Hopf 纤维化

G.Li

在这一个小故事中，我们要用比较现代的观点详细地探讨 Hopf 纤维化的来源、定义、性质等等，并尝试探讨它在拓扑当中的重要性. 想写这篇的原因是偶然间见到了 2012 年的丘赛中的一道题：

问题 1. 求证

$$\pi_3(S^2) \neq 0.$$

实话说，这个题目基本上等同于绝大多数的数学题：见过就会，而且是半句话就能讲明白的，没见过，对不起想破脑袋也不一定能想出来.Hopf 纤维化就是求解这个题的核心，只要证明纤维化

$$h : S^3 \to S^2$$

不是同伦平凡的，这样就完成了证明. 然而，这个映射的存在性显得非常不自然，我们也很难直接从表达式当中理解这个映射是如何被发现的. 因此，我们会通过别的角度去研究和探索这个映射，并尝试去“看见”这个映射.

我们都知道，n 维单位球面 S^n 是 $\mathbb{R}^n$ 中与原点距离为 1 的点组成的集合，即

$$S^n := \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}.$$

二维球面是容易想象的几何对象，它可以嵌入到 $\mathbb{R}^3$ 中. 但是三维球面就并不能容易地想象，因为它需要被嵌入 $\mathbb{R}^4$ 中——于是，于是需要另外的方式去研究 S^3.

回顾在对 S^2 的处理中，通常使用的方法是球极投影（stereographic projection），将二维球面映射到平面上. 对 S^3 的处理略有不同，我们考虑投影到 S^2 上而非坐标平面上：

$$\begin{aligned} h : S^3 &\to S^2 \\ (x, y, z, w) &\mapsto (x^2 + y^2 - z^2 - w^2, 2(xw + yz), 2(yw - xz)), \end{aligned}$$

由于

$$\begin{aligned} &(x^2 + y^2 - z^2 - w^2)^2 + 4(xw + yz)^2 + 4(yw - xz)^2 \\ =&x^4 + y^4 + z^4 + w^4 + 2x^2y^2 + 2z^2w^2 - 2x^2z^2 - 2y^2z^2 - 2x^2w^2 - 2y^2w^2 \\ &+4x^2w^2 + 4y^2z^2 + 8xyzw + 4y^2w^2 + 4x^2z^2 - 8xyzw \\ =&x^4 + y^4 + z^4 + w^4 + 2x^2y^2 + 2z^2w^2 + 2x^2z^2 + 2y^2z^2 + 2x^2w^2 + 2y^2w^2 \\ =&(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^2 = 1, \end{aligned}$$

映射是良定义的，再根据每个分量函数的连续性，该映射是连续函数. 这个映射就是我们所谓的 Hopf 纤维化.

一方面，我们想研究该函数的纤维——对给定的点 $x \in S^2$，求得 $h^{-1}(x)$ 是一个有趣的问题. 另一方面，这个函数的出现并不自然，我们始终想找到一种合适的描述这个函数的方法，使得它的出现、对纤维的求解等等问题都是可以自然解决的.

1 四元数环

起初四元数环 $\mathbb{H}$ 是看起来完全不相关的一个主题，但一方面，S^3 是 $\mathbb{R}^4$ 中的对象，另一方面，我们需要对 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转的全体进行描述——我们理论上需要两个参数，一个是旋转轴另一个是旋转角度，这样我们同样需要一个 $\mathbb{R}^4$ 中的向量来记录旋转的信息（之后将会看到，这样的对应并不是一对一的）.

定义. 四元数环 $\mathbb{H}$ 是非交换的 $\mathbb{R}$ 代数，作为向量空间同构于 $\mathbb{R}^4$，其中三个不同的向量 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix}$ 分别用 i, j, k 表示，因而对任意 $q \in \mathbb{H}$，

$$q = a + bi + cj + dk, a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

且乘法满足关系

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1$$

$$ij = k, jk = i, ki = j$$

$$ji = -k, kj = -i, ik = -j.$$

问题 2. 验证 $\mathbb{R}$ 中的乘法满足结合律.[提示：尝试将 $\mathbb{H}$ 嵌入到一个矩阵代数当中.]

定义中的乘法关系已经说明了 $\mathbb{H}$ 的非交换性，这导致了很多计算上的困难，但这是一个可除代数，即它的非零元素都有逆. 对任意 $q = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$，令 $\bar{q} = a - bi - cj - dk \in \mathbb{H}$，于是

$$q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2,$$

我们记这个数是 $|q|^2 := a^2 + b^2 + c^2 + d^2$，因此当 $q \neq 0$ 时，$q \cdot \frac{\bar{q}}{|q|^2} = 1$，故 $\mathbb{H}$ 是一个可除代数.

我们称 $|q| := \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ 为四元数 q 的范数，它是映射

$$|-| : \mathbb{H} \to \mathbb{R}_{\geq 0}.$$

当 $|-|$ 限制到 $\mathbb{H}^\times$ 时，它是一个乘法群同态：

我们记 $S^3 := \{q \in \mathbb{H} \mid |q| = 1\}$，它上面有由 $\mathbb{H}^\times$ 继承的乘法，根据之前的讨论这是一个子群.

2 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转

现在我们来考虑 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转与 $\mathbb{H}$ 的关系，这里我们证明对任意给定的四元数 $q = a + bi + cj + dk$，都有一个 $\mathbb{R}^3$ 中的旋转与之对应.

定义. 对给定的 $\mathbb{R}^3$ 中的点 $P=(x,y,z)$，设 $p=xi+yj+zk$ 是 P 对应的（纯虚）四元数. 定义映射

$$R:\mathbb{H}-\{0\}\to SO_3(\mathbb{R})$$
$$q\mapsto R_q,$$

其中 R_q 是映射 $p\mapsto qpq^{-1}$

问题 3. 验证：若 $p=xi+yj+zk$ 是纯虚四元数，则对于任意的四元数 q，

$$qpq^{-1}$$

也是一个纯虚的四元数，即 qpq^{-1} 的实部为 0.

下面的命题说明了这个映射的很多好性质：

命题 1. *本节定义给出的映射 R 满足如下性质：*

1. *映射 R 是良定义的，*
2. *映射 R 是乘法群的群同态，*
3. *映射 R 是满射，且限制在 S^3 上时映射 R 有有限核.*

证明. □

推论 1.1.

$$S^3/(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\cong SO_3(\mathbb{R}).$$

证明. 映射

$$R|_{S^3}:S^3\to SO_3(\mathbb{R})$$

□

3 Hopf 纤维化

现在我们可以来完成最重要的定义了：

定义. 给定 S^2 中的一个点 $P=(1,0,0)$，那么对于任意 S^3 中的点 (a,b,c,d)，记 $q=a+bi+cj+dk\in\mathbb{H}$ 是对应的四元数，R_q 是上节定义的 q 给出的旋转，那么称映射

$$h:q\mapsto R_q(P)=qiq^{-1}=qi\bar{q}$$

为 Hopf 纤维化 (Hopf fibration).

首先这个定义给出了与先前相同的定义.
考虑点 $P=(1,0,0)\in S^2$，

4 Hopf 纤维化的可视化