同调代数

第一章　导出函子

定义. 给定加性范畴$\mathcal{A}$中的一族对象及态射

$$X^\bullet : \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

满足$d^n \circ d^{n-1} = 0$对任意n都成立，则称$(X^\bullet, d^\bullet)$是$\mathcal{A}$中的一个**上链**(cochain).

对偶地，我们也有加性范畴$\mathcal{A}$中的**链**(chain)的概念.

例1. 给定代数R，若M是R模，且$P^\bullet$和$I^\bullet$分别是M的投射预解和内射预解，则如下三个横向的序列是$R-\boldsymbol{Mod}$中的一个上链

$$\cdots \xrightarrow{d^2} P^2 \xrightarrow{d^1} P^1 \xrightarrow{d^0} P^0 \xrightarrow{\epsilon} M \to 0 \cdots$$

，且他们有相同的上同调.

例2. 设$(X^\bullet, d^\bullet)$是$\mathcal{A}$中的一个上链，定义上链$\tau^{\leq 0}(X^\bullet, d^\bullet)$为

$$\cdots \xrightarrow{d^{-2}} X^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} \ker d^0 \xrightarrow{0} 0 \to \cdots$$

第二章　导出范畴

2.1

定理2.1.1. 设$\mathcal{C}$是一个范畴，U是其中的一族态射，则存在同构下唯一的范畴$\mathcal{C}[U^{-1}]$和函子$Q:\mathcal{C}\to\mathcal{C}[U^{-1}]$，使得$U$中所有的态射都被$Q$映到$\mathcal{C}[U^{-1}]$中的同构，且满足如下泛性质：对任意范畴$\mathcal{D}$和任意函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，若$F$将$U$中所有的态射映到$\mathcal{D}$中的同构，则有唯一的分解

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{C}[U^{-1}] \arrow[d, dashed, "\tilde{F}"] \\ & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

我们称范畴$\mathcal{C}[U^{-1}]$为的$\mathcal{C}$局部化*(localization)*.

这里需要注意，因为范畴中的一族态射U可以取得非常不理想，因此局部化之后的范畴可能并非再是局部小的.但这里我们忽略这样的问题，我们假定（虽然并不真实，但相较于主要问题，范畴本身的问题需要在其他的地方讨论）我们还是得到想要的范畴.

定义. 设U是范畴$\mathcal{C}$中的一族态射，满足如下条件：

1. 对任意$\mathcal{C}$中的对象A，$\mathrm{id}_A\in U$，且U关于态射的复合封闭，
2. (扩张条件)对任意$\mathcal{C}$中的态射$f:A\to B$和U中的态射$u:C\to B$，存在$\mathcal{C}$中的态射$g:D\to C$和U中的态射$v:D\to A$使得

   $$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & C \arrow[d, "u"] \\ A \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

   对偶地，对任意$\mathcal{C}$中的态射$f:B\to A$和U中的态射$u:B\to C$，存在$\mathcal{C}$中的态射$g:C\to D$和U中的态射$v:A\to D$使得

   $$\begin{tikzcd} D & C \arrow[l, "g"'] \\ A \arrow[u, "v"] & B, \arrow[l, "f"] \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

3. 对任意$\mathcal{C}$中的态射$f, g : A \rightrightarrows B$，存在$u \in U$使得$uf = ug$当且仅当存在$v \in U$使得$fv = gv$，

则称这一族态射U是局部的(localizing).

我们大费周章地考虑对求逆态射的限制条件，重要的是当态射族U满足这些条件时，局部化范畴中的态射时非常容易描述的：

引理2.1.1. 设U是范畴$\mathcal{C}$中的一族局部态射，那么$\mathcal{C}[U^{-1}]$可以被如下地描述：$\mathcal{C}[U^{-1}]$的对象同于$\mathcal{C}$中的对象，$A \to B$的态射可以被描述为如下的图的等价类：

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A & & B, \end{tikzcd}$$

其中，$u \in U$，$f : D \to B$是任意$\mathcal{C}$中的态射，记为$\frac{f}{u}$.且$\frac{f}{u}$等价于$\frac{g}{v}$当且仅当存在$\frac{h}{w}$使得如下图交换

$$\begin{tikzcd} & & F \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[drrr, "f"' near end] & & E \arrow[dlll, "v" near end] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & & & B, \end{tikzcd}$$

且恒等态射是$\mathrm{id}_A = \frac{\mathrm{id}_A}{\mathrm{id}_A}$.最后，根据定义中的扩张条件，$\frac{f}{u} : A \to B$与$\frac{g}{v} : B \to C$的复合是

$$\begin{tikzcd} & & F \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & & E \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & B & & C \end{tikzcd} \Longrightarrow \begin{tikzcd} & F \arrow[dl, "uw"'] \arrow[dr, "gh"] & \\ A & & C. \end{tikzcd}$$

Proof. 我们首先验证如上定义了一个等价关系.

接下来我们要验证态射的复合不依赖于代表元的选取. 最后我们验证这样构造的范畴具有相应的泛性质，因而这个范畴是我们希望的局部化. □

定理2.1.2. 设U是加性范畴$\mathcal{C}$中的一族局部态射，那么$\mathcal{C}[U^{-1}]$也是加性范畴.

但是，我们希望研究的情形非常不幸地不满足这些局部的条件：对于Abel范畴$\mathcal{A}$的上链复形范畴$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$，拟同构不是局部的.

命题2.1.3. 设U是范畴$\mathcal{C}$中的一族局部态射，$\mathcal{D}$是$\mathcal{C}$的满子范畴，如果$U_{\mathcal{D}} := U \cap \operatorname{mor} \mathcal{D}$是$\mathcal{D}$的局部态射，且如下的条件满足一条

1. 对任意U中的态射$u : C \to D$，若$D \in \operatorname{ob} \mathcal{D}$，则一定存在$B \in \operatorname{ob} \mathcal{D}$和态射$f : B \to C$使得$u \circ f \in U$，

2.

那么$\mathcal{D}[U_{\mathcal{D}}^{-1}] \hookrightarrow \mathcal{C}[U^{-1}]$是一个满忠实的嵌入.

2.2

给定Abel范畴$\mathcal{A}$，且设$X^\bullet = (X^n, d_X^n) \in \operatorname{Com}^\bullet(\mathcal{A})$是$\mathcal{A}$中对象组成的复形，那么我们可以定义一个新的复形$X[n]^\bullet$，满足$(X[n])^i = X^{n+i}$，$d_{X[n]}^i = (-1)^n d_X^{n+i} : (X[n])^i \to (X[n])^{i+1}$.若$f : X^\bullet \to Y^\bullet$是一个链同态，则我们有诱导的链同态$f[n] : X[n]^\bullet \to Y[n]^\bullet$，满足$f[n]^i = f^{n+i} : (X[n])^i \to (Y[n])^i$.

我们称[1]为平移函子(translation by 1 functor)，它是拓扑中$- \times [0,1]$的类比.之后这个函子将给出了????上的一个三角结构(triangulated structure).

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$的一个链同态$f : X^\bullet \to Y^\bullet$，那么$f$的映射锥(mapping cone)是$\mathcal{A}$中对象组成的一个链$\operatorname{Cone}(f)^\bullet$满足

$$\operatorname{Cone}(f)^i := X[1]^i \oplus Y^i$$

和

$$d_{\operatorname{Cone}(f)}^i := \begin{pmatrix} d_{X[1]}^i & 0 \\ f[1]^i & d_Y^i \end{pmatrix}.$$

类似地我们可以定义f的映射柱(mapping cylinder)，它是$\mathcal{A}$中对象组成的一个链$\operatorname{Cyl}(f)^\bullet := X^\bullet \oplus X[1]^\bullet \oplus Y^\bullet$，其中

$$d_{\operatorname{Cyl}(f)}^i := \begin{pmatrix} d_X^i & -\operatorname{id}_{X[1]} & 0 \\ 0 & -d_{X[1]}^i & 0 \\ 0 & f[1]^i & d_Y^i \end{pmatrix}.$$

这样微分映射的定义很明显是合理的，它们都是上链：

另一方面，我们希望从拓扑的角度解释这样称呼他们的原因，设$f : X \to Y$是拓扑空间的连续函数，那么f的映射柱是拓扑空间$(X \times I) \coprod_f Y$，其中粘合依赖于$f : X \times \{1\} \to Y$，它在同伦的定义中起到了重要的作用.回顾拓扑中映射f, g的一个同伦是一个连续映射$H : X \times I \to Y$，满足$H|_{X \times \{0\}} = f$且$H|_{X \times \{1\}} = g$，用交换图表示即为

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & X \times I \arrow[d, "H"] & X \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd},$$

其中$i : X \to X \times I, x \mapsto (x,0)$且$j : X \to X \times I, x \mapsto (x,1)$.用到拓扑空间中余积是不交并的事实，上图又可以表示为

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[r, "i \coprod j"] \arrow[dr, "f \coprod g"'] & X \times I \arrow[d, "H"] \\ & Y, \end{tikzcd}$$

注意到$X \times I$恰是$\mathrm{id}_X : X \to X$的映射柱，因而映射同伦的存在性恰由映射柱描述.这样的事情同样发生在$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中，一个上链映射的同伦$s : f \simeq g$可以给出一个$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$的交换图

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \oplus X^\bullet \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Cyl}(\mathrm{id}_X)^\bullet \arrow[d] \\ & Y^\bullet, \end{tikzcd}$$

习题-将给出验证.

引理2.2.1. 任给定$Abel$范畴$\mathcal{A}$的一个链同态$f : X^\bullet \to Y^\bullet$，都存在如下$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$的正合列：

$$\begin{tikzcd} & 0 \arrow[r] & Y^\bullet \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & X^\bullet[1] \arrow[r] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r] & 0 & \\ & X^\bullet \arrow[r, "f"] & Y^\bullet & & & \end{tikzcd}$$

推论2.2.0.1.

定义. 给

2.3

引理2.3.1. 设$\mathcal{A}$是$Abel$范畴，$D(\mathcal{A}) := \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})[Qiso^{-1}]$，且设$Q : \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$是局部化函子.求证若$f : X^\bullet \to X^\bullet$链同伦与$\mathrm{id}_X$，那么在$D(\mathcal{A})$中$Q(f) = \mathrm{id}_X$.

Proof. 我们先假定如下事实： □

定理2.3.1.

2.4 导出函子

在先前的章节中我们讨论过这个论题，这里我们用导出范畴的角度来定义导出函子，具体来说，给定一个Abel范畴的左（对应的，右）正合函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，在一定的情况下存在一个扩张函子$RF : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$（对应的，$LF : D^-(\mathcal{A}) \to D^-(\mathcal{B})$），称为$F$的右导出函子(right derived functor).

第三章　谱序列

3.1　双复形和全复形

定义. 分次模/分次对象

定义. 设M, N是分次R模，若R模态射$f: M \to N$满足存在整数d，使得对任意$n \in \mathbb{Z}$都有$f: M_n \to N_{n+k}$，则称f是阶数为k的分次映射(graded map of degree k).

命题3.1.1. *若$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$分别是阶数为$k, l$的分次映射，则$g \circ f$是阶数为$k+l$的分次映射.*

定义. 一个双分次模(bigraded module)是一族有两个指标的R模

$$M := \{M_{p,q}\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}},$$

一般我们记为$M_{\bullet\bullet}$.若M, N是双分次模，一族映射

$$f = \{f_{p,q}: M_{p,q} \to N_{p+k,q+l}\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$$

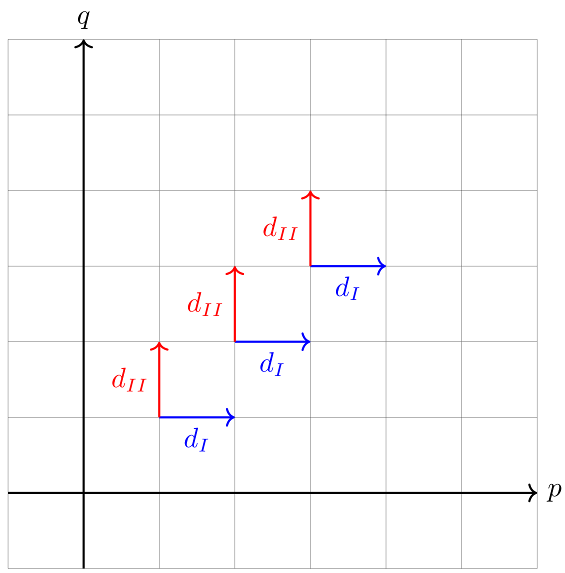
若都是R模映射，则称f是阶数为(k, l)的双分次映射.

接下来我们都用上同调的序号记号.

定义. 设M是双分次R模，d_I, d_{II}是两个阶数分别为$(1,0)$和$(0,1)$的双分次微分映射（即$d_I^{p+1,q} \circ d_I^{p,q} = 0$，$d_{II}^{p,q+1} \circ d_{II}^{p,q} = 0$）.若映射满足

$$d_I^{p,q+1} \circ d_{II}^{p,q} + d_{II}^{p+1,q} \circ d_I^{p,q} = 0,$$

则称(M, d_I, d_{II})是一个**双复形**(bicomplex).



例3. 设M是双分次R模，d_I, δ是两个阶数分别为$(1,0)$和$(0,1)$的双分次微分映射，使得M是一个交换图（注意这和双复形差了一个符号!），那么我们可以通过符号变换构造一个双复形.令$d_{II}^{p,q} = (-1)^p \delta^{p,q}$，那么

$$d_I^{p,q+1} \circ d_{II}^{p,q} + d_{II}^{p+1,q} \circ d_I^{p,q} =$$

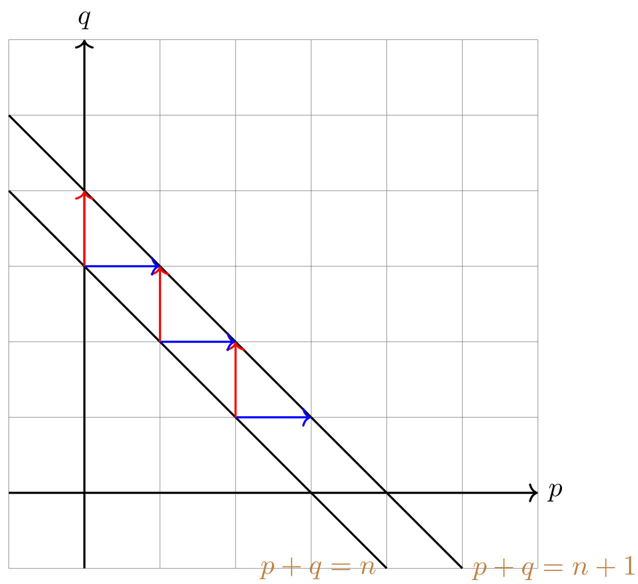
定义. 设M是双分次R模，那么

$$\mathrm{Tot}(M)^n := \bigoplus_{p+q=n} M^{p,q}$$

和$D^n : \mathrm{Tot}(M)^n \to \mathrm{Tot}(M)^{n+1}$，

$$D^n := \sum_{p+q=n} (d_I^{p,q} + d_{II}^{p,q})$$

称为M的全复形(total complex).



引理3.1.1. 若M是双复形，则$(\mathrm{Tot}(M), D)$是复形.

很多时候，我们关心的上同调问题是某个双复形的全复形的上同调群，而谱序列就是一种计算全复形上同调群的某种技巧.

例4. 设M是双分次R模，(M, d_I, d_{II})是一个双复形，那么我们可以定义双复形的转置M^T：这意味着

$$\mathrm{Tot}(M) = \mathrm{Tot}(M^T).$$

3.2 滤子和正合对

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，X是$\mathcal{A}$中的对象，则X的一个递降滤子(descending filtration)是一族X的子对象$\{F^nX\}_{n\in\mathbb{Z}}$满足

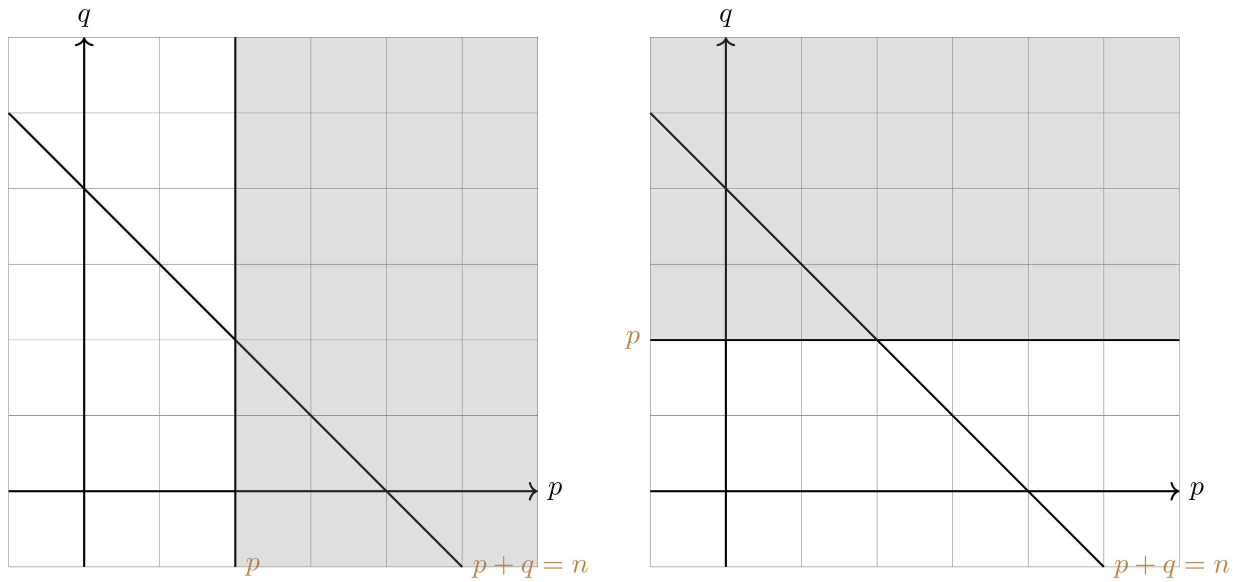
$$0 \subseteq \cdots \subseteq F^{n+1}X \subseteq F^nX \subseteq \cdots X.$$

定义. 设M是双分次R模，(M, d_I, d_{II})是一个双复形，那么称

$$({}^IF^p\mathrm{Tot}(M))^n := \bigoplus_{i\geq p} M^{i,n-i} = \cdots \oplus M^{p+2,q-2} \oplus M^{p+1,q-1} \oplus M^{p,q}$$

为$\mathrm{Tot}(M)$的第一滤子(the first filtration)，称

$$({}^{II}F^p\mathrm{Tot}(M))^n := \bigoplus_{j\geq p} M^{n-j,j} = \cdots \oplus M^{p-2,q+2} \oplus M^{p-1,q+1} \oplus M^{p,q}$$



(a) 第一滤子　　(b) 第二滤子

为Tot(M)的第二滤子(the second filtration).

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，D, E是$\mathcal{A}$中的双分次对象，f, g, h是双分次映射，若

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "f"] & & D \arrow[dl, "g"] \\ & E \arrow[ul, "h"] & \end{tikzcd}$$

是正合的，那么称(D, E, f, g, h)是正合对(exact couple).

定理3.2.1. 每一个$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的上链$X^\bullet$的滤子$F^pX^\bullet$都给出一个正合对

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "f\ (-1{,}1)"] & & D \arrow[dl, "g\ (0{,}0)"] \\ & E, \arrow[ul, "h\ (1{,}0)"] & \end{tikzcd}$$

其中映射的度在图中已经标出.

Proof. 我们有复形的短正合列

$$0 \to F^{p+1}X^\bullet \xrightarrow{i^{p+1}} F^pX^\bullet \xrightarrow{\pi^p} F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet \to 0,$$

这诱导了上同调群的长正合序列

$$\begin{aligned}\cdots \to H^n(F^{p+1}X^\bullet) &\xrightarrow{H^n(i^{p+1})} H^n(F^pX^\bullet) \xrightarrow{H^n(\pi^p)} H^n(F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet) \to \\ \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(F^{p+1}X^\bullet) &\xrightarrow{H^{n+1}(i^{p+1})} H^{n+1}(F^pX^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(\pi^p)} H^{n+1}(F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet) \to \cdots.\end{aligned}$$

我们取$n = p + q$，$f = H^\bullet(i^{p+1}), g = H^\bullet(\pi^p), h = \delta^\bullet$，并且

$$D = \{D^{p,q} := H^{p+q}(F^pX^\bullet)\}$$
$$E = \{E^{p,q} := H^{p+q}(F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet)\}$$

代入到长正合序列中即为

$$\cdots \to D^{p+1,q-1} \xrightarrow{f^{p+1,q-1}} D^{p,q} \xrightarrow{g^{p,q}} E^{p,q} \xrightarrow{h^{p,q}} D^{p+1,q} \to \cdots.$$

□

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，X是$\mathcal{A}$中的双分次对象，d是双分次映射满足$d \circ d = 0$，则称(X, d)是微分双分次对象(differential bigraded object).

若(X, d)是微分双分次对象，d的阶数为(k, l)，那么定义(X, d)的上同调为

$$H(X, d)^{p,q} := \frac{\ker\, d^{p,q}}{\mathrm{im}\, d^{p-k,q-l}}.$$

定理3.2.2. *若(D, E, f, g, h)是Abel范畴$\mathcal{A}$上的一个正合对，那么$d := h \circ g : E \to E$给出$\mathcal{A}$上的一个微分双分次对象(E, d)，且存在一个新的正合对$(D_2, E_2, f_2, g_2, h_2)$*

$$\begin{tikzcd} D_2 \arrow[rr, "f_2"] & & D_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & E_2, \arrow[ul, "h_2"] & \end{tikzcd}$$

满足$E_2 = H(E, d)$，称为导出对(derived couple).

Proof. 首先我们验证微分.按照定义，$d \circ d = (h \circ g) \circ (h \circ g) = h \circ (g \circ h) \circ g = h \circ 0 \circ g = 0$.

按照条件定义$E_2 = H(E, d)$，定义

$$D_2 := \mathrm{Im}\, f,$$

且$f_2 := f|_{D_2} = f \circ \iota$，其中$\iota : D_2 \to D$是嵌入. □

推论3.2.2.1. *每一个Abel范畴$\mathcal{A}$中的上链$X^\bullet$的滤子$F^pX^\bullet$都给出一族正合对*

$$\begin{tikzcd} D_r \arrow[rr, "f_r\ (1,-1)"] & & D_r \arrow[dl, "g_r\ (1-r,r-1)"] \\ & E_r, \arrow[ul, "h_r\ (-1,2)"] & \end{tikzcd}$$

且满足

1. 双分次映射f_r, g_r, h_r的度分别为$(1,-1),(1-r,r-1)$和$(-1,2)$.

2. 微分d_r的度为()，它由$hf_{-r+1}g$诱导.

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，$\mathcal{A}$上的谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$是一族$\mathcal{A}$中的对象和态射的全体$E=(E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$，满足

1. 态射$d_r^{p,q}: E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q-r+1}$定义在第$r$页，且是微分映射，即$d_r^{p+r,q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$.

2. 有同构
$$H^{p,q}(E_r) := \frac{\mathrm{Ker}\ d_r^{p,q}}{\mathrm{Im}\ d_r^{p+r,q-r+1}} \cong E_{r+1}^{p,q}.$$

3.3 收敛性

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，X是$\mathcal{A}$的对象，Y是X的子对象，Z是Y的子对象，则Y/Z称为X的一个子商(subquotient).

若$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$是谱序列，那么$E_2 = H(E_2, d_2)$是E_1的子商：$E_2 := Z_2/B_2$.同理我们知道E_3是E_2的子商，且
$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots B_r \subseteq \cdots \subseteq Z_r \subseteq Z_2 \subseteq Z_1 \subseteq E_1.$$

定义. 给定谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$，定义$Z_\infty := \bigcap_{r\geq 1} Z_r$，$B_\infty := \bigcup_{r\geq 1} B_r$，则谱序列的极限项(limit term)为
$$E_\infty^{p,q} := \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q}}.$$

借用MacLane的描述，Z^r是出现到第r页的对象，B^r是被第r页限制的对象，而Z^∞和B^∞是一直出现和最终被限制的对象.

引理3.3.1. 设$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$是谱序列，那么

1. $E_{r+1} = E_r$当且仅当$Z_{r+1} = Z_r, B_{r+1} = B_r$.

2. 若存在s使得对任意$r \geq s$都有$E_{r+1} = E_r$，则$E_\infty = E_s$.

考虑$\mathcal{A}$中上链$X^\bullet$的一个滤子$F^pX^\bullet$，于是我们有单同态$i^p: F^pX^\bullet \to X^\bullet$，这诱导了$H^n(i^p): H^n(F^pX^\bullet) \to H^n(X^\bullet)$.由于$F^pX^\bullet \subseteq F^{p-1}X^\bullet$，我们有$\mathrm{Im}\ H^n(i^p) \subseteq \mathrm{Im}\ H^n(i^{p-1}) \subseteq H^n(X^\bullet)$，这意味着

$$\Phi^pH^n(X^\bullet) := \mathrm{Im}\ H^n(i^p)$$

是$H^n(X^\bullet)$的一个滤子，称为$F^pX^\bullet$的诱导滤子(derived filtration).

定义. 设$X^\bullet$是Abel范畴$\mathcal{A}$上的上链，$F^pX^\bullet$是上链的滤子.若$\forall n \in \mathbb{Z}$都能找到整数$l(n)$和$u(n)$使得$F^{u(n)}X^n = 0$且$F^{l(n)}X^n = X^n$，则称滤子$F^pX^\bullet$是有界的(bounded).

定义. 给定Abel范畴中的谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$，若存在分次对象H^n和H^n的有界滤子Φ^pH^n满足

$$E_\infty^{p,q} \cong \frac{\Phi^pH^n}{\Phi^{p+1}H^n},$$

则称谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$收敛到(converges to)H^n，记为

$$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n.$$

定理3.3.1. *Abel范畴$\mathcal{A}$中的上链$X^\bullet$的滤子$F^pX^\bullet$给出的谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$都满足*

1. *对任意给定的p, q都存在r使得$E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.*
2. *$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$.*

Proof. □

命题3.3.2. *设$X^{\bullet\bullet}$是三象限双复形，且设${}^IE_r^{p,q}, {}^{II}E_r^{p,q}$是$\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet})$的第一滤子和第二滤子所诱导的谱序列，那么*

1. *第一滤子和第二滤子都是有界的.*
2. *对任意p, q都存在页数$r = r(p,q)$使得${}^IE_\infty^{p,q} = {}^IE_r^{p,q}, {}^{II}E_r^{p,q} = {}^{II}E_\infty^{p,q}$.*
3. *${}^IE_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$且${}^{II}E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.*

虽然这个结果看上去很不错，但不论是符号上还是实际计算上这些都并不能够帮助我们.

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，称$H_I^p(H_{II}^q(X^{\bullet\bullet}))$为$X^{\bullet\bullet}$的第一上同调(the first iterated cohomology)，称$H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet}))$为$X^{\bullet\bullet}$的第二上同调(the second iterated cohomology).

定理3.3.3. *给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，则*

1. ${}^IE_1^{p,q} = H_{II}^q(X^{p,\bullet})$.
2. ${}^IE_2^{p,q} = H_I^p(H_{II}^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.

对偶地，我们同样有

定理3.3.4. *给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，则*

1. ${}^{II}E_1^{p,q} = H_I^q(X^{\bullet,p})$.
2. ${}^{II}E_2^{p,q} = H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.

例5. 给定R模范畴中的交换图

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] & Q \\ M \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd},$$

做适当的变换我们得到一个三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，我们考虑N,P都是Q的子模的特殊情形，来计算该双复形的全复形

$$0 \to M \xrightarrow{()} P \oplus N \xrightarrow{g+k} Q$$

的上同调.

定义. 设$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$是Abel范畴中的谱序列，若$E_2^{p,q} = 0$对所有非零的q都成立，则称E_r落在p轴上(collapses on the p-axis).

命题3.3.5. *设$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$三象限谱序列，且$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$，若称$E_r$落在任意轴上，则*

1. $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$对任意$p,q$成立.
2. 若E_r落在p轴上，则$H^n(X^\bullet) = E_2^{n,0}$；若$E_r$落在$q$轴上，则$H^n(X^\bullet) = E_2^{0,n}$.

定理3.3.6. *给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的三象限谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$，且$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$，则*

1. *对任意n都存在满同态$E_2^{n,0} \to E_\infty^{0,n}$和单同态$E_2^{0,n} \to E_\infty^{n,0}$.*
2. *对任意n都存在满同态$E_\infty^{n,0} \to H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$和单同态$E_\infty^{0,n} \to H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.*
3. *存在正合序列*
$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet})) \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to H^2(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$$

3.4 Cartan-Eilenberg预解

定义. 设$X^\bullet$是Abel范畴$\mathcal{A}$上的上链，那么称

$$0 \to Z^n \to X^n \xrightarrow{d^n} B^{n+1} \to 0$$
$$0 \to B^n \hookrightarrow Z^n \to H^n \to 0$$

为$X^\bullet$的基本短正合列(fundamental exact sequence).若上链复形$X^\bullet$的基本短正合列都分裂，则称$X^\bullet$分裂(split).

定义. 设$X^\bullet$是Abel范畴$\mathcal{A}$上的上链，如果

$$0 \to X^\bullet \to I^{0,\bullet} \to I^{1,\bullet} \to \cdots$$

是整合列且对每个p以下每个整合列都是$\mathcal{A}$中的内射预解

$$0 \to X^p \to I^{0,p} \to I^{1,p} \to \cdots$$
$$0 \to Z^p(X^\bullet) \to Z^{0,p} \to Z^{1,p} \to \cdots$$
$$0 \to B^p(X^\bullet) \to B^{0,p} \to B^{1,p} \to \cdots$$
$$0 \to H^p(X^\bullet) \to H^{0,p} \to H^{1,p} \to \cdots$$

则称这是$X^\bullet$的一个Cartan-Eilenberg内射预解(Cartan-Eilenberg injective resolution).

定理3.4.1. *若Abel范畴$\mathcal{A}$中包含有足够多的内射对象，则$\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中的每个上链复形都有Cartan-Eilenberg内射预解.*

3.5 Grothendieck谱序列

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，且含有足够多的内射对象，X是$\mathcal{A}$的对象，$F:\mathcal{A}\rightrightarrows\mathbf{Ab}$是加性函子.若$R^pF(X)=0$对于任意$p\geq 1$都成立，则称$X$是右$F$零调的(right F-acyclic).

定理3.5.1 (Grothendieck谱序列)**.** *设$F:\mathcal{A}\rightrightarrows\mathcal{B}, G:\mathcal{A}\rightrightarrows\mathcal{C}$是$Abel$范畴间的协变加性函子，且$\mathcal{B}$中包含足够多的内射对象，$F$将$\mathcal{A}$中的内射对象映为$\mathcal{B}$中的右$G$零调对象.那么对任意$\mathcal{A}$中的对象$X$，存在第一象限的收敛谱序列*

$$E_2^{p,q}:=(R^pG\circ R^qF)(X)\Rightarrow R^{p+q}(G\circ F)(X).$$

Proof. 选取X在$\mathcal{A}$中的一个内射预解

$$0\to X\to J^1\to J^2\to\cdots,$$

于是我们得到$\mathcal{B}$中的一个 □

附录 A　Abel范畴

一定程度上说，我们构造范畴的目的是抽象出原本一些对象之间的行为，用更一般的方式去理解之前的对象和之间的行为.在代数中，模是一类非常友好的对象，我们希望找到足够抽象的一类对象，他们之间的行为类似于模（或者Abel群），这样的范畴就是Abel范畴.

同调代数中绝大多数的研究对象是Abel范畴中的对象，它们具有许多良好的性质，在这一章中我们将列举绝大部分.但是，同调代数的学习并不需要知道每一个这样性质的来源和证明，甚至在很多情形下一个Abel范畴完全可以看成一个R模范畴，虽然这并不准确，但足够对同调代数有正确的理解.这里的建议是大致浏览这一章，知道Abel范畴的定义和一些基本性质，然后进入正式的同调代数的学习，在适当并且需要的时候再去了解和分析Abel范畴中一些性质的证明.

A.1　Abel范畴中态射的分解

子对象/商对象

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$中的两个态射$f, g : X \to Y$，若存在对象K和态射$i : K \to X$满足

1. $f \circ i = g \circ i$;
2. 若对任意满足$f \circ h = g \circ h$态射$h : Z \to X$都存在唯一的分解

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ Z \arrow[u, dashed] \arrow[ur, "h"] & & \end{tikzcd}$$

则称K是f, g的等值子(equalizer).

等值子是无法分辨给定态射$f, g : X \to Y$的，并且它是所有不能分辨两个给定态射的

定义. 若范畴$\mathcal{A}$满足

1. $\mathcal{A}$中零对象存在；
2. 对$\mathcal{A}$中任意两个对象X, Y，它们的和与积都存在；

3. 若$f : X \to Y$是$\mathcal{A}$中的态射，则$\ker f$与$\operatorname{coker} f$存在；

4. 任意单态射都是某个态射的核，任意满态射都是某个态射的余核；

则称$\mathcal{A}$是Abel范畴(Abelian category).

幺半范畴(monoidal category)，或者张量范畴
考虑ker和$coker$，这两个函子可以看作是S和Q之间的两个映射，于是我们有

定理A.1.1. *ker和$coker$是$Abel$范畴下的互逆映射.*

定理A.1.2. *设$f : X \to Y$是$Abel$范畴中的态射，且f同时是单态射和满态射，于是f是同构.*

引理A.1.1. *设$f : Y \to X$和$g : Z \to X$是$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的单态射，则存在纤维积$Y \times_X Z$.*

引理A.1.2. *对任意$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射$f : X \to Y$和$g : X \to Y$，它们的等值子存在.*

定理A.1.3. *设$f : Y \to X$和$g : Z \to X$是$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射，则存在纤维积$Y \times_X Z$.*

定理A.1.4. *设$f : X \to Y$是$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射，则*

1. *f是满态射当且仅当$\operatorname{im} f = Y$，当且仅当$\operatorname{coker} f = 0$；*

2. *f是单态射当且仅当$\ker f = 0$，当且仅当$\operatorname{coim} f = X$.*

定理A.1.5. *设$f : X \to Y$是$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射，则存在唯一的分解*

$$X \xrightarrow{p} I \xrightarrow{i} Y,$$

使得$p : X \to I$是满态射，$i : i \to Y$是单态射.

此外，如果$k:K\to X$是$f:X\to Y$的核，$c:Y\to C$是$f:X\to Y$的余核，则$k:K\to X$也是$p:X\to I$的核，$c:Y\to C$也是$i:I\to Y$的余核，且$i:I\to Y$是$c:Y\to C$的核，$p:X\to I$是$k:K\to X$的余核.

Proof. 假设我们有两个不同的对象$I,\bar{I}$满足上述分解，于是我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd} & I \arrow[dr, "i"] & & \\ X \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\bar{p}"'] & & Y \arrow[r, "g"] & Z, \\ & \bar{I} \arrow[uu, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "\bar{i}"'] & & \end{tikzcd}$$

其中$i:I\to Y$是$g:Y\to Z$的核. 由核的定义，我们有$g\circ i=0$，进而$g\circ\bar{i}\circ\bar{p}=g\circ f=g\circ i\circ p=0$.但$\bar{p}$是满态射说明$\bar{p}$存在右逆，故$g\circ\bar{i}=0$.再根据核的分解，存在唯一的$\varphi:\bar{I}\to I$使得右边三角形交换，即$i\circ\varphi=\bar{i}$.故$i\circ\varphi\circ\bar{p}=\bar{i}\circ\bar{p}=f=i\circ p$.但$i$是单态射因此存在左逆，于是$\varphi\circ\bar{p}=p$.这样就证明了$\varphi$使整个图交换.

同样地，我们可以构造$\psi:I\to\bar{I}$使整幅图交换，根据抽象无意义$\varphi\circ\psi=\mathrm{id}_I$且$\psi\circ\varphi=\mathrm{id}_{\bar{I}}$，故$I\cong\bar{I}$，唯一性得证. □

定义. 设P是Abel范畴$\mathcal{A}$中的对象，满足对任意的满态射$f:X\to Y$和任意态射$g:P\to Y$，都可以找到$h:P\to X$使得$g=f\circ h$，

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

习题A.1.1. 设$s:P\to P$是Abel范畴$\mathcal{A}$中的态射，(P,s)是$\mathcal{A}/P$的投射对象，证明P是$\mathcal{A}$中的投射对象.

Proof. 任取$\mathcal{A}$中的满态射$g:X\to Y$， □

A.2 Abel范畴的函子

定义. 若$\mathcal{C},\mathcal{D}$加性范畴，协变函子$F:\mathcal{C}\rightrightarrows\mathcal{D}$满足对任意$\mathcal{C}$中的对象$X,Y$，由$F$诱导的映射$\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)\to\hom_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$是群同态，则称$F$是加性函子(additive functor).

定理A.2.1. 设$\mathcal{A},\mathcal{B}$是*Abel*范畴，$F:\mathcal{A}\rightrightarrows\mathcal{B}$是加性函子当且仅当$F$保直和.

命题A.2.2. *$Abel$范畴间的左正合函子是加性的.*

定义. 若范畴间协变函子$F : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$满足对任意$\mathcal{C}$中的对象$A, B$，由$F$诱导的映射$\hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to \hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$是单射，则称$F$是嵌入(embedding).

定理A.2.3. *设$\mathcal{A}, \mathcal{B}$是$Abel$范畴，$F : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{B}$是加性函子，则下列陈述等价*

1. *F是嵌入.*
2. *F将非交换图映为非交换图.*
3. *F将非正合序列映为非正合序列.*

A.3 嵌入定理