

第一章 层的基本理论

在几何中，我们经常遇到从局部性质到整体性质的过渡，例如我们在讲光滑函数时对光滑性的定义是局部的，但光滑性可以是整体的性质；任意一个流形都是局部可定向的，但一个流形并不一定是整体可定向的。在从局部到整体的过渡中，我们通常使用的方法是局部坐标，当局部坐标满足一定性质时我们可以找到更大的坐标，这个更大的坐标限制到小的坐标上与原来小的坐标有相同的性质。如果将这样的过程抽象出来就是层的构造。

1.1 预层与层的基本性质

定义. 设 X 是一个拓扑空间.对 X 的每个开集 U ，我们赋予其一个Abel群 $\mathcal{F}(U)$ ，并且对任意满足 $V \subseteq U$ 的开集 U, V ，存在映射 $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ ，满足如下条件：

(i) $\mathcal{F}(\emptyset) = 0$;

(ii) $\rho_U^U = \text{id}_{\mathcal{F}(U)}$;

(iii) 对所有满足 $W \subseteq V \subseteq U$ 的开集 U, V, W ， $\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$;

这样的在拓扑空间 X 上的结构 \mathcal{F} 我们称为**预层**(presheaf)， $\mathcal{F}(U)$ 中的元素称为开集 U 的**截面**(section)，映射 $\rho_V^U : \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ 称为**限制映射**(restriction map)。

例1. 设 X 是一个复流形， \mathcal{M} 是如下定义的**亚纯函数层**(sheaf of meromorphic functions)

$$\mathcal{M}(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ 是亚纯的}\},$$

且对于任意 $f \in \mathcal{M}(U)$ 和开集 $V \subseteq U$ ，定义 $\rho_V^U(f)$ 是 f 在 V 上的限制，则 \mathcal{M} 是 X 上的预层。

在上面的例子中，预层 \mathcal{M} 的限制同态确实是函数的限制——但通常而言，限制同态可以是任意的映射。对于元素 $s \in \mathcal{F}(U)$ ，我们也用通常的限制记号： $s|_V := \rho_V^U(s)$ ，然而这一般与真正函数的限制很不同。

注意到任意的拓扑空间 X 可以自然地成为一个范畴 $\mathbf{Open}(X)$ ，这样每个预层都是一个反变函子 $\mathbf{Open}(X) \rightarrow \mathbf{Ab}$ ，可以想到的是，我们并不需要将函子的值域限定为 \mathbf{Ab} ，其他任意合理的范畴都可以得到有用的预层。当值域范畴为 \mathbf{Ab} 、 \mathbf{Ring} 、 $R\text{-Mod}$ 时，我们分别称 \mathcal{F} 为 X 上的Abel群预层、环预层和 R 模预层。

这种对于预层的理解还有其他的好处——我们可以非常容易地定义预层之间的**态射**(morphism)——一个预层的态射就是函子间的自然变换。如果我们显式地将层态射 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 的定义写出来，即是对任意 X 中的开集 $V \subseteq U$ ，我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ \rho_V^U \downarrow & & \downarrow \theta_V^U \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\varphi_V} & \mathcal{G}(V), \end{array}$$

其中 ρ_V^U, θ_V^U 分别是预层 \mathcal{F} 和 \mathcal{G} 的限制映射.

例2. 设 X 是任意的拓扑空间, M 是任意的 *Abel* 群, 对开集 U 定义 $M_X(U) = M$ 对于满足 $V \subseteq U$ 的开集, 限制映射都是恒等映射, 则 M_X 是一个预层, 称为常预层 (*constant sheaf*). 如果 N 也是一个 *Abel* 群, $\varphi: M \rightarrow N$ 是群同态, 则我们自然地有预层的映射

$$\varphi_X: M_X \rightarrow N_X,$$

定义为

$$(\varphi_X)_U := \varphi: M_X(U) \rightarrow M_X(V).$$

例3.

例4.

预层的结构中蕴含了空间上“函数”的很多局部信息, 对于一个预层我们有专门的结构刻画这样的信息:

定义. 设 \mathcal{F} 是拓扑空间 X 上的预层, 那么称

$$\mathcal{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathcal{F}(U)$$

为 \mathcal{F} 在点 x 处的茎 (stalk), 其中 U 取遍所有包含点 x 的开集, 正向系中的态射由限制态射给定.

根据正极限的定义, 对于任意包含 x 的开集 U , 存在自然的态射 $\rho_x^U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}_x$ 使得与正向系相容, 即对于满足 $V \subseteq U$ 的开集,

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & & \\ \rho_V^U \downarrow & \searrow \rho_x^U & \\ \mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\rho_x^V} & \mathcal{F}_x. \end{array}$$

为简化记号, 通常对于截面 $s \in \mathcal{F}(U)$, 我们记 $s_x := \rho_x^U(s)$. 同样地, 正极限的函子性告诉我们, 对于任意 X 中的点 x , 若 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层间的态射, 那么有诱导的点 x 处茎的态射

$$\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$$

使得对任意开集 U 有如下交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\varphi_U} & \mathcal{G}(U) \\ (\rho_{\mathcal{F}})_x^U \downarrow & & \downarrow (\rho_{\mathcal{G}})_x^U \\ \mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi_x} & \mathcal{G}. \end{array}$$

习题1.1.1. 证明我们有如下的显式构造:

$$\mathcal{F}_x \cong \left(\prod_{x \in U} \mathcal{F}(U) \right) / \sim,$$

其中, 若 $s \in \mathcal{F}(U), t \in \mathcal{F}(V)$ 的等价关系 $s \sim t$ 定义为存在包含于 $U \cap V$ 的 x 的邻域 W 使得 $s|_W = t|_W$.

例5. 设 M 是给定的 *Abel* 群, $x \in X$ 是拓扑空间中的一个点, 定义预层 $M(x)$ 满足

$$M(x)(U) := \begin{cases} M & x \in U \\ 0 & x \notin U, \end{cases}$$

限制态射要么是恒等映射要么是零映射. 如果我们计算 $M(x)$ 在点 y 的茎,

但是, 预层并不是我们所希望的定义在拓扑空间上的代数结构. 多数情况下

定义. 设 \mathcal{F} 是拓扑空间 X 上的预层, 如果 \mathcal{F} 满足如下条件:

- (i) (局部性(locality)) 若 $\{U_i\}_{i \in I}$ 是开集 U 的一族开覆盖, $s, t \in \mathcal{F}(U)$ 满足对于任意 $i \in I$ 都有 $s|_{U_i} = t|_{U_i}$ 成立, 则 $s = t \in \mathcal{F}(U)$;
- (ii) (粘合条件(gluing)) 若 $\{U_i\}_{i \in I}$ 是开集 U 的一族开覆盖, 一族元素 $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ 满足 $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$, 那么存在 $s \in \mathcal{F}(U)$ 使得 $s|_{U_i} = s_i$ 成立;

则称 \mathcal{F} 为 X 上的层(sheaf).

定义的合理性告诉我们并不是所有的预层都是层, 对于某些拓扑空间 X , 常预层就不是层. 但是, 某些定义的预层本身就是层, 如下例. 最重要的是层的行为形态非常类似于全体可定义的函数, 因此函数的全体必然是层.

例6. 例1中的构造是一个层, 更一般地, 如果 X 是拓扑空间,

更抽象一些地, 我们可以用图的语言描述层公理: 若 $\{U_i\}_{i \in I}$ 是开集 U 的一族开覆盖, 那么层公理等价于下图

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \rightarrow \prod_{i \in I} \mathcal{F}(U_i) & \rightrightarrows \prod_{i, j \in I} \mathcal{F}(U_i \cap U_j) \\ & & s_i \mapsto s_i|_{U_i \cap U_j} \end{array}$$

是一个等值子 (equalizer).

习题1.1.2. 证明上述等价性.

层之间的态射与预层之间态射的定义相同, 即对于层 \mathcal{F}, \mathcal{G} , $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是层态射当且仅当 φ 是预层的态射. 这意味着 $\mathbf{ShAb}(X)$ 是 $\mathbf{PShAb}(X)$ 的满子范畴.

局部性可以用茎的语言来描述:

命题1.1.1. 设 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是拓扑空间 X 上层的态射, 那么 φ 是同构当且仅当对于任意 $x \in X$, 诱导的 $\varphi_x: \mathcal{F}_x \rightarrow \mathcal{G}_x$ 都是同构.

对层这种构造的一种理解方式是说, 它是弯曲空间上满足一定性质的“函数”的全体, 不同性质的选取决定了层结构的不同.

习题1.1.3. 设 \mathcal{F} 是拓扑空间 X 上的一个预层, 则下面的构造给出一个拓扑空间, 其中底集 $\tilde{\mathcal{F}} = \coprod_{x \in X} \mathcal{F}_x = \{(x, s_x) \mid x \in X, s_x \in \mathcal{F}_x\}$ 是所有茎的不交并, 并对任意给定 X 中的开集 U 和 $s \in \mathcal{F}(U)$ 给定如下一组拓扑基

$$(U, s) := \{(x, s_x) \mid x \in U\}.$$

求证:

- (i) 存在自然的连续映射 $\pi: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow X$, 将点 (x, s_x) 映到 x .并且, 对任意的开集 U 和 $s \in \mathcal{F}(U)$, 存在 π 在 U 上的截面(section) $\sigma: U \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ (截面是指连续函数 σ 使得 $\pi \circ \sigma$ 是 U 上的恒等函数).
- (ii) 反之, 若 \mathcal{F} 还是层, 求证任意 U 上的截面 σ 都是如上述方式构造的.
- (iii) 由上证明若 \mathcal{F} 是层, 则 $\pi: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow X$ 的连续函数截面层同构于 \mathcal{F} .
- (iv) 若 \mathcal{G} 也是拓扑空间 X 上的一个预层, $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层的映射, 证明 φ 诱导了 $\tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$ 的连续映射.

空间 $\tilde{\mathcal{F}}$ 称为预层 \mathcal{F} 的平展空间(étalé space).

Solution. (i) 根据定义, π 显然是连续的. 定义 $\sigma: x \mapsto (x, s_x)$, 注意到 $\sigma^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \sigma^{-1}(A_i)$, 因而证明 σ 是连续的只需要证明对任意的 X 中的开集 V , $\sigma^{-1}((V, t))$ 也是开集即可. 但是若 $t = s$ 则 $\sigma^{-1}((V, t)) = \sigma^{-1}((V, s)) = V \cap U$, 若 $t \neq s$ 则 $\sigma^{-1}((V, t)) = \emptyset$. 故得证.

(ii) 设 $\sigma: U \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ 是 U 上的截面, 于是对于任意的 $x \in U$, 存在 $s \in \mathcal{F}(U)$ 使得 $\sigma(x) = (x, s_x)$. 若 x, y 是 U 中的两个点, $\sigma(x) = (x, s_x)$ 且 $\sigma(y) = (y, t_y)$. 根据芽的定义, 我们可以找到 x, y 的邻域 V, W 使得 $s \in \mathcal{F}(V), t \in \mathcal{F}(W)$. 考虑开集

$$(V, s) = \{(z, s_z) \mid z \in V\}$$

和

$$(W, t) = \{(z, t_z) \mid z \in W\},$$

根据 σ 的连续性, $\tilde{V} := \sigma^{-1}((V, s))$ 和 $\tilde{W} := \sigma^{-1}((W, t))$ 都是 U 中的非空开集, 分别包含 x 和 y . 对于任意 $z \in \tilde{V} \cap \tilde{W}$, 由 σ 的映射性 $(z, s_z) = \sigma(z) = (z, t_z)$, 故存在 z 的一个邻域 $O \subseteq \tilde{V} \cap \tilde{W}$ 使得 $s|_O = t|_O$. 但是 z 是任取的, 故 $s|_{\tilde{V} \cap \tilde{W}} = t|_{\tilde{V} \cap \tilde{W}}$. 这样我们就得到了 U 的一个开覆盖, 且在开集重合的部分截面是相容的. 根据层公理, 存在唯一的 $r \in \mathcal{F}(U)$ 使得 $\sigma(x) = (x, r_x)$.

(iii) 记 \mathcal{F}' 为 $\pi: \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow X$ 的截面层. 定义

$$\begin{aligned} \theta: \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F}' \\ \theta_U: \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}'(U) \\ s &\mapsto \sigma(x \mapsto (x, s_x)), \end{aligned}$$

于是我们需要验证对任意的开集 U , θ_U 是群同构, 且对任意满足 $V \subseteq U$ 的开集 U, V 都有图

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\theta_U} & \mathcal{F}'(U) \\
\rho_V^U \downarrow & & \downarrow |_V \\
\mathcal{F}(V) & \xrightarrow{\theta_V} & \mathcal{F}'(V),
\end{array}$$

交换, 其中 $|_V$ 是 U 上函数在 V 的限制.

□

1.2 层化

对于一个预层 \mathcal{F} 和 X 中的开集 U , 我们可以定义

$$\tilde{\mathcal{F}}(U) := \{s : U \rightarrow \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_x \mid s \text{ 满足公理(i)和(ii)}\}$$

其中

(i) 对每个 U 中的点 x , $s(x) \in \mathcal{F}_x$;

(ii) 对每个 U 中的点 x , 都存在开邻域 $V \subseteq W$ 和截面 $t \in \mathcal{F}(V)$ 使得对于所有的 $y \in V$ 都有 $s(y) = t_y$.

对于 \mathcal{F} 中的任意截面 $s \in \mathcal{F}(U)$, 我们都可以定义一个映射 $\tilde{s} : U \rightarrow \coprod_{x \in U} \mathcal{F}_x, y \mapsto s_y$. 显然 $\tilde{s} \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$, 因此我们定义了一个预层的态射 $\zeta : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$.

命题1.2.1. 若预层 \mathcal{F} 是层, 则 $\zeta : \mathcal{F} \rightarrow \tilde{\mathcal{F}}$ 是层的同构.

如果尽可能具体地解释层化, 这个构造就是把原本没有的截面加到层的对象当中去, 进而形成我们需要的足够多的粘合信息, 而我们是局部来完成这个扩充的. 刚刚我们介绍的层化事实上就是用一个点的局部信息(茎)去构造相应的函数, 可以说层公理所描述的本质信息就是对象中的元素本质上就是函数. 我们对于层化的定义满足如下的泛性质和函子性:

命题1.2.2 (函子性). 设 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层的态射, 那么存在层态射 $\tilde{\varphi} : \tilde{\mathcal{F}} \rightarrow \tilde{\mathcal{G}}$ 使得下面的图交换:

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{F} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{G} \\
\zeta_{\mathcal{F}} \downarrow & & \downarrow \zeta_{\mathcal{G}} \\
\tilde{\mathcal{F}} & \xrightarrow{\tilde{\varphi}} & \tilde{\mathcal{G}}.
\end{array}$$

Proof. 对任意 X 中的开集 U , 考虑点 $x \in U$ 和截面 $s \in \tilde{\mathcal{F}}(U)$, 我们定义

$$\tilde{\varphi}_U(s)(x) := \varphi_x(s(x)).$$

我们需要验证定义是层的态射, 并验证图的交换性.

□

推论1.2.2.1 (泛性质). 设 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层的态射, 若 \mathcal{G} 是层, 则存在 $Abel$ 群的同构

$$\text{hom}_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) \cong \text{hom}_{\mathbf{ShAb}(X)}(\tilde{\mathcal{F}}, \mathcal{G}).$$

事实上, 我们并不需要拓扑空间 X 中所有开集 U 所对应的对象 $\mathcal{F}(U)$, 如果给定 X 的一组基 \mathcal{B} 中所有开集 U 对应的对象 $\mathcal{F}(U)$, 并且这些对象满足层公理, 那么我们存在唯一的 X 上的层:

定理1.2.3 (\mathcal{B} -层). 设 \mathcal{B} 是拓扑空间 X 的一组开集基, 对于每个 $U, V \in \mathcal{B}$, 存在 $Abel$ 群 $\mathcal{F}(U)$ 和限制同态 $\rho_V^U: \mathcal{F}(U) \rightarrow \mathcal{F}(V)$ 满足预层公理和层公理, 那么称 \mathcal{F} 是一个 \mathcal{B} -层 (\mathcal{B} -sheaf).

推论1.2.3.1 (层的粘合原理). 设 \mathcal{U} 是拓扑空间 X 的开覆盖. 若对任意 \mathcal{U} 中的开集 U , \mathcal{F}_U 都是 U 上的层, 并且

$$\varphi_{U,V}: \mathcal{F}_U|_{U \cap V} \rightarrow \mathcal{F}_V|_{U \cap V}$$

都是同构, 在 $U \cap V \cap W$ 上满足

$$\varphi_{V,W} \circ \varphi_{U,V} = \varphi_{U,W},$$

则存在唯一的 X 上的层 \mathcal{F} 使得有层的同构 $\psi: \mathcal{F}|_U \rightarrow \mathcal{F}_U$ 且满足如下相容性: 对任意 $U, V \in \mathcal{U}$

$$\varphi_{U,V} \circ \psi_U|_{U \cap V} = \psi_V|_{U \cap V}: \mathcal{F}|_{U \cap V} \rightarrow \mathcal{F}_V|_{U \cap V}.$$

Proof. 我们将验证如下论断: (i) \mathcal{U} 中的开集构成 X 的一组拓扑基 \mathcal{B} ; (ii) 所给出的粘合条件自然地给出了一个 \mathcal{B} -层, 于是根据定理1.2.3存在性和唯一性都得证.

(i) 这是一个单纯的拓扑问题. □

引入层化后我们其实有了对于层更进一步的认识——层完全由每点上的茎完全决定, 而决定的方式就是寻找连续的截面 (习题1.2.1). 在英语中, sheaf一词的含义是 “a bundle of stalks”, 即一捆稻谷, 我们想象

习题1.2.1. 设 \mathcal{F} 是拓扑空间 X 上的预层. 证明平展空间 $\tilde{\mathcal{F}}$ 的截面层 \mathcal{F}' 同构于 \mathcal{F} 的层化.

Proof. 在习题1.1.3中我们定义了预层的态射

$$\begin{aligned} \theta: \mathcal{F} &\rightarrow \mathcal{F}' \\ \theta_U: \mathcal{F}(U) &\rightarrow \mathcal{F}'(U) \\ s &\mapsto \sigma(x \mapsto (x, s_x)), \end{aligned}$$

于是只要证明 \mathcal{F}' 的泛性质就能够说明同构. 设 $\varphi: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层到层的态射, 于是根据习题1.1.3我们有连续

映射 $\bar{\varphi} : \bar{\mathcal{F}} \rightarrow \bar{\mathcal{G}}$, 进而对于任意的截面 $s : U \rightarrow \bar{\mathcal{F}}$, $\bar{\varphi} \circ s$ 也是 U 上的截面, 这样我们定义了

$$\begin{aligned}\varphi' : \mathcal{F}' &\rightarrow \mathcal{G}' \cong \mathcal{G} \\ \varphi'_U : \mathcal{F}'(U) &\rightarrow \mathcal{G}'(U)\end{aligned}$$

再证明唯一性. 假设 $\varphi : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ 是预层到层的态射, 层态射 $\varphi_i : \mathcal{F}' \rightarrow \mathcal{G}$ 满足

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{F}' & \xrightarrow{\varphi_i} & \mathcal{G} \\ \uparrow \theta & \nearrow \varphi & \\ \mathcal{F} & & \end{array}$$

其中 $i = 1, 2$. 任取 $s \in \mathcal{F}'(U)$, 即截面 $s : U \rightarrow \mathcal{F}'$

□

1.3 底空间变换

这一节我们考虑这样的问题,

定义. 设 $f : X \rightarrow Y$ 是拓扑空间的连续映射, 如果 \mathcal{F} 是 X 上的预层, 则如下定义的

$$\begin{aligned}f_*\mathcal{F} : \mathbf{Open}(Y) &\rightarrow \mathbf{Ab} \\ U &\mapsto f_*\mathcal{F}(U) := \mathcal{F}(f^{-1}(U))\end{aligned}$$

是一个预层, 称为预层 \mathcal{F} 的**推出**(pushforward).

引理1.3.1. 设 $f : X \rightarrow Y$ 是拓扑空间的连续映射, 如果 \mathcal{F} 是 X 上的层, 则推出 $f_*\mathcal{F}$ 是 Y 上的层.

Proof.

□

1.4 层范畴及其中的正合性