射影空间

Guanyu Li

1 定义与基本概念

在这份材料中如非特殊声明，分次环都是 $\mathbb{N}$ 分次的交换环.

定义. 给定一个分次环 $S=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}} S_n$，令 $S_+=\bigoplus_{n\in\mathbb{N}^*} S_n$，我们可以做构造 Proj S 使得它成为一个概型：其中它的底拓扑空间

$$|\text{Proj } S|:=\{\mathfrak{p}\mid \mathfrak{p}\text{是 } S \text{ 的齐次素理想且不包含}S_+\},$$

称 $|\text{Proj } S|$ 中的理想为相关素理想 (relavant prime ideal)，对任意齐次理想 I，

$$V_+(I):=\{\mathfrak{p}\mid \mathfrak{p}\text{是相关素理想且}I\subseteq\mathfrak{p}\}$$

是 $|\text{Proj } S|$ 中的闭集且 $|\text{Proj } S|$ 的拓扑完全由此给出；最后要给出 Proj S 的结构层 $\mathscr{O}_{\text{Proj } S}$，取 S 中次数为正的一个齐次元素 f，令开集

$$D_+(f):=|\text{Proj } S|-V_+(f),$$

作为集合 $|D_+(f)|\cong|\text{Proj } S[f^{-1}]|$，同时后者和 $S[f^{-1}]$ 中所有的 0 次元素组成的环 $S[f^{-1}]_0$ 中的素理想一一对应，即有双射

$$\varphi_f:|\text{Proj } S[f^{-1}]|\to|\text{Spec } S[f^{-1}]_0|$$

且它是连续的，这样我们可以给 $|D_+(f)|$ 同于 Spec $S[f^{-1}]_0$ 的概型结构，这样只要选取足够多的 f 使得 $|D_+(f)|$ 构成一个开覆盖即可（后面的习题会给出这样一个开覆盖）.

例 1. 考虑 $S:=k[x_0,\cdots,x_n]$，其中对任意的 $1\leq i\leq n$，$\deg x_i=1$. 于是，$x_0,\cdots,x_n$ 生成的理想是 S_+，那么 $\{D(x_i)\}_{i=0,\cdots,n}$ 构成了 Proj S 的一个开覆盖.

$U_i\cap U_j$ 上的粘合

例 2. 考虑 $S:=k[x_0,\cdots,x_3]/(x_1^3-x_0^2x_3,x_2^3-x_0x_3^2,x_1x_2-x_0x_3)$，$U_0=\text{Spec } k[x_1,\cdots,x_3]/(x_1^3-x_3,x_2^3-x_3^2,x_1x_2-x_3)=\text{Spec }[x_0=1]$

引理 1.1. 设 S 是 $\mathbb{Z}$ 分次的环，$f\in S$ 是阶数为正的元素，且它的逆存在. 那么 S 中的相关素理想与 S_0 中的素理想一一对应.

证明. 记 Spec S 中的齐次素理想的集合为 H，$\deg f = d$，构造集合的映射

$$\varphi : H \leftrightarrows |\mathrm{Spec}\ S_0| : \psi$$
$$\mathfrak{p} \mapsto \mathfrak{p} \cap S_0$$
$$\sqrt{\mathfrak{q}S} \leftarrow\!\shortmid \mathfrak{q}.$$

由于 $\mathfrak{p} \cap S_0$ 是 $\mathfrak{p}$ 在嵌入映射 $S_0 \hookrightarrow S$ 下的拉回，故 φ 是良定义的.

另一方面，由于 $\mathfrak{q}$ 只包含阶数为 0 的元素，因此 $\mathfrak{q}S$ 是齐次理想. 任取 $g \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，它可以写成齐次元素的和

$$g = \sum_{i=1}^{n} g_i,$$

满足 $\deg g_1 < \deg g_2 < \cdots < \deg g_n$，由于 $\deg f > 0$，存在正整数 m 使得 $\deg(f^m g_1) \geq 0$. 同时，$f^m g \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$ 意味着存在整数 N 使得

$$(f^m g)^N = \left(f^m \sum_{i=1}^{n} g_i \right)^N = f^{mN} g_n^N + \text{其他低阶项} \in \mathfrak{q}S.$$

但 $\mathfrak{q}S$ 是齐次理想，因此 $f^{mN} g_n^N \in \mathfrak{q}S$，进而

$$\left(\frac{f^{mNd} g_n^{Nd}}{f^{mNd + N \deg g_n}} \right) \in \mathfrak{q}S \cap S_0 = \mathfrak{q}.$$

由于 $\mathfrak{q}$ 是素理想，$\left(\frac{g_n^d}{f^{\deg g_n}} \right)^N \in \mathfrak{q}$ 意味着 $\frac{g_n^d}{f^{\deg g_n}} \in \mathfrak{q}$，故 $g_n^d \in \mathfrak{q}S$，即

$$g_n \in \sqrt{\mathfrak{q}S}.$$

这样 $g - g_n \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，于是归纳地可证明 $g_i \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，因此 $\sqrt{\mathfrak{q}S}$ 是齐次的.

再证明 $\sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0 = \mathfrak{q}$. 显然 $\mathfrak{q} \subseteq \sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0$. 对任意 $g \in \sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0$，存在正整数 M 使得 $g^M \in \mathfrak{q}S$，阶数计算说明 $g^M \in \mathfrak{q}S \cap S_0 = \mathfrak{q}$，再根据 $\mathfrak{q}$ 的素性 $g \in \mathfrak{q}$，因此 $\sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0 \subseteq \mathfrak{q}$.

若 $a = \sum_{i=1}^{m} a_i, b = \sum_{j=1}^{n} b_j$ 满足 $ab \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，那么由刚刚的证明 $a_n b_m \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，由于 a_n, b_m 都是齐次元素，故

$$\frac{a_n^d}{f^{\deg a_n}} \frac{b_m^d}{f^{\deg b_m}} = \frac{a_n^d b_m^d}{f^{\deg a_n + \deg b_m}} \in \sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0 = \mathfrak{q},$$

再次由于 $\mathfrak{q}$ 是素理想，$\frac{a_n^d}{f^{\deg a_n}} \in \mathfrak{q}$ 或 $\frac{b_m^d}{f^{\deg b_m}} \in \mathfrak{q}$，于是 $a_n \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$ 或 $b_m \in \sqrt{\mathfrak{q}S}$，归纳可以得到 $\sqrt{\mathfrak{q}S}$ 是素理想，而它不包含 f，因此是相关素理想，故 ψ 也是良定义的.

之前证明了 $\psi \circ \varphi(\mathfrak{q}) = \sqrt{\mathfrak{q}S} \cap S_0 = \mathfrak{q}$，于是，只需要再证明 $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}$. 显然 $(\mathfrak{p} \cap S_0)S \subseteq \mathfrak{p}$，因此 $\sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S} \subseteq \mathfrak{p}$. 反过来任取 $\mathfrak{p}$ 中的齐次元素 a，$\frac{a^d}{f^{\deg a}} \in \mathfrak{p} \cap S_0$，因此 $a^d \in (\mathfrak{p} \cap S_0)S$，即 $a \in \sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S}$，这意味着 $\mathfrak{p} \subseteq \sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S}$. □

习题 1.1. 1. 验证所有的 $V_+(I)$ 构成闭集.

2. 验证集合的双射 $\varphi_f : |\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]| \to |\mathrm{Spec}\ S[f^{-1}]_0|$ 及它是同胚.

3. 验证若 S_+ 中由齐次元素组成的子集 T 满足它生成理想的根理想 $\sqrt{\langle T \rangle} = S_+$，那么

$$\{D(f) \mid f \in T\}$$

构成 Proj S 的一组开覆盖.

4. 验证
$$D_+(f)\cap D_+(g)=D_+(fg)=D_+(f^mg^n),$$
其中 $m,n\in\mathbb{N}^*$.

5. 证明
$$(S[f^{-1}][(g/f)^{-1}])_0\cong S[f^{-1}]_0[(g^{\deg f}/f^{\deg g})^{-1}]\cong S[f^{-1},g^{-1}]_0.$$

6. 证明以上给出的同构是相容的，即

说明以上的验证了之前的定义给出了一个概型.

证明. 1. 一方面，若 $\mathfrak{p}\in V_+(I)\cup V_+(J)$，那么相关素理想 $\mathfrak{p}$ 满足 $I\subseteq\mathfrak{p}$ 或 $J\subseteq\mathfrak{p}$，不妨设前者成立，于是 $I\cap J\subseteq I\subseteq\mathfrak{p}$，$\mathfrak{p}\in V_+(I\cap J)$. 另一方面若 $\mathfrak{p}\in V_+(I\cap J)$，则由交换代数 $I\subseteq\mathfrak{p}$ 或 $J\subseteq\mathfrak{p}$，因此 $\mathfrak{p}\in V_+(I)\cup V_+(J)$.

再考虑 $\mathfrak{p}\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_+(I_\lambda)$，那么 $I_\lambda\subseteq\mathfrak{p}$ 对所有 $\lambda\in\Lambda$ 成立，因此 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_+(I_\lambda)\subseteq V_+(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda)$. 反过来若 $\mathfrak{p}\in V_+(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda)$，那么 $I_\lambda\subseteq\bigcup_{\lambda\in\Lambda}I_\lambda\subseteq\mathfrak{p}$，因此 $\mathfrak{p}\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}V_+(I_\lambda)$.

2. 构造
$$\begin{aligned}\varphi_f:|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|&\leftrightarrows|\mathrm{Spec}\ S[f^{-1}]_0|:\psi_f\\ \mathfrak{p}&\mapsto\mathfrak{p}\cap S[f^{-1}]_0\\ \sqrt{\mathfrak{q}S[f^{-1}]}&\leftarrow\!\shortmid\mathfrak{q},\end{aligned}$$

引理 1.1说明二者是双射，于是只要验证二者连续即可. 若 J 是 $S[f^{-1}]_0$ 的理想，那么
$$\begin{aligned}\psi_f(V(J))&=\psi_f(\{\mathfrak{q}\mid\mathfrak{q}\supseteq J\})\\&=\{\sqrt{\mathfrak{q}S[f^{-1}]}\mid\mathfrak{q}\supseteq J\},\end{aligned}$$

显然 $JS[f^{-1}]\subseteq\sqrt{\mathfrak{q}S[f^{-1}]}$,于是 $\psi_f(V(J))\subseteq V(JS[f^{-1}])=V(\sqrt{JS[f^{-1}]})$;反过来,若 $\mathfrak{p}\in V(\sqrt{JS[f^{-1}]})$,那么
$$\mathfrak{p}=\psi_f(\varphi_f(\mathfrak{p})),$$
因此 $\psi_f(V(J))=V(JS[f^{-1}])$，这样 φ_f 是连续的.

另一方面，对 $|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|$ 中的闭集 $V(I)\cap|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|$,
$$\begin{aligned}\varphi_f(V(I)\cap|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|)&=\{\mathfrak{p}\cap S_0\mid\mathfrak{p}\in V(I)\cap|\mathrm{Proj}\ S[f^{-1}]|\}\\&\subseteq V(I\cap S_0),\end{aligned}$$

而且对任意 $\mathfrak{q}\in V(I\cap S_0)$,
$$\mathfrak{q}=\varphi_f(\psi_f(\mathfrak{q})),$$
因此 $\varphi_f(V(J))=V(I\cap S_0)$，这样 ψ_f 是连续的.

3. 任取 $\mathfrak{p}\in\mathrm{Proj}\ S$，由定义存在 $f\in S_+$ 使得 $f\notin\mathfrak{p}$，由于 S 是分次环,
$$f=(f_1+\cdots+f_n)^N,$$
使得每个 $f_i\in T$ 都是齐次的. 这样一定存在 i_0 使得 $f_{i_0}\notin\mathfrak{p}$，因此 $\mathfrak{p}\in D_+(f_{i_0})$.

4. 若 $\mathfrak{p} \in D_+(fg)$，那么 $fg \notin \mathfrak{p}$，显然 $f \notin \mathfrak{p}$ 且 $g \notin \mathfrak{p}$，所以 $D_+(fg) \subseteq D_+(f) \cap D_+(g)$. 反过来，若 $\mathfrak{p} \in D_+(f) \cap D_+(g)$，按定义 $f \notin \mathfrak{p}$ 且 $g \notin \mathfrak{p}$，因为 $\mathfrak{p}$ 是素理想，故 $D_+(f) \cap D_+(g) \subseteq D_+(fg)$，这意味着 $D_+(f) \cap D_+(g) = D_+(fg)$. 同样根据 $\mathfrak{p}$ 是素理想，$D_+(fg) = D_+(f^m g^n)$.

5. 构造

$$\varphi : S[f^{-1}][(g/f)^{-1}] \leftrightarrows S[f^{-1}, g^{-1}] : \psi$$
$$\frac{\frac{r}{f^n}}{(g/f)^m} \mapsto \frac{r}{f^{n-m} g^m}$$
$$\frac{\frac{r}{f^{n+m}}}{(g/f)^m} \leftarrow \frac{r}{f^n g^m},$$

显然二者是良定义的, 它们是齐次环同态，且互为逆映射. 于是，$S[f^{-1}, g^{-1}]_0 \cong (S[f^{-1}][(g/f)^{-1}])_0$. 若齐次元素

$$\frac{r}{f^n g^m} \in S[f^{-1}, g^{-1}]$$

满足 $\deg \frac{r}{f^n g^m} = 0$，那么由定义

$$\deg r = m \deg g + n \deg f.$$

同时,

$$\frac{r}{f^n g^m} = \frac{g^{m \deg f - m} f^{m \deg g}}{g^{m \deg f - m} f^{m \deg g}} \frac{r}{f^n g^m} = \left(\frac{f^{\deg g}}{g^{\deg f}}\right)^m \frac{g^{m \deg f - m} r}{f^{n + m \deg g}},$$

且 $\deg \left(\frac{f^{\deg g}}{g^{\deg f}}\right)^m \frac{g^{m \deg f - m} r}{f^{n+m \deg g}} = \deg \frac{g^{m \deg f - m} r}{f^{n+m \deg g}} = \deg r + \deg g(m \deg f - m) - \deg f(n + m \deg g) = 0$. 这意味着 $S[f^{-1}, g^{-1}]_0 = S[f^{-1}]_0[(g^{\deg f}/f^{\deg g})^{-1}]$，得证.

以上的验证中, 前三条说明了存在一个仿射的开覆盖, 第四条说明开覆盖当中两个的交集是什么样的——它也是开覆盖中的一个，因此可以用前面的方式得到上面的层结构——第五条证明了层结构的相容性. 这样，Proj S 是一个概型. □

特别地，我们记 $\mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} := \text{Proj } \mathbb{Z}[x_0, \cdots, x_n]$.

引理 1.2. *设 S, T 是给定的分次环，$\varphi : S \to T$ 是分次环同态（即 $\varphi(S_n) \subseteq T_n$），求证：*

1. $U := \{\mathfrak{q} \in \text{Proj } T \mid \varphi(S_+) \not\subseteq \mathfrak{q}\}$ 是 Proj T 中的开集.

2. φ 诱导了态射 $U \to \text{Proj } S$.

证明. 1. 记 $X = \text{Proj } T$. 要证明 U 是开集，只要证明 $X - U$ 是闭集即可. 令 $J := (\varphi(S_+))$，那 T 中的齐次素理想 $\mathfrak{q}$ 包含 $\varphi(S_+)$ 当且仅当它包含 J. 于是根据定义，$X - U = V_+(J)$ 是闭集，得证.

2. 首先给定映射 $f : U \to \text{Proj } S$，它将素理想 $\mathfrak{q}$ 映到 $(\varphi^{-1}(\mathfrak{q}))$，我们要验证它是连续的. 任取 Proj S 中的闭集 $V_+(I)$，

$$\begin{aligned} f^{-1}(V(I)) &= \{\mathfrak{q} \in U \mid f(\mathfrak{q}) \in V_+(I)\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in U \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq I\} \\ &= \{\mathfrak{q} \in \text{Proj } T \mid \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \supseteq I\} \cap U, \end{aligned}$$

这是 U 中的闭集，因此 f 是连续映射.

接下来要给出层的态射 $f^\# : \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}|_U \to f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}$. 注意到

$$G = \{s \in S \mid s\text{是齐次元素且}\deg s > 0\}$$

生成的理想的根理想是 S_+，于是 $\{D_+(s) \mid s \in G\}$ 是 Proj S 的一个开覆盖，于是只需要给出一族相容的环同态

$$(f^\#)_s : \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}(D_+(s)) \to f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(s)).$$

注意到

$$\begin{aligned} f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(s)) &= \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(f^{-1}(D_+(s))) \\ &= \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s)) \cap U). \end{aligned}$$

注意到 $D_+(\varphi(s)) = \mathrm{Spec}\ T[\varphi(s^{-1})]_0$ 是仿射概型，因此 $(f^\#)_s$ 可以定义为复合

$$\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}(D_+(s)) = S[s^{-1}]_0 \to \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s))) = T[\varphi(s^{-1})]_0 \to \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s)) \cap U),$$

其中第一个映射由 φ 诱导，第二个映射是 $\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}$ 所给的信息.

对于相容性，给定 $s_1, s_2 \in S$，只要证明图

$$\begin{tikzcd} \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}(D_+(s_1)) \arrow[r, "(f^\#)_{s_1}"] \arrow[d] & f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(s_1)) \arrow[d] \\ \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}(D_+(s_1s_2)) \arrow[r, "(f^\#)_{s_1s_2}"] & f_*\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(s_1s_2)) \end{tikzcd}$$

是交换的，即

$$\begin{tikzcd} S[s_1^{-1}]_0 \arrow[r] \arrow[d] & T[\varphi(s_1^{-1})]_0 \arrow[r] \arrow[d] & \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s_1)) \cap U) \arrow[d] \\ S[s_1s_2^{-1}]_0 \arrow[r] & T[\varphi(s_1s_2^{-1})]_0 \arrow[r] & \mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ T}(D_+(\varphi(s_1s_2)) \cap U) \end{tikzcd}$$

是交换的，但这由构造是明显的. □

例 3. 考虑环同态

$$\varphi :$$

命题 1.1. 设 R 是任意交换环，$S = R[x_0, \cdots, x_n]$，那么 Proj $S = \mathbb{P}^n_R := \mathbb{P}^n_{\mathbb{Z}} \times \mathrm{Spec}\ R$.

证明. □

习题 1.2. 证明 $\mathbb{P}^r_R$ 是开集 $\mathbb{A}^r_R$ 和闭集 $\mathbb{P}^{r-1}_R$ 的不交并.

习题 1.3. 任意给定 $\mathbb{P}^n_R$ 中的两不同点 P, Q，求证存在超平面 H 使得 $P \in H$ 且 $Q \notin H$.

命题 1.2. 设 R 是交换环，$S = R[x_0, \cdots, x_n]$，那么态射 Proj $S \to$ Spec R 是正规的.

证明. 回顾概型之间的态射 $f : X \to Y$，是有限型的、分离的，且满足 □

习题 1.4. 分类所有的态射

$$\text{Spec } \mathbb{Z} \to \mathbb{P}^1_{\mathbb{Z}}.$$

习题 1.5. 设 S 是分次交换环，对任意正整数 d，定义 S 的第 d 个 Veronese 子环为

$$S^{(d)} := \bigoplus_{n \geq 0} S_{dn}.$$

1. 证明 Proj $S \cong$ Proj $S^{(d)}$.
2. 证明若 $S = R[x, y]$，作为分次环（甚至只作为环）S 与 $S^{(d)}$ 不同构.

证明. 1. 由于 $S^{(d)}$ 自然地是 S 的子环，我们将 $S^{(d)}$ 的元素当作 S 中的元素. 对任意 $f \in S_{dn}$，记

$$D_+^{(d)}(f) := |\text{Proj } S^{(d)}| - V_+^{(d)}(f),$$

那么可以构造映射

$$\begin{aligned} \varphi_f : D_+^{(d)}(f) &\leftrightarrows D_+(f) : \psi_f \\ \mathfrak{p} &\mapsto \sqrt{\mathfrak{p}S} \\ \mathfrak{q} \cap S^{(d)} &\leftarrow\!\shortmid \mathfrak{q}, \end{aligned}$$

显然 ψ_f 是良定义的，另一方面

$$\sqrt{\mathfrak{p}S} = \sqrt{(\mathfrak{p} \cap S_0)S}$$

□

2　射影空间上的层

定义. 给定分次环 S 和分次 S 模 M，如下构造给出 $\tilde{M}$：按定义 $D_+(f)$ 给出 Proj S 的一族仿射开覆盖，取

$$\tilde{M}(D_+(f)) = (M_f)_0,$$

其中 $(M_f)_0$ 是 M 关于 f 局部化的阶数为 0 的部分.

定义. 给定分次环 S，则 Proj S 上的层 $\mathscr{O}(n)$ 是 $\widetilde{S(n)}$，其中 $S(n)$ 定义为分次 S 模，满足

$$S(n)_d := S_{n+d}.$$

例 4. 我们来考虑射影空间 $\mathbb{P}_R^n$ 的可逆层 $\mathscr{O}(1)$. 记 $S = R[x_0, \cdots, x_n]$, 按照例 *1*的分析, $\mathbb{P}_R^n$ 有仿射开覆盖 $\{U_i := \mathrm{Spec}\ R[\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}]\}_{i=0,\cdots,n}$, 于是

$$\mathscr{O}(1)(U_i) = ((S(1))_{x_i})_0 = \left\langle \frac{f}{x_i^d} \middle| f\text{是}S\text{中的齐次元素且}\deg f = d+1 \right\rangle,$$

最后一个等式是由于做局部化时 $x_i \in S$ 满足阶数为 1, 且张成是 R 模在 $(S(1))_{x_i}$ 中的. 于是映射

$$\frac{f}{x_i^d} \mapsto \frac{f}{x_i^{d+1}}$$

恰好给出了 $R[\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}]$ 模同构 $((S(1))_{x_i})_0 \cong R[\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}]$, 这意味着 $\mathscr{O}(1)$ 是局部自由的.

另一方面, 考虑如上给出的局部平凡化的转移函数, 在 $D_+(x_i) \cap D_+(x_j) = D_+(x_ix_j)$ 上, 考虑

$$\varphi_{i,j} : (\mathscr{O}(1)|_{U_i})|_{U_i \cap U_j} \to (\mathscr{O}(1)|_{U_j})|_{U_i \cap U_j}$$
$$(((S(1))_{x_ix_j})_0) \cong R[\frac{x_0}{x_i}, \cdots, \frac{x_n}{x_i}]_{\frac{x_j}{x_i}} \to R[\frac{x_0}{x_j}, \cdots, \frac{x_n}{x_j}]_{\frac{x_i}{x_j}} \cong (((S(1))_{x_ix_j})_0),$$

其中按照之前的描述,

$$((S(1))_{x_ix_j})_0 = \left\langle \frac{f}{x_i^d x_j^d} \middle| f\text{是}S\text{中的齐次元素且}\deg f = 2d+1 \right\rangle$$

并且同构是 $\frac{f}{x_i^d x_j^d} \mapsto \frac{f}{x_i^{d+1} x_j^d}$, 另一个对应地是 $\frac{f}{x_i^d x_j^d} \mapsto \frac{f}{x_i^d x_j^{d+1}}$, 这样转移函数很明显的是

$$\frac{f}{x_i^{d+1} x_j^d} \mapsto \frac{f}{x_i^d x_j^{d+1}} = \frac{f}{x_i^{d+1} x_j^d} \frac{x_i}{x_j}.$$

非常类似地, $\mathbb{P}_R^n$ 上的层 $\mathscr{O}(m)$ 也是可逆层, 转移函数是 $\cdot \left(\frac{x_i}{x_j}\right)$.

在古典代数几何中, 给定 k 代数簇 X, D 是 X 的余维数为 1 的不可约子簇, 那么可以定义

$$\mathscr{O}_{X,D} := \{f \in k[X] \mid f\text{在}X\text{的开集}U\text{上有定义且}U \cap D \neq \emptyset\}$$

定义. 给定分次环 S 和 Proj S 上的层 $\mathscr{F}$, 那么分次 S 模

$$\Gamma_*(\mathscr{F}) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} H^0(\mathscr{F}(n))$$

称为 $\mathscr{F}$ 对应的分次 S 模 (graded S-module associated to $\mathscr{F}$).

命题 2.1. 给定环 R 和 R 上的多项式环 $S := R[x_0, \cdots, x_n]$, 那么

$$\Gamma_*(\mathscr{O}_{\mathrm{Proj}\ S}) \cong S.$$

证明. □

这个命题对非多项式环并不成立；但是反过来我们有

命题 2.2. 给定分次环 S，满足 S 是 S_1 生成的 S_0 代数，那么对于 $\mathrm{Proj}\, S$ 上的任意拟凝聚层 $\mathscr{F}$ 存在自然的同构

$$\widetilde{\Gamma(\mathscr{F})} \cong \mathscr{F}.$$

证明. □

引理 2.1. 给定概型 X 和可逆层 $\mathscr{L}$，取 $f \in \Gamma(X, \mathscr{L})$，定义 $X_f := \{x \in X \mid f_x \notin \mathfrak{m}_x \mathscr{L}_x\}$，且 $\mathscr{F}$ 是 X 上的拟凝聚层.

1. 若 X 是拟紧的，那么若 $\mathscr{F}$ 的全局截面 $s \in \Gamma(X, \mathscr{F})$ 满足 $s|_{X_f} = 0$，那么存在 $n > 0$ 使得 $f^n s \in \Gamma(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n)$ 为 0 截面，
2. 进一步假设 X 可以由有限多个仿射开集 $\{U_i\}_{i=1,\cdots,m}$ 覆盖，满足 $\mathscr{L}|_{U_i}$ 是自由的且 $U_i \cap U_j$ 是拟紧的，那么对于任意的 $t \in \Gamma(X_f, \mathscr{F})$，存在 n 使得 $f^n t$ 延拓为 $\mathscr{F}$ 的一个全局截面.

定理 2.3. 给定 *Noether* 环 R 和 R 上射影概型 X 的凝聚 $\mathscr{O}_X$ 模 $\mathscr{F}$，那么存在正整数 N 使得对所有的 $n > N$，$\mathscr{F}(n)$ 都是全局生成的.

证明. 设 $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^n_R$ 是闭浸入，且 $i^*\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_R}(1) = \mathscr{O}_X(1)$，那么 $i_*\mathscr{F}$ 是 $\mathbb{P}^n_R$ 上的凝聚层，并且 $(i_*\mathscr{F})(n) = i_*(\mathscr{F}(n))$. 这样 $(i_*\mathscr{F})(n)$ 是全局生成的当且仅当 $i_*(\mathscr{F}(n))$ 是全局生成的（事实上二者的生成元是相同的），于是这个问题归结到 $\mathbb{P}^n_R$ 上的凝聚 $\mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_R}$ 模 $\mathscr{F}$.

按照之前的讨论，我们有仿射开覆盖 $\mathbb{P}^n_R = \bigcup_{i=0}^n U_i$，于是存在有限生成的 $R[x_0, \cdots, \hat{x}_i, \cdots, x_n]$ 模 $\mathscr{F}|_{U_i} = \tilde{M}_i$. 对任意的 i，取定 M_i 的一族（有限多个）生成元 $\{s_{i,j}\}$，根据引理 2.1存在（一致的）自然数 n 使得 $x_i^n s_{i,j}$ 扩张为 $\mathscr{F}(n)$ 的全局截面 $t_{i,j}$. □

3 射影空间的闭子概型

定理 3.1. 给定交换环 R 和 R 上的概型 X，

1. 若 $f : X \to \mathbb{P}^n_R$ 是 R 同态，那么 $f^*\mathscr{O}(1)$ 是 X 上的可逆层，且由全局截面 $\{s_i := f^*(x_i)\}_{i=0,\cdots,n}$ 生成，
2. 反过来给定 X 上的可逆层 $\mathscr{L}$，且 $\mathscr{L}$

命题 3.2. 设 I 是分次交换环 S 的齐次理想，那么存在集合的包含

$$|\mathrm{Proj}\ S/I| \subseteq |\mathrm{Proj}\ S|,$$

并且子集 $|\mathrm{Proj}\ S/I|$ 与任意仿射开集 $(\mathrm{Proj}\ S)_f$ 的交都是 $(\mathrm{Proj}\ S)_f$ 中的闭集，并且交集对应的子概型同构于 $(\mathrm{Proj}\ S/I)_f$. 因此 $\mathrm{Proj}\ S/I$ 可看作 $\mathrm{Proj}\ S$ 的闭子概型.

证明. □

$$0 \to \mathscr{I}_Y \to \mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_Y \to 0$$

例 5. 考虑分次 S 模

$$0 \to S(-1) \xrightarrow{\cdot x_i} S \to S/(x_i) \to 0$$

诱导了

$$0 \to \mathscr{O}(-1) \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^n_R} \to \mathscr{O}_{\mathbb{P}^{n-1}_R} \to 0,$$

4 全局 Proj 构造

定理 4.1.

5 切空间和切锥

习题 5.1. 给定域 k，求证 $\mathbb{P}^n_k$ 中的所有 d 阶超平面自然地构成 $\mathbb{P}^N_k$，其中 $N = \binom{n+d}{n} - 1$.

证明.

$$X_d = \{\sum a_l x^l = 0\} \leftrightarrow \{a_l\}.$$

□

例 6. 我们尝试分类 $\mathbb{P}^1_k$ 上的所有线丛.

6 射影空间的上同调

定理 6.1. 给定 *Noether* 环 R，$S := R[x_0, \cdots, x_d]$，$\mathbb{P}^d_R = \mathrm{Proj}\ S$ 是 R 上的 d 维射影空间，$\mathscr{O}(1)$ 是 *Serre* 扭曲层，那么

1. 自然存在的分次 S 模同构

$$S \to \Gamma_*(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}) := \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} H^0(\mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}(n)),$$

2. 对任意的 $0 < i < d$ 和 $n \in \mathbb{Z}$，$H^i(\mathbb{P}^d_R, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}(n)) = 0$，

3. $H^d(\mathbb{P}^d_R, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}(-d-1)) \cong R$，

4. 对任意的 $n \in \mathbb{Z}$，映射

$$H^0(\mathbb{P}^d_R, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}(n)) \times H^d(\mathbb{P}^d_R, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}(-d-n-1)) \to H^d(\mathbb{P}^d_R, \mathscr{O}\mathbb{P}^d_R(-d-1)) \cong R$$

是有限生成自由 R 模的配对.

推论 6.1.1. 如定理的假定，

$$H^q(\mathbb{P}^d_R, \mathscr{O}_{\mathbb{P}^d_R}(n)) = \begin{cases} (R[x_0, \cdots, x_d])_n & q = 0, \\ 0 & q \neq 0, d, \\ (\frac{1}{x_0 \cdots x_d} R[\frac{1}{x_0}, \cdots, \frac{1}{x_d}])_n & q = n. \end{cases}$$

定理 6.2. 给定 *Noether* 环 R，X 是 R 上的射影概型，$\mathscr{O}(1)$ 是 X 的一个相对于 $\operatorname{Spec} R$ 的极丰可逆层，$\mathscr{F}$ 是 X 上的凝聚层，那么

1. 对任意的 $i \geq 0$，$H^i(X, \mathscr{F})$ 是有限生成的 R 模，

2. 存在依赖于 $\mathscr{F}$ 的正整数 N 使得对任意 $n > N$ 和 $i > 0$，$H^i(X, \mathscr{F}(n)) = 0$.

证明. □

命题 6.3. 给定 *Noether* 环 R 和 $\operatorname{Spec} R$ 上的正规概型 X，$\mathscr{L}$ 是 X 上的可逆层，那么如下等价：

1. $\mathscr{L}$ 是丰满的，

2. 对任意 X 上的凝聚层 $\mathscr{F}$，都存在 (依赖于 $\mathscr{F}$ 的) 正整数 N 使得对任意 $n > N$ 和 $i > 0$，$H^i(X, \mathscr{F} \otimes \mathscr{L}^n) = 0$.

定理 6.4 ($\mathbb{P}^n_k$ 的对偶)**.** 给定域 k 和 $\mathbb{P}^n_k = \operatorname{Proj} k[x_0, \cdots, x_n]$，那么

1. $H^n(\mathbb{P}^n_k, \omega_{\mathbb{P}^n_k}) \cong k$，并且接下来选定一个同构，

2. 对任意 $\mathbb{P}^n_k$ 上的凝聚层 $\mathscr{F}$，自然存在的配对

$$\operatorname{Hom}(\mathscr{F}, \omega) \times H^n(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F}) \to H^n(\mathbb{P}^n_k, \omega) \cong k$$

是非退化的，

3. 对任意的 $i \geq 0$，存在自然的同构

$$\operatorname{Ext}^i(\mathscr{F}, \omega) \cong H^{n-i}(\mathbb{P}^n_k, \mathscr{F})^\vee.$$

7 应用：Hirzebruch 曲面