第一章　单纯对象

1.1　单纯集和单纯复形

设 n 是任意一个自然数. 定义 $[n]$ 是有 $n+1$ 个对象的小范畴，且其中的箭头是序列 $\{0 \to 1 \to \cdots \to n\}$. 设 $\boldsymbol{\Delta}$ 是所有 $[n]$ 组成的范畴，态射是 $[n]$ 到 $[m]$ 的函子. 这个范畴有非常具体的描述：定义 $[n]'$ 是 $n+1$ 元的全序集，其元素记为 $\{0 \leq 1 \leq \cdots \leq n\}$. 设 $\boldsymbol{\Delta}'$ 是所有 $[n]'$ 组成的范畴，态射是 $[n]'$ 到 $[m]'$ 的保序映射，即 $f : [n]' \to [m]'$ 满足 $i \leq j$ 必有 $f(i) \leq f(j)$. 证明 $\boldsymbol{\Delta}'$ 是一个范畴，且存在一个范畴的同构 $\boldsymbol{\Delta}' \to \boldsymbol{\Delta}$. 于是我们无意区分两个范畴，都称为*单纯范畴* (simplicial category) 或者*全序范畴* (ordering category)，也无意区分两个范畴不同的对象. 注意到

$$d^i_{n+1} : [n] \to [n+1]$$
$$k \mapsto \begin{cases} k, & k < i \\ k+1, & k \geq i. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & n \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & i+1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n+1
\end{tikzcd}$$

和

$$s^i_n : [n+1] \to [n]$$
$$k \mapsto \begin{cases} k, & k \leq i \\ k-1, & k > i. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[d] & i+1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & n+1 \arrow[dl] \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n &
\end{tikzcd}$$

都是范畴 $\boldsymbol{\Delta}$ 中的态射，且满足

$$\begin{aligned}
& d^j_{n+1} d^i_n = d^i_{n+1} d^{j-1}_n, && \forall\ i < j \\
& s^j_n s^i_{n+1} = s^i_n s^{j+1}_{n+1}, && \forall\ i \leq j \\
& s^j_n d^i_{n+1} = d^i_n s^{j-1}_{n-1}, && \forall\ i < j \\
& s^j_n d^i_{n+1} = \mathrm{id}_{[n]}, && i = j \text{ 或 } i = j+1 \\
& s^j_n d^i_{n+1} = d^{i-1}_n s^j_{n-1}, && \forall\ i > j+1.
\end{aligned}$$

其中，d^i 称为第 i 个对偶面映射 (coface map)，s^i 称为第 i 个对偶退化映射 (codegeneracy map).$\mathbf{\Delta}$ 中所有的态射都可以由 d^i 和 s^j 生成. 更准确地说，任意 $f \in \hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m])$ 有唯一的分解

$$f = d^{i_1} \circ \cdots \circ d^{i_r} \circ s^{j_1} \circ \cdots \circ s^{j_s},$$

其中 $m = n + r - s$，$i_1 < \cdots < i_r$ 且 $j_1 < \cdots < j_s$.

> **定义.** 一个单纯集 (simplicial set) 是一个反变函子 $X : \mathbf{\Delta}^\circ \to \mathbf{Set}$. 更一般地，范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个单纯对象 (simplicial object) 是反变函子 $X : \mathbf{\Delta}^\circ \to \mathcal{C}$. 对偶地，可以定义上单纯对象 (cosimplicial object) 是协变函子 $Y : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{C}$.

对单纯集 X，一般我们用 X_n 来表示集合 $X([n])$，且其中的元素称为 n 单形 (n-simplicies). 若 n 单形 $x \in X_n$ 满足存在 $y \in X_{n-1}$ 使得 $X(s^j)(y) = x$，则称 x 是退化的 (degenerate). 我们用 $\mathbf{sSet}$ 表示所有单纯集组成的范畴，其中对象间的态射是 $X \Rightarrow Y$ 的自然态射，具体来说，是对每个 n 都有一个集合间的态射 $f_n : X_n \to Y_n$，在 $\mathbf{\Delta}$ 的作用下保持不动.

对于一个单纯集 X，一般我们采用记号 $d_i := X(d^i) : X_{n+1} \to X_n$ 和 $s_j := X(s^j) : X_n \to X_{n+1}$，称为面映射和退化映射.

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "s^0"] & X_1 \arrow[l, shift right=3ex, "d^1"'] \arrow[l, shift left=3ex, "d^1"] \arrow[r, shift left=1ex, "s^1"] \arrow[r, shift right=1ex, "s^1"] & X_2 \arrow[r, "\pi_2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

习题 1.1.1. 设 X 是单纯集，记

$$X_n^{\mathrm{deg}} := \bigcup_{j=0}^{n-1} s_j(X_{n-1})$$

为 n 单形中的所有退化元素. 求证

$$X_n^{\mathrm{deg}} = \bigcup_{\substack{f:[n]\to[k] \\ f\neq \mathrm{id}}} X(f)(X_k).$$

例 1. *设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴，那么我们可以自然地定义一个单纯集 $N\mathcal{C}$，称为范畴 $\mathcal{C}$ 的神经 (nerve)，其中 $N\mathcal{C}_0$ 是集合 $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，$N\mathcal{C}_1$ 是集合 $\mathrm{mor}\,\mathcal{C}$，对任意 $n > 1$ 定义*

$$N\mathcal{C}_n := \{(f_n, \cdots, f_1) \mid f_i \in \mathrm{mor}\,\mathcal{C}\text{且}f_i\text{与}f_{i+1}\text{可复合为 }f_{i+1}f_i,\ \forall 1 \le i \le n\}.$$

通常，我们用相连的箭头

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

来表示 $N\mathcal{C}_n$ 中的元素. 这样当 $1 < i < n$ 我们有自然的面映射

$$\begin{aligned} d_i : N\mathcal{C}_n &\to N\mathcal{C}_{n-1} \\ (f_n, \cdots, f_{i+1}, f_i, \cdots, f_1) &\mapsto (f_n, \cdots, f_{i+1}f_i, \cdots, f_1), \end{aligned}$$

当 $i = 0, n$ 时，我们分别舍弃 A_0 和 A_n. 退化映射 $s_i : N\mathcal{C}_n \to N\mathcal{C}_{n+1}$ 是简单的，只要在第 i 项和第 $i+1$ 项之间加一个 A_i，取为 $A_i \xrightarrow{\mathrm{id}} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1}$. 之后我们会对范畴的神经进行更详细的讨论.

对于一个单纯集 $X:\mathbf{\Delta}^\circ\to\mathbf{Set}$，我们考虑它的元素范畴 $\int X$

例 2. 拓扑上，我们有一个上单纯集 $\Delta:\mathbf{\Delta}\to\mathbf{Top}$，事实上这个函子是我们定义单纯范畴的最初启发. 考虑函子 Δ 将 $[n]$ 映到标准 n 单形

$$\Delta^n=\{(x_0,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^{n+1}\mid x_0+\cdots+x_n=1,x_i\geq 0\},$$

对偶面映射 $d^i:\Delta^{n-1}\to\Delta^n$ 定义为将 Δ^{n-1} 映为第 i 个坐标为 *0* 的面，即 $(x_0,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_{n-1})\mapsto(x_0,\cdots,x_{i-1},0,x_i,\cdots,x_{n-1})$，对偶退化映射 $s^i:\Delta^{n+1}\to\Delta^n$ 将坐标 x_i 与 x_{i+1} 相加，即 $(x_0,\cdots,x_i,,x_{i+1}\cdots,x_{n+1})\mapsto(x_0,\cdots,x_i+x_{i+1},\cdots,x_{n+1})$.

设 X 是拓扑空间，这样就可以定义的单纯集 SX，其中 $(SX)_n$ 是所有连续映射 $\Delta^n\to X$，面映射

$$d_i:(SX)_{n+1}\to(SX)_n$$

将 $f:\Delta^{n+1}\to X$ 映到 $f\circ d^i:\Delta^n\to X$，退化映射

$$s_j:(SX)_{n-1}\to(SX)_n$$

将 $f:\Delta^{n-1}\to X$ 映到 $f\circ s^j:\Delta^n\to X.SX$ 被称为空间 X 的奇异复形 *(total singular complex)*，通常它给出了拓扑空间的奇异同调.

给定 $[n]$ 的一个非空子集 σ，定义 Δ_σ 为 Δ^n 中 $\{e_i\}_{i\in\sigma}$ 的凸包 *(convex hull)*，即

$$\Delta_\sigma:=\left\{\sum_{i\in\sigma}a_i\mathbf{e}_i\;\middle|\;\sum_{i\in\sigma}a_i=1,a_i\geq 0,\forall i\in\sigma\right\}\subseteq\Delta^n,$$

我们称 Δ_σ 为 Δ 的 σ 面 *(σ-face)*.$\mathbb{R}^n$ 中同胚于 Δ^n 中有限多个 σ 面的并的子空间称为多面体 *(polyhedron)*. 对于一个多面体 P，我们可以把它表达为不同的 σ 面的并，每一个这样的同胚被称为 P 的一个三角剖分 *(triangulation)*.

在拓扑中，对于一个空间我们会考虑它对应的单纯剖分，这样的一个单纯剖分通常被称为单纯复形. 非拓扑的情形下同样可以定义单纯复形，这样定义的单纯复形对应于一个拓扑空间的单纯剖分：

定义. 设 V 是一个集合，则 V 上的单纯复形 (simplicial complex)X 是 V 的一个非空有限子集族，满足 X 在取子集作用下闭，即

$$\forall\sigma\in X,\,\emptyset\neq\tau\subseteq\sigma\Rightarrow\tau\in X.$$

引理 1.1.1. 对于集合 V 上的单纯复形 X，如下构造的 $|X|$ 是一个拓扑空间，且具有被 X 描述的单纯剖分：

取定 $\mathbb{R}$ 线性空间 $\mathbb{V}:=\mathrm{span}_{\mathbb{R}}V$，对任意 $\sigma\in X$，令 Δ_σ 是由 $\sigma\subseteq V$ 生成的凸包. 那么

$$|X|:=\bigcup_{\sigma\in X}\Delta_\sigma\subseteq\mathbb{V}$$

与 $K:=\{i_\sigma:\Delta_\sigma\to|X|\}$ 构成一个拓扑单纯剖分，其中 $i_\sigma:\Delta_\sigma\to|X|$ 是自然的嵌入.

反过来，任意给定拓扑空间 X 的单纯剖分 K

单纯复形并不具有非常好的性质，比如单纯复形的商并不一定是单纯复形. 但是每一个单纯复形都对应一个单纯集，且我们能利用这个单纯集重新构造之前的单纯复形. 这意味着，单纯集可以看作单纯复形的自然推广.

定义. 给定全序集合 V 上的单纯复形 X，我们可以定义它对应的单纯集 $SS_*(X)$，其中

$$SS_n(X) := \{(v_0, \cdots, v_n) \mid \{v_0, \cdots, v_n\} \in X\},$$

对任意 $\mathbf{\Delta}$ 中的态射 $f : [m] \to [n]$，定义

$$\begin{aligned} SS(f) : SS_n(X) &\to SS_m(X) \\ (v_0, \cdots, v_n) &\mapsto (v_{f(0)}, \cdots, v_{f(n)}). \end{aligned}$$

习题 1.1.2. 这里我们要验证单纯复形可以完全地由它对应的单纯集给出，因而单纯集是更广泛的概念. 考虑习题 1.1.1中的定义，验证

$$SS_*(X)^{\text{nondeg}} \cong X.$$

习题 1.1.3. 在引理 1.1.1中我们证明了抽象单纯复形和拓扑单纯复形的一一对应. 在拓扑中有一个比单纯复形广泛一点的概念拟单纯复形 (semi-simplicial complex)，定义为

1.2 单纯集的伴随

1.2.1 Yoneda 引理

范畴理论中最重要的工具之一就是 Yoneda 引理. 我们记 $\hat{\mathcal{C}}$ 为范畴 $\mathbf{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})$，$h_B := \hom_{\mathcal{C}}(-, B)$，那么 Yoneda 引理表述如下：

定理 1.2.1 (Yoneda). 对任意局部小范畴 $\mathcal{C}$ 和函子 $F : \mathcal{C}^\circ \to \mathbf{Set}$，存在关于 F 和 $\mathcal{C}$ 都自然的同构

$$\varphi : \hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h_B, F) \cong F(B).$$

作为推论，当 $F = h_D$ 时，自然同构为

$$\hom_{\mathcal{C}}(B, D) = \hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h_B, h_D),$$

其中映射将态射 $f : B_1 \to B_2$ 映到 $h(f) = \hom_{\mathcal{C}}(f, D)$. 考虑函子

$$\begin{aligned} h : \mathcal{C} &\to \hat{\mathcal{C}} \\ B &\mapsto \hom_{\mathcal{C}}(-, B) \\ (f : B_1 \to B_2) &\mapsto h(f), \end{aligned}$$

Yoneda 引理说明这是一个满忠实的函子，我们称其为 Yoneda 函子.

注意到任意一个单纯集是一个到集合范畴的函子，故我们可以对其应用 Yoneda 引理. 由定义显然有 $\hat{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{sSet}$. 考虑 $h_{[n]} := \hom_{\mathbf{\Delta}}(-,[n])$，这些函子都是单纯集，具体说来，我们需要确定面映射和退化映射：面映射 $d_i : h_{[n]}([k]) \to h_{[n]}([k-1])$ 是 **Set** 中 d^i 的前置复合，即

$$d_i : h_{[n]}([k]) \to h_{[n]}([k-1]) = \{[k] \xrightarrow{f} [n]\} \mapsto \{[k-1] \xrightarrow{d^i} [k] \xrightarrow{f} [n]\},$$

类似地退化映射 s_i 是 **Set** 中 s^i 的前置复合. 同时，Yoneda 函子的满忠实性说明

$$\hom_{\mathbf{\Delta}}([k],[n]) \cong \hom_{\mathbf{sSet}}(h_{[k]}, h_{[n]}),$$

即 $h_{[k]}$ 到 $h_{[n]}$ 的所有自然变换由 $\mathbf{\Delta}$ 中的态射 $[k] \to [n]$ 所决定，因此所有的 $h_{[n]}$ 在一起组成一个上单纯集.

定义. 单纯集

$$h_{[n]} := \hom_{\mathbf{\Delta}}(-,[n])$$

被称为标准 n 单形 (standard n-simplex).

引理 1.2.1. 设 X 是单纯集，函子

$$\begin{aligned} \mathbf{sSet} &\to \mathbf{Set} \\ X &\mapsto X([n]) \end{aligned}$$

是可表的，其代表是标准 n 单形 $h_{[n]}$.

如果我们考虑更一般情形的 Yoneda 引理，我们有自然同构

$$\hom_{\mathbf{Set}}(h_{[n]}, X) \cong X([n]).$$

于是任意给定一个 n 单形 $x \in X([n])$，我们有一个自然变换

$$h_{[n]} \Rightarrow X$$

与之对应，而它在面映射下的象 $d_i(x) \in X([n-1])$ 则对应于自然态射

$$h_{[n-1]} \xrightarrow{d^i} h_{[n]} \Rightarrow X.$$

命题 1.2.2 (稠密性定理)**.** 令 $\int X$ 是单纯集 X 的元素范畴，则以 $\int X$ 为图的余极限满足

$$\operatorname{colim}_{x \in X_n} h_{[n]} \cong X.$$

1.3 小范畴的神经