

Geometric Invariant Theory

Guanyu Li

这份材料是我在读 Mumford 的著作 Geometric Invariant Theory 和在 Daniel Halpern-Leistner 课堂上做的笔记，它不是自洽的，也忽略了很多该去讨论的东西，当然也避免不了错误. 这份笔记只是基于我自己理解对 GIT/Moduli spaces 理论做的一份综述. 有一些名词我也不知道该怎么翻译，就将就着来算了.

1 代数几何预备知识

定理 1.1. 给定概型的态射 $f: X \rightarrow Y$ ，若对任意

2 一般的模问题

模问题 (moduli problem) 是代数几何当中一类最基本的问题.

定理 2.1. 设 k 是域， S 是 k 概型，那么存在如下的 1-1 对应

$$\{(\mathcal{L}, s_0, \dots, s_n) \mid \mathcal{L} \in \text{Pic}(S), s_i \in H^0(S, \mathcal{L}) \text{ 生成 } \mathcal{L}\} / \sim \leftrightarrow \text{hom}_k(S, \mathbb{P}^n),$$

其中左边的等价关系 $(\mathcal{L}, s_0, \dots, s_n) \sim (\mathcal{M}, t_0, \dots, t_n)$ 定义为存在同构 $\varphi: \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ 使得 $t_i = \varphi(s_i)$. 给定 $(\mathcal{L}, s_0, \dots, s_n)$ ，那么它对应的态射是 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^n, P \mapsto [s_0(P), \dots, s_n(P)]$ ，反过来给定一个态射 $f: S \rightarrow \mathbb{P}^n$ ，取 $\mathcal{L} := f^* \mathcal{O}(1)$ ， $s_i := f^*(x_i)$.

事实上很难给出模问题的准确的定义，但一般一个反变函子

$$\mathcal{M}: \mathbf{Sch}_S \rightarrow \mathbf{Set}$$

给的想要参数化的对象，这个反变函子就称为一个模问题. 下面的例子是我们主要考虑的:

例 1. 考虑函子

$$\mathcal{M}: \mathbf{Sch}_S \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$X \mapsto \left\{ \begin{array}{c} E \\ \downarrow p \\ X \end{array} \begin{array}{c} \uparrow t \\ \end{array} \middle| \begin{array}{l} p \text{ 是平坦态射, 在每一点的纤维都是亏格为 } 1 \text{ 的曲线, 且 } p \circ t = \text{id}_S \end{array} \right\},$$

若 $f: X \rightarrow Y$ 是概型的态射， $\mathcal{M}(f)$ 由下图给出

$$\begin{array}{ccc} E \times_Y X & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow \pi \\ X & \xrightarrow{f} & Y. \end{array}$$

例 2. 考虑函子

$$\mathcal{M} : \mathbf{Sch}_S \rightarrow \mathbf{Set}$$

$$X \mapsto \left\{ \begin{array}{c} C \\ p \downarrow \\ X \end{array} \middle| \text{对 } X \text{ 的每一点 } x, \text{ 纤维 } C_x \text{ 是几何连通、正规、光滑且亏格为 } g \text{ 的曲线} \right\},$$

定理 2.2. 设 E_1, E_2 是两个 k 上的椭圆曲线, 则

定义. 给定函子 $\mathcal{M} : \mathbf{Sch}^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$ 和 k 概型 M , 若

1. 存在自然态射 $\eta : \mathcal{M} \Rightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{Sch}}(-, M)$ 使得对任意的 $\xi : \mathcal{M} \Rightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{Sch}}(-, X)$, 都存在唯一的 $f : X \rightarrow M$ 满足下图交换:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\eta} & \mathrm{hom}_{\mathbf{Sch}}(-, M) \\ & \searrow \xi & \downarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{Sch}}(-, f) \\ & & \mathrm{hom}_{\mathbf{Sch}}(-, X). \end{array}$$

2. 对任意包含 k 的代数闭域 K ,

$$\eta_K : \mathcal{M}(\mathrm{Spec} K) \rightarrow \mathrm{hom}_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec} K, M)$$

都是一个双射,

那么称 M 是 \mathcal{M} 的一个粗模空间.

3 空间和层

定义. 设 $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 是 \mathcal{C} 上的范畴, 给定 \mathcal{F} 中的态射 $f : A \rightarrow B$, 若对任意 \mathcal{F} 中的对象 C 和态射 $g : C \rightarrow B$, 只要有 \mathcal{C} 中的交换图

$$\begin{array}{ccc} P(C) & & \\ \tilde{h} \downarrow & \searrow P(g) & \\ P(A) & \xrightarrow{P(f)} & P(B), \end{array}$$

都存在唯一 \mathcal{F} 中的态射 $h : C \rightarrow A$ 使得 $P(h) = \tilde{h}$, 即

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ h \downarrow & \searrow g & \\ A & \xrightarrow{f} & B, \end{array}$$

则称 f 是笛卡尔态射 (cartesian morphism).

定义. 设 $P : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 是 \mathcal{C} 上的范畴, 若对任意 \mathcal{F} 中的对象 A 和 \mathcal{C} 中的态射 $f : X \rightarrow P(A)$, 都存在 \mathcal{F} 中的笛卡尔态射 $g : C \rightarrow A$ 使得 $P(g) = f$

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\quad g \quad} & A \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{f=P(g)} & P(A),
 \end{array}$$

则称 \mathcal{F} 是 \mathcal{C} 上的纤维范畴 (fibred category).

例 3. 设 \mathcal{C} 是给定的范畴, A 是 \mathcal{C} 中的对象, 于是我们有 A 上的斜线范畴 \mathcal{C}/A 和自然的函子 $P: \mathcal{C}/A \rightarrow \mathcal{C}$. 对任意的 $f/A: B \rightarrow D$, 由定义 $P(f/A) = f: B \rightarrow D$. 给定 \mathcal{C}/A 中的对象 $u: B \rightarrow A$ 和 $w: D \rightarrow A$ 对任意 \mathcal{C} 中的交换图

$$\begin{array}{ccc}
 C & & \\
 g \downarrow & \searrow h & \\
 B & \xrightarrow{f} & D,
 \end{array}$$

给出了 \mathcal{C}/A 中的对象 $C \xrightarrow{w \circ h = w \circ f \circ g} D$, 且由于 $w \circ f = u$, $g: C \rightarrow B$ 是 \mathcal{C}/A 中的态射, 这意味着 \mathcal{C}/A 中的态射都是笛卡尔的.

例 4. 设 \mathcal{C} 是给定的范畴, 且其中任意的纤维积存在, 定义范畴 $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ 如下, 它的对象是 \mathcal{C} 中的态射 $f: X \rightarrow A$, 态射 $\alpha = (h, k): f: X \rightarrow A \Rightarrow g: Y \rightarrow B$ 是交换图

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & A \\
 h \downarrow & & \downarrow k \\
 Y & \xrightarrow{g} & B.
 \end{array}$$

考虑函子 $P: \mathcal{C}^{\rightarrow} \rightarrow \mathcal{C}$, 它将 $\mathcal{C}^{\rightarrow}$ 中对象 $f: X \rightarrow A$ 映到 A , 将态射 $\alpha = (h, k)$ 映到 $k: A \rightarrow B$. 我们要证明 α 是笛卡尔态射当且仅当 X 是 α 的定义交换图的拉回, 简称 α 是一个笛卡尔图.

首先我们考虑若 $\alpha = (h, k)$ 是一个笛卡尔态射, 由定义如果我们有 \mathcal{C} 中的交换图

$$\begin{array}{ccccc}
 Z & & & & \\
 \downarrow u & \searrow u & & \searrow g & \\
 & X & \xrightarrow{k} & Y & \\
 & \downarrow u & & \downarrow u & \\
 C & & & & \\
 & \searrow u & & \searrow g & \\
 & A & \xrightarrow{k} & B, &
 \end{array}$$

其中 g

定义. \mathcal{C} 上的纤维范畴 $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{C}$ 若满足对任意 \mathcal{C} 中的对象 A , $\mathcal{F}(A)$ 都是群胚, 即 \mathcal{F} 中被映到 id 的态射都是可逆的, 则称 \mathcal{F} 是群胚纤维范畴 (category fibred over groupoid).

定理 3.1 (Yoneda).

定义. Grothendieck 拓扑

定义. 设 \mathcal{D} 上的范畴 $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{D}$ 是纤维范畴, $G: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ 是函子, 则对象是配对 $(X \in \text{ob } \mathcal{C}, A \in \mathcal{F}(f(X)))$, 态射 $f: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ 是满足 $P(f) \in \text{hom}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(f(X)), \mathcal{F}(f(Y)))$ 的 \mathcal{F} 中的态射 $f: X \rightarrow Y$ 的范畴 $G^{-1}(\mathcal{F})$ 被称为 \mathcal{F} 关于 G 的拉回.

$$\begin{array}{ccc}
 G^{-1}(\mathcal{F}) & \longrightarrow & \mathcal{F} \\
 G^{-1}(P) \downarrow & & \downarrow P \\
 \mathcal{C} & \xrightarrow{G} & \mathcal{D}.
 \end{array}$$

在上面的定义中，我们没有把纤维范畴的拉回写为“对称”的，这是因为，虽然我们可以证明 $G^{-1}(\mathcal{F})$ 就是范畴的纤维积 $\mathcal{F} \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}$ ，但是下面的事情说明定义对于纤维性并不对称：

引理 3.1. $G^{-1}(\mathcal{F})$ 是 \mathcal{C} 上的纤维范畴。

定义.

4 叠

定义. 设 F, G 是函子 $\mathcal{C}^{\circ} \rightarrow \mathbf{Set}$ ，自然态射 $\eta: F \Rightarrow G$ 若满足对任意 \mathcal{C} 中的对象 A 和自然态射 $\epsilon: h_A \Rightarrow G$ ，纤维积函子

$$h_A \times_G F: \mathcal{C}^{\circ} \rightarrow \mathbf{Set}$$

是可表的，则称 F 是相对于 G 可表的 (representable relative to G).

定义. 给定函子 $F, G: \mathbf{Aff}_S^{\circ} \rightarrow \mathbf{Set}$

例 5. 我们来验证若 X 是 S 上的概型，则自然的忘却函子 $P: \mathbf{Sch}_X \rightarrow \mathbf{Sch}_S$ 是叠. 另一方面，任取

5 几种不同的商

接下来我们会一直有如下假定：给定一个概型 S ，我们考虑范畴 \mathbf{Sch}_S 中的群对象 G/S ，如果作为概型 G 是光滑的，则称 G 是一个 S 上的代数群 (algebraic group).

例 6. 假设 k 是域， $S := \operatorname{Spec} k$ ，那么以下是代数群：

1. $\mathbb{G}_m := \operatorname{Spec} k[t, t^{-1}]$.
2. $\mathbb{G}_a := \operatorname{Spec} k[x]$.
3. $GL_n := \operatorname{Spec} k[x_{i,j}, \det^{-1}]_{1 \leq i,j \leq n}$.

设 G 作用在概型 X 上， T 是另一个概型， $f: T \rightarrow X$ 是一个 T 值点，那么我们有映射 $G \times_S T \xrightarrow{\operatorname{id}_G \times f} G \times_S X \xrightarrow{\sigma} X$ ，进而可以定义

$$\psi_f^G: G \times_S T \rightarrow G \times_S T$$

为 $(\sigma \circ (\operatorname{id}_G \times f), p_2)$ ，简记为 ψ_f . 我们称 ψ_f 的像为 f 的轨道 (orbit)，记为 $o(f)$. 另一方面， $X \times_S T$ 是 T 上的概型，于是我们自然地有截面

$$(f, \operatorname{id}_T): X \times_S T \rightarrow T.$$

我们定义 $S(f)$ 为纤维积

$$\begin{array}{ccc}
S(f) & \longrightarrow & T \\
\downarrow & & \downarrow (f, \text{id}_T) \\
G \times_S T & \xrightarrow{\psi_f} & X \times_S T,
\end{array}$$

这是 G 的子群.

定义. 给定 \mathbf{Sch}_S 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \rightarrow X$, 若存在 S 上的态射 $\varphi : X \rightarrow Y$ 满足

1. 有交换图:

$$\begin{array}{ccc}
G \times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \\
p_2 \downarrow & & \downarrow \varphi \\
X & \xrightarrow{\varphi} & Y,
\end{array}$$

2. Y 在上图意义下具有泛性质, 即若有 S 上的概型 Z 和态射 $\phi : X \rightarrow Z$ 满足图

$$\begin{array}{ccc}
G \times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \\
p_2 \downarrow & & \downarrow \phi \\
X & \xrightarrow{\phi} & Z,
\end{array}$$

交换, 则存在唯一的态射 $\chi : Y \rightarrow Z$ 使得 $\phi = \chi \circ \varphi$,

那么称 Y 是 G 作用在 X 上的一个范畴商 (categorical quotient).

换言之, G 作用在 X 上的范畴商是作用映射和投影映射的推出.

定义. 给定 \mathbf{Sch}_S 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \rightarrow X$, 若存在 S 上的态射 $\varphi : X \rightarrow Y$ 满足

1. 有交换图:

$$\begin{array}{ccc}
G \times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \\
p_2 \downarrow & & \downarrow \varphi \\
X & \xrightarrow{\varphi} & Y,
\end{array}$$

2. φ 是满态射, 且

$$\Psi = (\sigma, p_2) : G \times_S X \rightarrow X \times_S X$$

的像是 $X \times_Y X$,

3. φ 是拓扑商, 也就是说, $U \subseteq Y$ 是开集当且仅当 $\varphi^{-1}(U) \subseteq X$ 是开集,

4. Y 的结构层 \mathcal{O}_Y 是 $\varphi_* \mathcal{O}_X$ 的包含不变函数的子层, 即对于 $f \in \Gamma(U, \varphi_* \mathcal{O}_X) = \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathcal{O}_X)$ 是 $\Gamma(U, \mathcal{O}_Y)$ 的元素当且仅当下图交换

$$\begin{array}{ccc}
G \times_S \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sigma} & \varphi^{-1}(U) \\
p_2 \downarrow & & \downarrow F \\
\varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{F} & \mathbb{A}^1,
\end{array}$$

其中 F 是 f 对应的态射,

那么称 Y 是 G 作用在 X 上的一个几何商 (geometric quotient).

定义. 给定 \mathbf{Sch}_S 中的群作用 $\sigma: G \times_S X \rightarrow X$ 和作用的范畴/几何商 $\varphi: X \rightarrow Y$, 若对任意 $f: Y' \rightarrow Y$, 下面的纤维积

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \longrightarrow & Y' \\ f' \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

都使 f' 是一个范畴/几何商, 则称 Y 是万有范畴/几何商 (universal - quotient). 若以上只对平坦 (flat) 的成立, 则称 Y 是一致范畴/几何商 (uniform - quotient)

命题 5.1. 设 $\varphi: X \rightarrow Y$ 是 G 作用在 X 上的几何商, 那么 $\varphi: X \rightarrow Y$ 也是范畴商.

命题 5.2. 设 X, Y 都是 S 上的不可约、正规、Noetherian 概型, $\varphi: X \rightarrow Y$ 是有限型的、dominating 态射, Y 中 generic point 的剩余域是特征 0 的,

6 可约 (reductive) 代数群

定义. 设 G 是代数群, 一个 G 的表示 (representation) 就是一个态射 $\rho: G \rightarrow GL_n$, 且满足如下交换图

$$\begin{array}{ccc} G \times_S G & \xrightarrow{\mu} & G \\ \rho \times \rho \downarrow & & \downarrow \rho \\ GL_n \times_S GL_n & \xrightarrow{m} & GL_n, \end{array}$$

其中 μ 是 G 中的乘法, m 是 GL_n 中的乘法.

假设 G 是线性代数群, $S := \Gamma(G, \mathcal{O}_X)$, 那么群乘法自然诱导了一个环同态 $\hat{\mu}: S \rightarrow S \otimes_k S$, 单位态射诱导了 $\hat{i}: S \rightarrow k$, 因此对任意一个 k 向量空间 V , 我们可以定义 G 在 V 上的对偶作用为线性空间的同态

$$\hat{\sigma}: V \rightarrow S \otimes_k V,$$

满足

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & S \otimes_k V \\ \hat{\sigma} \downarrow & & \downarrow \hat{\mu} \otimes \text{id}_V \\ S \otimes_k V & \xrightarrow{\text{id}_S \otimes \hat{\sigma}} & S \otimes_k S \otimes_k V \end{array}$$

和

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\hat{\sigma}} & S \otimes_k V \xrightarrow{\hat{i} \otimes \text{id}_V} V \\ & \searrow \text{id}_V & \nearrow \end{array}$$

定义. 设 G 是代数群, $\hat{\sigma}$ 是 G 在 V 上的对偶作用, 若 V 的子空间 W 满足 $\hat{\sigma}(W) \subseteq S \otimes_k W$, 则称 W 是 V 的不变子空间 (invariant subspace).

引理 6.1. 设 G 是代数群, $\hat{\sigma}$ 是 G 在 V 上的对偶作用, 那么 V 是自己有限维不变子空间的并 (逆极限).

定义. 设 G 是代数群, 若它的 radical 是一个环 (torus), 那么称 G 是 reductive 的.

定理 6.1. 设 X 是 k 上的仿射概形, G 是可约代数群, 且 $\sigma: G \times_k X \rightarrow X$ 是 G 在 X 上的作用. 那么作用存在一致范畴商 (Y, φ) , 且 φ 是 *universally submersive*, 且 Y 是仿射概形. 若 X 还是代数的, 那么 Y 也是 k 上代数的.

7 BG

定义. 设 \mathcal{C} 位形, 且 \mathcal{F} 是 \mathcal{C} 上的群层

定义. 设 G 是代数群, $P, X \in \mathbf{Sch}_S$ 且 $\pi: P \rightarrow X$ 是光滑的满态射, 若存在态射 $\sigma: G \times_S P \rightarrow P$ 满足

1. 下图交换:

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times P & \xrightarrow{(\mu, \text{id}_P)} & G \times P \\ (\text{id}_G, \sigma) \downarrow & & \downarrow \sigma \\ G \times P & \xrightarrow{\sigma} & P, \end{array}$$

2. 存在恒等截面 $e: X \rightarrow P$ 满足

$$\begin{array}{ccccc} P & \xrightarrow{(e, \text{id}_P)} & G \times_S P & \longrightarrow & P \\ & \searrow & \text{id}_P & \nearrow & \\ & & & & \end{array}$$

交换,

3.

8 GIT 商

A 附录: 点函子

这种观点来自于 Grothendieck.

定义. 设 X 是 S 上的概型, 则 X 的一个 T 点是一个态射 $f: T \rightarrow X$ 满足交换图

$$\begin{array}{ccc} T & \xrightarrow{f} & X \\ & \searrow & \swarrow \\ & S. & \end{array}$$

我们考虑如下的例子: $X = \text{Spec } \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1)$, 由于 $\mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \cong \mathbb{C}$ 是个域, 故该概形只有一个点, 但是如果考虑 $X_{\mathbb{C}} = \text{Spec } \mathbb{C}[x]/(x^2 + 1) = \text{Spec}(\mathbb{C}[x]/(x + i) \times \mathbb{C}[x]/(x - i))$. 注意到 X 不是一个 \mathbb{R} 点 (因为若有环同态 $\varphi: \mathbb{R}[x]/(x^2 + 1) \rightarrow \mathbb{R}$, 那么 $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ 满足 $0 = \varphi(x^2 + 1) = \varphi(x)^2 + 1$), 这很容易理解——在这个点上的层不是 \mathbb{R} . 对于一个概型, 即便它是定义在

例 7. 考虑函子

$$\begin{aligned} F : \mathbf{CommRing} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ R &\mapsto R^\times, \end{aligned}$$

可以证明 $F \cong \text{hom}_{\mathbf{CommRing}}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}], -)$.

例 8. 这个例子是定理 2.1 的类比，意在说明，按照点函子的观点，一个概型 $X \rightarrow S$ 就是一个函子

$$(\mathbf{Sch}/S)^\circ \rightarrow \mathbf{Set},$$

反过来一个可表的函子也给出了同构唯一的概型，但我们可以考虑定义域更小的函子

$$R\text{-}\mathbf{Algebra} \rightarrow \mathbf{Set},$$

也给出同样的概型. 给定函子

$$\begin{aligned} F : R\text{-}\mathbf{Algebra} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ A &\mapsto \{(P, s_1, \dots, s_r) \mid \text{满足 } P \text{ 是投射 } A \text{ 模, } s_i \in P \text{ 且 } s_1, \dots, s_r \text{ 生成 } P\} / \sim, \end{aligned}$$

其中 $(P, s_1, \dots, s_r) \sim (Q, t_1, \dots, t_r)$ 当且仅当存在 A 模的同构 $f : P \rightarrow Q$ 使得 $f(s_i) = t_i$, 那么可以证明这个函子

命题 A.1. 设 (X, \mathcal{O}_X) 是概型，则任取一点 $x \in X$ ，存在概型 (T, \mathcal{O}_T) 和态射 $f : T \rightarrow X$ 满足 $x = f(T)$.

首先我们证明

引理 A.1. 任意给定概型 X 和局部环 (R, \mathfrak{m}) ，那么我们有集合的一一对应

$$\{\text{概型间的态射 } f : \text{Spec } R \rightarrow X\} \rightleftarrows \{X \text{ 中的点 } x \text{ 和局部环的局部同态 } \varphi : \mathcal{O}_{X,x} \rightarrow R\}.$$

我们考虑复合函子

$$\mathbf{Sch}_S \rightarrow \text{Fun}(\mathbf{Sch}_S^\circ, \mathbf{Set}) \rightarrow \text{Fun}(\mathbf{Ring}, \mathbf{Set}),$$

其中第一个是 Yoneda 嵌入，第二个函子是 $\text{Fun}(\text{Spec } -, \mathbf{Set})$. 第一个函子显然是满忠实的，但第二个函子不是的. 考虑 $\text{hom}_{\mathbf{Sch}_S}(\text{Spec } -, \mathbb{P}_S^n)$ 和 $\text{hom}_{\mathbf{Sch}_S}(\text{Spec } -, \mathbb{P}_S^m)$ 两个函子，它们都是映到空集的常值函子（从仿射概型到射影），但他们间有非平凡的态射诱导的自然变换. 问题在于它们的复合是满忠实的