同伦代数

G.Li

第一章　单纯对象

1.1　单纯集和单纯复形

设n是任意一个自然数.定义$[n]$是有$n+1$个对象的小范畴，且其中的箭头是序列$\{0 \to 1 \to \cdots \to n\}$.设$\mathbf{\Delta}$是所有$[n]$组成的范畴，态射是$[n]$到$[m]$的函子.这个范畴有非常具体的描述：定义$[n]'$是$n+1$元的全序集，其元素记为$\{0 \le 1 \le \cdots \le n\}$.设$\mathbf{\Delta}'$是所有$[n]'$组成的范畴，态射是$[n]'$到$[m]'$的保序映射，即$f:[n]' \to [m]'$满足$i \le j$必有$f(i) \le f(j)$.证明$\mathbf{\Delta}'$是一个范畴，且存在一个范畴的同构$\mathbf{\Delta}' \to \mathbf{\Delta}$.于是我们无意区分两个范畴，都称为*单纯范畴*(simplicial category)或者*全序范畴*(ordering category)，也无意区分两个范畴不同的对象.注意到

$$
\begin{aligned}
d^i_{n+1} : [n] &\to [n+1] \\
k &\mapsto \begin{cases} k, & k < i \\ k+1, & k \ge i. \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & n \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & i+1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n+1
\end{tikzcd}
$$

和

$$
\begin{aligned}
s^i_{n} : [n+1] &\to [n] \\
k &\mapsto \begin{cases} k, & k \le i \\ k-1, & k > i. \end{cases}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[d] & i+1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & n+1 \arrow[dl] \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n &
\end{tikzcd}
$$

都是范畴$\mathbf{\Delta}$中的态射，且满足

$$
\begin{aligned}
&d^j_{[n+1]} d^i_{[n]} = d^i_{[n+1]} d^{j-1}_{[n]}, && \forall\, i < j \\
&s^j_{[n]} s^i_{[n+1]} = s^i_{[n]} s^{j+1}_{[n+1]}, && \forall\, i \le j \\
&s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} = d^i_{[n]} s^{j-1}_{[n-1]}, && \forall\, i < j \\
&s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} = \mathrm{id}_{[n]}, && i = j \text{ 或 } i = j+1 \\
&s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} = d^{i-1}_{[n]} s^j_{[n-1]}, && \forall\, i > j+1.
\end{aligned}
$$

其中，d^i称为第i个对偶面映射(coface map)，s^i称为第i个对偶退化映射(codegeneracy map).$\mathbf{\Delta}$中所有的态射都可以由d^i和s^j生成.更准确地说，任意$f \in \hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m])$有唯一的分解

$$f = d^{i_1} \circ \cdots \circ d^{i_r} \circ s^{j_1} \circ \cdots \circ s^{j_s},$$

其中$m = n + r - s$，$i_1 < \cdots < i_r$且$j_1 < \cdots < j_s$.

定义. 一个单纯集(simplicial set)是一个反变函子$X : \mathbf{\Delta}^\circ \to \mathbf{Set}$.更一般地，范畴$\mathcal{C}$中的一个单纯对象(simplicial object)是反变函子$X : \mathbf{\Delta}^\circ \to \mathcal{C}$.对偶地，可以定义上单纯对象(cosimplicial object)是协变函子$Y : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{C}$.

对单纯集X，一般我们用X_n来表示集合$X([n])$，且其中的元素称为n单形(n-simplicies).若n单形$x \in X_n$满足存在$y \in X_{n-1}$使得$X(s^j)(y) = x$，则称x是退化的(degenerate).我们用$\mathbf{sSet}$表示所有单纯集组成的范畴，其中对象间的态射是$X \Rightarrow Y$的自然态射，具体来说，是对每个n都有一个集合间的态射$f_n : X_n \to Y_n$，在$\mathbf{\Delta}$的作用下保持不动.

对于一个单纯集X，一般我们采用记号$d_i := X(d^i) : X_{n+1} \to X_n$和$s_j := X(s^j) : X_n \to X_{n+1}$，称为面映射和退化映射.

$$X_0 \overset{d^0}{\longleftrightarrow} X_1 \xrightarrow{s^1} X_2 \xrightarrow{\pi_2} \cdots$$

练习1.1. 设X是单纯集，记

$$X_n^{\deg} := \bigcup_{j=0}^{n-1} s_j(X_{n-1})$$

为n单形中的所有退化元素.求证

$$X_n^{\deg} = \bigcup_{\substack{f:[n]\to[k] \\ f \neq \mathrm{id}}} X(f)(X_k).$$

例1.1. 设$\mathcal{C}$是一个小范畴，那么我们可以自然地定义一个单纯集$N\mathcal{C}$，称为范畴$\mathcal{C}$的神经(nerve)，其中$N\mathcal{C}_0$是集合$\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，$N\mathcal{C}_1$是集合$\mathrm{mor}\,\mathcal{C}$，对任意$n > 1$定义

$$N\mathcal{C}_n := \{(f_n, \cdots, f_1) \mid f_i \in \mathrm{mor}\,\mathcal{C}\text{且}f_i\text{与}f_{i+1}\text{可复合为}f_{i+1}f_i\text{，}\forall 1 \leq i \leq n\}.$$

通常，我们用相连的箭头

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

来表示$N\mathcal{C}_n$中的元素.这样当$1 < i < n$我们有自然的面映射

$$d_i : N\mathcal{C}_n \to N\mathcal{C}_{n-1}$$
$$(f_n, \cdots, f_i, f_{i-1}, \cdots, f_1) \mapsto (f_n, \cdots, f_i f_{i-1}, \cdots, f_1),$$

当$i = 0, n$时，我们分别舍弃A_0和A_n.退化映射$s_i : N\mathcal{C}_n \to N\mathcal{C}_{n+1}$是简单的，只要在第$i$项和第$i+1$项之间加一个$A_i$，取为$A_i \xrightarrow{\mathrm{id}} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1}$.之后我们会对范畴的神经进行更详细的讨论.

例1.2. 拓扑上，我们有一个上单纯集$\Delta : \boldsymbol{\Delta} \to \mathbf{Top}$，事实上这个函子是我们定义单纯范畴的最初启发.考虑函子Δ将$[n]$映到标准n单形

$$\Delta_n = \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1, x_i \geq 0\},$$

对偶面映射$d^i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$定义为将$\Delta_{n-1}$映为第$i$个坐标为0的面，即$(x_0, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots$
对偶退化映射$s^i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$将坐标$x_i$与$x_{i+1}$相加，即$(x_0, \cdots, x_i, , x_{i+1} \cdots, x_{n+1}) \mapsto (x_0, \cdots, x_i + x_{i+1}, \cdots, x_{n+1})$.

设X是拓扑空间，这样就可以定义的单纯集SX，其中$(SX)_n$是所有连续映射$\Delta^n \to X$，面映射

$$d_i : (SX)_{n+1} \to (SX)_n$$

将$f : \Delta_{n+1} \to X$映到$f \circ d^i : \Delta_n \to X$，退化映射

$$s_j : (SX)_{n-1} \to (SX)_n$$

将$f : \Delta_{n-1} \to X$映到$f \circ s^j : \Delta_n \to X$.$SX$被称为空间$X$的奇异复形(total singular complex)，通常它给出了拓扑空间的奇异同调.

给定$[n]$的一个非空子集σ，定义Δ_σ为Δ^n中$\{e_i\}_{i\in\sigma}$的凸包(convex hull)，即

$$\Delta_\sigma := \left\{ \sum_{i\in\sigma} a_i \mathbf{e}_i \;\middle|\; \sum_{i\in\sigma} a_i = 1, a_i \geq 0, \forall i \in \sigma \right\} \subseteq \Delta^n,$$

我们称Δ_σ为Δ的σ面(σ-face).$\mathbb{R}^n$中同胚于Δ_n中有限多个σ面的并的子空间称为多面体(polyhedron).对于一个多面体P，我们可以把它表达为不同的σ面的并，每一个这样的同胚被称为P的一个三角剖分(triangulation).

在拓扑中，对于一个空间我们会考虑它对应的单纯剖分，这样的一个单纯剖分通常被称为单纯复形.非拓扑的情形下同样可以定义单纯复形，这样定义的单纯复形对应于一个拓扑空间的单纯剖分：

定义. 设V是一个集合，则V上的单纯复形(simplicial complex)X是V的一个非空有限子集族，满足X在取子集作用下闭，即

$$\forall \sigma \in X,\ \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in X.$$

引理1.1. *对于集合V上的单纯复形X，如下构造的$|X|$是一个拓扑空间，且具有被X描述的单纯剖分：*

取定$\mathbb{R}$线性空间$\mathbb{V} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} V$，对任意$\sigma \in X$，令$\Delta_\sigma$是由$\sigma \subseteq V$生成的凸包.那么

$$|X| := \bigcup_{\sigma\in X} \Delta_\sigma \subseteq \mathbb{V}$$

与$K := \{i_\sigma : \Delta_\sigma \to |X|\}$构成一个拓扑单纯剖分，其中$i_\sigma : \Delta_\sigma \to |X|$是自然的嵌入.

反过来，任意给定拓扑空间X的单纯剖分K

单纯复形并不具有非常好的性质，比如单纯复形的商并不一定是单纯复形.但是每一个单纯复形都对应一个单纯集，且我们能利用这个单纯集重新构造之前的单纯复形.这意味着，单纯集可以看作单纯复形的自然推广.

定义. 给定全序集合V上的单纯复形X，我们可以定义它对应的单纯集$SS_*(X)$，其中

$$SS_n(X) := \{(v_0, \cdots, v_n) \mid \{v_0, \cdots, v_n\} \in X\},$$

对任意$\mathbf{\Delta}$中的态射$f : [m] \to [n]$，定义

$$\begin{aligned} SS(f) : SS_n(X) &\to SS_m(X) \\ (v_0, \cdots, v_n) &\mapsto (v_{f(0)}, \cdots, v_{f(n)}). \end{aligned}$$

练习1.2. 这里我们要验证单纯复形可以完全地由它对应的单纯集给出，因而单纯集是更广泛的概念.考虑习题1.1中的定义，验证

$$SS_*(X)^{\text{nondeg}} \cong X.$$

练习1.3. 在引理1.1中我们证明了抽象单纯复形和拓扑单纯复形的一一对应.在拓扑中有一个比单纯复形广泛一点的概念拟单纯复形(semi-simplicial complex)，定义为

在本小节最后我们引入循环范畴(cyclic category)$\mathbf{\Delta}_C$，其中$\mathbf{\Delta}_C$的对象同于$\mathbf{\Delta}$，而$\mathbf{\Delta}_C$的态射由$d^i_{[n]} : [n] \to [n+1], s^j_{[n+1]} : [n+1] \to [n]$和$\tau_n : [n] \to [n]$生成，满足三类关系：(i)$d^i_{[n]}, s^j_{[n+1]}$之间的关系同于$\mathbf{\Delta}$；(ii)$\tau_{n+1} \circ d^i_{[n]} = d^{i-1}_{[n]} \circ \tau_n$和$\tau_{n+1} \circ d^0_{[n]} = d^n_{[n]}$，$\tau_n \circ s^j_{[n+1]} = s^{i-1}_{[n]} \circ \tau_{n+1}$和$\tau_n \circ s^0_{[n+1]} = s^n_{[n]} \circ \tau^2_{n+1}$；(iii)$\tau_n^{n+1} = \mathrm{id}_{[n]}$.下面的定理叙述了两个范畴之间的关系.

定理1.1. *$\mathbf{\Delta}_C$是$\mathbf{\Delta}$的（非满）子范畴，且满足*

1. $\mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C}([n]) \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$.
2. *任意$\mathbf{\Delta}_C$中的态射$f \in \hom_{\mathbf{\Delta}_C}([n],[m])$都可以写成如下分解$f = \varphi \circ \gamma$，其中$\varphi \in \hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m])$且$\gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C}([n])$.*

例1.3 (要检查方向). 定义函子$\mathbf{\Delta}_C^\circ \to \mathbf{Set}$，将对象$[n]$映到$\mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n]) = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$，任取$a \in \hom_{\mathbf{\Delta}_C}([n],[m])$和$g \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C}([n])$，由刚刚的唯一分解，$f = g \circ a$存在唯一的分解$f = \varphi \circ \gamma$满足$\varphi \in \hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m])$且$\gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C}([n])$，记$g^*(a) = \varphi, a^*(g) = \gamma$.于是对于任意给定的$g \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n])$，我们有

$$\begin{aligned} g^* : \hom_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n],[m]) &\to \hom_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n],[m]) \\ a &\mapsto g^*(a) \end{aligned}$$

和任意给定的$a \in \hom_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n],[m])$，

$$\begin{aligned} a^* : \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n]) &\to \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n]) \\ g &\mapsto a^*(g). \end{aligned}$$

1.2 泛单纯集

1.2.1 Yoneda引理

范畴理论中最重要的工具之一就是Yoneda引理.我们记$\hat{\mathcal{C}}$为范畴$\mathbf{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})$，$h_B := \hom_{\mathcal{C}}(-, B)$，那么Yoneda引理表述如下：

定理1.2 (Yoneda)**.** 对任意局部小范畴$\mathcal{C}$和函子$F : \mathcal{C}^\circ \to \mathbf{Set}$，存在关于$F$和$\mathcal{C}$都自然的同构

$$\varphi : \hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h_B, F) \cong F(B).$$

作为推论，当$F = h_D$时，自然同构为

$$\hom_{\mathcal{C}}(B, D) = \hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h_B, h_D),$$

其中映射将态射$f : B_1 \to B_2$映到$h(f) = \hom_{\mathcal{C}}(f, D)$.考虑函子

$$\begin{aligned} h : \mathcal{C} &\to \hat{\mathcal{C}} \\ B &\mapsto \hom_{\mathcal{C}}(-, B) \\ (f : B_1 \to B_2) &\mapsto h(f), \end{aligned}$$

Yoneda引理说明这是一个满忠实的函子，我们称其为Yoneda函子.

注意到任意一个单纯集是一个到集合范畴的函子，故我们可以对其应用Yoneda引理.由定义显然有$\hat{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{sSet}$.考虑$h_{[n]} := \hom_{\mathbf{\Delta}}(-, [n])$，这些函子都是单纯集，具体说来，我们需要确定面映射和退化映射：面映射$d_i : h_{[n]}([k]) \to h_{[n]}([k-1])$是$\mathbf{Set}$中$d^i$的前置复合，即

$$d_i : h_{[n]}([k]) \to h_{[n]}([k-1]) = \{[k] \xrightarrow{f} [n]\} \mapsto \{[k-1] \xrightarrow{d^i} [k] \xrightarrow{f} [n]\},$$

类似地退化映射s_i是$\mathbf{Set}$中s^i的前置复合.同时，Yoneda函子的满忠实性说明

$$\hom_{\mathbf{\Delta}}([k], [n]) \cong \hom_{\mathbf{sSet}}(h_{[k]}, h_{[n]}),$$

即$h_{[k]}$到$h_{[n]}$的所有自然变换由$\mathbf{\Delta}$中的态射$[k] \to [n]$所决定，因此所有的$h_{[n]}$在一起组成一个上单纯集.

定义. 单纯集

$$h_{[n]} := \hom_{\mathbf{\Delta}}(-, [n])$$

被称为标准n单形(standard n-simplex)，我们也记为$\mathbf{\Delta}_{[n]}$.

引理1.2. 设X是单纯集，函子

$$\begin{aligned}\mathbf{sSet} &\to \mathbf{Set}\\ X &\mapsto X([n])\end{aligned}$$

是可表的，其代表是标准n单形$\mathbf{\Delta}_{[n]}$.

如果我们考虑更一般情形的Yoneda引理，我们有自然同构

$$\hom_{\mathbf{sSet}}(\mathbf{\Delta}_{[n]}, X) \cong X([n]).$$

于是任意给定一个n单形$x \in X([n])$，我们有一个自然变换

$$\mathbf{\Delta}_{[n]} \Rightarrow X$$

与之对应，而它在面映射下的象$d_i(x) \in X([n-1])$则对应于自然态射

$$\mathbf{\Delta}_{[n-1]} \xrightarrow{d^i} \mathbf{\Delta}_{[n]} \Rightarrow X.$$

命题1.3 (稠密性定理)**.** 令$\int X$是单纯集X的元素范畴，则以$\int X$为图的余极限满足

$$\operatorname{colim}_{x\in X_n} \mathbf{\Delta}_{[n]} \cong X.$$

1.2.2　伴随函子

设$\mathcal{D}$是任意上完备（即任意图为小范畴的余极限都存在）的局部小范畴，L是协变函子$\mathcal{D} \to \mathbf{sSet}$，我们希望构造一对左右伴随函子$L : \mathbf{sSet} \to \mathcal{D} : R$并考虑它们的性质.由定义，我们有关于$X \in \operatorname{ob}\mathbf{sSet}$和$B \in \operatorname{ob}\mathcal{D}$都自然的同构

$$\hom_{\mathcal{D}}(L(X), B) \cong \hom_{\mathbf{sSet}}(X, R(B)).$$

任意给定协变函子$F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{D}$，由函子$F$我们可以如下构造右伴随函子$R$，任意给定$\mathcal{D}$中的对象$B$，$R(B)$是单纯集，所有的$n$单形构成集合

$$R(B)_n := \hom_{\mathcal{D}}(F([n]), B),$$

且面映射和边缘映射分别定义为

$$d_i^{[n]} := \hom_{\mathcal{D}}(F(d^i_{[n]}), B)$$

和

$$s_j^{[n]} := \hom_{\mathcal{D}}(F(s^j_{[n]}), B),$$

根据F和hom的函子性，d_i与s_j满足相应的关系，因此$R(B)$是单纯集，即

$$R(B) = \hom_{\mathcal{D}}(F(-), B).$$

于是给定$\mathcal{D}$中的态射$f : B \to D$，那么单纯集之间的态射$R(f) : R(B) \to R(D)$定义为$\hom_{\mathcal{D}}(F(-), f)$.

这样构造的函子R存在一个左伴随$L : \mathbf{sSet} \to \mathcal{D}$，定义为$F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{D}$沿Yoneda嵌入$\mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathbf{sSet}$的左Kan扩张：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "y"'] & \Downarrow & \mathcal{D} \\
& \mathbf{sSet} \arrow[ur, dashed, "L"'] &
\end{tikzcd}.$$

我们尝试具体地把函子L写出来：

首先介绍一个概念余终止(coend)，它是一个特殊的余极限.任意给定集合S和$\mathcal{D}$中的对象B，定义它们的余指数(copower)（或称为张量积(tensor)）为

$$S \otimes B := \coprod_{s \in S} B,$$

于是特别地，对单纯集X和自然数m, n，可以构造

$$X_m \otimes F([n]).$$

给定$\mathbf{\Delta}$中的态射$f : [n] \to [m]$，自然地由F诱导了态射

$$f_* : X_m \otimes F([n]) \to X_m \otimes F([m]),$$

同时由X诱导了态射

$$f^* : X_m \otimes F([n]) \to X_n \otimes F([n]).$$

这给出了下图

$$\begin{tikzcd}
X_m \otimes F([n]) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "f^*"'] & X_m \otimes F([m]) \arrow[d, dashed] \\
X_n \otimes F([n]) \arrow[r, dashed] & \cdot,
\end{tikzcd}$$

当f取遍mor $\mathbf{\Delta}$时，以上给出了

$$\coprod_{f : [n] \to [m]} X_m \otimes F([n]) \overset{f^*}{\underset{f_*}{\rightrightarrows}} \coprod_{[n]}$$

此时，该图的余等值子coeq被称为余终止(coend)，记为

$$\int^{[n]} X_n \otimes F([n]).$$

于是，定义函子$L : \mathbf{sSet} \to \mathcal{D}$为

$$L(X) := \int^{[n]} X_n \otimes F([n]),$$

且对于单纯集之间的态射$f : X \to Y$，态射

$$Lf : X \to Y$$

由余极限的函子性给出.

定理1.4. 如上构造的函子对$L : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathcal{D} : R$是伴随函子对.

Proof. □

1.3 几何实现

之前稠密性定理（命题1.3）说明每个单纯集都是一个余极限，注意这个余极限是在范畴**sSet**中取得的.如果我们在其他的范畴中取这个余极限会得到其他我们想要的对象，有时候这些对象会更加容易理解和计算：

定义. 给定单纯集X，称

$$|X| := \mathrm{colim}_{x \in X_n} |\mathbf{\Delta}_{[n]}|$$

为X的几何实现(geometric realization)，其中$|\mathbf{\Delta}_{[n]}|$是标准n单形Δ^n.

定理1.5. 下列函子对

$$|-| : \mathbf{sSet} \rightleftarrows \mathbf{Top} : S$$

是伴随函子，即存在自然的同构

$$\hom_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \cong \hom_{\mathbf{sSet}}(X, SY).$$

Proof. 定义函子

$$F : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{sSet}$$

□

定理1.6. 对任意单纯集X，$|X|$是CW复形.

1.4 小范畴的神经

这一节我们详细讨论小范畴的神经.在非特别指出的情形下，本小节$\mathcal{C}$都代表一个小范畴.回顾例1.1中的定义，单纯集$N\mathcal{C}$的全体n单形$N\mathcal{C}_n$包含有可连续复合的n个态射，记为$(f_n, \cdots, f_1)$.面映射$d_i^{[n]}$将

$$A_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

映到

$$A_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{f_i\circ f_{i-1}} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n,$$

且在$i=0,n$时映射舍弃A_i和相连的映射.类似地退化映射$s_j^{[n]}$将

$$A_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

映到

$$A_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{j-2}} A_{j-1} \xrightarrow{f_{j-1}} A_j \xrightarrow{f_j} A_j \xrightarrow{f_j} A_{j+1} \xrightarrow{f_{j+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n\text{''}$$

例1.4. 设G是群，那么$\mathbf{B}G$是一个只有一个对象的小范畴.由于$\mathrm{mor}\,\mathbf{B}G=G$，故$N\mathbf{B}G_n=G^n$.注意到$\mathbf{B}G$中态射的复合是群乘法，于是

$$\begin{aligned} d_i: G^n &\to G^{n-1} \\ (g_1,\cdots,g_n) &\mapsto \begin{cases} (g_2,\cdots,g_n) & i=0 \\ (g_1,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_n) & 0<i<n \\ (g_1,\cdots,g_{n-1}) & i=n \end{cases}\end{aligned}$$

（注意到这里函子$\mathbf{B}$对复合的方式产生了影响，因此角标产生了变化）和

$$\begin{aligned} s_j: G^n &\to G^{n+1} \\ (g_1,\cdots,g_n) &\mapsto (g_1,\cdots,g_{j-1},1,g_j,\cdots,g_n). \end{aligned}$$

注意到这里的映射恰是群上同调所需要的映射.

另一方面，我们还有构造$\mathbf{E}G$，其中$\mathrm{ob}\,\mathbf{E}G=G$，$\hom_{\mathbf{E}G}(g,h)=\{x\in G\mid xg=h\}=\{hg^{-1}\}$且态射的复合是群乘法.

二者之间有如下的关系：

1. 存在自然的单纯集投影

$$\begin{aligned} p: N\mathbf{E}G &\to N\mathbf{B}G \\ (g_0,\cdots,g_n) &\mapsto (g_0g_n^{-1},\cdots,g_{n-1}g_n^{-1}). \end{aligned}$$

2. G在$N\mathbf{E}G$上有右作用

$$(g_0,\cdots,g_n)\cdot g=(g_0g,\cdots,g_ng),$$

于是有交换图

$$\begin{tikzcd} N\mathbf{E}G \arrow[rr, "p_*"] \arrow[dr] & & N\mathbf{B}G \\ & N\mathbf{E}G/G. \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

这是最简单的单纯G主丛的例子：

$$\begin{aligned} N\mathbf{E}G\times N\mathbf{B}G &\to N\mathbf{B}G \\ ((g_0,\cdots,g_n),(h_1,\cdots,h_n)) &\mapsto (g_0h_1g_1^{-1},\cdots,g_{n-1}h_ng_n^{-1}). \end{aligned}$$

例1.5. 设X是拓扑空间，$\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$是$X$的一个开覆盖.

例1.6 (Borel构造). 设群G作用在集合X上，我们可以构造该作用的广群（groupoid，这是一个范畴不是一个群）$G\circlearrowright X$：其中ob $G\circlearrowright X=X$，$\hom_{G\circlearrowright X}(x,y)=\{g\in G\mid gx=y\}$且态射的复合是群乘法.于是$NG\circlearrowright X_n=G^n\times X$，面映射和退化映射分别为

$$\begin{aligned}&d_i:G^n\times X\to G^{n-1}\times X\\&(g_1,\cdots,g_n,x)\mapsto\begin{cases}(g_2,\cdots,g_n,x) & i=0\\(g_1,\cdots,g_ig_{i+1},\cdots,g_n,x) & 0<i<n\\(g_1,\cdots,g_{n-1},g_nx) & i=n\end{cases}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&s_j:G^n\times X\to G^{n+1}\times X\\&(g_1,\cdots,g_n,x)\mapsto(g_1,\cdots,g_{j-1},1,g_j,\cdots,g_n,x).\end{aligned}$$

注意$N\mathbf{B}G\cong NG\circlearrowright\{*\}$且$N\mathbf{E}G\cong NG\circlearrowright G$.

例1.7. 设$\mathcal{C}$是一个小范畴，$X:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$是协变函子，于是$X$的元素范畴$\int X$是小范畴.若$\eta:X_1\Rightarrow X_2$是自然变换，则我们可以构造一个函子

$$\int\eta:\int X_1\to\int X_2,$$

将对象(A,x)映到$(A,\eta_A(x))$，将态射$(f:A\to B,\varphi)$映到$(f,\eta_A(\varphi))$.这样对于任意的函子X，我们有

$$\mathcal{C}\xrightarrow{X}\mathbf{Cat}\xrightarrow{N}\mathbf{sSet}\xrightarrow{|-|}\mathbf{Top}.$$

本节的最后我们引入如下自然存在且非常重要的问题：给定一个单纯集X，它是否一定是某个小范畴的神经？如果不一定，在何时我们可以断定X是一个小范畴的神经？这个问题我们留到下一节回答，这需要更多的工具来进行讨论.

1.5 子单纯集

在完成了许多关于单纯集的讨论，一个自然的想法是我们希望研究单纯集的子结构.按照代数中通常对于子结构的定义，比较自然的，若Y是单纯集X的子单纯集，那么对于每个自然数n，Y_n都需要是X_n的子集，并且我们希望Y所给定态射都是完全由X给定的态射决定——对任意$f:[n]\to[m]$，$X(f)$在Y_n的限制就是$Y(f)$.后一个条件就是在说范畴$\mathbf{\Delta}$作用在Y上是封闭的.通常，我们并不直接给出一个单纯子集，一般情况下我们给出一族称为*生成元*(generator)的态射，称包含它们的最小X的子单纯集为这族态射生成的子单纯集.

定义. 给定自然数$0\le i\le n$，标准n单形$\mathbf{\Delta}_{[n]}$由$d^i_{[n]}:\mathbf{\Delta}_{[n-1]}\to\mathbf{\Delta}_{[n]}$生成的子集被称为$\mathbf{\Delta}_{[n]}$的第$i$面($i$-th face)，记为$\partial_i\mathbf{\Delta}_{[n]}$，即

$$\partial_i\mathbf{\Delta}_{[n]}\cong:\mathbf{\Delta}_{[n-1]}\xrightarrow{d^i_{[n]}}\mathbf{\Delta}_{[n]}.$$

几何上，n单形的第i面就是标号为i的点相对的第i个坐标为0的面.如果我们将所有的面组合起来，几何上这是一个n维球面，对单纯集的这样操作将得到单纯球面：

定义. 标准n单形$\mathbf{\Delta}_{[n]}$由$\{d^i_{[n]} : \mathbf{\Delta}_{[n-1]} \to \mathbf{\Delta}_{[n]} \mid 0 \le i \le n\}$生成的子单纯集称为标准单纯$n$球面(standard simplicial n-sphere)，记为$\partial\mathbf{\Delta}_{[n]}$，即

$$\partial\mathbf{\Delta}_{[n]} = \bigcup_{0\le i\le n} \partial_i \mathbf{\Delta}_{[n]}.$$

练习1.4. 求证：

1. $\partial\mathbf{\Delta}_{[n]} = \operatorname{colim}_{\mathbf{\Delta}_{[n-2]} \xrightarrow{d^i_{[n-1]}} \mathbf{\Delta}_{[n-1]}} \mathbf{\Delta}_{[n-1]} \xrightarrow{d^i_{[n]}} \mathbf{\Delta}_{[n]}$.
2. 任取$k < n$，则$\partial\mathbf{\Delta}_{[n]}([k]) = \hom_{\mathbf{\Delta}}([k],[n])$.

更一般地，单纯集X的单纯n球面是单纯集间的映射$\partial\mathbf{\Delta}_{[n]} \to X$.如果几何球面去掉一个面，我们将得到一个可缩的有界闭集.对应到单纯集则是

定义. 标准n单形$\mathbf{\Delta}_{[n]}$由$\{d^i_{[n]} : \mathbf{\Delta}_{[n-1]} \to \mathbf{\Delta}_{[n]} \mid 0 \le i \le n, i \ne k\}$生成的子单纯集称为标准单纯角(standard simplicial horn)，记为$\mathbf{\Lambda}^k_{[n]}$，即

$$\mathbf{\Lambda}^k_{[n]} = \bigcup_{0\le i\le n, i\ne k} \partial_i \mathbf{\Delta}_{[n]}.$$

练习1.5. 求证：

1. $\mathbf{\Lambda}^k_{[n]} = \operatorname{colim}_{\mathbf{\Delta}_{[n-2]} \xrightarrow{d^i_{[n-1]}} \mathbf{\Delta}_{[n-1]}} \mathbf{\Delta}_{[n-1]} \xrightarrow{d^i_{[n]}} \mathbf{\Delta}_{[n]}$.
2. 任取$j < n-1$，则$\mathbf{\Lambda}^k_{[n]}([j]) = \hom_{\mathbf{\Delta}}([j],[n])$，且$\mathbf{\Lambda}^k_{[n]}([n-1]) = \hom_{\mathbf{\Delta}}([n-1],[n]) - \{d^k\}$.

更一般地，单纯集X的单纯角是单纯集间的映射$\mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \to X$.值得注意的是，对任意的自然数$n$和$0 \le k \le n$我们有自然的嵌入映射$\mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \hookrightarrow \partial\mathbf{\Delta}_{[n]}$.这样我们可以引入一个关于单纯集的特殊性质——角填充(horn filling)，我们特别关心具有一定角填充性质的单纯集.

定义. 单纯集X若具有角填充性质，即对任意自然数n和$0 \le k \le n$，给定单纯映射$f : \mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \to X$，存在（但不要求唯一）$\tilde{f} : \partial\mathbf{\Delta}_{[n]} \to X$使得图

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X \\
\partial\mathbf{\Delta}_{[n]} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

交换，则称X为Kan复形(Kan complex).

引理1.3. *若X是拓扑空间，则它的奇异复形SX（例1.2）是Kan复形.*

Kan复形在同伦理论当中有重要的作用.

定义. 单纯集X若具有内角填充性质，即对任意自然数n和$0 < k < n$，给定单纯映射$f : \mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \to X$，存在（但不要求唯一）$\tilde{f} : \partial\mathbf{\Delta}_{[n]} \to X$使得图

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X \\ \partial\mathbf{\Delta}_{[n]} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

交换，则称X为拟范畴(quasi-category)或无穷范畴(infinity category,∞-category).

我们从另一个角度来考虑，设$\mathcal{C}$是一个范畴，$M \subseteq \operatorname{mor}\mathcal{C}$是一类$\mathcal{C}$的态射，若态射$f : A \to B$满足对任意$M$中的态射$g : C \to D$，都存在态射$h : C \to A$和$k : D \to B$使得有态射$\varphi : D \to A$满足交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & C \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ B & D, \arrow[l, "k"] \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

则称f具有右对于M的右提升性质(right lifting property with respect to M).于是，无穷范畴的定义是说单纯集X满足它关于单点单纯集$*$的投影对于内角包含态射$i^k_{[n]} : \mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \hookrightarrow \mathbf{\Delta}_{[n]}, 0 < k < n$有右提升性质.而$i^k_{[n]}$诱导了

$$\begin{tikzcd} \hom_{\mathbf{sSet}}(\mathbf{\Delta}_{[n]}, X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \hom_{\mathbf{sSet}}(\mathbf{\Lambda}^k_{[n]}, X) \arrow[d, "="] \\ X([n]) = X_n \arrow[r, "(i^k_{[n]})^*"] & \mathbf{\Lambda}^k_{[n]}(X), \end{tikzcd}$$

定义又等价于诱导的$(i^k_{[n]})^*$是满射.

定理1.7 (Joyal)**.** *设**QuasiCat**是**sSet**中由无穷范畴组成的满子范畴，那么**QuasiCat**上有自然的模型范畴结构.*

例1.8. 设$\mathcal{C}$是任意局部小？范畴，则它的神经$N\mathcal{C}$是一个无穷范畴.并且，这样得到的无穷范畴具有特别的性质——它的内角填充都是唯一的，或者说之前讨论的映射$(i^k_{[n]})^*$是单射.

第二章　模型范畴

定义. 设$\mathcal{C}$是范畴，我们有$\mathcal{C}$中的态射族W, Fib和Cof，分别被称为弱等价（weak equivalence, $\xrightarrow{\sim}$）、纤维（fibration, $\twoheadrightarrow$）和余纤维（cofibration, $\hookrightarrow$）满足：

CM 1. $\mathcal{C}$是（有限）完备和余完备的，

CM 2. 若态射f是g的收缩[1]，则若g属于态射族W, Fib或Cof，则f也属于相同的态射族，

CM 3. f, g和$g\circ f$中任意两个是弱等价则第三个也是弱等价，

CM 4. 任给定交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\ X \arrow[r, "g"'] \arrow[ur, dashed, "h"] & B, \end{tikzcd}$$

其中i是余纤维p是纤维，且要么i要么p是一个弱等价，则存在提升$h : C \to B$使整个图交换，

CM 5. 任意$\mathcal{C}$中的态射$f : A \to B$都有分解$f = q\circ i = p\circ j$，其中p, q是纤维，i, j是余纤维，i, p是弱等价，

则称范畴$\mathcal{C}$是模型范畴(model category).

若p既是纤维又是弱等价，则称p是零调纤维(acyclic fibration)或平凡纤维(trivial fibration)，对偶地若i既是余纤维又是弱等价，则称p是零调余纤维(acyclic cofibration)或平凡余纤维(trivial cofibration).

由于模型范畴$\mathcal{C}$是（有限）完备和余完备的，故存在始对象$\emptyset$和终对象$\{*\}$.若$\mathcal{C}$中的对象A满足$\emptyset \to A$是余纤维，则称A是余纤维的(cofibrant).任取$\mathcal{C}$中的对象A，于是由公理CM5，存在对象P使得$\emptyset \to A = \emptyset \to P \to A$且$P \to A$是零调余纤维，则称$P$是$A$的余纤维替代(cofibrant replacement).对偶地，也有纤维对象和纤维替代.

更准确地讲，上述定义的模型范畴是闭模型范畴(closed model category)，它在下述意义下是闭的，即零调纤维（对应的零调余纤维）和余纤维（对应的纤维）相互决定：

引理2.1. *设$\mathcal{C}$是模型范畴，那么如下论断成立：*

1. 映射$i : A \to X$是余纤维当且仅当它对所有的零调纤维满足左提升性质.

2. 映射$i : A \to X$是零调余纤维当且仅当它对所有的纤维满足左提升性质.

3. 映射$p : E \to B$是纤维当且仅当它对所有的零调余纤维满足右提升性质.

4. 映射$p : E \to B$是零调纤维当且仅当它对所有的余纤维满足右提升性质.

Proof. □

引理2.1自然地推出

命题2.1. 在一个模型范畴中,

1. 余纤维和零调余纤维都对复合和推出封闭，特别地，任意同构都是余纤维.

2. 纤维和零调纤维都对复合和拉回封闭，特别地，任意同构都是纤维.

事实上，Quillen最初对模型范畴的定义并不是这里的定义，

定义. 设$\mathcal{C}$是模型范畴，A是$\mathcal{C}$中的对象.对余对角线$\nabla : A \coprod A \to A$，CM5说明它可以分解为

$$\begin{tikzcd} A \coprod A \arrow[d, hook, "i_1+i_2"'] \arrow[dr, "\nabla"] & \\ A \times I \arrow[r, two heads, "\sim"] & A, \end{tikzcd}$$

其中$i : A \coprod A \to A \times I$是余纤维，$A \times I \twoheadrightarrow A$是零调余纤维，称$A \times I$是对象$A$的柱对象(cylinder object).给定两个态射$f, g : A \rightrightarrows B$，若存在$A$的柱对象到$B$的态射$H$满足图

$$\begin{tikzcd} A \coprod A \arrow[d, hook, "i_1+i_2"'] \arrow[dr, "f+g"] & \\ A \times I \arrow[r, "H"] & B, \end{tikzcd}$$

交换，则称f左同伦于g，H是f, g的左同伦(left homotopy).

注意在以上定义中，$A \times I$并不表示两个对象的积，$i_1 + i_2$也不表示两个态射的和，它们只是存在的某个对象和态射的记号.

定义. 设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$是模型范畴，若伴随函子对

$$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$$

第三章　单纯代数

3.1　单纯模的同伦群

如同先前的定义，给定一个交换环R，一个单纯环是函子

$$A_*:\mathbf{\Delta}^\circ\to R-\mathbf{Algebras},$$

具体来说，这个函子给定了一族R代数$A_n=A([n])$，且存在R代数同态

$$d_i^{[n]}:A_n\to A_{n-1}$$

和

$$s_j^{[n]}:A_n\to A_{n+1}$$

满足相应的单纯关系.

例3.1. 任意给定一个交换环R，我们有自然存在的单纯R代数$s(R)_*$，其中对任意n，$s(R)_n:=R$，$d_i^{[n]}=s_j^{[n]}=\mathrm{id}_R$.

定义. 给定单纯代数A_*，则一个A_*模(A_*-module)是一个单纯对象V_*，其中$V([n])$是一个A_n模，存在同态

$$d_i^{[n]}:V_n\to V_{n-1}$$

和

$$s_j^{[n]}:V_n\to V_{n+1}$$

满足相应的单纯关系，且与A_*的单纯结构相容，具体说来，对于任意$a\in A_n$和$v\in V_n$，$d_i^{V_{[n]}}(av)=d_i^{A_{[n]}}(a)d_i^{V_{[n]}}(v)$且$s_j^{V_{[n]}}(av)=s_j^{A_{[n]}}(a)s_j^{V_{[n]}}(v)$.

例3.2. 类似于例3.1，任意给定一个R模V，都存在自然的单纯$s(R)_*$模$S(V)_*$，其中对任意n，$s(V)_n:=V$，$d_i^{[n]}=s_j^{[n]}=\mathrm{id}_V$.

考虑给定一个单纯$s(R)_*$模V_*，我们有一个R模复形$N(V_*)_\bullet$

$$N(V_*)_n:=\begin{cases}0 & n\le 0\\ \bigcap_{i=1}^n \mathrm{Ker}\ d_i^{[n]} & n\ge 1\end{cases},$$

且边缘映射$\partial_n := d_0^{[n]}$.这个复形称为V_*的正规化(normalization).（另一种正规化的构造我们还可以考虑取前n项核的交集，边缘映射取最后一个面映射.）

除了正规化还存在其他的方法，对一个给定的单纯$s(R)_*$模V_*，还可以构造一个对应的R模复形$V_\bullet$，满足$V_n = V_n$，边缘映射

$$\partial_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^{[n]}.$$

虽然两种方式给出的链并不相同，但这两个链是拟等价的——它们具有相同的同调.

引理3.1. 设R是交换环，给定一个单纯$s(R)_*$模V_*，那么

$$H_n(V_\bullet) \cong H_n(N(V_*)_\bullet)$$

对所有n成立，我们称这个群为V_*的第n阶同伦群*(the n-th homotopy group)*，记为$\pi_n(V_*)$.

Proof. 我们将证明

$$V_\bullet \cong N(V_*)_\bullet \oplus X_\bullet,$$

其中$X_\bullet$是一个零调单纯$s(R)_*$模，于是引理自然是该结论的推论. □

练习3.1. 设R是交换环，S是R代数，那么$N(s(S)) = S$.

练习3.2. 给定交换环R和单纯R代数A_*，且设V_*是单纯A_*模.证明$N(V_*)_n, \mathrm{Ker}\,\partial_n, \mathrm{Im}\,\partial_{n+1}$都是$V_n$的$A_n$子模.

定义. 单纯R代数间的态射(morphism)$\varphi_* : A_* \to B_*$是一族态射$\varphi_n : A_n \to B_n$，满足

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{d_i^{A_n}} & A_{n-1} \\ {\scriptstyle\varphi_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{n-1}} \\ B_n & \xrightarrow{d_i^{B_n}} & B_{n-1}. \end{array}$$

和

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{s_j^{A_n}} & A_{n+1} \\ {\scriptstyle\varphi_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{n+1}} \\ B_n & \xrightarrow{s_j^{B_n}} & B_{n+1}. \end{array}$$

对于任意i, j都成立.

若$\varphi_* : A_* \to B_*$是单纯代数之间的态射，那么我们有自然的R模的态射

$$\pi_*(\varphi) : \pi_*(A) \to \pi_*(B),$$

或者更准确地说π是一个函子$s(R - \mathbf{Algebras}) \to R - \mathbf{Mod}$.

若$\varphi_* : A_* \to B_*$诱导的R模态射$\pi_*(\varphi)$都是同构，则称φ是弱等价(weak equivalence).

定义. 给定交换环R和单纯R代数A_*，V_*, W_*是A_*模，定义A_*模$V_* \otimes_{A_*} W_*$满足

$$(V_* \otimes_{A_*} W_*)_n := V_n \otimes_{A_n} W_n$$

对任意$n \geq 0$都成立，且面映射和退化映射分别由V_*, W_*诱导.称$V_* \otimes_{A_*} W_*$为V_*与W_*的张量积(tensor product).

3.2 Dold-Kan对应

3.3 单纯消解

定义. 给定交换环R和单纯R代数A_*，且$X = \{X_n\}_{n\geq 0}$是一族未定元.若单纯R代数$A[X]_*$满足

1. $A[X]_n$是$A_n[X_n]$，即A_n上的以X_n为未定元的多项式环，
2. 对任意的j, n，$s_j^{A[X]_n}(X_n) \subseteq X_{n+1}$，
3. 嵌入映射$A_* \hookrightarrow A[X]_*$是单纯$R$代数同态，

则称$A[X]_*$是A_*的自由单纯扩张(free simplicial extension).

引理3.2. *若R是交换环，A_*是单纯R代数，P_*是A_*的自由单纯扩张，若$\varphi : A_* \to B_*$是单纯态射，则$B_* \otimes_{A_*} P_*$是B_*的自由单纯扩张.*

命题3.1. *单纯R代数间的态射$\varphi_* : A_* \to B_*$是余纤维当且仅当它是某个自由扩张的收缩.*

定义. 设$\varphi : A_* \to B_*$是单纯R代数的态射，那么φ的一个单纯消解(simplicial resolution)是如下一个分解

$$A_* \hookrightarrow P_* \xrightarrow{\psi} B_*$$

满足复合是φ，$A_* \hookrightarrow P_*$是A_*的自由单纯扩张，ψ是单纯满态射，且是一个弱等价.通常，我们也称P_*是B_*在A_*上的单纯消解(simplicial resolution of B_* over A_*).

定理3.2. 若R是交换环，A_*, B_*, C_*是单纯R代数，P_*是A_*的自由单纯扩张，若$\varphi : A_* \to B_*$是单纯态射，$\psi : B_* \to C_*$是满态射且是弱等价，那么存在提升$\kappa : P_* \to B_*$使得下图

$$\begin{tikzcd} A_* \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B_* \arrow[d, "\psi"] \\ P_* \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\kappa"] & C_* \end{tikzcd}$$

交换.

给定一个单纯消解$A_* \hookrightarrow P_*$，我们可以构造

$$A[X,X]_* := A[X]_* \otimes_{A_*} A[X]_*,$$

这个单纯R代数.它在如下意义是具有函子性的：给定单纯代数的态射

$$\varphi, \psi : A[X]_* \to B_*,$$

我们可以构造新的单纯态射

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi : A[X,X]_* &\to B_* \\ x \otimes y &\mapsto \varphi(x)\psi(y). \end{aligned}$$

定义. 给定交换环R、单纯R代数A_*和单纯消解$A_* \hookrightarrow A[X]_*$，设$A[X,X,Y]_*$是$A[X]_*$在$A[X,X]_*$上的单纯消解，则称$A[X,X,Y]_*$是$A_*$代数$A[X]_*$的柱对象(cylinder object).若给定的态射$\varphi, \psi : A[X]_* \to B_*$可以构造交换图

$$\begin{tikzcd} A[X,X]_* \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi\otimes\psi"'] & A[X,X,Y]_* \arrow[d] \\ & B_*, \end{tikzcd}$$

则称φ和ψ同伦(homotopic)，记为$\varphi \simeq \psi$.

这里同伦的定义完全同于拓扑中同伦的定义——R代数范畴中的余积就是张量积，因而这个图恰好对应于拓扑空间组成范畴的同伦的定义图.

定理3.3 (提升的唯一性)**.**

推论3.3.1 (消解的唯一性).

练习3.3. 这个习题证明对于任意单纯R代数A_*，存在它的自由扩张.

任取正自然数n，令$w\in A_{n-1}$满足它在$N(A_*)_{n-1}$是闭链，即$d_0^{[n-1]}(w)=0$

我们来具体构造任意给定单纯R代数$f:A_*\to B_*$的单纯消解.具体的想法是这样的：

定义. 设R是环，对于集合S，记$R[S]$为S中元素生成的R多项式环.给定环同态$f:R\to S$，令$P_0:=R[S]$，且当$n\geq 1$时，

$$P_n:=R[P_{n-1}].$$

定义s 称P_*为$f:R\to S$的标准消解(standard resolution).

例3.3. 给定R代数$\varphi:R[x]\to R,x\mapsto 0$，将它自然地看为单纯代数的同态，那么如下构造的复形给出了f的单纯消解：令

$$P_n:=R[x]\otimes_R\left(\bigotimes_{i=1}^n R[x]\right),$$

记P_n在$R[x]$的生成元为$x_{n,1}=1\otimes x\otimes\cdots\otimes 1,\cdots,x_{n,n}=1\otimes 1\otimes\cdots\otimes x$.构造面映射和退化映射分别为

$$d_i^{[n]}(f(x)\otimes g_1(x)\otimes\cdots\otimes g_n(x)):=\begin{cases} f(x)g_1(x)\otimes\cdots\otimes g_n(x) & i=0\\ f(x)\otimes g_1(x)\otimes\cdots\otimes g_i(x)g_{i+1}(x)\otimes\cdots\otimes g_n(x) & 1\leq i\leq n-1\\ f(x)\varphi(g_n(x))\otimes g_1(x)\otimes\cdots\otimes g_{n-1}(x) & i=n\end{cases}$$

和

$$s_i^{[n]}(f(x)\otimes g_1(x)\otimes\cdots\otimes g_n(x)):=\begin{cases} f(x)\otimes 1\otimes g_1(x)\otimes\cdots\otimes g_n(x) & i=0\\ f(x)\otimes g_1(x)\otimes\cdots\otimes g_i(x)\otimes 1\otimes g_{i+1}(x)\otimes\cdots\otimes g_n(x) & 1\leq i\leq n-1\\ f(x)\otimes g_1(x)\otimes\cdots\otimes g_n(x)\otimes 1 & i=n,\end{cases}$$

不难看出这是一个单纯R代数，是$R[x]$的单纯扩张.接下来验证这是一个单纯消解，即要验证$P_*\to R$是弱等价.

构造如下$R[x]$模复形$K(x)$：

$$R[x]\xleftarrow{x}R[x]\leftarrow 0,$$

我们要验证这个复形与P_*同伦.考虑

$$\begin{tikzcd} R[x] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & R[x] \arrow[l, "x"'] \arrow[d, "x\otimes-"] & 0 \arrow[l] \arrow[d] \\ R[x] & P_1 \arrow[l] & P_2, \arrow[l] \end{tikzcd}$$

练习3.4. 设R是交换环，$A\to B,C\to D$是R代数同态，且A,B作为R模是平坦的.求证若P_*,Q_*是$A\to B$和$C\to D$的单纯消解，那么$P_*\otimes_R Q_*$是$A\otimes_R C\to B\otimes_R D$的单纯消解.

例3.4. 设r是交换环R的非零因子，$S := R/(r)$且$p : R \to S$是自然投射.考虑交换图

$$\begin{tikzcd} R[x] \arrow[r, "x\mapsto 0"] \arrow[d, "x\mapsto r"'] & R \arrow[d] \\ R \arrow[r] & S = R \otimes_{R[x]} R, \end{tikzcd}$$

这是因为$\mathrm{Ker}(x \mapsto 0) = (x), \mathrm{Ker}(x \mapsto r) = (x - r)$，于是

$$R \otimes_{R[x]} R = R[x]/((x - r) + (x)) = R/(r) = S.$$

设P_*是$R[x] \xrightarrow{x\mapsto 0} R$的单纯消解，令

$$\begin{tikzcd} R[x] \arrow[r] \arrow[d, "x\mapsto r"'] & P_* \arrow[d] \\ R \arrow[r] & Q_* := R \otimes_{R[x]} P_*, \end{tikzcd}$$

根据基变换Q_*是R的自由扩张.对

$$R[x] \to P_* \to R$$

做函子$R \otimes_{R[x]} -$，其中$R[x] \to R$定义为$x \mapsto r$，那么有态射

$$R \to Q_* \to S,$$

于是Q_*是$R \to S$的单纯消解.

我们具体将Q_*写出来.按照定义，

$$\begin{aligned} Q_n &:= R \otimes_{R[x]} P_n = R \otimes_{R[x]} R[x, x_1, \cdots, x_n] = R[x]/(x - r) \otimes_{R[x]} R[x, x_1, \cdots, x_n] \\ &= R[x, x_1, \cdots, x_n]/(x - r) = R[x_1, \cdots, x_n], \end{aligned}$$

并且

$$d_i^{[n]} : Q_n \to Q_{n-1} = \mathrm{id} \otimes d_i^{[n]}$$

将$t \otimes f(x) \otimes g(x_1, \cdots, x_n)$映到

$$\begin{cases} f(x)g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_n(x) & i = 0 \\ f(x) \otimes g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_i(x)g_{i+1}(x) \otimes \cdots \otimes g_n(x) & 1 \leq i \leq n-1 \\ f(x)\varphi(g_n(x)) \otimes g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_{n-1}(x) & i = n \end{cases}$$

由于P_*的正规化同伦于

$$0 \leftarrow R[x] \xleftarrow{x} R[x] \leftarrow 0,$$

故Q_*的正规化同伦于

$$0 \leftarrow R \xleftarrow{r} R \leftarrow 0,$$

于是$\pi_0(Q_*) = S$，$\pi_1(Q_*) = (0 : r) = 0$.

命题3.4. 若R是交换环，S是R代数，M是R模，$R \hookrightarrow P_* \to S$是单纯消解，那么

$$\pi_n(P_* \otimes_R M) \cong \mathrm{Tor}_n^R(S, M).$$