# 层及其上同调

Guanyu Li
感谢Ju Tan的阅读和错误修正

## 1　层的基本理论

在几何中，我们经常遇到从局部性质到整体性质的过渡，例如我们在讲光滑函数时对光滑性的定义是局部的，但光滑性可以是整体的性质；任意一个流形都是局部可定向的，但一个流形并不一定是整体可定向的.在从局部到整体的过渡中，我们通常使用的方法是局部坐标，当局部坐标满足一定性质时我们可以找到更大的坐标，这个更大的坐标限制到小的坐标上与原来小的坐标有相同的性质.如果将这样的过程抽象出来就是层的构造.

### 1.1　预层与层的基本性质

**定义.** 设$X$是一个拓扑空间.对$X$的每个开集$U$，我们赋予其一个Abel群$\mathscr{F}(U)$，并且对任意满足$V\subseteq U$的开集$U,V$，存在映射$\rho_V^U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$，满足如下条件：

(i) $\mathscr{F}(\emptyset)=0$；

(ii) $\rho_U^U=\mathrm{id}_{\mathscr{F}(U)}$；

(iii) 对所有满足$W\subseteq V\subseteq U$的开集$U,V,W$，$\rho_W^V\circ\rho_V^U=\rho_W^U$；

这样的在拓扑空间$X$上的结构$\mathscr{F}$我们称为**预层**(presheaf)，$\mathscr{F}(U)$中的元素称为开集$U$的**截面**(section)，映射$\rho_V^U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$称为**限制映射**(restriction map).

**例1.** *设$X$是一个复流形，$\mathscr{M}$是如下定义的**亚纯函数层**(sheaf of meromorphic functions)*

$$\mathscr{M}(U):=\{f:U\to\mathbb{C}\mid f\text{是亚纯的}\},$$

*且对于任意$f\in\mathscr{M}(U)$和开集$V\subseteq U$，定义$\rho_V^U(f)$是$f$在$V$上的限制，则$\mathscr{M}$是$X$上的预层.*

在上面的例子中，预层$\mathscr{M}$的限制同态确实是函数的限制——但通常而言，限制同态可以是任意的映射.对于元素$s\in\mathscr{F}(U)$，我们也用通常的限制记号：$s|_V:=\rho_V^U(s)$，然而这一般与真正函数的限制很不同.

注意到任意的拓扑空间$X$可以自然地成为一个范畴$\mathbf{Open}(X)$，这样每个预层都是一个反变函子$\mathbf{Open}(X)\rightrightarrows\mathbf{Ab}$，可以想到的是，我们并不需要将函子的值域限定为$\mathbf{Ab}$，其他任意合理的范畴都可以得到有用的预层.当值域范畴为$\mathbf{Ab}$、$\mathbf{Ring}$、$R-\mathbf{Mod}$时，我们分别称$\mathscr{F}$为$X$上的Abel群预层、环预层和$R$模预层.

这种对于预层的理解还有其他的好处——我们可以非常容易地定义预层之间的**态射**(morphism)——一个预层的态射就是函子间的自然变换.如果我们显式地将预层态射$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$的定义写出来，即是对任意$X$中的开集$V \subseteq U$，我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\theta_V^U"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathscr{G}(V), \end{tikzcd}$$

其中$\rho_V^U, \theta_V^U$分别是预层$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$的限制映射.这样对于拓扑空间$X$，我们得到了一个范畴$\mathbf{PShAb}(X)$，其对象是$X$上的Abel群预层，态射是预层的态射.

**例2.** *设$X$是任意的拓扑空间，$M$是任意的Abel群，对开集$U$定义$M_X(U) = M$对于满足$V \subseteq U$的开集，限制映射都是恒等映射，则$M_X$是一个预层，称为常预层(constant sheaf).如果$N$也是一个Abel群，$\varphi : M \to N$是群同态，则我们自然地有预层的映射*

$$\varphi_X : M_X \to N_X,$$

*定义为*

$$(\varphi_X)_U := \varphi : M_X(U) \to N_X(U).$$

**例3.**

**例4.**

预层的结构中蕴含了空间上“函数”的很多局部信息，对于一个预层我们有专门的结构刻画这样的信息：

**定义.** 设$\mathscr{F}$是拓扑空间$X$上的预层，那么称

$$\mathscr{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U)$$

为$\mathscr{F}$在点$x$处的**茎**(stalk)，其中$U$取遍所有包含点$x$的开集，正向系中的态射由限制态射给定.

根据正极限的定义，对于任意包含$x$的开集$U$，存在自然的态射$\rho_x^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$使得与正向系相容，即对于满足$V \subseteq U$的开集，

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_V^U"'] \arrow[dr, "\rho_x^U"] & \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\rho_x^V"'] & \mathscr{F}_x. \end{tikzcd}$$

为简化记号，通常对于截面$s \in \mathscr{F}(U)$，我们记$s_x := \rho_x^U(s)$.同样地，余极限的函子性告诉我们，对于任意$X$中的点$x$，若$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层间的态射，那么有诱导的点$x$处茎的态射

$$\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$$

使得对任意开集$U$有如下交换图

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "(\rho_{\mathscr{F}})^U_x"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "(\rho_{\mathscr{G}})^U_x"] \\ \mathscr{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathscr{G}_x, \end{tikzcd}$$

因此，我们有$\varphi_x(s_x) = \varphi_U(s)_x$.

**习题1.1.** 证明我们有如下的显式构造：

$$\mathscr{F}_x \cong \left( \prod_{x\in U} \mathscr{F}(U) \right) / \sim,$$

其中，若$s \in \mathscr{F}(U), t \in \mathscr{F}(V)$的等价关系$s \sim t$定义为存在包含于$U \cap V$的$x$的邻域$W$使得$s|_W = t|_W$.

**例5.** *设$M$是给定的$Abel$群，$x \in X$是拓扑空间中的一个点，定义预层$M(x)$满足*

$$M(x)(U) := \begin{cases} M & x \in U \\ 0 & x \notin U, \end{cases}$$

*限制态射要么是恒等映射要么是零映射.如果我们计算$M(x)$在点$y$的茎，*

但是，预层并不是我们所希望的定义在拓扑空间上的代数结构.多数情况下我们希望的是从局部的信息中可以得到足够的整体信息，并且整体能够得到的信息一定程度上完全由局部信息得到，于是我们有下面的定义：

**定义.** 设$\mathscr{F}$是拓扑空间$X$上的预层，如果$\mathscr{F}$满足如下条件：

(i) （局部性(locality)）若$\{U_i\}_{i\in I}$是开集$U$的一族开覆盖，$s, t \in \mathscr{F}(U)$满足对于任意$i \in I$都有$s|_{U_i} = t_{U_i}$成立，则$s = t \in \mathscr{F}(U)$；

(ii) （粘合条件(gluing)）若$\{U_i\}_{i\in I}$是开集$U$的一族开覆盖，一族元素$s_i \in \mathscr{F}(U_i)$满足$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$，那么存在$s \in \mathscr{F}(U)$使得$s|_{U_i} = s_i$成立；

则称$\mathscr{F}$为$X$上的**层**(sheaf).

定义的合理性告诉我们并不是所有的预层都是层，对于某些拓扑空间$X$，常预层就不是层.但是，某些定义的预层本身就是层，如下例.最重要的是层的行为形态非常类似于全体可定义的函数，因此函数的全体必然是层.

**例6.** *例1中的构造是一个层，更一般地，如果$X$是拓扑空间，*

**例7.** *若$\mathscr{F}$是拓扑空间$X$上的预层，$U$是开集，那么我们可以定义$\mathscr{F}$在$U$上的限制，记为$\mathscr{F}|_U$，它是$U$上的层，对任意$U$中的开集$V$，定义*

$$\mathscr{F}|_U(V) = \mathscr{F}(U \cap V) = \mathscr{F}(V),$$

*且对应$W \subseteq V$的限制同态$\mathscr{F}|_U(V) \to \mathscr{F}|_U(W)$定义为限制同态$\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(W)$.明显的事实是，$\mathscr{F}|_U(V) \to \mathscr{F}|_U(W)$是预层，并且如果$\mathscr{F}$是层则$\mathscr{F}|_U(V) \to \mathscr{F}|_U(W)$也是层.*

更抽象一些地，我们可以用图的语言描述层公理：若$\{U_i\}_{i\in I}$是开集$U$的一族开覆盖，那么层公理等价于下图

$$\mathscr{F}(U) \to \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$$

$$s_i \mapsto s_i|_{U_i\cap U_j}$$

是一个等值子（equatlizer）.

**习题1.2.** 证明上述等价性.

*Proof.* □

层之间的态射与预层之间态射的定义相同，即对于层$\mathscr{F},\mathscr{G}$，$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是层态射当且仅当$\varphi$是预层的态射.这意味着我们可以定义范畴$\mathbf{ShAb}(X)$，且它是$\mathbf{PShAb}(X)$的满子范畴.在之后的内容我们会看到，当我们选取的范畴$\mathcal{A}$是Abel范畴时，$\mathbf{PSh}\mathcal{A}(X)$也是一个Abel范畴.

局部性可以用茎的语言来描述：

**命题1.1.** 设$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是拓扑空间$X$上层的态射，那么$\varphi$是同构当且仅当对于任意$x\in X$，诱导的$\varphi_x:\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x$都是同构.

对层这种构造的一种理解方式是说，它是弯曲空间上满足一定性质的“函数”的全体，不同性质的选取决定了层结构的不同.

**习题1.3.** 设$\mathscr{F}$是拓扑空间$X$上的一个预层，则下面的构造给出一个拓扑空间，其中底集$\bar{\mathscr{F}}=\coprod_{x\in X}\mathscr{F}_x=\{(x,s_x)\mid x\in X, s_x\in\mathscr{F}_x\}$是所有茎的不交并，并对任意给定$X$中的开集$U$和$s\in\mathscr{F}(U)$给定如下一组拓扑基

$$(U,s):=\{(x,s_x)\mid x\in U\}.$$

求证：

(i) 存在自然的连续映射$\pi:\bar{\mathscr{F}}\to X$，将点$(x,s_x)$映到$x$.并且，对任意的开集$U$和$s\in\mathscr{F}(U)$，存在$\pi$在$U$上的截面(section)$\sigma:U\to\bar{\mathscr{F}}$（截面是指连续函数$\sigma$使得$\pi\circ\sigma$是$U$上的恒等函数）.记对应$\mathscr{F}$的$U$上所有截面为$\Gamma(U,\mathscr{F})$.

(ii) 反之，若$\mathscr{F}$还是层，求证任意$U$上的截面$\sigma$都是如上述方式构造的.

(iii) 由上证明若$\mathscr{F}$是层，则$\pi:\bar{\mathscr{F}}\to X$的连续函数截面层同构于$\mathscr{F}$.

(iv) 若$\mathscr{G}$也是拓扑空间$X$上的一个预层，$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是预层的态射，证明$\varphi$诱导了$\bar{\mathscr{F}}\to\bar{\mathscr{G}}$的连续映射.

空间$\bar{\mathscr{F}}$称为预层$\mathscr{F}$的平展空间(étale space).

*Solution.* (i) 根据定义，$\pi$显然是连续的.定义$\sigma:x\mapsto(x,s_x)$，注意到$\sigma^{-1}(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}\sigma^{-1}(A_i)$，因而为证明$\sigma$是连续的只需要证明对任意的$X$中的开集$V$，$\sigma^{-1}((V,t))$也是开集即可.但是若$t=s$则$\sigma^{-1}((V,t))=\sigma^{-1}((V,s))=V\cap U$，若$t\neq s$则$\sigma^{-1}((V,t))=\emptyset$.故得证.

(ii) 设$\sigma : U \to \bar{\mathscr{F}}$是$U$上的截面，于是对于任意的$x \in U$，存在$s \in \mathscr{F}(U)$使得$\sigma(x) = (x, s_x)$.若$x, y$是$U$中的两个点，$\sigma(x) = (x, s_x)$且$\sigma(y) = (y, t_y)$.根据芽的定义，我们可以找到$x, y$的邻域$V, W$使得$s \in \mathscr{F}(V), t \in \mathscr{F}(W)$.考虑开集

$$(V, s) = \{(z, s_z) \mid z \in V\}$$

和

$$(W, t) = \{(z, t_z) \mid t \in W\},$$

根据$\sigma$的连续性，$\tilde{V} := \sigma^{-1}((V, s))$和$\tilde{W} := \sigma^{-1}((W, t))$都是$U$中的非空开集，分别包含$x$和$y$.对于任意$z \in \tilde{V} \cap \tilde{W}$，由$\sigma$的映射性$(z, s_z) = \sigma(z) = (z, t_z)$，故存在$z$的一个邻域$O \subseteq \tilde{V} \cap \tilde{W}$使得$s|_O = t|_O$.但是$z$是任取的，故$s|_{\tilde{V} \cap \tilde{W}} = t|_{\tilde{V} \cap \tilde{W}}$.这样我们就得到了$U$的一个开覆盖，且在开集重合的部分截面是相容的.根据层公理，存在唯一的$r \in \mathscr{F}(U)$使得$\sigma(x) = (x, r_x)$.

(iii) 记$\mathscr{F}'$为$\pi : \bar{\mathscr{F}} \to X$的截面层.定义

$$\begin{aligned} \theta : \mathscr{F} &\to \mathscr{F}' \\ \theta_U : \mathscr{F}(U) &\to \mathscr{F}'(U) \\ s &\mapsto \sigma(x \mapsto (x, s_x)), \end{aligned}$$

于是我们需要验证对任意的开集$U$，$\theta_U$是群同构，且对任意满足$V \subseteq U$的开集$U, V$都有图

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(U) & \xrightarrow{\theta_U} & \mathscr{F}'(U) \\ {\scriptstyle \rho_V^U}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle |_V} \\ \mathscr{F}(V) & \xrightarrow{\theta_V} & \mathscr{F}'(V), \end{array}$$

交换，其中$|_V$是$U$上函数在$V$的限制.

对于$\mathscr{F}'(U)$中的截面$\sigma, \tau$，$\sigma + \tau$的定义是$\sigma + \tau : x \mapsto (x, s_x + t_x)$，其中$\sigma(x) = (x, s_x)$，$\tau(x) = (x, t_x)$.于是，同态性由正极限的性质保证，再根据前一部分$\theta_U$是同构，其中，层公理的局部性对应$\theta$的单射性，在局部性的存在下粘合条件等价于满射（充分性由前一部分证明，必要性考虑到截面本质上是映射，是自动满足粘合条件的）.任取$x \in V$和$s \in \mathscr{F}(U)$，正极限保证$s_x = (s|_V)_x$，这即是图的交换性.

(iv) 定义

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \bar{\mathscr{F}} &\to \bar{\mathscr{G}} \\ (x, s_x) &\mapsto (x, \varphi_x(s_x)), \end{aligned}$$

于是我们只要证明函数是连续的即可.对$\bar{\mathscr{G}}$的任意$X$中的开集$U$，若$t$是$\mathscr{G}(U)$中的截面，则对于$(U, t)$中的任意点$(x, t_x)$，若它在$\bar{\varphi}$的像中，则存在$(x, s_x) \in \mathscr{F}_x$使得$\varphi_x(s_x) = t_x$.这意味着，存在$x$的邻域$W$使得$\varphi_W(s)|_{W \cap U} = t|_{W \cap U}$.于是，开集基中的元素$(W \cap U, s|_{W \cap U})$包含于$\bar{\varphi}$的原像中，故

$$\varphi^{-1}((U, t)) = \coprod_{W\text{是}U\text{中的开集，且}s \in \mathscr{F}(W)\text{满足}\varphi_W(s) = t|_W} (W, s),$$

按照定义这是一个开集. □

**习题1.4.** 设$\varphi_i : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是拓扑空间$X$上层的态射，$i = 1, 2$，且对于任意$x \in X$，都有$(\varphi_1)_x = (\varphi_2)_x$，证明$\varphi_1 = \varphi_2$.

## 1.2 层化

对于一个预层$\mathscr{F}$和$X$中的开集$U$，我们可以定义

$$\tilde{\mathscr{F}}(U) := \{s : U \to \coprod_{x\in U} \mathscr{F}_x \mid s\text{满足公理(i)和(ii)}\}$$

其中

(i) 对每个$U$中的点$x$，$s(x) \in \mathscr{F}_x$；

(ii) 对每个$U$中的点$x$，都存在开邻域$V \subseteq U$和截面$t \in \mathscr{F}(V)$使得对于所有的$y \in V$都有$s(y) = t_y$.

对于$\mathscr{F}$中的任意截面$s \in \mathscr{F}(U)$，我们都可以定义一个映射$\tilde{s} : U \to \coprod_{x\in U} \mathscr{F}_x, y \mapsto s_y$.显然$\tilde{s} \in \tilde{\mathscr{F}}(U)$，因此我们定义了一个预层的态射$\zeta : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$.

**命题1.2.** *若预层$\mathscr{F}$是层，则$\zeta : \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$是层的同构.*

如果尽可能具体地解释层化，这个构造就是把原本没有的截面加到层的对象当中去，进而形成我们需要的足够多的粘合信息，而我们是局部来完成这个扩充的.刚刚我们介绍的层化事实上就是用一个点的局部信息（茎）去构造相应的函数，可以说层公理所描述的本质信息就是一定类型的函数.我们对于层化的定义满足如下的泛性质和函子性：

**命题1.3** (函子性). *设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层的态射，那么存在层态射$\tilde{\varphi} : \tilde{\mathscr{F}} \to \tilde{\mathscr{G}}$使得下面的图交换：*

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\zeta_{\mathscr{F}}"'] & \mathscr{G} \arrow[d, "\zeta_{\mathscr{G}}"] \\ \tilde{\mathscr{F}} \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \tilde{\mathscr{G}}. \end{tikzcd}$$

*Proof.* 对任意$X$中的开集$U$，考虑点$x \in U$和截面$s \in \tilde{\mathscr{F}}(U)$，我们定义

$$\tilde{\varphi}_U(s)(x) := \varphi_x(s(x)).$$

我们需要验证定义是层的态射，并验证图的交换性. □

**推论1.3.1** (泛性质). *设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层的态射，若$\mathscr{G}$是层，则存在Abel群的同构*

$$\hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \cong \hom_{\mathbf{ShAb}(X)}(\tilde{\mathscr{F}}, \mathscr{G}).$$

事实上，我们并不需要拓扑空间$X$中所有开集$U$所对应的对象$\mathscr{F}(U)$，如果给定$X$的一组基$\mathscr{B}$中所有所有开集$U$对应的对象$\mathscr{F}(U)$，并且这些对象满足层公理，那么我们存在唯一的$X$上的层：

**定理1.4** ($\mathscr{B}$-层). 设$\mathscr{B}$是拓扑空间$X$的一组开集基，对于每个$U,V\in\mathscr{B}$，存在$Abel$群$\mathscr{F}(U)$和限制同态$\rho_V^U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$满足预层公理和层公理，那么称$\mathscr{F}$是一个$\mathscr{B}$-层($\mathscr{B}$-*sheaf*).于是

1. 任意$\mathscr{B}$-层都可以唯一地扩张为一个$X$上的$Abel$群层.
2. 给定$X$上的两个$\mathscr{B}$-层$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$，且对每个$\mathscr{B}$中的开集$U$都有群态射

$$\varphi_U:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{G}(U)$$

与$\mathscr{B}$-层的限制态射相容，那么存在唯一的层态射$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是$\mathscr{B}$-层的扩张.

*Proof.* 对任意$X$中的开集$V$，定义

$$\mathscr{F}(V):=\varprojlim_{U\in\mathscr{B}\text{满足}U\subseteq V}\mathscr{F}(U),$$

其中逆向系中的态射由限制态射给定.我们需要证明：(i)该定义与原定义相容；(ii)若$V\subseteq W$，则存在$\rho_V^W:\mathscr{F}(W)\to\mathscr{F}(V)$与原有的限制函数相容，且新构造的限制函数间也相容；(iii) (i)由极限的定义即可得到.(ii)可以由极限的函子性推得. □

**推论1.4.1** (层的粘合原理). 设$\mathcal{U}$是拓扑空间$X$的开覆盖.若对任意$\mathcal{U}$中的开集$U$，$\mathscr{F}_U$都是$U$上的层，并且

$$\varphi_{U,V}:\mathscr{F}_U|_{U\cap V}\to\mathscr{F}_V|_{U\cap V}$$

都是同构，在$U\cap V\cap W$上满足

$$\varphi_{V,W}\circ\varphi_{U,V}=\varphi_{U,W},$$

则存在唯一的$X$上的层$\mathscr{F}$使得有层的同构$\psi:\mathscr{F}|_U\to\mathscr{F}_U$且满足如下相容性：对任意$U,V\in\mathcal{U}$

$$\varphi_{U,V}\circ\psi_U|_{U\cap V}=\psi_V|_{U\cap V}:\mathscr{F}|_{U\cap V}\to\mathscr{F}_V|_{U\cap V}.$$

*Proof.* 我们将验证如下论断：(i) 被$\mathcal{U}$中的开集包含的所有的开集构成$X$的一组拓扑基$\mathscr{B}$；(ii) 所给出的粘合条件自然地给出了一个$\mathscr{B}$-层，于是根据定理1.4存在性和唯一性都得证.

(i) 这是一个单纯的拓扑问题，我们略过证明. □

引入层化后我们其实有了对于层更进一步的认识——层完全由每点上的茎完全决定，而决定的方式就是寻找连续的截面（习题1.5）.在英语中，sheaf一词的含义是“a bundle of stalks”，即一捆稻谷，我们想象

**习题1.5.** 设$\mathscr{F}$是拓扑空间$X$上的预层.证明平展空间$\bar{\mathscr{F}}$的截面层$\mathscr{F}'$同构于$\mathscr{F}$的层化.

*Proof.* 在习题1.3中我们定义了预层的态射

$$\begin{aligned}\theta:\mathscr{F}&\to\mathscr{F}'\\ \theta_U:\mathscr{F}(U)&\to\mathscr{F}'(U)\\ s&\mapsto\sigma(x\mapsto(x,s_x)),\end{aligned}$$

于是只要证明$\mathscr{F}'$的泛性质就能够说明同构.设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层到层的态射，于是根据习题1.3我们有连续映射$\bar{\varphi} : \bar{\mathscr{F}} \to \bar{\mathscr{G}}$，进而对于任意的截面$s : U \to \bar{\mathscr{F}}$，$\bar{\varphi} \circ s$也是$U$上的截面，这样我们定义了

$$\begin{aligned} \varphi' : \mathscr{F}' &\to \mathscr{G}' \cong \mathscr{G} \\ \varphi'_U : \mathscr{F}'(U) &\to \mathscr{G}'(U) \\ s &\mapsto \bar{\varphi} \circ s. \end{aligned}$$

$\varphi'_U$是群同态由由$\varphi$的预层的态射性保证，而它显然与两个层的限制态射相容，于是我们得到了层的态射.

再证明唯一性.假设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层到层的态射，层态射$\tilde{\varphi} : \mathscr{F}' \to \mathscr{G}$满足

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}' \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \mathscr{G} \\ \mathscr{F}. \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

任取$\sigma \in \mathscr{F}'(U)$，即截面$\sigma : U \to \bar{\mathscr{F}}$，对任意$x \in U$，若$\sigma(x) = (x, s_x)$，那么任取$\sigma_x$的代表元$\tau$，于是存在$W \subseteq U$使得$\sigma|_W = \tau|_W$，因此$\tau(x) = (x, s_x)$，于是可以定义$\eta_x : (\mathscr{F}')_x \to \mathscr{F}_x$，$\sigma_x \mapsto s_x$.根据截面加法的定义，这显然是一个群态射.一方面，我们显然有$\eta_x \circ \theta_x = \mathrm{id}_{\mathscr{F}_x}$.另一方面，仍然假定$\sigma(x) = (x, s_x)$，那么由连续性$V = \sigma^{-1}((U, s))$是$U$中的非空开集，这意味着对任意$y \in V$，$\sigma(y) = (y, s_y)$，于是$\sigma|_V = \theta(s)|_V$，$\theta_x(s_x) = \sigma_x$.因此，$\theta_x \circ \eta_x = \mathrm{id}_{(\mathscr{F}')_x}$.再根据习题1.4，$\tilde{\varphi}$是唯一确定的. □

## 1.3 底空间变换

这一节我们考虑这样的问题，

**定义.** 设$f : X \to Y$是拓扑空间的连续映射，如果$\mathscr{F}$是$X$上的预层，则如下定义的

$$\begin{aligned} f_*\mathscr{F} : \mathbf{Open}(Y) &\rightrightarrows \mathbf{Ab} \\ U &\mapsto f_*\mathscr{F}(U) := \mathscr{F}(f^{-1}(U)) \end{aligned}$$

是一个预层，称为预层$\mathscr{F}$的**推出**(pushfroward).

对于$Y$中的开集$V \subseteq U$，我们定义限制同态$f_*\mathscr{F}(U) \to f_*\mathscr{F}(V)$是$\mathscr{F}(f^{-1}(U))$到$\mathscr{F}(f^{-1}(V))$的限制同态，即若$s \in f_*\mathscr{F}(U)$，则

$$s|_V = (s \in \mathscr{F}(f^{-1}(U)))|_{f^{-1}(V)}.$$

**引理1.1.** *设$f : X \to Y$是拓扑空间的连续映射，如果$\mathscr{F}$是$X$上的层，则推出$f_*\mathscr{F}$是$Y$上的层.*

*Proof.* 任取$Y$中的开集$V$，设$\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$是$V$的开覆盖，那么$\mathcal{U} = \{U_i := f^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$是$U := f^{-1}(V)$的开覆盖.于是，若给定$s_i \in f_*\mathscr{F}(V_i) = \mathscr{F}(U_i)$，满足$s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$，于是$s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$.由$\mathscr{F}$是层得知存在唯一的$s \in \mathscr{F}(U)$使得$s|_{U_i} = s_i$.按照层推出的定义，这个$s$就是$f_*\mathscr{F}(V)$中要找的唯一的元素，故$f_*\mathscr{F}$是层. □

如果我们还有一个$X$上的预层态射$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$，则对于任意的$Y$中的开集$U$，同态映射$\varphi_{\varphi^{-1}(U)}:\mathscr{F}(\varphi^{-1}(U))\to\mathscr{G}(\varphi^{-1}(U))$和限制映射$\rho^{\varphi^{-1}(U)}_{\varphi^{-1}(V)}$相容，于是$\varphi_{\varphi^{-1}(U)}:\mathscr{F}(\varphi^{-1}(U))\to\mathscr{G}(\varphi^{-1}(U))$自然地可以看作$\varphi_{\varphi^{-1}(U)}:f_*\mathscr{F}(U)\to f_*\mathscr{G}(U)$，这样我们说明了$f_*\varphi$是预层态势$f_*\mathscr{F}\to f_*\mathscr{G}$.如果还有$\psi:\mathscr{G}\to\mathscr{H}$，那么很明显地有$f_*(\psi\circ\varphi)=f_*\psi\circ f_*\varphi$.于是$f_*$是一个函子$\mathbf{PShAb}(X)\rightrightarrows\mathbf{PShAb}(Y)$.

**习题1.6.** 设$f:X\to Y$和$g:Y\to Z$是两个连续映射，那么

$$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*.$$

**定义.** 设$f:X\to Y$是拓扑空间的连续映射，如果$\mathscr{G}$是$Y$上的预层，则如下定义的

$$\begin{aligned} f_P\mathscr{G}:\mathbf{Open}(X)&\rightrightarrows\mathbf{Ab}\\ V\mapsto f_P\mathscr{G}(U)&:=\varinjlim_{\substack{V\in\mathbf{Open}(Y)\\ f(U)\subseteq V}}\mathscr{G}(V)\end{aligned}$$

是一个预层，称为预层$\mathscr{G}$的**拉回**(pullback).

**引理1.2.** *设$X$和$Y$是拓扑空间，$f:X\to Y$是连续映射，那么下面的同构关于$\mathscr{G}$和$\mathscr{F}$是自然的：*

$$\hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(f_P\mathscr{G},\mathscr{F})\cong\hom_{\mathbf{PShAb}(Y)}(\mathscr{G},f_*\mathscr{F}).$$

*Proof.* 我们首先证明同构.设$\varphi\in\hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(f_P\mathscr{G},\mathscr{F})$，于是任意给定$X$中的开集，按照极限的定义，$\varphi_U:f_P\mathscr{G}(U)\to\mathscr{F}(U)$完全由一族相容的态射

$$\varphi_V:$$

其中$V$取遍所有包含$f(U)$的开集. □

与推出不同的是，即使$\mathscr{G}$是$Y$上的层，$f_P\mathscr{G}$也可能并不是一个层，但作为预层，层的拉回也有很好的函子性质.我们称$f_P^{-1}\mathscr{G}$的层化为$\mathscr{G}$的**逆象层**(inverse sheaf)，记为$f^{-1}\mathscr{G}$.

**定义.** 设$X$是拓扑空间，$\mathscr{F}$是$X$上的层

## 1.4 层范畴及其中的正合性

设$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是空间$X$上预层的态射，

**习题1.7** (层的零扩张)**.** 设$X$是拓扑空间，$Z$是$X$的闭集，$i:Z\to X$是嵌入映射.令$U:=X-Z$是$Z$在$X$中的补集，$j:U\to X$是嵌入映射.

1. 设$\mathscr{F}$是$Z$上的层，证明

$$(i_*\mathscr{F})_P=\begin{cases}\mathscr{F}_P & P\in Z\\ 0 & P\notin Z.\end{cases}$$

于是我们称$i_*\mathscr{F}$是$\mathscr{F}$在$X$上的零扩张.

2. 设$\mathscr{G}$是$U$上的层，定义$X$上的层$\mathscr{G}$满足对任意$X$中的开集$V$，

$$j_!\mathscr{G}(V) := \begin{cases} \mathscr{G}(V) & V \subseteq U \\ 0 & \text{其他情况}. \end{cases}$$

证明

$$(j_!\mathscr{G})_x = \begin{cases} \mathscr{G}_x & x \in U \\ 0 & \text{其他情况}, \end{cases}$$

并且证明$j_!\mathscr{G}$是满足以上条件且限制在$U$上是$\mathscr{G}$的唯一一个层.

3. 现在假设$\mathscr{F}$是$X$上的层，证明我们有如下层的正合列：

$$0 \to j_!(\mathscr{F}|_U) \to \mathscr{F} \to i_*(\mathscr{F}|_Z) \to 0.$$

# 2 Čech上同调

之前的理论中我们建立了层的上同调理论，但我们面临一个相当严重的问题——对于一个给定的层，它的上同调几乎是不可计算的. Čech上同调的主要思想是我们考虑拓扑空间中开覆盖所包含的组合信息，

设$X$是拓扑空间，$\mathscr{F}$是$X$上的层，$\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha\in\Gamma}$是$X$的一族开覆盖.