复变函数辅导笔记（第三次，往年考题整理）

2018 年 5 月 7 日

1.(15年7)设$f(z)$是一个整函数，且存在一个正整数n和两个正数R,M满足当$|z|>R$时

$$|f(z)|\le M|z|^n.$$

求证$f(z)$是一个次数不超过n的多项式.

解 根据题目条件

$$\left|\frac{f(z)}{z^n}\right|\le M,$$

于是无穷远点是$f(z)$的极点或可去奇点，因而$f(z)$是有理函数.但$f(z)$已经是整函数，故$f(z)$是多项式.若$f(z)$的次数大于n，则

$$\lim_{|z|\to\infty}\left|\frac{f(z)}{z^n}\right|=\infty,$$

矛盾. ■

2.(15年9)设D是复平面上的开圆盘，C是其边界，$\bar{D}=D\cup C$.设$f(z)$在D中除去有限个点$z_1,\cdots,z_m$外解析，且在$\bar{D}-\{z_1,\cdots,z_m\}$上连续，且对每个$z_j,1\le j\le m$，都有

$$\lim_{z\to z_j}(z-z_j)f(z)=0.$$

求证

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=0.$$

解 设$B(z_j,r)$是以z_j为中心以r为半径的圆盘，半径R充分小使得$B(z_i,R)\cap B(z_j,R)=\emptyset,\forall 1\le i,j\le m$，$\partial B(z_j,r)$是$B(z_j,r)$的边界.于是对不同的半径$r_1,r_2$，由Cauchy定理

$$\int_{\partial B(z_j,r_1)-\partial B(z_j,r_2)}f(z)\mathrm{d}z=0,$$

化简后得到

$$\int_{\partial B(z_j,r_1)}f(z)\mathrm{d}z=\int_{\partial B(z_j,r_2)}f(z)\mathrm{d}z,$$

即当半径充分小时$\int_{\partial B(z_j,r)} f(z)\mathrm{d}z$的取值与半径无关.于是

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial B(z_j,R)} f(z)\mathrm{d}z\right| &= \lim_{r\to 0}\left|\int_{\partial B(z_j,r)} f(z)\mathrm{d}z\right| \\ &\le \lim_{r\to 0}\int_{\partial B(z_j,r)} |f(z)|\mathrm{d}z \\ &\le \lim_{r\to 0} 2\pi r|f(z)|\mathrm{d}z \\ &= 0.\end{aligned}$$

另一方面，$f(z)$在D以内$B(z_j,R)$以外是解析的，于是根据Cauchy定理

$$\int_{C-\sum_{j=1}^m \partial B(z_j,R)} f(z)\mathrm{d}z = 0,$$

进而

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{\sum_{j=1}^m \partial B(z_j,R)} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^m \int_{\partial B(z_j,R)} f(z)\mathrm{d}z = 0.$$

■

3.(16年8)设n阶Bessel函数$J_n(t)$有下列关于z的Laurent展式

$$e^{\frac{t}{2}(z-\frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)z^n$$

来定义，求证$\forall t\in\mathbb{C}$，$J_n(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - t\sin\theta)\mathrm{d}\theta$.

解 设C是以远点为圆心半径为1的圆，根据Laurent展式的唯一性

$$
\begin{aligned}
J_n(t) &= \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{\frac{t}{2}(z-\frac{1}{z})}}{z^{n+1}}\mathrm{d}z \\
&\xlongequal{z=e^{i\theta}} \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{t}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}}{e^{(n+1)i\theta}}\mathrm{d}e^{i\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{it\sin\theta}}{e^{ni\theta}}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(t\sin\theta-n\theta)}\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{i(t\sin\theta-n\theta)}\mathrm{d}\theta+\int_{\pi}^{2\pi} e^{i(t\sin\theta-n\theta)}\mathrm{d}\theta\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{i(t\sin\theta-n\theta)}\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi} e^{i(-t\sin\theta-n(\theta+\pi))}\mathrm{d}\theta\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{\pi} e^{i(t\sin\theta-n\theta)}\mathrm{d}\theta+\int_0^{\pi} e^{-i(t\sin\theta-n\theta)}\mathrm{d}\theta\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\theta-t\sin\theta)\mathrm{d}\theta,
\end{aligned}
$$

其中，倒数第二个等号的第二个求和项中用$\pi-\theta$代替θ. ■