定义. 设R是交换环, A是R代数且M是A模.若Abel群同态 $d: A \to M$ 满足如下Leibnitz法则

$$d(fg) = fd(g) + d(f)g$$

对任意 $f,g \in A$ 都成立,则称d为一个微分(derivation).若 $d: A \to M$ 还是R模同态,则称d是R线性的(R-linear).我们将所有的R线性微分 $A \to M$ 记为 $Der_R(A,M)$.

对于任意R-线性微分 $d \in Der_R(A, M)$, Leibnitz法则说明

$$d(1) = d(1 \cdot 1) = 1d(1) + d(1)1,$$

于是d(1) = 0.再根据R线性性,对任意R中的元素r,d(r) = rd(1) = 0.这也符合"常值函数的微分为零"的直觉.很容易看出, $Der_R(A, M)$ 有自然的A模结构,于是也有R模结构.

虽然R-线性微分是值得研究的,但我们希望完全用A模同态来描述所有的微分.之前有过相同的处理方式:对于所有的R双线性映射,我们构造了具有一定泛性质的R模——张量积,在这里我们同样可以构造A模使得所有的R-线性微分被A模同态对应.

定义. 设R是交换环, A是R代数, 那么由 $\{d(f) \mid f \in A\}$ 生成的A模, 模去对任意 $f,g \in A,r,s \in R$

$$d(fg) - fd(g) - d(f)g$$
 (Leibnitz)
 $d(rf + sg) - rd(f) - sd(g)$ (R-linearity)

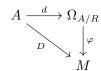
生成的理想,得到的A模称为R线性的A-Kähler微分模(the module of Kähler differentials of A over R),记为 $\Omega_{A/R}$.R线性映射

$$d: A \to \Omega_{A/R}$$
$$f \mapsto d(f)$$

称为泛R微分(universal R-linear derivation).通常,我们记df = d(f).

类似于张量积, $\Omega_{A/R}$ 满足如下泛性质:

引理0.1. 设R是交换环,A是R代数,微分模 $\Omega_{A/R}$ 使得对任意微分 $D:A\to M$,都存在唯一的A线性映射 $\varphi:\Omega_{A/R}\to M$ 使得



交换.

Proof. 首先证明唯一性.对任意 $\Omega_{A/R}$ 中的元素 $\sum_{i=1}^{n} a_i df_i$,根据 φ 的线性性

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i df_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(df_i).$$

但图的交换性说明 $df_i = D(f_i)$, 故

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i df_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i D(f_i).$$

这意味着 φ 的取值是固定的.

再证明存在性.我们定义

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i df_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i D(f_i),$$

于是需要验证(i) φ 是良定义的; (ii) φ 关于图是交换的.后一条根据定义是显然的,前一条因为使得D是R线性 微分的关系恰好由Leibnitz等式和R线性性生成,故良定义.

 $\Omega_{A/R}$ 的泛性质等价于存在自然的同构

$$\operatorname{Der}_R(A, M) \cong \operatorname{Hom}_A(\Omega_{A/R}, M),$$

自然的意义是通过态射替换A与M诱导了相应的交换图,具体来说,对任意R代数映射 $\varphi: B \to A$,下图

$$\operatorname{Der}_{R}(A, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{A}(\Omega_{A/R}, M)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\operatorname{Der}_{R}(B, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{B}(\Omega_{B/R}, M)$$

交换且对任意A模同态 $\psi: M \to N$,下图

$$\operatorname{Der}_{R}(A, M) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{A}(\Omega_{A/R}, M)$$

$$\downarrow \qquad \qquad \downarrow$$

$$\operatorname{Der}_{R}(A, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{A}(\Omega_{A/R}, N)$$

交换.

命题
$$0.1$$
. 若 R 是交换环且 $A:=R[x_1,\cdots,x_n]$,那么 $\Omega_{A/R}=igoplus_{i=1}^n Adx_i$.

Proof. 我们构造两个互逆的A模同态,来说明二者同构.首先,我们有显然的映射

$$\varphi: \bigoplus_{i=1}^n Adx_i \to \Omega_{A/R}$$
$$\sum_{i=1}^n a_i dx_i \mapsto \sum_{i=1}^n a_i dx_i.$$

另一方面,由 dx_i 的对偶基底诱导的线性函数给出了A的R线性微分 $\frac{\partial}{\partial x_i}$,令

$$\psi: \Omega_{A/R} \to \bigoplus_{i=1}^{n} A dx_{i}$$
$$h \mapsto \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x_{1}} \\ \vdots \\ \frac{\partial h}{\partial x_{n}} \end{bmatrix},$$

容易验证 φ 与 ψ 互为逆映射,故命题成立.

此外, $\Omega_{A/R}$ 本身关于A和R都是函子: 给定R代数态射 $\varphi: A \to B$,那么我们有诱导的R模态射

$$\Omega_{\varphi/R}: \Omega_{A/R} \to \Omega_{B/R}$$

 $df \mapsto d\varphi(f),$

事实上,由于 $B \in A$ 模,这个态射也是A模态射.另一方面,若 $R \xrightarrow{\varphi} S \xrightarrow{\psi} T$ 是环态射,那么也有态射

$$\Omega_{T/\varphi}:\Omega_{T/R}\to\Omega_{T/S}$$

$$dh\mapsto dh.$$

这是一个T模态射.考虑到 $\Omega_{T/R}$ 和 $\Omega_{T/S}$ 的定义,它们的生成元是相同的,且 $\Omega_{T/\varphi}$ 把生成元映到生成元,于是这是一个满态射,但一般而言这不是一个单态射,于是我们自然地希望知道这个映射的核.我们考虑这个态射不是单态射的原因:两个模拥有相同的生成元,Leibnitz法则也是一样的,但 $\Omega_{T/R}$ 需要模掉R线性关系, $\Omega_{T/S}$ 需要模掉S线性关系,因此出现了差别.模同态 $\Omega_{T/\varphi}$ 把R线性关系映为S线性关系,但是存在一些S线性关系不能成为R线性关系,于是这些关系就生成了 $\Omega_{T/\varphi}$ 的核.

任取 $\sum_{i=1}^{n} t_i df_i \in \Omega_{T/R}$, 若它不为0但被映为 $\Omega_{T/S}$ 中的0, 那么存在

命题0.2 (相对余切序列(Relative Cotangent Sequence)). $\ddot{z}R \to S \to T$ 是交换环态射,那么有T模正合序列

$$T \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S} \to 0$$

其中映射 $\Omega_{T/R} \to \Omega_{T/S}$ 将dh映到dh, 映射 $T \otimes_S \Omega_{S/R} \to \Omega_{T/R}$ 是系数变换, 即将 $t \otimes dg$ 映到 $td\psi(g)$.

在上同调理论中, 我们

命题**0.3** (余法序列(Conormal Sequence)). $\Xi \varphi: A \to B \not\in R$ 模满态射, 且具有核I, 那么有B模正合序列

$$I/I^2 \xrightarrow{d} B \otimes_A \Omega_{A/R} \xrightarrow{D\varphi} \Omega_{B/R} \to 0$$

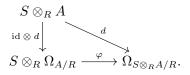
其中映射 $I/I^2 \xrightarrow{d} B \otimes_A \Omega_{A/R}$ 将f的等价类映到df, 映射 $B \otimes_A \Omega_{A/R} \xrightarrow{D\varphi} \Omega_{B/R}$ 将 $g \otimes df$ 映到gdf.

Proof.

设 $A = R[x_1, \cdots, x_n]/(f_1, \cdots, f_r)$ 是给定的R代数,那么余法序列告诉我们

$$\Omega_{A/R} = \operatorname{coker}(d: I/I^2 \to A \otimes_R \Omega_{R[x_1, \dots, x_n]/R} = \bigoplus_{i=1}^n Adx_i).$$

命题0.4. 微分模的构造与基变换交换,即给定交换环R和R代数S,A,存在同构 $\varphi:S\otimes_R\Omega_{A/R}\cong\Omega_{S\otimes_RA/R}$ 使得下图交换:



命题**0.5.** 微分模的构造与基变换交换,即给定交换环R和R代数S,A,存在同构 $\varphi:S\otimes_R\Omega_{A/R}\cong\Omega_{S\otimes_RA/R}$ 使得下图交换:

$$S \otimes_R A$$

$$id \otimes d \downarrow \qquad \qquad d$$

$$S \otimes_R \Omega_{A/R} \xrightarrow{\varphi} \Omega_{S \otimes_R A/R}.$$

定 理0.6 (Jacobi判 别 法). 设k是 给 定 的 域, $I=(f_1,\cdots,f_r)$ 是 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 中 的 理 想, $R:=k[x_1,\cdots,x_n]/I$. 若p是 $k[x_1,\cdots,x_n]$ 中包含I的素理想,c是 I_p 在 R_p 中的余维数,那么

1. Jacobi矩阵在模p的意义下秩小于c.

2. . . .

在微分几何当中,我们有自然引入的光滑性概念.但是在代数几何当中,光滑性的概念并不是自然存在的——我们所研究的几何空间可能存在奇点,因而需要重新引入光滑性的概念.一个问题在于同于微分几何的定义,在有足够的工具之前我们只能定义局部的光滑性,而微分模给出了光滑性本质的刻画.

定义. 设R.S是交换环, $f:R\to S$ 是环同态.如果对任意的交换环T和T的满足 $I^2=0$ 的理想I,只要下图



交换,就有至少一个(对应的,最多一个,恰有一个)环同态 $S \to T$ 使得整个图是交换的,则称f是形式光滑的(formally smooth)(对应的,形式不分叉的(formally unramified)和形式平展的(formally étale)).

引理0.2. 环同态 $f: R \to S$ 是形式不分叉的当且仅当 $\Omega_{S/R} = 0$.

引理**0.3.** 设环 $B:=R[x_1,\cdots,x_n]/(f_1,\cdots,f_r)$,记 $A:=R[x_1,\cdots,x_n]$, $I:=(f_1,\cdots,f_r)$.于是 $f:R\to T$ 是光滑的当且仅当

$$0 \to I/I^2 \xrightarrow{d} B \otimes_A \Omega_{A/R} \xrightarrow{D\pi} \Omega_{B/R} \to 0$$

是分裂正合的.