

复变函数辅导笔记（第三次，往年考题整理）

2018年5月7日

1.(15年7) 设 $f(z)$ 是一个整函数，且存在一个正整数 n 和两个正数 R, M 满足当 $|z| > R$ 时

$$|f(z)| \leq M|z|^n.$$

求证 $f(z)$ 是一个次数不超过 n 的多项式.

解 根据题目条件

$$\left| \frac{f(z)}{z^n} \right| \leq M,$$

于是无穷远点是 $f(z)$ 的极点或可去奇点，因而 $f(z)$ 是有理函数.但 $f(z)$ 已经是整函数，故 $f(z)$ 是多项式.若 $f(z)$ 的次数大于 n ，则

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \left| \frac{f(z)}{z^n} \right| = \infty,$$

矛盾. ■

2.(15年9) 设 D 是复平面上的开圆盘， C 是其边界， $\bar{D} = D \cup C$. 设 $f(z)$ 在 D 中除去有限个点 z_1, \dots, z_m 外解析，且在 $\bar{D} - \{z_1, \dots, z_m\}$ 上连续，且对每个 $z_j, 1 \leq j \leq m$ ，都有

$$\lim_{z \rightarrow z_j} (z - z_j)f(z) = 0.$$

求证

$$\int_C f(z) dz = 0.$$

解 设 $B(z_j, r)$ 是以 z_j 为中心以 r 为半径的圆盘，半径 R 充分小使得 $B(z_i, R) \cap B(z_j, R) = \emptyset, \forall 1 \leq i, j \leq m$ ， $\partial B(z_j, r)$ 是 $B(z_j, r)$ 的边界. 于是对不同的半径 r_1, r_2 ，由Cauchy定理

$$\int_{\partial B(z_j, r_1) - \partial B(z_j, r_2)} f(z) dz = 0,$$

化简后得到

$$\int_{\partial B(z_j, r_1)} f(z) dz = \int_{\partial B(z_j, r_2)} f(z) dz,$$

即当半径充分小时 $\int_{\partial B(z_j, r)} f(z) dz$ 的取值与半径无关. 于是

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial B(z_j, R)} f(z) dz \right| &= \lim_{r \rightarrow 0} \left| \int_{\partial B(z_j, r)} f(z) dz \right| \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} \int_{\partial B(z_j, r)} |f(z)| dz \\ &\leq \lim_{r \rightarrow 0} 2\pi r |f(z)| \\ &= 0. \end{aligned}$$

另一方面, $f(z)$ 在 D 以内 $B(z_j, R)$ 以外是解析的, 于是根据 Cauchy 定理

$$\int_{C - \sum_{j=1}^m \partial B(z_j, R)} f(z) dz = 0,$$

进而

$$\int_C f(z) dz = \int_{\sum_{j=1}^m \partial B(z_j, R)} f(z) dz = \sum_{j=1}^m \int_{\partial B(z_j, R)} f(z) dz = 0.$$

■

3.(16年8) 设 n 阶 Bessel 函数 $J_n(t)$ 有下列关于 z 的 Laurent 展式

$$e^{\frac{t}{2}(z - \frac{1}{z})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t) z^n$$

来定义, 求证 $\forall t \in \mathbb{C}, J_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - t \sin \theta) d\theta$.

解 设 C 是以远点为圆心半径为1的圆, 根据Laurent展式的唯一性

$$\begin{aligned}
 J_n(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{\frac{t}{2}(z-\frac{1}{z})}}{z^{n+1}} dz \\
 &\stackrel{z=e^{i\theta}}{=} \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{e^{\frac{t}{2}(e^{i\theta}-e^{-i\theta})}}{e^{(n+1)i\theta}} de^{i\theta} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it \sin \theta}}{e^{ni\theta}} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(t \sin \theta - n\theta)} d\theta \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi e^{i(t \sin \theta - n\theta)} d\theta + \int_\pi^{2\pi} e^{i(t \sin \theta - n\theta)} d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi e^{i(t \sin \theta - n\theta)} d\theta + \int_0^\pi e^{i(-t \sin \theta - n(\theta+\pi))} d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^\pi e^{i(t \sin \theta - n\theta)} d\theta + \int_0^\pi e^{-i(t \sin \theta - n\theta)} d\theta \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\theta - t \sin \theta) d\theta,
 \end{aligned}$$

其中, 倒数第二个等号的第二个求和项中用 $\pi - \theta$ 代替 θ . ■