

# 层及其上同调

Guanyu Li

感谢Ju Tan的阅读和错误修正

## 1 层的基本理论

在几何中,我们经常遇到从局部性质到整体性质的过渡,例如我们在讲光滑函数时对光滑性的定义是局部的,但光滑性可以是整体的性质;任意一个流形都是局部可定向的,但一个流形并不一定是整体可定向的.在从局部到整体的过渡中,我们通常使用的方法是局部坐标,当局部坐标满足一定性质时我们可以找到更大的坐标,这个更大的坐标限制到小的坐标上与原来小的坐标有相同的性质.如果将这样的过程抽象出来就是层的构造.

### 1.1 预层与层的基本性质

**定义.** 设 $X$ 是一个拓扑空间.对 $X$ 的每个开集 $U$ ,我们赋予其一个Abel群 $\mathcal{F}(U)$ ,并且对任意满足 $V \subseteq U$ 的开集 $U, V$ ,存在映射 $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ ,满足如下条件:

(i)  $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$ ;

(ii)  $\rho_U^U = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$ ;

(iii) 对所有满足 $W \subseteq V \subseteq U$ 的开集 $U, V, W$ ,  $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$ ;

这样的在拓扑空间 $X$ 上的结构 $\mathcal{F}$ 我们称为**预层**(presheaf),  $\mathcal{F}(U)$ 中的元素称为开集 $U$ 的**截面**(section), 映射 $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ 称为**限制映射**(restriction map).

**例1.** 设 $X$ 是一个复流形,  $\mathcal{M}$ 是如下定义的**亚纯函数层**(sheaf of meromorphic functions)

$$\mathcal{M}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ 是亚纯的}\},$$

且对于任意 $f \in \mathcal{M}(U)$ 和开集 $V \subseteq U$ , 定义 $\rho_V^U(f)$ 是 $f$ 在 $V$ 上的限制, 则 $\mathcal{M}$ 是 $X$ 上的预层.

在上面的例子中, 预层 $\mathcal{M}$ 的限制同态确实是函数的限制——但通常而言, 限制同态可以是任意的映射.对于元素 $s \in \mathcal{F}(U)$ , 我们也用通常的限制记号:  $s|_V := \rho_V^U(s)$ , 然而这一般与真正函数的限制很不同.

注意到任意的拓扑空间 $X$ 可以自然地成为一个范畴 $\mathbf{Open}(X)$ , 这样每个预层都是一个反变函子 $\mathbf{Open}(X) \Rightarrow \mathbf{Ab}$ , 可以想到的是, 我们并不需要将函子的值域限定为 $\mathbf{Ab}$ , 其他任意合理的范畴都可以得到有用的预层.当值域范畴为 $\mathbf{Ab}$ 、 $\mathbf{Ring}$ 、 $R\text{-Mod}$ 时, 我们分别称 $\mathcal{F}$ 为 $X$ 上的Abel群预层、环预层和 $R$ 模预层.

这种对于预层的理解还有其他的好处——我们可以非常容易地定义预层之间的态射(morphism)——一个预层的态射就是函子间的自然变换.如果我们显式地将预层态射 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 的定义写出来,即是对任意 $X$ 中的开集 $V \subseteq U$ ,我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \theta_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V), \end{array}$$

其中 $\rho_V^U, \theta_V^U$ 分别是预层 $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{G}$ 的限制映射.这样对于拓扑空间 $X$ ,我们得到了一个范畴 $\mathbf{PShAb}(X)$ ,其对象是 $X$ 上的Abel群预层,态射是预层的态射.

**例2.** 设 $X$ 是任意的拓扑空间,  $M$ 是任意的Abel群, 对开集 $U$ 定义 $M_X(U) = M$ 对于满足 $V \subseteq U$ 的开集, 限制映射都是恒等映射, 则 $M_X$ 是一个预层, 称为常预层(constant sheaf).如果 $N$ 也是一个Abel群,  $\varphi: M \rightarrow N$ 是群同态, 则我们自然地有预层的映射

$$\varphi_X: M_X \rightarrow N_X,$$

定义为

$$(\varphi_X)_U := \varphi: M_X(U) \rightarrow N_X(U).$$

**例3.**

**例4.**

预层的结构中蕴含了空间上“函数”的很多局部信息, 对于一个预层我们有专门的结构刻画这样的信息:

**定义.** 设 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 $X$ 上的预层, 那么称

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$$

为 $\mathcal{F}$ 在点 $x$ 处的茎(stalk), 其中 $U$ 取遍所有包含点 $x$ 的开集, 正向系中的态射由限制态射给定.

根据正极限的定义, 对于任意包含 $x$ 的开集 $U$ , 存在自然的态射 $\rho_x^U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ 使得与正向系相容, 即对于满足 $V \subseteq U$ 的开集,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & & \\ \rho_V^U \downarrow & \searrow \rho_x^U & \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\rho_x^V} & \mathcal{F}_x. \end{array}$$

为简化记号, 通常对于截面 $s \in \mathcal{F}(U)$ , 我们记 $s_x := \rho_x^U(s)$ .同样地, 余极限的函子性告诉我们, 对于任意 $X$ 中的点 $x$ , 若 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层间的态射, 那么有诱导的点 $x$ 处茎的态射

$$\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$$

使得对任意开集 $U$ 有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ (\rho_{\mathcal{F}})_x \downarrow & & \downarrow (\rho_{\mathcal{G}})_x \\ \mathcal{F}_x & \xrightarrow{\varphi_x} & \mathcal{G}_x, \end{array}$$

因此, 我们有  $\varphi_x(s_x) = \varphi_U(s)_x$ .

**习题1.1.** 证明我们有如下的显式构造:

$$\mathcal{F}_x \cong \left( \prod_{U \ni x} \mathcal{F}(U) \right) / \sim,$$

其中, 若  $s \in \mathcal{F}(U), t \in \mathcal{F}(V)$  的等价关系  $s \sim t$  定义为存在包含于  $U \cap V$  的  $x$  的邻域  $W$  使得  $s|_W = t|_W$ .

**例5.** 设  $M$  是给定的 *Abel* 群,  $x \in X$  是拓扑空间中的一个点, 定义预层  $M(x)$  满足

$$M(x)(U) := \begin{cases} M & x \in U \\ 0 & x \notin U, \end{cases}$$

限制态射要么是恒等映射要么是零映射. 如果我们计算  $M(x)$  在点  $y$  的茎,

但是, 预层并不是我们所希望的定义在拓扑空间上的代数结构. 多数情况下我们希望的是从局部的信息中可以得到足够的整体信息, 并且整体能够得到的信息一定程度上完全由局部信息得到, 于是我们有下面的定义:

**定义.** 设  $\mathcal{F}$  是拓扑空间  $X$  上的预层, 如果  $\mathcal{F}$  满足如下条件:

- (i) (局部性(locality)) 若  $\{U_i\}_{i \in I}$  是开集  $U$  的一族开覆盖,  $s, t \in \mathcal{F}(U)$  满足对于任意  $i \in I$  都有  $s|_{U_i} = t|_{U_i}$  成立, 则  $s = t \in \mathcal{F}(U)$ ;
- (ii) (粘合条件(gluing)) 若  $\{U_i\}_{i \in I}$  是开集  $U$  的一族开覆盖, 一族元素  $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$  满足  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ , 那么存在  $s \in \mathcal{F}(U)$  使得  $s|_{U_i} = s_i$  成立;

则称  $\mathcal{F}$  为  $X$  上的层(sheaf).

定义的合理性告诉我们并不是所有的预层都是层, 对于某些拓扑空间  $X$ , 常预层就不是层. 但是, 某些定义的预层本身就是层, 如下例. 最重要的是层的行为形态非常类似于全体可定义的函数, 因此函数的全体必然是层.

**例6.** 例1中的构造是一个层, 更一般地, 如果  $X$  是拓扑空间,  $\mathcal{F}$  是定义在  $X$  上满足某些性质 (诸如连续、全纯、光滑等等) 的函数预层, 且限制映射就是函数的限制, 那么这个预层是层.

**例7.** 若  $\mathcal{F}$  是拓扑空间  $X$  上的预层,  $U$  是开集, 那么我们可以定义  $\mathcal{F}$  在  $U$  上的限制, 记为  $\mathcal{F}|_U$ , 它是  $U$  上的层, 对任意  $U$  中的开集  $V$ , 定义

$$\mathcal{F}|_U(V) = \mathcal{F}(U \cap V) = \mathcal{F}(V),$$

且对应  $W \subseteq V$  的限制同态  $\mathcal{F}|_U(V) \rightarrow \mathcal{F}|_U(W)$  定义为限制同态  $\mathcal{F}(V) \rightarrow \mathcal{F}(W)$ . 明显的事实是,  $\mathcal{F}|_U(V) \rightarrow \mathcal{F}|_U(W)$  是预层, 并且如果  $\mathcal{F}$  是层则  $\mathcal{F}|_U(V) \rightarrow \mathcal{F}|_U(W)$  也是层.

更抽象一些地, 我们可以用范畴的语言描述层公理: 若  $\{U_i\}_{i \in I}$  是开集  $U$  的一族开覆盖, 那么层公理等价于下图

$$\mathcal{F}(U) \xrightarrow{p} \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j),$$

是一个等值子 (equalizer), 其中第一个态射由  $\rho_{U_i}^U = \mathcal{F}(U_i \hookrightarrow U)$  诱导,  $f, g: \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$  分别由  $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i} \circ \pi_i: \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$  和  $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_j} \circ \pi_j: \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) \rightarrow \mathcal{F}(U_i \cap U_j)$  诱导.

**习题1.2.** 证明上述等价性.

*Proof.* 根据范畴中乘积对象的泛性质,  $p, f, g$  的映射完全由  $\pi_i \circ p, \pi_{i,j} \circ f, \pi_{i,j} \circ g$  决定.

假设  $\mathcal{F}$  是层, 且我们能找到集合间的映射  $q: A \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$  使得  $f \circ q = g \circ q$ , 于是对任意  $A$  中的元素  $a$ ,  $\pi_{i,j} \circ f \circ q(a) = \pi_{i,j} \circ g \circ q(a)$ , 这意味着对于  $U_i$ , 我们能找到  $\mathcal{F}(U_i)$  中的元素  $\pi_i \circ q(a)$  使得

$$\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(\pi_i \circ q(a)) = \pi_{i,j} \circ f \circ q(a) = \pi_{i,j} \circ g \circ q(a) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(\pi_j \circ q(a)),$$

故由层的定义, 存在唯一的元素  $\tilde{q}(a) \in \mathcal{F}(U)$  使得

$$\rho_{U_i}^U(\tilde{q}(a)) = \pi_i \circ q(a),$$

即存在唯一的集合间的映射  $\tilde{q}: A \rightarrow \mathcal{F}(U)$  满足  $q = p \circ \tilde{q}$ , 故  $\mathcal{F}(U)$  是等值子.

反过来, 设  $\mathcal{F}(U)$  是  $f, g$  的等值子, 若在每个  $i \in I$ ,  $\mathcal{F}(U_i)$  中都有元素  $s_i$  满足  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ , 根据乘积结构的泛性质, 这意味着在  $\prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i)$  中存在元素  $\{s_i\}_{i \in I}$  满足

$$\pi_{i,j} \circ f(\{s_i\}_{i \in I}) = s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} = \pi_{i,j} \circ g(\{s_i\}_{i \in I}),$$

故  $f(\{s_i\}_{i \in I}) = g(\{s_i\}_{i \in I})$ . 根据集合范畴中等值子的构造, 存在唯一的  $s \in \mathcal{F}(U)$  使得  $p(s) = \{s_i\}_{i \in I}$ , 因此

$$s|_{U_i} = \pi_i \circ p(s) = s_i,$$

$\mathcal{F}$  是层. □

层之间的态射与预层之间态射的定义相同, 即对于层  $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ ,  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  是层态射当且仅当  $\varphi$  是预层的态射. 这意味着我们可以定义范畴  $\mathbf{ShAb}(X)$ , 且它是  $\mathbf{PShAb}(X)$  的满子范畴. 在之后的内容我们会看到, 当我们选取的范畴  $\mathcal{A}$  是 Abel 范畴时,  $\mathbf{PSh}\mathcal{A}(X)$  也是一个 Abel 范畴.

局部性可以用茎的语言来描述:

**命题1.1.** 设  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  是拓扑空间  $X$  上层的态射, 那么  $\varphi$  是同构当且仅当对于任意  $x \in X$ , 诱导的  $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$  都是同构.

对层这种构造的一种理解方式是说, 它是弯曲空间上满足一定性质的“函数”的全体, 不同性质的选取决定了层结构的不同.

**习题1.3.** 设 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 $X$ 上的一个预层, 则下面的构造给出一个拓扑空间, 其中底集 $\bar{\mathcal{F}} = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x = \{(x, s_x) \mid x \in X, s_x \in \mathcal{F}_x\}$ 是所有茎的不交并, 并对任意给定 $X$ 中的开集 $U$ 和 $s \in \mathcal{F}(U)$ 给定如下一组拓扑基

$$(U, s) := \{(x, s_x) \mid x \in U\}.$$

求证:

- (i) 存在自然的连续映射 $\pi: \bar{\mathcal{F}} \rightarrow X$ , 将点 $(x, s_x)$ 映到 $x$ . 并且, 对任意的开集 $U$ 和 $s \in \mathcal{F}(U)$ , 存在 $\pi$ 在 $U$ 上的截面(section) $\sigma: U \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$  (截面是指连续函数 $\sigma$ 使得 $\pi \circ \sigma$ 是 $U$ 上的恒等函数). 记对应 $\mathcal{F}$ 的 $U$ 上所有截面为 $\Gamma(U, \mathcal{F})$ .
- (ii) 反之, 若 $\mathcal{F}$ 还是层, 求证任意 $U$ 上的截面 $\sigma$ 都是如上述方式构造的.
- (iii) 由上证明若 $\mathcal{F}$ 是层, 则 $\pi: \bar{\mathcal{F}} \rightarrow X$ 的连续函数截面层同构于 $\mathcal{F}$ .
- (iv) 若 $\mathcal{G}$ 也是拓扑空间 $X$ 上的一个预层,  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层的态射, 证明 $\varphi$ 诱导了 $\bar{\mathcal{F}} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$ 的连续映射.

空间 $\bar{\mathcal{F}}$ 称为预层 $\mathcal{F}$ 的平展空间(étale space). 这实际上是Serre最初给的层的定义, 我们用的是更现代的观点来看, 但习题说明了两者是完全相同的.

*Solution.* (i) 根据定义,  $\pi$ 显然是连续的. 定义 $\sigma: x \mapsto (x, s_x)$ , 注意到 $\sigma^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \sigma^{-1}(A_i)$ , 因而证明 $\sigma$ 是连续的只需要证明对任意的 $X$ 中的开集 $V$ ,  $\sigma^{-1}((V, t))$ 也是开集即可. 但是若 $t = s$ 则 $\sigma^{-1}((V, t)) = \sigma^{-1}((V, s)) = V \cap U$ , 若 $t \neq s$ 则 $\sigma^{-1}((V, t)) = \emptyset$ . 故得证.

(ii) 设 $\sigma: U \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$ 是 $U$ 上的截面, 于是对于任意的 $x \in U$ , 存在 $s \in \mathcal{F}(U)$ 使得 $\sigma(x) = (x, s_x)$ . 若 $x, y$ 是 $U$ 中的两个点,  $\sigma(x) = (x, s_x)$ 且 $\sigma(y) = (y, t_y)$ . 根据芽的定义, 我们可以找到 $x, y$ 的邻域 $V, W$ 使得 $s \in \mathcal{F}(V), t \in \mathcal{F}(W)$ . 考虑开集

$$(V, s) = \{(z, s_z) \mid z \in V\}$$

和

$$(W, t) = \{(z, t_z) \mid z \in W\},$$

根据 $\sigma$ 的连续性,  $\tilde{V} := \sigma^{-1}((V, s))$ 和 $\tilde{W} := \sigma^{-1}((W, t))$ 都是 $U$ 中的非空开集, 分别包含 $x$ 和 $y$ . 对于任意 $z \in \tilde{V} \cap \tilde{W}$ , 由 $\sigma$ 的映射性 $(z, s_z) = \sigma(z) = (z, t_z)$ , 故存在 $z$ 的一个邻域 $O \subseteq \tilde{V} \cap \tilde{W}$ 使得 $s|_O = t|_O$ . 但是 $z$ 是任取的, 故 $s|_{\tilde{V} \cap \tilde{W}} = t|_{\tilde{V} \cap \tilde{W}}$ . 这样我们就得到了 $U$ 的一个开覆盖, 且在开集重合的部分截面是相容的. 根据层公理, 存在唯一的 $r \in \mathcal{F}(U)$ 使得 $\sigma(x) = (x, r_x)$ .

(iii) 记 $\mathcal{F}'$ 为 $\pi: \bar{\mathcal{F}} \rightarrow X$ 的截面层. 定义

$$\begin{aligned} \theta: \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F}' \\ \theta_U: \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}'(U) \\ s &\mapsto \sigma(x \mapsto (x, s_x)), \end{aligned}$$

于是我们需要验证对任意的开集 $U$ ,  $\theta_U$ 是群同构, 且对任意满足 $V \subseteq U$ 的开集 $U, V$ 都有图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\theta_U} & \mathcal{F}'(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \iota_V \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\theta_V} & \mathcal{F}'(V), \end{array}$$

交换, 其中 $|_V$ 是 $U$ 上函数在 $V$ 的限制.

对于 $\mathcal{F}'(U)$ 中的截面 $\sigma, \tau$ ,  $\sigma + \tau$ 的定义是 $\sigma + \tau : x \mapsto (x, s_x + t_x)$ , 其中 $\sigma(x) = (x, s_x)$ ,  $\tau(x) = (x, t_x)$ . 于是, 同态性由正极限的性质保证, 再根据前一部分 $\theta_U$ 是同构, 其中, 层公理的局部性对应 $\theta$ 的单射性, 在局部性的存在下粘合条件等价于满射 (充分性由前一部分证明, 必要性考虑到截面本质上是映射, 是自动满足粘合条件的). 任取 $x \in V$ 和 $s \in \mathcal{F}(U)$ , 正极限保证 $s_x = (s|_V)_x$ , 这即是图的交换性.

(iv) 定义

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} : \bar{\mathcal{F}} &\rightarrow \bar{\mathcal{G}} \\ (x, s_x) &\mapsto (x, \varphi_x(s_x)),\end{aligned}$$

于是我们只要证明函数是连续的即可. 对 $\bar{\mathcal{G}}$ 的任意 $X$ 中的开集 $U$ , 若 $t$ 是 $\mathcal{G}(U)$ 中的截面, 则对于 $(U, t)$ 中的任意点 $(x, t_x)$ , 若它在 $\bar{\varphi}$ 的像中, 则存在 $(x, s_x) \in \bar{\mathcal{F}}_x$ 使得 $\varphi_x(s_x) = t_x$ . 这意味着, 存在 $x$ 的邻域 $W$ 使得 $\varphi_W(s)|_{W \cap U} = t|_{W \cap U}$ . 于是, 开集基中的元素 $(W \cap U, s|_{W \cap U})$ 包含于 $\bar{\varphi}$ 的原像中, 故

$$\varphi^{-1}((U, t)) = \coprod_{W \text{ 是 } U \text{ 中的开集, 且 } s \in \mathcal{F}(W) \text{ 满足 } \varphi_W(s) = t|_W} (W, s),$$

按照定义这是一个开集. □

**习题1.4.** 设 $\varphi_i : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是拓扑空间 $X$ 上层的态射,  $i = 1, 2$ , 且对于任意 $x \in X$ , 都有 $(\varphi_1)_x = (\varphi_2)_x$ , 证明 $\varphi_1 = \varphi_2$ .

## 1.2 层化

对于一个预层 $\mathcal{F}$ 和 $X$ 中的开集 $U$ , 我们可以定义

$$\tilde{\mathcal{F}}(U) := \{s : U \rightarrow \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid s \text{ 满足公理(i)和(ii)}\}$$

其中

- (i) 对每个 $U$ 中的点 $x$ ,  $s(x) \in \mathcal{F}_x$ ;
- (ii) 对每个 $U$ 中的点 $x$ , 都存在开邻域 $V \subseteq U$ 和截面 $t \in \mathcal{F}(V)$ 使得对于所有的 $y \in V$ 都有 $s(y) = t_y$ .

对于 $\mathcal{F}$ 中的任意截面 $s \in \mathcal{F}(U)$ , 我们都可以定义一个映射 $\tilde{s} : U \rightarrow \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_x, y \mapsto s_y$ . 显然 $\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$ , 因此我们定义了一个预层的态射 $\zeta : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ .

**命题1.2.** 若预层 $\mathcal{F}$ 是层, 则 $\zeta : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ 是层的同构.

如果尽可能具体地解释层化, 这个构造就是把原本没有的截面加到层的对象当中去, 进而形成我们需要的足够多的粘合信息, 而我们是局部来完成这个扩充的. 刚刚我们介绍的层化事实上就是用一个个点的局部信息 (茎) 去构造相应的函数, 可以说层公理所描述的本质信息就是一定类型的函数. 我们对于层化的定义满足如下的泛性质和函子性:

**命题1.3** (函子性). 设  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  是预层的态射, 那么存在层态射  $\tilde{\varphi}: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$  使得下面的图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\ \zeta_{\mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \zeta_{\mathcal{G}} \\ \tilde{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{\mathcal{G}} \end{array}$$

*Proof.* 对任意  $X$  中的开集  $U$ , 考虑点  $x \in U$  和截面  $s \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$ , 我们定义

$$\tilde{\varphi}_U(s)(x) := \varphi_x(s(x)).$$

我们需要验证定义是层的态射, 并验证图的交换性. □

**推论1.3.1** (泛性质). 设  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  是预层的态射, 若  $\mathcal{G}$  是层, 则存在  $Abel$  群的同构

$$\text{hom}_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{hom}_{\mathbf{ShAb}(X)}(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{G}).$$

事实上, 我们并不需要拓扑空间  $X$  中所有开集  $U$  所对应的对象  $\mathcal{F}(U)$ , 如果给定  $X$  的一组基  $\mathcal{B}$  中所有所有开集  $U$  对应的对象  $\mathcal{F}(U)$ , 并且这些对象满足层公理, 那么我们存在唯一的  $X$  上的层:

**定理1.4** ( $\mathcal{B}$ -层). 设  $\mathcal{B}$  是拓扑空间  $X$  的一组开集基, 对于每个  $U, V \in \mathcal{B}$ , 存在  $Abel$  群  $\mathcal{F}(U)$  和限制同态  $\rho_V^U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  满足预层公理和层公理, 那么称  $\mathcal{F}$  是一个  $\mathcal{B}$ -层 ( $\mathcal{B}$ -sheaf). 于是

1. 任意  $\mathcal{B}$ -层都可以唯一地扩张为一个  $X$  上的  $Abel$  群层.
2. 给定  $X$  上的两个  $\mathcal{B}$ -层  $\mathcal{F}$  和  $\mathcal{G}$ , 且对每个  $\mathcal{B}$  中的开集  $U$  都有群态射

$$\varphi_U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{G}(U)$$

与  $\mathcal{B}$ -层的限制态射相容, 那么存在唯一的层态射  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  是  $\mathcal{B}$ -层的扩张.

*Proof.* 对任意  $X$  中的开集  $V$ , 定义

$$\mathcal{F}(V) := \varprojlim_{U \in \mathcal{B} \text{ 满足 } U \subseteq V} \mathcal{F}(U),$$

其中逆向系中的态射由限制态射给定. 我们需要证明: (i) 该定义与原定义相容; (ii) 若  $V \subseteq W$ , 则存在  $\rho_V^W: \mathcal{F}(W) \rightarrow \mathcal{F}(V)$  与原有限制函数相容, 且新构造的限制函数间也相容; (iii) 如此定义的预层构成一个层.

(i) 由极限的定义即可得到, 因为若  $V \in \mathcal{B}$ ,  $V$  就是被  $V$  包含的  $\mathcal{B}$  中开集在嵌入映射下的终对象, 因此  $\mathcal{F}(V)$  是始对象. (ii) 可以由极限的函子性推得. 这样我们只要验证这是一个层即可, 等价地, 我们证明对任意的开覆盖, 是一个等值子. □

**推论1.4.1** (层的粘合原理). 设 $\mathcal{U}$ 是拓扑空间 $X$ 的开覆盖. 若对任意 $\mathcal{U}$ 中的开集 $U$ ,  $\mathcal{F}_U$ 都是 $U$ 上的层, 并且

$$\varphi_{U,V} : \mathcal{F}_U|_{U \cap V} \rightarrow \mathcal{F}_V|_{U \cap V}$$

都是同构, 在 $U \cap V \cap W$ 上满足

$$\varphi_{V,W} \circ \varphi_{U,V} = \varphi_{U,W},$$

则存在唯一的 $X$ 上的层 $\mathcal{F}$ 使得有层的同构 $\psi : \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{F}_U$ 且满足如下相容性: 对任意 $U, V \in \mathcal{U}$

$$\varphi_{U,V} \circ \psi_U|_{U \cap V} = \psi_V|_{U \cap V} : \mathcal{F}|_{U \cap V} \rightarrow \mathcal{F}_V|_{U \cap V}.$$

*Proof.* 我们将验证如下论断: (i) 被 $\mathcal{U}$ 中的开集包含的所有的开集构成 $X$ 的一组拓扑基 $\mathcal{B}$ ; (ii) 所给出的粘合条件自然地给出了一个 $\mathcal{B}$ -层, 于是根据定理1.4存在性和唯一性都得证.

(i) 这是一个单纯的拓扑问题, 我们略过证明. (ii) 对任意 $\mathcal{B}$ 中的开集 $W$ , 我们可以找到 $U \in \mathcal{U}$ 使得 $W \subseteq U$ , 于是定义

$$\mathcal{F}(W) := \mathcal{F}_U(W),$$

且若 $W_1 \subseteq W_2 \subseteq U$ , 那么限制态射 $\rho_{W_1}^{W_2} : \mathcal{F}(W_2) \rightarrow \mathcal{F}(W_1)$ 定义为层 $\mathcal{F}_U$ 从 $W_1$ 到 $W_2$ 的限制. 这样定义首先出现的问题是, 我们对于 $U \in \mathcal{U}$ 的选取可能不是唯一的, 因而, 首先验证定义是合理的.  $\square$

事实上, 粘合后的层是容易描述的:

引入层化后我们其实有了对于层更进一步的认识——层完全由每点上的茎完全决定, 而决定的方式就是寻找连续的截面 (习题1.5). 在英语中, sheaf一词的含义是 “a bundle of stalks”, 即一捆稻谷, 我们想象

**习题1.5.** 设 $\mathcal{F}$ 是拓扑空间 $X$ 上的预层. 证明平展空间 $\tilde{\mathcal{F}}$ 的截面层 $\mathcal{F}'$ 同构于 $\mathcal{F}$ 的层化.

*Proof.* 在习题1.3中我们定义了预层的态射

$$\begin{aligned} \theta : \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F}' \\ \theta_U : \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}'(U) \\ s &\mapsto \sigma(x \mapsto (x, s_x)), \end{aligned}$$

于是只要证明 $\mathcal{F}'$ 的泛性质就能够说明同构. 设 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层到层的态射, 于是根据习题1.3我们有连续映射 $\bar{\varphi} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$ , 进而对于任意的截面 $s : U \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ ,  $\bar{\varphi} \circ s$ 也是 $U$ 上的截面, 这样我们定义了

$$\begin{aligned} \varphi' : \mathcal{F}' &\rightarrow \mathcal{G}' \cong \mathcal{G} \\ \varphi'_U : \mathcal{F}'(U) &\rightarrow \mathcal{G}'(U) \\ s &\mapsto \bar{\varphi} \circ s. \end{aligned}$$

$\varphi'_U$ 是群同态由 $\varphi$ 的预层的态射性保证, 而它显然与两个层的限制态射相容, 于是我们得到了层的态射.

再证明唯一性. 假设 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层到层的态射, 层态射 $\tilde{\varphi} : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}$ 满足

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}' & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \mathcal{G} \\ \uparrow \theta & \nearrow \varphi & \\ \mathcal{F} & & \end{array}$$



任取  $\sigma \in \mathcal{F}'(U)$ , 即截面  $\sigma : U \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$ , 对任意  $x \in U$ , 若  $\sigma(x) = (x, s_x)$ , 那么任取  $\sigma_x$  的代表元  $\tau$ , 于是存在  $W \subseteq U$  使得  $\sigma|_W = \tau|_W$ , 因此  $\tau(x) = (x, s_x)$ , 于是可以定义  $\eta_x : (\mathcal{F}')_x \rightarrow \mathcal{F}_x$ ,  $\sigma_x \mapsto s_x$ . 根据截面加法的定义, 这显然是一个群态射. 一方面, 我们显然有  $\eta_x \circ \theta_x = \text{id}_{\mathcal{F}_x}$ . 另一方面, 仍然假定  $\sigma(x) = (x, s_x)$ , 那么由连续性  $V = \sigma^{-1}((U, s))$  是  $U$  中的非空开集, 这意味着对任意  $y \in V$ ,  $\sigma(y) = (y, s_y)$ , 于是  $\sigma|_V = \theta(s)|_V$ ,  $\theta_x(s_x) = \sigma_x$ . 因此,  $\theta_x \circ \eta_x = \text{id}_{(\mathcal{F}')_x}$ . 再根据习题1.4,  $\tilde{\varphi}$  是唯一确定的.  $\square$

### 1.3 底空间变换

这一节我们考虑这样的问题,

**定义.** 设  $f : X \rightarrow Y$  是拓扑空间的连续映射, 如果  $\mathcal{F}$  是  $X$  上的预层, 则如下定义的

$$\begin{aligned} f_*\mathcal{F} : \text{Open}(Y) &\rightrightarrows \mathbf{Ab} \\ U &\mapsto f_*\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \end{aligned}$$

是一个预层, 称为预层  $\mathcal{F}$  的**推出**(pushforward).

对于  $Y$  中的开集  $V \subseteq U$ , 我们定义限制同态  $f_*\mathcal{F}(U) \rightarrow f_*\mathcal{F}(V)$  是  $\mathcal{F}(f^{-1}(U))$  到  $\mathcal{F}(f^{-1}(V))$  的限制同态, 即若  $s \in f_*\mathcal{F}(U)$ , 则

$$s|_V = (s \in \mathcal{F}(f^{-1}(U)))|_{f^{-1}(V)}.$$

**引理1.1.** 设  $f : X \rightarrow Y$  是拓扑空间的连续映射, 如果  $\mathcal{F}$  是  $X$  上的层, 则推出  $f_*\mathcal{F}$  是  $Y$  上的层.

*Proof.* 任取  $Y$  中的开集  $V$ , 设  $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$  是  $V$  的开覆盖, 那么  $\mathcal{U} = \{U_i := f^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$  是  $U := f^{-1}(V)$  的开覆盖. 于是, 若给定  $s_i \in f_*\mathcal{F}(V_i) = \mathcal{F}(U_i)$ , 满足  $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$ , 于是  $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$ . 由  $\mathcal{F}$  是层得知存在唯一的  $s \in \mathcal{F}(U)$  使得  $s|_{U_i} = s_i$ . 按照层推出的定义, 这个  $s$  就是  $f_*\mathcal{F}(V)$  中要找的唯一的元素, 故  $f_*\mathcal{F}$  是层.  $\square$

如果我们还有一个  $X$  上的预层态射  $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ , 则对于任意的  $Y$  中的开集  $U$ , 同态映射  $\varphi_{\varphi^{-1}(U)} : \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{G}(\varphi^{-1}(U))$  和限制映射  $\rho_{\varphi^{-1}(U)}^{\varphi^{-1}(U)}$  相容, 于是  $\varphi_{\varphi^{-1}(U)} : \mathcal{F}(\varphi^{-1}(U)) \rightarrow \mathcal{G}(\varphi^{-1}(U))$  自然地可以看作  $\varphi_{\varphi^{-1}(U)} : f_*\mathcal{F}(U) \rightarrow f_*\mathcal{G}(U)$ , 这样我们说明了  $f_*\varphi$  是预层态射  $f_*\mathcal{F} \rightarrow f_*\mathcal{G}$ . 如果还有  $\psi : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{H}$ , 那么很明显地有  $f_*(\psi \circ \varphi) = f_*\psi \circ f_*\varphi$ . 于是  $f_*$  是一个函子  $\mathbf{PShAb}(X) \rightarrow \mathbf{PShAb}(Y)$ .

**习题1.6.** 设  $f : X \rightarrow Y$  和  $g : Y \rightarrow Z$  是两个连续映射, 那么

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

定义. 设  $f: X \rightarrow Y$  是拓扑空间的连续映射, 如果  $\mathcal{G}$  是  $Y$  上的预层, 则如下定义的

$$f_P \mathcal{G} : \mathbf{Open}(X) \rightrightarrows \mathbf{Ab}$$

$$V \mapsto f_P \mathcal{G}(U) := \varinjlim_{\substack{V \in \mathbf{Open}(Y) \\ f(U) \subseteq V}} \mathcal{G}(V)$$

是一个预层, 称为预层  $\mathcal{G}$  的拉回(pullback).

引理1.2. 设  $X$  和  $Y$  是拓扑空间,  $f: X \rightarrow Y$  是连续映射, 那么下面的同构关于  $\mathcal{G}$  和  $\mathcal{F}$  是自然的:

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{PShAb}(X)}(f_P \mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathrm{hom}_{\mathbf{PShAb}(Y)}(\mathcal{G}, f_* \mathcal{F}).$$

*Proof.* 我们首先证明同构. 设  $\varphi \in \mathrm{hom}_{\mathbf{PShAb}(X)}(f_P \mathcal{G}, \mathcal{F})$ , 于是任意给定  $X$  中的开集, 按照极限的定义,  $\varphi_U: f_P \mathcal{G}(U) \rightarrow \mathcal{F}(U)$  完全由一族相容的态射

$$\varphi_V:$$

其中  $V$  取遍所有包含  $f(U)$  的开集. □

与推出不同的是, 即使  $\mathcal{G}$  是  $Y$  上的层,  $f_P \mathcal{G}$  也可能并不是一个层, 但作为预层, 层的拉回也有很好的函子性质. 我们称  $f_P^{-1} \mathcal{G}$  的层化为  $\mathcal{G}$  的逆象层(inverse sheaf), 记为  $f^{-1} \mathcal{G}$ .

定义. 设  $X$  是拓扑空间,  $\mathcal{F}$  是  $X$  上的层

## 1.4 层范畴及其中的正合性

设  $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$  是空间  $X$  上预层的态射,

习题1.7 (层的零扩张). 设  $X$  是拓扑空间,  $Z$  是  $X$  的闭集,  $i: Z \rightarrow X$  是嵌入映射. 令  $U := X - Z$  是  $Z$  在  $X$  中的补集,  $j: U \rightarrow X$  是嵌入映射.

1. 设  $\mathcal{F}$  是  $Z$  上的层, 证明

$$(i_* \mathcal{F})_P = \begin{cases} \mathcal{F}_P & P \in Z \\ 0 & P \notin Z. \end{cases}$$

于是我们称  $i_* \mathcal{F}$  是  $\mathcal{F}$  在  $X$  上的零扩张.

2. 设  $\mathcal{G}$  是  $U$  上的层, 定义  $X$  上的层  $\mathcal{G}$  满足对任意  $X$  中的开集  $V$ ,

$$j_! \mathcal{G}(V) := \begin{cases} \mathcal{G}(V) & V \subseteq U \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

证明

$$(j_! \mathcal{G})_x = \begin{cases} \mathcal{G}_x & x \in U \\ 0 & \text{其他情况,} \end{cases}$$

并且证明  $j_! \mathcal{G}$  是满足以上条件且限制在  $U$  上是  $\mathcal{G}$  的唯一一个层.

3. 现在假设 $\mathcal{F}$ 是 $X$ 上的层, 证明我们有如下层的正合列:

$$0 \rightarrow j_!(\mathcal{F}|_U) \rightarrow \mathcal{F} \rightarrow i_*(\mathcal{F}|_Z) \rightarrow 0.$$

## 2 Čech上同调

之前的理论中我们建立了层的上同调理论, 但我们面临一个相当严重的问题——对于一个给定的层, 它的上同调几乎是不可计算的. Čech上同调的主要思想是我们考虑拓扑空间中开覆盖所包含的组合信息,

设 $X$ 是拓扑空间,  $\mathcal{F}$ 是 $X$ 上的层,  $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 $X$ 的一族开覆盖. 对任意 $q \geq 0$ , 我们定义 $\mathcal{F}$  (对于 $\mathcal{U}$ ) 的 $q$ 群(group of  $q$ -cochain of  $\mathcal{F}$  (relative to  $\mathcal{U}$ ))为

$$C^q(\mathcal{F}, \mathcal{U}) = \prod_{(\lambda_0, \dots, \lambda_q) \in \Lambda^{q+1}} \mathcal{F}(U_{\lambda_0} \cap \dots \cap U_{\lambda_q}),$$

进而可以定义上边缘映射

$$\begin{aligned} d^q : C^q(\mathcal{F}, \mathcal{U}) &\rightarrow C^{q+1}(\mathcal{F}, \mathcal{U}) \\ \{f_{\lambda_0, \dots, \lambda_q}\} &\mapsto \end{aligned}$$

**引理2.1.** 对任意拓扑空间 $X$ 和 $X$ 上的层 $\mathcal{F}$ , 都有

$$\check{H}^0(\mathcal{F}, \mathcal{U}) \cong \Gamma(X, \mathcal{F}).$$