(g(a)b+ag(b))+\epsilon^2 g(a)g(b)+\epsilon f(a-\epsilon g(a),b-\epsilon g(b)))\\
&=ab-\epsilon(g(a)b+ag(b))+\epsilon f(a,b)+\epsilon g(ab),
\end{aligned}$$

这给出了关系

$$f_T(a,b)=f(a,b)-g(a)b-ag(b)+g(ab). \tag{7.2}$$

综上，我们关心的对象是$\mathrm{Hom}_k(A\otimes_k A,A)$中满足7.1式的乘法$f$在7.2式下的等价类.

观察如上的关系，这恰好给出了对应

$$\{\text{环}A\text{的一阶形变等价类}\}\leftrightarrow HH^2(A).$$

习题 7.8. 依照上面讨论的记号，求证

$$T^{-1}(a)=a-\epsilon g(a).$$

例 7.6. 考虑k代数$A := k[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$，作为$k$向量空间它有一组基$\{1, \sigma\}$，满足$\sigma^2 = 1$.上闭链条件7.1给出关系

$$
\begin{aligned}
f(1,1)1 + f(1,1) &= 1f(1,1) + f(1,1) \\
f(1,1)\sigma + f(1,\sigma) &= 1f(1,\sigma) + f(1,\sigma) \\
f(1,\sigma)1 + f(\sigma,1) &= 1f(\sigma,1) + f(1,\sigma) \\
f(1,\sigma)\sigma + f(\sigma,\sigma) &= 1f(\sigma,\sigma) + f(1,\sigma^2) \\
f(\sigma,1)1 + f(\sigma,1) &= \sigma f(1,1) + f(\sigma,1) \\
f(\sigma,1)\sigma + f(\sigma,\sigma) &= \sigma f(1,\sigma) + f(\sigma,\sigma) \\
f(\sigma,\sigma)1 + f(\sigma^2,1) &= \sigma f(\sigma,1) + f(\sigma,\sigma) \\
f(\sigma,\sigma)\sigma + f(\sigma^2,\sigma) &= \sigma f(\sigma,\sigma) + f(\sigma,\sigma^2),
\end{aligned}
$$

去掉平凡等式与重复的等式，（考虑到交换性）有关系

$$
\begin{aligned}
f(1,\sigma) &= f(\sigma,1) \\
f(1,\sigma) &= \sigma f(1,1).
\end{aligned}
$$

于是，f可由如下定义给出：

$$
\begin{aligned}
f(1,1) &:= c_1 + c_2\sigma \\
f(1,\sigma) &:= c_2 + c_1\sigma \\
f(\sigma,1) &:= c_2 + c_1\sigma \\
f(\sigma,\sigma) &:= c_3 + c_4\sigma,
\end{aligned}
$$

其中$c_1, \cdots, c_4 \in k$是常数.另一方面，记

$$
\begin{aligned}
g(1) &:= a_1 + a_2\sigma \\
g(\sigma) &:= a_3 + a_4\sigma,
\end{aligned}
$$

那么上边缘给出

$$
\begin{aligned}
dg(1,1) &= a_1 + a_2\sigma \\
dg(1,\sigma) &= a_2 + a_1\sigma \\
dg(\sigma,1) &= a_2 + a_1\sigma \\
dg(\sigma,\sigma) &= (2a_4 - a_1) + (2a_3 - a_2)\sigma,
\end{aligned}
$$

上面的计算恰好说明每一个上闭链都是上边缘，即$HH^2(A) = 0$.

例 7.7. 考虑k代数$A := k[\epsilon]/(\epsilon^2)$，依照例7.6中的计算方法（不同的是这里$\epsilon^2 = 0$），可以得到

$$
\begin{aligned}
f(1,1) &:= c_1 + c_2\epsilon \\
f(1,\epsilon) &:= c_1\epsilon \\
f(\epsilon,1) &:= c_1\epsilon \\
f(\epsilon,\epsilon) &:= c_3 + c_4\epsilon,
\end{aligned}
$$

上边缘给出关系

$$\begin{aligned} dg(1,1) &= a_1 + a_2\epsilon \\ dg(1,\epsilon) &= a_1\epsilon \\ dg(\epsilon,1) &= a_1\epsilon \\ dg(\epsilon,\epsilon) &= a_3\epsilon, \end{aligned}$$

这意味着非边缘的上闭链都形如

$$f(\epsilon,\epsilon) = c_3,$$

因此$HH^2(A) = k$.

7.5.2 高阶形变和

上一节当中我们讨论了一阶形变，对应的同样还有高阶形变，我们首先来讨论所谓的二阶形变.类似之前的定义，记新的乘法为

$$a * b := ab + \epsilon f_1(a,b) + \epsilon^2 f_2(a,b),$$

其中$f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$，如同上一节对结合律的计算，我们不仅得到相同的关系式7.1

$$f_1(a,b)c + f_1(ab,c) = af_1(b,c) + f_1(a,bc),$$

还得到新的关系式

$$f_1(f_1(a,b),c) - f_1(a,f_1(b,c)) = f_2(a,b)c + f_2(ab,c) - af_2(b,c) - f_2(a,bc), \tag{7.3}$$

容易观察得到等式的右边恰好是f_2在微分映射下的像$df_2 \in \mathrm{Hom}(A \otimes_k A \otimes_k A, A)$.

定义. 给定域k和k向量空间的上链复形$(L^\bullet, d^\bullet)_\mathbb{Z}$，记$L := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} L^i$，若还存在双线性映射

$$[-,-] : L \times L \to L$$

满足

1. 映射$[-,-]$是齐次(homogeneous)且反对称的(skew symmetric)，即$[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}$对任意$i,j \in \mathbb{Z}$成立，且对任意齐次元素$x \in L^i, y \in L^j$，

$$[x,y] = (-1)^{\deg x \deg y + 1}[y,x],$$

2. 映射$[-,-]$满足分次Jacobi等式，即$x \in L^i, y \in L^j, z \in L^p$，

$$(-1)^{\deg x \deg z}[x,[y,z]] + (-1)^{\deg y \deg x}[y,[z,x]] + (-1)^{\deg z \deg y}[z,[x,y]] = 0,$$

3. 微分映射d满足分次Leibnitz恒等式，即$x \in L^i, y \in L^j$，

$$d[x,y] = [dx,y] + (-1)^{\deg x}[x,dy],$$

则称$(L^\bullet, [-,-], d^\bullet)$是一个微分分次Lie代数(differential graded Lie algebra).

这里奇妙的事情是存在合适的定义方式使得计算Hochschild上同调的复形是一个微分分次Lie代数.

定义. 给定$f \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes m+1}), g \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n+1})$，对任意$i = 1, \cdots, m+1$，定义$f \circ_i g \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n+m+1})$

$$f \circ_i g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+n+1}) := f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes g(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+n}) \otimes \cdots \otimes a_{m+n+1}).$$

进而可以定义circle product

$$f \circ g := \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{(i+1)n} f \circ_i g.$$

引理 7.3. *给定$f \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes m+1}), g \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n+1})$，若定义cup product*

$$(f \smile g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+n+2}) := f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+1}) g(a_{m+2} \otimes \cdots \otimes a_{m+n+2}),$$

则

$$d(f \circ g) = f \circ dg + (-1)^n df \circ g + (-1)^{(m+1)(n+1)+n} f \smile g + (-1)^{n+1} g \smile f.$$

命题 7.10. *Gerstenhaber括号*

$$[f, g] := f \circ g - (-1)^{\deg f \deg g} g \circ f$$

和$-d$使得$(\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes \bullet+1}), [-,-], -d)$成为一个微分分次Lie代数.

证明. □

推论 7.10.1. *若$f \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, A)$是上闭链，那么$[f, f] \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes 2n+1}, A)$也是上闭链.*

回到原来的问题，注意到

$$f_1 \circ f_1(a \otimes b \otimes c) = 2f_1(f_1(a \otimes b) \otimes c) - 2f_1(a \otimes f_1(b \otimes c))$$

恰好是等式7.3的左边的两倍，因此7.3式可重新写为

$$\frac{1}{2}[f_1, f_1] = df_2.$$

又由于f_2是上闭链，这说明存在二阶形变

$$a * b := ab + \epsilon f_1(a, b) + \epsilon^2 f_2(a, b),$$

是以f_1为截断的一阶形变的扩张当且仅当

$$0 = [f_1, f_1] \in HH^3(A),$$

因此称$[f_1,f_1]$（的等价类）为一阶形变$ab+\epsilon f_1$扩张到二阶形变$ab+\epsilon f_1+\epsilon^2 f_2$的阻碍(obstruction).

借助如上的工具，记A中的乘法为

$$\begin{aligned} m: A\times A &\to A \\ (a,b) &\mapsto ab, \end{aligned}$$

那么结合律

$$m(m(a,b),c)=m(a,m(b,c))$$

可以等价地写为

$$[m,m]=0,$$

Leibnitz法则

$$d(m(a,b))=m(d(a),b)+m(a,d(b))$$

可写为

$$[d,m]=0,$$

而Hochschild微分

$$d(f)=[m,f]$$

对任意$f\in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n+1},A)$都成立.

例 7.8.

对于更一般n阶扩张的情形，我们实际上是在考虑系数环$k[\epsilon]/(\epsilon^{n+1})$上的情形，如同之前的计算对比每个$\epsilon^k$的系数有方程

$$\sum_{i+j=0}^{k} f_j(a,f_i(b,c))=\sum_{i+j=0}^{k} f_j(f_i(a,b),c),$$

当$k=0$时这恰好是A中的乘法

7.6 函子上同调*

给定交换环R和小范畴$\mathcal{C}$，记$\mathcal{C}-\mathbf{Mod}$（对应的，$\mathbf{Mod}-\mathcal{C}$）为所有$\mathcal{C}$到$R-\mathbf{Mod}$的协变函子（对应的，反变函子）组成的范畴.根据例A.4，这也是一个Abel范畴.

例 7.9. 给定含幺R代数A，考虑$\underline{A}$，定义为只含一个对象$*$的范畴，且$\mathrm{hom}_{\underline{A}}(*,*)=A$，态射的复合是$A$中的乘法.

设$\underline{M}$是右$\underline{A}$模，即反变函子$\underline{M}:\underline{A}\to R-\mathbf{Mod}$.此时，函子给定了一个$R-\mathbf{Mod}$中的对象$M:=\underline{M}(*)$，对任意态射$a,b\in A=\mathrm{hom}_{\underline{A}}(*,*)$，记

$$\begin{aligned} \underline{M}(a): M &\to M \\ m &\mapsto m\cdot a, \end{aligned}$$

于是反变原则说明

$$m\cdot(ab)=\underline{M}(ab)(m)=\underline{M}(b)\underline{M}(a)(m)=\underline{M}(b)(m\cdot a)=(m\cdot a)\cdot b,$$

这恰好是一个右A模.反过来，按如上的对应方式一个右A模也同时给出了一个右$\underline{A}$模.

例 7.10. 我们接着例7.9继续讨论，给出一个张量积范畴化的定义.首先回顾如下定义：设$\mathcal{C}$是一个小范畴，$\mathcal{D}$是一个上完备的局部小范畴，考虑2函子

$$S:\mathcal{C}^{\circ}\times\mathcal{C}\to\mathcal{D},$$

那么我们称f_*与f^*的上等值子

$$\prod_{f:A_0\to A_1}S(A_0,A_1)\rightrightarrows\prod_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S(A,A)$$

为S的上终止(co-end)，其中f_*是复合$S(A_0,A_1)\xrightarrow{S(f,\mathrm{id})}S(A_1,A_1)\hookrightarrow\prod_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S(A,A)$，$f^*$是复合$S(A_0,A_1)\xrightarrow{S(\mathrm{id},f)}S(A_0,A_0)\hookrightarrow\prod_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S(A,A)$，记为$\int_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S(A,A)$.

给定右R模M和左R模N，那么我们有自然的2函子

$$\begin{aligned}S:\underline{A}^{\circ}\times\underline{A}&\to\mathbf{Ab}\\(*,*)&\mapsto M\otimes_{\mathbb{Z}}N\\(f,g)&\mapsto f\otimes g,\end{aligned}$$

我们来验证，上终止$\int_{\underline{A}}S=M\otimes_R N$.

但为了

定义. 给定幺半小范畴$\mathcal{C}$，若$\mathcal{C}$中的对象与$\mathbb{N}$对应（于是对象被记为$\{[n]\}_{n\in\mathbb{N}}$），且幺半结构同于自然数的加法结构，即

$$[n]\otimes[m]=[n+m],$$

则称范畴$\mathcal{C}$为一个PROP.

例 7.11. 记$\mathbf{FinSet}_*$是具有基点的所有有限集合组成的范畴，即

1. $\mathbf{FinSet}_*$的对象包括$\{[n]:=\{0,1,\cdots,n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中$0\in[n]$是集合的基点，
2. $\mathbf{FinSet}_*$的态射包括所有保基点的集合映射的全体，
3. $\mathbf{FinSet}_*$的幺半结构由楔积给出，即
$$[n]\wedge[m]=[n+m],$$

明显地这是一个PROP.

引理 7.4. 函子$R[\hom_{\mathcal{C}}([n],-)]$和$R[\hom_{\mathcal{C}}(-,[n])]$都是投射的.

证明. 给定左$\mathcal{C}$模F,G和满射$\tau:F\Rightarrow G$，我们需要证明对任意的态射$\alpha:R[\hom_{\mathcal{C}}([n],-)]$，都有提升

$$\begin{tikzcd} & R[\hom_{\mathcal{C}}([n],-)] \arrow[dl, dashed, Rightarrow, "\tilde{\alpha}"'] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"] & \\ F \arrow[r, Rightarrow, "\tau"] & G \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

注意到对任意的左模$H, K : \mathcal{C} \rightrightarrows R - \mathbf{Mod}$，$\mathrm{Nat}(H, K)$也有自然的$k$模结构，满足

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)_A &:= \alpha_A + \beta_A,\\ (r\alpha)_A &:= r\alpha_A.\end{aligned}$$

记$h^n := R[\hom_{\mathcal{C}}([n], -)]$是由集合$\hom_{\mathcal{C}}([n], -)$生成的自由$R$模，因此Yoneda引理中的自然同构

$$\begin{aligned}\Phi : \mathrm{Nat}(h^n, G) &\leftrightarrows G([n]) : \Psi\\ \alpha &\mapsto \alpha_{[n]}(\mathrm{id}_{[n]})\\ \eta^m &\leftarrow\!\shortmid m\end{aligned}$$

是R模的同构，其中η^m是自然变换

$$\begin{aligned}\eta^m &: \hom_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F\\ \eta^m_B &: \hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to F(B)\\ &\qquad h \mapsto F(h)(m).\end{aligned}$$

这意味着在此Yoneda对应下，α对应到$G([n])$中的某个元素m，例A.4说明

$$\tau_{[n]} : F([n]) \to G([n])$$

是满射，因此存在$\tilde{m} \in F([n])$使得$\tau_{[n]}(\tilde{m}) = m$，记$\tilde{\alpha}$是$\tilde{m}$在Yoneda映射下对应的自然变换，Yoneda的自然性说明了最初图的交换性，得证.

对函子$R[\hom_{\mathcal{C}}(-, [n])]$的证明是相同的. □

由此，我们对于$\mathcal{C}$中的对象，记$h_A := R[\hom_{\mathcal{C}}(-, A)]$和$h^A := R[\hom_{\mathcal{C}}(A, -)]$.

命题 7.11. *若范畴$\mathcal{C}$是$PROP$，那么$\mathcal{C} - \mathbf{Mod}$有足够多的投射和内射对象.*

证明. 考虑

$$\bigoplus_{\substack{A \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}\\ a \in F(A)}} h_A \Rightarrow F,$$

其中自然变换$h_A \Rightarrow F$由Yoneda引理对应到元素$a \in F(A)$给出 □

自然地可以构造（双）函子

$$- \otimes_{\mathcal{C}} - : \mathbf{Mod} - \mathcal{C} \times \mathcal{C} - \mathbf{Mod} \to R - \mathbf{Mod},$$

使得

$$G \otimes_{\mathcal{C}} F = \left(\bigoplus_{A \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C}} G(A) \otimes_k F(A) \right) \Big/ \langle (G(f)(x)) \otimes y - x \otimes (F(f)(y)) \rangle_{\substack{x \in G(B), y \in F(A),\\ A, B \in \mathrm{ob}\, \mathcal{C},\\ f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)}},$$

或者可以表示为

$$F\otimes_{\mathcal{C}}G\cong \operatorname{coeq}(\bigoplus_{f\in\hom_{\mathcal{C}}(A,B)}G(B)\otimes_R F(A)\underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightrightarrows}}\bigoplus_{A\in\text{ob }\mathcal{C}}G(A)\otimes_R F(A)),$$

其中对任意的$x\in G(B),y\in F(A)$，$f^*(x\otimes y):=x\otimes F(f)(y),f_*(x\otimes y):=G(f)(x))\otimes y$.

例 7.12. 设R是环，F,G是函子$F:\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Mod}-R$和$G:\mathcal{C}\to R-\mathbf{Mod}$.定义函子$S:=F\boxplus_R G:\mathcal{C}^\circ\times\mathcal{C}\to\mathbf{Ab}$，将对象$(A,B)$映为$F(A)\otimes_R G(B)$，将态射$(f:C\to A,g:B\to D)$映到$F(f)\boxtimes_R G(g):F(A)\otimes_R G(B)\to F(C)\otimes_R G(D),x\otimes y\mapsto F(f)(x)\otimes G(g)(y)$.在此基础上定义对象

$$F\otimes_{A,R}G:=\int^{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}F(f)\boxtimes_R G(g).$$

若函子$R^\circ[\hom_{\mathcal{C}}(-,A)]:\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Mod}-R$，将对象$C$映到$\hom_{\mathcal{C}}(C,A)$生成的自由$R$模，证明

$$R^\circ[\hom_{\mathcal{C}}(-,A)]\otimes_{A,R}G\cong G(A).$$

证明对R作为自己的右模的常值函子$Const_R:\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Mod}-R$满足

$$Const_R\otimes_{A,R}G\cong\operatorname{colim}_{\mathcal{C}}G.$$

例 7.13. 记R是映到R作为R模本身的常值函子（将$\mathcal{C}$中的所有态射映到恒同态射），那么

$$F\otimes_{\mathcal{C}}R\cong\operatorname{colim}_{\mathcal{C}}F.$$

这里直接应用了余极限的计算方法.对于任意函子$F:J\to\mathcal{D}$，

$$\operatorname{colim}_J F\cong\operatorname{coeq}\left[\coprod_{f\in\text{mor }J}F(\text{dom }f)\underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightrightarrows}}\coprod_{j\in J}F(j)\right],$$

其中f^*是由$\text{id}:F(\text{dom }f)\to F(\text{dom }f)$诱导的态射，$f_*$是由$F(f):F(\text{dom }f)\xrightarrow{f}F(\text{codom }f)$诱导的态射.按定义

$$F\otimes_{\mathcal{C}}R\cong\operatorname{coeq}\left[\bigoplus_{f\in\hom_{\mathcal{C}}(A,B)}F(B)\otimes_R R\underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightrightarrows}}\bigoplus_{A\in\text{ob }\mathcal{C}}F(A)\otimes_R R\right],$$

此时按定义中的元素写出来，f^*恰好是由$\text{id}:F(\text{dom }f)\to F(\text{dom }f)$诱导的态射，$f_*$恰好是由$F(f):F(\text{dom }f)\xrightarrow{f}F(\text{codom }f)$诱导的态射，注意到$R-\mathbf{Mod}$中的余积是直和，这就完成了证明.

习题 7.9. 求证

$$F\otimes_{\mathcal{C}}h^n\cong F([n]).$$

证明. 按定义， □

特别地，对任意$M\in\mathcal{C}-\mathbf{Mod}$和$N\in\mathbf{Mod}-\mathcal{C}$，$\text{Tor}_i^{\mathcal{C}}(M,N)$是有意义的.

例 7.14. 考虑$\mathcal{C}=\mathbf{FinSet}_*$的情形（见例7.11），给定交换$k$代数$A$和对称$A-A$双模$M$，定义函子

$$\begin{aligned}L(A,M):\mathbf{FinSet}_*&\to k-\mathbf{Vec}\\ [n]&\mapsto M\otimes_k A^{\otimes n},\end{aligned}$$

并且对于任意$f:[n]\to[m]$，$L(A,M)(f)$定义为

$$M\otimes_k A^{\otimes n}\to M\otimes_k A^{\otimes m}$$
$$a_0\otimes\cdots\otimes a_n\mapsto b_0\otimes\cdots\otimes b_m,$$

其中
$$b_j := \prod_{f(i)=j} a_i,\quad j=0,\cdots,m.$$
这里有几个技术性的条件：我们要求有限集是带基点的原因在于$L(A,M)([n]) = M\otimes_k A^{\otimes n}$中的元素地位并不一样——第0项只能是$M$中的元素，不能与其他元素交换位置，但取$M=A$时则不需要有这个要求；在$b_j$的定义中并没有规定乘法中每个$a_i$的位置，这样在$A$是交换代数时如上的定义才没有歧义，T.Pirashvili在[**?**]中讨论了A非交换的情形.

考虑一组有限集及之间的态射
$$\begin{aligned}(S^1)_n &:= \{(0,\cdots,0,1,\cdots,1)\}/\sim,\quad n\in\mathbb{N}\\ d_i^{[n]}: (S^1)_n &\to (S^1)_{n-1}\\ (a_0,\cdots,a_n) &\mapsto (a_0,\cdots,\hat{a}_i,\cdots,a_n)\end{aligned}$$
其中$(S^1)_n$中的数组共n+1项（这里我们将i与有i个0的数组等同起来），等价关系定义为$(0,\cdots,0)\sim(1,\cdots,1)$.按照之前的定义，
$$L(A,M)((S^1)_n) = M\otimes_k A^{\otimes n},$$
而$L(A,M)(d_i^{[n]})$是
$$\begin{aligned}M\otimes_k A^{\otimes n} &\to M\otimes_k A^{\otimes n-1}\\ a_0\otimes\cdots\otimes a_n &\mapsto \begin{cases} a_0a_1\otimes a_2\otimes\cdots\otimes a_n & i=0\\ a_0\otimes\cdots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_n & i=1,\cdots,n-1\\ a_na_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_{n-1} & i=n,\end{cases}\end{aligned}$$
这恰好是Hochschild复形.

在例7.14中我们给Hochschild一个新的解释，

例 7.15.
$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbf{B}G}(k,F)\cong H_i(G;k)$$

例 7.16. 设$\mathscr{G}$是$\mathbf{Gp}$中所有有限生成自由群组成的满子范畴，于是给定域k，
$$\mathrm{lin}_k : \mathscr{G}\hookrightarrow \mathbf{Gp}\xrightarrow{\mathrm{ab}}\mathbf{Ab}\xrightarrow{-\otimes_{\mathbb{Z}}k} k-\mathbf{Vec}$$
那么
$$\mathrm{Tor}_i^{\mathscr{G}^\circ}(k[G],\mathrm{lin}_k)\cong H_{i+1}(G;k)$$
其中$H_{i+1}(G;k)$是群G以k为系数的群同调.

$h^1(\langle n\rangle) = k[\hom_{\mathscr{G}}(\langle 1\rangle,\langle n\rangle)] = k[\langle n\rangle]$
$$h^1\Rightarrow \mathrm{lin}_k,$$

习题 7.10.
$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{G}}(k[G],\mathrm{lin}_k)\cong ?H^{i+1}(G;k)$$

附录 A　Abel范畴

一定程度上说，我们构造范畴的目的是抽象出原本一些对象之间的行为，用更一般的方式去理解之前的对象和之间的行为.在代数中，模是一类非常友好的对象，我们希望找到足够抽象的一类对象，他们之间的行为类似于模（或者Abel群），这样的范畴就是Abel范畴.

同调代数中绝大多数的研究对象是Abel范畴中的对象，它们具有许多良好的性质，在这一章中我们将列举绝大部分.但是，同调代数的学习并不需要知道每一个这样性质的来源和证明，甚至在很多情形下一个Abel范畴完全可以看成一个R模范畴，虽然这并不准确，但足够对同调代数有正确的理解.这里的建议是大致浏览这一章，知道Abel范畴的定义和一些基本性质，然后进入正式的同调代数的学习，在适当并且需要的时候再去了解和分析Abel范畴中一些性质的证明.

A.1　Abel范畴

这一节我们不区分范畴内对象的同构和相等，即对象的相等意味着存在同构.

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$中的两个单态射$f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$，若存在$h : A_1 \leftrightarrows A_2 : k$使得图

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dd, shift left, "h"] \arrow[dr, "f_1"] & \\
& B, \\
A_2 \arrow[uu, shift left, "k"] \arrow[ur, "f_2"] &
\end{tikzcd}$$

是交换的，则称单态射$f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$是等价的(equivalent).对偶地，给定范畴$\mathcal{C}$中的两个满态射$g_1 : B \to C_1, g_2 : B \to C_2$，若存在$h : C_1 \leftrightarrows C_2 : k$使得图

$$\begin{tikzcd}
& C_1 \arrow[dd, shift left, "h"] \\
B \arrow[ur, "g_2"] \arrow[dr, "g_1"'] & \\
& C_2 \arrow[uu, shift left, "k"]
\end{tikzcd},$$

是交换的，则称满态射$f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$是等价的(equivalent).称$B$的单态射的等价类为$B$的子对象(subobject)，$B$的满态射的等价类为$B$的商对象(quotient object).

于是，对任意单态射$A \hookrightarrow B$，它的等价类是B的一个子对象，记为$A \subseteq B$，同样地，对任意一个满态射$B \twoheadrightarrow C$，它的等价类是B的一个商对象，记为$C = B/\sim$.

习题 A.1. 求证若$f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$都是单态射，那么满足交换图

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[dr, "f_1"] \arrow[dd, "h"'] & \\ & B, \\ A_2 \arrow[ur, "f_2"'] & \end{tikzcd}$$

的$h : A_1 \to A_2$是单射.

若$A_1 \to B, A_2 \to B$分别是某个子对象的代表元，且存在$A_1 \to A_2$使图交换，则称子对象A_1被子对象A_2包含.注意到子对象不具有传递性.

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$中的两个态射$f, g : X \to Y$，若存在对象K和态射$i : K \to X$满足

1. $f \circ i = g \circ i$；
2. 若对任意满足$f \circ h = g \circ h$态射$h : Z \to X$都存在唯一的分解

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y, \\ Z \arrow[u, dashed] \arrow[ur, "h"] & & \end{tikzcd}$$

则称K是f, g的等值子(equalizer).

对偶地，若存在对象C和态射$c : Y \to C$满足

1. $c \circ f = c \circ g$；
2. 若对任意满足$h \circ f = h \circ g$态射$h : Y \to Z$都存在唯一的分解

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "h"'] & C, \arrow[d, dashed] \\ & & Z, \end{tikzcd}$$

则称C是f, g的余等值子(coequalizer).

习题 A.2. 给定范畴$\mathcal{C}$中的态射$f, g : X \rightrightarrows Y$，若它们的余等值子$c : Y \to C$存在，则$c$是满态射.

证明. 任取$h, k : C \rightrightarrows W$满足$h \circ c = k \circ c$，那么由余等值子的定义$h \circ c \circ f = h \circ c \circ g = k \circ c \circ g$.于是余等值子的泛性质存在唯一的$C \dashrightarrow W$满足交换图

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \arrow[r, "c"] \arrow[dr, "h\circ c=k\circ c"'] & C, \arrow[d, dashed] \\
 & & Z.
\end{tikzcd}
$$

但$h, k : C \to Z$都满足交换图，因此由唯一性$h = k$. □

A.1.1 加性范畴

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$，若其中的始对象和终对象都存在，并且二者相同（即存在对象既是始对象也是终对象），则称该对象为零对象(zero object).

由于对任意其他对象，起始与终止于零对象的态射都只有一个，因而态射$X \to 0$也可以被记为0.类似地，态射$X \to Y$若有分解$X \to 0 \to Y$，则也记为0.

任意给定态射$f : X \to Y$，那么称f与0的等值子为f的核(kernel)，记为ker f；那么称f与0的余等值子为f的余核(cokernel)，记为coker f.

习题 A.3. 给定小范畴$\mathcal{C}$和范畴$\mathcal{A}$，满足$\mathcal{A}$中存在零对象，求证范畴$\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$也存在零对象.

证明. 我们需要验证$\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$中的零对象是常值零函子，即函子

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Const}_0 : \mathcal{C} &\to \mathcal{A} \\
A &\mapsto 0.
\end{aligned}
$$

任意给定函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$和自然变换$\alpha : F \Rightarrow \mathrm{Const}_0$，具体写出来对任意$\mathcal{C}$中的对象$A$，

$$\alpha_A : F(A) \to 0$$

是$\mathcal{A}$中的态射.但是0是$\mathcal{A}$中的零对象，因此$\alpha_A = 0$，这意味着Const_0是终对象.同理它是始对象. □

引理 A.1. 给定含有零对象的范畴$\mathcal{A}$，则ker和coker都是函子$\mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

证明. □

习题 A.4. 给定含零对象范畴中的图

$$W \to X \to Y \to Z,$$

且任意相邻的态射的复合为0，求证$X \to Y$诱导了相容的

$$C = \mathrm{coker}(W \to X) \dashrightarrow K = \ker(Y \to Z),$$

并且这样的态射是唯一的.

证明. 考虑

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[d] & \\
W \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] & Z \\
 & C \arrow[ur, dashed] \arrow[uur, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

由于$W \to X \to Y = 0$，按定义存在$C \dashrightarrow Y$与图交换，于是$X \to C \dashrightarrow Y \to Z = 0$，根据$X \to C$是满态射（习题A.2），$C \dashrightarrow Y \to Z = 0$，再由$K$的泛性质存在$C \dashrightarrow K$与整幅图交换.

唯一性来源于核以及余核的泛性质. □

给定范畴$\mathcal{A}$，假定其中的有限和和有限积都存在.注意到始对象是空指标集给出的余积，终对象是空指标集给出的积，因此$\mathcal{A}$中的始对象和终对象都存在.

定义. 给定包含零对象的范畴$\mathcal{A}$，若对任意对象X, Y，态射集$\hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$具有Abel群结构，且满足相容性质

$$f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$$

和

$$(g + h) \circ k = g \circ k + h \circ k,$$

其中$f : X \to Y, g, h : Y \rightrightarrows Z, k : Z \to W$是$\mathcal{A}$中的态射，则称$\mathcal{A}$是预加性范畴(pre-additive category)，

例 A.1. 给定环R，

习题 A.5. 给定预加性范畴$\mathcal{A}$和其中的态射$f : X \to Y$，求证对任意的对象W, Z，

$$f_* : \hom_{\mathcal{A}}(W, X) \to \hom_{\mathcal{A}}(W, Y)$$

和

$$f^* : \hom_{\mathcal{A}}(Y, Z) \to \hom_{\mathcal{A}}(X, Z)$$

都是Abel群同态.

习题 A.6. 证明

定义. 给定包含零对象的范畴$\mathcal{A}$，若对任意有限多个对象$X_1, \cdots, X_n$，都存在对象$X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$以及态射

$$\iota_i : X_i \to X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$$

和

$$\pi_i : X_1 \oplus \cdots \oplus X_n \to X_i,$$

$1 \leq i \leq n$，满足

1. $\pi_i \circ \iota_i = \mathrm{id}_{A_i}$对于$1 \leq i \leq n$成立，

2. $\pi_i \circ \iota_j = 0$对于$1 \le i, j \le n$且$i \ne j$成立，

3. $(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n, \{\pi_i\})$是$X_1, \cdots, X_n$的积，$(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n, \{\iota_i\})$是$X_1, \cdots, X_n$的余积，

则称$\mathcal{A}$是加性范畴(additive category)，$(X_1 \oplus \cdots \oplus X_n, \{\pi_i\}, \{\iota_i\})$是$X_1, \cdots, X_n$的双积(biproduct).

给定加性范畴$\mathcal{A}$中的对象X, Y，记它们的和为$X+Y$或$X \oplus Y$（$X \coprod Y$），泛性质诱导的映射分别记为

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} X + Y$$

和

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} X + Y.$$

对应地，记它们的积为$X \times Y$或者$X \prod Y$，泛性质诱导的态射为

$$X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} X$$

和

$$X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} Y.$$

进一步地，若给定了$f : W \to X, g : W \to Y$，根据泛性质存在$W \to X \times Y$，这个映射记为$(f, g) : W \to X \times Y$；若给定了$h : X \to Z, k : Y \to Z$，根据泛性质存在$X + Y \to Z$，这个映射记为$\begin{pmatrix} h & k \end{pmatrix} : X + Y \to Z$.我们举例说明这样的记号使得态射的符合满足矩阵乘法.考虑给定了$f : W \to X, g : W \to Y$，那么复合

$$W \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}} X$$

用矩阵乘法写出来恰好是$\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = f : W \to X$（按照习惯，映射是从右到左记录的），满足泛性质.

命题 A.1. *1. 若范畴$\mathcal{A}$是加性范畴，则它是预加性范畴.*

2. 若范畴$\mathcal{A}$是预加性范畴，且满足加性范畴中的前两条性质，则第三条性质当且仅当

$$\iota_1 \circ \pi_1 + \cdots + \iota_n \circ \pi_n = \mathrm{id}_{X_1 \oplus \cdots \oplus X_n}.$$

证明. 1. 我们需要给加性范畴$\mathcal{A}$中的态射集$\hom_{\mathcal{A}}(X, Y)$自然的Abel群结构.

任意给定$f,g:X\rightrightarrows Y$，定义

$$f+g:X\to Y:=X\xrightarrow{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}}X\oplus X\xrightarrow{\begin{pmatrix}f&g\end{pmatrix}}Y.$$

事实上还有另一种定义方式

$$f+g:X\to Y:=X\xrightarrow{\begin{pmatrix}f\\g\end{pmatrix}}Y\oplus Y\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&1\end{pmatrix}}Y,$$

但可以验证二者是相同的.

□

A.1.2 Abel范畴及其中态射的分解

定义. 若范畴$\mathcal{A}$满足

1. $\mathcal{A}$中零对象存在；
2. 对$\mathcal{A}$中任意两个对象X,Y，它们的双积存在；
3. 若$f:X\to Y$是$\mathcal{A}$中的态射，则$\ker f$与$\operatorname{coker} f$存在；
4. 任意单态射（满足左消去律）都是某个态射的核，任意满态射（满足右消去律）都是某个态射的余核；

则称$\mathcal{A}$是Abel范畴(Abelian category).

习题 A.7. 在Abel范畴$\mathcal{A}$中，证明

1. 单态射$f:X\to Y$的核是0，满态射$g:Y\to Z$的余核是0.
2. $0\to X$的余核是$X\xrightarrow{\mathrm{id}_X}X$，$Y\to 0$的核是$Y\xrightarrow{\mathrm{id}_Y}Y$.

证明. 由于两个部分都有两个互相对偶的命题，因此都只证一部分.

1. $f:X\to Y$是单态射，若$t:T\to X$使得$f\circ t=0$，那么那么有$T\to X\to Y=0\to X\to Y$，根据消去律$t=0$，这意味着$T\to X$有分解$T\to 0\to X$.

2. 这是因为对任意$k:X\to Z$，$0\to X\to Z=0$. □

按定义，$\ker f$给出了X的一个子对象，$\operatorname{coker} f$给出了Y的一个商对象.记$\mathbf{S}X$是范畴$\mathcal{C}$中对象X的所有子对象全体，$\mathbf{Q}X$是X的所有商对象全体，那么ker和coker给出了一对映射

$$\ker:\mathbf{Q}X\leftrightarrows\mathbf{S}X:\operatorname{coker},$$

其中ker将一个满态射给出它的核，coker将单态射给出它的余核.

习题 A.8. 验证如上所述的映射是良定义的.更一般地，证明一个态射的ker是单态射，coker是满态射.

证明. 我们需要验证两方面：单态射的coker是满态射（对偶地满态射的ker是单态射），且ker把等价的满态射映到等价的单态射（对偶地coker把等价的单态射映到等价的满态射）.

给定态射$f : X \to Y$，我们要验证$Y \to \mathrm{coker}(X \to Y)$有右消去律，即对任意的$k, l : \mathrm{coker}(X \to Y) \rightrightarrows Z$，若$k \circ \mathrm{coker}(X \to Y) = l \circ \mathrm{coker}(X \to Y)$，那么$k = l$.考虑$k - l : \mathrm{coker}(X \to Y) \to Z$，由于$k \circ \mathrm{coker}(X \to Y) = l \circ \mathrm{coker}(X \to Y)$，$(k - l) \circ \mathrm{coker}(X \to Y) = 0 : Y \to \mathrm{coker}(X \to Y) \to Z$，这意味着复合映射$X \to Y \to Z = 0$，按照coker的定义，存在唯一的态射$\mathrm{coker}(X \to Y) \to Z$使得$Y \to \mathrm{coker}(X \to Y) \to Z$是0的分解；但如同之前所述，$k - l$满足分解，$0 : \mathrm{coker}(X \to Y) \to Z$同样满足分解，因此$k - l = 0$，即$k = l$.

或者习题A.2直接说明了这件事.

假设$X_1 \to Y$和$X_2 \to Y$是等价的单态射，那么存在态射$i : X_1 \leftrightarrows X_2 : j$使得

$$
\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dd, shift left, "i"] \arrow[dr, "f_1"] & \\
 & Y, \\
Y_2 \arrow[uu, shift left, "j"] \arrow[ur, "f_2"] &
\end{tikzcd}
$$

是交换的，根据coker的函子性存在交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{coker}(X_1 \to Y) \arrow[dd, shift left, "\mathrm{coker}\ i"] \\
Y \arrow[ur, "g_2"] \arrow[dr, "g_1"'] & \\
 & \mathrm{coker}(X_2 \to Y) \arrow[uu, shift left, "\mathrm{coker}\ j"]
\end{tikzcd} ,
$$

因此将等价类映到等价类. □

命题 A.2. ker和coker是$Abel$范畴$\mathcal{A}$下的互逆映射.

证明. 给定单态射$f : X \to Y$，于是它是某个态射$Y \to Z$的核.取$C = \mathrm{coker}\ f$，于是存在唯一的态射$C \to Z$使下图交换：

$$
\begin{tikzcd}
\ker(Y \to Z) = X \arrow[dd, dashed] \arrow[dr, "f"] & & C = \mathrm{coker}\ f \arrow[dd] \\
 & Y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\ker(Y \to C) = K \arrow[ur, "k"] & & Z.
\end{tikzcd}
$$

注意到复合$X \to Y \to C = 0$，于是根据核的泛性质存在$X \dashrightarrow K$使得上图是交换的；同理，$K \to Y \to Z = K \to Y \to C \to Z = 0 \to Z = 0$，存在$K \dashrightarrow X$使得图是交换的，于是据定义$X \xrightarrow{f} Y$与$K \xrightarrow{k} Y$是等价的子对象.

注意到，coker将态射$f: X \to Y$映到$Y \to C = \operatorname{coker} f$，ker再将$Y \to C = \operatorname{coker} f$映到$k: \ker(Y \to C) = K \to Y$，于是$f: X \to Y$等价于$\operatorname{coker}(\ker(f))$，因此$\operatorname{coker} \circ \ker = \mathrm{id}_{\mathbf{S}X}$.同理，对偶地可以证明$\ker \circ \operatorname{coker} = \mathrm{id}_{\mathbf{Q}X}$. □

推论 A.2.1. *若$X_1 \to Y$和$X_2 \to Y$是等价的单态射，那$X_1 \to Y$和$X_2 \to Y$是同构的.*

证明. 设$C = \operatorname{coker}(X_1 \to Y)$，$K = \ker(Y \to C)$，于是根据命题$X_1$（因此$X_2$）与$K$是等价的. 考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "k"] & & \\
X_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] & C \\
K \arrow[ur, "k"] & &
\end{tikzcd},$$

于是

$$\begin{aligned}
K \to X_1 \to K \to Y \to C &= K \to X_1 \to Y \to C \\
&= K \to Y \to C = 0,
\end{aligned}$$

但根据核的泛性质，存在唯一的$\mathrm{id}: K \to K$使得上图交换，因此$f \circ g = \mathrm{id}_K$，即$X_1 \to Y \cong K \to Y$，这就证明了结论. □

推论 A.2.2. *在Abel范畴$\mathcal{A}$中，$C = \operatorname{coker} f$是单态射$f: X \to Y$的余核，那么$f: X \to Y$是$Y \to C$的核.对偶地，$K = \ker g$是满态射$g: Y \to Z$的余核，那么$k: K \to Y$是$Y \to Z$的核.*

证明. 根据定义，$\operatorname{coker}(X \to Y) = Y \to C$，于是根据之前的命题

$$X \to Y \cong \ker(\operatorname{coker}(X \to Y)) = \ker(Y \to C).$$

对偶性说明后半部分也是正确的. □

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，X是$\mathcal{A}$的对象，Y是X的子对象，Z是Y的子对象，则Y/Z称为X的一个子商(subquotient).

习题 A.9. 证明ker和coker是反序的映射.

证明. □

定理 A.3. *设$f: X \to Y$是Abel范畴中的态射，且f同时是单态射和满态射，则f是同构.*

证明. 由于$f: X \to Y$是满射，0是$\operatorname{coker} f$.$Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y$是$Y \to 0$的核，且根据前面的命题，$f: X \to Y$也是$Y \to 0$的核，因此根据核的泛性质，$Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y$与$f: X \to Y$是同构的，这说明了$f$本身也是同构. □

设W, X是Abel范畴$\mathcal{A}$中对象Y的两个子对象，那么称同时为W和X的子对象的Y的子对象的极大子对象为W与X的交(intersection)，记为$W \cap X$.

命题 A.4. *Abel范畴$\mathcal{A}$中元素Y的任意两个子对象W, X都有交.*

证明. 令$Z = \operatorname{coker}(W \to Y)$，$K = \ker(X \to Y \to Z)$，于是

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X \arrow[d] & \\ W \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

中$K \to X \to Y \to Z = 0$，由推论A.2.2，W是的$Y \to Z$的核，因此存在唯一的$K \dashrightarrow W$使得图是交换的.

接下来只要证明对任意Y的子对象S，若它同时还是X和W的子对象，则它是K的子对象.给定交换图

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d] \\ W \arrow[r] & Y, \end{tikzcd}$$

使得$i : S \to X$和$j : S \to W$都是单态射，那么$S \to X \to Y \to Z = S \to W \to Y \to Z = (S \to W) \circ 0 = 0$，于是存在唯一的态射$S \to K$使得$S \to K \to X = i$.同时，再根据$W$是的$Y \to Z$的核，存在唯一的$j : S \to W$使得图交换，但$S \to K \dashrightarrow W$也满足该交换图，因此$S \to K \dashrightarrow W = j$.这意味着$K$是$W, X$的交. □

推论 A.4.1. *设$f : Y \to X$和$g : Z \to X$是Abel范畴$\mathcal{A}$中的单态射，则存在纤维积$Y \times_X Z$.*

证明. 由于f, g都是单态射，存在它们的交，记为$i : K \to X, j : K \to Y$.任取$W \xrightarrow{h} Y, W \xrightarrow{k} Z$满足交换图

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & X, \end{tikzcd}$$

令$C = \operatorname{coker}(Z \to X)$，于是$W \to Y \to X \to C = W \to Z \to X \to C = W \to 0 = 0$，根据前面的证明，$K$是$Y \to X \to C$的核因此存在唯一的$W \dashrightarrow K$使得图（不包括蓝色部分）

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, blue, "k"'] & & \\ & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & Y \arrow[d] \\ & Z \arrow[r] & X \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

是交换的，并且

$$(W \xrightarrow{h} Y \to X) \to C = (W \dashrightarrow K \to Z \to X) \to C = 0,$$

注意到Z是$X \to C$的核因此有唯一的分解$W \xrightarrow{k} Z \to X \to C$；但是$k : W \to Z$和$W \dashrightarrow K \to Z$都满足分解，因此如上的图是交换的.

我们再来证明这样的$W \dashrightarrow K$是唯一的.对于任意满足交换图的态射$g : W \to K$，它必然是$W \to Y \to X \to C = 0$的分解，因此根据$K = \ker(Y \to X \to C)$分解是唯一的. □

命题 A.5. 对任意$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射$f : X \to Y$和$g : X \to Y$，它们的等值子存在.

证明. 考虑$X \xrightarrow{\begin{pmatrix}1\\ f\end{pmatrix}} X \times Y$和$X \xrightarrow{\begin{pmatrix}1\\ g\end{pmatrix}} X \times Y$，它们都有左逆因此都是单态射，由前面的命题存在交，记为K，满足交换图

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "\begin{pmatrix}1\\ f\end{pmatrix}"] \\ X \arrow[r, "\begin{pmatrix}1\\ g\end{pmatrix}"'] & X \times Y, \end{tikzcd}$$

其中K是拉回.再次根据左逆的存在性，$i = j$，于是按定义拉回的泛性质说明K是f, g的等值子. □

定理 A.6. 设$f : Y \to X$和$g : Z \to X$是$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射，则存在纤维积$Y \times_X Z$.

证明. 考虑

$$\begin{tikzcd} Y \times Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & X, \end{tikzcd}$$

它们的等值子满足相应的泛性质，因此定理成立. □

习题 A.10. 给定环R，求证范畴$R-\mathbf{Mod}$中的纤维积存在.

证明. 给定$R-\mathbf{Mod}$中的同态$f : M \to P, g : N \to P$，定义

$$M \times_P N := \{(m, n) \in M \times N \mid f(m) = g(n)\}$$

和同态$p_1 : M \times_P N \to M, (m, n) \mapsto m$与$p_2 : M \times_P N \to N, (m, n) \mapsto n$，这样只需要验证$(M \times_P N, p_1, p_2)$满足相应的泛性质即可.

任取 □

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的态射$f : X \to Y$，称

$$\ker \operatorname{coker} f$$

为f的像(image)，记为$\operatorname{im} f$.

命题 A.7. *Abel*范畴$\mathcal{A}$中的态射$f : X \to Y$的像是使得复合

$$X \to \operatorname{im} f \to Y$$

是$f : X \to Y$的最小的Y的子对象.

证明. 首先我们证明，Y的子对象$S \hookrightarrow Y$使得分解$X \to S \to Y = X \to Y$存在当且仅当$X \to Y \to \operatorname{coker}(S \hookrightarrow Y) = 0$.一方面，若$Y$的子对象$S \hookrightarrow Y$使得分解$X \to S \to Y = X \to Y$存在，那么$X \to Y \to \operatorname{coker}(S \to Y) = X \to S \to Y \to \operatorname{coker}(S \to Y) = X \to 0 = 0$；另一方面，若$Y$的子对象$S \hookrightarrow Y$使得$X \to Y \to \operatorname{coker}(S \hookrightarrow Y) = 0$，根据推论A.2.2，$S \to Y$是$Y \to \operatorname{coker}(S \hookrightarrow Y)$的核，因此存在$X \dashrightarrow S$使得$X \dashrightarrow S \to Y = X \to Y$.

根据命题A.2，$\operatorname{coker}(\operatorname{im} f) = \operatorname{coker}(\ker(\operatorname{coker}(X \to Y))) = \operatorname{coker}(X \to Y)$，因此$X \to Y \to \operatorname{coker}(\operatorname{im} f) = 0$，于是根据coker的泛性质存在分解

$$X \to \operatorname{im} f \to Y = X \to Y.$$

若还有另一个分解$X \to J \to Y = X \to Y$，由前一段的讨论，$X \to Y \to \operatorname{coker}(J \to X) = 0$，因此存在（满）态射$\operatorname{coker}(X \to Y) = \operatorname{coker}(\operatorname{im} f) \to \operatorname{coker}(J \to X)$，根据ker的函子性这对应了唯一的（单）态射$\operatorname{im} f = \ker(\operatorname{coker}(X \to Y)) \xrightarrow{\varphi} J = \ker(\operatorname{coker}(J \to X))$，因此是最小的.此外如图

$$\begin{tikzcd}
 & \operatorname{im} f \arrow[dr, "i"] \arrow[dd, dashed, "\varphi"] & & \\
X \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \arrow[r, "g"] & C, \\
 & J \arrow[ur, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

右侧是交换的，因此

$$\begin{aligned} j \circ \varphi \circ p &= i \circ p \\ &= j \circ q, \end{aligned}$$

由于j是单态射，这意味着$\varphi \circ p = q$，即整幅图是交换的. □

对偶地，可以的定义态射$f : X \to Y$的余像(coimage)是$\operatorname{coker} \ker f$，那么如上命题对偶地说明余像是使得复合$X \to \operatorname{coim} f \to Y$是$f : X \to Y$的最大的$X$的商对象.

推论 A.7.1. 设$f : X \to Y$是*Abel*范畴$\mathcal{A}$中的态射，则

1. f是满态射当且仅当$\operatorname{im} f = Y$，当且仅当$\operatorname{coker} f = 0$；
2. f是单态射当且仅当$\ker f = 0$，当且仅当$\operatorname{coim} f = X$.

证明. 依据对偶性，只证明第一部分.习题A.7说明必要性是正确的.

对于充分性，若$\operatorname{coker} f = 0$，那么习题A.7说明$\operatorname{im} f = Y$.给定$g, h : Y \to Z$满足$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z = X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{h} Z$，于是存在分解

$$X \xrightarrow{f} Y = X \to \ker(g - h) \to Y,$$

且由命题A.7，$\ker(g-h)$包含了$\operatorname{im} f$.这样$\ker(g-h) = Y$，进而$g - h = 0$. □

推论 A.7.2. 给定$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射$f: X \to Y$，$X \to \operatorname{im} f$是满态射.对偶地，$\operatorname{coim} f \to Y$是单态射.

证明. 假设$X \to \operatorname{im} f$不是满态射，那么$\operatorname{coker}(X \to \operatorname{im} f) \neq 0$，取$J = \ker \operatorname{coker}(X \to \operatorname{im} f)$，它是严格小于$\operatorname{im} f$的子对象（否则二者相等，$\operatorname{coker} \ker \operatorname{coker}(X \to \operatorname{im} f) = \operatorname{coker}(X \to \operatorname{im} f) = 0$），且命题A.7存在分解$X \to J \to \operatorname{im} f$，这与$\operatorname{im} f$是最小分解矛盾. □

推论A.7.1说明Abel范畴中态射单与满的行为与环模范畴是相同的.

定理 A.8. 设$f: X \to Y$是$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射，则存在唯一的分解

$$X \xrightarrow{p} I \xrightarrow{i} Y,$$

使得$p: X \to I$是满态射，$i: i \to Y$是单态射.

此外，如果$k: K \to X$是$f: X \to Y$的核，$c: Y \to C$是$f: X \to Y$的余核，则$k: K \to X$也是$p: X \to I$的核，$c: Y \to C$也是$i: I \to Y$的余核，且$i: I \to Y$是$c: Y \to C$的核，$p: X \to I$是$k: K \to X$的余核.

证明. 首先我们来证明分解的唯一性.假设我们有两个不同的对象$I, \bar{I}$满足上述分解，于是我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[dr, "i"] & & \\
X \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\bar{p}"'] & & Y \arrow[r, "g"] & Z, \\
 & \bar{I} \arrow[uu, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "\bar{i}"'] & &
\end{tikzcd}$$

其中$i: I \to Y$是$g: Y \to Z$的核. 由核的定义，我们有$g \circ i = 0$，进而$g \circ \bar{i} \circ \bar{p} = g \circ f = g \circ i \circ p = 0$.但$\bar{p}$是满态射说明$\bar{p}$存在右消去，故$g \circ \bar{i} = 0$.再根据核的分解，存在唯一的$\varphi: \bar{I} \to I$使得右边三角形交换，即$i \circ \varphi = \bar{i}$.故$i \circ \varphi \circ \bar{p} = \bar{i} \circ \bar{p} = f = i \circ p$.但$i$是单态射因此存在左消去，于是$\varphi \circ \bar{p} = p$.这样就证明了$\varphi$使整个图交换.同样地，我们可以构造$\psi: I \to \bar{I}$使整幅图交换，根据抽象无意义$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_I$且$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\bar{I}}$，故$I \cong \bar{I}$，唯一性得证.

命题A.7、推论A.7.1和A.7.2说明了$I = \operatorname{im} f$是满足条件的的一个分解，因此分解是存在的.同时命题的对偶说明$J = \operatorname{coim} f$也是一个分解，因此根据刚刚证明的分解的唯一性，$\operatorname{im} f \cong \operatorname{coim} f$.这意味着剩余的论断是成立的. □

结合习题A.4的结论，

习题 A.11. 设$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$是Abel范畴$\mathcal{A}$中的态射，求证$g \circ f = 0$当且仅当$\operatorname{im} f$是$\ker g$的子对象，当且仅当$\operatorname{coim} g$是$\operatorname{coker} f$的商对象.

证明. 命题A.7说明有分解

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z = X \to \operatorname{im} f \hookrightarrow Y \xrightarrow{g} Z.$$

若$g \circ f = 0$，则存在分解

$$\begin{tikzcd} & \ker g \arrow[dr, hook] & & \\ X \arrow[ur] \arrow[dr] & & Y \arrow[r, "g"] & Z, \\ & \operatorname{im} f \arrow[ur, hook] & & \end{tikzcd}$$

根据$\operatorname{im} f$的最小性，存在$\operatorname{im} f \hookrightarrow \ker g$使整幅图交换，即$\operatorname{im} f$是$\ker g$的子对象.反过来，若$\operatorname{im} f$是$\ker g$的子对象，则$\operatorname{im} f \hookrightarrow Y \xrightarrow{g} Z = 0$，进而$g \circ f = 0$.

对于另一部分， □

A.1.3 例子

例 A.2. 若$\mathcal{A}$是Abel范畴，则$\mathcal{A}^\circ$也是Abel范畴.

例 A.3. 考虑范畴$R-\mathbf{Mod}$

例 A.4. 假定$\mathcal{C}$是小范畴，$\mathcal{A}$是给定的Abel范畴，考虑范畴$\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$，我们希望证明此范畴是Abel范畴.

这里需要构造和验证的条目我们依次列出来并进行证明：

1. 根据习题A.3，$\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$中的零对象是常值零函子，即函子

$$\begin{aligned} \mathrm{Const}_0 : \mathcal{C} &\to \mathcal{A} \\ A &\mapsto 0. \end{aligned}$$

我们也记该函子为0.

2. 范畴理论说明给定函子$F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，在范畴$\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$中，$F \times G$和$F \coprod G$都存在，并且都是逐点定义的.给定$F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$，由于在$\mathcal{A}$中范畴的有限乘积和余乘积同构，因此$F \times G \cong F \coprod G$.

3. 任意给定$\alpha : F \Rightarrow G$，定义

$$\ker(\alpha)(A) := \ker(\alpha_A)$$

和

$$\operatorname{coker}(\alpha)(A) := \operatorname{coker}(\alpha_A),$$

根据ker与coker的函子性，$\ker(A)$与$\operatorname{coker}(A)$也都是函子，并且逐点地可以验证它们分别满足相应的泛性质.

4. 最后要证明单态射是核，满态射是余核.首先，范畴$\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$中的单态射和满态射都是逐点的单态射和满态射.由于前一条的核和余核的定义都是逐点的，因此这一条是正确的.

A.1.4 正合性

定理 A.9. 设$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$是*Abel*范畴$\mathcal{A}$中的态射，则如下描述等价：

1. $\mathrm{im}(X\to Y)=\ker(Y\to Z)$;

2. $\mathrm{coker}(X\to Y)=\mathrm{coim}(Y\to Z)$;

3. $X\to Y\to Z=0$且$\ker(Y\to Z)\to Y\to \mathrm{coker}(X\to Y)=0$.

证明. 我们来证明1与3是等价的，这样对偶地可以证明2与3是等价的.

若1是成立的，记$I:=\mathrm{im}(X\to Y)=\ker(Y\to Z)$，于是根据分解$X\to Y\to Z=X\to I\to Y\to Z=X\to 0=0$.另一方面，$\ker(Y\to Z)=\mathrm{im}(X\to Y)=\ker(\mathrm{coker}(X\to Y))$，因此直接由定义

$$\ker(Y\to Z)\to Y\to \mathrm{coker}(X\to Y)=\ker(\mathrm{coker}(X\to Y))\to Y\to \mathrm{coker}(X\to Y)=0.$$

若3是成立的，记$I:=\mathrm{im}(X\to Y)=\ker(\mathrm{coker}(X\to Y))$，$\ker(Y\to Z)\to Y\to \mathrm{coker}(X\to Y)=0$意味着存在唯一的$\ker(Y\to Z)\dashrightarrow I$与已知的态射相容，并且它是单态射，于是$\ker(Y\to Z)\le I$.同时，$X\to Y\to Z=0$蕴含着分解$X\to\ker(Y\to Z)\to Y\to Z=0$，同时命题A.7说明$X\to I\to Y$是最小的分解，因此存在单态射$I\to\ker(Y\to Z)$，这样$\ker(Y\to Z)=I$. □

对于满足条件1的态射序列$X\to Y\to Z$，称该序列在Y处正合(exact)；对偶地满足条件2的态射序列$X\to Y\to Z$，称该序列在Y处余正合(coexact).特别地，若序列

$$0\to X\to Y\to Z\to 0$$

在每处都正合，则称这是个短正合序列(short exact sequence).定理实际上说明了Abel范畴的正合性和余正合性是等价的.

正合性和余正合性的等价性是Abel范畴特有的性质之一，它保证了我们只需要正合性就可以定义合适的等价关系，这体现在之后对稳定性的证明.

推论 A.9.1. *给定$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射$X\xrightarrow{f}Y\xrightarrow{g}Z$，*

1. *序列$0\to X\xrightarrow{f}Y$在X处是正合的当且仅当f是单态射，*

2. *序列$Y\xrightarrow{g}Z\to 0$在Z处是正合的当且仅当g是满态射，*

3. *序列$0\to X\to Y\to Z\to 0$是短正合列当且仅当$X\xrightarrow{f}Y$是单射且$Y\cong\mathrm{coker}\,f$，当且仅当$Y\xrightarrow{g}Z$是满射且$X\cong\ker g$，*

4. *若序列$0\to X\to Y\to Z$正合则$X=\ker(Y\to Z)$，序列$X\to Y\to Z\to 0$正合则$Z=\mathrm{coker}(X\to Y)$.*

证明. 1. 根据推论A.7.1，f是单态射当且仅当$\ker\,f=0$，而0恰是$0\to X$的像，因此f是单态射当且仅当$0\to X\xrightarrow{f}Y$在X处是正合.

2. 对偶于第一部分，同样由推论A.7.1得.

3.

□

推论 A.9.2. 序列

$$0 \to X \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}} X \oplus Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}} Y \to 0$$

是短正合列.

定理 A.10 (Abel范畴的稳定性)**.** 给定$Abel$范畴$\mathcal{A}$，则

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & U \end{tikzcd}$$

是范畴$\mathcal{A}$中的拉回交换图当且仅当

$$0 \to Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}} U$$

是正合的.对偶地，

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & U \end{tikzcd}$$

是范畴$\mathcal{A}$中的推出交换图当且仅当

$$Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}} U \to 0$$

是正合的.

证明. 根据对偶性我们只证明前半部分，此时需要验证如下的论断：

1. $Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix}} X \times Y$是单态射.任取$p, q : W \rightrightarrows Z$满足$\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix} p = \begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix} q$，则有交换图

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "lp=lq"] \arrow[ddr, bend right, "hp=hq"'] & & \\ & Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"] & U, \end{tikzcd}$$

$p : W \to Z$和$q : W \to Z$都满足虚线箭头所需要的性质，根据泛性质$p = q$，即证明了单态射.

2. $\mathrm{im}\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix} = \ker\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}$，为此，我们验证二者有相同的泛性质.

注意到$V \to X \times Y$复合$\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}$后为0当且仅当$V \hookrightarrow X \times Y$诱导的$i : V \to X$和$j : V \to Y$满足交换图

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & U, \end{tikzcd}$$

这是因为复合$V \xrightarrow{\begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}} U$恰好是$if - jg$，其等于0等价于图交换.于是$K = \ker\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}$满足交换图，且任意满足交换图的$i : V \to X, j : V \to Y$都由复合为0给出了唯一的$V \dashrightarrow K$，这恰好也是拉回的泛性质.

□

一般情况下，正合性的判断是困难的，并且往往是很多问题的核心.经典环模范畴中的技巧被称为“追图”(diagram chasing).由于一般Abel范畴中无法讨论对象的元素，因而追图暂时并不现实.但下一小节我们将引入合适的工具，使得一般Abel范畴中的追图技术上的难度基本等同于环模范畴.

命题 A.11. *给定$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的序列$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$，满足$g \circ f = 0$，记$k : K \to Y = \ker g, c : Y \to C = \mathrm{coker}\, f$，于是根据泛性质存在交换图*

$$\begin{tikzcd} & K \arrow[d, "k"] & \\ X \arrow[ur, dashed, "a"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] \arrow[d, "c"] & Z \\ & C. \arrow[ur, dashed, "b"'] & \end{tikzcd}$$

此时存在自然的同构

$$\mathrm{coker}\, a = \ker b.$$

证明. 首先考虑特殊的情形：假定f是单态射，g是满态射.我们希望证明，此时$a : X \to K$是$c \circ k : K \to C$的核，$b : C \to Z$是$c \circ k : K \to C$的余核.

记$h = c \circ k : K \to C$.首先，根据核和余核的定义，$h \circ a = 0, b \circ h = 0$.任取$w : W \to K$满足$h \circ w = 0$，即有交换图

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "w"] \arrow[rr, bend left, "0"] & K \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "k"'] & C, \\ & & Y \arrow[u, "c"'] \end{tikzcd}$$

推论A.2.2说明$f: X \to Y$是$c: Y \to C$的核，因此存在唯一的分解

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "w"] \arrow[dr, dashed] \arrow[rrr, bend left, "0"] & K \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "k"] & & C, \\
& X \arrow[u, "a"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[ur, "c"] &
\end{tikzcd}$$

这意味着$a : X \to K$是$c \circ k : K \to C$的核，对偶地$b : C \to Z$是$c \circ k : K \to C$的余核.此时，定理A.8意味着$\mathrm{coker}\ a = \mathrm{im}\ c \circ k = \ker\ b$.

对于一般的情况，序列$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$有分解

$$X \longrightarrow \mathrm{im}\ f \longrightarrow Y \longrightarrow \mathrm{im}\ g \longrightarrow Z,$$

且根据定理A.8，$\mathrm{im}\ f \to Y$是单同态，$Y \to \mathrm{im}\ g$是满同态，依据核和余核的泛性质，存在交换图

$$\begin{tikzcd}
& & K \arrow[d, "k"] & & \\
X \arrow[r] \arrow[urr, dashed, "a"] & \mathrm{im}\ f \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\tilde{a}"] & Y \arrow[r] \arrow[d, "c"] & \mathrm{im}\ g \arrow[r] & Z \\
& & C, \arrow[ur, dashed, "\tilde{b}"] \arrow[urr, dashed, "b"] & &
\end{tikzcd}$$

定理A.8也说明了$\mathrm{coker}\ a = \mathrm{coker}\ \tilde{a}$和$\ker\ b = \ker\ \tilde{b}$，而之前的讨论说明了$\mathrm{coker}\ \tilde{a} = \ker\ \tilde{b}$，这就证明了命题. □

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的子对象$i : X \hookrightarrow Y$，称$\mathrm{coker}\ i$为Y关于X的商，记为Y/X.

根据练习A.8，商在同构的意义下是良定义的.

推论 A.11.1. *按命题A.11中的记号，*

$$\mathrm{coker}\ a = \ker\ b = \frac{\ker\ g}{\mathrm{im}\ f}.$$

证明. 习题A.11说明$\mathrm{im}\ f$是$\ker\ g$的子对象. □

例 A.5. 我们记**FilAb**是所有可滤Abel群组成的范畴，其中的态射$\varphi : F^\bullet A \to F^\bullet B$满足$\varphi(F^i A) \subseteq F^i B$对任意$i$都成立.

这个范畴中可以定义ker和coker，其中ker的滤子结构来自于$F^\bullet A$，coker的滤子结构来自于$F^\bullet B / F^\bullet B \cap \varphi(A)$.

考虑假设同一个Abel群A上有两个滤子结构$F^\bullet A$和$G^\bullet A$，满足$F^i A \subseteq G^i A$对任意i都成立.此时，恒同映射$\mathrm{id} : A \to A$诱导了滤子之间的态射$F^\bullet A \to G^\bullet A$.这是一个单射也是一个满射；但若存在$i_0$使得$F^{i_0} A \neq G^{i_0} A$，则这不是一个同构.

A.1.5 Abel范畴中对象的元素和态射

事实上，我们并不需要完全范畴化地处理Abel范畴，公理所保证的性质使我们可以用类似处理元素的方式处理Abel范畴中的对象.我们将详细地构建这样的技术，于是Abel范畴事实上与**Ab**并没有特别多的区别.

给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的对象Y，Y中的对象y是如下等价类(X,h)，其中$X\in \mathrm{ob}\,\mathcal{A}$，$h:X\to Y$，$(X_1,h_1)$等价于$(X_2,h_2)$当且仅当

- 存在$Z\in \mathrm{ob}\,\mathcal{A}$和满态射$u_1:Z\to X_1, u_2:Z\to X_2$满足$h_1u_1=h_2u_2$，即有交换图

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "h_1"] & \\ Z \arrow[ur, "u_1"] \arrow[dr, "u_2"'] & & Y \\ & X_2. \arrow[ur, "h_2"'] & \end{tikzcd}$$

引理 A.2. *设如下Abel范畴$\mathcal{A}$中的拉回交换图*

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"'] & U, \end{tikzcd}$$

那么h诱导了同构$\ker l\cong \ker g$，更准确地讲，若$k:K\to Z$是$l:Z\to X$的核，则$hk:K\to Z\to Y$是$g:Y\to U$的核.（对偶地推出图诱导了余核的同构,）由此如果f是满态射那么h是满态射.

证明. 任取$w:W\to Y$使得$W\to Y\to U=0$，因此

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "w"'] & & \\ & Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"] & U \end{tikzcd}$$

构成了交换图.由于Z是拉回，因此存在$W\dashrightarrow Z$与整幅图交换，这意味着$W\dashrightarrow Z\to X=0$，由于$K$是$Z\to X$的核，存在唯一的$W\to K$使得$W\to K\to Z=W\dashrightarrow Z$.这样验证了$hk:K\to Z\to Y$是$g:Y\to U$的核的泛性质，因此$h$诱导了同构.

现在假设f是满态射，那么由于Z是拉回，

$$0\to Z\xrightarrow{\begin{pmatrix} l\\ h\end{pmatrix}} X\times Y\xrightarrow{\begin{pmatrix} f & -g\end{pmatrix}} U$$

是正合的，同时f是满态射意味着对任意$u,v:U\rightrightarrows V$，若$u\begin{pmatrix} f & -g\end{pmatrix}=v\begin{pmatrix} f & -g\end{pmatrix}$则$uf=vf$，因此$u=v$，

即$\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}$是满态射，所以

$$0 \to Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} l \\ h \end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f & -g \end{pmatrix}} U \to 0$$

是短正合序列.这样，交换图

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{l} & X \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[g]{} & U, \end{array}$$

同时是推出，因此上段讨论的对偶说明coker $h =$ coker $f = 0$，即h是满态射. $\square$

习题 A.12. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的态射$f : X \to Y$和X中的元素$u : U \to V$，求证若$f(u) = 0$则$f \circ u = 0$.

证明. $f(u) = 0$意味着$[f \circ u] = [0]$，即存在满态射$w : W \to U$使得$f \circ u \circ w = 0$.满态射说明$f \circ u = 0$. $\square$

由引理A.2如上所述的关系是等价关系.一般并没有通常的方法使得集合之间的映射$\{Y_1$中的元素$\} \to \{Y_2$中的元素$\}$对应到$\mathcal{A}$中的态射$Y_1 \to Y_2$，但反过来当给定了态射之后可以构造自然的集合间的映射，并且元素的存在可以帮我们简单地验证正合性：

定理 A.12. *设$f : Y_1 \to Y_2$是Abel范畴中的态射，y是Y_1的元素，有代表元(X, h)，求证f给出了集合间的映射*

$$f : \{Y_1\text{中的元素}\} \to \{Y_2\text{中的元素}\}$$
$$[(X, h)] \mapsto [(X, f \circ h)],$$

与复合交换，并且

1. *$f : Y_1 \to Y_2$是单态射当且仅当$f(y) = 0$意味着$y = 0$，*
2. *$f : Y_1 \to Y_2$是单态射当且仅当$f(y_1) = f(y_2)$意味着$y_1 = y_2$，*
3. *$f : Y_1 \to Y_2$是0态射当且仅当对任意Y_1的元素y，$f(y) = 0$，*
4. *$f : Y_1 \to Y_2$是满态射当且仅当对任意Y_2的元素z，存在Y_1的元素y使得$f(y) = z$，*
5. *序列$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$在$Y$处正合当且仅当$g \circ f = 0$并且对任意的$v \in Y$，若$g(v) = 0$则存在$u \in X$使得$f(u) = v$，*
6.

证明. 我们首先证明如上给出了集合间的良定义的映射，即若$[(X_1, h_1)] = [(X_2, h_2)]$，则$[(X_1, f \circ h_1)] = [(X_2, f \circ h_2)]$.由定义$[(X_1, h_1)] = [(X_2, h_2)]$意味着存在存在$Z \in \mathrm{ob}\,\mathcal{A}$和满态射$u_1 : Z \to X_1, u_2 : Z \to X_2$满足$h_1 u_1 = h_2 u_2$，那么$f h_1 u_1 = f h_2 u_2$，即$[(X_1, f \circ h_1)] = [(X_2, f \circ h_2)]$.

取代表元与复合交换意味着复合映射

$$\begin{aligned}\{Y_1\text{中的元素}\} &\xrightarrow{f} \{Y_2\text{中的元素}\} \xrightarrow{g} \{Y_3\text{中的元素}\}\\ [(X,h)] &\mapsto [(X, f\circ h)] \mapsto [(X, g\circ(f\circ h))]\end{aligned}$$

和复合映射

$$\begin{aligned}\{Y_1\text{中的元素}\} &\to \{Y_3\text{中的元素}\}\\ [(X,h)] &\mapsto [(X, g\circ f\circ h)]\end{aligned}$$

是相同的映射，而这根据良定义性质是显然的.

1. 若$f: Y_1 \to Y_2$是单态射，任取Y_1中的元素$y: X \to Y_1$，满足$f(y)=0$，则

   $$X \xrightarrow{y} Y_1 \xrightarrow{f} Y_2 = X \xrightarrow{0} Y_2 = X \xrightarrow{0} Y_1 \xrightarrow{f} Y_2,$$

   由f是单同态可知，$y=0$.反过来，$f: Y_1 \to Y_2$的核$\ker f \hookrightarrow Y_1$是$Y_1$的元素且$f(\ker f)=0$，因此$\ker f = 0$，推论A.7.1说明$f$是单态射.

2.

3. 若$f: Y_1 \to Y_2$是0态射，显然对对任意Y_1的元素y，$f(y)=0$.反过来，取$y = \mathrm{id}_{Y_1}: Y_1 \to Y_1$，则$[f(\mathrm{id}_{Y_1})] = [f\circ \mathrm{id}_{Y_1}] = [f] = [0]$，于是习题A.12说明$f=0$.（注意到这一部分开始严格用到等价类定义中的满态射性质.）

4. 若$f: Y_1 \to Y_2$是满态射，任取Y_2中的元素$z: Z \to Y_2$，于是$\tilde{z}: Y_1 \times_{Y_2} Z \to Y_1$是$Y_2$中的元素，我们需要证明$f(\tilde{z}) = z$.考虑交换图

   $$\begin{tikzcd} Y_1 \times_{Y_2} Z \arrow[r, equal] \arrow[dr] & Y_1 \times_{Y_2} Z \arrow[r, "\tilde{z}"] \arrow[d] & Y_1 \arrow[d, "f"] \\ & Z \arrow[r] & Y_2, \end{tikzcd}$$

   引理A.2说明$Y_1 \times_{Y_2} Z \to Z$也是满态射，而恒同态射必然是满态射，因而$[f(\tilde{z})] = [z]$.反过来，只需要证明若$g: Y_2 \to W$满足$Y_1 \xrightarrow{f} Y_2 \xrightarrow{g} W = 0$，则$g=0$.为此，对任意$z: \ker g \to Y_2$，按假设存在$y: Y \to Y_1$使得$[f(y)] = [z]$，即存在交换图

   $$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "v"] \arrow[d, "u"'] & & Z \arrow[d, "z"] & \\ Y \arrow[r, "y"'] & Y_1 \arrow[r, "f"'] & Y_2 \arrow[r, "g"] & W, \end{tikzcd}$$

   满足u, v都是满态射.按第3部分，只要证明$g(z)=0$即可；但是

   $$g\circ z\circ v = g\circ f\circ y\circ u = 0\circ y\circ u = 0 = 0\circ v,$$

   且v是满态射，因此$g\circ z = 0$.

5. 定理A.9说明，对于必要性只要证明$\ker(Y \to Z) \to Y \to \operatorname{coker}(X \to Y) = 0$.注意到$k : \ker(Y \to Z) \to Y$给出了$Y$的元素，于是存在$X$中的元素$u : U \to X$满足$f(u) = k$.按余核的定义$[c \circ k] = [c \circ f \circ u] = 0$，习题A.12说明$c \circ k = 0$.

   反过来，对于充分性，任取Y中的元素$v : V \to Y$使得$g(v) = 0$，按核的定义存在唯一的分解$V \dashrightarrow \ker g \to Y = v$，于是有如图交换图（定理A.9）

$$\begin{tikzcd} & & & V \arrow[dll, dashed] \arrow[dl, dashed] \arrow[d, "v"] & \\ X \arrow[r, two heads, "p"] & \operatorname{im} f \arrow[r, equal] & \ker g \arrow[r, hook, "i"] & Y \arrow[r, "g"] & Z. \end{tikzcd}$$

   取$U := X \times_{\operatorname{im} f} V$，那么由引理A.2，结构态射$q : U \to V$是满态射，记结构态射$X \times_{\operatorname{im} f} V \to X$为$u$，则$f \circ u \circ \mathrm{id}_U = v \circ q$，于是$[f \circ u] = [v]$，即$f(u) = v$.

6.

$\square$

引理 A.3 (5引理).

定理 A.13 (蛇形引理). 给定交换图

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f"] & Y_1 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "g"] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "\beta_1"] & Y_2 \arrow[r, "\beta_2"] & Z_2, & \end{tikzcd}$$

那么存在长正合序列

$$\ker f \xrightarrow{a_1} \ker g \xrightarrow{a_2} \ker h \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} f \xrightarrow{b_1} \operatorname{coker} g \xrightarrow{b_2} \operatorname{coker} h,$$

其中a_1, a_2和b_1, b_2分别由α_1, α_2和β_1, β_2诱导，连接态射$\delta : \ker h \to \operatorname{coker} f$是唯一存在的使得对于下图

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, equal] & K = \ker h \times_{Z_1} Y_1 \arrow[r, "s_2"] \arrow[d, "k"] & \ker h \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\ & X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f"] & Y_1 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "g"] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "p"] & Y_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "c"] & Z_2 \arrow[d, equal] & \\ 0 \arrow[r] & \operatorname{coker} f \arrow[r, "t_1"] & C = \operatorname{coker} f \coprod^{X_2} Y_2 \arrow[r, "t_2"] & Z_2 & \end{tikzcd}$$

满足$t_1 \circ \delta \circ s_2 = c \circ g \circ k$的态射.

证明. 1. $\ker f \xrightarrow{a_1} \ker g \xrightarrow{a_2} \ker h$在$\ker g$处正合.

2. $\mathrm{coker}\, f \xrightarrow{b_1} \mathrm{coker}\, g \xrightarrow{b_2} \mathrm{coker}\, h$在$\mathrm{coker}\, g$处正合.

3. $\ker h$是$s_1 : X_1 \to \ker h \times_{Z_1} Y_1$的余核；对偶地，$\mathrm{coker}\, f$是$t_2 : C \to Z_2$的余核.

   由于$i : \ker h \to Z_1$是单态射且单态射的拉回是单态射，因此$k : K \to Y_1$是单态射；由于$\beta_1 : Y_1 \to Z_1$是满态射，引理A.2说明s_2是满态射，且明显$s_2 \circ s_1 = 0$，这样由推论A.9.1第4部分和定理A.12第5部分，只要证明对任意K中的元素$w : W \to K$，若$s_2(w) = 0$则存在$v : V \to X_1$使得$s_1(v) = w$.

   考虑Y_1中的元素$k \circ w : W \to Y_1$，结合Y_1处的正合性，定理A.12第5部分说明存在X_1中的元素$v : V \to X_1$使得$\alpha_1(v) = k(w)$.图的交换性可得

$$[k \circ w] = [\alpha_1 \circ v] = [k \circ s_1 \circ v],$$

   上一段中我们证明了k是单态射，这意味着$[w] = [s_1 \circ v]$，即$s_1(v) = w$.

4. $\delta : \ker h \to \mathrm{coker}\, f$是存在的.注意到$c \circ g \circ k \circ s_1 = c \circ g \circ \alpha_1 = t_1 \circ p \circ f = 0$且$t_2 \circ c \circ g \circ k = h \circ i \circ s_2 = 0$，根据练习A.4，存在唯一的$\delta : \ker h \to \mathrm{coker}\, f$使得$t_1 \circ \delta \circ s_2 = c \circ g \circ k$.

5.

□

特别地，当$\mathcal{A}$是范畴$R - \mathbf{Mod}$时，连接态射δ是容易写出来的：习题A.10给出了拉回的构造（对偶地推出的构造也可以写出来），于是

$$K = \ker h \times_{Z_1} Y_1 = \{(z, y) \in \ker h \times Y_1 \mid \alpha_2(y) = i(z) = z\} \cong \alpha_2^{-1}(\ker h),$$

并且在此同构下$s_2 = \alpha_2|_{\alpha_2^{-1}(\ker h)}$；对偶地

$$C = \mathrm{coker}\, f \coprod^{X_2} Y_2 = \frac{\mathrm{coker}\, f \times Y_2}{\{(p(x), \beta_1(x)) \mid x \in X_2\}},$$

于是

$$K \xrightarrow{k} Y_1 \xrightarrow{g} Y_2 \xrightarrow{c} C$$

是映射

$$(z, y) \mapsto y \mapsto g(y) \mapsto [(0, g(y))].$$

定义

$$\begin{aligned} \delta : \ker h &\to \mathrm{coker}\, f \\ z &\mapsto p(\beta_1^{-1}(g(y))), \end{aligned}$$

其中

(i) $y \in Y_1$是满足$\alpha_2(y) = z$的元素，它的存在性由α_2的满射保证，并且因此$(z, y) \in K$；

(ii) $x = \beta_1^{-1}(g(y))$是X_2中满足$\beta_1(x) = g(y)$的元素，

我们只需要验证所定义的δ是（唯一）满足$t_1 \circ \delta \circ s_2 = c \circ g \circ k$的环模同态即可.注意到$t_1 \circ \delta \circ s_2$给出映射

$$(z, y) \mapsto z \mapsto p(\beta_1^{-1}(g(y))) \mapsto [p(\beta_1^{-1}(g(y))), 0] = [(0, g(y))].$$

这恰是所需要的.

习题 A.13. 假定对Abel范畴$\mathcal{A}$蛇形引理成立，求证5引理成立.

证明.
$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

考虑

$$\begin{tikzcd}
 & A_2/\ker \alpha_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & \ker \alpha_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_2/\ker \beta_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & \ker \beta_4 &
\end{tikzcd}$$

□

A.1.6 Abel范畴中的特殊对象

定义. 设P是Abel范畴$\mathcal{A}$中的对象，若满足对任意的满态射$f: X \to Y$和任意态射$g: P \to Y$，都可以找到$h: P \to X$使得$g = f \circ h$，

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

则称P是投射对象(projective object).

对偶地，若对象I满足对任意的

引理 A.4. 给定*Abel*范畴$\mathcal{A}$及其中的一族投射对象$\{P_i\}_{i \in I}$，其中I是指标集.若$\bigoplus_{i \in I} P_i$存在，则其也是投射的.

证明. □

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$，若对任意对象X都存在$\mathcal{A}$中的投射对象P和满态射

$$P \twoheadrightarrow X \to 0,$$

则称范畴$\mathcal{A}$中有足够多的投射对象(sufficiently many projective objects, enough projectives).

习题 A.14. 设$s : P \to P$是Abel范畴$\mathcal{A}$中的态射，(P, s)是$\mathcal{A}/P$的投射对象，证明P是$\mathcal{A}$中的投射对象.

证明. 任取$\mathcal{A}$中的满态射$g : X \to Y$， □

A.2 Abel范畴间函子

定义. 若$\mathcal{C}, \mathcal{D}$加性范畴，协变函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$满足对任意$\mathcal{C}$中的对象$X, Y$，由$F$诱导的映射$\hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$是群同态，则称$F$是加性函子(additive functor).

定理 A.14. *设$\mathcal{A}, \mathcal{B}$是Abel范畴，$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$是加性函子当且仅当$F$保直和.*

证明. □

定义. (left exact)

命题 A.15. *Abel范畴间的左正合函子是加性的.*

定义. 若范畴间协变函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$满足对任意$\mathcal{C}$中的对象$A, B$，由$F$诱导的映射$\hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to \hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$是单射，则称$F$是嵌入(embedding).

定理 A.16. *设$\mathcal{A}, \mathcal{B}$是Abel范畴，$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$是加性函子，则下列陈述等价*

1. *F是嵌入.*
2. *F将非交换图映为非交换图.*
3. *F将非正合序列映为非正合序列.*

A.2.1 Serre subcategory

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$是$\mathcal{A}$的满子范畴，满足

1. $\mathcal{B}$的对象关于取子对象和商对象封闭，即对任意$\mathcal{B}$中的对象Y，若$0 \to X \to Y \to Z \to 0$是$\mathcal{A}$中的短正合列，那么$X, Z$是$\mathcal{B}$中的对象，
2. $\mathcal{B}$中的对象关于扩张封闭，即对任意$\mathcal{B}$中的对象X, Z，若$0 \to X \to Y \to Z \to 0$是$\mathcal{A}$中的短正合列，那么$Y$是$\mathcal{B}$中的对象，

则称$\mathcal{B}$是$\mathcal{A}$的Serre子范畴(Serre subcategory).

例 A.6. **FinAb**是**Ab**中的Serre子范畴

定理 A.17. *任意给定Abel范畴$\mathcal{A}$和它的Serre子范畴$\mathcal{B}$，存在Abel范畴$\mathcal{A}/\mathcal{B}$和正合函子$P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$使得$\mathcal{A}$中的对象$X$在$\mathcal{B}$中当且仅当$P(A) = 0$，且对任意满足$\mathcal{A}$中的对象$X$在$\mathcal{B}$中当且仅当$F(A) = 0$的正合函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$，存在唯一的正合函子$H : \mathcal{A}/\mathcal{B} \to \mathcal{C}$使得图*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "P"'] & & \mathcal{C} \\
& \mathcal{A}/\mathcal{B} \arrow[ur, dashed, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

交换.

证明. □

命题 A.18. *给定Abel范畴之间的伴随*

$$F : \mathcal{A} \leftrightarrows \mathcal{B} : G,$$

1. *若F是左伴随的，那么G将内射对象映为内射对象，*
2. *若G是左伴随的，那么F将投射对象映为投射对象.*

A.3 嵌入定理

习题 A.15. 设k是域，$k-\mathbf{grMod}$是所有$\mathbb{Z}$分次k模组成的范畴，满足

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(V_n, W_n),$$

$\mathcal{A}$是所有微分态射为0的k微分模组成的范畴，求证

$$
\begin{aligned}
F : k - \mathbf{grMod} &\to \mathcal{A} \\
\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n &\mapsto (\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n[n], d = 0)
\end{aligned}
$$

是范畴的等价.

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的对象X，若对任意的正向系I和分解

$$X = \sum_{i\in I} X_i = \mathrm{colim}_{i\in I} X_i,$$

其中X_i是X的子对象，都存在$i_0 \in I$使得$X_{i_0} = X$，则称X是有限生成的.

附录 B　A_∞

这节中我们始终假定k是域.

定义. k上的A_∞包含

1. $\mathbb{Z}$分次的k向量空间
$$A := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p,$$
2. 齐次k线性映射
$$m_n : A^{\otimes n} \to A,$$

满足

(i) m_n的阶数为$2-n$，并且m_1满足$m_1 \circ m_1 = 0$（即$A^\bullet, m_1$是上链复形），

(ii) 对任意$n \geq 1$，有关系式
$$\sum_{n=r+s+t} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}(\mathrm{id}_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \mathrm{id}_A^{\otimes t}) = 0.$$

索引

参考文献

[1] Daniel Ferrand. On the non additivity of the trace in derived categories, 2005.