层及其上同调

Guanyu Li

感谢Ju Tan的阅读和错误修正

第一章 层的基本理论

在几何中，我们经常遇到从局部性质到整体性质的过渡，例如我们在讲光滑函数时对光滑性的定义是局部的，但光滑性可以是整体的性质；任意一个流形都是局部可定向的，但一个流形并不一定是整体可定向的.在从局部到整体的过渡中，我们通常使用的方法是局部坐标，当局部坐标满足一定性质时我们可以找到更大的坐标，这个更大的坐标限制到小的坐标上与原来小的坐标有相同的性质.如果将这样的过程抽象出来就是层的构造.

1.1 预层与层的基本性质

定义. 设X是一个拓扑空间.对X的每个开集U，我们赋予其一个Abel群$\mathscr{F}(U)$，并且对任意满足$V\subseteq U$的开集U,V，存在映射$\rho_V^U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$，满足如下条件：

(i) $\mathscr{F}(\emptyset)=0$；

(ii) $\rho_U^U=\mathrm{id}_{\mathscr{F}(U)}$；

(iii) 对所有满足$W\subseteq V\subseteq U$的开集U,V,W，$\rho_W^V\circ\rho_V^U=\rho_W^U$；

这样的在拓扑空间X上的结构$\mathscr{F}$我们称为**预层**(presheaf)，$\mathscr{F}(U)$中的元素称为开集U的**截面**(section)，映射$\rho_V^U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$称为**限制映射**(restriction map).

例1. *设X是一个复流形，$\mathscr{M}$是如下定义的**亚纯函数层**(sheaf of meromorphic functions)*

$$\mathscr{M}(U):=\{f:U\to\mathbb{C}\mid f\text{是亚纯的}\},$$

且对于任意$f\in\mathscr{M}(U)$和开集$V\subseteq U$，定义$\rho_V^U(f)$是f在V上的限制，则$\mathscr{M}$是X上的预层.

在上面的例子中，预层$\mathscr{M}$的限制同态确实是函数的限制——但通常而言，限制同态可以是任意的映射.对于元素$s\in\mathscr{F}(U)$，我们也用通常的限制记号：$s|_V:=\rho_V^U(s)$，然而这一般与真正函数的限制很不同.

注意到任意的拓扑空间X可以自然地成为一个范畴$\mathbf{Open}(X)$，这样每个预层都是一个反变函子$\mathbf{Open}(X)\rightrightarrows\mathbf{Ab}$，可以想到的是，我们并不需要将函子的值域限定为$\mathbf{Ab}$，其他任意合理的范畴都可以得到有用的预层.当值域范畴为$\mathbf{Ab}$、$\mathbf{Ring}$、$R-\mathbf{Mod}$时，我们分别称$\mathscr{F}$为X上的Abel群预层、环预层和R模预层.

这种对于预层的理解还有其他的好处——我们可以非常容易地定义预层之间的**态射**(morphism)——一个预层的态射就是函子间的自然变换.如果我们显式地将预层态射$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$的定义写出来，即是对任意$X$中的开集$V\subseteq U$，我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\theta_V^U"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathscr{G}(V), \end{tikzcd}$$

其中ρ_V^U, θ_V^U分别是预层$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$的限制映射.

例2. 设X是任意的拓扑空间，M是任意的*Abel*群，对开集U定义$M_X(U) = M$对于满足$V \subseteq U$的开集，限制映射都是恒等映射，则M_X是一个预层，称为常预层*(constant sheaf)*.如果N也是一个*Abel*群，$\varphi : M \to N$是群同态，则我们自然地有预层的映射

$$\varphi_X : M_X \to N_X,$$

定义为

$$(\varphi_X)_U := \varphi : M_X(U) \to N_X(U).$$

例3.

例4.

预层的结构中蕴含了空间上“函数”的很多局部信息，对于一个预层我们有专门的结构刻画这样的信息：

定义. 设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的预层，那么称

$$\mathscr{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U)$$

为$\mathscr{F}$在点x处的**茎**(stalk)，其中U取遍所有包含点x的开集，正向系中的态射由限制态射给定.

根据正极限的定义，对于任意包含x的开集U，存在自然的态射$\rho_x^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$使得与正向系相容，即对于满足$V \subseteq U$的开集，

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_V^U"'] \arrow[dr, "\rho_x^U"] & \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\rho_x^V"'] & \mathscr{F}_x. \end{tikzcd}$$

为简化记号，通常对于截面$s \in \mathscr{F}(U)$，我们记$s_x := \rho_x^U(s)$.同样地，正极限的函子性告诉我们，对于任意X中的点x，若$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层间的态射，那么有诱导的点$x$处茎的态射

$$\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$$

使得对任意开集U有如下交换图

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "(\rho_{\mathscr{F}})_x^U"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "(\rho_{\mathscr{G}})_x^U"] \\ \mathscr{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathscr{G}_x, \end{tikzcd}$$

因此，我们有$\varphi_x(s_x)=\varphi_U(s)_x$.

习题1.1.1. 证明我们有如下的显式构造：

$$\mathscr{F}_x\cong\left(\prod_{x\in U}\mathscr{F}(U)\right)/\sim,$$

其中，若$s\in\mathscr{F}(U),t\in\mathscr{F}(V)$的等价关系$s\sim t$定义为存在包含于$U\cap V$的$x$的邻域$W$使得$s|_W=t|_W$.

例5. *设M是给定的$Abel$群，$x\in X$是拓扑空间中的一个点，定义预层$M(x)$满足*

$$M(x)(U):=\begin{cases}M & x\in U\\ 0 & x\notin U,\end{cases}$$

限制态射要么是恒等映射要么是零映射.如果我们计算$M(x)$在点y的茎，

但是，预层并不是我们所希望的定义在拓扑空间上的代数结构.多数情况下

定义. 设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的预层，如果$\mathscr{F}$满足如下条件：

(i) （局部性(locality)）若$\{U_i\}_{i\in I}$是开集U的一族开覆盖，$s,t\in\mathscr{F}(U)$满足对于任意$i\in I$都有$s|_{U_i}=t_{U_i}$成立，则$s=t\in\mathscr{F}(U)$；

(ii) （粘合条件(gluing)）若$\{U_i\}_{i\in I}$是开集U的一族开覆盖，一族元素$s_i\in\mathscr{F}(U_i)$满足$s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}$，那么存在$s\in\mathscr{F}(U)$使得$s|_{U_i}=s_i$成立；

则称$\mathscr{F}$为X上的**层**(sheaf).

定义的合理性告诉我们并不是所有的预层都是层，对于某些拓扑空间X，常预层就不是层.但是，某些定义的预层本身就是层，如下例.最重要的是层的行为形态非常类似于全体可定义的函数，因此函数的全体必然是层.

例6. *例1中的构造是一个层，更一般地，如果X是拓扑空间，*

例7. *若$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的层，U是开集，那么我们可以定义$\mathscr{F}$在U上的限制，*

更抽象一些地，我们可以用图的语言描述层公理：若$\{U_i\}_{i\in I}$是开集U的一族开覆盖，那么层公理等价于下图

$$\mathscr{F}(U)\to\prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i)\rightrightarrows\prod_{i,j\in I}\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$$

$$s_i\mapsto s_i|_{U_i\cap U_j}$$

是一个等值子（equatlizer）.

习题1.1.2. 证明上述等价性.

层之间的态射与预层之间态射的定义相同，即对于层$\mathscr{F},\mathscr{G}$，$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是层态射当且仅当$\varphi$是预层的态射.这意味着$\mathbf{ShAb}(X)$是$\mathbf{PShAb}(X)$的满子范畴.

局部性可以用茎的语言来描述：

命题1.1.1. *设$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是拓扑空间$X$上层的态射，那么$\varphi$是同构当且仅当对于任意$x\in X$，诱导的$\varphi_x:\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x$都是同构.*

对层这种构造的一种理解方式是说，它是弯曲空间上满足一定性质的“函数”的全体，不同性质的选取决定了层结构的不同.

习题1.1.3. 设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的一个预层，则下面的构造给出一个拓扑空间，其中底集$\bar{\mathscr{F}}=\coprod_{x\in X}\mathscr{F}_x=\{(x,s_x)\mid x\in X,s_x\in\mathscr{F}_x\}$是所有茎的不交并，并对任意给定$X$中的开集$U$和$s\in\mathscr{F}(U)$给定如下一组拓扑基

$$(U,s):=\{(x,s_x)\mid x\in U\}.$$

求证：

(i) 存在自然的连续映射$\pi:\bar{\mathscr{F}}\to X$，将点$(x,s_x)$映到$x$.并且，对任意的开集$U$和$s\in\mathscr{F}(U)$，存在$\pi$在$U$上的截面(section)$\sigma:U\to\bar{\mathscr{F}}$（截面是指连续函数$\sigma$使得$\pi\circ\sigma$是$U$上的恒等函数）.

(ii) 反之，若$\mathscr{F}$还是层，求证任意U上的截面σ都是如上述方式构造的.

(iii) 由上证明若$\mathscr{F}$是层，则$\pi:\bar{\mathscr{F}}\to X$的连续函数截面层同构于$\mathscr{F}$.

(iv) 若$\mathscr{G}$也是拓扑空间X上的一个预层，$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是预层的态射，证明$\varphi$诱导了$\bar{\mathscr{F}}\to\bar{\mathscr{G}}$的连续映射.

空间$\bar{\mathscr{F}}$称为预层$\mathscr{F}$的平展空间(étalé space).

Solution. (i) 根据定义，π显然是连续的.定义$\sigma:x\mapsto(x,s_x)$，注意到$\sigma^{-1}(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}\sigma^{-1}(A_i)$，因而为证明$\sigma$是连续的只需要证明对任意的$X$中的开集$V$，$\sigma^{-1}((V,t))$也是开集即可.但是若$t=s$则$\sigma^{-1}((V,t))=\sigma^{-1}((V,s))=V\cap U$，若$t\neq s$则$\sigma^{-1}((V,t))=\emptyset$.故得证.

(ii) 设$\sigma:U\to\bar{\mathscr{F}}$是$U$上的截面，于是对于任意的$x\in U$，存在$s\in\mathscr{F}(U)$使得$\sigma(x)=(x,s_x)$.若$x,y$是$U$中的两个点，$\sigma(x)=(x,s_x)$且$\sigma(y)=(y,t_y)$.根据芽的定义，我们可以找到$x,y$的邻域$V,W$使得$s\in\mathscr{F}(V),t\in\mathscr{F}(W)$.考虑开集

$$(V,s)=\{(z,s_z)\mid z\in V\}$$

和

$$(W,t)=\{(z,t_z)\mid t\in W\},$$

根据σ的连续性，$\tilde{V}:=\sigma^{-1}((V,s))$和$\tilde{W}:=\sigma^{-1}((W,t))$都是$U$中的非空开集，分别包含$x$和$y$.对于任意$z\in\tilde{V}\cap\tilde{W}$，由$\sigma$的映射性$(z,s_z)=\sigma(z)=(z,t_z)$，故存在$z$的一个邻域$O\subseteq\tilde{V}\cap\tilde{W}$使得$s|_O=t|_O$.但是$z$是任取的，故$s|_{\tilde{V}\cap\tilde{W}}=t|_{\tilde{V}\cap\tilde{W}}$.这样我们就得到了$U$的一个开覆盖，且在开集重合的部分截面是相容的.根据层公理，存在唯一的$r\in\mathscr{F}(U)$使得$\sigma(x)=(x,r_x)$.

(iii) 记$\mathscr{F}'$为$\pi : \bar{\mathscr{F}} \to X$的截面层.定义

$$\begin{aligned}\theta : \mathscr{F} &\to \mathscr{F}' \\ \theta_U : \mathscr{F}(U) &\to \mathscr{F}'(U) \\ s &\mapsto \sigma(x \mapsto (x, s_x)),\end{aligned}$$

于是我们需要验证对任意的开集U，θ_U是群同构，且对任意满足$V \subseteq U$的开集U, V都有图

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[d, "\rho^U_V"'] & \mathscr{F}'(U) \arrow[d, "|_V"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\theta_V"] & \mathscr{F}'(V), \end{tikzcd}$$

交换，其中$|_V$是U上函数在V的限制.

对于$\mathscr{F}'(U)$中的截面σ, τ，$\sigma + \tau$的定义是$\sigma + \tau : x \mapsto (x, s_x + t_x)$，其中$\sigma(x) = (x, s_x)$，$\tau(x) = (x, t_x)$.于是，同态性由正极限的性质保证，再根据前一部分$\theta_U$是同构.任取$x \in V$和$s \in \mathscr{F}(U)$，正极限保证$s_x = (s|_V)_x$，这即是图的交换性.

(iv) 定义

$$\begin{aligned}\bar{\varphi} : \bar{\mathscr{F}} &\to \bar{\mathscr{G}} \\ (x, s_x) &\mapsto (x, \varphi_x(s_x)),\end{aligned}$$

于是我们只要证明函数是连续的即可.对$\bar{\mathscr{G}}$的任意X中的开集U，若t是$\mathscr{G}(U)$中的截面，则对于(U, t)中的任意点(x, t_x)，若它在$\bar{\varphi}$的像中，则存在$(x, s_x) \in \mathscr{F}_x$使得$\varphi_x(s_x) = t_x$.这意味着，存在$x$的邻域$W$使得$\varphi_W(s)|_{W \cap U} = t|_{W \cap U}$.于是，开集基中的元素$(W \cap U, s|_{W \cap U})$包含于$\bar{\varphi}$的原像中，故

$$\varphi^{-1}((U, t)) = \coprod_{W\text{是}U\text{中的开集，且}s \in \mathscr{F}(W)\text{满足}\varphi_W(s) = t|_W} (W, s),$$

按照定义这是一个开集. □

习题1.1.4. 设$\varphi_i : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是拓扑空间$X$上层的态射，$i = 1, 2$，且对于任意$x \in X$，都有$(\varphi_1)_x = (\varphi_2)_x$，证明$\varphi_1 = \varphi_2$.

1.2　层化

对于一个预层$\mathscr{F}$和X中的开集U，我们可以定义

$$\tilde{\mathscr{F}}(U) := \{s : U \to \coprod_{x \in U} \mathscr{F}_x \mid s\text{满足公理(i)和(ii)}\}$$

其中

(i) 对每个U中的点x，$s(x) \in \mathscr{F}_x$；

(ii) 对每个U中的点x，都存在开邻域$V \subseteq U$和截面$t \in \mathscr{F}(V)$使得对于所有的$y \in V$都有$s(y) = t_y$.

对于$\mathscr{F}$中的任意截面$s \in \mathscr{F}(U)$，我们都可以定义一个映射$\tilde{s} : U \to \coprod_{x \in U} \mathscr{F}_x, y \mapsto s_y$.显然$\tilde{s} \in \tilde{\mathscr{F}}(U)$，因此我们定义了一个预层的态射$\zeta : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$.

命题1.2.1. *若预层$\mathscr{F}$是层，则$\zeta : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$是层的同构.*

如果尽可能具体地解释层化，这个构造就是把原本没有的截面加到层的对象当中去，进而形成我们需要的足够多的粘合信息，而我们是局部来完成这个扩充的.刚刚我们介绍的层化事实上就是用一个点的局部信息（茎）去构造相应的函数，可以说层公理所描述的本质信息就是一定类型的函数.我们对于层化的定义满足如下的泛性质和函子性：

命题1.2.2 (函子性)**.** *设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层的态射，那么存在层态射$\tilde{\varphi} : \tilde{\mathscr{F}} \to \tilde{\mathscr{G}}$使得下面的图交换：*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\zeta_{\mathscr{F}}"'] & \mathscr{G} \arrow[d, "\zeta_{\mathscr{G}}"] \\ \tilde{\mathscr{F}} \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \tilde{\mathscr{G}}. \end{tikzcd}$$

Proof. 对任意X中的开集U，考虑点$x \in U$和截面$s \in \tilde{\mathscr{F}}(U)$，我们定义

$$\tilde{\varphi}_U(s)(x) := \varphi_x(s(x)).$$

我们需要验证定义是层的态射，并验证图的交换性. □

推论1.2.2.1 (泛性质)**.** *设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层的态射，若$\mathscr{G}$是层，则存在Abel群的同构*

$$\hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \cong \hom_{\mathbf{ShAb}(X)}(\tilde{\mathscr{F}}, \mathscr{G}).$$

事实上，我们并不需要拓扑空间X中所有开集U所对应的对象$\mathscr{F}(U)$，如果给定X的一组基$\mathscr{B}$中所有所有开集U对应的对象$\mathscr{F}(U)$，并且这些对象满足层公理，那么我们存在唯一的X上的层：

定理1.2.3 ($\mathscr{B}$-层)**.** *设$\mathscr{B}$是拓扑空间X的一组开集基，对于每个$U, V \in \mathscr{B}$，存在Abel群$\mathscr{F}(U)$和限制同态$\rho_V^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$满足预层公理和层公理，那么称$\mathscr{F}$是一个**$\mathscr{B}$-层**($\mathscr{B}$-sheaf).于是*

1. *任意$\mathscr{B}$-层都可以唯一地扩张为一个X上的Abel群层.*

2. *给定X上的两个$\mathscr{B}$-层$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$，且对每个$\mathscr{B}$中的开集U都有群态射*

$$\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$$

与$\mathscr{B}$-层的限制态射相容，那么存在唯一的层态射$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是$\mathscr{B}$-层的扩张.

Proof. 对任意X中的开集V，定义

$$\mathscr{F}(V) := \varprojlim_{U\in\mathscr{B}\text{满足}U\subseteq V} \mathscr{F}(U),$$

其中逆向系中的态射由限制态射给定. □

推论1.2.3.1 (层的粘合原理). 设$\mathcal{U}$是拓扑空间X的开覆盖.若对任意$\mathcal{U}$中的开集U，$\mathscr{F}_U$都是U上的层，并且

$$\varphi_{U,V} : \mathscr{F}_U|_{U\cap V} \to \mathscr{F}_V|_{U\cap V}$$

都是同构，在$U\cap V\cap W$上满足

$$\varphi_{V,W}\circ\varphi_{U,V} = \varphi_{U,W},$$

则存在唯一的X上的层$\mathscr{F}$使得有层的同构$\psi : \mathscr{F}|_U \to \mathscr{F}_U$且满足如下相容性：对任意$U, V\in\mathcal{U}$

$$\varphi_{U,V}\circ\psi_U|_{U\cap V} = \psi_V|_{U\cap V} : \mathscr{F}|_{U\cap V} \to \mathscr{F}_V|_{U\cap V}.$$

Proof. 我们将验证如下论断：(i) 被$\mathcal{U}$中的开集包含的所有的开集构成X的一组拓扑基$\mathscr{B}$；(ii) 所给出的粘合条件自然地给出了一个$\mathscr{B}$-层，于是根据定理1.2.3存在性和唯一性都得证.

(i) 这是一个单纯的拓扑问题，我们略过证明. □

引入层化后我们其实有了对于层更进一步的认识——层完全由每点上的茎完全决定，而决定的方式就是寻找连续的截面（习题1.2.1）.在英语中，sheaf一词的含义是“a bundle of stalks”，即一捆稻谷，我们想象

习题1.2.1. 设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的预层.证明平展空间$\bar{\mathscr{F}}$的截面层$\mathscr{F}'$同构于$\mathscr{F}$的层化.

Proof. 在习题1.1.3中我们定义了预层的态射

$$\begin{aligned}\theta : \mathscr{F} &\to \mathscr{F}'\\ \theta_U : \mathscr{F}(U) &\to \mathscr{F}'(U)\\ s &\mapsto \sigma(x\mapsto(x, s_x)),\end{aligned}$$

于是只要证明$\mathscr{F}'$的泛性质就能够说明同构.设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层到层的态射，于是根据习题1.1.3我们有连续映射$\bar{\varphi} : \bar{\mathscr{F}} \to \bar{\mathscr{G}}$，进而对于任意的截面$s : U \to \bar{\mathscr{F}}$，$\bar{\varphi}\circ s$也是$U$上的截面，这样我们定义了

$$\begin{aligned}\varphi' : \mathscr{F}' &\to \mathscr{G}' \cong \mathscr{G}\\ \varphi'_U : \mathscr{F}'(U) &\to \mathscr{G}'(U)\\ s &\mapsto \bar{\varphi}\circ s.\end{aligned}$$

φ'_U是群同态由由φ的预层的态射性保证，而它显然与两个层的限制态射相容，于是我们得到了层的态射.

再证明唯一性.假设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层到层的态射，层态射$\tilde{\varphi} : \mathscr{F}' \to \mathscr{G}$满足

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}' \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \mathscr{G} \\ \mathscr{F}. \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

任取$\sigma \in \mathscr{F}'(U)$，即截面$\sigma : U \to \bar{\tilde{\mathscr{F}}}$，对任意$x \in U$，若$\sigma(x) = (x, s_x)$，那么任取$\sigma_x$的代表元$\tau$，于是存在$W \subseteq U$使得$\sigma|_W = \tau|_W$，因此$\tau(x) = (x, s_x)$，于是可以定义$\eta_x : (\mathscr{F}')_x \to \mathscr{F}_x$，$\sigma_x \mapsto s_x$.根据截面加法的定义，这显然是一个群态射.一方面，我们显然有$\eta_x \circ \theta_x = \mathrm{id}_{\mathscr{F}_x}$.另一方面，仍然假定$\sigma(x) = (x, s_x)$，那么由连续性$V = \sigma^{-1}((U, s))$是$U$中的非空开集，这意味着对任意$y \in V$，$\sigma(y) = (y, s_y)$，于是$\sigma|_V = \theta(s)|_V$，$\theta_x(s_x) = \sigma_x$.因此，$\theta_x \circ \eta_x = \mathrm{id}_{(\mathscr{F}')_x}$.再根据习题1.1.4，$\tilde{\varphi}$是唯一确定的. □

1.3　底空间变换

这一节我们考虑这样的问题，

定义. 设$f : X \to Y$是拓扑空间的连续映射，如果$\mathscr{F}$是X上的预层，则如下定义的

$$\begin{aligned} f_*\mathscr{F} : \mathbf{Open}(Y) &\rightrightarrows \mathbf{Ab} \\ U &\mapsto f_*\mathscr{F}(U) := \mathscr{F}(f^{-1}(U)) \end{aligned}$$

是一个预层，称为预层$\mathscr{F}$的**推出**(pushfroward).

对于Y中的开集$V \subseteq U$，我们定义限制同态$f_*\mathscr{F}(U) \to f_*\mathscr{F}(V)$是$\mathscr{F}(f^{-1}(U))$到$\mathscr{F}(f^{-1}(V))$的限制同态，即若$s \in f_*\mathscr{F}(U)$，则

$$s|_V = (s \in \mathscr{F}(f^{-1}(U)))|_{f^{-1}(V)}.$$

引理1.3.1. *设$f : X \to Y$是拓扑空间的连续映射，如果$\mathscr{F}$是X上的层，则推出$f_*\mathscr{F}$是Y上的层.*

Proof. 任取Y中的开集V，设$\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$是$V$的开覆盖，那么$\mathcal{U} = \{U_i := f^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$是$U := f^{-1}(V)$的开覆盖.于是，若给定$s_i \in f_*\mathscr{F}(V_i) = \mathscr{F}(U_i)$，满足$s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$，于是$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$.由$\mathscr{F}$是层得知存在唯一的$s \in \mathscr{F}(U)$使得$s|_{U_i} = s_i$.按照层推出的定义，这个$s$就是$f_*\mathscr{F}(V)$中要找的唯一的元素，故$f_*\mathscr{F}$是层. □

定义. 设$f : X \to Y$是拓扑空间的连续映射，如果$\mathscr{G}$是Y上的预层，则如下定义的

$$\begin{aligned} f_P\mathscr{G} : \mathbf{Open}(X) &\rightrightarrows \mathbf{Ab} \\ V &\mapsto f_P\mathscr{G}(U) := \varinjlim_{\substack{V \in \mathbf{Open}(Y) \\ U \subseteq f(V)}} \mathscr{G}(V) \end{aligned}$$

是一个预层，称为预层$\mathscr{G}$的**拉回**(pullback).

与推出不同的是，即使$\mathscr{G}$是Y上的层，$f_P\mathscr{G}$也可能并不是一个层，但作为预层，层的拉回也有很好的函子性质.我们称$f_P^{-1}\mathscr{G}$的层化为$\mathscr{G}$的**逆象层**(inverse sheaf)，记为$f^{-1}\mathscr{G}$.

引理1.3.2.

$$\hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(f_P\mathscr{G},\mathscr{F})\cong\hom_{\mathbf{PShAb}(Y)}(\mathscr{G},f_*\mathscr{F}).$$

1.4 层范畴及其中的正合性

设$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是空间$X$上预层的态射，