射影空间

Guanyu Li

1 定义与基本概念

定义. 给定一个分次环 $S=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S_n$，令 $S_+=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} S_n$，我们可以做构造 Proj S 使得它成为一个概型：其中它的底拓扑空间

$$|\text{Proj } S| := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}\text{是 } S \text{ 的齐次素理想且不包含} S_+\},$$

称 $|\text{Proj } S|$ 中的理想为相关素理想 (relavant prime ideal)，对任意齐次理想 I，

$$V_+(I) := \{\mathfrak{p} \mid \mathfrak{p}\text{是相关素理想且} I \subseteq \mathfrak{p}\}$$

是 $|\text{Proj } S|$ 中的闭集且 $|\text{Proj } S|$ 的拓扑完全由此给出；最后要给出 Proj S 的结构层 $\mathscr{O}_{\text{Proj } S}$，取 S 中次数为正的一个齐次元素 f，令开集

$$D_+(f) := |\text{Proj } S| - V_+(f),$$

作为集合 $|D_+(f)| \cong |\text{Proj } S[f^{-1}]|$，同时后者和 $S[f^{-1}]$ 中所有的 0 次元素组成的环 $S[f^{-1}]_0$ 中的素理想一一对应，即有双射

$$\varphi_f : |\text{Proj } S[f^{-1}]| \to |\text{Spec } S[f^{-1}]_0|$$

且它是连续的，这样我们可以给 $|D_+(f)|$ 同于 Spec $S[f^{-1}]_0$ 的概型结构，这样只要选取足够多的 f 使得 $|D_+(f)|$ 构成一个开覆盖即可（后面的习题会给出这样一个开覆盖）.

例 1. 考虑 $S := k[x_0,\cdots,x_n]$，其中对任意的 $1\le i\le n$，$\deg x_i = 1$. 于是，$x_0,\cdots,x_n$ 生成的理想是 S_+，那么 $\{D(x_i)\}_{i=0,\cdots,n}$ 构成了 Proj S 的一个开覆盖.

例 2. 考虑 $S := k[x_0,\cdots,x_3]/(x_1^3-x_0^2x_3, x_2^3-x_0x_3^2, x_1x_2-x_0x_3)$，$U_0=$ Spec $k[x_1,\cdots,x_3]/(x_1^3-x_3, x_2^3-x_3^2, x_1x_2-x_3) =$ Spec $[x_0=1]$

引理 1.1. 设 S 是 $\mathbb{Z}$ 分次的环，$f\in S$ 是阶数为正的元素，且它的逆存在. 那么 Spec S 中的相关素理想与 Spec S_0 中的素理想一一对应.

证明. 记 Spec S 中的齐次素理想的集合为 H，$\deg f = d$，构造集合的映射

$$\varphi : H \leftrightarrows |\mathrm{Spec}\ S_0| : \psi$$
$$\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \cap S_0$$
$$\sqrt{\mathfrak{q}S} \leftarrow\!\shortmid \mathfrak{q}.$$

由于 $\mathfrak{p} \cap S_0$ 是 $\mathfrak{p}$ 在嵌入映射 $S_0 \hookrightarrow S$ 下的拉回，故 φ 是良定义的.

另一方面，由于 $\mathfrak{q}$ 只包含阶数为 0 的元素，因此 $\mathfrak{q}S$ 是齐次理想. 任取 $g \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，它可以写成齐次元素的和

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i,$$

满足 $\deg g_1 < \deg g_2 < \cdots < \deg g_n$，由于 $\deg f > 0$，存在正整数 m 使得 $\deg(f^m g_1) \geq 0$. 同时，$f^m g \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$ 意味着存在整数 N 使得

$$(f^m g)^N = \left(f^m \sum_{i=1}^{n} g_i\right)^N = f^{mN} g_n^N + \text{其他低阶项} \in \mathfrak{q}S.$$

但 $\mathfrak{q}S$ 是齐次理想，因此 $f^{mN} g_n^N \in \mathfrak{q}S$，进而

$$\left(\frac{f^{mNd} g_n^{Nd}}{f^{mNd+N\deg g_n}}\right) \in \mathfrak{q}S \cap S_0 = \mathfrak{q}.$$

由于 $\mathfrak{q}$ 是素理想，$\left(\frac{g_n^d}{f^{\deg g_n}}\right)^N \in \mathfrak{q}$ 意味着 $\frac{g_n^d}{f^{\deg g_n}} \in \mathfrak{q}$，故 $g_n^d \in \mathfrak{q}S$，即

$$g_n \in \sqrt{\mathfrak{q}S}.$$

这样 $g - g_n \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，于是归纳地可证明 $g_i \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，因此 $\sqrt{\mathfrak{q}S}$ 是齐次的.

再证明 $\sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0 = \mathfrak{q}$. 显然 $\mathfrak{q} \subseteq \sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0$. 对任意 $g \in \sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0$，存在正整数 M 使得 $g^M \in \mathfrak{q}S$，阶数计算说明 $g^M \in \mathfrak{q}S \cap S_0 = \mathfrak{q}$，再根据 $\mathfrak{q}$ 的素性 $g \in \mathfrak{q}$，因此 $\sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0 \subseteq \mathfrak{q}$.

若 $a = \sum_{i=1}^{m} a_i, b = \sum_{j=1}^{n} b_j$ 满足 $ab \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，那么由刚刚的证明 $a_n b_m \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，由于 a_n, b_m 都是齐次元素，故

$$\frac{a_n^d}{f^{\deg a_n}} \frac{b_m^d}{f^{\deg b_m}} = \frac{a_n^d b_m^d}{f^{\deg a_n + \deg b_m}} \in \sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0 = \mathfrak{q},$$

再次由于 $\mathfrak{q}$ 是素理想，$\frac{a_n^d}{f^{\deg a_n}} \in \mathfrak{q}$ 或 $\frac{b_m^d}{f^{\deg b_m}} \in \mathfrak{q}$，于是 $a_n \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$ 或 $b_m \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，归纳可以得到 $\sqrt{\mathfrak{q}S}$ 是素理想，而它不包含 f，因此是相关素理想，故 ψ 也是良定义的.

之前证明了 $\psi \circ \varphi(\mathfrak{q}) = \sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0 = \mathfrak{q}$，于是，只需要再证明 $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$. 显然 $(\mathfrak{p} \cap S_0)S \subseteq \mathfrak{p}$，因此 $\sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S} \subseteq \mathfrak{p}$. 反过来任取 $\mathfrak{p}$ 中的齐次元素 a，$\frac{a^d}{f^{\deg a}} \in \mathfrak{p} \cap S_0$，因此 $a^d \in (\mathfrak{p} \cap S_0)S$，即 $a \in \sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S}$，这意味着 $\mathfrak{p} \subseteq \sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S}$. □

习题 1.1. 1. 验证所有的 $V_+(I)$ 构成闭集.

2. 验证集合的双射 $\varphi_f : |\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]| \to |\mathrm{Spec}\ S[f^{-1}]_0|$ 及它是同胚.

3. 验证若 S_+ 中由齐次元素组成的子集 T 满足它生成理想的根理想 $\sqrt{\langle T \rangle} = S_+$，那么

$$\{D(f) \mid f \in T\}$$

构成 Proj S 的一组开覆盖.

4. 验证
$$D_+(f)\cap D_+(g)=D_+(fg)=D_+(f^mg^n),$$
其中 $m,n\in\mathbb{N}^*$.

5. 证明
$$(S[f^{-1}][(g/f)^{-1}])_0\cong S[f^{-1}]_0[(g^{\deg f}/f^{\deg g})^{-1}]\cong S[f^{-1},g^{-1}]_0.$$

说明以上的验证了之前的定义给出了一个概型.

证明. 1. 一方面，若 $\mathfrak{p}\in V_+(I)\cup V_+(J)$，那么相关素理想 $\mathfrak{p}$ 满足 $I\subseteq\mathfrak{p}$ 或 $J\subseteq\mathfrak{p}$，不妨设前者成立，于是 $I\cap J\subseteq I\subseteq\mathfrak{p}$，$\mathfrak{p}\in V_+(I\cap J)$. 另一方面若 $\mathfrak{p}\in V_+(I\cap J)$，则由交换代数 $I\subseteq\mathfrak{p}$ 或 $J\subseteq\mathfrak{p}$，因此 $\mathfrak{p}\in V_+(I)\cup V_+(J)$.

再考虑 $\mathfrak{p}\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_+(I_\lambda)$，那么 $I_\lambda\subseteq\mathfrak{p}$ 对所有 $\lambda\in\Lambda$ 成立，因此 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_+(I_\lambda)\subseteq V_+(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda)$. 反过来若 $\mathfrak{p}\in V_+(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda)$，那么 $I_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda\subseteq\mathfrak{p}$，因此 $\mathfrak{p}\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_+(I_\lambda)$.

2. 构造
$$\begin{aligned}\varphi_f:|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|&\leftrightarrows|\mathrm{Spec}\ S[f^{-1}]_0|:\psi_f\\ \mathfrak{p}&\mapsto\mathfrak{p}\cap S[f^{-1}]_0\\ \sqrt{\mathfrak{q}S[f^{-1}]}&\leftarrow\!\shortmid\mathfrak{q},\end{aligned}$$

引理 1.1说明二者是双射，于是只要验证二者连续即可. 若 J 是 $S[f^{-1}]_0$ 的理想，那么
$$\begin{aligned}\psi_f(V(J))&=\psi_f(\{\mathfrak{q}\mid\mathfrak{q}\supseteq J\})\\&=\{\sqrt{\mathfrak{q}S[f^{-1}]}\mid\mathfrak{q}\supseteq J\},\end{aligned}$$
显然 $JS[f^{-1}]\subseteq\sqrt{\mathfrak{q}S[f^{-1}]}$,于是 $\psi_f(V(J))\subseteq V(JS[f^{-1}])=V(\sqrt{JS[f^{-1}]})$;反过来,若 $\mathfrak{p}\in V(\sqrt{JS[f^{-1}]})$,那么
$$\mathfrak{p}=\psi_f(\varphi_f(\mathfrak{p})),$$
因此 $\psi_f(V(J))=V(JS[f^{-1}])$，这样 φ_f 是连续的.

另一方面，对 $|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|$ 中的闭集 $V(I)\cap|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|$,
$$\begin{aligned}\varphi_f(V(I)\cap|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|)&=\{\mathfrak{p}\cap S_0\mid\mathfrak{p}\in V(I)\cap|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|\}\\&\subseteq V(I\cap S_0),\end{aligned}$$
而且对任意 $\mathfrak{q}\in V(I\cap S_0)$,
$$\mathfrak{q}=\varphi_f(\psi_f(\mathfrak{q})),$$
因此 $\varphi_f(V(J))=V(I\cap S_0)$，这样 ψ_f 是连续的.

3. 任取 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Proj}\ S$，由定义存在 $f\in S_+$ 使得 $f\notin\mathfrak{p}$，由于 S 是分次环,
$$f=(f_1+\cdots+f_n)^N,$$
使得每个 $f_i\in T$ 都是齐次的. 这样一定存在 i_0 使得 $f_{i_0}\notin\mathfrak{p}$，因此 $\mathfrak{p}\in D_+(f_{i_0})$.

4. 若 $\mathfrak{p} \in D_+(fg)$，那么 $fg \notin \mathfrak{p}$，显然 $f \notin \mathfrak{p}$ 且 $g \notin \mathfrak{p}$，所以 $D_+(fg) \subseteq D_+(f) \cap D_+(g)$. 反过来，若 $\mathfrak{p} \in D_+(f) \cap D_+(g)$，按定义 $f \notin \mathfrak{p}$ 且 $g \notin \mathfrak{p}$，因为 $\mathfrak{p}$ 是素理想，故 $D_+(f) \cap D_+(g) \subseteq D_+(fg)$，这意味着 $D_+(f) \cap D_+(g) = D_+(fg)$. 同样根据 $\mathfrak{p}$ 是素理想，$D_+(fg) = D_+(f^m g^n)$.

5. 构造
$$\varphi : S[f^{-1}][(g/f)^{-1}] \leftrightarrows S[f^{-1}, g^{-1}] : \psi$$
$$\frac{\frac{r}{f^n}}{(g/f)^m} \mapsto \frac{r}{f^{n-m}g^m}$$
$$\frac{\frac{r}{f^{n+m}}}{(g/f)^m} \leftarrow\!\shortmid \frac{r}{f^n g^m},$$
显然二者是良定义的, 它们是齐次环同态，且互为逆映射. 于是，$S[f^{-1}, g^{-1}]_0 \cong (S[f^{-1}][(g/f)^{-1}])_0$. 若齐次元素
$$\frac{r}{f^n g^m} \in S[f^{-1}, g^{-1}]$$
满足 $\deg \frac{r}{f^n g^m} = 0$，那么由定义
$$\deg r = m \deg g + n \deg f.$$
同时，
$$\frac{r}{f^n g^m} = \frac{g^{m \deg f - m} f^{m \deg g}}{g^{m \deg f - m} f^{m \deg g}} \frac{r}{f^n g^m} = \left(\frac{f^{\deg g}}{g^{\deg f}}\right)^m \frac{g^{m \deg f - m} r}{f^{n + m \deg g}},$$
且 $\deg \left(\frac{f^{\deg g}}{g^{\deg f}}\right)^m \frac{g^{m \deg f - m} r}{f^{n+m \deg g}} = \deg \frac{g^{m \deg f - m} r}{f^{n+m \deg g}} = \deg r + \deg g(m \deg f - m) - \deg f(n + m \deg g) = 0$. 这意味着 $S[f^{-1}, g^{-1}]_0 = S[f^{-1}]_0[(g^{\deg f}/f^{\deg g})^{-1}]$，得证.

以上的验证中, 前三条说明了存在一个仿射的开覆盖, 第四条说明开覆盖当中两个的交集是什么样的——它也是开覆盖中的一个，因此可以用前面的方式得到上面的层结构——第五条证明了层结构的相容性. 这样，Proj S 是一个概型. □

引理 1.2. *设 S, T 是给定的分次环，$\varphi : S \to T$ 是分次环同态（即 $\varphi(S_n) \subseteq T_n$），求证：*

1. $U := \{\mathfrak{q} \in \text{Proj } T \mid \varphi(S_+) \not\subseteq \mathfrak{q}\}$ 是 Proj T 中的开集.

2. φ 诱导了态射 $U \to \text{Proj } S$.

证明. 1. 记 $X = \text{Proj } T$. 要证明 U 是开集，只要证明 $X - U$ 是闭集即可. 令 $J := (\varphi(S_+))$，那 T 中的齐次素理想 $\mathfrak{q}$ 包含 $\varphi(S_+)$ 当且仅当它包含 J. 于是根据定义，$X - U = V_+(J)$ 是闭集，得证.

2. 首先给定映射 $f : U \to \text{Proj } S$，它将素理想 $\mathfrak{q}$ 映到 $(\varphi^{-1}(\mathfrak{q}))$，我们要验证它是连续的. 任取 Proj S 中的闭集 $V_+(I)$，
$$\begin{aligned} f^{-1}(V(I)) &= \{\mathfrak{q} \in U \mid f(\mathfrak{q}) \in V_+(I)\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in U \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq I\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \text{Proj } T \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq I\} \cap U, \end{aligned}$$

这是 U 中的闭集，因此 f 是连续映射.

接下来要给出层的态射 $f^\#: \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}|_U \to f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}$. 注意到

$$G = \{s \in S \mid s\text{是齐次元素且}\deg s > 0\}$$

生成的理想的根理想是 S_+，于是 $\{D_+(s) \mid s \in G\}$ 是 Proj S 的一个开覆盖，于是只需要给出一族相容的环同态

$$(f^\#)_s : \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}(D_+(s)) \to f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(s)).$$

注意到

$$\begin{aligned} f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(s)) &= \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(f^{-1}(D_+(s))) \\ &= \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s)) \cap U). \end{aligned}$$

注意到 $D_+(\varphi(s)) = \mathrm{Spec}\ T[\varphi(s^{-1})]_0$ 是仿射概型，因此 $(f^\#)_s$ 可以定义为复合

$$\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}(D_+(s)) = S[s^{-1}]_0 \to \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s))) = T[\varphi(s^{-1})]_0 \to \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s)) \cap U),$$

其中第一个映射由 φ 诱导，第二个映射是 $\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}$ 所给的信息.

对于相容性，给定 $s_1, s_2 \in S$，只要证明图

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}(D_+(s_1)) & \xrightarrow{(f^\#)_{s_1}} & f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(s_1)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}(D_+(s_1s_2)) & \xrightarrow{(f^\#)_{s_1s_2}} & f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(s_1s_2)) \end{array}$$

是交换的，即

$$\begin{array}{ccccc} S[s_1^{-1}]_0 & \longrightarrow & T[\varphi(s_1^{-1})]_0 & \longrightarrow & \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s_1)) \cap U) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ S[s_1s_2^{-1}]_0 & \longrightarrow & T[\varphi(s_1s_2^{-1})]_0 & \longrightarrow & \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s_1s_2)) \cap U) \end{array}$$

是交换的，但这由构造是明显的. □

例 3. 考虑环同态

$$\varphi :$$

命题 1.1. 设 k 是域，$S = k[x_0, \cdots, x_n]$，那么 Proj $S = \mathbb{P}_k^n$.

证明. □

习题 1.2. 证明 $\mathbb{P}_R^r$ 是开集 $\mathbb{A}_R^r$ 和闭集 $\mathbb{P}_R^{r-1}$ 的不交并.

命题 1.2. 设 R 是交换环，$S = R[x_0, \cdots, x_n]$，那么态射 $\text{Proj } S \to \text{Spec } R$ 是正规的.

习题 1.3. 分类所有的态射

$$\text{Spec } \mathbb{Z} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}.$$

习题 1.4. 设 S 是分次交换环，对任意正整数 d，定义 S 的第 d 个 Veronese 子环为

$$S^{(d)} := \bigoplus_{n \geq 0} S_{dn}.$$

1. 证明 $\text{Proj } S \cong \text{Proj } S^{(d)}$.
2. 证明若 $S = R[x, y]$，作为分次环（甚至只作为环）S 与 $S^{(d)}$ 不同构.

证明. 1. 由于 $S^{(d)}$ 自然地是 S 的子环，我们将 $S^{(d)}$ 的元素当作 S 中的元素. 对任意 $f \in S_{dn}$，记

$$D_+^{(d)}(f) := |\text{Proj } S^{(d)}| - V_+^{(d)}(f),$$

那么可以构造映射

$$\begin{aligned} \varphi_f : D_+^{(d)}(f) &\leftrightarrows D_+(f) : \psi_f \\ \mathfrak{p} &\mapsto \sqrt{\mathfrak{p}S} \\ \mathfrak{q} \cap S^{(d)} &\leftarrow\!\shortmid \mathfrak{q}, \end{aligned}$$

显然 ψ_f 是良定义的，另一方面

$$\sqrt{\mathfrak{p}S} = \sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S}$$

$\square$

2 射影空间上的层

定义. 给定分次环 S 和分次 S 模 M，如下构造给出 $\tilde{M}$

3 射影空间的闭子概型

命题 3.1. 设 I 是分次交换环 S 的齐次理想，那么存在集合的包含

$$|\text{Proj } S/I| \subseteq |\text{Proj } S|,$$

并且子集 $|\text{Proj } S/I|$ 与任意仿射开集 $(\text{Proj } S)_f$ 的交都是 $(\text{Proj } S)_f$ 中的闭集，并且交集对应的子概型同构于 $(\text{Proj } S/I)_f$. 因此 $\text{Proj } S/I$ 可看作 $\text{Proj } S$ 的闭子概型.

证明. $\square$

4 全局 Proj 构造

定理 4.1. 设 k 是域，S 是 k 概型，那么存在如下的 *1-1* 对应

$$\{(\mathcal{L}, s_0, \cdots, s_n) \mid \mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S), s_i \in H^0(S, \mathcal{L})\text{生成}\mathcal{L}\}/\sim \leftrightarrow \hom_k(S, \mathbb{P}^n),$$

其中左边的等价关系 $(\mathcal{L}, s_0, \cdots, s_n) \sim (\mathcal{M}, t_0, \cdots, t_n)$ 定义为存在同构 $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ 使得 $t_i = \varphi(s_i)$. 给定 $(\mathcal{L}, s_0, \cdots, s_n)$，那么它对应的态射是 $f : S \to \mathbb{P}^n, P \mapsto [s_0(P), \cdots, s_n(P)]$，反过来给定一个态射 $f : S \to \mathbb{P}^n$，取 $\mathcal{L} := f^*\mathscr{O}(1)$，$s_i := f^*(x_i)$.

5 切空间和切锥

例 4. 我们尝试分类 $\mathbb{P}^1_k$ 上的所有线丛.

6 应用：Hirzebruch 曲面