抽象代数

2022 年 3 月 4 日

目录

第一部分

群论

第一章　群作用

1.1　Sylow 定理

命题 1.1. 设 G 是有限群, H 是 G 的子群, G 包含有一个 *p-Sylow* 子群 P, 则存在 $g \in G$ 使得 $H \cap gPg^{-1}$ 是 H 的 *p-Sylow* 子群.

证明. 令

$$X := G/P$$

是 P 在 G 中的左陪集的全体，G 按照左乘作用在 X 上. 注意到对任意 $x = gP \in X$，由定义

$$\begin{aligned} H_x &= \{h \in H \mid hgP = gP\} \\ &= H \cap G_x \\ &= H \cap gPg^{-1}, \end{aligned}$$

于是我们只需要证明存在 $x \in X$ 使得 $p \nmid [H : H_x]$，这就意味着 H_x 是一个 p-Sylow 子群. 如果不满足，则

$$\begin{aligned} |X| &= \sum_{i=1}^{h} |X_i| = \sum_{i=1}^{h} |H \cdot x_i| \\ &= \sum_{i=1}^{h} [H : H_x], \end{aligned}$$

进而 $p \mid |X|$，这与 P 是 G 的 p-Sylow 子群矛盾. $\square$

定理 1.2. 任意有限群 G 都有 *p-Sylow* 子群，其中 $p \mid |G|$ 是一个素数.

证明. $G \hookrightarrow \mathscr{S}_n \hookrightarrow$ $\square$

定理 1.3. 任意有限群 G 都有 *p-Sylow* 子群，其中 $p \mid |G|$ 是一个素数.

证明. $G \hookrightarrow \mathscr{S}_n \hookrightarrow$ $\square$

1.2　两个特殊的单群

引理 1.1 (Iwasawa)**.** *设群 G 作用在集合 X 上是双传递的，并且*

(i) G 是完备 (perfect) 的，即 G 没有非平凡的 Abel 商群；

(ii) 存在 $x \in X$，稳定子 G_x 包含一个 Abel 正规子群 A，使得

$$\bigcup_{g\in G} gAg^{-1}$$

生成 G，

则 G/H 是单群，其中 H 是 G 作用在 X 上的核.

证明. 设 N 是 G 的真包含 H 的正规子群，我们希望证明 $N = G$.

设 x 是条件中描述的元素，取 $M := G_x$，由双传递知，M 是极大子群，而且 $H \subseteq M$. 于是，$NM = M$ 或 G. 若 $NM = M$，取 $h \in N, g \in G$，那么 $g^{-1}hg \in N \subseteq M$，进而 $hgM = gM$，这意味着 h 作用在 $G/M = G/G_x = X$ 上是稳定的，即 $h \in H$，矛盾. 于是，$NM = G$.

令 $\tilde{G} := G/N$，$\tilde{A}$ 是 A 在 $\tilde{G}$ 下的像，那么映射

$$M \to G \to \tilde{G}$$

是满射，于是 $\tilde{A}$ 是 $\tilde{G}$ 的正规子群. 注意到 $\bigcup_{g\in G} gAg^{-1}$ 生成了 G，我们自然有 $\bigcup_{g\in G} g\tilde{A}g^{-1}$ 生成了 $\tilde{G}$. 这意味着 $\tilde{A} = \tilde{G}$，即 $\tilde{G}$ 是 Abel 群，根据 (i) 我们有 $N = G$. □

定理 1.4. *设 K 是域，n 是不小于 2 的整数，$|K| > 3$，则 $PSL_n(K)$ 是单群.*

证明. 考虑 $G := SL_n(K)$ 作用在 $X := \mathbb{P}^{n-1}(K)$，我们需要验证：

(i) G 作用在 X 上是双传递的. 事实上，G 作用在 X 上是 n-传递的.

(ii) 取 $x := [1, 0, \cdots, 0]$，于是

$$G_x = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \right\},$$

其中

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \right\}$$

是我们希望的 Abel 正规子群. 设 $1 \le i, j \le n$ 是不同的整数，那么 $I + cE_{i,j} \in SL_n(K)$，并且 $I + cE_{i,j}$ 与 A 中的某个元素共轭. 但是

$$SL_n(K) = gen.I + cE_{i,j}.$$

最后证明 G 是完备的. 这只要证明 $\{I + cE_{i,j}\}$ 是交换子. □

Group with operators:

定义. Fix a set Ω, an Ω−group (or a group with operator set Ω) is a group $(G, -)$ s.t. for all $x \in \Omega$ and $g \in G$, we have a $g^x \in G$ satisfying $(g_1 g_2)^x = g_1^x g_2^x$ for all $g_1, g_2 \in G$.

Example: $\Omega = \emptyset \to$ usual groups

A Ω-subgroup is H of G is a subgroup is a subgroup stable under Ω actions.

设 G 是幂零群，H 是 G 的真子群. 那么 H 也是 $N_G(H)$ 的真子群.

证明. 对 G 的幂零长度进行归纳.

取 $A = Z(G)$，于是 G/A 的幂零长度小于 n. 若 $A \subseteq H$，则归纳假设说明. 若 $A \subsetneq H$，则我们已经找到 H 之外的元素. □

设 G 是有限群，则下列描述等价:

(i) G 是幂零的;

(ii) G 是 p 群的积;

(iii) 对任意素数 p，G 包含唯一的 p-Sylow 子群;

(iv) G 中任意两个互素阶元素交换.

第二章　习题

习题 2.1. 设 S 是一个半群，那么下面论断等价：

(i) $\forall a, b \in S$，$ab = a$ 或 $\forall a, b \in S$，$ab = b$；

(ii) $\forall a, b, c, d \in S$，$ac = bd \Rightarrow a = b$ 或 $c = d$；

(iii) 设 f 是 S 上的任意映射，$f(ab) = f(a)f(b)$.

习题 2.2. 设 G 是一个半群. 证明 G 是一个群当且仅当方程 $gx = h$ 和 $xg = h$ 对于任意 $g, h \in G$ 成立.

证明. 只需要证明单位元的存在性即可.

若 $gx_0 = g$，取 $z \in G$ 使得 $zg = h$，于是 $hx_0 = h$ 对于任意 $h \in G$ 成立. 若 $gx_1 = g = x_2 g$，则 $x_1 = x_2 x_1 = x_2$. □

习题 2.3. 我们如此定义平面 $\mathbb{R}^2$ 的旋转变换群 G：它的元素是 R_θ 其中 $\theta \in [0, 2\pi)$，元素 R_φ 与 R_θ 的乘法定义为

$$R_\varphi * R_\theta = \begin{cases} R_{\varphi+\theta} & 若 \varphi + \theta < 2\pi \\ R_{\varphi+\theta-2\pi} & 若 \varphi + \theta \geq 2\pi \end{cases}.$$

证明 $G \cong S^1 = \mathbb{C}^* \cong \mathrm{SO}(2)$.

习题 2.4. 任意给定群 G 和 Abel 群 A，求证任意群同态 $\varphi : G \to A$ 都有唯一的分解

$$\varphi = G \xrightarrow{\pi} G' \xrightarrow{\tilde{\varphi}} A,$$

其中 $\pi : G \to G'$ 是自然的投影映射.

证明. 任取 $x, y \in G$，那么根据 φ 是群同态且 A 是 Abel 群，

$$\varphi([x, y]) = \varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x^{-1})\varphi(y^{-1}) = 1 \in A,$$

于是如下定义的

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi} : G' &\to A \\ \bar{x} &\mapsto \varphi(x) \end{aligned}$$

是良定义的映射，这样就完成了证明. □

习题 2.5. 设 N 是群 G 的正规子群，则 G/N 交换当且仅当 $G' \subseteq N$.

习题 2.6. 设群 G 满足 $\forall g \in G$，$g^2 = 1$. 求证 G 是 Abel 群.

证明. 任取 $g, h \in G$，由条件知 $(gh)^2 = 1$，于是 $ghgh = 1$. 但是 $g = g^{-1}$ 且 $h = h^{-1}$，于是 $g^{-1}hgh^{-1} = 1$，即 $gh = hg$. □

习题 2.7. 设群 $G := \langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = 1 \rangle$. 求证

$$G \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{I, -I\}$$

[提示：$a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.]

习题 2.8. 设 G 是有限群，群同态 $\varphi : G \to G$ 满足 $\varphi(x) = x^n$. 求证 φ 是自同构当且仅当 $(n, |G|) = 1$.

证明. 一方面，若 $(n, |G|) = 1$，任取 $g \in \mathrm{Ker}\ \varphi$，那么

$$1 = \varphi(g) = g^n,$$

于是若 $g \neq 1$，则存在素数 $p \mid (n, |g|)$，但 $p \mid |G|$，因此与 $(n, |G|) = 1$ 矛盾，故 $G = 1$. 由于 G 是有限的，故 φ 也是满射，因此是自同构.

另一方面，若 $\varphi : G \to G$ 是自同构，若 $(n, |G|) \neq 1$，则存在素数 $p \mid (n, |G|)$，由 Cauchy 定理，存在 $g \in G$ 使得 $|g| = p$，故

$$\varphi(g) = g^n = g^{pt} = (g^p)t = 1,$$

与 $\varphi : G \to G$ 是自同构矛盾. □

习题 2.9. 给定群 G 和子群 H, K，映射 $\varphi : G/H \to G/K$ 是 G 等变的，即对任意 $g \in G$，$\varphi(g \cdot g_i H) = g \cdot \varphi(g_i H)$，其中 G 在左陪集 $G/H, G/K$ 有左乘诱导的作用. 求证 φ 满足

$$\begin{aligned} \varphi : G/H &\to G/K \\ g_i H &\mapsto g_i t K \end{aligned}$$

其中 t 是 G 中的元素满足 $t^{-1}Ht \subseteq K$.

证明. □

习题 2.10. (i) 求证 A_n 作用在 $\{1, \cdots, n\}$ 是 $(n-2)-$ 传递的.

(ii) 设群 G 作用在 X 上是 2-传递的，则对任意 $x \in X$，G_x 是 G 的极大子群.

(iii) 由前面的结果证明 A_n 是单群.

习题 2.11. 设 G 是一个有限群，H 是 G 得一个真子群，证明存在 G 的一个等价类 C 使得 $H \cap C = \emptyset$.

证明. 由 Jordan 引理，存在一个 G 的元素 g 使得 g 左乘作用在 $X := G/H$ 上无不动点，于是 $g \cdot aH \neq aH$. 故 $a^{-1}ga \notin H$ 对任意 $a \in G$ 成立，取 $C = G \cdot g$ 即可. □

习题 2.12. 有限群 G 非平凡地作用在集合 A 上，满足 $|G| > |A|!$，求证 G 存在非平凡的正规子群.

证明. 考虑映射

$$\varphi : G \to \mathfrak{S}_A$$
$$g \mapsto \sigma_g$$

□

习题 2.13 (不动点定理 (fixed points theorem)). 设 G 是一个 p 群，作用在一个有限集 X 上，令 $X^G := \{x \in X \mid gx = x, \forall g \in G\}$，求证

$$|X| \equiv |X^G| \pmod p.$$

证明. 令 $\mathcal{O}$ 是一个 G-轨道，满足 $\mathcal{O} \subseteq X - X^G$，于是存在 $x \in X$ 使得 $\mathcal{O} = G \cdot x$. 由稳定子等式知 $|\mathcal{O}| = |G \cdot x| = [G : G_x]$. 但 G 是一个 p 群，故 $[G : G_x]$ 是 p 的次方，故 $|\mathcal{O}| \equiv 0 \pmod p$. 注意到 $X - X^G$ 是这样一些轨道的无交并，故

$$|X| - |X^G| = \left| \coprod_{\mathcal{O} \subseteq X - X^G} \mathcal{O} \right| = \sum_{\mathcal{O} \subseteq X - X^G} |\mathcal{O}| \equiv 0 \pmod p.$$

□

习题 2.14. 设 G 是一个有限群，素数 p 整除 $|G|$. 求证存在 G 的 p 阶元素.

证明. 定义

$$X := \{(g_1, \cdots, g_p) | g_i \in G, g_1 \cdots g_p = 1\},$$

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 按照如下方式作用在 X 上：

$$1 \cdot (g_1, \cdots, g_p) = (g_p, g_1, \cdots, g_{p-1}).$$

注意到 $g_p g_1 \cdots g_{p-1} = g_p(g_1 \cdots g_{p-1} g_p) g_p^{-1} = 1$，群作用是良定义的. 注意到本质上这 p 个坐标中 $p-1$ 个是自由的，于是 $|X| = |G|^{p-1} \pmod p$. 考虑

$$X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} = \{(g, \cdots, g) | g \in G, g^p = 1\},$$

于是 $|X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}| = \#\{(g, \cdots, g) | g \in G, g^p = 1\}$. 由不动点定理，

$$|X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}| \cong |X| \cong 0 \pmod p.$$

但是 $(1, \cdots, 1) \in X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$，故 $|X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}| \geq p$. □

习题 2.15. 设 p 是一素数，$G = GL_n(F_p)$，写出一个 G 的 Sylow-p 子群，算出它的阶并求出 G 中全部 Sylow-p 子群的个数.

证明. $|G| = (p^n - 1)(p^n - p) \cdots (p^n - p^{n-1})$，于是 $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$ 恰好整除 $|G|$，因而 Sylow-p 子群阶数为 $p^{\frac{n(n-1)}{2}}$. 由此，显然所有对角元素为 1 的上三角矩阵组成的子群是 G 的 Sylow-p 子群，记为 U.

由 Sylow 第二定理，为计算 Sylow-p 子群个数，我们只需要求得 U 的所有共轭子群的个数，设 X 是所有 U 的共轭子群组成的集合，$N = \{g \in G | gUg^{-1} = U\}$ 是 U 的正规化子，于是由计数公式，我们有

$$|G| = |X||U|.$$

另一方面，容易验证 N 是所有上三角矩阵组成的子群，故 $|N| = (p-1)^n p^{\frac{n(n-1)}{2}}$，于是 □

习题 2.16. 设 21 阶群 G 中元素 g 的等价类 $C(g)$ 的阶为 3, 试求 g 的阶.

证明. 由计数公式，$|Z(g)|=7$，故 $|g|\neq 21$，否则 G 为循环群. 若 $|g|=3$，则除 g^n 外，存在 $h\in G$ 使得 $gh=hg$，由于 $h\in Z(g)$ 因此 $|h|=7$，这样与 $|Z(g)|=7$ 矛盾，于是 $|g|=7$. □

习题 2.17. 12 阶群 G 含有一个 4 阶等价类，证明 G 的中心是平凡的.

证明. 反设 $Z(G)$ 不平凡，则存在 $x\in G$ 满足 $x\neq 1$ 且与 G 中所有元素交换. 设 $g\in G$ 的等价类是四阶，故 $Z(g)$ 是 G 的三阶循环子群；另一方面显然 $x\in Z(g)$，因此 x 的阶恰为 3，即 $Z(G)$ 有 3 个不同的元素. 考虑类方程

$$12=1+1+1+|C_1|+|C_2|+4$$

只能有 $|C_1|=2,|C_2|=3$. 但这导致存在元素的中心化子阶为 4，从而 $Z(G)$ 不能是其子群，矛盾. □

习题 2.18. 设群 G 的自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 是循环群，证明 G 是交换群.

习题 2.19. 设群 G 作用在集合 X 上，使得所有的轨道都是无限集. 求证对 X 的任意有限子集 A,B，存在 $g\in G$ 使得 $gA\cap B=\emptyset$.

习题 2.20. 设 H 是有限群 G 的子群, G 有 p-Sylow 子群 S. 求证存在 $g\in G$ 使得 $H\cap gSg^{-1}$ 是 H 的 p-Sylow 子群.

习题 2.21. 设 $B_3:=\langle\sigma_1,\sigma_2\mid\sigma_1\sigma_2\sigma_1=\sigma_2\sigma_1\sigma_2\rangle$，$PSL_2(\mathbb{Z}):=\langle u,v\mid u^2,v^3\rangle$，验证

$$\begin{aligned}\varphi: B_3&\to PSL_2\\ \sigma_1&\mapsto v^{-1}u\\ \sigma_2&\mapsto u^{-1}v^2\end{aligned}$$

是满射，并求它的核. 求证 $Z(PSL_2(\mathbb{Z}))$ 是平凡的.

第二部分

环论

第三章　环的基本性质

3.1　主理想整环

第四章　环的因子分解

4.1　Euclid 整环和主理想整环

引理 4.1. 设 R 是主理想整环，则 $\forall a, b \in R$，存在 $u, v \in R$ 使得 $ua + vb = (a, b)$.

证明. 令 $I = \{ra + sb \mid r, s \in R\}$，显然 I 是 R 的理想，且 $I \subseteq ((a, b))$，存在 $f \in R$ 使得 $I = (f)$，其中 $((a, b))$ 是由 a, b 的最大公约数生成的理想，$f \mid a$ 且 $f \mid b$. 反设 $I \subsetneqq ((a, b))$，那么 $(a, b) \mid f$ 但 $f \nmid (a, b)$，这与 (a, b) 是 a, b 的最大公因数矛盾. □

引理 4.2. 设 R 是主理想整环，$f(x) \in R[x]$，若 $\alpha \in \mathrm{Frac}(R)$ 满足 $f(\alpha) = 0$，则 $\alpha \in R$.

4.2　唯一分解整环

命题 4.1. 设 R 是整环，且任意元素 $a \in R$ 都可以被分解为不可约元素的成绩，那么 R 是唯一分解整环当且仅当所有 R 的不可约理想都是素理想.

例 4.1. 求方程 $y^2 = x^3 - 1$ 的所有整数解.

证明. 我们考虑环 $\mathbb{Z}[i]$ 中的分解

$$x^3 = y^2 + 1 = (y + i)(y - i),$$

注意到 $y + i$ 和 $y - i$ 是互素的. 这因为，如若不然，我们可以找到 Gauss 整数 π 使得 $\pi \mid (y + i, y - i)$. 于是 $\pi \mid (y + i) - (y - i) = 2i$，故不妨设 $\pi = 1 + i$. 同时注意到 $\pi \mid x^3$，因此在整数环中

$$2 = \pi\bar{\pi} \mid x^3\bar{x^3} = x^6,$$

故 x 是偶数. 但这意味着 $y^2 = x^3 - 1 \equiv 7 \pmod 8$，这就导致了矛盾.

由于环 $\mathbb{Z}[i]$ 是唯一分解整环，因此我们假设 $y+i=u\pi_1^{f_1}\cdots\pi_t^{f_t}$，其中 u 是单位，$\pi_i(i=1,\cdots,t)$ 是素数，$f_i(i=1,\cdots,t)$ 是整数. 再由唯一分解和之前证明的互素性，存在整数 $e_i(i=1,\cdots,t)$ 使得 $f_i=3e_i$ 成立，这意味着存在 $\alpha=a+bi$ 满足

$$v(y+i)=\alpha^3=(a+bi)^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i.$$

分别讨论 $v=\pm1,\pm i$ 的情形，我们得到要么 $a=\pm1,b=0$ 要么 $a=0,b=\pm1$，但总有 $y+i=i$. 于是整数为 $(1,0)$ 和 $(-1,0)$. $\square$

第五章 环

求证交换环的极大理想一定是素理想. [假设环 R 中的极大理想 $\mathfrak{m}$ 不是素理想，则存在 $ab \in \mathfrak{m}$ 满足 $a \notin \mathfrak{m}$, $b \notin \mathfrak{m}$. 构造 $I = \{c + ra | c \in \mathfrak{m},\ r \in R\}$. 证明 $\mathfrak{m} \subsetneqq I \subsetneqq R$.]

Solution 设 $\mathfrak{m}$ 是环 R 中的极大理想，且不是素理想，于是存在 $ab \in \mathfrak{m}$ 满足 $a \notin \mathfrak{m}$, $b \notin \mathfrak{m}$. 令 $I = \{c+ra|c \in \mathfrak{m},\ r \in R\}$, 显然 $\mathfrak{m} \subsetneqq I$. 任取 $c_1+r_1a,\ c_2+r_2a \in I$, 于是 $(c_1+r_1a)+(c_2+r_2a) = (c_1+c_2)+(r_1+r_2)a$, 由 $\mathfrak{m}$ 是理想 $c_1 + c_2 \in \mathfrak{m}$，因而 $(c_1 + r_1a) + (c_2 + r_2a) = (c_1 + c_2) + (r_1 + r_2)a \in I$；再任取 $c + ra \in I$, $s \in R$, 由 $\mathfrak{m}$ 是理想可知 $sc \in \mathfrak{m}$，故 $s(c + ra) = sc + (sr)a \in I$，即 I 是理想. 最后证明 $I \subsetneqq R$. 否则，存在 $c + ra \in I$ 使得 $c + ra = 1$，于是 $cb + rab = b$，注意到 c, $ab \in \mathfrak{m}$，这导致了 $b \in \mathfrak{m}$，矛盾. 于是理想 I 满足 $\mathfrak{m} \subsetneqq I \subsetneqq R$, 这与 $\mathfrak{m}$ 是极大理想矛盾，因此 $\mathfrak{m}$ 素理想. ■

习题 5.1. 证明

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

作为环同构于 $\mathbb{C}$.

习题 5.2. 证明

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$$

作为环同构于 $\mathbb{H}$.

试说明任意交换环都是某个集合上的映射. [考虑环 R 中元素在 $\operatorname{Spec} R$ 上的映射，$f \mapsto f + \mathfrak{p}$.]

习题 5.3. 设 k 是域，求 $k[x]/(x^2)$ 的所有素理想.

证明. 显然 (0) 不是素理想. 由于 $k[x]$ 主理想整环，故 $k[x]/(x^2)$ 也是主理想整环，因此其中的理想都是形如 $(p(x))/(x^2)$ 的. 由于在 $k[x]/(x^2)$ 中 $x^2 = 0$, 故 $(p(x))/(x^2)$ 由一个零次或一次多项式生成, 记为 $(p(x))/(x^2) = (ax + b)/(x^2)$. 若 $b \neq 0$，则在 $k[x]/(x^2)$ 中

$$(ax + b)\frac{ax - b}{-b^2} = \frac{a^2x^2 - b^2}{-b^2} = 1$$

因此 $(ax + b)/(x^2)$ 是单位理想，故只有素理想 (x). □

求证整环 R 上的齐次多项式的因子必为齐次多项式.

设 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是 R 上的多项式, 考虑 $\hat{f}(x_1, \cdots, x_n, t) = f(tx_1, \cdots, tx_n) \in R[x_1, \cdots, x_n, t]$, 则 $f(x_1, \cdots, x_n)$ 是齐次多项式当且仅当 $\hat{f}(x_1, \cdots, x_n, t) = t^d f(x_1, \cdots, x_n)$.

设 $f(x_1,\cdots,x_n)=g(x_1,\cdots,x_n)h(x_1,\cdots,x_n)$，于是

$$\hat{f}(x_1,\cdots,x_n)=\hat{g}(x_1,\cdots,x_n)\hat{h}(x_1,\cdots,x_n)=g(tx_1,\cdots,tx_n)h(tx_1,\cdots,tx_n)$$

另一方面，

$$\hat{g}(x_1,\cdots,x_n)=g_0+g_1t+\cdots+g_at^a$$
$$\hat{h}(x_1,\cdots,x_n)=h_0+h_1t+\cdots+h_bt^b$$

其中 $g_i,h_j\in R[x_1,\cdots,x_n]$ 且 $g_a,h_b\neq 0$. 由 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是齐次多项式知

$$f(x_1,\cdots,x_n)t^d=\hat{g}(x_1,\cdots,x_n)\hat{h}(x_1,\cdots,x_n)=(g_0+g_1t+\cdots+g_at^a)(h_0+h_1t+\cdots+h_bt^b)$$

看作整环 $R[x_1,\cdots,x_n]$ 上关于 t 的多项式展开并对比系数，可以递归地得到 $g_j=h_j=0,i\neq a,j\neq b$. ■

习题 5.4. 求证有限整环 R 必为除环.

Solution 任取 $s\in R$，构造环同态

$$\varphi_s:R\longrightarrow R \tag{5.1}$$
$$r\longmapsto sr \tag{5.2}$$

由 R 是整环知，φ_s 是 R 到自身的单同态，但 R 是有限的，故 φ_s 必然也是满同态，故存在 $v\in R$ 使得 $sv=\varphi_s(v)=1$. 同理，存在 $u\in R$ 使得 $us=1$，故 R 是除环. ■

习题 5.5. 求证若交换环 R 是整环且仅有有限多个理想，则 R 必为域.

Solution. 任取 $0\neq u\in R$，考虑理想

$$(u)\supseteq(u^2)\supseteq\cdots(u^n)\supseteq\cdots$$

是无穷多个理想，故存在正整数 m 使得 $(u^m)=(u^{m+1})$，因此存在 $v\in R$ 使得

$$u^m=cu^{m+1}.$$

根据消去律 $1=uv$，因此 R 中任意非零元素可逆，是域. □

设 R 是一个带单位元的环，$f:R\to R$ 是 R 上 Abel 群的自同态. 求证 $\forall a,b\in R,f(ab)=f(a)f(b)$ 或 $\forall a,b\in R,f(ab)=f(b)f(a)$ 当且仅当 $\forall a,b\in R$，$f(ab)=f(a)f(b)$ 或 $f(ab)=f(b)f(a)$.

Solution 令 $S_a=\{b\in R|f(ab)=f(a)f(b)\},T_b=\{a\in R|f(ab)=f(a)f(b)\}$，容易证明 S_a 和 T_b 是 R 的子群. 但是 $S_a\cup T_b=R$，故仅有平凡的情况. ■

求证 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 是唯一分解整环.

证明. 任取 $\alpha=a+b\sqrt{-2},\beta=c+d\sqrt{-2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$，在 $\mathbb{C}$ 中计算 $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{ac+2bd}{c^2+2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+2d^2}\sqrt{-2}=q+r\sqrt{-2}$，其中 $q,r\in\mathbb{Q}$. 取 $e=[q+\frac{1}{2}],f=[r+\frac{1}{2}]$，则 $|q-e|\leq\frac{1}{2},|r-f|\leq\frac{1}{2}$，进而

$$\begin{aligned}\alpha-(e+f\sqrt{-2})\beta &= (q+r\sqrt{-2})\beta-(e+f\sqrt{-2})\beta\\ &= [(q-e)+(r-f)\sqrt{-2})]\beta,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} |\alpha-(e+f\sqrt{-2})\beta| &= |(q-e)+(r-f)\sqrt{-2})||\beta| \\ &= (|q-e|^2+2|r-f|^2)|\beta| \\ &\leq \frac{3}{4}|\beta|<|\beta|. \end{aligned}$$

于是 $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$ 是 Euclid 整环，进而是唯一分解整环. □

习题 5.6. 设 R 是交换环，F 是 R 的分式域.$f(x),g(x)\in R[x]$，于是 $f(x),g(x)$ 自然地可以看作 $F[x]$ 中的元素. 证明 $f(x),g(x)$ 在 $R[x]$ 中的最大公因式同于在 $F[x]$ 中的最大公因式.

习题 5.7. 设整环 R 不是主理想整环. 求证 R 中存在极大的不能由一个元素生成的理想.

证明. 我们将用 Zorn 引理来证明这个事实. 令 $\mathcal{P}$ 为 R 中非主理想的全体，$I_1\subseteq I_2\subseteq\cdots I_n\subseteq\cdots$ 是 $\mathcal{P}$ 中的一条链，我们需要证明 $I:=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$ 是理想，且不是主理想.

任取 $a,b\in I$ 和 $r,s\in R$，由定义存在 m,n 使得 $a\in I_m,b\in I_n$. 假设 $m\leq n$，则 $a,b\in I_n$，因而 $ra+sb\in I_n\in I$，故 I 是理想. 若 I 是主理想，那么存在 $a\in R$ 使得 $I=(a)$. 但是根据定义，存在自然数 n 使得 $a\in I_n$，这样 $I_n\subseteq I=(a)\subseteq I_n$，$I_n$ 也是主理想，矛盾. 故 I 不是主理想. □

习题 5.8. 正文中我们证明了

习题 5.9. 设 F 是域，R 是 $\times_{i=1}^{n}F$ 的子环，且 R 作为 Abel 群是有限生成的. 若 R 是整环，求证任意非零元素 $(a_1,\cdots,a_n)\in R$ 满足 $\prod_{i=1}^{n}a_i\neq 0\in F$.

第三部分

模理论

第六章　模的基本理论

6.1　直和与直积

习题 6.1. 给定环同态 $\alpha : R \to A$，$f : R^m \to R^n$ 是 R 模同态，那么

1. f 由一个矩阵 $\left(f_{i,j}\right)_{\substack{i=1,\cdots,m,\\ j=1,\cdots,n}}$ 决定，其中

2. A 模同态 $f \otimes \mathrm{id} : A^m \to A^n$ 由矩阵 $\left(\alpha(f_{i,j})\right)_{\substack{i=1,\cdots,m,\\ j=1,\cdots,n}}$ 决定.

6.2　Hom 函子

定理 6.1.

$$\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R\left(M_i, N\right)$$

并且，如果我们有一族模同态 $f_i : M_i \to N$，那么有如下交换图

第七章　PID 上的模

7.1　Smith 标准型

定理 7.1. 设 F 是域，$R = F[x]$，矩阵 $A \in M_{m,n}(R)$. 则存在 $P \in GL_m(R)$ 和 $Q \in GL_n(R)$ 使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

证明. □

设 F 是域，V 是 F 上的有限维线性空间，$T : V \to V$ 是线性映射，于是 V 自然地是一个 $F[x]$ 模，其中 $x \cdot \alpha = T(\alpha)$. 选取 V 的一组基 $\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$，并且定义矩阵 A 使得

$$x \cdot \epsilon_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \epsilon_i,$$

再定义 $B = xI - A \in M_n(R)$，那么作为 R 模，$V \cong R^n / BR^n$.

第八章　函子与正合列

定理 8.1. 任意给定环 R 和 R 模 M，函子 $\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 是左正合的，即对任意 R 模短正合列

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

有正合列

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,A) \to \mathrm{Hom}_R(M,B) \to \mathrm{Hom}_R(M,C).$$

第九章　特殊的 R 模

9.1　投射模

定义. 设 R 是含幺环. 若左 R 模 P 满足对任意满同态 $g: M \to N$ 和任意模同态 $h: P \to N$，都存在 $\tilde{h}: P \to M$ 使得 $g \circ \tilde{h} = h$，即有如下交换图则称 P 是**投射模** (projective module).

第十章　模

习题 10.1. 求证 R 模 M 的零化子 $\mathrm{ann}\ M$ 是同构不变的，即若 R 模 N 与 M 同构，则 $\mathrm{ann}\ M = \mathrm{ann}\ N$.

习题 10.2. 设 m, n 是两个不同的正整数. 求证 $\mathbb{R}^m$ 和 $\mathbb{R}^n$ 是同构的 Abel 群.

证明. 我们只需要证明作为 $\mathbb{Q}$-向量空间 $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$，进而我们需要的结果是自然的.

我们可以找到 $\mathbb{R}^m$ 的一组基 $\{\epsilon_i\}_{i\in I}$（作为 $\mathbb{Q}$-向量空间）和 $\mathbb{R}^n$ 的一组基 $\{\eta_j\}_{j\in J}$. 这样我们只要证明 I 与 J 有相同的集合势即可. □

习题 10.3. 求证任给定环 R 中的理想 I, J，

$$R/I \otimes_R R/J \cong R/(I+J).$$

第四部分

域和 Galois 理论

第十一章　域理论和 Galois 理论

习题 11.1. 设 $F(\alpha)$ 是域 F 的扩张，$[F(\alpha):F]$ 是奇数. 求证 $[F(\alpha^2):F]=[F(\alpha):F]$.

习题 11.2. 设 F 是域，$A,B\in M_n(F)$. 求证 AB 和 BA 有相同的特征多项式.

证明. 考虑扩域 $F(y)$，则 $\det(yI-A)\neq 0$，故 $yI-A$ 可逆，于是 $(yI-A)B=(yI-A)(B(yI-A))(yI-A)^{-1}$ 与 $B(yI-A)$ 相似. □

习题 11.3. 如果域 F 满足 -1 不能写成平方和的形式，即不存在 $a_i\in F, 1\leq i\leq n$ 使得 $-1=\sum_{i=1}^n a_i^2$，则称 F 是形式实数域 (formally real). 求证如下论断是等价的：

(i) F 是形式实数域；

(ii) F 是有序域；

(iii) $\sum_{i=1}^n a_i^2=0$ 意味着 $a_i=0$ 对任意 i 成立.

习题 11.4. 设 F 是域，且 E 是 F 上多项式 $f(x)\in F[x]$ 的分裂域. 求证

(i)

(ii)

习题 11.5. 　1. 设 G 是循环群，并且我们用乘法记号. 设 $g,h\in G$ 都不是平方元素，即不存在 $x\in G$ 使得 $x^2=g$ 或 $x^2=h$. 求证 gh^{-1} 是平方元素.

2. 设 K/F 是域扩张，a 是 F 中的非零元素. 假设 s,t 是 $\langle a\rangle\in F^{\times}$ 中的元素，且满足在 F 中 s 和 t 都不是平方元素，但存在 $\alpha,\beta\in K$ 使得 $s=\alpha^2,t=\beta^2$. 证明 K 的子域 $F(\alpha)=F(\beta)$.

3. 证明若 F 是有限域且特征不为 2，那么 F 的任意扩域 K 都包含且仅包含一个阶数为 2 的 F 的扩域.

习题 11.6. 题目中我们将证明，存在不可约多项式 $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ 满足它在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中的像不都是不可约的.

(i) 求证 $f(x)=x^4+1$ 在 $\mathbb{Z}[x]$ 中不可约.

(ii) 求证 $f(x)=x^4+1$ 在 $\mathbb{F}_p[x]$ 中可约.

第五部分

范畴论

第十二章　作为语言的范畴

数学家们最重要的武器是抽象化. 最初，人们从日常生活中抽象出了数、点、平面、直线等概念，进而我们有了加法、乘法、有理数，和相交、平行，甚至有了函数、微分和积分. 后来数学家们发现这些概念依然可以抽象，于是有了集合、映射、向量空间、群环域、流形和代数簇.

抽象化方法的本质是发现不同事物之间共同的特征，进而把满足这些共性的对象归为一类，研究它们的性质. 比如，空间中自由向量的全体和 $\mathbb{R}$ 上实值函数的全体都具有一些特征：它们中的元素都可以进行“加法”，关于 $\mathbb{R}$ 中元素都有“数乘”，并且数乘与加法之间也满足一定关系. 我们把这样满足这些性质的对象成为向量空间，进而发现向量空间都有一组基，它们之间保持结构的映射具有很好的特性. 这样的性质是自由向量全体和实值函数全体所共有的. 抽象化方法可以帮助我们忽略无关信息，更好地把我本质的结构.

我们已经学过许多数学对象，包括群环域这样的代数结构，也包括拓扑空间，流形等其他对象. 如果把同类对象看成一个族，不仅族内对象有许多共性，不同族与族之间也有相同的结构或特点：给出一个群可以考虑它的子群和商群，已知的群可以由直积生成新的群，不同群之间可以由同态相互联系. 如果把前面叙述中的群改成环或者模，相应的结论仍然有效. 像这样由同类对象构成的族的共性抽象出来的结构即是范畴. 利用范畴的语言，我们可以对数学系统及系统内特有的映射作一般性的描述，从而给大的数学系统的研究提供一个粗糙的框架. 可以说范畴是数学对象中最高层次的抽象.

自 S.Zilerberg () 和 S.Maclane（麦克莱恩）为研究代数拓扑于 1942 年引入范畴和函子的概念以来，范畴理论本身已成为了一个独立的研究领域并对绝大多数的数学产生了深远影响. 一个重要例子即是代数几何，它主要归功于 A.Grothendieck. 就现代数学而言，范畴更像是一门语言，为我们提供了描述数学结构与对象的工具.

12.1　定义和基本概念

简言之，范畴的概念由两部分组成：一族对象与它们之间的态射，定义把对象和对象之间的态射列于同等地位，这与我们通常认知的对象第一态射第二的想法并不相同，甚至当我们有更多结构后，可以说箭头比对象重要，箭头的箭头比箭头重要。

通常我们见到的范畴是基于集合的（更准确的定义出现在第五节），但要注意这并不是必须的。

定义. 范畴 (category)是一个数学对象，记为 $\mathcal{C}$，有下列要素构成：

一些对象（object）（通常用大写字母 A，B，C 表示）构成的族 ob C

对任意的有序对象二元组 (A, B)，存在被称为态射集 (hom set) 集合 $\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$，其中的元素 f 称为以 A 为定义域（domain），以 B 为余定义域（codomain）的态射（morphism），或简称为从 A 到 B（from A to B）的态射，记为 f：AB。当范畴 C 明确时，可简记为 $\hom(A, B)$。

对任意的有序对象三元组（A，B，C），存在映射

（函数复合的图）

其中 gf 被称为态射 g 与 f 的乘积（product）或复合（composition）。

这些要素必需满足如下公理：

（C1）：当二元数组（A，B）不等于（C，D）时，hom（A，B）与 hom（C，D）互不相交；

（C2）：（结合律，associativity），若 f 属于 hom（A，B），g 属于 hom（A，B），h 属于 hom（C，D），则有（hg）f=h（gf）。

（C3）（单位态射，identity）对每个对象 A 都有一个态射 1A 属于 hom（A，A）使得对任意的 f 属于 hom（A，B）有 f1A=f，以及对任意的 g 属于 hom（B，A），有 1Ag=g。

在用范畴的语言描述数学实体时，图（同时包含了对象，箭头与复合关系）可以帮助我们更清晰直观地理解对象与态射之间的关系。例如，gf=h 等价于图

（图）

是交换的。而 gf=kh 意味着

（图）

是交换的。结合律（hg）f=h（gf）可表达为如下

（图）

图的交换性。单位态射 1A 的性质也可这样刻画

（图）

其中 f，g 是 hom（A，B）与 hom（B，A）中的任意元素。

另一方面，公理中第一条的不相交性质实际不是必需的。当它不满足时，我们可以作如下技术性处理：对于任意 hom（A，B）中的态射 f，规定其为三元组（A，B，f），这样即使存在 f 属于 hom（A，B）交 hom（C，D）。三元组不同也将其视为不同的态射。

下面的这些例子将会不断在后面出现。

集合的范畴 **Set**：其中，ob **Set** 是所有集合构成的类，hom set（A，B）是所有从集合 A 到集合 B 的集合间映射构成的集合。态射的复合恰是集合间映射的复合，1A 是集合 A 上的恒等映射。三条公理是显然满足的。

群的范畴 Gp：其中，ob Gp 是所有的群构成的类，hom Gp （G，H）是所有从群 G 到群 H 的群同态，态射的复合是群同态的复合，1G 是 G 上的恒等映射。

Abel 群范畴 Ab：ob Ab 包含所有的 Abel 群，态射和态射的复合含义同于群范畴。

容易观察到，例 2 中的 Gp 与例 1 中的 Set 有一定“子结构”关系：ob Gp 是 ob Set 的子类，而且对 Gp 中的任意两个对象 G，H，hom Gp （G，H）属于 hom Set（G，H）。我们把这种关系抽象出来，行程如下概念：C，D 是两个范畴，满足 ob C 是 ob D 的子族，且对 C 的任意对象 A，B，homC（A，B）属于 homD（A，B），则称 C 是 D 的子范畴（subcategory）。若 homC（A，B）=homD（A，B）对任意 C 中对象 A，B 成立，则称 C 是 D 的满子范畴（fully subcategory）。显然，Ab 是 Gp 的满子范畴，而 Cp 仅是 Set 的子范畴非满子范畴。

环的范畴 Ring：ob Ring 是所有的含幺（结合）环，对于任意对象 R，S，homRing（R，S）是所有 R 到 S 将单位元映到单位元的环同态。

环 R 上的模范畴 R-Mod：对象是所有 R 上的（左）模，对于任意 R 模 M，N，hom R-Mod（M，N）是 R 模同态的全体，同样地可以定义环 R 上的右模范畴 Mod-R。

拓扑空间的范畴 Top：对象是所有拓扑空间，任意两个拓扑空间 X，Y，Hom Top（X，Y）是 X 到 Y 的连续映射全体。

以上范畴都是以集合为基础的，具体来说，这些范畴中的对象都是集合，态射也是集合间的映射，但并不是所有的范畴都是这样的。

例 12.1. 给定群 G，BG定义如下：ob B$G = *$，$\mathrm{hom}_{\mathrm{B}G}(*,*) = G$.

设（P，小于等于）是一个偏序集。定义如下范畴 P：ob P=P，对于任意 P 中元素 a，b，hom（a，b）有唯一一个元素当且仅当 a 小于等于 b。于是，态射的合成也只有唯一合理的定义

例 12.2. 设 M 是一个幺半群，由此可以定义范畴 M：ob M=A 是含有一个元素的集合。hom（A，A）=M，1A 是 M 中的单位元，态射的复合是半群乘法。反过来，若 M 是对象唯一的范畴，则 hom（A，A）是一个幺半群，其中 A 是 M 中唯一的对象，幺元是 1A，半群乘法是态射的复合。于是，我们建立了幺半群与仅含一个对象的范畴的一一对应，从这个意义上来讲范畴可以看作幺半群的推广。

将这个例子与之前的对比，我们发现，例 7 和例 8 的对象全体是一个集合，像这样对象全体是集合的范畴成为小（small）范畴。在更一般的情况下我们并不要求 homC（A，B）是集合，故相对应的定义 1 中给出的 homC（A，B）的范畴称为局部小（locally small）范畴，我们所涉及的范畴都是局部小的范畴。

前面的 6 个例子中态射都是集合间的映射，我们可以利用元素来对这些态射进行讨论（如），但对于例 7 和例 8 和一般范畴当中，对于态射的讨论我们不能借助元素的概念，这是极为重要的。

通过已知的范畴，我们可以构造新的范畴。下面两个例子是很重要的，本节习题中还会出现几种不同的构造范畴的方法，它们更多地应用在范畴中特殊对象的描述。

设 $\mathcal{C}$ 是范畴，我们可以按如下方式构造它的对偶范畴 (dual category)，记为 $\mathcal{C}^{\circ}$：它与 $\mathcal{C}$ 有相同的对象，即 ob $\mathcal{C}^{\circ} =$ ob $\mathcal{C}$，有时为区分 $\mathcal{C}$ 中的对象 A 在 $\mathcal{C}^{\circ}$ 中记为 A°；homC（A0，B0）=homC（B，A），即 f：AB 与 f0：() 一一对应。此外，f0g0=（gf）0，1A0=（1A）0。换言之，对偶范畴中对象不变箭头反向。用图对偶范畴可表示为若 A-f-B 在 C 中则（图）在 C0 中，若

（图）在 C 中交换，则（图）在 C0 中交换。

再设 C 和 D 是两个范畴，于是它们的乘积范畴（product category）C 乘 D 包含如下要素：C 乘 D 的对象全体是所有的二元组（A，B），其中 A 属于 ob C，B 属于 ob D，即 ob C 乘 D=ob C 乘 ob D：若 A，C 属于 ob C，B，D 属于 ob D，则（一个集合），并且 1（A，B）=（1A，1B）；若 f 属于 hom C（A，B），g 属于 hom C（B，C），h 属于 homD （D，E），k 属于 homD （E，F），则（g，k）（f，h）=（gf，kh）。

此外，范畴中可能存在一些具有特殊性质的对象或态射，它们通常不一定存在，但在一些范畴中是结构研究的核心。

定义 2. 若范畴 C 中的对象 A 满足对 C 的任意对象 B，hom（A，B）只含一个元素，则称这样的对象 A 为始对象（initial object）。对偶地，若范畴 C 中的对象 D 满足对 C 的任意对象 C，hom（C，D）只含一个元素，则称这样的对象为终对象（terminal object）。

容易验证，Set 中空集是始对象，单点集是终对象；Ab 中 e 既是始对象也是终对象；交换环 R 上的模范畴 R-Mod 中 0 既是始对象也是终对象。

定义 3.A，B 是范畴 C 中的对象，若对于态射 f：AB，存在 g：BA 使得 gf=1A，fg=1B，则称 f 是范畴 C 中的一个同构（isomorphism），g 是 f 的逆（inverse），对象 A 与对象 B 是同构的（isomorphic）

在 Gp，Ring，R-Mod 中同构的含义与代数结构中同构的含义相同；Set 中同构的含义就是集合间的一一映射。同构是描述对象唯一性的基础，也是描述范畴间相似结构的工具。

性质 1：同构态射的逆唯一。

同意范畴中的始（终）对象是同构的。

证明：设 C 是一范畴，A，B 属于 ob C。f：AB，g，h：BA 满足 fg=fh=1B，gf=hf=1A。于是 g=g1B=gfh=1Ah=h。唯一行得证。

设 C 是一范畴，A1，A2 是 C 中的始对象。于是存在唯一的 f 属于 hom（A1，A2），g 属于 hom（A2，A1），故 fg 属于 hom（A2，A2）。gf 属于 hom（A1，A1），但 A1，A2 是始对象。hom（A1，A1）与 hom（A2，A2）中都只含有唯一的元素，因此 gf=1A1，fg=1A2。

终对象同构的证明同上。

若对同构的概念稍作一般化，可以得到特殊的态射。同时这两类态射也可以看作 Set 中单映射和满映射的推广：

定义 3. 设 f：AB 是范畴 C 中的态射。C 是 C 中的对象。若对于任意满足 gf=hf 的态射 g，h 属于 hom（B，C），都有 g=h，则称 f 是满态射（epimorphism）或满的（epic）。

对偶地，f：BC 是范畴 C 中的态射，A 是 C 中的对象。若对于任意满足 fg=fh 的态射 g，h 属于 hom（A，B），都有 g=h，则称 f 是单态射（monomorphism）或单的（monic）。

我们以如下的结果结束本节：

性质 2：设 f：AB 和 g：BC 都是范畴 C 中的态射：

若 f 和 g 都是单态射，则 gf 也是单态射；

若 gf 是单态射，则 f 也是单态射；

若 f 和 g 是满态射，则 gf 也是满态射；

若 gf 是满态射，则 g 也是满态射；

同构同时是单态射也是满态射

例 12.3. 本节最后一个例子是12.1的推广. 给定群 G，可以定义它的轨道范畴 (orbit category)Orb(G)，其中 Orb(G) 的对象囊括了 G 的左陪集 G/H，H 是任意给定的子群，对任意的对象 $G/H, G/K$，$\hom_{\mathrm{Orb}(G)}(G/H, G/K)$ 是所有 G 等变的映射，习题2.9给出了态射的具体描述.

给定域 F 及其扩域 E，定义范畴 $\mathbf{Field}_F^E$ 是

于是 Galois 理论基本定理说明函子是范畴的等价.

习题 12.1. 设 X 是一个拓扑空间，证明 X 可以成为一个范畴，记为 $\mathbf{Open}(X)$，其中 X 的对象是所有的开集，$\hom_{\mathbf{Open}(X)}(U, V)$ 是单点集当且仅当 $U \subseteq V$，否则 $\hom_{\mathbf{Open}(X)}(U, V) = \emptyset$. 若 $U \subseteq V$，我们称 $\hom_{\mathbf{Open}(X)}(U, V)$ 中的元素为包含映射，记为 $i : U \to V$.

习题 12.2. 设 $\mathcal{C}$ 是范畴，$A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$. 定义 A 的自同构群是 $\hom_{\mathcal{C}}(A, A)$ 中的所有同构态射组成的集合，群的乘法是态射的复合，即 $\mathrm{Aut}(A) = \{f : A \to A \mid f \text{ 是同构}\}$. 求证同构对象的自同构群是同构的.

习题 12.3. 这个习题中我们对范畴 $R-\mathbf{Alg}$ 稍作推广，得到新的范畴 $R-\mathbf{ALG}$，满足 $\mathrm{ob}\, R-\mathbf{ALG} := \mathrm{ob}\, R-\mathbf{Alg}$，给定 R 代数 A, B，

$$\hom_{R-\mathbf{ALG}}(A, B) := \{{}_AM_B \mid\ {}_AM_B\text{是}(A,B)\text{双模且作为右}B\text{模是投射且有限生成的}\},$$

求证复合 ${}_BN_C \circ_A M_B$ 给出一个范畴结构.

12.2 范畴中的泛性质对象

定义.
$$\begin{tikzcd} A_j \arrow[r, "\iota_i"] & \coprod_{i\in I} A_i \arrow[d, dashed] & A_j \arrow[l, "\iota_j"'] \\ & B & \end{tikzcd}$$

例 12.4. 集合范畴 **Set** 中的积就是集合的笛卡尔积，可用如下方式构造：若 $\{S_i\}_{i\in I}$ 是一族集合，定义

$$P=\{\varphi: I\to\bigsqcup_{i\in I}S_i \mid \varphi(i)\in S_i\}$$

和 $\pi_i: P\to S_i, \varphi\mapsto\varphi(i)$，则 $(P,\{\pi_i\})$ 是 $\{S_i\}$ 在 **Set** 中的积. 对偶地，**Set** 中的余积是不交并，即 $\coprod_{i\in I}S_i=\{(i,x)\mid i\in I, x\in S_i\}$.

习题 12.4. 设 $f: B\to A$ 和 $g: C\to A$ 是两个集合间的映射，求证 **Set** 中存在纤维积 $B\times_A C$.

证明. 令 $B\times_A C:=\{(b,c)\mid f(b)=g(c)\}$，我们要证明这样定义的纤维积满足相应的泛性质. □

习题 12.5. 设 T 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的终对象，A,B 是 $\mathcal{C}$ 的对象，求证

$$A\times B\cong A\times_T B.$$

习题 12.6. 在习题12.1中我们对任意拓扑空间 X 定义了一个范畴 **Open**(X)，设 U,V 是范畴中的两个对象，即两个开集，证明 $U\times_X V$ 存在. 此外，对任意一族开集 $\{U_i\}_{i\in I}$，证明 $\coprod_{i\in I}U_i$ 存在，且 $\coprod_{i\in I}U_i$ 是 U 的开覆盖当且仅当 $\coprod_{i\in I}U_i\cong U$.

习题 12.7. 设范畴 $\mathcal{C}$ 中存在任意两个对象的乘积，则纤维积

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] \arrow[d] & A \arrow[d, "{(f,g)}"] \\ B \arrow[r, "{(\mathrm{id},\mathrm{id})}"] & B\times B \end{tikzcd}$$

给出了态射 $f,g: A\rightrightarrows B$ 的等值子 K.

习题 12.8. 设 $\mathcal{C}$ 是范畴，A,B 是 $\mathcal{C}$ 的对象，若存在态射 $s: A\to B$ 和 $r: B\to A$ 使得 $rs=\mathrm{id}_A$，则称 r 是 s 的*收缩* (retract) 或者*左逆* (left inverse)，s 是 r 的*截面* (section) 或*右逆* (right inverse)，A 是 B 的一个*收缩* (retract). 一个简单的例子是在 R 模范畴 $R-$**Mod** 中，N 是 M 的收缩当且仅当存在 R 模 P 使得 $M=N\oplus P$. 如果 $f: X_1\to Y_1, g: X_2\to Y_2$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 的态射，且满足以下交换图

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "f"] & Y_1 \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "g"] & X_1 \arrow[d, "f"] \\ X_2 \arrow[r, "s_2"] & Y_2 \arrow[r, "r_2"] & X_1, \end{tikzcd}$$

其中 X_j 是 Y_j 的收缩，$s_jr_j=\mathrm{id}_{X_j}$ $(j=1,2)$，则称 f 是 g 的*收缩* (retract). 求证：若 f 是 g 的收缩，g 是同构，则 f 也是同构.

12.3　函子与自然变换

习题 12.9. 设 $\mathcal{C},\mathcal{J}$ 是范畴，A 是 $\mathcal{C}$ 的对象，证明下面的定义构成一个函子

$$\begin{aligned}\mathrm{Const}_A : \mathcal{J} &\to \mathcal{C}\\ j &\mapsto A\\ (a : i \to j) &\mapsto \mathrm{id}_A\end{aligned}$$

我们称之为常值函子 (constant function). 证明，任意 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : A \longrightarrow B$ 可以诱导一个自然变换

$$f_* : \mathrm{Const}_A \Rightarrow \mathrm{Const}_B.$$

进一步, 存在函子 $\Delta : \mathcal{C} \to \mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{C})$, 把对象 A 映为 Const_A, 态射 $f : A \to B$ 映为 $f_* : \mathrm{Const}_A \Rightarrow \mathrm{Const}_B$.

习题 12.10. 设 X 是一个集合，定义 $F(X)$ 是以 X 为基生成的自由群. 给出合理的定义说明 $F : \mathbf{Set} \to \mathbf{Gp}$ 是一个函子，这个函子被称为自由函子 (free functor).

习题 12.11. 设 G 是一个群，例12.1中定义了范畴 $\mathrm{B}G$.

(i) 证明函子 $F : \mathrm{B}G \to \mathbf{Set}$ 定义了 G 在集合 $F(*)$ 上的一个（左）群作用.
在 (ii) 中我们并没有必要限定构造的函子的值域为 $\mathbf{Set}$. *函子* $F : \mathrm{B}G \to \mathbf{Vec}_k$ *定义了一个* k *线性表示，函子* $F : \mathrm{B}G \to \mathbf{Top}$ *定义了一个* G *空间.*

(ii) 假定我们有两个函子 $F, G : \mathrm{B}G \to \mathcal{C}$，显式地写出自然变换所满足的交换条件. 由这样自然变换所确定的范畴 $\mathcal{C}$ 中的态射称为 G-等变的 (G-equivariant).

习题 12.12. 设 n 是任意一个自然数. 定义 $[n]$是有 $n+1$ 个对象的小范畴，且其中的箭头是序列 $\{0 \to 1 \to \cdots \to n\}$. 设 $\mathbf{\Delta}$ 是所有 $[n]$ 组成的范畴，态射是 $[n]$ 到 $[m]$ 的函子.

(i) 求证：与范畴 $[0]$ 等价的范畴当且仅当每个 hom 集合都仅有一个元素.

(ii) 定义 $[n]'$ 是 $n+1$ 元的全序集，其元素记为 $\{0 \le 1 \le \cdots \le n\}$. 设 $\mathbf{\Delta}'$ 是所有 $[n]'$ 组成的范畴，态射是 $[n]'$ 到 $[m]'$ 的保序映射，即 $f : [n]' \to [m]'$ 满足 $i \le j$ 必有 $f(i) \le f(j)$. 证明 $\mathbf{\Delta}'$ 是一个范畴，且存在一个范畴的同构 $\mathbf{\Delta}' \rightrightarrows \mathbf{\Delta}$. 于是我们无意区分两个范畴，都称为单纯范畴 (simplicial category) 或者全序范畴 (ordering category)，也无意区分两个范畴不同的对象.

(iii) 证明

$$d^i_{n+1} : [n] \to [n+1]$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & n \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & i+1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n+1
\end{tikzcd}$$

和

$$s^i_n : [n+1] \to [n]$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[d] & i+1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & n+1 \arrow[dl] \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n &
\end{tikzcd}$$

都是范畴 $\mathbf{\Delta}$ 中的态射，且满足

$$\begin{aligned}
&d^j_{[n+1]}d^i_{[n]} = d^i_{[n+1]}d^{j-1}_{[n]}, && \forall\ i<j\\
&s^j_{[n]}s^i_{[n+1]} = s^i_{[n]}s^{j+1}_{[n+1]}, && \forall\ i\le j\\
&s^j_{[n]}d^i_{[n+1]} = d^i_{[n]}s^{j-1}_{[n-1]}, && \forall\ i<j\\
&s^j_{[n]}d^i_{[n+1]} = \mathrm{id}_{[n]}, && i=j \text{ 或 } i=j+1\\
&s^j_{[n]}d^i_{[n+1]} = d^{i-1}_{[n]}s^j_{[n-1]}, && \forall\ i>j+1.
\end{aligned}$$

其中，d^i 称为第 i 个对偶面映射 (coface map)，s^i 称为第 i 个对偶退化映射 (codegeneracy map).

(iv) 证明 $\mathbf{\Delta}$ 中所有的态射都可以由 d^i 和 s^j 生成. 更准确地说，任意 $f\in\hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m])$ 有唯一的分解

$$f = d^{i_1}\circ\cdots\circ d^{i_r}\circ s^{j_1}\circ\cdots\circ s^{j_s},$$

其中 $m=n+r-s$，$i_1<\cdots<i_r$ 且 $j_1<\cdots<j_s$.

习题 12.13. (i) 设 $\mathcal{C}$ 是范畴，A,B 是 $\mathcal{C}$ 的对象，$f\in\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$. 证明 f 诱导了自然变换

$$f_*:\hom_{\mathcal{C}}(-,A)\Rightarrow\hom_{\mathcal{C}}(-,B)$$

和

$$f^*:\hom_{\mathcal{C}}(B,-)\Rightarrow\hom_{\mathcal{C}}(A,-).$$

(ii) 在 (i) 的记号下，证明 f 是一个同构当且仅当 f_* 是同构，当且仅当 f^* 是同构.

习题 12.14. 设 F_1,F_2 是函子 $\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，$\eta:F_1\Rightarrow F_2$.

1. 若 G 是函子 $\mathcal{D}\to\mathcal{E}$，证明 $G\eta:GF_1\Rightarrow GF_2$，$(G\eta)_A:=G(\eta_A)$ 是自然变换.

2. 若 G 是函子 $\mathcal{B}\to\mathcal{C}$，证明 $\eta G:F_1G\Rightarrow F_2G$，$(\eta G)_A:=\eta_{G(A)}$ 是自然变换.

习题 12.15. 给定范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E},\mathcal{T}$ 和函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D},G:\mathcal{D}\to\mathcal{T}$，求证

1. 当 $\mathcal{C}$ 是小范畴时 $\mathrm{Nat}(F,-),\mathrm{Nat}(-,F):\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{D})\to\mathbf{Set}$ 可以自然地成为函子.

2. $-\circ F:\mathrm{Funct}(\mathcal{D},\mathcal{E})\to\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 和 $F\circ -:\mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{C})\to\mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{D})$ 在练习12.14的意义下是函子，分别记为 F^* 和 F_*.

3. $(G\circ F)_*=G_*\circ F_*$，$(G\circ F)^*=F^*\circ G^*$.

证明. □

习题 12.16. 给定范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}$ 和函子 $F,G:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，

1. 由习题12.15存在函子 $\mathrm{Nat}(-,F),\mathrm{Nat}(-,G),\mathrm{Nat}(F,-),\mathrm{Nat}(G,-):\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{D})\to\mathbf{Set}$，求证任意自然变换 $\eta:F\Rightarrow G$ 诱导了自然变换
$$\mathrm{Nat}(-,\eta):\mathrm{Nat}(-,F)\Rightarrow\mathrm{Nat}(-,G)$$
和
$$\mathrm{Nat}(\eta,-):\mathrm{Nat}(G,-)\Rightarrow\mathrm{Nat}(F,-).$$
2. 由习题12.15存在函子 $-\circ F,-\circ G:\mathrm{Funct}(\mathcal{D},\mathcal{E})\to\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{E})$ 和 $F\circ -,G\circ -:\mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{C})\to\mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{D})$，求证任意自然变换 $\eta:F\Rightarrow G$ 诱导了自然变换
$$\eta_*:-\circ F\Rightarrow -\circ G$$
和
$$\eta_*:F\circ -\Rightarrow G\circ -.$$
3. $(H\eta)_*=H_*\eta_*$，$(\eta K)_*=\eta_*K_*$，$(H\eta)^*=\eta_*H^*$ 且 $(\eta K)^*=K^*\eta_*$.

证明. □

习题 12.17 (Categories for the Working Mathematician, P37). 设 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{E}$ 是范畴, 如果 F 是函子 $\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$，则称 F 是定义在 $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 上的**双函子** (bifunctor)，其中函子性条件显式地写为：对任意 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f:A\to B$ 和 $\mathcal{D}$ 中的态射 $g:C\to D$. 如果对于任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A 和 $\mathcal{D}$ 中的对象 C，都有证明存在 $(\mathcal{C},\mathcal{D})$ 上的双函子 $F:\mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$，满足
$$F(-,C)=L_C$$
且
$$F(A,-)=R_A.$$

习题 12.18.

习题 12.19. 给定范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D},\mathcal{E}$ 和函子 $F:\mathcal{D}\to\mathcal{C},G:\mathcal{E}\to\mathcal{C}$. 构造范畴 $\mathcal{M}$ 和函子 $P:\mathcal{M}\to\mathcal{D},Q:\mathcal{M}\to\mathcal{E}$ 使得对任意范畴 $\mathcal{N}$ 和函子 $K:\mathcal{N}\to\mathcal{D},G:\mathcal{N}\to\mathcal{E}$，若有图
$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N} \arrow[r, "K"] \arrow[d, "H"] & \mathcal{E} \arrow[d, "G"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$
交换，都有唯一存在的函子 $:\mathcal{N}\to\mathcal{M}$. 这个范畴 $\mathcal{M}$ 同构意义下是唯一的，我们记为 $\mathcal{E}\times_{\mathcal{C}}\mathcal{D}$.

证明. 定义 □

12.4 范畴的等价与同构

习题 12.20. 设 $\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{D}$ 是等价的范畴. 若 $\mathcal{C}$ 中存在始对象，证明 $\mathcal{D}$ 也存在始对象.

习题 12.21. 给定函子 $F:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 和 $G:\mathcal{E}\to\mathcal{C}$，我们称如下构造是 $\mathcal{D},\mathcal{E}$ 的纤维范畴 (comma category)，记为 (F,G):

1. 它的对象是三元组 (X, Y, f)，其中 X 是 $\mathcal{D}$ 的对象，Y 是 $\mathcal{E}$ 的对象，$f \in \hom_{\mathcal{C}}(F(X), G(Y))$；
2. 二元组 (h, k) 是 (X_1, Y_1, f_1) 到 (X_2, Y_2, f_2) 的态射当且仅当

$$G(k)f_1 = f_2F(h),$$

即有如下 $\mathcal{C}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd} F(X_1) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "F(h)"] & G(Y_1) \arrow[d, "G(k)"] \\ F(X_2) \arrow[r, "f_2"] & G(Y_2), \end{tikzcd}$$

其中，$h \in \hom_{\mathcal{D}}(X_1, X_2)$，$k \in \hom_{\mathcal{E}}(Y_1, Y_2)$.

证明：

(i) 如此构造的 (F, G) 是一个范畴，特别地，当 F 是 Const_A 时，该范畴记为 $A\backslash G$，也称为 G 在 A 下的范畴 (the category of G under A)（对偶地当 G 是 Const_A 时，该范畴记为 F/A，也称为 F 在 A 上的范畴 (the category of G over A)），更特别地当 G 还是 $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ 时范畴记为 $A\backslash\mathcal{C}$（对偶地进一步当 F 还是 $\mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$ 时范畴记为 $\mathcal{C}/A$）.

(ii) 考虑 G 是 Const_A 的情形，若 F 是满忠实的，那么对任意 $\mathcal{D}$ 中的对象 X 存在范畴的同构 $\mathcal{D}/X \cong F/F(X)$.

接下来的习题中我们将详细地用范畴的语言讨论范畴当中“图”的概念，并讨论追图（*diagram chasing*）和用图表示交换性的技术.

定义. 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，则 $\mathcal{C}$ 的一个**图 (diagram)** 是一个函子 $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$. 其中，$\mathcal{J}$ 是一个小范畴，被称为**指标范畴 (indexing category)**.

习题 12.22. 设 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是忠实函子. 求证任意在 $\mathcal{D}$ 中交换的 $\mathcal{C}$ 中的图都在 $\mathcal{C}$ 中交换.

第十三章　范畴中的泛性质

13.1　Yoneda 引理

定理 13.1 (Yoneda)**.**

习题 13.1. 设 $k-\mathbf{Vec}$ 是域 k 上向量空间全体组成的范畴，$k-\mathbf{FinVec}$ 是 k 上有限维向量空间全体组成的满子范畴，U 是有限维 k 向量空间，求证函子 $F : k-\mathbf{FinVec} \to k-\mathbf{FinVec}, V \mapsto V \otimes_k U$ 是可表的，其代表元素为 $(U^*, \mathrm{id}_U \in F((U^*) = U^* \otimes_k U)$.

习题 13.2. 设 R 是交换环，$\varphi : M \to N$ 是 R 模同态 $\varphi : M \to N$，定义函子 $K : R-\mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$，满足对任意对象 P，

$$K(P) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P, N)),$$

对任意 R 模同态 $f : P \to Q$

$$K(f) := h_M|_{K(P)}$$

求证函子 K 是可表的.

习题 13.3. 求证反变幂集函子是可表的.

习题 13.4. 证明以下函子是不可表的：

1. $F : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$，$R \mapsto \{r^2 \mid r \in R\}$；
2. $G : \mathbf{Ring} \to \mathbf{Set}$，其中 G 把环 R 映到 R 的所有幂零元素组成的集合；
3. $O : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$，其中 O 把 Hausdorff 空间 X 映到 X 的所有开集组成的集合；
4. $P : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$, ;
5. $S : \mathbf{Gp} \to \mathbf{Set}$，其中 S 把群 G 映到 G 的所有子群组成的集合.

证明. 反设函子 F 是可表的，于是存在环 R 使得 $\eta : F \cong \hom_{\mathbf{Ring}}(R, -)$. 特别地，$F(R) \cong \hom_{\mathbf{Ring}}(R, R)$. 取 $F(R)$ 中的在这个同构下对应到 id_R 的元素 u，由 F 的构造，存在 $r \in R$ 使得 $u = r^2$. 我们将会证明 u 具有如下泛性质：对任意环 S 和任意 S 中的平方元素 s^2，存在唯一的同态 $f : R \to S$ 使得 $f(u) = s^2$. 这是因为我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathbf{Ring}}(R,R) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\eta_R"] & \hom_{\mathbf{Ring}}(R,S) \arrow[d, "\eta_S"] \\
F(R) \arrow[r, "F(g)"] & F(S),
\end{tikzcd}$$

并且对于任意 $g \in \hom_{\mathbf{Ring}}(R,S) \leftrightsquigarrow s^2$，存在唯一的 g^* 使得 $g^*(\mathrm{id}_R) = g$，具体来说，令 $g := \eta_S^{-1}(s^2)$，那么

$$F(g)(u) = F(g)(\eta_R(\mathrm{id}_R)) = \eta_S(g^*(\mathrm{id}_R)) = \eta_S(g) = s^2.$$

假设还有一个态射 h 满足条件，那么

$$h^*(\mathrm{id}_R) = (\eta_S^{-1} \circ F(h) \circ \eta_R)(\mathrm{id}_R) = (\eta_S^{-1} \circ F(h))(u) = \eta_S^{-1}(s^2) = g,$$

于是我们的论断得证.

考虑 $S = \mathbb{Z}[x]$，$s = x$，根据刚刚所证明的，存在唯一的环同态 $g : R \to \mathbb{Z}[x]$ 使得 $g(u) = x^2$. 零 $m : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}[x]$，$x \mapsto -x$，那么 $m \circ g$ 也是将 u 映到 x^2 的态射. 故矛盾. □

13.2 元素范畴与泛性质

定义. 给定局部小的范畴 $\mathcal{C}$ 和协变函子 $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$，如下范畴

1. 对象包含了所有的有序对 (A,a)，其中 A 是 $\mathcal{C}$ 中的对象，a 是 $F(A)$ 中的元素，
2. $\hom((A,a),(B,b)) := \{f \in \hom_{\mathcal{C}}(A,B) \mid F(f)(a) = b\}$

被称为 F 的元素范畴 (category of elements)，记为 $\int_{\mathcal{C}} F$.

命题 13.2. 协变函子 $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ 是可表的当且仅当其元素范畴 $\int_{\mathcal{C}} F$ 有始对象.

证明. □

习题 13.5. 设函子 $F, G : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ 是自然同构的. 证明自然同构 $\eta : F \Rightarrow G$ 诱导了它们元素范畴的同构：

$$\int_{\mathcal{C}} F \cong \int_{\mathcal{C}} G.$$

习题 13.6. 证明反变函子 $F : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathbf{Set}$ 可表当且仅当其元素范畴 $\int^{\mathcal{C}} F$ 存在终对象.

习题 13.7. 回顾习题12.21中的定义，求证对任意协变函子 $F : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ 存在范畴的同构

$$(y, F) \cong \int_{\mathcal{C}} F,$$

其中 y 是 Yoneda 嵌入.

习题 13.8. 设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴，$\mathcal{D}$ 是一个上完备的局部小范畴，考虑 2 函子

$$S:\mathcal{C}^{\circ}\times\mathcal{C}\to\mathcal{D},$$

那么我们称 f_* 与 f^* 的上等值子

$$\prod_{f:A_0\to A_1} S(A_0,A_1)\rightrightarrows\prod_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}} S(A,A)$$

为 S 的上终止 (co-end)，其中 f_* 是复合 $S(A_0,A_1)\xrightarrow{S(f,\mathrm{id})} S(A_1,A_1)\hookrightarrow\prod_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}} S(A,A)$，$f^*$ 是复合 $S(A_0,A_1)\xrightarrow{S(\mathrm{id},f)} S(A_0,A_0)\hookrightarrow\prod_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}} S(A,A)$，记为 $\int^{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}} S$.

1. 求证 $\int^{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}} S$ 具有如下泛性质：对任意 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f:A_0\to A_1$，存在唯一的 φ_{A_0} 和 φ_{A_1} 使得下图交换

$$\begin{tikzcd}
S(A_0,A_1) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "f^*"] & S(A_1,A_1) \arrow[d, "\varphi_{A_0}"] \\
S(A_0,A_0) \arrow[r, "\varphi_{A_1}"] & \int^{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}} S.
\end{tikzcd}$$

2. 设 R 是环, F,G 是函子 $F:\mathcal{C}^{\circ}\to\mathbf{Mod}-R$ 和 $G:\mathcal{C}\to R-\mathbf{Mod}$. 定义函子 $S:=F\boxplus_R G:\mathcal{C}^{\circ}\times\mathcal{C}\to\mathbf{Ab}$, 将对象 (A,B) 映为 $F(A)\otimes_R G(B)$, 将态射 $(f:C\to A,g:B\to D)$ 映到 $F(f)\boxtimes_R G(g):F(A)\otimes_R G(B)\to F(C)\otimes_R G(D), x\otimes y\mapsto F(f)(x)\otimes G(g)(y)$. 在此基础上定义对象

$$F\otimes_{A,R} G:=\int^{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}} F(f)\boxtimes_R G(g).$$

若函子 $R^{\circ}[\hom_{\mathcal{C}}(-,A)]:\mathcal{C}^{\circ}\to\mathbf{Mod}-R$，将对象 C 映到 $\hom_{\mathcal{C}}(C,A)$ 生成的自由 R 模，证明

$$R^{\circ}[\hom_{\mathcal{C}}(-,A)]\otimes_{A,R} G\cong G(A).$$

证明对 R 作为自己的右模的常值函子 $Const_R:\mathcal{C}^{\circ}\to\mathbf{Mod}-R$ 满足

$$Const_R\otimes_{A,R} G\cong \mathrm{colim}_{\mathcal{C}} G.$$

13.3 伴随函子

在第一节中，我们引入了对偶范畴的概念。一个自然的想法是，对一个给定的函子，我们是否也能找到一个类似对偶的构造？我们类比一个具体的情形，考虑两个有限维实向量空间 V，W 带有内积... 是线性映射。若存在线性映射... 使得....

则称... 是 T 的伴随映射。

如果我们将范畴类比为空间，将函子类比为映射，这样只要能构造合适的“内积”就可以得到函子的伴随。事实上，这样的“内积”不需要构造，存在自然的结构使定义是合适的。

定义. 给定范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 和函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}, G:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$，若对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A 和 $\mathcal{D}$ 中的对象 B，都存在自然的集合之间的同构

$$\hom_{\mathcal{D}}(F(A),B)\cong\hom_{\mathcal{C}}(A,G(B)),$$

则称 F 是 G 的左伴随，G 是 F 的右伴随函子 (right adjoint functor).

首先我们解释一下如上定义中的自然性. 记自然同构为

$$\begin{aligned}\epsilon_{A,B}:\hom_{\mathcal{D}}(F(A),B)&\cong\hom_{\mathcal{C}}(A,G(B))\\ f^\sharp:F(A)\to B&\mapsto f^\flat:A\to G(B),\end{aligned}$$

那么对 $\mathcal{D}$ 中的任意态射 $h:B\to D$，有如下交换图

$$\hom_{\mathcal{D}}(F(A),B) \qquad \hom_{\mathcal{C}}(A,G(B))$$

具体来说，对任意 $f^\sharp:F(A)\to B$ 都有交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f^\sharp"] \arrow[dr, "(h\circ f^\sharp)^\flat"'] & G(B) \arrow[d, "G(h)"] \\ & G(D). \end{tikzcd}$$

对偶地，还有对... 中的态射的自然性。自然性来源于定义的要求。通常若... 是... 的左伴随，则我们用记号... 表示。

例 13.1. 考虑忘却函子 $U:\mathbf{Top}\to\mathbf{Set}$，它将拓扑空间 (X,τ) 映到它的底集 X，我们可以证明 U 同时有左伴随和右伴随。考虑... ，其中对任意集合 S。拓扑空间 D(S) 的底集是 S，它具有离散拓扑，即任意 S 的子集都是开集，为证明...

显然有... ，但 D(S) 有离散拓扑说明任意集合间的映射都是连续的，故 D 是 U 的左伴随。

再考虑... ，它把集合 S 映为具有底集 S 和开集... 的拓扑空间 I(S)。为证明... 只要说明任意 U(T) 到 S 的集合间映射都是连续的，但... 的原象必然为... , S 的原象必然是 T，故任意集合的映射... 是连续的。

由于以上的同构都是恒等，故自然性显然.

如上的伴随实际上是一组被称为“自由-忘却伴随” (free-forgetful adjunction)的特例，常见的许多伴随都可以归到这一类.

下面的引理给出了同构自然性的一个等价定义，在通常伴随性的证明中它都是有用的。

引理 13.1. 给定一组函子... ，且给定一族同构... ，则 F，G 是伴随函子当且仅当图

(图)

在... 中交换等价于图

(图)

在... 中交换。

13.3.1 单位和余单位

在上一小节的讨论中，我们知道，对任意的对象 $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，若 F 是 G 的左伴随，则有自然同构

$$\epsilon_{A,-} : \hom_{\mathcal{D}}(F(A), -) \Rightarrow \hom_{\mathcal{C}}(A, G(-)),$$

而 Yoneda 引理说明

$$\hom_{\hat{\mathcal{D}}}(h_{F(A)}, \hom_{\mathcal{C}}(A, G(-))) \cong \hom_{\mathcal{C}}(A, GF(A)),$$

因而自然变换 $\epsilon_{A,-}$ 对应到唯一的态射 $\eta_A : A \to GF(A)$，具体而言，在 Yoneda 引理的映射下 $\eta_A = \epsilon_{A,F(A)}(\mathrm{id}_{F(A)})$，于是当存在态射 $f : A \to C$ 时，根据 η 的自然性

$$\begin{aligned}
\epsilon_{C,F(C)}(\mathrm{id}_{F(C)}) \circ f &= (\epsilon_{C,F(C)}(\mathrm{id}_{F(C)}) \circ f)^{\sharp\flat} \\
&= (\mathrm{id}_{F(C)} \circ F(f))^{\flat} \\
&= (F(f) \circ \mathrm{id}_{F(C)})^{\flat} \\
&= GF(f) \circ \epsilon_{A,F(A)}(\mathrm{id}_C),
\end{aligned}$$

这意味着存在交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"] & GF(A) \arrow[d, "GF(f)"] \\
C \arrow[r, "\eta_C"] & GF(C),
\end{tikzcd}$$

即 η 是自然态射 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF$，它被称为伴随对 (F, G) 的单位 (unit).

对偶地，$\delta : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$

$$\begin{tikzcd}
F \arrow[r, Rightarrow, "F\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\mathrm{id}"'] & FGF \arrow[d, Rightarrow, "\delta F"] \\
& F
\end{tikzcd}$$

定理 13.3. 给定函子对 $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$，则二者是伴随当且仅当存在自然态射 $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow GF, \delta : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 满足

13.3.2 一些计算

命题 13.4.

命题 13.5.

习题 13.9. 设范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 间的函子 $F:\mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D}:G$ 互为左右伴随，证明 $\mathcal{C}\simeq\mathcal{D}$ 当且仅当这个伴随给出的单位 η 和余单位 ξ 都是自然同构.

习题 13.10. 求证嵌入函子

$$i:\mathbf{Gp}\hookrightarrow\mathbf{Mon}$$

同时有左右伴随.

证明. □

习题 13.11. 设范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 间的函子 $F:\mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D}:G$ 互为左右伴随，对任意给定的函子 $H:\mathcal{J}\to\mathcal{C},K:\mathcal{J}\to\mathcal{D}$，构造自然的同构

$$\mathrm{Nat}(F\circ H,K)\cong\mathrm{Nat}(H,G\circ K).$$

结合习题这实际上说明了 $F:\mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D}:G$ 诱导了伴随函子

$$F_*:\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{C})\rightleftarrows\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{D}):G_*.$$

证明. 分别记 $\eta:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\Rightarrow GF$ 和 $\delta:FG\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 为伴随的单位和余单位, 那么对任意 $\alpha:F\circ H\Rightarrow K$, $G\alpha$ 是自然变换 $GF\circ H\Rightarrow GK$, 复合 ηH 得到 $G\alpha\circ\eta H:H\Rightarrow GF\circ H\Rightarrow GK$. 对偶地任意给定 $\xi:H\Rightarrow G\circ K$, $F\xi$ 是自然变换 $FH\Rightarrow FG\circ K$ 复合 δK 得到 $\delta K\circ F\xi:FH\Rightarrow FG\circ K\Rightarrow K$. 这样有映射

$$\begin{aligned}\mathrm{Nat}(F\circ H,K)&\rightleftarrows\mathrm{Nat}(H,G\circ K)\\ \alpha&\mapsto G\alpha\circ\eta H\\ \delta K\circ F\xi&\leftarrow\!\shortmid\ \xi.\end{aligned}$$

接下来只要验证二者互逆.

根据 $\delta:FG\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 的自然性，对任意 $\mathcal{D}$ 中的对象 A,B 和态射 $f:A\to B$，有交换图

$$\begin{tikzcd} FG(A) \arrow[r, "\delta_A"] \arrow[d, "FG(f)"'] & A \arrow[d, "f"] \\ FG(B) \arrow[r, "\delta_B"] & B, \end{tikzcd}$$

对任意 $\mathcal{E}$ 中的对象 X，取上图中 $A=FH(X),B=K(X),f=\alpha_X:FH(X)\to K(X)$，那么有交换图

$$\begin{tikzcd} FGFH(X) \arrow[r, "\delta_{FH(X)}"] \arrow[d, "FG(\alpha_X)"'] & FH(X) \arrow[d, "\alpha_X"] \\ FGK(X) \arrow[r, "\delta_{K(X)}"] & K(X), \end{tikzcd}$$

根据对象选取的任意性，即交换图

$$\begin{tikzcd} FH \arrow[r, Rightarrow, "F\eta H"] & FGFH \arrow[r, Rightarrow, "\delta FH"] \arrow[d, Rightarrow, "FG\alpha"'] & FH \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"] \\ & FGK \arrow[r, Rightarrow, "\delta K"] & K. \end{tikzcd}$$

因此之前构造映射的复合给出

$$\begin{aligned}\alpha \mapsto G\alpha \circ \eta H \mapsto \delta K \circ F(G\alpha \circ \eta H) \\ &= \delta K \circ FG\alpha \circ F\eta H \\ &= \alpha \circ \delta FH \circ F\eta H \\ &= \alpha,\end{aligned}$$

其中倒数第二步的等号用到了刚刚证明的交换图，最后一步用到了13.3.1节中单位和余单位的性质. 这证明了一方面的逆，另一方面的对偶地可证.

如上构造的自然性是明显的. □

习题 13.12. 设范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 间的函子 $F:\mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D}:G$ 互为左右伴随，利用单位 $\eta:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\Rightarrow G\circ F$ 和余单位 $\delta:F\circ G\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$（定理13.3，而不是如习题13.11中的直接构造）证明

1. 对任意指标范畴 $\mathcal{J}$，F,G 诱导了伴随 $F_*:\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{C})\rightleftarrows\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{D}):G_*$，
2. 对任意局部小范畴 $\mathcal{E}$，F,G 诱导了伴随 $G^*:\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{E})\rightleftarrows\mathrm{Funct}(\mathcal{D},\mathcal{E}):F^*$.

证明. 根据习题12.16，存在自然变换

$$\eta_*:\mathrm{id}_{\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{C})}\Rightarrow G_*\circ F_*$$

和

$$\delta_*:F_*\circ G_*\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{D})},$$

于是单位和余单位关系 □

13.4 极限和余极限

范畴理论始终希望统一地解决结构性的问题。在13.1节中我们讨论了 Yoneda 引理，它提供了一种途径。但是它始终需要借助外部范畴来讨论。我们希望用范畴内部的语言建立统一的框架来描述结构。首先我们还是考虑简单的情形：假设有一个两边无界的集合列

那么集合范畴中，有两个对象是特殊的，分别是....... 和........。首先它们两个与这个集合列是相容的——对任意 $i<j$，有..... 并且任意被所有 X_i 包含的集合都被... 包含，且任意包含所有 X_i 的集合都包含... 这可以说...... 是该列的上下界，是集合范畴中距离该列“最近”的对象。当我们把包含用单射代替时，之前的观察恰好是某一种泛性质。更广泛地说，如果存在范畴当中一族相容的箭头，那么从这族箭头映出或映入的所有具有泛性质的对象就是我们所想研究的，这也就是极限和余极限。本节我们会给出定义，说明只要给出适当的一族箭头，它可以几乎包含所有的有用的结构。之后，会讨论极限和余极限的函子性和它们与其他函子的关系.

13.4.1 由图确定的极限和余极限

我们首先回顾之前在习题中提到的一些术语：一个图是一个函子.... 其中范畴... 称为图的形状（shape），任取... 中的对象 A，存在常值函子

...

将任意... 中的对象映为 A，任意.... 中的态射映为...，对范畴... 我们有对角嵌入

...

将对象 A 映射到常值函子...，映射... 映为自然同态....

定义. 给定图 $F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$，称自然变换 $\lambda:\mathrm{Const}_A\Rightarrow F$ 为图 F 上的锥 (cone over the diagram F)，其中对象 A 称为锥的顶点 (summit, apex)，对于... 中的对象...... 称为锥的支架（leg）

我们尝试把一个锥的信息具体地写出来。当给定自然变换 λ 后，考虑到... 只能映到对象 A 与态射...，故一个自然变换交换图即为

其中... 是 J 中的态射。因而，一个锥给出的信息就是一族态射... 满足与 F 的“象”相容。

对偶地，我们可以定义图... 下的锥（cone under the diagram F），是一个自然变换... 对象 A 称为底点（nadir）。同前，图下的锥包含的信息是一族被称为支架（legs）的态射... 满足如下

（图）

对任意 J 中的对象 j,k 都成立的相容性。

现在我们限制考虑的对象与态射——它们组成... 的子范畴...，对象 A 在范畴中当且仅当存在图 F 上的锥.... ， .... 在范畴中当且仅当 f 与两个锥相容。具体来说，若... 和... 是两个锥，则有

（图）

即交换图（右）对所有... 成立。假设我们定义函子

...

把对象 A 映到所有的以 A 为顶点的 F 上的锥的集合，将... 映到... 。这个集合间的映射将... 映为... 。这样刚刚描述的范畴同构于...

定义. 给定图 $F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$，范畴 $\int^{\mathcal{C}}\mathrm{Cone}(-,F)$ 的终对象（若存在）称为图 F 的极限 (limit)，记为 $\lim F$.

具体地说，图 F 的极限是... 中的一个对象 lim F 和... 的态射，使得它们构成图... 上的锥，且对于任意图上的锥... 都只有唯一的态射... 使得所有的图都相容。

对偶地，给定图 $F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$，我们可以考虑函子

将... 中的对象 A 映为以 A 为底点的 F 下的锥的集合，将态射... 映到... 。于是称范畴 $\int^{\mathcal{C}}\mathrm{Cone}(F,-)$ 的始对象（若存在）称为图 F 的余极限 (colimit)，记为 colim F.

如上定义意味着 $\lim F$ 存在当且仅当 $\mathrm{Cone}(-,F)$ 是可表函子（命题13.2），其代表元恰是 $\lim F$.

定理 13.6. *设 J 是小范畴，$F:J\to\mathcal{C}$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 上的图. 若 $\mathcal{C}$ 中的任意等值子存在且积 $\prod_{j\in J}F(j)$ 和 $\prod_{f\in\mathrm{mor}\ J}F(\mathrm{codom}\ f)$，那么极限 $\lim_J F$ 存在.*

证明. 考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd}
 & & F(\mathrm{codom}\ f) \\
\lim_J F \arrow[r] & \prod_{j\in J} F(j) \arrow[ur, "\pi_{\mathrm{codom}\ f}"] \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{dom}\ f}"] & \prod_{f\in \mathrm{mor}\ J} F(\mathrm{codom}\ f) \arrow[u, "\pi_f"'] \arrow[d, "\pi_f"] \\
 & F(\mathrm{dom}\ f) \arrow[r, "F(f)"] & F(\mathrm{codom}\ f),
\end{tikzcd}$$

其中根据积的泛性质,h 由自然的投影 $h_f : \prod_{j\in J} F(j) \xrightarrow{\mathrm{pr}} F(\mathrm{codom}\ f)$ 诱导,g 由复合 $g_f : \prod_{j\in J} F(j) \xrightarrow{F(f)\circ\pi_{\mathrm{codom}\ f}} F(\mathrm{codom}\ f)$ 诱导. □

命题 13.7.

定理 13.8.

$$\begin{tikzcd}
F(\mathrm{dom}\ f) \arrow[d, "\iota_f"] \arrow[dr, "\iota_{\mathrm{dom}\ f}"] & & \\
\coprod_{f\in \mathrm{mor}\ J} F(\mathrm{dom}\ f) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \coprod_{j\in J} F(j) \arrow[r, two heads] & \mathrm{colim}_J F \\
F(\mathrm{dom}\ f) \arrow[u, "\iota_f"] \arrow[r, "F(f)"] & F(\mathrm{codom}\ f) \arrow[u, "\iota_{\mathrm{codom}\ f}"'] &
\end{tikzcd}$$

命题 13.9. 设 $\mathcal{J}$ 是小范畴,则对任意图 $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$,只要 $\lim_{\mathcal{J}} F$ 存在,那么对任意的 $A \in \mathrm{ob}\ \mathcal{C}$,存在自然同构

$$\hom_{\mathcal{C}}(A, \lim_{\mathcal{J}} F) \cong \lim_{\mathcal{J}} \hom_{\mathcal{C}}(A, F).$$

习题 13.13. 给定图 $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$,求证

$$\lim_{\mathcal{J}} F \cong \mathrm{colim}_{\mathcal{J}^\circ} F^\circ.$$

习题 13.14. 求证若 $\mathcal{J}$ 中含有终对象 $\{*\}$,则对任意图 $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$,

$$\mathrm{colim}_{\mathcal{J}} F \cong F(\{*\}).$$

习题 13.15. 给定一个小范畴 $\mathcal{J}$,回顾练习12.12,记 i_0 是自然的嵌入函子 $\mathcal{J} \to \mathcal{J} \times [1]$,将对象 j 映到 $(j, 0)$,求证推出图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{J} \arrow[r] \arrow[d, "i_0"'] & {[0]} \arrow[d] \\
\mathcal{J} \times [1] \arrow[r] & \mathrm{Cone}(\mathcal{J})
\end{tikzcd}$$

定义的范畴 $\mathrm{Cone}(\mathcal{J})$给出了以 $\mathcal{J}$ 为图的锥，准确地说对任意图 $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$，满足 $\tilde{F} \circ i_0 = F$ 的函子 $\tilde{F} : \mathrm{Cone}(\mathcal{J}) \to \mathcal{F}$ 给出了 F 上的锥，且 F 上的所有锥都由此给出.

如果取嵌入 i_1 则得到范畴 $\mathrm{Cocone}(\mathcal{J})$，它的图与 $\mathcal{J}$ 下的锥对应.

习题 13.16. 给定指标范畴 $\mathcal{J}$，证明若范畴 $\mathcal{C}$ 满足对任意图 $F : \mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 极限 $\lim_{\mathcal{J}} F$ 都存在，那么任意图 $G : j\backslash\mathcal{J} \to \mathcal{C}$ 的极限也都存在.

习题 13.17. 任意给定小范畴 $\mathcal{J}$ 和局部小范畴 $\mathcal{C}$，那么任意给定的两个函子 $F, G : \mathcal{J} \rightrightarrows \mathcal{C}$ 都有等值子图

$$\begin{tikzcd}
 & \hom_{\mathcal{C}}(F(\mathrm{codom}\ f), G(\mathrm{codom}\ f)) \arrow[r, "F(f)^*"] & \hom_{\mathcal{C}}(F(\mathrm{dom}\ f), G(\mathrm{codom}\ f)) \\
\mathrm{Nat}(F,G) \arrow[r] & \prod_{j\in J} \hom_{\mathcal{C}}(F(j), G(j)) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[u, "\pi_{\mathrm{codom}\ f}"] \arrow[d, "\pi_{\mathrm{dom}\ f}"] & \prod_{f\in \mathrm{mor}\ J} \hom_{\mathcal{C}}(F(\mathrm{dom}\ f), G(\mathrm{codom}\ f)) \arrow[u, "\pi_f"] \arrow[d, "\pi_f"] \\
 & \hom_{\mathcal{C}}(F(\mathrm{dom}\ f), G(\mathrm{dom}\ f)) \arrow[r, "G(f)_*"] & \hom_{\mathcal{C}}(F(\mathrm{dom}\ f), G(\mathrm{codom}\ f)).
\end{tikzcd}$$

第六部分

进阶范畴论和群论

第十四章 进阶范畴理论

14.1 范畴中的代数对象

14.1.1 对象上的结构

我们还是从具体的例子来考虑. 假设 G 是一个群，那么 G 本身作为一个集合也就是集合范畴中的对象. 我们想用范畴的语言描述 G 的群结构时，自然的想法是 G 作为一个群，它的结构性质是否可以被范畴中的信息所刻画. 这样我们无外乎要处理 G 中的单位元、乘法和求逆，而它们刚刚好可以从态射和它们的交换性得出. 假设范畴 $\mathcal{C}$ 满足：

1. 存在终对象 E；
2. 对对象 G，$G\times G$ 和 $G\times G\times G$ 都存在.

如果我们有三个态射

$$\begin{aligned} &\mu : G\times G\to G && \text{(multiplication)}\\ &i : G\to G && \text{(inversion)}\\ &e : E\to G && \text{(identity)} \end{aligned}$$

满足以下交换图，分别被称为：结合性 (associativity)

$$\begin{tikzcd} G\times G\times G \arrow[r, "(\mu,\mathrm{id}_G)"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_G,\mu)"'] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\ G\times G \arrow[r, "\mu"] & G, \end{tikzcd}$$

左逆 (left inverse)

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[rr, "(i,\mathrm{id}_G)"] & & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r] & E \arrow[r, "e"] & G, \end{tikzcd}$$

和左单位 (left identity)

$$\begin{tikzcd} G\times G \arrow[r, "(\cdot,\mathrm{id}_G)"] & E\times G \arrow[r, "(e,\mathrm{id}_G)"] & G\times G \arrow[dl, "\mu"] \\ & G \arrow[ul, "\Delta"] & \end{tikzcd} ,$$

其中左逆当中的 $\Delta : G \to G \times G$ 是对角态射，则称 G 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的**群对象** (group object)，三个态射称为 G 上的**群结构** (group structure). 下面的命题说明这样的定义是合理的，于是在不同的范畴中我们有了群结构的推广：

命题 14.1. *集合范畴* **Set** *中的对象* G *是群对象当且仅当* G *是一个群.*

证明. □

定义. 若 G, H 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的群对象，态射 $f : G \to H$ 满足

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{\mu_G} & G \\ {\scriptstyle f\times f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ H \times H & \xrightarrow{\mu_H} & H \end{array}$$

是交换图，则称 f 是一个同态 (homomorphism).

定理 14.2. *设* G *是范畴* $\mathcal{C}$ *中的对象，那么* G *是群对象当且仅当函子* $h_G := \hom_{\mathcal{C}}(-, G)$ *有分解*

同样地，我们可以用图的方式描述群作用. 注意到我们在不同范畴中对作用映射的要求不同，比方说在集合范畴中作用只是普通的映射，但在拓扑范畴中作用就必然是连续的. 这刚刚好可以用范畴的语言简单地表达

定义. 设 G 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的群对象，X 是 $\mathcal{C}$ 中的对象，且 $G \times X, G \times G \times X$ 存在. 那么群对象 G 在 X 上的作用 (action) 是一个态射 $\sigma : G \times X \to X$，满足

$$\begin{array}{ccc} G \times G \times X & \xrightarrow{(\mu, \mathrm{id}_X)} & G \times X \\ {\scriptstyle (\mathrm{id}_G, \sigma)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ G \times X & \xrightarrow{\quad\sigma\quad} & X, \end{array}$$

其中 μ 是群对象 G 的乘法.

定义. G 等变

当我们在范畴中有一个用交换图定义的对象时，我们自然地会考虑它的对偶定义

14.2 Kan 扩张

在之前范畴论的讨论中，我们

14.2.1 定义与基本的例子

定义. 给定函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 和 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，那么 F 关于 G 的左 Kan 扩张 (the left Kan extension of F along G)是函子 $\mathcal{L}_G(F):\mathcal{E}\to\mathcal{D}$和自然变换 $\eta:F\Rightarrow\mathcal{L}_G(F)\circ G$，满足图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_\eta"] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"'] &
\end{tikzcd}$$

交换且对任意满足如此交换图的函子 $H:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$ 和自然变换 $\xi:F\Rightarrow H\circ G$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_\xi"] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

使得存在唯一的自然变换 $\delta:\mathcal{L}_G(F)\Rightarrow H$ 满足 $\xi=G\delta\circ\eta$，即

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E}, \arrow[ur, bend left, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[ur, bend right, "H"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta"] &
\end{tikzcd}$$

或者换句话说，$(\mathcal{L}_G(F),\eta)$ 在所有满足相应交换图的对象中是始对象. 对偶地，我们有 F 关于 G 的右 Kan 扩张 (the right Kan extension of F along G) 是函子 $\mathcal{R}_G(F):\mathcal{E}\to\mathcal{D}$和自然变换 $\eta:F\Rightarrow\mathcal{L}_G(F)\circ G$，满足图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "{}^{\theta}\Uparrow"] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{R}_G(F)"'] &
\end{tikzcd}$$

例 14.1. 给定范畴 $\mathcal{C}$ 和对象 A，对任意函子 $F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$，Yoneda 引理说明存在自然的同构

$$\varphi:\hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h^A,F)\cong F(A):\psi,$$

其中 $\varphi(\eta)=\eta_A(\mathrm{id}_A)$. 令 $[0]$ 表示有一个对象和该对象上的恒等态射组成的范畴，

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[rr, "*"] \arrow[dr, "\mathrm{Const}_A"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_{\eta^a}"] & \mathbf{Set} \\
& \mathcal{C} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

其中函子 $*$ 把 $[0]$ 映到只有一个元素的集合 $\{*\}$. 对任意 $a\in F(A)$，有自然变换 $\eta^a:\{*\}\to F(A),*\mapsto a$，并且所有的自然变换 $*\Rightarrow F\circ\mathrm{Const}_A$ 都是某个 η^a. 特别地，有交换图

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[rr, "*"] \arrow[dr, "\mathrm{Const}_A"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta^{\mathrm{id}_A}"] & \mathbf{Set} \\
& \mathcal{C} \arrow[ur, "h^A"'] &
\end{tikzcd}.$$

根据 Yoneda 引理中的证明，$\psi(a) \circ \eta^{\mathrm{id}_A} = \eta^{\psi(a)_A(\mathrm{id}_A)} = \eta^a$，于是证明了有唯一的分解

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[rr, "*"] \arrow[dr, "\mathrm{Const}_A"'] & & \mathbf{Set} \\
& \mathcal{C} \arrow[ur, bend left, "h^A"] \arrow[ur, bend right, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\psi(a)"] &
\end{tikzcd},$$

因此 $\mathcal{L}_{\mathrm{Const}_A}(*) = h^A$.

将 $\mathcal{C}$ 换为 $\mathcal{C}^\circ$，那么同样地可以证明 $\mathcal{R}_{\mathrm{Const}_A}(*) = h_A$.

例 14.2. 任意给定群 G，那么存在唯一的函子 $[0] \to BG$. 对于 $\mathcal{C}$ 中的任意 G 对象 $X : BG \to \mathcal{C}$，自然变换

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[rr, "\mathrm{Const}_A"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow"] & \mathcal{C} \\
& BG \arrow[ur, "X"'] &
\end{tikzcd}$$

对应 A 到 $X(*)$ 的态射. 于是若 $\mathcal{C}$ 中有余积，那么态射 $A \to X(*)$ 对应到 G 等变的态射

$$\coprod_{g \in G} A \to X(*),$$

其中 G 在左边的作用由 G 在指标上的左乘给出，再通过在单位 $e \in G$ 上的限制得到

$$\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[rr, "\mathrm{Const}_A"] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\iota_e"] & \mathcal{C} \\
& BG \arrow[ur, "\coprod_{g \in G} A"'] &
\end{tikzcd}$$

是左 Kan 扩张 $\mathcal{L}(\mathrm{Const}_A)$.

引理 14.1. $\mathcal{L}_G(F)$ 具有关于 F 的函子性.

证明. □

Kan 扩张的万有性质可以给出特定自然变换之间的一一对应，但问题是，实际中的范畴 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 和 $\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$ 可能并不是局部小的. 我们并不想借助更高级的集合理论讨论真类之间的双射，因此为了计算 $\mathcal{L}_G(F)$ 和 $\mathcal{R}_G(F)$，转而考虑函子

$$\mathrm{Nat}(F, - \circ G) : \mathrm{Funct}(\mathcal{E}, \mathcal{D}) \to \mathbf{SET},$$

它把函子 $H : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ 映到 F 到该函子复合 $H \circ G$ 的自然变换的全体. 如前定义，对于任意的函子 $H : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ 和自然变换 $\xi : F \Rightarrow H \circ G$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\xi"] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd},$$

习题12.15说明 $-\circ G$ 和 $\mathrm{Nat}(H,-)$ 都是函子，因此它诱导了

$$\begin{aligned}\mathrm{Nat}(H,-) &\Rightarrow \mathrm{Nat}(F,-\circ G)\\ \mathrm{Nat}(H,K) &\to \mathrm{Nat}(F,K\circ G)\\ \zeta: H\Rightarrow K &\mapsto (\zeta G)\circ\xi: F\Rightarrow H\circ G\Rightarrow K\circ G,\end{aligned}$$

而 Kan 扩张的泛性质说明了

$$\mathrm{Nat}(\mathcal{L}_G(F),-)\Rightarrow \mathrm{Nat}(F,-\circ G)$$

是自然同构，即 $(\mathcal{L}_G(F),\eta)$ 是函子 $\mathrm{Nat}(F,-\circ G)$ 的代表. 对偶地，对于任意的函子 $H:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$ 和自然变换 $\xi: H\circ G\Rightarrow F$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\xi\Uparrow"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E} \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd},$$

存在相应的

$$\begin{aligned}\mathrm{Nat}(F,-\circ G) &\Rightarrow \mathrm{Nat}(H,-)\\ (\xi\circ(\zeta G), K\circ G) &\mapsto (\zeta: H\Rightarrow K, K),\end{aligned}$$

而 Kan 扩张的泛性质说明了

$$\mathrm{Nat}(F,-\circ G)\Rightarrow \mathrm{Nat}(\mathcal{R}_G(F),-)$$

是自然同构. 对比伴随函子的定义，我们有

定理 14.3. *给定 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$ 和范畴 $\mathcal{D}$，且任意函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 关于 G 的左 Kan 扩张与右 Kan 扩张都存在，那么函子*

$$\begin{aligned}G^*: \mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{D}) &\to \mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{D})\\ H &\mapsto H\circ G\end{aligned}$$

的左右伴随存在，分别由 $\mathcal{L}_G(-)$ 和 $\mathcal{R}_G(-)$ 给出. 此外，

证明. 根据对称性，我们只需要验证左伴随. 事实上，根据前面的讨论只需要说明

$$\begin{aligned}\mathrm{Nat}(H,-) &\Rightarrow \mathrm{Nat}(F,-\circ G)\\ \mathrm{Nat}(H,K) &\to \mathrm{Nat}(F,K\circ G)\\ \zeta: H\Rightarrow K &\mapsto (\zeta G)\circ\xi: F\Rightarrow H\circ G\Rightarrow K\circ G,\end{aligned}$$

对于任意 H 的自然性，即对任意 $\lambda: K_1\Rightarrow K_2$ 是函子 $K_1,K_2:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$ 间的自然态射，需要验证诱导图

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Nat}(H,K_1) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_*"'] & \mathrm{Nat}(F,K_1\circ G) \arrow[d, "(\lambda G)_*"] \\ \mathrm{Nat}(H,K_2) \arrow[r] & \mathrm{Nat}(F,K_2\circ G) \end{tikzcd}$$

的交换性. 一方面，对 $\zeta : H \Rightarrow K_1$，向下再向右的映射给出了

$$\zeta \mapsto \lambda \circ \zeta \mapsto (\lambda \circ \zeta)G \circ \xi = (\lambda G) \circ (\zeta G) \circ \xi.$$

另一方面，向右再向下的映射给出了

$$\zeta \mapsto (\zeta G) \circ \xi \mapsto (\lambda G) \circ (\zeta G) \circ \xi,$$

这证明了自然性. $\square$

例 14.3. 设 k 是域，G 是给定的群，$k-\mathbf{Rep}_G$ 是所有 k 上的 G 表示组成的范畴，那么习题?? 说明存在范畴的等价

$$\mathrm{Funct}(\mathrm{B}G, k-\mathbf{Vec}) \simeq k-\mathbf{Rep}_G.$$

若 H 是 G 的子群，那么嵌入自然地给出了函子 $i : \mathrm{B}H \hookrightarrow \mathrm{B}G$，于是存在函子

$$i^* : k-\mathbf{Rep}_G \to k-\mathbf{Rep}_H$$

这实际上是群表示的限制，也记为 Res^G_H. 函子 Res^G_H 的左右伴随都存在，它的左伴随称为诱导，记为 Ind^G_H，它的右伴随称为余诱导，记为 Coind^G_H. 同样地我们可以对 G 集合、G 空间等进行类似的讨论.

14.2.2 Kan 扩张的计算

对于给定的图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{D} \\ \mathcal{E}, & \end{tikzcd}$$

我们尝试构造 F 沿 G 的左 Kan 扩张. 对于任意的 $B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{E}$，按定义 $\mathcal{L}_G F(B)$ 是在 G 的像集中最接近 $\mathcal{C}$ 中该对象在 F 下的像；注意到范畴 G/B 包含了所有 $\mathcal{C}$ 中 "在 G 下映到 $\mathcal{E}/B$" 的态射，它有到 $\mathcal{C}$ 的自然的投影 $P_{/B} : G/B \to \mathcal{C}$，其中的终对象是 G 下与 B 最接近的对象；再经过 F 的作用后我们可以在 $\mathcal{D}$ 中衡量与要定义的 $\mathcal{L}_G F(B)$ 的距离，我们要选取最接近的，因此

$$\mathrm{colim}[G/B \xrightarrow{P_{/B}} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}]$$

理论上应该给出左 Kan 扩张在对象下的作用. 于是

定理 14.4. *给定函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 和 $G : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$，且对任意任意范畴 $\mathcal{E}$ 中的对象 B 余极限*

$$\mathcal{L}_G F(B) := \mathrm{colim}[G/B \xrightarrow{P_{/B}} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}]$$

存在，那么如上的定义给出了左 Kan 扩张，并且单位变换

$$\eta : F \Rightarrow \mathcal{L}_G F \circ G$$

由 colim 的泛性质给出.

首先回顾范畴 G/B 的定义（习题12.21），它的对象是配对 (A,f)，其中 A 是 $\mathcal{C}$ 中的对象，$f:G(A)\to B$ 是 $\mathcal{E}$ 中的态射，并且

$$\hom_{G/B}((A_1,f_1),(A_2,f_2))=\{g\in\hom_{\mathcal{C}}(A_1,A_2)\mid f_1=f_2\circ G(g)\},$$

即有如下交换图

$$\begin{tikzcd} G(A_1) \arrow[rr, "G(g)"] \arrow[dr, "f_1"'] & & G(A_2) \arrow[dl, "f_2"] \\ & B. & \end{tikzcd}$$

同时，若 $h:B_1\to B_2$ 是范畴 $\mathcal{E}$ 中的态射，那么它诱导了函子

$$\begin{aligned} h_*:G/B_1&\to G/B_2\\ (A,f)&\mapsto (A,h\circ f)\\ [g:(A_1,f_1)\to(A_2,f_2)]&\mapsto[g:(A_1,h\circ f_1)\to(A_2,h\circ f_2)], \end{aligned}$$

并且有交换图

$$\begin{tikzcd} G/B_1 \arrow[rr, "h_*"] \arrow[dr, "P_{/B_1}"'] & & G/B_2 \arrow[dl, "P_{/B_2}"] \\ & \mathcal{C}. & \end{tikzcd}$$

证明. 首先我们来说明 $\mathcal{L}_GF$ 的函子性并给出 $\eta:F\Rightarrow\mathcal{L}_GF\circ G$. 考虑 $\mathcal{E}$ 中 $\mathcal{L}_GF$ 的定义图

$$\begin{tikzcd} F(A_1) \arrow[rr] \arrow[dr, "\lambda_{A_1}"'] & & F(A_2) \arrow[dl, "\lambda_{A_2}"] \\ & \mathcal{L}_GF(B), & \end{tikzcd}$$

其中 λ_{A_i} 是余极限定义中给出的结构态射. 给定范畴 $\mathcal{E}$ 中的态射 $h:B_1\to B_2$，由前讨论

$$G/B_1\xrightarrow{P_{/B_1}}\mathcal{C}\xrightarrow{F}\mathcal{D}=G/B_1\xrightarrow{h_*}G/B_2\xrightarrow{P_{/B_2}}\mathcal{C}\xrightarrow{F}\mathcal{D},$$

即 $\mathcal{L}_GF(B_1)$ 的定义图都有到 $\mathcal{L}_GF(B_2)$ 的态射

$$\begin{tikzcd} F(A_1) \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{A_1}"'] \arrow[drr, "\mu_{A_1}"] & F(A_2) \arrow[dl, "\lambda_{A_2}"'] \arrow[dr, "\mu_{A_2}"] & \\ \mathcal{L}_GF(B_1) \arrow[rr, dashed] & & \mathcal{L}_GF(B_2), \end{tikzcd}$$

根据余极限的定义，存在唯一的态射 $\mathcal{L}_GF(h):\mathcal{L}_GF(B_1)\dashrightarrow\mathcal{L}_GF(B_2)$. 若有 $\mathcal{E}$ 中的态射 $B_1\xrightarrow{h}B_2\xrightarrow{k}B_3$，那么上述的唯一性保证了

$$\mathcal{L}_GF(k\circ h)=\mathcal{L}_GF(k)\circ\mathcal{L}_GF(h).$$

对于自然变换 $\eta:F\Rightarrow\mathcal{L}_GF\circ G$，对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A，此时 $B=G(A)$，那么 $(A,\mathrm{id}_{G(A)})$ 是 G/B 的对象，于是根据余极限的定义，有结构态射

$$\eta_A=\lambda_A:F(A)\to\mathcal{L}_GF(B),$$

并且与上面相同的论证，对于任意 $\mathcal{C}$ 中的态射 $g:A_1\to A_2$ 有交换图

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[r, "F(g)"] \arrow[d, "\lambda_{A_1}"'] \arrow[dr, "\mu_{A_1}"] & F(A_2) \arrow[d, "\mu_{A_2}"] \\
\mathcal{L}_G F(B_1) \arrow[r, dashed, "\mathcal{L}_G F(G(g))"'] & \mathcal{L}_G F(B_2),
\end{tikzcd}$$

其中 λ, μ 以区分不同余极限的定义结构态射，这意味着 η 是自然的.

接下来需要验证如上给出的 $(\mathcal{L}_G F, \eta)$ 满足相应的泛性质. 给定任意的函子 $H : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$ 和自然变换 $\xi : F \Rightarrow H \circ G$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\xi"] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd} ,$$

对任意 G/B 中的对象 (A, f)，有

$$F(A) \xrightarrow{\xi_A} H(G(A)) \xrightarrow{H(f)} H(B),$$

根据 ξ 的自然性和 H 的函子性，如上给出的态射与 $\mathcal{L}_G F(B) = \operatorname{colim}[G/B \xrightarrow{P_{/B}} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}]$ 的定义图相容，即有交换图

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[rr, "\xi_{A_1}"] \arrow[dr, "\lambda_{A_1}"] \arrow[dd, "F(g)"] & & H(G(A_1)) \arrow[dd] \arrow[dr, "H(f_1)"] & \\
& \mathcal{L}_G F(B) \arrow[rr, dashed, "H(G(g))"] & & H(B), \\
F(A_2) \arrow[rr, "\xi_{A_1}"] \arrow[ur, "\lambda_{A_2}"] & & H(G(A_2)) \arrow[ur, "H(f_2)"'] &
\end{tikzcd}$$

于是存在唯一的态射

$$\mathcal{L}_G F(B) \xrightarrow{\delta_B} H(B).$$

对于如此定义的 δ 的自然性，考虑 $\mathcal{E}$ 中的态射 $h : B_1 \to B_2$，$\mathcal{L}_G F(B_1) \xrightarrow{\delta_{B_1}} H(B_1) \xrightarrow{H(g)} H(B_2)$ 是下图中唯一的与整幅（其中 $\mathcal{L}_G F(B_1)$ 的定义图只有一部分）图交换的态射

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[rr, "\xi_{A_1}"] \arrow[dr, "\lambda_{A_1}"] \arrow[dd, "F(g)"] & & H(G(A_1)) \arrow[dd] \arrow[dr, "H(f_1)"] & & \\
& \mathcal{L}_G F(B_1) \arrow[rr, dashed, "H(G(g))"] & & H(B_1) \arrow[r, "H(h)"] & H(B_2), \\
F(A_2) \arrow[rr, "\xi_{A_1}"] \arrow[ur, "\lambda_{A_2}"] & & H(G(A_2)) \arrow[ur, "H(f_2)"'] & &
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

同时还有另一部分定义图

$$\begin{tikzcd}
F(A_1) \arrow[rr, "\xi_{A_1}"] \arrow[dr, "\mu_{A_1}"] \arrow[dd, "F(g)"] & & H(G(A_1)) \arrow[dd] \arrow[dr, "H(h \circ f_1)"] & \\
& \mathcal{L}_G F(B_2) \arrow[rr, dashed, "H(G(g))"] & & H(B_2), \\
F(A_2) \arrow[rr, "\xi_{A_1}"] \arrow[ur, "\mu_{A_2}"] & & H(G(A_2)) \arrow[ur, "H(h \circ f_2)"'] &
\end{tikzcd}$$

注意到 $\mathcal{L}_G F(B_1)$ 的定义图是 $\mathcal{L}_G F(B_2)$ 的定义图的子图，因此 $\mathcal{L}_G F(B_1) \xrightarrow{\mathcal{L}_G F(h)} \mathcal{L}_G F(B_2) \xrightarrow{\delta_{B_2}} H(B_2)$ 也是与图 $(*)$ 相容的唯一的态射，那么存在交换图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{L}_G F(B_1) \arrow[r, dashed, "\mathcal{L}_G F(h)"] \arrow[d, "\delta_{B_1}"] & \mathcal{L}_G F(B_2) \arrow[d, "\delta_{B_2}"] \\
H(B_1) \arrow[r, "H(g)"] & H(B_2),
\end{tikzcd}$$

也就是自然性.

接下来验证 $\xi = G\delta \circ \eta$，对于任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A，取 $B = G(A)$ 和 G/B 中的对象 $(A, \mathrm{id}_{G(A)})$，那么 $\mathcal{L}_G F(B)$ 的定义说明有交换图

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\xi_A"] \arrow[d, "\lambda_A"] & H(G(A)) \arrow[d, "H(\mathrm{id}_{G(A)})"] \\
\mathcal{L}_G F(B) \arrow[r, dashed] & H(G(A)),
\end{tikzcd}$$

即是想要的等式. 最后，关于 δ 的唯一性，交换性意味着有如上的交换图，但根据 $\mathcal{L}_G F(B)$ 的定义虚线的态射必然是唯一的，因此唯一性也得证. $\square$

例 14.4. 考虑偏序集 $(\mathbb{Q}, \leq)$ 和 $(\mathbb{R}_+, \leq)$，函数

$$e^x : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$$

由于是单调函数，因而是函子.

例 14.5. 我们回到例14.3中的讨论，来说明定理14.4可以给出诱导表示和余诱导表示的具体构造. 假设子群 $H \hookrightarrow G$ 给出了函子 $BH \to BG$，那么它诱导的函子

$$\mathrm{res}_H^G : \mathrm{Funct}(BG, \mathcal{C}) \to \mathrm{Funct}(BH, \mathcal{C})$$

由定理14.3存在左右伴随，分别记为 Ind_H^G 和 Coind_H^G.

任意给定表示 $X : BH \to \mathcal{C}$，那么定理14.4说明 Ind_H^G 是图

$$BH/*_G \xrightarrow{P_{/*_G}} BH \xrightarrow{X} \mathcal{C}$$

的余极限，其中 $*_G$ 是 BG 中唯一的对象. 具体而言，根据定理14.4证明之前的讨论，$BH/*_G$（这是极限图的指标范畴）中的对象是 BG 中的态射，即 G 中的元素，且 $\hom_{BH/*_G}(g_1, g_2) = \{h \in H \mid g_1 = g_2 h\}$. 依据定理13.6（的对偶），余极限可以用余等值子

$$\begin{tikzcd}
X(*) \arrow[d, "\iota_{(g,h)}"] \arrow[dr, "\iota_{gh}"] & & \\
\coprod_{G\times H} X(*) \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \coprod_G X(*) \arrow[r, two heads, "q"] & \mathrm{Ind}_H^G(X(*)) \\
X(*) \arrow[u, "\iota_{(g,h)}"] \arrow[r, "h_*"] & X(*) \arrow[u, "\iota_g"] &
\end{tikzcd}$$

描述，其中任意给定 $BH/*_G$ 中的态射 $h\in H$，记它的定义域是 gh，那么余定义域是 g.

更具体地，存在 $\mathrm{Ind}_H^G(X(*))$ 的表示 $\coprod_{G/H}X$ 使得结构映射 q 可以被描述出来. 给定 G/H 的一组代表元 $G/H=\{g_iH\mid g_i\in G\}$，那么任意 $g\in G$ 都可以表示为唯一的 $g=g_jh_0$，其中 g_j 是某个代表元，$h_0\in H$. 那么 $q:\coprod_G X(*)\to\coprod_{G/H}X(*)$ 定义为

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "(h_0)_*"] \arrow[d, "\iota_g"] & X \arrow[d, "\iota_{g_j}"] \\
\coprod_G X(*) \arrow[r, dashed, "q"] & \coprod_{G/H} X(*).
\end{tikzcd}$$

任给定 G 中的元素 g_0，它在 $\coprod_{G/H}X(*)$ 上的作用是左乘在指标集上的，具体说是交换图

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{G\times H} X(*) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "(g,h)\mapsto(g_0g,h)"] & \coprod_G X(*) \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[d, "g\mapsto g_0g"] & \mathrm{Ind}_H^G(X(*)) \arrow[d, "(g_0)_*"] \\
\coprod_{G\times H} X(*) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \coprod_G X(*) \arrow[r, two heads, "q"] & \mathrm{Ind}_H^G(X(*)).
\end{tikzcd}$$

对偶地，等值子图

$$\begin{tikzcd}
 & & & X(*) \\
\mathrm{coind}_H^G X \cong \prod_{H\backslash G} X(*) \arrow[r, hook, "m"] & \prod_G X(*) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[urr, "\pi_{hg}"] \arrow[d, "\pi_g"] & \prod_{H\times G} X(*) \arrow[ur, "\pi_{(h,g)}"] \arrow[d, "\pi_{(h,g)}"] \\
 & X(*) \arrow[r, "h_*"] & X(*),
\end{tikzcd}$$

定义了余诱导表示，单态射 m 有类似的描述，G 在 $\mathrm{coind}_H^G X$ 上的作用由 G 在指标集上的右乘诱导. 特别地，当 $\mathcal{C}=k-\mathbf{Vect}$ 是域 k 上的向量空间且 H 是 G 中的有限指标子群时，有限多个对象的积和余积是同构的，因此如上讨论的两个定义图给出了相同的乘积（余乘积），因此 $\mathrm{ind}_H^G X\cong\mathrm{coind}_H^G X$，并且这个同构还是保持 G 作用的，因而此时的左右 Kan 扩张相同.

习题 14.1. 根据例14.5中 q 的定义证明 $\coprod_{G/H}X(*)$ 是 $\mathrm{Ind}_H^G(X(*))$.

证明. 首先对例14.5中 q 的定义解释：按照余积的泛性质，确定 $q:\coprod_G X(*)\to\coprod_{G/H}X(*)$ 只需要知道每个 $g\in G$ 作为指标所对应的 $X(*)$ 到 $\coprod_{G/H}X(*)$ 的态射，而这恰是 $\iota_{g_j}\circ(h_0)_*$.

接下来验证如此的定义与图相容，即 $q\circ\alpha=q\circ\beta$. 根据 $\coprod_{G\times H}X(*)$ 对应的泛性质，如上当且仅当

$q\circ\alpha\circ\iota_{(g,h)} = q\circ\beta\circ\iota_{(g,h)}$ 对任意 $g\in G, h\in H$ 成立. 验证得

$$\begin{aligned}
q\circ\alpha\circ\iota_{(g,h)} &= X \xrightarrow{\iota_{gh}} \coprod_G X(*) \xrightarrow{q} \coprod_{G/H} X(*) \\
&= X \xrightarrow{\iota_{g_j h_0 h}} \coprod_G X(*) \xrightarrow{q} \coprod_{G/H} X(*) \\
&= X \xrightarrow{(h_0 h)_*} X \xrightarrow{\iota_{g_j}} \coprod_{G/H} X(*) \\
&= X \xrightarrow{h_*} X \xrightarrow{(h_0)_*} X \xrightarrow{\iota_{g_j}} \coprod_{G/H} X(*) \\
&= X \xrightarrow{h_*} X \xrightarrow{\iota_g} \coprod_G X(*) \xrightarrow{q} \coprod_{G/H} X(*) \\
&= q\circ\beta\circ\iota_{(g,h)}.
\end{aligned}$$

最后来验证所给的态射和对象满足相应的泛性质，对任意满足 $f\circ\alpha = f\circ\beta$ 的态射 $f:\coprod_G X(*)\to Y$，都有唯一的态射 $\tilde f:\coprod_{G/H} X(*)\to Y$ 使得 $f=\tilde f\circ q$ 即交换图

$$\begin{tikzcd}
\coprod_G X(*) \arrow[r, two heads, "q"] \arrow[dr, "f"'] & \mathrm{Ind}_H^G(X(*)) \arrow[d, "\tilde f"] \\
& Y.
\end{tikzcd}$$

由于 $f\circ\alpha = f\circ\beta$，自然有 $f\circ\alpha\circ\iota_{(g,h)} = f\circ\beta\circ\iota_{(g,h)}$，这意味着 $f\circ\iota_{gh} = f\circ\iota_g\circ h_*$. 那么对任意 $g\in G$，记 $g=g_j h_0$，定义 $\tilde f$ 是由 $\tilde f\circ\iota_{g_j}\circ(h_0)_* = f\circ\iota_g$ 诱导的态射，由如上关系显然 $f=\tilde f\circ q$；对于唯一性，假设存在如此的 $\tilde f$，那么

$$\begin{aligned}
\tilde f\circ\iota_{g_j} &= \tilde f\circ\iota_{g_j}\circ(h_0)_*\circ(h_0^{-1})_* \\
&= f\circ\iota_g\circ(h_0^{-1})_* \\
&= f\circ\iota_{g_j},
\end{aligned}$$

这依然是确定的，故唯一性得证. □

例 14.6. 在例12.3中，我们介绍了群 G 的轨道范畴 $\mathrm{Orb}(G)$. 注意到 $\hom_{\mathrm{Orb}(G)}(G/\{e\}, G/\{e\}) = G^\circ$，于是我们有自然的嵌入

$$\mathrm{B}G \hookrightarrow \mathrm{Orb}(G).$$

任意给定集合 X 上的 G 作用 $X:\mathrm{B}G\to\mathbf{Set}$，定理14.4可以用来构造右 Kan 扩张

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{B}G \arrow[rr, "X"] \arrow[dr, hook] & \arrow[d, phantom, "\eta\Uparrow"] & \mathbf{Set} \\
& \mathrm{Orb}(G)^\circ. \arrow[ur, dashed, "\mathcal{R}_i(X)"'] &
\end{tikzcd}$$

总结下来，右 Kan 扩张 $\mathcal{R}_i(X)$ 恰好是不动点函子，将对象 G/H 映到对象 X^H，

14.2.3 逐点 Kan 扩张

通常情况下由 Kan 扩张定义的泛性质对象并不具有良好的性质，比如说在导出函子中的应用，这一方面是因为之前的定义太过宽泛，而对应它的方案是考虑特定的 Kan 扩张. 为此，我们首先介绍定义：

定义. 给定函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 和 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，那么 F 关于 G 的左 Kan 扩张是 $(\mathcal{L}_G(F),\eta)$，如图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_\eta"] & \mathcal{D} \arrow[r, "L"] & \mathcal{M} \\ & \mathcal{E}, \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"'] & & \end{tikzcd}$$

若函子 $L:\mathcal{D}\to\mathcal{M}$ 满足复合 $(L\circ\mathcal{L}_G(F),L\eta)$ 是 $L\circ F$ 关于 G 的左 Kan 扩张，则称 L 保左 Kan 扩张 (preserves left Kan extensions).

有一类特殊的 Kan 扩张

定义. 给定函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 和 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，左 Kan 扩张

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_\eta"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"'] & \end{tikzcd}$$

存在，若任意的函子 $L:\mathcal{D}\to\mathcal{M}$ 都保 Kan 扩张 $\mathcal{L}_G(F)$，则称这个 Kan 扩张 $\mathcal{L}_G(F)$ 是绝对的 (absolute).

引理 14.2. *左伴随保左 Kan 扩张.*

证明 *1.* 给定函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 和 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，$F$ 关于 G 的左 Kan 扩张是 $(\mathcal{L}_G(F),\eta)$，

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_\eta"] & \mathcal{D} \arrow[r, "L"] & \mathcal{M} \\ & \mathcal{E}, \arrow[ur, dashed, "\mathcal{L}_G(F)"'] & & \end{tikzcd}$$

函子 $L:\mathcal{D}\to\mathcal{M}$ 有右伴随 $R:\mathcal{M}\to\mathcal{D}$，且对应了单位 $\epsilon:\mathrm{id}_{\mathcal{D}}\Rightarrow RL$ 和余单位 $\delta:LR\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{M}}$，那么任意给定函子 $H:\mathcal{E}\to\mathcal{M}$，

$$\begin{aligned}\hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{M})}(L\circ\mathcal{L}_G(F),H) &\cong \hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{D})}(\mathcal{L}_G(F),R\circ H)\\ &\cong \hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{D})}(F,R\circ H\circ G)\\ &\cong \hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(L\circ F,H\circ G),\end{aligned}$$

其中第一、三个同构是因为习题13.11，第二个同构是因为定理14.3. 于是取 $H = L \circ \mathcal{L}_G(F)$，那么习题13.11和定理14.3中的映射给出

$$\mathrm{id}_{L\circ\mathcal{L}_G(F)} \mapsto \delta\mathcal{L}_G(F) \mapsto \delta(\mathcal{L}_G(F)\circ G)\circ\eta \mapsto \epsilon L(\mathcal{L}_G(F)\circ G)\circ L\delta(\mathcal{L}_G(F)\circ G)\circ L\eta$$

注意到 $\epsilon L(\mathcal{L}_G(F)\circ G)\circ L\delta(\mathcal{L}_G(F)\circ G)\circ L\eta = (\epsilon L\circ L\delta)(\mathcal{L}_G(F)\circ G)\circ L\eta = L\eta$，于是我们证明了函子的同构

$$\mathrm{Nat}(L\circ\mathcal{L}_G(F), -) \cong \hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{M})}(L\circ F, -\circ G) : \mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{M}) \to \mathbf{Set},$$

那么 $(L\circ\mathcal{L}_G(F), \mathrm{id}_{L\circ\mathcal{L}_G(F)})$ 关于 $\mathrm{Nat}(L\circ\mathcal{L}_G(F), -)$ 的泛性质说明了 $(L\circ\mathcal{L}_G(F), L\eta)$ 关于 $\hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{M})}$ 的泛性质，因此 $(L\circ\mathcal{L}_G(F), L\eta)$ 是左 Kan 扩张. □

事实上我们还可以构造性地完成证明：

证明 *2.* 任意给定自然变换 $\alpha : LF \Rightarrow HG$,

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \mathcal{D} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[r, "H"'] & \mathcal{M} \arrow[ur, "R"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\epsilon"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{D} \arrow[r, equal] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[rr, "H"] & & \mathcal{M} \arrow[u, "R"'] \arrow[ul, phantom, "\Downarrow\exists!\xi"]
\end{tikzcd}$$

根据 $(\mathcal{L}_G(F), \eta)$ 的泛性质存在唯一的 $\xi : \mathcal{L}_G(F) \Rightarrow R\circ H$，即左图可以对应到右图. 进一步地，与余单位 $\delta : LR \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 的复合（如下图）

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \mathcal{D} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\
& \mathcal{E} \arrow[r, "H"'] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r] \arrow[dr, "G"'] & \mathcal{D} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & \mathcal{D} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\delta"] & \\
& \mathcal{E} \arrow[r, "H"'] & \mathcal{M} \arrow[ur, "R"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\epsilon"] \arrow[rr, equal] & & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr] \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{D} \arrow[r, equal] & \mathcal{D} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\delta"] & \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[r, "H"] & \mathcal{M} \arrow[ur, "R"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\exists!\xi"] \arrow[rr, equal] & & \mathcal{M}
\end{tikzcd}$$

说明了 α 有沿 $L\eta$ 的分解，分解的另一部分恰是复合 $(\delta H\circ L\xi)G : L\circ\mathcal{L}_G(F)\circ G \Rightarrow H\circ G$.

再来证明如上分解的唯一性. 给定任意分解

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \mathcal{D} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & \\
& \mathcal{E} \arrow[r, "H"'] & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{D} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\zeta"] & \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[rr, "H"'] & & \mathcal{M},
\end{tikzcd}$$

再与单位 $\epsilon : \mathrm{id}_{\mathcal{D}} \Rightarrow RL$ 的复合给出

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \mathcal{D} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\alpha"] & & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[r, "H"'] & \mathcal{M} \arrow[ur, "R"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\epsilon"] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{D} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\zeta"] & & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\eta"] \arrow[rr, "H"'] & & \mathcal{M} \arrow[ur, "R"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\epsilon"] &
\end{tikzcd}$$

$R\alpha\circ\epsilon F : F \Rightarrow R\circ H\circ G$ 沿 η 的分解 $R\alpha\circ\epsilon F = R(\zeta G\circ L\eta)\circ\epsilon F = R\zeta G\circ RL\eta\circ\epsilon F$，记 $\xi = R\zeta\circ\epsilon\mathcal{L}_G(F) : \mathcal{L}_G(F) \Rightarrow R\circ H$

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{D} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\zeta"] & & \mathcal{D} \\
\mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[rr, "H"'] & & \mathcal{M}, \arrow[ur, "R"'] \arrow[u, phantom, "\Downarrow\epsilon"] &
\end{tikzcd}$$

那么根据左 Kan 扩张 $\mathcal{L}_G(F)$ 的泛性质如此的 ξ 唯一，恰是上一段证明存在性的 ξ，并且 $R\alpha\circ\epsilon F=R(\zeta G\circ L\eta)\circ\epsilon F=R\zeta G\circ RL\eta\circ\epsilon F=R\zeta G\circ\epsilon\mathcal{L}_G(F)G\circ\eta=\xi G\circ\eta$（这里如同证明 1 用到了 η 的自然性），再继续复合余单位 $\delta: LR\Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{M}}$ 得到

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} \arrow[rr, equal] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\xi"] & & \mathcal{D} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\delta"] & \\
\mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[r, "H"'] & \mathcal{M} \arrow[urr, "R"] \arrow[rrr, equal] & & & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\zeta"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\epsilon"] & \mathcal{D} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\delta"] & \\
\mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[rr, "H"'] & & \mathcal{M} \arrow[ur, "R"] \arrow[rr, equal] & & \mathcal{M}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
 & \mathcal{D} \arrow[dr, "L"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\zeta"] & \\
\mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[rr, "H"'] & & \mathcal{M},
\end{tikzcd}$$

这意味着 $\zeta=\delta H\circ L\xi$ 是唯一的. □

例 14.7. 考虑忘却函子 $U:\mathbf{Top}\to\mathbf{Set}$，根据例13.1函子 U 的左右伴随都存在，于是引理14.2（及其对偶）说明 U 同时保左右 Kan 扩张. 这点在例14.5中也有体现.

例 14.8. 考虑忘却函子 $U:k-\mathbf{Vec}\to\mathbf{Set}$，它是右伴随函子因此保极限，但注意到 $\mathbf{Vec}$ 中的余极限并不是不交并，因此 U 不保余极限. 例14.5也说明了，由 H 线性表示余诱导的 G 线性表示的底集和作为 H 集合诱导的 G 集合不相同（$\mathbf{Set}$ 和 $k-\mathbf{Vec}$ 的余积不同），但由 H 线性表示诱导的 G 线性表示的底集和作为 H 集合诱导的 G 集合相同.

定义. 给定函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 和 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，$\mathcal{D}$ 是局部小范畴，右 Kan 扩张 $(\mathcal{R}_G(F),\theta)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\theta\Uparrow"] & \mathcal{D} \arrow[r, "\hom_{\mathcal{D}}(X,-)"] & \mathbf{Set} \\
 & \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{R}_G(F)"'] & &
\end{tikzcd}$$

若满足对任意 $X\in\mathrm{ob}\,\mathcal{D}$，$\hom_{\mathcal{D}}(X,-)$ 都保 Kan 扩张，则称 $\mathcal{R}_G(F)$ 是逐点右 Kan 扩张 (pointwise right Kan extension).

逐点左 Kan 扩张的定义是取对偶得来的：

定义. 给定函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 和 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，$\mathcal{D}$ 是局部小范畴，作 Kan 扩张 $(\mathcal{L}_G(F),\eta)$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \\
 & \mathcal{E}, \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"'] &
\end{tikzcd}$$

若取对偶后的图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}^{\circ} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\eta^{\circ}\Uparrow"] & \mathcal{D}^{\circ} \arrow[r, "\hom_{\mathcal{D}}(-,X)"] & \mathbf{Set} \\
 & \mathcal{E}^{\circ}, \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"'] & &
\end{tikzcd}$$

满足对任意 $\mathcal{D}$ 中的对象 X，$\hom_{\mathcal{D}}(-,X)$ 都保 Kan 扩张，则称 $(\mathcal{L}_G(F),\eta)$ 是逐点左 Kan 扩张 (pointwise left Kan extension).

由于协变 hom 函子保极限（命题13.7），定理14.4（和对偶）中构造给出来的有 Kan 扩张是逐点的. 值得注意的是，这个结果的逆也是正确的，如下定理也解释了如此命名的原因——逐点 Kan 扩张可以由极限或余极限逐点计算.

定理 14.5. *给定函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 和 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，$\mathcal{D},\mathcal{E}$ 是局部小范畴，F 沿 G 的 Kan 扩张 $\mathcal{R}_GF$ 和 $\mathcal{L}_GF$ 是逐点的当且仅当它们可以由*

$$\mathcal{R}_GF(B) := \lim[B\backslash G \xrightarrow{P_{B\backslash}} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}]$$

和

$$\mathcal{L}_GF(B) := \mathrm{colim}[G/B \xrightarrow{P_{/B}} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}]$$

计算得来.

为完成定理的证明，我们需要如下一个引理：

引理 14.3. *给定范畴 $\mathcal{C},\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{E}$，函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}, G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$，取 $\mathcal{E}$ 中对象 B，记 $P_{B\backslash}:B\backslash G\to\mathcal{C}$ 是自然的投影函子，那么对 $\mathcal{D}$ 中的任意对象 X 都存在集合间的同构*

$$\mathrm{Cone}(X, F\circ P_{B\backslash}) \cong \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{E}}(B, G(-)), \hom_{\mathcal{D}}(X, F(-))).$$

证明. 函子 Cone 的定义在13.4.1节中，按定义 $\mathrm{Cone}(X, F\circ P_{B\backslash})$ 的对象是 $(\lambda, \{f_i: B\to G(A_i)\}_{A_i\in \mathrm{ob}\ \mathcal{C}})$，其中 $\lambda:\mathrm{Const}_X\Rightarrow F$ 是 $\mathrm{Cone}(X,F)$ 中的锥，$\{f_i: B\to G(A_i)\}_{A_i\in\mathrm{ob}\ \mathcal{C}}$ 确定了 $B\backslash G$ 中的一个对象，图 $FP_{B\backslash}$ 内的态射 $h: A_i\to A_j$ 必然满足 $G(h)\circ f_i = f_j$.

考虑给定一个自然变换 $\lambda: \hom_{\mathcal{E}}(B,G(-))\Rightarrow \hom_{\mathcal{D}}(X,F(-))$，按定义它将 $\mathcal{D}$ 中的态射 $f_i: B\to G(A_i)$ 映到 $\lambda_{A_i}(f_i): X\to F(A_i)$，并且任意给定 $\mathcal{C}$ 中的态射 $h: A_i\to A_j$，图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{E}}(B, G(A_i)) \arrow[r, "\lambda_{A_i}"] \arrow[d, "(G(h))_*"'] & \hom_{\mathcal{D}}(X, F(A_i)) \arrow[d, "(F(h))_*"] \\
\hom_{\mathcal{E}}(B, G(A_j)) \arrow[r, "\lambda_{A_j}"] & \hom_{\mathcal{D}}(X, F(A_j))
\end{tikzcd}$$

交换（λ 自然性的定义），即

$$F(h)\circ\lambda_{A_j}(f_i) = (F(h))_*(\lambda_{A_j}(f_i)) = (F(h))_*\circ\lambda_{A_i}(f_i) = \lambda_{A_j}\circ(G(h))_*(f_i) = \lambda_{A_j}(G(h)\circ f_i),$$

这意味着交换图

$$\begin{tikzcd}
 & G(A_i) \arrow[dd, "G(h)"] \\
B \arrow[ur, "f_i"] \arrow[dr, "f_j"'] & \\
 & G(A_j)
\end{tikzcd}$$

诱导了交换图

$$\begin{tikzcd} & F(A_i) \arrow[dd, "F(h)"] \\ X \arrow[ur, "\lambda_{A_i}(f_i)"] \arrow[dr, "\lambda_{A_j}(f_j)"'] & \\ & F(A_j), \end{tikzcd}$$

于是给出了映射

$$\Psi : \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{E}}(B, G(-)), \hom_{\mathcal{D}}(X, F(-))) \to \mathrm{Cone}(X, F \circ P_{B\backslash}).$$

反过来任意给定锥

$$\begin{tikzcd} & F \circ P_{B\backslash}(A_i, f_i) \arrow[dd, "F(h)"] \\ X \arrow[ur, "\lambda_i"] \arrow[dr, "\lambda_j"'] & \\ & F \circ P_{B\backslash}(A_j, f_j), \end{tikzcd}$$

定义变换

$$\lambda : \hom_{\mathcal{E}}(B, G(-)) \Rightarrow \hom_{\mathcal{D}}(X, F(-))$$
$$\lambda_{A_i} : \hom_{\mathcal{E}}(B, G(A_i)) \to \hom_{\mathcal{D}}(X, F(A_i))$$
$$f_i \mapsto \lambda_i,$$

我们需要验证它的自然性，由前面的讨论需要验证对任意的 $h : A_i \to A_j$，

$$F(h) \circ \lambda_{A_j}(f_i) = \lambda_{A_j}(G(h) \circ f_i).$$

此时，取 $B\backslash G$ 中的对象满足 $f_j = G(h) \circ f_i : B \to G(A_j)$，那么定义得 $\lambda_j = \lambda_{A_j}(f_j) = \lambda_{A_j}(G(h) \circ f_i)$，根据原锥的交换性自然性得证. 于是给出了映射

$$\Phi : \mathrm{Cone}(X, F \circ P_{B\backslash}) \to \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{E}}(B, G(-)), \hom_{\mathcal{D}}(X, F(-))).$$

明显地两个映射互为逆，得证. □

定理*14.5*的证明. 我们只证明一方面，另一方面对偶地可以得到.

假设右 Kan 扩张 $\mathcal{R}_G(F)$ 是逐点的, 那么对任意 $\mathcal{D}$ 中的对象 X, $\hom_{\mathcal{D}}(X, \mathcal{R}_G(F)(-))$ 是 $\hom_{\mathcal{D}}(X, F(-))$ 沿 G 的有 Kan 扩张，那么根据 Yoneda 引理和定理14.3（的证明部分），

$$\begin{aligned} \hom_{\mathcal{D}}(X, \mathcal{R}_G(F)(-)) &\cong \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{E}}(B, -), \hom_{\mathcal{D}}(X, \mathcal{R}_G(F)(-))) \\ &\cong \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{E}}(B, G(-)), \hom_{\mathcal{D}}(X, F(-))) \\ &\cong \mathrm{Cone}(X, F \circ P_{B\backslash}), \end{aligned}$$

其中最后一步用到了引理14.3，这意味着 $\mathcal{R}_G(F)(B)$ 是 $\lim[B\backslash G \xrightarrow{P_{B\backslash}} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}]$. □

值得注意的是，沿满忠实的函子给出的逐点 Kan 扩张事实上直接给出了沿该函子的分解：

推论 14.5.1. *沿用定理14.5的记号，若 $G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$ 是满忠实的，则任意逐点左 Kan 扩张的单位定义了自然同构*

$$\mathcal{L}_G(F)\circ G\cong F.$$

证明. 根据习题12.21，存在范畴之间的同构 $\mathcal{C}/A\cong G/G(A)$，并且这个同构显然与二者到 $\mathcal{C}$ 的投影交换，因此根据定理14.5，

$$\mathcal{L}_G(F)\circ G(A):=\operatorname{colim}[\mathcal{C}/A\xrightarrow{P_{/A}}\mathcal{C}\xrightarrow{F}\mathcal{D}],$$

但此时指标范畴 $\mathcal{C}/A$ 存在终对象 (A,id_A)，根据习题13.14，这个余极限恰好是

$$F\circ P_{/A}(A,\mathrm{id}_A))=F(A).$$

此外，单位 η 的定义说明它实质给出了同构 $\eta_A:F(A)\xrightarrow{\sim}\mathcal{L}_G(F)\circ G(A)$. □

另一方面，逐点 Kan 扩张也可以用来描述极限和余极限. 在练习13.15中，我们构造了范畴 $\mathrm{Cone}(\mathcal{J})$ 和 $\mathrm{Cocone}(\mathcal{J})$，借助它们和逐点 Kan 扩张可以重新叙述极限和余极限：

命题 14.6. *范畴 $\mathcal{C}$ 包含了图 $\mathcal{J}$ 的***所有***极限当且仅当函子 $\mathrm{res}:\mathrm{Funct}(\mathrm{Cone}(\mathcal{J}),\mathcal{C})\to\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{C})$ 有由逐点 Kan 扩张定义的右伴随*

$$\mathrm{res}:\mathrm{Funct}(\mathrm{Cone}(\mathcal{J}),\mathcal{C})\leftrightarrows\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{C}):\lim,$$

记为 $\lim$.

证明. 根据习题12.19的构造，存在满忠实的嵌入函子 $i:\mathcal{J}\hookrightarrow\mathrm{Cone}(\mathcal{J})$（这个嵌入函子不是习题13.15定义图中的对角函子；并且限制函子就是嵌入函子 i 的拉回）. 记 $\mathrm{Cone}(\mathcal{J})$ 的顶点对象为 S. 于是，由定理14.3，沿 i 的右 Kan 扩张（如果存在）恰好是函子 res 的右伴随.

若如此的右伴随存在，任意给定图 $F:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$，那么根据右 Kan 扩张的泛性质 $\lim(F)(S)$ 恰好是图 F 的极限. 反过来，若所有的极限存在，注意到对 $\mathcal{J}$ 中的任意对象 j，$j\backslash i=j\backslash\mathcal{J}$，特别地 $S\backslash i=\mathcal{J}$，那么定理13.6给出的计算

$$\mathcal{R}_i(F)=\lim[A\backslash i\xrightarrow{P_{A\backslash}}\mathcal{J}\xrightarrow{F}\mathcal{C}]$$

由于 lim 的存在是可行的（习题13.16），于是右 Kan 扩张存在. □

注意如上命题的等价结论要远强于某个特定的图的极限的存在性，因为它描述的是所有以 $\mathcal{J}$ 为指标的图的极限的存在性. 实际上如上命题从另一个角度解释了 lim 的函子性（定理13.8）.

14.2.4 “Kan 扩张包含所有概念”

本节的最后我们将试图用 Kan 扩张的概念来重述之前所有范畴体系下的泛性质概念，这可以看作是对 MacLane 著名论断“Kan 扩张包含所有范畴论的其他概念”(The notion of Kan extensions subsumes all the other fundamental concepts of category theory) 的解释.

命题 14.7 (极限（余极限）是 Kan 扩张)**.** *给定函子 $F:\mathcal{J}\to\mathcal{D}$，记 $q:\mathcal{J}\to[0]$ 是唯一确定的收缩函子，那么 F 沿 q 的左 Kan 扩张*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{J} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "q"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \\ & {[0]} \arrow[ur, dashed, "\mathcal{L}_q(F)"'] & \end{tikzcd}$$

给出了余极限 $\mathrm{colim}_{\mathcal{J}}F$.

证明. 根据构造，函子的复合 $\mathcal{L}_q(F)\circ q$ 在 $\mathcal{D}$ 中只给出一个对象 $\mathcal{L}_q(F)(\{*\})$，η 确定的是一族态射 $\eta_j:F(j)\to\mathcal{L}_q(F)(\{*\})$，自然性说明这恰是图 F 下的锥.

$\mathcal{L}_q(F)$ 的泛性质说明，对于任意给定的函子 $H:[0]\to\mathcal{D}$ 和自然变换 $\xi:F\Rightarrow H\circ q$（按照前一段的讨论这是一个图 F 下的锥），存在唯一的 $\theta:\mathcal{L}_q(F)\Rightarrow H$ 使得 $\xi=q\theta\circ\eta$. 注意到 $\mathcal{L}_q(F)\circ q$ 和 $H\circ q$ 都只确定了一个对象，因此自然变换 $\theta:\mathcal{L}_q(F)\Rightarrow H$ 是一个态射

$$\theta_{\{*\}}:\mathcal{L}_q(F)(\{*\})\to H(\{*\}),$$

这意味着 $\mathcal{L}_q(F)$ 的泛性质恰是 colim 满足的泛性质，得证. □

命题 14.8 (伴随是 Kan 扩张)**.**

1. *若 $F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$ 是伴随函子对，且 $\eta:\mathrm{id}\Rightarrow GF$ 是单位，$\delta:FG\Rightarrow\mathrm{id}$ 是余单位，那么 (G,η) 是 F 沿 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ 的左 Kan 扩张，(F,δ) 是 G 沿 $\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 的右 Kan 扩张：*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \\ & \mathcal{D} \arrow[ur, dashed, "G\cong\mathcal{L}_F\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{D} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\theta\Uparrow"] & \mathcal{D} \\ & \mathcal{C}, \arrow[ur, dashed, "F\cong\mathcal{R}_G\mathrm{id}_{\mathcal{D}}"'] & \end{tikzcd}$$

   并且这两个 Kan 扩张都是绝对 Kan 扩张.

2. *反过来，若给定函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，$(G,\eta:\mathrm{id}_{\mathcal{C}}\Rightarrow GF)$ 是 F 沿 $\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ 的左 Kan 扩张，且 F 保这个 Kan 扩张，那么 $F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$ 是伴随函子对.*

证明. 1. 习题13.12说明伴随对 $F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$ 诱导了新的伴随对

$$G^*:\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{C})\leftrightarrows\mathrm{Funct}(\mathcal{D},\mathcal{C}):F^*,$$

这意味着对于任意函子 $K:\mathcal{D}\to\mathcal{C}$ 存在自然的同构

$$\mathrm{Nat}(G,K)\cong\mathrm{Nat}(\mathrm{id}_{\mathcal{C}},K\circ F),$$

然而上式恰好说明了 G 满足左 Kan 扩张 $\mathcal{L}_F\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ 的泛性质. 对偶于习题13.11，给定函子 $H:\mathcal{C}\to\mathcal{E}=$

$\mathcal{C}, K : \mathcal{D} \to \mathcal{E} = \mathcal{C}$，有自然的同构

$$\begin{aligned} \mathrm{Nat}(H \circ G, K) &\cong \mathrm{Nat}(H, K \circ F) \\ \alpha &\mapsto \alpha F \circ H\eta \\ K\delta \circ \beta G &\leftarrow\!\shortmid \beta, \end{aligned}$$

在如上 $H = \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$ 的情形，α 对应的分解刚好是 $\alpha F \circ \eta$，即 (G, η) 有相应的泛性质.

同样根据习题13.12，对任意局部小范畴 $\mathcal{E}$，F, G 诱导了伴随 $G^* : \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{E}) \rightleftarrows \mathrm{Funct}(\mathcal{D}, \mathcal{E}) : F^*$，于是对任意的函子 $H : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$，上面的论述不变地成立，即 $(HG, H\eta)$ 有相应的泛性质.

2. 根据定理13.3，伴随函子等价于满足粘贴图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[dr, "F"] & \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, equal] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\delta"] & \mathcal{D}
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[d, bend right, "F"'] \arrow[d, bend left, "F"] \arrow[d, phantom, "\overset{\mathrm{id}_F}{\Rightarrow}"] \\
\mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \\
\mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, equal] & \arrow[u, phantom, "\Downarrow\delta"] & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \\
\mathcal{D} \arrow[u, bend left, "G"] \arrow[u, bend right, "G"'] \arrow[u, phantom, "\overset{\mathrm{id}_G}{\Rightarrow}"]
\end{tikzcd}$$

的函子对 $F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$ 和单位 η 余单位 θ. 根据假设，F 保该 Kan 扩张意味着 $(FG, F\eta)$ 是 F 沿本身的 Kan 扩张，这意味着分解

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\theta"] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[urr, equal, bend right] & &
\end{tikzcd}$$

是存在的，即 id_F 沿 $F\eta$ 的分解给出了自然变换

$$\theta : FG \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{D}}.$$

根据定义立即可以得到

$$\delta F \circ F\eta = \mathrm{id}_F,$$

这证明了第一个等式. 同时图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\theta"] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, "G"] \arrow[rr, equal] & & \mathcal{D} \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, equal] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{C} \\
& \mathcal{D} \arrow[ur, bend left, "G"] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\overset{\mathrm{id}}{\Rightarrow}"] &
\end{tikzcd},$$

是自然变换 $\mathrm{id}: G \Rightarrow G$ 的两个分解, 其中第一个是 $G\delta\circ\eta G$, 这样根据 Kan 扩张的唯一性 $G\delta\circ\eta G = \mathrm{id}_G$, 这证明了 F, G 是伴随，η, θ 分别是单位和余单位.

□

接下来我们将用简单图的逐点 Kan 扩张叙述并推广 Yoneda 引理. 根据 Kan 扩张的泛性质，任意函子 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 沿 $\mathrm{id}: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ 的右 Kan 扩张是（更准确地讲，同构于）F，根据定义这必然是逐点 Kan 扩张，于是根据定理14.5对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A,

$$F(A) \cong \lim[A\backslash\mathcal{C} \xrightarrow{P_{A\backslash}} \mathcal{C} \to \mathcal{D}].$$

特别地当 F 是函子 $\mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ 时，

$$\begin{aligned} F(A) &\cong \hom_{\mathbf{Set}}(\{*\}, F(A)) \cong \hom_{\mathbf{Set}}(\{*\}, \lim(F\circ P_{A\backslash})) \cong \mathrm{Cone}(\{*\}, F\circ P_{A\backslash}) \\ &\cong \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{C}}(A, -), \hom_{\mathbf{Set}}(\{*\}, F(-))) \cong \mathrm{Nat}(\hom_{\mathcal{C}}(A, -), F), \end{aligned}$$

其中第三个同构（红色标注）来自于极限的泛性质，第二行第一个同构是习题13.14，这个结果恰是 Yoneda 引理. 从上面的证明中可以看出，将 $F(A)$ 用极限式表出是 Yoneda 的核心，因而我们也称此式为 Yoneda 引理.

如果考虑定理13.6，那么极限 $\lim[A\backslash\mathcal{C} \xrightarrow{P_{A\backslash}} \mathcal{C} \to \mathcal{D}]$ 可以由定理中的等值子图来表示，具体来说，在定理13.6的描述中，图是 $A\backslash\mathcal{C}$，它的对象恰好是所有的 $A \xrightarrow{f} X$，态射对应于 $A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y$，两个态射分别由 $g: (A \xrightarrow{f} X) \to (A \xrightarrow{g\circ f} Y)$ 的自然作用和平凡作用诱导，于是我们证明了如下推广的 Yoneda 引理：

命题 14.9 (Yoneda 引理). 给定小范畴 $\mathcal{C}$ 和有乘积、等值子的范畴 $\mathcal{D}$，$F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是函子，那么图

$$F(A) \hookrightarrow \prod_{A \xrightarrow{f} X} F(X) \rightrightarrows \prod_{A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y} F(Y)$$

是等值子图，其中映射 $\prod_{A \xrightarrow{f} X} F(X) \rightrightarrows \prod_{A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y} F(Y)$ 由图

$$\begin{tikzcd} & F(Y) \\ \prod_{A \xrightarrow{f} X} F(X) \arrow[ur, "\pi_{g\circ f}"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\pi_f"'] & \prod_{A \xrightarrow{f} X \xrightarrow{g} Y} F(Y) \arrow[u, "\pi_g"'] \arrow[d, "\pi_g"] \\ F(X) \arrow[r, "F(g)"] & F(Y), \end{tikzcd}$$

定义.

如同其他抽象废话，命题14.9表述的 Yoneda 引理有对偶的表述，称为余 Yoneda 引理：

命题 14.10 (coYoneda 引理). 给定小范畴 $\mathcal{C}$ 和有余乘积、余等值子的范畴 $\mathcal{D}$，$F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是函子，那么图

$$\coprod_{Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} A} F(Y) \rightrightarrows \coprod_{X \xrightarrow{f} A} F(X) \twoheadrightarrow F(A)$$

是余等值子图，其中映射 $\coprod_{Y\xrightarrow{g}X\xrightarrow{f}A}F(Y)\rightrightarrows\coprod_{X\xrightarrow{f}A}F(X)$ 由图

$$\begin{tikzcd}
F(Y) \arrow[d, "\iota_g"'] \arrow[dr, "\iota_{f\circ g}"] & \\
\coprod_{Y\xrightarrow{g}X\xrightarrow{f}A}F(Y) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \coprod_{X\xrightarrow{f}A}F(X) \\
F(Y) \arrow[u, "\iota_g"] \arrow[r, "F(g)"'] & F(X) \arrow[u, "\iota_f"']
\end{tikzcd}$$

定义.

当所选取的函子 F 是函子 $F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ 时，余 Yoneda 引理14.10有一个重要的推论，称为稠密性定理：

定理 14.11. 对任意局部小的范畴 $\mathcal{C}$ 和函子 $F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$，那么 F 是图

$$\left(\int_{\mathcal{C}}F\right)^{\circ}\xrightarrow{P}\mathcal{C}^{\circ}\xrightarrow{y}\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathbf{Set})$$

的余极限，其中 y 是 *Yoneda* 嵌入函子.

证明. 任意给定集合 S,T，都存在集合之间的自然同构

$$\coprod_S T\cong S\times T\cong\coprod_T S,$$

于是命题14.10意味着图

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{X,Y\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}}\coprod_{Y\xrightarrow{g}X\xrightarrow{f}A}F(Y) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d, "\cong"] & \coprod_{X\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}}\coprod_{X\xrightarrow{f}A}F(X) \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\cong"] & F(A) \arrow[d, equal] \\
\coprod_{X,Y\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}}\coprod_{F(Y)\times\hom_{\mathcal{C}}(Y,X)}\hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \coprod_{X\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}}\coprod_{F(X)}\hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[r, two heads] & F(A)
\end{tikzcd}$$

的每一行都是余等值子，其中第一行的两个映射分别是

$$(Y\xrightarrow{g}X\xrightarrow{f}A,y\in F(Y))\mapsto(Y\xrightarrow{f\circ g}A,y\in F(Y))$$
$$(Y\xrightarrow{g}X\xrightarrow{f}A,y\in F(Y))\mapsto(X\xrightarrow{f}A,x\in F(X)),$$

于是映射 α,β 由图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\iota_{(X,Y,y\in F(Y),g:Y\to X)}"'] & \hom_{\mathcal{C}}(Y,A) \arrow[d, "\iota_{(Y,y\in F(Y))}"] \\
\coprod_{X,Y\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}}\coprod_{F(Y)\times\hom_{\mathcal{C}}(Y,X)}\hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \coprod_{X\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}}\coprod_{F(X)}\hom_{\mathcal{C}}(X,A) \\
\hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[u, "\iota_{(X,Y,y\in F(Y),g:Y\to X)}"] \arrow[ur, "\iota_{(X,x=g(y)\in F(X))}"'] &
\end{tikzcd}$$

定义，其中 $g^*: \hom_{\mathcal{C}}(X,A) \to \hom_{\mathcal{C}}(Y,A)$ 是映射 $f \mapsto f \circ g$. 考虑图

$$\left(\int_{\mathcal{C}} F\right)^{\circ} \xrightarrow{P} \mathcal{C}^{\circ} \xrightarrow{h_A} \mathbf{Set}$$

的余极限，按照定理13.6（的对偶），这个极限是图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[d, "\iota_{g^\circ}"'] \arrow[dr, "\iota_{(X,x\in F(X))}"] & \\
\coprod_{g^\circ:(X,x)\to(Y,y)} \hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \coprod_{(X,x\in F(X))} \hom_{\mathcal{C}}(X,A) \\
\hom_{\mathcal{C}}(X,A) \arrow[u, "\iota_{g^\circ}"] \arrow[r, "(g^\circ)^*"'] & \hom_{\mathcal{C}}(Y,A) \arrow[u, "\iota_{(Y,y\in F(Y))}"']
\end{tikzcd}$$

的余等值子，而图恰好是

$$\coprod_{X,Y\in \mathrm{ob}\ \mathcal{C}} \coprod_{F(Y)\times \hom_{\mathcal{C}}(Y,X)} \hom_{\mathcal{C}}(X,A) \overset{\alpha}{\underset{\beta}{\rightrightarrows}} \coprod_{X\in \mathrm{ob}\ \mathcal{C}} \coprod_{F(X)} \hom_{\mathcal{C}}(X,A),$$

因而余等值子是 $F(A)$. 考虑取遍 $\mathcal{C}$ 中的所有对象，则证明了图

$$\left(\int_{\mathcal{C}} F\right)^{\circ} \xrightarrow{P} \mathcal{C}^{\circ} \xrightarrow{y} \mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$$

的余极限是 F. □

定理14.11名称中“稠密性”的解释为子范畴 $\mathcal{C}$ 沿 Yoneda 嵌入在 $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})$ 中形成了稠密的子范畴. 如下的另一个表述也描述了同样的事情：

命题 14.12. *对任意的小范畴 $\mathcal{C}$，恒等函子*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "y"] \arrow[dr, "y"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow \mathrm{id}_y"] & \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set}) \\
& \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set}) \arrow[ur, dashed, "\mathcal{L}_y(y)\cong \mathrm{id}"'] &
\end{tikzcd}$$

定义了 Yoneda 嵌入 y 沿自身的左 Kan 扩张.

证明. 根据定理14.4，对任意反变函子 $F: \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$

$$\mathcal{L}_y(y)(F) := \mathrm{colim}[(y,F) \xrightarrow{P} \mathcal{C} \to \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})],$$

而根据习题13.7，$(y,F) \cong \int_{\mathcal{C}} F$，因此定理14.11证明了 $\mathcal{L}_y(y)(F) \cong F$. □

考虑协变函子 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，其中 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴且 $\mathcal{D}$ 是余完备的. 在这种情况下，F 沿 Yoneda 函子的左 Kan 扩张

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, hook, "y"'] & & \mathcal{D} \\
& \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set}) \arrow[ur, dashed, "\mathcal{L}_y(F)"'] &
\end{tikzcd}$$

是存在的，这是由于 Yoneda 嵌入函子 y 是满忠实的，推论14.5.1保证了存在性，并且这是严格意义上的扩张（扩张所需要的自然变换是自然同构）. 更重要的是，这个左 Kan 扩张 $\mathcal{L}_y(F)$ 有右伴随函子

$$R : \mathcal{D} \to \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set}),$$

这是因为如果考虑任意 $\mathcal{D}$ 中的对象 B 和任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A，

$$R(B)(A) \cong \hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set})}(h_A, R(B)) \cong \hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}_y(F) \circ h_A, B) \cong \hom_{\mathcal{D}}(F(A), B),$$

这提示我们函子性的构造

$$R(B) := \hom_{\mathcal{D}}(F(-), B)$$

应当给出右伴随函子，并且事实上根据稠密性定理14.11，任取 $X \in \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})$ 和 $B \in \mathrm{ob}\ \mathcal{D}$，

$$\begin{aligned}
\hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set})}(X, R(B)) &\cong \hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set})}(\mathrm{colim}_{(A,a)\in \mathrm{ob} \int_{\mathcal{C}} X} h_A, R(B)) \\
&\cong \mathrm{colim}_{(A,a)\in \mathrm{ob} \int_{\mathcal{C}} X} \hom_{\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ,\mathbf{Set})}(h_A, R(B)) \\
&\cong \mathrm{colim}_{(A,a)\in \mathrm{ob} \int_{\mathcal{C}} X} \hom_{\mathcal{D}}(F(A), B) \\
&\cong \hom_{\mathcal{D}}(\mathrm{colim}_{(A,a)\in \mathrm{ob} \int_{\mathcal{C}} X} F(A), B) \\
&\cong \hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}_y F(A), B),
\end{aligned}$$

其中第一个同构是稠密性定理14.11，第二、第四个同构因为命题13.7，最后一个等式用到了定理14.4，注意到每个同构都是自然的，这证明了伴随性. 本节的习题中将会给出几个这样构造的伴随函子.

本节的最后我们引入用 Kan 扩张定义的单子的概念：

定义. 给定函子 $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$，（只要存在就）称 G 沿自身的右 Kan 扩张为 G 的单子 (monad)

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\theta\Uparrow"] & \mathcal{C} \\
& \mathcal{C}, \arrow[ur, dashed, "T:=\mathcal{R}_G(G)"'] &
\end{tikzcd}$$

记为 T.

给定单子 T，有相应的单位 (unit)和乘法，二者都是由 $\theta : T \circ G \Rightarrow G$ 的泛性质所得到的，其中单位 η 的定义如图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\mathrm{id}_G\Uparrow"] & \mathcal{C} \\
& \mathcal{C} \arrow[ur, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\theta\Uparrow"] & \mathcal{C} \\
& \mathcal{C}, \arrow[ur, bend left, "T"] \arrow[ur, bend right, "\mathrm{id}_{\mathcal{C}}"'] \arrow[ur, phantom, "\eta\Leftarrow"] &
\end{tikzcd}$$

乘法的定义如图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rrr, bend left, "G"] \arrow[rrd, bend left, "G"] \arrow[dr, "G"'] & & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\theta"] & \mathcal{C} \\
& \mathcal{C} \arrow[r, "T"'] \arrow[u, phantom, "\theta\Uparrow"] & \mathcal{C} \arrow[ur, "T"'] &
\end{tikzcd}
=
\begin{tikzcd}
\mathcal{D} \arrow[rrr, bend left, "G"] \arrow[dr, "G"'] & & \arrow[d, phantom, "\mu\Uparrow"] & \mathcal{C} \\
& \mathcal{C} \arrow[r, "T"'] \arrow[urr, bend left, "T"] \arrow[u, phantom, "\theta\Uparrow"] & \mathcal{C}. \arrow[ur, "T"'] &
\end{tikzcd}$$

习题 14.2. 在习题12.1中我们对任意拓扑空间 X 定义了一个范畴 $\mathbf{Open}(X)$，任意给定拓扑空间 X，那么存在自然的嵌入函子

$$\mathbf{Open}(X) \hookrightarrow \mathbf{Top}_{/X},$$

求证应用命题14.12后面讨论的构造给出了伴随

$$\mathbf{Top}_{/X} \leftrightarrows \mathrm{Funct}(\mathbf{Open}(X)^{\circ}, \mathbf{Set}),$$

其中右半随给出了预层 F 的平展空间 (étale space).

14.3 幺半范畴和

在我们非常多的关注的例子当中，一个（局部小）范畴的 hom 集合通常附带有其他的结构

定义. 设 $\mathcal{C}$ 是给定的范畴，则 $\mathcal{C}$ 上的幺半结构 (monoidal structure) 包含如下信息：

1. 一个二函子 $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，一般被称为张量积 (tensor product) 或者幺半积 (monoidal product);
2. $\mathcal{C}$ 中的对象 I，被称为单位对象 (unit object, identity object)；
3. 自然同构 α, λ, ρ，分别被称为结合子 (associator)、左单位子 (left unitor) 和右单位子 (right)，其中 $\alpha : (- \otimes -) \otimes - \Rightarrow - \otimes (- \otimes -)$ 是自然同构 $\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$，$\lambda, \rho$ 是自然同构 $\lambda : I \otimes - \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$，$\lambda_A : I \otimes A \cong A$，$\rho : - \otimes I \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$，满足对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A, B, C, D，下图

$$\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[r, "\alpha_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_D"] \arrow[d, "\alpha_{A \otimes B, C, D}"'] & A \otimes (B \otimes C) \otimes D \arrow[r, "\alpha_{A, B \otimes C, D}"] & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C \otimes D}"] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)),
\end{tikzcd}$$

交换，且对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A, B，下图

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes I) \otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A \otimes \mathrm{id}_B"'] & & A \otimes (I \otimes B) \arrow[dl, "\mathrm{id}_A \otimes \lambda_B"] \\
& A \otimes B &
\end{tikzcd},$$

交换，

则称 $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ 为幺半范畴 (monoidal category)，若自然同构 α, ρ, λ 都是恒等，那么称 $\mathcal{C}$ 是严格幺半范畴 (strict monoidal category).

例 14.9. 设 R 是环，那么范畴 $(R - \mathbf{Mod}, \oplus)$ 和 $(R - \mathbf{Mod}, \otimes)$ 都是对称幺半范畴.

定义. 设 $(\mathcal{C}, \otimes, I)$ 为幺半范畴，若我们还有

1.

则称 $(\mathcal{C}, \otimes)$ 为对称幺半范畴 (symmetric monoidal category)，若自然同构 α, ρ, λ 都是恒等，那么称 $\mathcal{C}$ 是严格幺半范畴 (strict monoidal category).

定义. 设 $(\mathcal{B}, \otimes, I)$ 是一个对称幺半范畴，那么一个 $\mathcal{B}$ 范畴 ($\mathcal{B}$-category)$\mathcal{C}$ 包含如下信息：

1. 对象的全体 $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，
2. 任意 $A, B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ 给出态射对象 $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) \in \mathrm{ob}\,\mathcal{B}$，
3. 对任意 $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，存在态射 $\mathrm{id}_A : I \to \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, A)$，且
4. 对任意 $A, B, C \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，存在态射

$$\circ : \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(C, A),$$

对任意 $A, B, C, D \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，满足以下交换图

1. 符合的结合性

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(C, D) \times \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\circ"] \arrow[d, "\circ\otimes\mathrm{id}"'] & \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(C, D) \times \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, C) \arrow[d, "\circ"] \\
\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B, D) \times \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) \arrow[r, "\circ"] & \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, D),
\end{tikzcd}$$

2. 单位态射

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) \times I \arrow[rr, "\mathrm{id}\times\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\cong"'] & & \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, A) \arrow[dl, "\circ"] \\
& \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) &
\end{tikzcd},$$

和

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B, B) \times \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) \arrow[dr, "\circ"'] & & I \times \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) \arrow[ll, "\mathrm{id}_B\times\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) &
\end{tikzcd}.$$

称 $\mathcal{B}$ 为基范畴，也称 $\mathcal{C}$ 是 (enriched category over $\mathcal{B}$).

换句话说，这里我们将范畴定义中的态射集改成基范畴 $\mathcal{B}$ 中的对象，符合和恒等用 $\mathcal{B}$ 中的态射表示，而所要求的相容性与普通范畴的态射集 hom 在 **Set** 中的交换图一致.

注意范畴是范畴 $\mathcal{C}$ 的额外信息，或者 hom 与 $\underline{\mathrm{hom}}$ 的存在并不矛盾. 但对于通常的例子而言，$\underline{\mathrm{hom}}$ 忘却额外的结构之后得到的就是 hom.

例 14.10. 一个最简单的例子是对于任意的范畴 $\mathcal{C}$，它自然地是 **Set** 上的范畴.

例 14.11. 设 A 是只包含一个对象的 **Ab** 范畴，那么 A 是含幺环.

例 14.12. 根据例14.9，$(\mathbf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}})$ 是幺半范畴. 对于环 R，考虑 $R-\mathbf{Mod}$ 中的态射集 $\mathrm{hom}_{R-\mathbf{Mod}}(M,N)$，可以自然地定义上面的加法使得它是一个 Abel 群，记这个 Abel 群为 $\underline{\mathrm{hom}}_{R-\mathbf{Mod}}(M,N)$（以区别于没有任何结构的集合）. 按定义，模态射的复合是 $\mathbb{Z}$ 线性的，因此复合是一个 Abel 群同态，而且复合的结合性从 **Set** 中复合的结合性直接得到.

$(\mathbf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}})$ 中的单位对象是 $\mathbb{Z}$，并且作为集合和 Abel 群都存在同态 $\underline{\mathrm{hom}}_{R-\mathbf{Mod}}(\mathbb{Z}, M) \cong M$，这个同构也给出了所谓的单位态射（区分于 Abel 群中的单位元），于是 $R-\mathbf{Mod}$ 是 $(\mathbf{Ab}, \otimes_{\mathbb{Z}})$ 上的范畴.

定义. 给定幺半范畴 $(\mathcal{C}, \otimes, I)$，若对于任意 $S \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，函子 $-\otimes S$ 存在右伴随函子 $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(S,-)$，则称 $\mathcal{C}$ 是闭幺半范畴 (closed monoidal categories).

对于闭幺半范畴 $\mathcal{C}$，$-\otimes-$ 的（双）函子性使得子 $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(-,-)$ 也是（双）函子，并且有

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A\otimes B, C) \cong \mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(A, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B,C)).$$

这时 $\mathcal{C}$ 是本身上的范畴，且若 $\epsilon :????$ 是伴随函子对 $(-\otimes B, \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B,-))$ 的余单位，那么复合

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B,C) \otimes \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

是如下态射

$$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B,C) \otimes \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B) \otimes A \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\epsilon} \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B,C) \otimes B \xrightarrow{\epsilon} C,$$

其中对 $\mathcal{C}$ 中的任意对象 A，$\mathrm{id} : A \to A$ 是映射 $I \to A$，它在如上所述的伴随函子对下面对应于自然同构 $I \otimes A \cong A$.

习题 14.3. 验证 $\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(-,-)$ 的函子性.

习题 14.4. 给定闭幺半范畴 $\mathcal{C}$，假设它是完备和余完备的，那么存在如下构造:

第十五章　代数理论

定义. 给定 k 代数 A，若存在 k 代数同态 $\epsilon : A \to k$，则称 A 是增广 k 代数 (augmented k-algebra)

任意给定增广 k 代数 A，存在自然的 k 模同构

$$A \cong k \cdot 1 \oplus \mathrm{Ker}\ \epsilon,$$

其中 $\mathrm{Ker}\ \epsilon$ 称为 A 的增广理想 (augmentation ideal)，记为 $\bar{A}$. 反过来，对任意的（可能不包含单位的）k 代数 I，存在对应的增广 k 代数

$$I_+ := k \oplus I$$

满足乘法

$$(a, x)(b, y) := (ab, ay + bx + xy),$$

这样我们给出了范畴的等价 $k - \mathbf{Alg} - k \simeq k - \mathbf{Alg}^{\mathrm{non}}$.

第七部分

线性空间和表示理论

第十六章　线性形式

习题 16.1. 设 V 是有限维的 F 向量空间，且 $\mathrm{char}\, F \neq 2$. 对域扩张 F/F，定义二次型 $q : V \to F$ 的基变换为

$$\begin{aligned} q_E : E \otimes_F V &\to E \\ a \otimes v &\mapsto a^2 q(v). \end{aligned}$$

1. 若 q 是迷向的，且 $[E : F]$ 是奇数，求证 q_E 也是迷向的.

2. 以上叙述在 $[E : F]$ 是偶数时是否成立?

16.1　外形式

第八部分

Lie 理论

第十七章 Lie 代数

给定李代数 $\mathfrak{g}$，$x \in \mathfrak{g}$，称映射 $y \mapsto \mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$ 为伴随表示

对李代数 $\mathfrak{g}$，称由

$$C^1\mathfrak{g} := \mathfrak{g}$$
$$C^{n+1}\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, C^n\mathfrak{g}]$$

定义的 $\mathfrak{g}$ 的递降子代数为 $\mathfrak{g}$ 的 lower central series. 明显地，

$$[C^m\mathfrak{g}, C^n\mathfrak{g}] \subseteq C^{m+n}\mathfrak{g}.$$

定义. 给定李代数 $\mathfrak{g}$，若存在正整数 n 使得 $C^n\mathfrak{g} = 0$，则称 $\mathfrak{g}$ 是幂零的 (nilpotent).

定义. 若李代数 $\mathfrak{g}$ 满足存在自然数 n 使得 $C^n\mathfrak{g} = 0$，则称 $\mathfrak{g}$ 是幂零的.

命题 17.1. 给定特征 0 的域 F 上的有限维李代数 $\mathfrak{g}$，那么下列条件等价:

1. $\mathfrak{g}$ 是幂零的，且 $C^{r+1}\mathfrak{g} = 0$,
2. 对任意 $x_0, \cdots, x_r \in \mathfrak{g}$,
$$[x_0, [x_1, [\cdots, x_r]\cdots]] = (\mathrm{ad}_{x_0})\cdots(\mathrm{ad}_{x_{r-1}})(x_r) = 0,$$
3. 存在 $\mathfrak{g}$ 的一个递降理想滤子
$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \cdots \mathfrak{a}_r = 0$$
满足 $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subseteq \mathfrak{a}_{i+1}$ 对所有 $0 \le i \le r-1$ 成立.

定义. 对于李代数 $\mathfrak{g}$，子集

$$\{x \in \mathfrak{g} \mid [x,y]=0\text{对于所有}y \in \mathfrak{g}\text{成立}\}$$

称为 $\mathfrak{g}$ 的中心 (center).

命题 17.2. *给定李代数 $\mathfrak{g}$ 和包含在中心的理想 $\mathfrak{a}$，那么 $\mathfrak{g}$ 是幂零的当且仅当 $\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$ 是幂零的.*

例 17.1. 设 V 是 n 维向量空间，给定 V 的上升子空间序列 $D=\{D_i\}_{1\le i\le n}$

$$0=D_0\subseteq D_1\subseteq\cdots\subseteq D_n=V$$

满足 $\dim V_i = i$，并且定义

$$\mathfrak{n}(D):=\{x\in\mathfrak{gl}(V)\mid xD_{i+1}\subseteq D_i\},$$

那么 $\mathfrak{n}(D)$ 是幂零的且 $C^n\mathfrak{n}(D)=0$. 我们称这样的一个子空间序列为 V 的一个旗帜 (flag).

事实上，

用矩阵表示这个例子是说存在 V 的一组基使得所有矩阵是严格上三角的.

定理 17.3. *有限维李代数 $\mathfrak{g}$，那么它是幂零的当且仅当对任意的 $x\in\mathfrak{g}$，ad_x 是幂零的.*

定理 17.4. *设 V 是有限维线性空间，$\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的子李代数，那么如下叙述等价：*

1. $\mathfrak{g}$ 是幂零的；

2. 存在 V 的旗帜 D 满足 $\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{gl}(V)$.

类似群和代数的情形，给定李代数 $\mathfrak{g}$ 和向量空间 $V\neq 0$，那么称一个李代数同态 $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$ 为 $\mathfrak{g}$ 在 V 上的一个线性表示 (linear representation)，也称 V 是一个 $\mathfrak{g}$ 模.V 中的向量 v 若满足对任意 $x\in\mathfrak{g}$，$\varphi(x)(v)=0$ 都成了，则称 v 是一个 $\mathfrak{g}$ 作用下的不变量 (invariant).

推论 17.4.1. *给定李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维线性表示 $\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$，若 $\varphi(x)$ 对任意 $x\in\mathfrak{g}$ 都是幂零的，那么存在 $v\in V$ 是 $\mathfrak{g}$ 作用下的不变量.*

对李代数 $\mathfrak{g}$，称由

$$D^1\mathfrak{g}:=\mathfrak{g}$$
$$D^{n+1}\mathfrak{g}:=[D^n\mathfrak{g},D^n\mathfrak{g}]$$

定义的 $\mathfrak{g}$ 的递降子代数为 $\mathfrak{g}$ 的导出序列 (derived series).

定义. 若李代数 $\mathfrak{g}$ 满足存在自然数 n 使得 $D^n\mathfrak{g} = 0$，则称 $\mathfrak{g}$ 是可解的 (solvable).

命题 17.5. *1.* 幂零李代数是可解的，

2. 可解李代数的子李代数、商李代数和扩张都是可解的，

3. 给定有限维向量空间 V 的旗帜 D，令

$$\mathfrak{b}(D) := \{x \in \mathfrak{gl}(V) \mid xD_i \subseteq D_i\}$$

是 D 对应的 *Borel* 代数，那么 $\mathfrak{b}(D)$ 是可解的.

命题 17.6. 给定有限维李代数 $\mathfrak{g}$，则如下是等价的：

1. $\mathfrak{g}$ 是可解的且 $D^r\mathfrak{g} = 0$，

2. 存在 $\mathfrak{g}$ 的递降理想

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \cdots \supseteq \mathfrak{a}_r = 0$$

使得 $[\mathfrak{a}_i, \mathfrak{a}_i] \subseteq \mathfrak{a}_{i+1}$ 成立（即 $\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$ 是交换的）.

第三项可以理解为（非严格的）上三角矩阵.

定理 17.7 (Lie)**.** 设 k 是特征 0 的代数闭域，$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ 是有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维线性表示. 若 $\mathfrak{g}$ 是可解的，则存在 V 的旗帜 D 使得 $\varphi(\mathfrak{g}) \subseteq \mathfrak{b}(D)$.

推论 17.7.1. 设 k 是特征 0 的代数闭域，$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ 是有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维线性表示，且 $\mathfrak{g}$ 是可解的，那么有限维 $\mathfrak{g}$ 单模必是 1 维的.

推论 17.7.2. 设 k 是特征 0 的代数闭域，$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ 是有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维线性表示，且 $\mathfrak{g}$ 是可解的，那么存在 $v \in V$ 对任意 $x \in \mathfrak{g}$ 都是 $\varphi(x)$ 的特征向量.

引理 17.1. 设 k 是特征 0 的代数闭域，$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$ 是有限维李代数 $\mathfrak{g}$ 的有限维线性表示，$\mathfrak{h}$ 是 $\mathfrak{g}$ 的理想，$v \neq 0$ 是 V 中的元素，那么

定理 17.8 (Cartan's Criterion)**.** *设 k 是特征 0 的代数闭域，$\mathfrak{g}$ 是 $\mathfrak{gl}(V)$ 的有限维子李代数，那么 $\mathfrak{g}$ 是可解的当且仅当*

$$\mathrm{Tr}(x \circ y) = 0$$

对任意 $x \in \mathfrak{g}, y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ 成立.

17.1 半单李代数

根据命题，若 $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的可解理想，那么扩张

$$0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \to 0$$

说明 $\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$ 也是李代数 $\mathfrak{g}$ 的可解理想，于是存在 $\mathfrak{g}$ 的极大可解子理想，记为 $\mathfrak{r}$，称为根理想 (radical).

定义. 李代数 $\mathfrak{g}$ 的根理想 $\mathfrak{r}$ 满足 $\mathfrak{r} = 0$，则称 $\mathfrak{g}$ 是半单的 (semi-simple).

例 17.2. 给定有限维线性空间 V，那么 $\mathfrak{sl}(V)$ 是半单的.

定理 17.9. *给定李代数 $\mathfrak{g}$ 和根理想 $\mathfrak{r}$，那么*

1. *$\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是半单的，且*
2. *存在 $\mathfrak{g}$ 的子李代数 $\mathfrak{s}$ 使得 $\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$.*

事实上，投影 $\mathfrak{s} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$ 是同构，于是 $\mathfrak{g}$ 是一个半单李代数与一个可解理想的半直积，这称为 Levi 分解.

定义. 给定双线性形式 $B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$，若满足

$$B([x, y], z) + B(y, [x, z]) = 0$$

对任意 $x, y, z \in \mathfrak{g}$ 都成立，则称该双线性形式是不变的 (invariant).

例 17.3. 定义双线性形式

$$K(x, y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ x \circ \mathrm{ad}\ y),$$

称其为 Killing 形式 (Killing form)，它是一个不变双线性形.

定理 17.10 (Cartan-Killing)**.** *李代数 $\mathfrak{g}$ 是半单的当且仅当它的 Killing 形式是非退化的.*

定理 17.11. *给定半单李代数 $\mathfrak{g}$ 及其理想 $\mathfrak{a}$，那么 $\mathfrak{a}$ 关于 Killing 形式的垂直空间 $\mathfrak{b}$ 也是 $\mathfrak{a}$ 的直和补，并且存在自然的同构*

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}.$$

推论 17.11.1. *任意半单李代数的子李代数、商李代数和乘积都是半单的.*

定义. 给定李代数 $\mathfrak{s}$，若 $\mathfrak{s}$ 是非交换的且它的理想仅有 0 及其本身，则称 $\mathfrak{s}$ 是单的 (simple).

例 17.4. 任意给定维数不小于 2 的向量空间 V，则 $\mathfrak{sl}(V)$ 是单李代数.

定理 17.12. *李代数 $\mathfrak{g}$ 是半单的当且仅当它是单李代数的乘积.*

定义. 给定李代数 $\mathfrak{g}$，若 k 线性映射 $D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ 满足

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

对所有 $x, y \in \mathfrak{g}$ 都成立，则称 D 是 $\mathfrak{g}$ 的一个微分 (derivation)，若存在 $z \in \mathfrak{g}$ 使得 $D = \mathfrak{ad}_z$，则称 D 是一个内微分 (inner derivation).

定理 17.13. *半单李代数的微分一定是内微分.*

定义. 给定半单李代数 $\mathfrak{g}$，$x \in \mathfrak{g}$，

1. 若 ad_x 是幂零的，则称 x 是幂零的，
2. 若 ad_x 是半单的，即对应的矩阵在 k 的代数闭包中可对角化，则称 x 是半单的.

定理 17.14. 若 $\mathfrak{g}$ 是半单李代数，那么任意元素 $x \in \mathfrak{g}$ 都可以写成

$$x = s + n$$

的形式，其中 s 是半单元素，n 是幂零元素，且 $[s,n]=0$. 特别地，若元素 $y \in \mathfrak{g}$ 与 x 交换，则也与 s 和 n 交换.

定理 17.15. 给定半单李代数 $\mathfrak{g}$ 的表示 $\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$，若 x 是幂零的，则 $\varphi(x)$ 也是幂零的.

定理 17.16 (Weyl)**.** 任意（有限维）的半单李代数表示都是完全可约的.

定理 17.17. 给定有限维 $\mathbb{R}$ 李代数 $\mathfrak{g}$，那么 $\mathfrak{g}$ 是交换的（对应地，幂零、可解、半单的）当且仅当 $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ 是交换的（对应地，幂零、可解、半单的）.

17.2 $\mathfrak{sl}_2$

依照定义

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a + d = 0 \right\},$$

其中的 Lie 括号满足

$$[A,B] := AB - BA,$$

于是 $\mathfrak{sl}_2$ 自然有一组基

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

且满足

$$[X,Y] = H,\ [H,X] = 2X,\ [H,Y] = -2Y.$$

显然元素 H 是半单的，并且它生成的子 Lie 代数

$$\mathfrak{h} := \mathbb{C} \cdot H$$

是 $\mathfrak{sl}_2$ 中的 Cartan 子代数.

定义. 给定 $\mathfrak{sl}_2$ 模 V，对任意 $\lambda \in \mathbb{C}$，令

$$V^\lambda := \{v \in V \mid H \cdot v = \lambda v\},$$

称 V^λ 中的元素的权重 (weight) 是 λ.

命题 17.18. 给定 $\mathfrak{sl}_2$ 模 V，那么

1. 和 $\sum_{\lambda \in \mathbb{C}} V^\lambda$ 是直和，

2. 若元素 x 具有权重 λ，则 Xx 具有权重 $\lambda - 2$.

证明.

$$HXx = [H, X] + XHx = 2Xx + \lambda Xx = (\lambda + 2)Xx,$$

□

定义. 给定 $\mathfrak{sl}_2$ 模 V 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，若元素 $e \in V$ 具有权重 λ 且

$$Xe = 0,$$

则称 e 具有权重 λ 的原元素 (primitive of weight λ).

命题 17.19. 给定 $\mathfrak{sl}_2$ 模 V 和 $\lambda \in \mathbb{C}$，元素 $e \in V$ 是具有权重 λ 的原元素当且仅当 e 张成的直线在 $\mathfrak{sl}_2$ 的 *Borel* 群作用下不变.

命题 17.20. 任意有限维 $\mathfrak{sl}_2$ 模 V 都有一个原元素.

习题 17.1. 考虑序列 $\{Xx, X^2x, X^3, \cdots\}$，证明其中最后一个非零元素是一个原元素.

定理 17.21. 给定 $\mathfrak{sl}_2$ 模 V 和其中的原元素 e，令 $e_n := \frac{Y^n e}{n!}, n \geq 0$ 且 $e_{-1} = 0$，那么

$$\begin{aligned} He_n &= (\lambda - 2n)e_n, \\ Ye_n &= (n+1)e_{n+1}, \\ Xe_n &= (\lambda - n + 1)e_{n-1} \end{aligned}$$

对任意的 $n \geq 0$ 都成立.

推论 17.21.1. 如定理条件，那么如下两种情况必有一成立且仅有一种成立

1. $\{e_n\}_{n\geq 0}$ 是线性无关的，

2. e 的权重 λ 是整数 m，$\{e_0, \cdots, e_m\}$ 是线性无关的且 $e_i = 0$ 对任意 $i > m$ 都成立.

推论 17.21.2. 若 V 是有限维 $\mathfrak{sl}_2$ 模，那么推论中的情形 *2* 成立，且 $\{e_0, \cdots, e_m\}$ 张成了 $\mathfrak{sl}_2$ 不变的子模.

记 $\{e_0, \cdots, e_m\}$ 张成的模为 W_m.

定理 17.22. *1.* W_m 是不可约 $\mathfrak{sl}_2$ 模，

2. 所有的有限维 $\mathfrak{sl}_2$ 不可约模都同构于某个 W_m.

17.3 根系

给定一个有限维 $\mathbb{R}$ 线性空间 V，α 是 V 中的向量，s 是 V 的线性自同构，满足

1. $s(\alpha) = -\alpha$，
2. V 的子集 $H := \{v \in V \mid s(v) = v\}$ 是 V 的超平面，

则称 s 是 V 关于 α 的对称 (symmetry with vector α).

习题 17.2. 求证 $V = H \oplus \mathbb{R}\alpha$. 设 V^* 是 V 的对偶空间，求证存在唯一的 $\alpha^* \in V^*$ 使得 $\alpha^*(\alpha) = 2$ 且 $\alpha^*(H) = 0$.

一方面，给定一个关于 α 的对称 s，令 $H := \mathrm{Ker}\ s$，α^* 是练习给出的线性函数，那么

$$s(x) = x - \alpha^*(x)\alpha$$

对任意 $x \in V$ 成立，也记为 $s = \mathrm{id} - \alpha^* \otimes \alpha$. 反过来，任给定向量和超平面 H，记 α^* 是练习确定的线性函数，那么

$$\begin{aligned} s : V &\to V \\ x &\mapsto x - \alpha^*(x)\alpha \end{aligned}$$

是一个对称.

引理 17.2. 给定一个有限维线性空间 V 和其中的非零向量 α，设 R 是 V 的有限集且张成 V，那么至多存在唯一的 V 关于 α 的对称 s 使得 $s(R) = R$.

证明. 设 s_1, s_2 是两个满足要求的对称，令 $u := s_1^{-1} \circ s_2$，那么 u 是 V 的自同构且 $u(\alpha) = \alpha, u(R) = R$. $\square$

定义. 给定有限维 $\mathbb{R}$ 向量空间 V 和它的子集 R，满足

1. R 是有限集，不包含 0 且 R 张成了 V，
2. 对任意的 $\alpha \in R$，存在关于 α 的对称 s_α 使得 R 是不变的，
3. 对任意的 $\alpha, \beta \in R$，$s_\alpha(\beta) - \beta$ 是 α 的整数倍，

则称 R 是 V 的一个根系 (root system).

根据之前的讨论，对称 s_α 可以写为 $\mathrm{id} - \alpha^* \otimes \alpha$，此时性质 3 等价于

$$\langle \alpha^*, \beta \rangle \in \mathbb{Z}.$$

此外，由性质 2 立即得到 $-\alpha = s_\alpha(\alpha) \in R$.

定义. 给定 V 中的根系 R，称

$$\langle s_\alpha \rangle_{\alpha \in R} \leq GL(V)$$

为 R 对应的 Weyl 群 (Weyl group).

索引