Geometric Invariant Theory

Guanyu Li

这份材料是我在读 Mumford 的著作 Geometric Invariant Theory 时做的笔记，它不是自洽的，也忽略了很多该去讨论的东西，当然也避免不了错误. 这份笔记只是基于我自己理解对 GIT 理论做的一份综述. 有一些名词我也不知道该怎么翻译，就将就着来算了.

1 几种不同的商

接下来我们会一直有如下假定：给定一个概型 S，我们考虑范畴 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群对象 G/S，如果作为概型 G 是光滑的，则称 G 是一个 S 上的代数群 (algebraic group).

例 1. *假设 k 是域，$S := \mathrm{Spec}\ k$，那么以下是代数群：*

1. $\mathbb{G}_m := \mathrm{Spec}\ k[t, t^{-1}]$.
2. $\mathbb{G}_a := \mathrm{Spec}\ k[x]$.
3. $GL_n := \mathrm{Spec}\ k[x_{i,j}, \det^{-1}]_{1\le i,j\le n}$.

设 G 作用在概型 X 上，T 是另一个概型，$f : T \to X$ 是一个 T 值点，那么我们有映射 $G \times_S T \xrightarrow{\mathrm{id}_G \times f} G \times_S X \xrightarrow{\sigma} X$，进而可以定义

$$\psi_f^G : G \times_S T \to G \times_S T$$

为 $(\sigma \circ (\mathrm{id}_G \times f), p_2)$，简记为 ψ_f. 我们称 ψ_f 的像为 f 的轨道 (orbit)，记为 $o(f)$. 另一方面，$X \times_S T$ 是 T 上的概型，于是我们自然地有截面

$$(f, \mathrm{id}_T) : X \times_S T \to T.$$

我们定义 $S(f)$ 为纤维积

$$\begin{tikzcd} S(f) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "{(f,\mathrm{id}_T)}"] \\ G \times_S T \arrow[r, "\psi_f"] & X \times_S T, \end{tikzcd}$$

这是 G 的子群.

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \to X$，若存在 S 上的态射 $\varphi : X \to Y$ 满足

1. 有交换图:

$$\begin{array}{ccc} G\times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y, \end{array}$$

2. Y 在上图意义下具有泛性质，即若有 S 上的概型 Z 和态射 $\phi : X \to Z$ 满足图

$$\begin{array}{ccc} G\times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ X & \xrightarrow{\phi} & Z, \end{array}$$

交换，则存在唯一的态射 $\chi : Y \to Z$ 使得 $\phi = \chi \circ \varphi$，

那么称 Y 是 G 作用在 X 上的一个范畴商 (categorical quotient).

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \to X$，若存在 S 上的态射 $\varphi : X \to Y$ 满足

1. 有交换图:

$$\begin{array}{ccc} G\times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y, \end{array}$$

2. φ 是满态射，且
$$\Psi = (\sigma, p_2) : G \times_S X \to X \times_S X$$
的像是 $X \times_Y X$，

3. φ 是拓扑商，也就是说，$U \subseteq Y$ 是开集当且仅当 $\varphi^{-1}(U) \subseteq X$ 是开集，

4. Y 的结构层 $\mathscr{O}_Y$ 是 $\varphi_*\mathscr{O}_X$ 的包含不变函数的子层，即对于 $f \in \Gamma(U, \varphi_*\mathscr{O}_X) = \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathscr{O}_X)$ 是 $\Gamma(U, \mathscr{O}_Y)$ 的元素当且仅当下图交换

$$\begin{array}{ccc} G\times_S \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sigma} & \varphi^{-1}(U) \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{F} & \mathbb{A}^1, \end{array}$$

其中 F 是 f 对应的态射，

那么称 Y 是 G 作用在 X 上的一个几何商 (geometric quotient).

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \to X$ 和作用的范畴/几何商 $\varphi : X \to Y$，若对任意 $f : Y' \to Y$，下面的纤维积

$$\begin{array}{ccc} X\times_Y Y' & \longrightarrow & Y' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

都使 f' 是一个范畴/几何商，则称 Y 是万有范畴/几何商 (universal - quotient). 若以上只对平坦 (flat) 的成立，则称 Y 是一致范畴/几何商 (uniform - quotient)

2 附录：点函子

这种观点来自于 Grothendieck