几何中的向量丛

G.Li

1 流形的切丛

给定一个 n 维的微分流形 M，有光滑函数层 $C^\infty(-)$，进而可以定义一点 x 的光滑函数芽

$$C_x^\infty := \mathrm{colim}_{x\in U} C^\infty(U),$$

由于流形的局部完全由 $\mathbb{R}^n$ 中的开集决定，且可以选取足够小的的邻域而不改变光滑函数芽. 点 x 上的一个切向量是一个 $\mathbb{R}$ 线性映射

$$v : C_x^\infty \to \mathbb{R}$$

满足 Leibnitz 定律

$$v(f\cdot g) = v(f)g(x) + f(x)v(g).$$

例如，对 M 上过点 x 的可微曲线 $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \to M$（满足 $\gamma(0) = x$），

$$v(f) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(f\circ\gamma(t))\right|_{t=0}$$

是切向量. 切向量实际是方向导数.

一点 $x \in M$ 上的所有切向量组成的集合有自然的 $\mathbb{R}$ 线性空间结构，称这个空间为 M 在点 x 的切空间，记为 T_xM. 切空间 T_xM 的维数恰好等于流形 M 的维数，这因为可以选取 x 附近充分小的邻域 $(U, x^1, \cdots, x^n)$ 使得对应到 $\mathbb{R}^n$ 中是一个球 $B(0, \epsilon)$，如前例子取 M 中的曲线

$$\gamma_j : (-\epsilon, \epsilon) \to M, 1 \le j \le n,$$

满足 $x^i(\gamma_j(t)) = \delta^i_j t$，其中 δ^i_j 是 Kroneker 记号. 定义

$$\frac{\partial}{\partial x^j} := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\circ\gamma_j(t))\right|_{t=0},$$

这些构成了 T_xM 的一组基.T_xM 的对偶空间称为余切空间，它的对偶基记为 $\{\mathrm{d}x_i\}_{1\le i\le n}$，任给定一个函数 $f \in C_x^\infty$，都有余切向量 $\mathrm{d}f$ 满足

$$\left\langle \mathrm{d}f, \frac{\partial}{\partial x^j}\right\rangle = \mathrm{d}f\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial x^j}f.$$

给定光滑流形间的光滑映射 $\varphi : M \to N$，自然诱导了一个映射

$$\begin{aligned}\varphi^* : C^\infty_{\varphi(x)} &\to C_x^\infty\\ f &\mapsto f\circ\varphi,\end{aligned}$$

于是这自然可以称为一个映射

$$\begin{aligned} \varphi_* : T_xM &\to T_{\varphi(x)}N \\ v &\mapsto v(- \circ \varphi), \end{aligned}$$

该映射称为切映射.

定理 1.1. 设 M 是 n 维光滑流形，令

$$TM := \coprod_{x \in M} T_xM$$

是 M 上的切向量的全体，那么存在 TM 上的拓扑和光滑结构使得 TM 是一个 $2n$ 维光滑流形.

证明. 按定义，TM 中的点是形如 (x, v) 的配对，其中 $x \in M$，$v \in T_xM$. 定义映射

$$\begin{aligned} \pi : TM &\to M \\ (x, v) &\mapsto x, \end{aligned}$$

这样对于任意一点 $x \in M$，$\pi^{-1}(x) = T_xM$.

假定 M 的光滑结构是 $\{(U_\lambda, \varphi_\lambda : U_\lambda \to \mathbb{R}^n)\}_{\lambda \in \Lambda}$，考虑

$$\pi^{-1}(U_\lambda) = \bigcup_{x \in U_\lambda} T_xM,$$

于是 $TM = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \pi^{-1}(U_\lambda)$. 借助 φ_λ，我们给定局部的同胚

$$\psi_\lambda : U_\lambda \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_\lambda)$$

满足对于 $x \in U_\lambda, y = (y^1, \cdots, y^n) \in \mathbb{R}^n$，

$$\psi_\lambda(x, y) = \sum_{i=1}^n y^i \left. \frac{\partial}{\partial x_\lambda^i} \right|_x$$

其中 $x_\lambda^i = (\varphi_\lambda)^i, i = 1, \cdots, n$ 是 U_λ 上由坐标映射 φ_λ 给出的局部坐标系. 很明显这个映射是集合上的双射.

借助局部的乘积空间，可以给出 TM 一个拓扑结构. 考虑 TM 中的子集族

$$\mathcal{B} := \{\psi_\lambda(W) \mid W\text{是}U_\lambda \times \mathbb{R}^n\text{中的开集}\},$$

这可以构成 TM 的一个拓扑基: 首先 $\{(U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ 是 M 的一个开覆盖, 因此 $\mathcal{B}$ 是 TM 的开覆盖; 接下来还需要验证对任意 $(x, v) \in TM$, 若有 $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ 使得 $(x, v) \in B_1 \cap B_2$ 则有 $B \in \mathcal{B}$ 满足 $(x, v) \in B \subseteq B_1 \cap B_2$. 由于 $U_\lambda \times \mathbb{R}^n$ 具有乘积拓扑结构, 因而可以找到 U_λ, U_μ 中的开集 D_1, D_2 和 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 V_1, V_2 使得 $\psi_\lambda(D_1 \times V_1) \subseteq B_1, \psi_\mu(D_2 \times V_2) \subseteq B_2$，这样只要证明存在某个 U_ν 中的开集 D 和 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 V 使得

$$(x, v) \in \psi_\nu(D \times V) \subseteq \psi_\lambda(D_1 \times V_1) \cap \psi_\mu(D_2 \times V_2),$$

如此可得到 TM 上的拓扑，并且这是一个第二可数的 Hausdorff 空间.

在上述假定下，

$$x = \pi(x, v) \in D_1 \cap D_2 \subseteq U_\lambda \cap U_\mu$$

且

$$v=\sum_{i=1}^{n}y^i\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\bigg|_x=\sum_{i=1}^{n}\tilde{y}^i\frac{\partial}{\partial x_\mu^i}\bigg|_x=\sum_{i,j=1}^{n}\tilde{y}^j\frac{\partial x_\lambda^i}{\partial x_\mu^j}(\varphi_\lambda(x))\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\bigg|_x,$$

其中 $(y^1,\cdots,y^n)\in V_1$，$(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n)\in V_2$，因此它们之间有关系式

$$y^i=\sum_{i=1}^{n}\tilde{y}^i\frac{\partial x_\lambda^i}{\partial x_\mu^j},$$

$\frac{\partial x_\lambda^i}{\partial x_\mu^j}$ 是光滑流形 M 从局部坐标系 (U_λ,x_λ^i) 到 (U_μ,x_μ^i) 的坐标变换 Jacobi 矩阵.

考虑映射 $\Phi_{\lambda,\mu}:(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n\subseteq U_\mu\times\mathbb{R}^n\to(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n\subseteq U_\lambda\times\mathbb{R}^n$ 使得

$$\Phi_{\lambda,\mu}(x,(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n))=(x,(y^1,\cdots,y^n)),$$

其中 $(y^1,\cdots,y^n)$ 与 $(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n)$ 服从之前计算的关系式，因此 y^i 是关于 $x,\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n$ 的光滑函数. 由于

$$\det\frac{\partial x_\lambda^i}{\partial x_\mu^j}\neq 0,$$

所以 $\Phi_{\lambda,\mu}$ 有逆映射 $\Phi_{\mu,\lambda}=\Phi_{\lambda,\mu}^{-1}$，且它也是光滑的，这意味着 $\Phi_{\lambda,\mu}:(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n\to(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n$ 是光滑同胚. 由定义可知

$$\psi_\lambda\circ\Phi_{\lambda,\mu}\circ\psi_\mu^{-1}=\mathrm{id}:\pi^{-1}(U_\lambda\cap U_\mu)\to\pi^{-1}(U_\lambda\cap U_\mu),$$

即有交换图

$$\begin{tikzcd} U_\mu\times\mathbb{R}^n \arrow[rr, "\Psi_{\lambda,\mu}"] \arrow[dr, "\psi_\mu"'] & & U_\lambda\times\mathbb{R}^n \arrow[dl, "\psi_\lambda"] \\ & \pi^{-1}(U_\lambda\cap U_\mu). & \end{tikzcd}$$

在先前的设定下不妨取 $D_1=D_2=D_1\cap D_2$，由于 $\Psi_{\lambda,\mu}(D_2\times V_2)$ 是 $U_\lambda\times\mathbb{R}^n$ 的开集，并且 $\Phi_{\lambda,\mu}\circ\psi_\mu^{-1}(x,v)=\psi_\lambda^{-1}(x,v)\in D_1\times V_1$，所以开集 $\Phi_{\lambda,\mu}(D_2\times V_2)$ 与开集 $D_1\times V_1$ 相交非空，因此存在点 $\Phi_{\lambda,\mu}\circ\psi_\mu^{-1}(x,v)=\psi_\lambda^{-1}(x,v)$ 在开集 $\Phi_{\lambda,\mu}(D_2\times V_2)\cap D_1\times V_1$ 中的邻域 $D\times V$，其中 D 是 U_λ 的开子集，V 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集. 这样 $\psi_\lambda(D\times V)\in\mathcal{B}$ 且

$$(x,v)\in\psi_\lambda(D\times V)\subseteq\psi_\mu(D_2\times V_2)\cap\psi_\lambda(D_1\times V_1),$$

于是 $\mathcal{B}$ 是 TM 的拓扑基.

事实上，在 TM 上建立拓扑的直观意义很明确，在给定两个邻近的切向量 $(x_1,v_1),(x_2,v_2)$ 时，首先它们的起点 x_1,x_2 是邻近的，因而可以落在同一个坐标邻域内，于是经过坐标变换 v_1,v_2 可以在同一个坐标系内表示出来. 那么，切向量 $(x_1,v_1),(x_2,v_2)$ 相互邻近的第二个要求就是当它们在同一个坐标系内表示出来时，分量的差别很小. 这就是这里给定的拓扑.

接下来再建立微分结构. 如前所述，$\{\pi^{-1}(U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ 构成了 TM 的一个开覆盖，对每个指标 $\lambda\in\Lambda$，定义映射

$$\begin{aligned}\xi_\lambda:\pi^{-1}(U_\lambda)&\to\mathbb{R}^{2n}\\ \sum_{i=1}^{n}y^i\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_x&\mapsto(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n,y^1,\cdots,y^n).\end{aligned}$$

这样 ξ_λ 是从 $\pi^{-1}(U_\lambda)$ 到 $\mathbb{R}^{2n}$ 中的开集 $\varphi_\lambda(U_\lambda)\times\mathbb{R}^n$ 的同胚，因此 $(\pi^{-1}(U_\lambda),\xi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ 是 TM 的一个坐标卡，使得它成为一个拓扑流形. 如此，还需要证明坐标卡是 C^∞ 相关的. 注意到 $\pi^{-1}(U_\lambda)$ 与 $\pi^{-1}(U_\mu)$ 相交非空的充要条件是 $U_\lambda\cap U_\mu\neq\emptyset$，此时坐标变换

$$\xi_\mu\circ\xi_\lambda^{-1}:\varphi_\lambda(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n\to\varphi_\mu(U_\lambda\cap U_\mu)\times\mathbb{R}^n$$

由下式给出

$$(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n,y^1,\cdots,y^n)\mapsto(x_\mu^1,\cdots,x_\mu^n,\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n),$$

其中 $x_\mu^i=(\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1})^i(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n)$，且

$$\tilde{y}^i=\sum_{i=1}^n y^i\frac{\partial x_\mu^i}{\partial x_\lambda^j}.$$

这样，$x_\mu^i,\tilde{y}^i$ 都是 x_λ^i,y^i 的光滑函数，因此 TM 是光滑流形. □

注意到在 TM 的这个光滑结构下，映射 $\pi:TM\to M$ 限制在局部坐标 $\pi^{-1}(U)$ 上的表达式为

$$\varphi_\lambda\circ\pi\circ\xi_\lambda^{-1}(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n,y^1,\cdots,y^n)=(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n),$$

于是 π 是光滑映射. 另外，

$$\xi_\lambda\circ\psi_\lambda(x,(y^1,\cdots,y^n))=\xi_\lambda\left(\sum_{i=1}^n y^i\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\bigg|_x\right)=(x_\lambda^1,\cdots,x_\lambda^n),$$

所以 $\psi_\lambda:U_\lambda\times\mathbb{R}^n\to\pi^{-1}(U_\lambda)$ 是光滑同胚. 同时该光滑同胚满足对所有的 $(x,y)\in U_\lambda\times\mathbb{R}^n$，

$$\pi\circ\psi_\lambda(x,y)=x,$$

即有交换图

$$\begin{tikzcd} U_\lambda\times\mathbb{R}^n \arrow[rr, "\psi_\lambda"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_\lambda) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_\lambda. & \end{tikzcd}$$

再固定 $x\in U_\lambda$，考虑映射

$$\begin{aligned}\psi_\lambda(x,-):\mathbb{R}^n&\to\pi^{-1}(x)\\ y&\mapsto\psi_\lambda(x,y),\end{aligned}$$

按定义它将 $(y^1,\cdots,y^n)$ 映到 $\sum_{i=1}^n y^i\frac{\partial}{\partial x_\lambda^i}\big|_x$，因此是一个线性同构. 这样当 $x\in U_\lambda\cap U_\mu$ 时，存在两个线性同构 $\psi_\lambda(x,-),\psi_\mu(x,-):\mathbb{R}^n\to\pi^{-1}(x)$，因而有线性同构

$$\psi_\mu(x,-)\circ\psi_\lambda(x,-)^{-1}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n,$$

这个同构是证明中的映射

$$(y^1,\cdots,y^n)\mapsto(\tilde{y}^1,\cdots,\tilde{y}^n),$$

恰好是局部坐标变换 $\varphi_\mu\circ\varphi_\lambda^{-1}$

例 1. 考虑 $S^2\subseteq\mathbb{R}^3$，有嵌入 $S^2=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1\}$. 那么 S^2 的切丛可表示为

$$TS^2=\{((x,y,z),(u,v,w))\mid xu+yv+zw=0\}\subseteq S^2\times\mathbb{R}^3.$$

2 流形的向量丛

将切丛的概念做推广，我们得到了如下流形上向量丛的概念：

定义. 设 E, B 是两个光滑流形，$\pi : E \to B$ 是光滑的满映射. 若存在 M 的一个开覆盖 $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 以及一组被称为局部平凡化 (local trivialization) 的光滑同胚

$$\psi_\lambda : U_\lambda \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_\lambda)$$

使得

1. 下图交换

$$\begin{tikzcd} U_\lambda \times \mathbb{R}^n \arrow[rr, "\psi_\lambda"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_\lambda) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_\lambda. & \end{tikzcd}$$

2. 对任意给定的 $x \in U_\lambda$，由局部平凡化诱导的

$$\begin{aligned} \psi_\lambda(x, -) : \mathbb{R}^n &\to \pi^{-1}(x) \\ \mathbf{v} &\mapsto \psi_\lambda(x, \mathbf{v}) \end{aligned}$$

是拓扑空间的同胚，且对于任意 $x \in U_\lambda \cap U_\mu$，复合映射

$$g_{\mu,\lambda}(x) := \psi_\mu^{-1}(x, -) \circ \psi_\lambda(x, -) : \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(x) \to \mathbb{R}^n$$

是线性同构，即 $g_{\mu,\lambda} \in GL_n(\mathbb{R})$.

3. 上一部分确定的映射

$$g_{\mu,\lambda} : U_\lambda \cap U_\mu \to GL_n(\mathbb{R})$$

是光滑的.

都满足，则称 (E, π) 是 B 上的秩 (rank) 为 n 的向量丛 (vector bundle).

对任意 $x \in B$，$E_x := \pi^{-1}(x)$ 被称为 E 在点 x 上的纤维 (fibre).

我们注意到，

例 2. 设 $G_k(\mathbb{R}^n)$ 是 *Grassmann* 流形，定义

$$\gamma_{k,n} := \{(V, v) \in G_k(\mathbb{R}^n) \times \mathbb{R}^n \mid v \in V \subseteq \mathbb{R}^n\},$$

$\pi : \gamma_{k,n} \to G_k(\mathbb{R}^n)$ 是映射 $(V, v) \mapsto V$. 如下的构造使得 $\pi : \gamma_{k,n} \to G_k(\mathbb{R}^n)$ 是一个向量丛，称为万有向量丛 *(universal bundle)*. 对于流形 $G_k(\mathbb{R}^n)$，存在开覆盖

$$U_{i_1,\cdots,i_k} := \{A \in M_{n,k}(\mathbb{R}) \mid \det A_{i_1,\cdots,i_k} \neq 0\}$$

其中 $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ 是 k 个不同的正整数，$A_{i_1,\cdots,i_k}$ 是取 A 中第 $i_1, \cdots, i_k$ 行组成的子矩阵. 存在唯一的列变换（这里只能用列变换，因为我们不想改变生成的子空间）使得 $A_{i_1,\cdots,i_k} = I_k$，而剩余行组成 A 对应到 $\mathbb{R}^{k\times(n-k)}$ 中的坐标. 于是，可以构造以下的结构

$$\begin{tikzcd} U_{i_1,\cdots,i_k} \times \mathbb{R}^k \arrow[rr, "\psi_{i_1,\cdots,i_k}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_\lambda) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U_{i_1,\cdots,i_k}, & \end{tikzcd}$$

其中 $\psi_{i_1,\cdots,i_k}$ 是映射

命题 2.1. 若 $\pi : E \to B$ 是 n 秩光滑向量丛，则 E 上任意点 x 上的纤维 E_x 都有自然的线性结构使得 E_x 是 n 维向量空间.

事实上，我们并不需要一个向量丛的基是流形，对于一般的（好的）拓扑空间，同样可以定义向量丛：

定义.

定理 2.2. 设 $f : D \to B$ 是连续映射，$p : E \to B$ 是秩为 n 的向量丛，那么拓扑空间

$$f^*E := \{(d, e) \in D \times E \mid f(d) = p(e)\}$$

是 D 上的向量丛.f^*E 称为向量丛 E 的拉回 *(pullback)*.

例 3. 所有光滑流形的切丛都可以称为某个向量丛的拉回.

拓扑上，向量丛的分类是一个核心而且有趣的问题.

命题 2.3. 设 $\pi : E \to B$ 是秩为 n 的光滑向量丛，那么它的转移函数族 $\{g_{\mu,\lambda} : U_\lambda \cap U_\mu \to GL_n(\mathbb{R})\}$ 满足下列相容性条件：

1. $g_{\lambda,\lambda}(p) = I$ 对所有点 $p \in U_\lambda$ 成立，其中 I 是单位矩阵；
2. 若 $U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\eta \neq \emptyset$，那么对任意 $p \in U_\lambda \cap U_\mu \cap U_\eta$，

$$g_{\lambda,\mu}(p) \cdot g_{\mu,\eta}(p) = g_{\lambda,\eta}(p).$$

定理 2.4. 设 M 是 n 维流形，$\{_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是一个开覆盖. 若对任意一对指标 λ, μ，在 $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ 时都指定了一个光滑映射

$$g_{\lambda,\mu} : U_\lambda \cap U_\mu \to GL_r(\mathbb{R}),$$

满足命题 2.3中的条件，则存在同构下唯一的 r 秩向量丛 $\pi : E \to M$，以 $\{g_{\lambda,\mu}\}_{\lambda,\mu\in\Lambda}$ 为转移函数.

例 4. 设 $\pi_1 : E_1 \to B, \pi_2 : E_2 \to B$ 是两个

3 复流形的向量丛

4 概型的向量丛

例 5. 考虑 $X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$，$M$ 是 $R = \mathbb{R}[x, y, z]/(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ 模 $R \oplus R \oplus R$ 的子模

$$\{(u, v, w) \in R \oplus R \oplus R \mid xu + yv + zw = 0\},$$

那么 $\tilde{M}$ 是局部自由的，它对应了一个向量丛.

例 6. 考虑 $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \operatorname{Spec} R$，$I = (2, 1 + \sqrt{-5})$. 这个理想不是主理想，因而 $R \ncong I$. 但是 $R_2 \cong I_2, R_3 \cong I_3$，且 $D(2), D(3)$ 是 Spec R 的开覆盖，因此 $\tilde{I}$ 是局部自由的.