

同伦代数

第一章 单纯对象

1.1 单纯集和单纯复形

设 n 是任意一个自然数.定义 $[n]$ 是有 $n+1$ 个对象的小范畴,且其中的箭头是序列 $\{0 \rightarrow 1 \rightarrow \cdots \rightarrow n\}$.设 Δ 是所有 $[n]$ 组成的范畴,态射是 $[n]$ 到 $[m]$ 的函子.这个范畴有非常具体的描述:定义 $[n]'$ 是 $n+1$ 元的全序集,其元素记为 $\{0 \leq 1 \leq \cdots \leq n\}$.设 Δ' 是所有 $[n]'$ 组成的范畴,态射是 $[n]'$ 到 $[m]'$ 的保序映射,即 $f: [n]' \rightarrow [m]'$ 满足 $i \leq j$ 必有 $f(i) \leq f(j)$.证明 Δ' 是一个范畴,且存在一个范畴的同构 $\Delta' \rightarrow \Delta$.于是我们无意区分两个范畴,都称为单纯范畴(simplicial category)或者全序范畴(ordering category),也无意区分两个范畴不同的对象.注意到

$$d_{n+1}^i : [n] \rightarrow [n+1]$$

$$k \mapsto \begin{cases} k, & k < i \\ k+1, & k \geq i. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & i-1 & \longrightarrow & i & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & n \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \searrow & & & & \searrow \\ 0 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & i-1 & \longrightarrow & i & \longrightarrow & i+1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & n+1 \end{array}$$

和

$$s_n^i : [n+1] \rightarrow [n]$$

$$k \mapsto \begin{cases} k, & k \leq i \\ k-1, & k > i. \end{cases}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & i-1 & \longrightarrow & i & \longrightarrow & i+1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & n+1 \\ \downarrow & & \downarrow & & & & \downarrow & & \downarrow & & \swarrow & & & & \swarrow \\ 0 & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & i-1 & \longrightarrow & i & \longrightarrow & \cdots & \longrightarrow & n \end{array}$$

都是范畴 Δ 中的态射,且满足

$$\begin{aligned} d_{[n+1]}^j d_{[n]}^i &= d_{[n+1]}^i d_{[n]}^{j-1}, & \forall i < j \\ s_{[n]}^j s_{[n+1]}^i &= s_{[n]}^i s_{[n+1]}^{j+1}, & \forall i \leq j \\ s_{[n]}^j d_{[n+1]}^i &= d_{[n]}^i s_{[n-1]}^{j-1}, & \forall i < j \\ s_{[n]}^j d_{[n+1]}^i &= \text{id}_{[n]}, & i = j \text{ 或 } i = j+1 \\ s_{[n]}^j d_{[n+1]}^i &= d_{[n]}^{i-1} s_{[n-1]}^j, & \forall i > j+1. \end{aligned}$$

其中, d^i 称为第 i 个对偶面映射(coface map), s^i 称为第 i 个对偶退化映射(codegeneracy map). Δ 中所有的态射都可以由 d^i 和 s^j 生成.更准确地说, 任意 $f \in \text{hom}_{\Delta}([n], [m])$ 有唯一的分解

$$f = d^{i_1} \circ \dots \circ d^{i_r} \circ s^{j_1} \circ \dots \circ s^{j_s},$$

其中 $m = n + r - s$, $i_1 < \dots < i_r$ 且 $j_1 < \dots < j_s$.

定义. 一个单纯集(simplicial set)是一个反变函子 $X : \Delta^{\circ} \rightarrow \mathbf{Set}$.更一般地, 范畴 \mathcal{C} 中的一个单纯对象(simplicial object)是反变函子 $X : \Delta^{\circ} \rightarrow \mathcal{C}$.对偶地, 可以定义上单纯对象(cosimplicial object)是协变函子 $Y : \Delta \rightarrow \mathcal{C}$.

对单纯集 X , 一般我们用 X_n 来表示集合 $X([n])$, 且其中的元素称为 n 单形(n -simplices).若 n 单形 $x \in X_n$ 满足存在 $y \in X_{n-1}$ 使得 $X(s^j)(y) = x$, 则称 x 是退化的(degenerate).我们用 \mathbf{sSet} 表示所有单纯集组成的范畴, 其中对象间的态射是 $X \Rightarrow Y$ 的自然态射, 具体来说, 是对每个 n 都有一个集合间的态射 $f_n : X_n \rightarrow Y_n$, 在 Δ 的作用下保持不动.

对于一个单纯集 X , 一般我们采用记号 $d_i := X(d^i) : X_{n+1} \rightarrow X_n$ 和 $s_j := X(s^j) : X_n \rightarrow X_{n+1}$, 称为面映射和退化映射.

$$X_0 \xleftarrow{d^0} X_1 \xrightarrow{s^1} X_2 \xrightarrow{\pi_2} \dots$$

习题1.1.1. 设 X 是单纯集, 记

$$X_n^{\text{deg}} := \bigcup_{j=0}^{n-1} s_j(X_{n-1})$$

为 n 单形中的所有退化元素.求证

$$X_n^{\text{deg}} = \bigcup_{\substack{f: [n] \rightarrow [k] \\ f \neq \text{id}}} X(f)(X_k).$$

例1. 设 \mathcal{C} 是一个小范畴, 那么我们可以自然地定义一个单纯集 NC , 称为范畴 \mathcal{C} 的神经(nerve), 其中 NC_0 是集合 $\text{ob } \mathcal{C}$, NC_1 是集合 $\text{mor } \mathcal{C}$, 对任意 $n > 1$ 定义

$$NC_n := \{(f_n, \dots, f_1) \mid f_i \in \text{mor } \mathcal{C} \text{ 且 } f_i \text{ 与 } f_{i+1} \text{ 可复合为 } f_{i+1}f_i, \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

通常, 我们用相连的箭头

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_n} A_n$$

来表示 NC_n 中的元素.这样当 $1 < i < n$ 我们有自然的面映射

$$\begin{aligned} d_i : NC_n &\rightarrow NC_{n-1} \\ (f_n, \dots, f_i, f_{i-1}, \dots, f_1) &\mapsto (f_n, \dots, f_i f_{i-1}, \dots, f_1), \end{aligned}$$

当 $i = 0, n$ 时, 我们分别舍弃 A_0 和 A_n .退化映射 $s_i : NC_n \rightarrow NC_{n+1}$ 是简单的, 只要在第 i 项和第 $i+1$ 项之间加一个 A_i , 取为 $A_i \xrightarrow{\text{id}} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1}$.之后我们会对范畴的神经进行更详细的讨论.

例2. 拓扑上, 我们有一个上单纯集 $\Delta : \mathbf{\Delta} \rightarrow \mathbf{Top}$, 事实上这个函子是我们定义单纯范畴的最初启发. 考虑函子 Δ 将 $[n]$ 映到标准 n 单形

$$\Delta_n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0 + \dots + x_n = 1, x_i \geq 0\},$$

对偶面映射 $d^i : \Delta_{n-1} \rightarrow \Delta_n$ 定义为将 Δ_{n-1} 映为第 i 个坐标为 0 的面, 即 $(x_0, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \dots, x_{i-1}, 0, x_i, \dots, x_{n-1})$.

对偶退化映射 $s^i : \Delta_{n+1} \rightarrow \Delta_n$ 将坐标 x_i 与 x_{i+1} 相加, 即 $(x_0, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n+1}) \mapsto (x_0, \dots, x_i + x_{i+1}, \dots, x_{n+1})$.

设 X 是拓扑空间, 这样就可以定义的单纯集 SX , 其中 $(SX)_n$ 是所有连续映射 $\Delta^n \rightarrow X$, 面映射

$$d_i : (SX)_{n+1} \rightarrow (SX)_n$$

将 $f : \Delta_{n+1} \rightarrow X$ 映到 $f \circ d^i : \Delta_n \rightarrow X$, 退化映射

$$s_j : (SX)_{n-1} \rightarrow (SX)_n$$

将 $f : \Delta_{n-1} \rightarrow X$ 映到 $f \circ s^j : \Delta_n \rightarrow X$. SX 被称为空间 X 的奇异复形 (*total singular complex*), 通常它给出了拓扑空间的奇异同调.

给定 $[n]$ 的一个非空子集 σ , 定义 Δ_σ 为 Δ^n 中 $\{e_i\}_{i \in \sigma}$ 的凸包 (*convex hull*), 即

$$\Delta_\sigma := \left\{ \sum_{i \in \sigma} a_i e_i \mid \sum_{i \in \sigma} a_i = 1, a_i \geq 0, \forall i \in \sigma \right\} \subseteq \Delta^n,$$

我们称 Δ_σ 为 Δ 的 σ 面 (σ -face). \mathbb{R}^n 中同胚于 Δ_n 中有限多个 σ 面的并的子空间称为多面体 (*polyhedron*). 对于一个多面体 P , 我们可以把它表达为不同的 σ 面的并, 每一个这样的同胚被称为 P 的一个三角剖分 (*triangulation*).

在拓扑中, 对于一个空间我们会考虑它对应的单纯剖分, 这样的单纯剖分通常被称为单纯复形. 非拓扑的情形下同样可以定义单纯复形, 这样定义的单纯复形对应于一个拓扑空间的单纯剖分:

定义. 设 V 是一个集合, 则 V 上的单纯复形 (*simplicial complex*) X 是 V 的一个非空有限子集族, 满足 X 在取子集作用下闭, 即

$$\forall \sigma \in X, \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in X.$$

引理1.1.1. 对于集合 V 上的单纯复形 X , 如下构造的 $|X|$ 是一个拓扑空间, 且具有被 X 描述的单纯剖分:

取定 \mathbb{R} 线性空间 $\mathbb{V} := \text{span}_{\mathbb{R}} V$, 对任意 $\sigma \in X$, 令 Δ_σ 是由 $\sigma \subseteq V$ 生成的凸包. 那么

$$|X| := \bigcup_{\sigma \in X} \Delta_\sigma \subseteq \mathbb{V}$$

与 $K := \{i_\sigma : \Delta_\sigma \rightarrow |X|\}$ 构成一个拓扑单纯剖分, 其中 $i_\sigma : \Delta_\sigma \rightarrow |X|$ 是自然的嵌入.

反过来, 任意给定拓扑空间 X 的单纯剖分 K

单纯复形并不具有非常好的性质, 比如单纯复形的商并不一定是单纯复形. 但是每一个单纯复形都对应一个单纯集, 且我们能利用这个单纯集重新构造之前的单纯复形. 这意味着, 单纯集可以看作单纯复形的自然推广.

定义. 给定全序集合 V 上的单纯复形 X , 我们可以定义它对应的单纯集 $SS_*(X)$, 其中

$$SS_n(X) := \{(v_0, \dots, v_n) \mid \{v_0, \dots, v_n\} \in X\},$$

对任意 Δ 中的态射 $f: [m] \rightarrow [n]$, 定义

$$\begin{aligned} SS(f) : SS_n(X) &\rightarrow SS_m(X) \\ (v_0, \dots, v_n) &\mapsto (v_{f(0)}, \dots, v_{f(n)}). \end{aligned}$$

习题1.1.2. 这里我们要验证单纯复形可以完全地由它对应的单纯集给出, 因而单纯集是更广泛的概念. 考虑习题1.1.1中的定义, 验证

$$SS_*(X)^{\text{nondeg}} \cong X.$$

习题1.1.3. 在引理1.1.1中我们证明了抽象单纯复形和拓扑单纯复形的一一对应. 在拓扑中有一个比单纯复形广泛一点的概念拟单纯复形(semi-simplicial complex), 定义为

在本小节最后我们引入循环范畴(cyclic category) Δ_C , 其中 Δ_C 的对象同于 Δ , 而 Δ_C 的态射由 $d_{[n]}^i : [n] \rightarrow [n+1]$, $s_{[n+1]}^j : [n+1] \rightarrow [n]$ 和 $\tau_n : [n] \rightarrow [n]$ 生成, 满足三类关系: (i) $d_{[n]}^i, s_{[n+1]}^j$ 之间的关系同于 Δ ; (ii) $\tau_{n+1} \circ d_{[n]}^i = d_{[n]}^{i-1} \circ \tau_n$ 和 $\tau_{n+1} \circ d_{[n]}^0 = d_{[n]}^n$, $\tau_n \circ s_{[n+1]}^j = s_{[n]}^{j-1} \circ \tau_{n+1}$ 和 $\tau_n \circ s_{[n+1]}^0 = s_{[n]}^n \circ \tau_{n+1}^2$; (iii) $\tau_n^{n+1} = \text{id}_{[n]}$. 下面的定理叙述了两个范畴之间的关系.

定理1.1.1. Δ_C 是 Δ 的(非满)子范畴, 且满足

1. $\text{Aut}_{\Delta_C}([n]) \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$.
2. 任意 Δ_C 中的态射 $f \in \text{hom}_{\Delta_C}([n], [m])$ 都可以写成如下分解 $f = \varphi \circ \gamma$, 其中 $\varphi \in \text{hom}_{\Delta}([n], [m])$ 且 $\gamma \in \text{Aut}_{\Delta_C}([n])$.

例3 (要检查方向). 定义函子 $\Delta_C^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$, 将对象 $[n]$ 映到 $\text{Aut}_{\Delta_C^\circ}([n]) = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$, 任取 $a \in \text{hom}_{\Delta_C}([n], [m])$ 和 $g \in \text{Aut}_{\Delta_C}([n])$, 由刚刚的唯一分解, $f = g \circ a$ 存在唯一的分解 $f = \varphi \circ \gamma$ 满足 $\varphi \in \text{hom}_{\Delta}([n], [m])$ 且 $\gamma \in \text{Aut}_{\Delta_C}([n])$, 记 $g^*(a) = \varphi, a^*(g) = \gamma$. 于是对于任意给定的 $g \in \text{Aut}_{\Delta_C^\circ}([n])$, 我们有

$$\begin{aligned} g^* : \text{hom}_{\Delta_C^\circ}([n], [m]) &\rightarrow \text{hom}_{\Delta_C^\circ}([n], [m]) \\ a &\mapsto g^*(a) \end{aligned}$$

和任意给定的 $a \in \text{hom}_{\Delta_C^\circ}([n], [m])$,

$$\begin{aligned} a^* : \text{Aut}_{\Delta_C^\circ}([n]) &\rightarrow \text{Aut}_{\Delta_C^\circ}([n]) \\ g &\mapsto a^*(g). \end{aligned}$$

1.2 泛单纯集

1.2.1 Yoneda引理

范畴理论中最重要的工具之一就是Yoneda引理.我们记 $\hat{\mathcal{C}}$ 为范畴 $\mathbf{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})$, $h_B := \text{hom}_{\mathcal{C}}(-, B)$, 那么Yoneda引理表述如下:

定理1.2.1 (Yoneda). 对任意局部小范畴 \mathcal{C} 和函子 $F : \mathcal{C}^\circ \rightarrow \mathbf{Set}$, 存在关于 F 和 \mathcal{C} 都自然的同构

$$\varphi : \text{hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_B, F) \cong F(B).$$

作为推论, 当 $F = h_D$ 时, 自然同构为

$$\text{hom}_{\mathcal{C}}(B, D) = \text{hom}_{\hat{\mathcal{C}}}(h_B, h_D),$$

其中映射将态射 $f : B_1 \rightarrow B_2$ 映到 $h(f) = \text{hom}_{\mathcal{C}}(f, D)$.考虑函子

$$\begin{aligned} h : \mathcal{C} &\rightarrow \hat{\mathcal{C}} \\ B &\mapsto \text{hom}_{\mathcal{C}}(-, B) \\ (f : B_1 \rightarrow B_2) &\mapsto h(f), \end{aligned}$$

Yoneda引理说明这是一个满忠实的函子, 我们称其为Yoneda函子.

注意到任意一个单纯集是一个到集合范畴的函子, 故我们可以对其应用Yoneda引理.由定义显然有 $\hat{\Delta} = \mathbf{sSet}$.考虑 $h_{[n]} := \text{hom}_{\Delta}(-, [n])$, 这些函子都是单纯集, 具体说来, 我们需要确定面映射和退化映射: 面映射 $d_i : h_{[n]}([k]) \rightarrow h_{[n]}([k-1])$ 是 \mathbf{Set} 中 d^i 的前置复合, 即

$$d_i : h_{[n]}([k]) \rightarrow h_{[n]}([k-1]) = \{[k] \xrightarrow{f} [n]\} \mapsto \{[k-1] \xrightarrow{d^i} [k] \xrightarrow{f} [n]\},$$

类似地退化映射 s_i 是 \mathbf{Set} 中 s^i 的前置复合.同时, Yoneda函子的满忠实性说明

$$\text{hom}_{\Delta}([k], [n]) \cong \text{hom}_{\mathbf{sSet}}(h_{[k]}, h_{[n]}),$$

即 $h_{[k]}$ 到 $h_{[n]}$ 的所有自然变换由 Δ 中的态射 $[k] \rightarrow [n]$ 所决定, 因此所有的 $h_{[n]}$ 在一起组成一个上单纯集.

定义. 单纯集

$$h_{[n]} := \text{hom}_{\Delta}(-, [n])$$

被称为标准 n 单形(standard n -simplex), 我们也记为 $\Delta_{[n]}$.

引理1.2.1. 设 X 是单纯集, 函子

$$\begin{aligned} \mathbf{sSet} &\rightarrow \mathbf{Set} \\ X &\mapsto X([n]) \end{aligned}$$

是可表的, 其代表是标准 n 单形 $\Delta_{[n]}$.

如果我们考虑更一般情形的Yoneda引理, 我们有自然同构

$$\mathrm{hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta_{[n]}, X) \cong X([n]).$$

于是任意给定一个 n 单形 $x \in X([n])$, 我们有一个自然变换

$$\Delta_{[n]} \Rightarrow X$$

与之对应, 而它在面映射下的象 $d_i(x) \in X([n-1])$ 则对应于自然态射

$$\Delta_{[n-1]} \xrightarrow{d^i} \Delta_{[n]} \Rightarrow X.$$

命题1.2.2 (稠密性定理). 令 $\int X$ 是单纯集 X 的元素范畴, 则以 $\int X$ 为图的余极限满足

$$\mathrm{colim}_{x \in X_n} \Delta_{[n]} \cong X.$$

1.2.2 伴随函子

设 \mathcal{D} 是任意上完备 (即任意图的小范畴的余极限都存在) 的局部小范畴, L 是协变函子 $\mathcal{D} \rightarrow \mathbf{sSet}$, 我们希望考虑 L 的右伴随函子 $R: \mathbf{sSet} \rightarrow \mathcal{D}$ 的性质. 由定义, 我们有关于 $X \in \mathrm{ob} \mathbf{sSet}$ 和 $B \in \mathrm{ob} \mathcal{D}$ 都自然的同构

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(L(X), B) \cong \mathrm{hom}_{\mathbf{sSet}}(X, R(B)).$$

任意给定协变函子 $F: \Delta \rightarrow \mathcal{D}$, 由函子 F 我们可以如下构造右伴随函子 R , 任意给定 \mathcal{D} 中的对象 B , $R(B)$ 是单纯集, 所有的 n 单形构成集合

$$R(B)_n := \mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(F([n]), B),$$

且面映射和边缘映射分别定义为

$$d_i^{[n]} := \mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(F(d_{[n]}^i), B)$$

和

$$s_j^{[n]} := \mathrm{hom}_{\mathcal{D}}(F(s_{[n]}^j), B),$$

根据 F 和 hom 的函子性, d_i 与 s_j 满足相应的关系, 因此 $R(B)$ 是单纯集.

1.3 几何实现

之前稠密性定理（命题1.2.2）说明每个单纯集都是一个余极限，注意这个余极限是在范畴 \mathbf{sSet} 中取得的.如果我们在其他的范畴中取这个余极限会得到其他我们想要的对象，有时候这些对象会更加容易理解和计算：

定义. 给定单纯集 X ，称

$$|X| := \operatorname{colim}_{x \in X_n} |\Delta_{[n]}|$$

为 X 的几何实现(geometric realization)，其中 $|\Delta_{[n]}|$ 是标准 n 单形 Δ^n .

定理1.3.1. 下列函子对

$$|-| : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Top} : S$$

是伴随函子，即存在自然的同构

$$\operatorname{hom}_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \cong \operatorname{hom}_{\mathbf{sSet}}(X, SY).$$

定理1.3.2. 对任意单纯集 X ， $|X|$ 是 CW 复形.

1.4 小范畴的神经

这一节我们详细讨论小范畴的神经.在非特别指出的情形下，本小节 \mathcal{C} 都代表一个小范畴.回顾例1中的定义，单纯集 NC 的全体 n 单形 NC_n 包含有可连续复合的 n 个态射，记为 (f_n, \dots, f_1) .面映射 $d_i^{[n]}$ 将

$$A_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots \xrightarrow{f_n} A_n$$

映到

$$A_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{f_i \circ f_{i-1}} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \dots \xrightarrow{f_n} A_n,$$

且在 $i = 0, n$ 时映射舍弃 A_i 和相连的映射.类似地退化映射 $s_j^{[n]}$ 将

$$A_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{j-2}} A_{j-1} \xrightarrow{f_{j-1}} A_j \xrightarrow{f_j} A_{j+1} \xrightarrow{f_{j+1}} \dots \xrightarrow{f_n} A_n$$

映到

$$A_0 \xrightarrow{f_1} \dots \xrightarrow{f_{j-2}} A_{j-1} \xrightarrow{f_{j-1}} A_j \xrightarrow{f_j} A_{j+1} \xrightarrow{f_{j+1}} \dots \xrightarrow{f_n} A_n$$

例4. 设 G 是群, 那么 $\mathbf{B}G$ 是一个只有一个对象的小范畴. 由于 $\text{mor } \mathbf{B}G = G$, 故 $N\mathbf{B}G_n = G^n$. 注意到 $\mathbf{B}G$ 中态射的复合是群乘法, 于是

$$d_i : G^n \rightarrow G^{n-1}$$

$$(g_1, \dots, g_n) \mapsto \begin{cases} (g_2, \dots, g_n) & i = 0 \\ (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) & 0 < i < n \\ (g_1, \dots, g_{n-1}) & i = n \end{cases}$$

(注意到这里函子 \mathbf{B} 对复合的方式产生了影响, 因此角标产生了变化) 和

$$s_j : G^n \rightarrow G^{n+1}$$

$$(g_1, \dots, g_n) \mapsto (g_1, \dots, g_{j-1}, 1, g_j, \dots, g_n).$$

注意到这里的映射恰是群上同调所需要的映射.

另一方面, 我们还有构造 $\mathbf{E}G$, 其中 $\text{ob } \mathbf{E}G = G$, $\text{hom}_{\mathbf{E}G}(g, h) = \{x \in G \mid xg = h\} = \{hg^{-1}\}$ 且态射的复合是群乘法.

二者之间有如下的关系:

1. 存在自然的单纯集投影

$$p : \mathbf{N}\mathbf{E}G \rightarrow N\mathbf{B}G$$

$$(g_0, \dots, g_n) \mapsto (g_0 g_n^{-1}, \dots, g_{n-1} g_n^{-1}).$$

2. G 在 $\mathbf{N}\mathbf{E}G$ 上有右作用

$$(g_0, \dots, g_n) \cdot g = (g_0 g, \dots, g_n g),$$

于是有交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{N}\mathbf{E}G & \xrightarrow{p_*} & N\mathbf{B}G \\ & \searrow & \nearrow \\ & \mathbf{N}\mathbf{E}G/G & \end{array}$$

这是最简单的单纯 G 主丛的例子:

$$\mathbf{N}\mathbf{E}G \times N\mathbf{B}G \rightarrow N\mathbf{B}G$$

$$((g_0, \dots, g_n), (h_1, \dots, h_n)) \mapsto (g_0 h_1 g_1^{-1}, \dots, g_{n-1} h_n g_n^{-1}).$$

例5. 设 X 是拓扑空间, $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 是 X 的一个开覆盖.

例6 (Borel构造). 设群 G 作用在集合 X 上, 我们可以构造该作用的广群 (groupoid, 这是一个范畴不是一个群) $G \circ X$: 其中 $\text{ob } G \circ X = X$, $\text{hom}_{G \circ X}(x, y) = \{g \in G \mid gx = y\}$ 且态射的复合是群乘法. 于是 $NG \circ X_n = G^n \times X$, 面映射和退化映射分别为

$$d_i : G^n \times X \rightarrow G^{n-1} \times X$$

$$(g_1, \dots, g_n, x) \mapsto \begin{cases} (g_2, \dots, g_n, x) & i = 0 \\ (g_1, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n, x) & 0 < i < n \\ (g_1, \dots, g_{n-1}, g_n x) & i = n \end{cases}$$

和

$$s_j : G^n \times X \rightarrow G^{n+1} \times X$$

$$(g_1, \dots, g_n, x) \mapsto (g_1, \dots, g_{j-1}, 1, g_j, \dots, g_n, x).$$

注意 $NBG \cong NG \circ \{*\}$ 且 $NEG \cong NG \circ G$.

例7. 设 \mathcal{C} 是一个小范畴, $X : \mathcal{C} \rightarrow \mathbf{Set}$ 是协变函子, 于是 X 的元素范畴 $\int X$ 是小范畴. 若 $\eta : X_1 \Rightarrow X_2$ 是自然变换, 则我们可以构造一个函子

$$\int \eta : \int X_1 \rightarrow \int X_2,$$

将对象 (A, x) 映到 $(A, \eta_A(x))$, 将态射 $(f : A \rightarrow B, \varphi)$ 映到 $(f, \eta_A(\varphi))$. 这样对于任意的函子 X , 我们有

$$\mathcal{C} \xrightarrow{X} \mathbf{Cat} \xrightarrow{N} \mathbf{sSet} \xrightarrow{|\cdot|} \mathbf{Top}.$$

本节的最后我们引入如下自然存在且非常重要的问题: 给定一个单纯集 X , 它是否一定是某个小范畴的神经? 如果不一定, 在何时我们可以断定 X 是一个小范畴的神经? 这个问题我们留到下一节回答, 这需要更多的工具来进行讨论.

1.5 子单纯集

在完成了许多关于单纯集的讨论, 一个自然的想法是我们希望研究单纯集的子结构. 按照代数中通常对于子结构的定义, 比较自然的, 若 Y 是单纯集 X 的子单纯集, 那么对于每个自然数 n , Y_n 都需要是 X_n 的子集, 并且我们希望 Y 所给定态射都是完全由 X 给定的态射决定——对任意 $f : [n] \rightarrow [m]$, $X(f)$ 在 Y_n 的限制就是 $Y(f)$. 后一个条件就是在说范畴 Δ 作用在 Y 上是封闭的. 通常, 我们并不直接给出一个单纯子集, 一般情况下我们给出一族称为生成元(generator)的态射, 称包含它们的最小 X 的子单纯集为这族态射生成的子单纯集.

定义. 给定自然数 $0 \leq i \leq n$, 标准 n 单形 $\Delta_{[n]}$ 由 $d_{[n]}^i : \Delta_{[n-1]} \rightarrow \Delta_{[n]}$ 生成的子集被称为 $\Delta_{[n]}$ 的第 i 面 (i -th face), 记为 $\partial_i \Delta_{[n]}$, 即

$$\partial_i \Delta_{[n]} \cong \Delta_{[n-1]} \xrightarrow{d_{[n]}^i} \Delta_{[n]}.$$

几何上, n 单形的第 i 面就是标号为 i 的点相对的第 i 个坐标为 0 的面. 如果我们将所有的面组合起来, 几何上这是一个 n 维球面, 对单纯集的这样操作将得到单纯球面:

定义. 标准 n 单形 $\Delta_{[n]}$ 由 $\{d_{[n]}^i : \Delta_{[n-1]} \rightarrow \Delta_{[n]} \mid 0 \leq i \leq n\}$ 生成的子单纯集称为标准单纯 n 球面 (standard simplicial n -sphere), 记为 $\partial \Delta_{[n]}$, 即

$$\partial \Delta_{[n]} = \bigcup_{0 \leq i \leq n} \partial_i \Delta_{[n]}.$$

习题1.5.1. 求证:

1. $\partial\Delta_{[n]} = \text{colim}_{\Delta_{[n-2]} \xrightarrow{d_{[n-1]}^i} \Delta_{[n-1]}} \Delta_{[n-1]} \xrightarrow{d_{[n]}^i} \Delta_{[n]}.$
2. 任取 $k < n$, 则 $\partial\Delta_{[n]}([k]) = \text{hom}_{\Delta}([k], [n]).$

更一般地, 单纯集 X 的单纯 n 球面是单纯集间的映射 $\partial\Delta_{[n]} \rightarrow X$. 如果几何球面去掉一个面, 我们将得到一个可缩的有界闭集. 对应到单纯集则是

定义. 标准 n 单形 $\Delta_{[n]}$ 由 $\{d_{[n]}^i : \Delta_{[n-1]} \rightarrow \Delta_{[n]} \mid 0 \leq i \leq n, i \neq k\}$ 生成的子单纯集称为标准单纯角 (standard simplicial horn), 记为 $\Lambda_{[n]}^k$, 即

$$\Lambda_{[n]}^k = \bigcup_{0 \leq i \leq n, i \neq k} \partial_i \Delta_{[n]}.$$

习题1.5.2. 求证:

1. $\Lambda_{[n]}^k = \text{colim}_{\Delta_{[n-2]} \xrightarrow{d_{[n-1]}^i} \Delta_{[n-1]}} \Delta_{[n-1]} \xrightarrow{d_{[n]}^i} \Delta_{[n]}.$
2. 任取 $j < n-1$, 则 $\Lambda_{[n]}^k([j]) = \text{hom}_{\Delta}([j], [n])$, 且 $\Lambda_{[n]}^k([n-1]) = \text{hom}_{\Delta}([n-1], [n]) - \{d^k\}.$

更一般地, 单纯集 X 的单纯角是单纯集间的映射 $\Lambda_{[n]}^k \rightarrow X$. 值得注意的是, 对任意的自然数 n 和 $0 \leq k \leq n$ 我们有自然的嵌入映射 $\Lambda_{[n]}^k \hookrightarrow \partial\Delta_{[n]}$. 这样我们可以引入一个关于单纯集的特殊性质——角填充 (horn filling), 我们特别关心具有一定角填充性质的单纯集.

定义. 单纯集 X 若具有角填充性质, 即对任意自然数 n 和 $0 \leq k \leq n$, 给定单纯映射 $f : \Lambda_{[n]}^k \rightarrow X$, 存在 (但不要求唯一) $\tilde{f} : \partial\Delta_{[n]} \rightarrow X$ 使得图

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_{[n]}^k & \xrightarrow{f} & X \\ \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\ \partial\Delta_{[n]} & & \end{array}$$

交换, 则称 X 为 Kan 复形 (Kan complex).

引理1.5.1. 若 X 是拓扑空间, 则它的奇异复形 SX (例2) 是 Kan 复形.

Kan 复形在同伦理论当中有重要的作用.

定义. 单纯集 X 若具有内角填充性质, 即对任意自然数 n 和 $0 < k < n$, 给定单纯映射 $f : \Lambda_{[n]}^k \rightarrow X$, 存在 (但不要求唯一) $\tilde{f} : \partial\Delta_{[n]} \rightarrow X$ 使得图

$$\begin{array}{ccc}
 \Lambda_{[n]}^k & \xrightarrow{f} & X \\
 \downarrow & \nearrow \tilde{f} & \\
 \partial \Delta_{[n]} & &
 \end{array}$$

交换, 则称 X 为拟范畴(quasi-category)或无穷范畴(infinity category, ∞ -category).

我们从另一个角度来考虑, 设 \mathcal{C} 是一个范畴, $M \subseteq \text{mor } \mathcal{C}$ 是一类 \mathcal{C} 的态射, 若态射 $f: A \rightarrow B$ 满足对任意 M 中的态射 $g: C \rightarrow D$, 都存在态射 $h: C \rightarrow A$ 和 $k: D \rightarrow B$ 使得有态射 $\varphi: D \rightarrow A$ 满足交换图

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xleftarrow{h} & C \\
 \downarrow f & \nwarrow \varphi & \downarrow g \\
 B & \xleftarrow{k} & D,
 \end{array}$$

则称 f 具有右对于 M 的右提升性质(right lifting property with respect to M).于是, 无穷范畴的定义是说单纯集 X 满足它关于单点单纯集 $*$ 的投影对于内角包含态射 $i_{[n]}^k: \Lambda_{[n]}^k \hookrightarrow \Delta_{[n]}$, $0 < k < n$ 有右提升性质.而 $i_{[n]}^k$ 诱导了

$$\begin{array}{ccc}
 \text{hom}_{\mathbf{sSet}}(\Delta_{[n]}, X) & \longrightarrow & \text{hom}_{\mathbf{sSet}}(\Lambda_{[n]}^k, X) \\
 \cong \downarrow & & \downarrow = \\
 X([n]) = X_n & \xrightarrow{(i_{[n]}^k)^*} & \Lambda_{[n]}^k(X),
 \end{array}$$

定义又等价于诱导的 $(i_{[n]}^k)^*$ 是满射.

定理1.5.1 (Joyal). 设 $\mathbf{QuasiCat}$ 是 \mathbf{sSet} 中由无穷范畴组成的满子范畴, 那么 $\mathbf{QuasiCat}$ 上有自然的模型范畴结构.

例8. 设 \mathcal{C} 是任意局部小? 范畴, 则它的神经 NC 是一个无穷范畴.并且, 这样得到的无穷范畴具有特别的性质——它的内角填充都是唯一的, 或者说之前讨论的映射 $(i_{[n]}^k)^*$ 是单射.

第二章 模型范畴

定义. 设 \mathcal{C} 是范畴, 我们有 \mathcal{C} 中的态射族 W, Fib 和 Cof , 分别被称为弱等价 (weak equivalence, $\xrightarrow{\sim}$)、纤维 (fibration, \twoheadrightarrow) 和余纤维 (cofibration, \hookrightarrow) 满足:

1. \mathcal{C} 是 (有限) 完备和余完备的,
2. 若态射 f 是 g 的收缩¹, 则若 g 属于态射族 W, Fib 或 Cof , 则 f 也属于相同的态射族,
3. f, g 和 $g \circ f$ 中任意两个是弱等价则第三个也是弱等价,
4. 任给定交换图

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ i \downarrow & \nearrow h & \downarrow p \\ C & \xrightarrow{g} & D, \end{array}$$

其中 i 是余纤维 p 是纤维, 且要么 i 要么 p 是一个弱等价, 则存在提升 $h : C \rightarrow B$ 使整个图交换,

5. 任意 \mathcal{C} 中的态射 $f : A \rightarrow B$ 都有分解 $f = q \circ i = p \circ j$, 其中 p, q 是纤维, i, j 是余纤维, i, p 是弱等价, 则称范畴 \mathcal{C} 是模型范畴(model category).

第三章 单纯代数

3.1 单纯模的同伦群

如同先前的定义, 给定一个交换环 R , 一个单纯环是函子

$$A_* : \Delta^\circ \rightarrow R\text{-Algebras},$$

具体来说, 这个函子给定了一族 R 代数 $A_n = A([n])$, 且存在 R 代数同态

$$d_i^{[n]} : A_n \rightarrow A_{n-1}$$

和

$$s_j^{[n]} : A_n \rightarrow A_{n+1}$$

满足相应的单纯关系.

例9. 任意给定一个交换环 R , 我们有自然存在的单纯 R 代数 $s(R)_*$, 其中对任意 n , $s(R)_n := R$, $d_i^{[n]} = s_j^{[n]} = \text{id}_R$.

定义. 给定单纯代数 A_* , 则一个 A_* 模(A_* -module)是一个单纯对象 V_* , 其中 $V([n])$ 是一个 A_n 模, 存在同态

$$d_i^{[n]} : V_n \rightarrow V_{n-1}$$

和

$$s_j^{[n]} : V_n \rightarrow V_{n+1}$$

满足相应的单纯关系, 且与 A_* 的单纯结构相容, 具体说来, 对于任意 $a \in A_n$ 和 $v \in V_n$, $d_i^{V[n]}(av) = d_i^{A[n]}(a)d_i^{V[n]}(v)$ 且 $s_j^{V[n]}(av) = s_j^{A[n]}(a)s_j^{V[n]}(v)$.

例10. 类似于例9, 任意给定一个 R 模 V , 都存在自然的单纯 $s(R)_*$ 模 $S(V)_*$, 其中对任意 n , $s(V)_n := V$, $d_i^{[n]} = s_j^{[n]} = \text{id}_V$.

考虑给定一个单纯 $s(R)_*$ 模 V_* , 我们有一个 R 模复形 $N(V_*)$.

$$N(V_*)_n := \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ \bigcap_{i=1}^n \text{Ker } d_i^{[n]} & n \geq 1 \end{cases},$$

且边缘映射 $\partial_n := d_0^{[n]}$. 这个复形称为 V_* 的正规化(normalization). (另一种正规化的构造我们还可以考虑取前 n 项核的交集, 边缘映射取最后一个面映射.)

除了正规化还存在其他的方法, 对一个给定的单纯 $s(R)_*$ 模 V_* , 还可以构造一个对应的 R 模复形 V_\bullet , 满足 $V_n = V_n$, 边缘映射

$$\partial_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i^{[n]}.$$

虽然两种方式给出的链并不相同, 但这两个链是拟等价的——它们具有相同的同调.

引理3.1.1. 设 R 是交换环, 给定一个单纯 $s(R)_*$ 模 V_* , 那么

$$H_n(V_\bullet) \cong H_n(N(V_*)_\bullet)$$

对所有 n 成立, 我们称这个群为 V_* 的第 n 阶同伦群(*the n -th homotopy group*), 记为 $\pi_n(V_*)$.

Proof. 我们将证明

$$V_\bullet \cong N(V_*)_\bullet \oplus X_\bullet,$$

其中 X_\bullet 是一个零调单纯 $s(R)_*$ 模, 于是引理自然是该结论的推论. □

习题3.1.1. 设 R 是交换环, S 是 R 代数, 那么 $N(s(S)) = S$.

习题3.1.2. 给定交换环 R 和单纯 R 代数 A_* , 且设 V_* 是单纯 A_* 模. 证明 $N(V_*)_n, \text{Ker } \partial_n, \text{Im } \partial_{n+1}$ 都是 V_n 的 A_n 子模.

定义. 单纯 R 代数间的态射(morphism) $\varphi_* : A_* \rightarrow B_*$ 是一族态射 $\varphi_n : A_n \rightarrow B_n$, 满足

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{d_i^{A_n}} & A_{n-1} \\ \varphi_n \downarrow & & \downarrow \varphi_{n-1} \\ B_n & \xrightarrow{d_i^{B_n}} & B_{n-1}. \end{array}$$

和

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{s_j^{A_n}} & A_{n+1} \\ \varphi_n \downarrow & & \downarrow \varphi_{n+1} \\ B_n & \xrightarrow{s_j^{B_n}} & B_{n+1}. \end{array}$$

对于任意 i, j 都成立.

若 $\varphi_* : A_* \rightarrow B_*$ 是单纯代数之间的态射, 那么我们有自然的 R 模的态射

$$\pi_*(\varphi) : \pi_*(A) \rightarrow \pi_*(B),$$

或者更准确地说 π 是一个函子 $s(R - \mathbf{Algebras}) \rightarrow R - \mathbf{Mod}$.

若 $\varphi_* : A_* \rightarrow B_*$ 诱导的 R 模态射 $\pi_*(\varphi)$ 都是同构, 则称 φ 是弱等价(weak equivalence).

定义. 给定交换环 R 和单纯 R 代数 A_* ,

3.2 Dold-Kan对应

3.3 单纯预解

定义. 给定交换环 R 和单纯 R 代数 A_* , 且 $X = \{X_n\}_{n \geq 0}$ 是一族未定元. 若单纯 R 代数 $A[X]_*$ 满足

1. $A[X]_n$ 是 $A_n[X_n]$, 即 A_n 上的以 X_n 为未定元的多项式环,
2. 对任意的 j, n , $s_j^{A[X]_n}(X_n) \subseteq X_{n+1}$,
3. 嵌入映射 $A_* \hookrightarrow A[X]_*$ 是单纯 R 代数同态,

则称 $A[X]_*$ 是 A_* 的自由单纯扩张(free simplicial extension).

定义. 标准复形

引理3.3.1. 若 R 是交换环, A_* 是单纯 R 代数, $A[X]_*$ 是 A_* 的自由单纯扩张, 若 $\varphi: A_* \rightarrow B_*$ 是单纯态射, 则 $B_* \otimes_{A_*} A[X]_*$ 是 B_* 的自由单纯扩张.

定义. 设 $\varphi: A_* \rightarrow B_*$ 是单纯 R 代数的态射, 那么 φ 的一个单纯预解(simplicial resolution)是如下一个分解

$$A_* \hookrightarrow A[X]_* \xrightarrow{\psi} B_*$$

满足复合是 φ , $A_* \hookrightarrow A[X]_*$ 是 A_* 的自由单纯扩张, ψ 是单纯满态射, 且是一个弱等价. 通常, 我们也称 $A[X]_*$ 是 B_* 在 A_* 上的单纯预解(simplicial resolution of B_* over A_*).

定理3.3.1. 若 R 是交换环, A_*, B_*, C_* 是单纯 R 代数, $A[X]_*$ 是 A_* 的自由单纯扩张, 若 $\varphi: A_* \rightarrow B_*$ 是单纯态射, $\psi: B_* \rightarrow C_*$ 是满态射且是弱等价, 那么存在提升 $\kappa: A[X]_* \rightarrow C_*$ 使得下图

$$\begin{array}{ccc} A_* & \xrightarrow{\varphi} & B_* \\ \downarrow & \nearrow \kappa & \downarrow \psi \\ A[X]_* & \longrightarrow & C_* \end{array}$$

交换.

给定一个单纯预解 $A_* \hookrightarrow A[X]_*$, 我们可以构造

$$A[X, X]_* := A[X]_* \otimes_{A_*} A[X]_*,$$

这个单纯 R 代数. 它在如下意义是具有函子性的: 给定单纯代数的态射

$$\varphi, \psi : A[X]_* \rightarrow B_*,$$

我们可以构造新的单纯态射

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi : A[X, X]_* &\rightarrow B_* \\ x \otimes y &\mapsto \varphi(x)\psi(y). \end{aligned}$$

定义. 给定交换环 R 、单纯 R 代数 A_* 和单纯预解 $A_* \hookrightarrow A[X]_*$, 设 $A[X, X, Y]_*$ 是 $A[X]_*$ 在 $A[X, X]_*$ 上的单纯预解, 则称 $A[X, X, Y]_*$ 是 A_* 代数 $A[X]_*$ 的柱对象(cylinder object). 若给定的态射 $\varphi, \psi : A[X]_* \rightarrow B_*$ 可以构造交换图

$$\begin{array}{ccc} A[X, X]_* & \hookrightarrow & A[X, X, Y]_* \\ & \searrow \varphi \otimes \psi & \downarrow \\ & & B_* \end{array}$$

则称 φ 和 ψ 同伦(homotopic), 记为 $\varphi \simeq \psi$.

这里同伦的定义完全同于拓扑中同伦的定义—— R 代数范畴中的余积就是张量积, 因而这个图恰好对应于拓扑空间组成范畴的同伦的定义图.

定理3.3.2 (提升的唯一性).

推论3.3.2.1 (预解的唯一性).