同调代数

G.Li

目录

第一章　导出函子

1.1　上链和正合性

定义. 给定加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的一族对象及态射构成的图

$$X^\bullet : \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots,$$

满足 $d^n \circ d^{n-1} = 0$ 对任意 n 都成立，则称 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个上链 (cochain).

有时为强调，我们也记 $(X^\bullet, d^\bullet)_{\mathbb{Z}}$. 若 $X^i = 0$ 对任意 $i < 0$ 都成立，则记为 $(X^\bullet, d^\bullet)_{\geq 0}$.
$\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$

引理 1.1. *给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$，则 $\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 也是 Abel 范畴.*

证明. 我们一步步完成验证：

1. 核和余核：给定上链间的态射 $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$，定义

□

定义. 设 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的上链，满足 $X^n = 0$ 对所有的 $n < 0$ 都成立. 若有 $\eta : A \to X_0$ 使得 $d^0 \circ \eta = 0$，则称 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是增广的 (augmented). 若还有 $H_n(X^\bullet) = 0$ 对所有的 $n > 0$ 都成立，且 η 诱导了同构 $A \cong H_0(X^\bullet)$，则称 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是 A 的消解 (resolution).

对偶地，我们也有加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的**链** (chain) 的概念. 我们记

例 1.1. 给定代数 R，若 M 是 R 模，且 $P^\bullet$ 和 $I^\bullet$ 分别是 M 的投射消解和内射消解，则如下三个横向的序列是 $R-\mathbf{Mod}$ 中的一个上链

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots & \xrightarrow{d^{-2}} & P^{-2} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^{-1} & \xrightarrow{d^{0}} & P^{0} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \epsilon} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \cdots \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} & & \downarrow & & \downarrow & & \\
\cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & I^{0} & \xrightarrow{d^{0}} & I^{1} & \xrightarrow{d^{1}} & I^{2} & \xrightarrow{d^{2}} & \cdots,
\end{array}$$

且他们有相同的上同调.

例 1.2. 设 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个上链，定义上链 $\tau^{\leq 0}(X^\bullet, d^\bullet)$为

$$\cdots \xrightarrow{d^{-2}} X^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} \mathrm{Ker}\ d^0 \xrightarrow{0} 0 \to \cdots,$$

那么我们可以证明，

$$H^n(\tau^{\leq 0}(X^\bullet)) = \begin{cases} H^n(X^\bullet) & n \leq 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases},$$

类似地我们也有构造 $\tau_{\geq 0}(X^\bullet, d^\bullet)$，

$$\cdots \to 0 \to X^0/\mathrm{Im}\ d^1 \xrightarrow{\bar{d^0}} X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \to \cdots,$$

例 1.3. 给定交换环 R 和（可能非交换的）R 代数 A，M 是 A 双模，那么可以定义 Chevalley-Eilenberg 映射

$$\begin{aligned}
\delta_n : M \otimes_R \bigwedge_{i=1}^{n} A &\to M \otimes_R \bigwedge_{i=1}^{n-1} A \\
m \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge a_n &\mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [m, a_i] \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge a_n \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{i+j-1} m \otimes [a_i, a_j] \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge \hat{a}_j \wedge \cdots \wedge a_n,
\end{aligned}$$

我们来验证这给出一个 R 模链复形.

事实上，Chevalley-Eilenberg 同调只依赖于 A 的 Lie 代数结构和 M 的 Lie 代数模结构

定义. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中上链 $(X^\bullet, d^\bullet)$，.

定理 1.1. 设

$$0 \to X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \to 0$$

是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中上链的正合列，那么存在上同调的长正合列

$$\cdots \to H^n(X^\bullet) \to H^n(Y^\bullet) \to H^n(Z^\bullet) \to H^{n+1}(X^\bullet) \to \cdots.$$

证明. 我们将长正合序列具体写出来

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_X^n \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_Y^n \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_Z^n \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & X^n \arrow[r] \arrow[d] & Y^n \arrow[r] \arrow[d] & Z^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & Z^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
& \text{coker } d_X^n \arrow[r] & \text{coker } d_Y^n \arrow[r] & \text{coker } d_Z^n \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}
$$

于是存在如下交换图，且横向序列由蛇形引理都是正合的：

$$
\begin{tikzcd}
& \text{coker } d_X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_X^n"] & \text{coker } d_Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Y^n"] & \text{coker } d_Z^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Z^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker d_X^{n+1} \arrow[r] & \ker d_Y^{n+1} \arrow[r] & \ker d_Z^{n+1}, &
\end{tikzcd}
$$

其中 $\bar{d}_X^n : \text{coker } d_X^{n-1} \to \ker d_X^{n+1}$ 是下图

$$
\begin{tikzcd}
& & \ker d_X^{n+1} \arrow[d] & \\
X^{n-1} \arrow[r] & X^n \arrow[r] \arrow[d] & X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+2} \\
& \text{coker } d_X^{n-1} \arrow[uur, dashed] \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}
$$

由 $d_X^n : X^n \to X^{n+1}$ 诱导的 $\text{coker } d_X^{n-1} \dashrightarrow \ker d_X^{n+1}$（在 R 模的情形就是选取一个代表元素 $X^n/\text{im } d_X^{n-1} \cong \text{coker } d_X^{n-1}$，然后用 d_X^n 将代表元映到 $\ker d_X^{n+1}$ 中）. 再次根据蛇形引理，有长正合序列

$$\ker \bar{d}_X^n \to \ker \bar{d}_Y^n \to \ker \bar{d}_Z^n \to \text{coker } \bar{d}_X^n \to \text{coker } \bar{d}_Y^n \to \text{coker } \bar{d}_Z^n.$$

但是，

$$\ker \bar{d}_X^n \cong \frac{\ker d_X^n}{\text{im } d_X^{n-1}} = H^n(X^\bullet)$$

且

$$\text{coker } \bar{d}_X^n \cong \frac{\ker d_X^{n+1}}{\text{im } d_X^n} = H^{n+1}(X^\bullet),$$

这样就得到了希望的长正合序列. □

在蛇形引理的证明中，态射 $\ker \bar{d}_Z^n \to \text{coker } \bar{d}_X^n$ 是困难的，并且在长正合序列中它对应了阶数提升的态射 $H^n(Z^\bullet) \to H^{n+1}(X^\bullet)$. 这里有必要将整个态射详细清楚地描述出来.

特别地，当 $\mathcal{A}$ 是 R 模复形时，

$$
\begin{tikzcd}
& \text{coker } d_X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_X^n"] & \text{coker } d_Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Y^n"] & \text{coker } d_Z^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Z^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker d_X^{n+1} \arrow[r] & \ker d_Y^{n+1} \arrow[r] & \ker d_Z^{n+1} &
\end{tikzcd}
$$

对应的连接同态是明确的：任取 $\ker\,\bar{d}_Z^n$ 中的元素 $\bar{z}\in\operatorname{coker}\,d_Z^n$，根据 $\bar{g}$ 是满射，存在 $\bar{y}\in\operatorname{coker}\,d_Y^n$ 使得它在 $\bar{g}$ 下的像是 $\bar{z}$，根据证明中的说明，$\bar{d}_Y^n(\bar{y})$ 是将 d_Y^n 作用在 $\bar{y}$ 的任意代表元上得到 $\ker\,d_Y^{n+1}$ 中的元素，根据右侧的交换性存在 $x\in\ker\,d_X^{n+1}$ 使得 $f^{n+1}|_{\ker\,d_X^{n+1}}(x)=\bar{d}_Y^n(\bar{y})$，于是

$$\delta : H^n(Z^\bullet)\to H^{n+1}(X^\bullet)$$

将 $H^n(Z^\bullet)$ 中以 $\bar{z}$ 代表的元素映到 $H^{n+1}(X^\bullet)$ 中 x 代表的元素，满足

$$f^{n+1}|_{\ker\,d_X^{n+1}}(x)=\bar{d}_Y^n(\bar{y}).$$

换句话说，δ^n 的行为基本同于 $\bar{d}_Y^n$.

定义.

例 1.4. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列

$$0\to X\to Y\to Z\to 0,$$

那么

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\ 0 \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

都是拟同构.

习题 1.1. 给定一族 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 和态射

$$d_i^{[n]} : X_n\to X_{n-1}, 0\le i\le n$$

满足

$$d_i^{[n]}d_j^{[n]}=d_{j-1}^{[n]}d_i^{[n]}$$

对 $0\le i<j\le n$ 成立，则称 $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 是预单纯的 (pre-simplicial)，且 $d_i^{[n]}$ 是面映射 (face maps). 求证定义

$$\partial_n := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^{[n]}$$

满足 $\partial_{n-1}\partial_n=0$.

习题 1.2 (Hopf 迹定理). 设 $V^\bullet,W^\bullet$ 是域 k 上有界（$\exists N>0$ 使得当 $|n|>N$ 时 $V^n=0$）上链，且对任意 n，V^n 和 W^n 都是有限维 k 向量空间，$f:V^\bullet\to W^\bullet$ 是链同态，$f_*:H^n(V^\bullet)\to H^n(W^\bullet)$ 是诱导的上同调群同态. 求证

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\mathrm{Tr}\ f^n=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n\mathrm{Tr}\ f_*^n.$$

[归纳地构造向量空间合适的基.]

1.2 链同伦

另一方面，我们希望从拓扑的角度解释这样称呼他们的原因，设 $f : X \to Y$ 是拓扑空间的连续函数，那么 f 的映射柱是拓扑空间 $(X \times I) \coprod_f Y$, 其中粘合依赖于 $f : X \times \{1\} \to Y$, 它在同伦的定义中起到了重要的作用. 回顾拓扑中映射 f, g 的一个同伦是一个连续映射 $H : X \times I \to Y$，满足 $H|_{X\times\{0\}} = f$ 且 $H|_{X\times\{1\}} = g$，用交换图表示即为

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & X \times I \arrow[d, "H"] & X \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd},$$

其中 $i : X \to X \times I, x \mapsto (x, 0)$ 且 $j : X \to X \times I, x \mapsto (x, 1)$. 用到拓扑空间中余积是不交并的事实，上图又可以表示为

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[r, "i \coprod j"] \arrow[dr, "f \coprod g"'] & X \times I \arrow[d, "H"] \\ & Y, \end{tikzcd}$$

注意到 $X \times I$ 恰是 $\mathrm{id}_X : X \to X$ 的映射柱，因而映射同伦的存在性恰由映射柱描述. 这样的事情同样发生在 $\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 中，一个上链映射的同伦 $s : f \simeq g$ 可以给出一个 $\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 的交换图

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \oplus X^\bullet \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Cyl}(\mathrm{id}_X)^\bullet \arrow[d] \\ & Y^\bullet, \end{tikzcd}$$

习题-将给出验证.

引理 1.2. 任意给定加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，那么 F 将 $\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 中的同伦链映为同伦链.

例 1.5 (加性函子不保拟同构).

习题 1.3. 习题1.1中给了预单纯复形 $h_i^{[n]} : X_n \to X_{n+1}$

$$\begin{aligned} &d_i^{[n+1]} h_j^{[n]} = h_{j-1}^{[n-1]} d_i^{[n]}, && \forall\ i < j \\ &d_i^{[n+1]} h_i^{[n]} = d_i^{[n+1]} h_{i-1}^{[n]}, && i = j \text{ 或 } i = j+1 \\ &d_i^{[n+1]} h_j^{[n]} = h_j^{[n-1]} d_{i-1}^{[n]}, && \forall\ i > j+1, \\ &d_0 h_0 = f, d_{n+1} h_n = g. \end{aligned}$$

求证 $h := \sum_{i=0}^{n} (-1) h^i$ 给出了链同伦.

1.3 映射锥和映射柱

给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$，且设 $X^\bullet = (X^n, d_X^n) \in \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 中对象组成的复形，那么我们可以定义一个新的复形 $X[n]^\bullet$，满足 $(X[n])^i = X^{n+i}$，$d^i_{X[n]} = (-1)^n d_X^{n+i} : (X[n])^i \to (X[n])^{i+1}$. 若 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ 是一个链同态，则我们有诱导的链同态 $f[n] : X[n]^\bullet \to Y[n]^\bullet$，满足 $f[n]^i = f^{n+i} : (X[n])^i \to (Y[n])^i$.

我们称 [1] 为平移函子 (translation by 1 functor)，它是拓扑中 $- \times [0,1]$ 的类比. 之后这个函子将给出了???? 上的一个三角结构 (triangulated structure).

定义. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的一个链同态 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$，那么 f 的映射锥 (mapping cone) 是 $\mathcal{A}$ 中对象组成的一个链 $\mathrm{Cone}(f)^\bullet$ 满足

$$\mathrm{Cone}(f)^i := X[1]^i \oplus Y^i$$

和

$$d^i_{\mathrm{Cone}(f)} := \begin{pmatrix} d^i_{X[1]} & 0 \\ f[1]^i & d^i_Y \end{pmatrix} : \begin{tikzcd} X^{n-1} \arrow[r] \arrow[dr] & X^{n-2} \\ \oplus & \oplus \\ Y^n \arrow[r] & Y^{n-1}, \end{tikzcd}$$

类似地我们可以定义 f 的映射柱 (mapping cylinder)，它是 $\mathcal{A}$ 中对象组成的一个链 $\mathrm{Cyl}(f)^\bullet := X^\bullet \oplus X[1]^\bullet \oplus Y^\bullet$，其中

$$d^i_{\mathrm{Cyl}(f)} := \begin{pmatrix} d^i_X & -\mathrm{id}_{X[1]} & 0 \\ 0 & d^i_{X[1]} & 0 \\ 0 & f[1]^i & d^i_Y \end{pmatrix}.$$

这样微分映射的定义很明显是合理的，它们都是上链：

$$d^{i+1}_{\mathrm{Cone}(f)} \circ d^i_{\mathrm{Cone}(f)} = \begin{pmatrix} d^{i+1}_{X[1]} & 0 \\ f[1]^{i+1} & d^{i+1}_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^i_{X[1]} & 0 \\ f[1]^i & d^i_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{i+1}_{X[1]} \circ d^i_{X[1]} & 0 \\ f[1]^{i+1} \circ d^i_{X[1]} + d^{i+1}_Y \circ f[1]^i & d^{i+1}_Y \circ d^i_{X[1]} \end{pmatrix} = 0,$$

且

$$d^{i+1}_{\mathrm{Cyl}(f)} \circ d^i_{\mathrm{Cyl}(f)} = \begin{pmatrix} d^{i+1}_X & -\mathrm{id}_{X[1]} & 0 \\ 0 & d^{i+1}_{X[1]} & 0 \\ 0 & f[1]^{i+1} & d^{i+1}_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^i_X & -\mathrm{id}_{X[1]} & 0 \\ 0 & d^i_{X[1]} & 0 \\ 0 & f[1]^i & d^i_Y \end{pmatrix}$$

例 1.6. 设 $X^\bullet, Y^\bullet$ 是单对象上链，$f : X^\bullet \to Y^\bullet$ 是链映射，那么由定义

$$\mathrm{Cone}(f) = \cdots \to 0 \to X^0 \xrightarrow{f} Y^0 \to 0 \to \cdots,$$

其中 Y^0 所在的位置是 0 阶位置，且有 $H^0 = \mathrm{coker}\, f, H^{-1} = \ker f$. 这意味着我们可以将 Cone 可以视作 ker 和 coker 的推广，这在后面三角范畴的讨论中是关键的问题.

对偶地，

引理 1.3. *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 的一个链同态 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ 诱导了同构 $f^* : H^*(X^\bullet) \to H^*(Y^\bullet)$ 当且仅当 $H^*(\mathrm{Cone}(f)) = 0$.

证明. 如下短正合列

$$0 \to Y^\bullet \xrightarrow{i} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{p} X[1]^\bullet \to 0$$

（其中 i 是嵌入 p 是投影）诱导了上同调群的长正合列

$$\cdots \to H^n(\mathrm{Cone}(f)) \to H^n(X[1]) \to H^{n+1}(Y) \to H^{n+1}(\mathrm{Cone}(f)) \to \cdots,$$

于是 $H^n(X[1]) = H^{n+1}(X) \cong H^{n+1}(X)$ 当且仅当 $H^n(\mathrm{Cone}(f)) = 0$ 对所有 n 成立，于是只要说明诱导长正合序列的连接态射是由 f 诱导的即可. 考虑????? □

命题 1.2. 设 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 的一个链同态 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$ 满足 $\mathrm{Cone}(f) \simeq 0$，那么 f 是链同伦等价.

证明. 令 $i : Y^\bullet \to \mathrm{Cone}(f)$ 是嵌入 $p : \mathrm{Cone}(f) \to X[1]^\bullet$ 是投影.

首先，$i \simeq 0$ 当且仅当 f 有右同伦逆，即存在链映射 $g : Y^\bullet \to X^\bullet$ 使得 $fg \simeq \mathrm{id}_{Y^\bullet}$. 一方面，若 $i \simeq 0$，那么存在 $h : Y^\bullet \to \mathrm{Cone}(f)[-1]$ 满足

$$d^{n-1}_{\mathrm{Cone}(f)} \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n_Y = i,$$

按照直和分解 $\mathrm{Cone}(f) := X[1]^\bullet \oplus Y^\bullet$，存在 $s : Y^\bullet \to Y[-1]^\bullet$ 和 $g : Y^\bullet \to X^\bullet$ 满足 $h = s + g$，于是上式可以写为

$$\begin{pmatrix} d^{n-1}_{X[1]} & 0 \\ f[1]^{n-1} & d^{n-1}_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^n \\ s^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g^{n+1} \\ s^{n+1} \end{pmatrix} d^n_Y = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_Y \end{pmatrix}.$$

这意味着 $g : Y^\bullet \to X^\bullet$ 是链映射，且

$$f[1]^{n-1} \circ g^n + d^{n-1}_Y \circ s^n + s^{n+1} \circ d^n_Y = \mathrm{id}_Y,$$

即 g 是右同伦逆. 另一方面，f 有右同伦逆，记为链映射 $g : Y^\bullet \to X^\bullet$ 和 $s : Y^\bullet \to Y[-1]^\bullet$，那么之前证明中的矩阵等式成立，于是找到了 $h := s + g$ 满足 $d^{n-1}_{\mathrm{Cone}(f)} \circ h^n + h^{n+1} \circ d^n_Y = i$，即 $i \simeq 0$.

再来，$p \simeq 0$ 当且仅当 f 有左同伦逆，即存在链映射 $h : Y^\bullet \to X^\bullet$ 使得 $hf \simeq \mathrm{id}_{Y^\bullet}$.

最后，我们回到命题的证明来.$\mathrm{Cone}(f) \simeq 0$ 意味着 $\mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)} \simeq 0$，于是 $i = \mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)} \circ i \simeq 0 \circ i = 0$ 并且 $p = p \circ \mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)} \simeq p \circ 0 = 0$，于是根据前面的讨论，$f$ 同时有左右同伦逆，因此 f 是同伦等价. □

拓扑上，考虑

定理 1.3. 任给定 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 的一个链同态 $f : X^\bullet \to Y^\bullet$，都存在如下 $\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 的正合列：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & Y^\bullet \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & X^\bullet[1] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r] & 0 \\
 & X^\bullet \arrow[r, "f"] & Y^\bullet
\end{tikzcd}$$

推论 1.3.1.

定义. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$，称 $\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 中的图

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \xrightarrow{h} X^\bullet[1]$$

为其中的一个三角 (triangle)，三角间的态射 (morphism) 是如下交换图

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & X^\bullet[1] \arrow[d, "u[1]"] \\
K^\bullet \arrow[r, "i"] & L^\bullet \arrow[r, "j"] & M^\bullet \arrow[r, "k"] & K^\bullet[1]
\end{tikzcd}$$

给定三角，若存在 f 使得三角同构于

$$X^\bullet \xrightarrow{f} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{\delta} X^\bullet[1]$$

则称它是特异三角 (distinguished triangle).

如上定义给出的是

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[dr, "u"'] & & Z^\bullet \arrow[ll, "w"] \\
 & Y^\bullet, \arrow[ur, "v"'] &
\end{tikzcd}$$

其中 w

命题 1.4. $\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 中的任意短正合序列 $0 \to X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \to 0$ 都拟同构于某个特异三角.

证明. 考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r, "f"] \arrow[d, "u"] & Y^\bullet \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"] & Z^\bullet \arrow[r, "h"] \arrow[d, "w"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r, "f"] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "\pi"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

□

习题 1.4. 设 $\left(X^\bullet \oplus Y^\bullet, d = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}\right)$ 是上链复形，$(Y^\bullet, \delta^\bullet)$ 可缩上链复形且 $h: Y^\bullet \to Y^\bullet[1]$ 是链同伦，求证

$$(\mathrm{id}, -h\gamma): (X^\bullet, \alpha - \beta h\gamma) \hookrightarrow (X^\bullet \oplus Y^\bullet, d)$$

是拟同构. 这个练习说明消去可缩子复形不影响上同调.

证明. 首先来验证 $(X^\bullet, \alpha - \beta h\gamma)$ 是链复形. 由于

$$d^2 = \begin{pmatrix} \alpha^2 + \beta\gamma & \alpha\beta + \beta\delta \\ \gamma\alpha + \delta\gamma & \gamma\beta + \delta^2 \end{pmatrix} = 0,$$

因此

$$\begin{aligned}
(\alpha - \beta h\gamma)^2 &= \alpha^2 - \alpha\beta h\gamma - \beta h\gamma\alpha + (\beta h\gamma)^2 \\
&= \alpha^2 + \beta\delta h\gamma + \beta h\delta\gamma + \beta h\gamma\beta h\gamma \\
&= \alpha^2 + \beta(h\delta + \delta h)\gamma + \beta h\delta^2 h\gamma,
\end{aligned}$$

由于 δ 是微分映射且 $h: \mathrm{id} \simeq 0$ 是收缩同伦，故如上计算 $(\alpha - \beta h\gamma)^2 = \alpha^2 + \beta\gamma = 0$.

再来验证 $(\mathrm{id}, -h\gamma)$ 是链映射，这等价于图

$$\begin{tikzcd}
X^n \arrow[r, "\alpha^n - \beta^n h^{n+1}\gamma^n"] \arrow[d, swap, "\begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ -h^{n+1}\gamma^n \end{pmatrix}"] & X^{n+1} \arrow[d, "\begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ -h^{n+2}\gamma^{n+1} \end{pmatrix}"] \\
X^n \oplus Y^n \arrow[r, swap, "\begin{pmatrix} \alpha^n & \beta^n \\ \gamma^n & \delta^n \end{pmatrix}"] & X^{n+1} \oplus Y^{n+1}
\end{tikzcd}$$

是交换的. 注意到

$$\begin{pmatrix} \alpha^n & \beta^n \\ \gamma^n & \delta^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ -h^{n+1}\gamma^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha^n - \beta^n h^{n+1}\gamma^n \\ \gamma^n - \delta^n h^{n+1}\gamma^n \end{pmatrix}$$

且

$$\begin{pmatrix} \mathrm{id} \\ -h^{n+2}\gamma^{n+1} \end{pmatrix} (\alpha^n - \beta^n h^{n+1}\gamma^n) = \begin{pmatrix} \alpha^n - \beta^n h^{n+1}\gamma^n \\ -h^{n+2}\gamma^{n+1}\alpha^n + h^{n+2}\gamma^{n+1}\beta^n h^{n+1}\gamma^n \end{pmatrix}.$$

根据 $d^2 = 0$，$\gamma^{n+1}\beta^n = -\delta^{n+1}\delta^n = 0$，于是

$$-h^{n+2}\gamma^{n+1}\alpha^n + h^{n+2}\gamma^{n+1}\beta^n h^{n+1}\gamma^n = -h^{n+2}\gamma^{n+1}\alpha^n.$$

又由于 $\gamma^{n+1}\alpha^n = -\delta^{n+1}\gamma^n$，

$$\begin{aligned}\delta^n h^{n+1}\gamma^n - h^{n+2}\gamma^{n+1}\alpha^n &= \delta^n h^{n+1}\gamma^n + h^{n+2}\delta^{n+1}\gamma^n \\ &= (\delta^n h^{n+1} + h^{n+2}\delta^{n+1})\gamma^n \qquad = \gamma^n,\end{aligned}$$

这就证明了图的交换性.

最后，嵌入映射

$$(\mathrm{id}, -h\gamma) : (X^\bullet, \alpha - \beta h\gamma) \hookrightarrow (X^\bullet \oplus Y^\bullet, d)$$

的余核 $(Y^\bullet, \delta)$ 是零调的，因此长正合序列说明了嵌入是拟同构. □

1.4 内射消解和投射消解

定义. (augmented)

1.5 δ 函子和导出函子

定义. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$，$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 的（协变）δ 函子 (δ-functor) 是一族函子 $\{T^i : \mathcal{A} \to \mathcal{B}\}_{i\in\mathbb{N}}$，和对任意 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0,$$

都有态射 $\delta^i_{Z\to X} : T^i(Z) \to T^{i+1}(X)$，满足

1. 对任意给定的 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$，都存在长正合列
2. 若有 $\mathcal{A}$ 中的短正合列交换图那么态射 $\delta^i_{Z\to X}$ 给出了自然的交换图

$$\begin{array}{ccc} T^i(Z_1) & \xrightarrow{\delta^i_{Z_1\to X_1}} & T^{i+1}(X_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(Z_2) & \xrightarrow{\delta^i_{Z_2\to X_2}} & T^{i+1}(X_2). \end{array}$$

定义. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 和加性函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, 若对任意 $\mathcal{A}$ 中的对象 X, 都存在单态射 $i : X \to I$ 使得 $F(i) = 0$，则称 F 是 effecable 的. 对偶地，若对于任意任意 $\mathcal{A}$ 中的对象 Z，都存在单态射 $p : P \to Z$ 使得 $F(p) = 0$，则称 F 是 coeffecable 的.

定理 1.5. 给定 *Abel* 范畴 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 和 δ 函子 $(T^i,\delta)_{i\in\mathbb{N}}$, 若对于任意 $i>0$, T^i 都是有效的函子, 那么 $(T^i,\delta)_{i\in\mathbb{N}}$ 在所有 δ 函子中是始对象, 即

证明. □

推论 1.5.1. 右导出函子是有效的, 反之也成立.

第二章　Tor 函子和 Ext 函子

2.1　R 模同调与 Tor 函子

定义. 给定（右）R 模链复形 $(C_\bullet, \partial_\bullet)$ 和（左）R 模 N，则以 N 为系数的 $C_\bullet$ 的同调 (the homology of $C_\bullet$ with coefficient in N) 为

$$H_n(C_\bullet; N) := H_n(C_\bullet \otimes_R N),$$

其中复形 $C_\bullet \otimes_R N$ 是

$$\cdots \to C_{n+1} \otimes_R N \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes_R N} C_n \otimes_R N \xrightarrow{\partial_n \otimes_R N} C_{n+1} \otimes_R N \to \cdots.$$

定理 2.1.

推论 2.1.1. *给定 R 模短正合列*

$$0 \to M \to N \to P \to 0,$$

满足 P 是平坦的，那么

1. *M 是平坦的当且仅当 N 是平坦的，*
2. *对任意 R 模 Q，$0 \to M \otimes_R Q \to N \otimes_R Q \to P \otimes_R Q \to 0$ 也是正合列.*

2.2　R 模上同调与 Ext 函子

2.2.1　R 模同调与上同调的转换

2.3　特殊链复形和万有系数定理

2.3.1　特殊链复形

引理 2.1. 设 $(P_\bullet, \partial_\bullet)$ 是投射 R 模链复形，$H_n(P_\bullet) = 0$ 对任意 n 成立，且所有的 $\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$ 也都是投射的，则 $P_\bullet \simeq 0$.

证明. 令 $Z_n := \mathrm{Ker}\ \partial_n, B_n := \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$，那么对所有的整数 n 我们有短正合序列

$$0 \to Z_n \hookrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \to 0.$$

根据投射 R 模的提升性质，存在 $h_{n-1} : B_{n-1} \to P_n$ 使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} & & & B_{n-1} \arrow[dl, dashed, "h_{n-1}"'] \arrow[d, equal] & \\ 0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r, hook] & P_n \arrow[r, "\partial_n"] & B_{n-1} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

因此 $P_n = Z_n \oplus h_{n-1}(B_{n-1})$. 由于 $H_n(P_\bullet) = 0$，$Z_n = B_n$，于是复形可以重写为

$$\cdots \to Z_{n+1} \oplus h_n Z_n \xrightarrow{\partial_{n+1}} Z_n \oplus h_{n-1} Z_{n-1} \xrightarrow{\partial_n} Z_{n-1} \oplus h_{n-2} Z_{n-2} \to \cdots,$$

满足 $\partial_n|_{Z_n} = 0, \partial_n|_{h_{n-1}Z_{n-1}} = (h_{n-1})^{-1}$，于是

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & Z_{n+1} \oplus h_n Z_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z_n \oplus h_{n-1} Z_{n-1} \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] & Z_{n-1} \oplus h_{n-2} Z_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h_{n-2}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Z_{n+1} \oplus h_n Z_n \arrow[r] & Z_n \oplus h_{n-1} Z_{n-1} \arrow[r, "\partial_n"] & Z_{n-1} \oplus h_{n-2} Z_{n-2} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

给出了链同伦 $\mathrm{id} \simeq 0$. □

作为推论，考虑投射 R 模链复形的态射 $f : M_\bullet \to N_\bullet$ 诱导了同构 $f_* : H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$，那么 $H_n(\mathrm{Cone}(f)) = 0$ 对任意 n 成立. 但是，$\mathrm{Cone}(f)$ 也是投射 R 模链复形，由刚刚的引理 $\mathrm{Cone}(f) \simeq 0$，于是根据命题1.2的对偶，$f$ 是链同伦. 这样我们证明了

命题 2.2. 若投射 R 模链复形的态射 $f : M_\bullet \to N_\bullet$ 诱导了同构 $f_* : H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$，那么 f 是链同伦.

事实上，我们还可以证明更强的结论：如果同调群的同构 $H_*(M_\bullet) \cong H_*(N_\bullet)$ 并不是由特定的态射诱导的话，给定的自由 R 模链复形 $M_\bullet, N_\bullet$ 依旧依旧是同伦等价的，即：

定理 2.3. 若 $(M_\bullet, \partial_\bullet^M), (N_\bullet, \partial_\bullet^N)$ 是自由 R 模链复形，那么 $M_\bullet \simeq N_\bullet$ 当且仅当 $H_n(M_\bullet) = H_n(N_\bullet)$ 对任意 n 成立.

为了证明定理2.3，我们需要建立由同调群映射到链复形态射的提升，即

命题 2.4. 给定 R 模链复形 $M_\bullet, N_\bullet$ 且 $M^\bullet$ 是投射链复形，且 Ker ∂_n^M, Im ∂_{n+1}^M 都是投射的，则对于任意上同调群的同态 $\varphi_*: H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$ 都可以找到链复形态射 $f: M_\bullet \to N_\bullet$，使得 $f_* = \varphi_*$.

证明. 按照假设 $Z_n^M :=$ Ker $\partial_n, B_n^M :=$ Im ∂_{n+1} 都是投射的，于是存在交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_n^M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}_n|_{B_n^M}"] & Z_n^M \arrow[r, "\pi_n^M"] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}_n"] & H_n^M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_n^N \arrow[r] & Z_n^N \arrow[r, "\pi_n^N"] & H_n^N \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

其中上下两行的正合性说明，对任意 $\partial_{n+1}^M(m) = b \in B_n^M$，

$$\pi_n^N \circ \tilde{f}_n(b) = \pi_n^N \circ \tilde{f}_n(\partial_{n+1}(m)) = \varphi_n(\pi_n^M \circ \partial_{n+1}^M(m)) = 0,$$

因此 $\tilde{f}_n(b) \in$ Ker $\pi_n^N = B_n^N$，这样只需要将 $\tilde{f}_n$ 扩张到 M_n 即可.

考虑2.1中的分解 $M_n = Z_n^M \oplus h_{n-1}(B_{n-1}^M)$，在如下交换图中

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n^M \arrow[r] \arrow[dd, "\tilde{f}_n"] & M_n \arrow[r] & B_{n-1}^M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & & & B_{n-1}^M \arrow[ul, "h_{n-1}"'] \arrow[dl, dashed, "k_{n-1}"'] \arrow[d, "\tilde{f}_n|_{B_{n-1}^M}"] & \\
0 \arrow[r] & Z_n^N \arrow[r] & N_n \arrow[r] & B_{n-1}^N \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

再次根据自由模的投射性质存在 $k_{n-1}: B_{n-1}^M \to N_n$. 于是，定义

$$\begin{aligned}
f_n &: M_n \to N_n \\
(z, h_{n-1}(b)) &\mapsto \tilde{f}_n(z) + k_{n-1}(b),
\end{aligned}$$

这样只需要验证 f 是链映射且 $f_* = \varphi_*$ 即可. 计算得

$$f_n\partial_{n+1}^M((z, h_n(b))) = f_n(b, 0) = \tilde{f}_n(b) = \partial_{n+1}^N \circ k_n(b) = \partial_{n+1}^N(\tilde{f}_{n+1}(z) + k_n(b)) = \partial_{n+1}^N f_{n+1}((z, h_n(b))),$$

于是 f 是链映射，且 $f_*([z]) = [\tilde{f}_n(z)]$，$\tilde{f}_n$ 的定义交换图说明 $\varphi_n \circ \pi_n^M = \pi_n^N \circ \tilde{f}_n$，这样 $[\tilde{f}_n(z)] = \varphi_n([z])$，即 $f_* = \varphi_*$. □

结合命题2.2，此时定理2.3已经完成了证明. 更进一步地，我们还有

命题 2.5. 给定 R 模投射链复形 $M_\bullet, N_\bullet$，且 Ker ∂_n^M, Im ∂_{n+1}^M, Ker ∂_n^N, Im ∂_{n+1}^N 都是投射的，若 $H_*(M_\bullet), H_*(N_\bullet)$ 也都是投射的，且态射 $f, g: M_\bullet \to N_\bullet$ 诱导相同的同态 $f_* = g_*: H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$，那么 $f \simeq g$.

证明. 令 $Z_n^M := \mathrm{Ker}\ \partial_n^M, B_n^M := \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}^M, Z_n^N := \mathrm{Ker}\ \partial_n^N, B_n^N := \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}^N$，将 $H_*(M_\bullet)$ 看作（边缘算子为 0 的）链复形，那么显然 $H_*(M_\bullet) = H_*(H_*(M_\bullet))$（这里固定一个同构视为相等），根据命题2.4，存在链映射 $j_\bullet : M_\bullet \to H_*(M_\bullet)$ 使得 j_* 是同构 $H_*(M_\bullet) = H_*(H_*(M_\bullet))$. 根据命题2.2，$j_\bullet$ 存在同伦逆，记为 $j_\bullet^{-1}$. 类似地，存在链映射 $k_\bullet : N_\bullet \to H_*(N_\bullet)$ 使得 k_* 是同构 $H_*(N_\bullet) = H_*(H_*(N_\bullet))$，$k_\bullet^{-1}$ 是同伦逆. 于是

$$f \simeq (k \circ k^{-1}) \circ f \circ (j \circ j^{-1}) = k \circ (k^{-1} \circ f \circ j) \circ j^{-1}.$$

另一方面，链复形 $H_*(M_\bullet), H_*(N_\bullet)$ 的边缘算子都是 0，链映射 $H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$ 和它诱导的 $H_*(H_*(M_\bullet)) \to H_*(H_*(N_\bullet))$ 没有差别，因此

$$k^{-1} \circ f \circ j = (k^{-1} \circ f \circ j)_* = k_*^{-1} \circ f_* \circ j_* = \mathrm{id} \circ f_* \circ \mathrm{id} = f_*,$$

同理 $k^{-1} \circ g \circ j = g_*$，综合起来

$$f \simeq k \circ (k^{-1} \circ f \circ j) \circ j^{-1} = k \circ f_* \circ j^{-1} = k \circ g_* \circ j^{-1} = k \circ (k^{-1} \circ g \circ j) \circ j^{-1} \simeq g.$$

□

2.3.2 万有系数定理

定理 2.6. *给定环 R 和平坦右 R 模组成的复形 $P_\bullet$，使得所有的子模 $\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$ 也都是平坦的，那么对于任意的左 R 模 N 和 $n \in \mathbb{Z}$，都存在正合序列*

$$0 \to H_n(P_\bullet) \otimes_R N \to H_n(P_\bullet; N) \to \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(P_\bullet), N) \to 0,$$

natural.

证明. 首先对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 存在正合列

$$0 \to Z_n \hookrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \to 0,$$

根据推论2.1.1，Z_n 也都是平坦的，且诱导的

$$0 \to Z_n \otimes_R N \to P_n \otimes_R N \to B_{n-1} \otimes_R N \to 0$$

也是正合列. 这样，存在 Abel 群复形的短正合序列

$$0 \to Z_\bullet \otimes_R N \to P_\bullet \otimes_R N \to B[-1]_\bullet \otimes_R N \to 0,$$

并且诱导了长正合序列

$$\cdots \to H_{n+1}(B[-1]_\bullet \otimes_R N) \xrightarrow{\delta} H_n(Z_\bullet \otimes_R N) \to H_n(P_\bullet \otimes_R N) \to H_n(B[-1]_\bullet \otimes_R N) \to \cdots.$$

注意到 $(Z_\bullet, \partial_\bullet|_Z)$ 和 $(B[-1]_\bullet, \partial_\bullet|_B)$ 的边缘算子都是 0，故 $H_n(Z_\bullet \otimes_R N) = Z_n \otimes_R N, H_n(B[-1]_\bullet \otimes_R N) = B_{n-1} \otimes_R N$. 这样，之前的长正合序列是

$$\cdots \to B_n \otimes_R N \xrightarrow{\delta_n} Z_n \otimes_R N \to H_n(P_\bullet \otimes_R N) \to B_{n-1} \otimes_R N \to \cdots,$$

其中，映射 $\delta: B_n \otimes_R N \to Z_n \otimes_R N$ 恰好是嵌入 $i_n: B_n \to Z_n$ 在 $-\otimes_R N$ 下的象，这样有正合列

$$0 \to \text{Coker } \delta_n \to H_n(P_\bullet \otimes_R N) \to \text{Ker } \delta_{n-1} \to 0.$$

注意到

$$0 \to B_n \to Z_n \to H_n(P_\bullet) \to 0$$

是 $H_n(P_\bullet)$ 的平坦消解，因此根据 Tor 诱导的长正合序列

$$0 \to \text{Tor}_1^R(H_n(P_\bullet), N) \to B_n \otimes_R N \xrightarrow{\delta_n} Z_n \otimes_R N \to H_n(P_\bullet) \otimes_R N \to 0,$$

代入即可. □

对偶地，有上同调的万有系数定理：

定理 2.7. 给定环 R 和投射右 R 模组成的复形 $P_\bullet$，使得所有的子模 $\text{Im } \partial_{n+1}$ 也都是投射的，那么对于任意的左 R 模 N 和 $n \in \mathbb{Z}$，都存在正合序列

$$0 \to \text{Ext}_R^1(H_{n-1}(P_\bullet), N) \to H^n(P_\bullet; N) \to \text{Hom}_R(H_n(P_\bullet), N) \to 0.$$

引理 2.2. 给定主理想整环 R 和自由 R 模 M，则 M 的子模也是自由的.

定义. 设 $M^\bullet$ 是 R 模上链复形，若对每一个 $n \in \mathbb{Z}$，M^n 都是自由 R 模，则称 $M^\bullet$ 是自由链复形 (free cochain complex).

推论 2.7.1. 若 $P_\bullet$ 是承袭环 R 模的投射链复形，那么存在自然的正合序列

$$0 \to H_n(P_\bullet) \otimes_R N \to H_n(P_\bullet; N) \to \text{Tor}(H_{n-1}(P_\bullet), N) \to 0,$$

（非典范的）分裂. 对偶地，

证明. □

例 2.1. 若 $M_\bullet$ 是主理想整环 R 模的自由链复形，给定一个拓扑空间 X，

2.3.3 零调模型

定理 2.8. 给定环 R 的链复形 $C_\bullet, D_\bullet \in$，满足 $C_\bullet$ 是自由链复形，且 $D_\bullet$ 是零调的. 设 $\varphi_0: H_0(C_\bullet) \to H_0(D_\bullet)$ 是同态，则

1. 存在链同态 $f:C_\bullet \to D_\bullet$ 使得 $(f_*)_0 = \varphi_0$,
2. 任意满足如上性质的链同态都是同伦的.

2.4 双复形和链复形中的乘法对象

2.4.1 双复形和全复形

定义. 分次模/分次对象

定义. 设 M, N 是分次 R 模, 若 R 模态射 $f : M \to N$ 满足存在整数 d, 使得对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 都有 $f : M_n \to N_{n+k}$, 则称 f 是阶数为 k 的分次映射 (graded map of degree k).

命题 2.9. 若 $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$ 分别是阶数为 k, l 的分次映射, 则 $g \circ f$ 是阶数为 $k + l$ 的分次映射.

定义. 一个双分次模 (bigraded module) 是一族有两个指标的 R 模

$$M := \{M^{p,q}\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}},$$

一般我们记为 $M^{\bullet\bullet}$. 若 M, N 是双分次模, 一族映射

$$f = \{f^{p,q} : M^{p,q} \to N^{p+k,q+l}\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$$

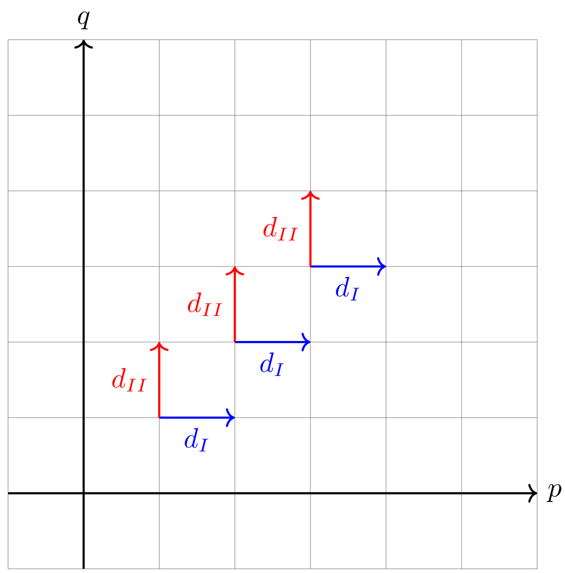
若都是 R 模映射, 则称 f 是阶数为 (k, l) 的双分次映射.

接下来我们都用上同调的序号记号.

定义. 设 M 是双分次 R 模, d_I, d_{II} 是两个阶数分别为 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 的双分次微分映射(即 $d_I^{p+1,q} \circ d_I^{p,q} = 0$, $d_{II}^{p,q+1} \circ d_{II}^{p,q} = 0$) . 若映射满足

$$d_I^{p,q+1} \circ d_{II}^{p,q} + d_{II}^{p+1,q} \circ d_I^{p,q} = 0,$$

则称 (M, d_I, d_{II}) 是一个**双复形** (bicomplex).



例 2.2. 设 M 是双分次 R 模，d_I,δ 是两个阶数分别为 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 的双分次微分映射，使得 M 是一个交换图（注意这和双复形差了一个符号！），那么我们可以通过符号变换构造一个双复形. 令 $d_{II}^{p,q}=(-1)^p\delta^{p,q}$，那么

$$d_I^{p,q+1}\circ d_{II}^{p,q}+d_{II}^{p+1,q}\circ d_I^{p,q}=$$

定义. 给定环 R 和 $M^\bullet\in\mathrm{Com}^\bullet(\mathbf{Mod}-R), N^\bullet\in\mathrm{Com}^\bullet(R-\mathbf{Mod})$，定义 $M^\bullet\otimes N^\bullet$ 是一个 $\mathbf{Ab}$ 上的双复形

$$\begin{aligned}M^\bullet\otimes N^\bullet=(M^i\otimes_R N^j,&d_I^{i,j}=d_M^i\otimes_R\mathrm{id}_{N^j}:M^i\otimes_R N^j\to M^{i+1}\otimes_R N^j\\&d_{II}^{i,j}=(-1)^i\mathrm{id}_{M^i}\otimes_R d_N^j:M^i\otimes_R N^j\to M^i\otimes_R N^{j+1})_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}},\end{aligned}$$

如下图

$$\begin{tikzcd}
M^i\otimes_R N^{j+1} \arrow[r, "d_I^{i+1,j}"] & M^{i+1}\otimes_R N^{j+1} \\
M^i\otimes_R N^j \arrow[u, "d_{II}^{i,j}"] \arrow[r, "d_I^{i,j}"'] & M^{i+1}\otimes_R N^j. \arrow[u, "d_{II}^{i,j+1}"']
\end{tikzcd}$$

注意到

$$\begin{aligned}&(d_I^{i,j+1}\circ d_{II}^{i,j}+d_{II}^{i+1,j}\circ d_I^{i,j})(m\otimes n)\\&=(-1)^i(d_M^i\otimes_R\mathrm{id}_{N^{j+1}})\circ(\mathrm{id}_{M^i}\otimes_R d_N^j)(m\otimes n)+(-1)^{i+1}(\mathrm{id}_{M^i}\otimes_R d_N^{j+1})\circ(d_M^i\otimes_R\mathrm{id}_{N^j})(m\otimes n)\\&=(-1)^i((d_M^i\otimes_R d_N^j)(m\otimes n)-(d_M^i\otimes_R d_N^j)(m\otimes n))\\&=0,\end{aligned}$$

因此 $M^\bullet\otimes N^\bullet$ 是双复形.

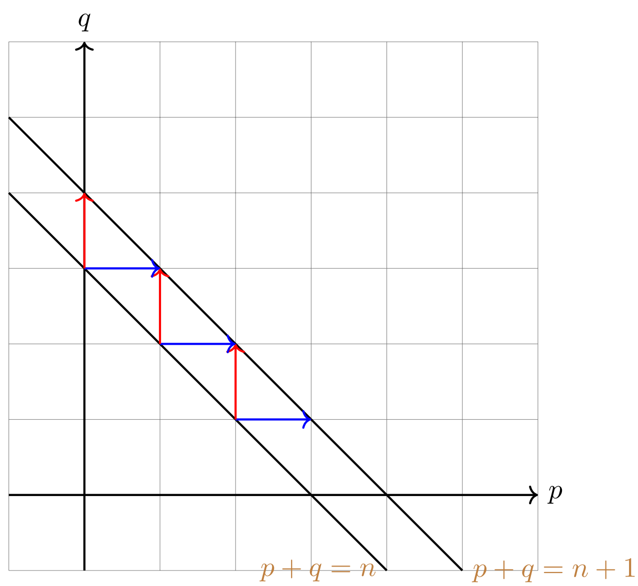
定义. 设 M 是双分次 R 模，那么

$$\mathrm{Tot}(M)^n := \bigoplus_{p+q=n} M^{p,q}$$

和 $D^n : \mathrm{Tot}(M)^n \to \mathrm{Tot}(M)^{n+1}$，

$$D^n := \sum_{p+q=n} (d_I^{p,q} + d_{II}^{p,q})$$

称为 M 的全复形 (total complex).



引理 2.3. *若 M 是双复形，则 $(\mathrm{Tot}(M), D)$ 是复形.*

很多时候，我们关心的上同调问题是某个双复形的全复形的上同调群，而谱序列就是一种计算全复形上同调群的某种技巧.

例 2.3. 设 M 是双分次 R 模，(M, d_I, d_{II}) 是一个双复形，那么我们可以定义双复形的转置 M^T：这意味着

$$\mathrm{Tot}(M) = \mathrm{Tot}(M^T).$$

2.4.2 复形中的乘法对象

定义. 给定 R 模复形 $M^\bullet$ 和 $N^\bullet$，那么它们的张量积 (tensor product)$(M \otimes N)^\bullet$ 满足

$$(M \otimes N)^n := \bigoplus_{i+j=n} M^i \otimes_R N^j,$$

微分映射由

$$\begin{aligned} d^n : (M \otimes N)^n &\to (M \otimes N)^{n+1} \\ x \otimes y &\mapsto d_M^n(x) \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes d_N^n(y) \end{aligned}$$

扩张给出.

我们来验证如上定义给出了一个上链复形:

如下命题说明这样的定义是自然的:

命题 2.10. 给定 R 模复形 $M^\bullet$ 和 $N^\bullet$, 记 $M^\bullet \otimes N^\bullet$ 是双复形

此处有图

那么

$$\mathrm{Tot}(M^\bullet \otimes N^\bullet) \simeq (M \otimes N)^\bullet.$$

证明. □

引理 2.4. 给定 R 模复形同态的同伦 $f_1^\bullet \simeq f_2^\bullet : M_1^\bullet \to M_2^\bullet$ 和 $g_1^\bullet \simeq g_2^\bullet : N_1^\bullet \to N_2^\bullet$, 那么存在链同伦

$$f_1^\bullet \otimes g_1^\bullet \simeq f_2^\bullet \otimes g_2^\bullet : (M_1 \otimes N_1)^\bullet \to (M_2 \otimes N_2)^\bullet,$$

特别地若有链同伦等价 $M_1^\bullet \simeq M_2^\bullet, N_1^\bullet \simeq N_2^\bullet$, 则有 $(M_1 \otimes N_1)^\bullet \simeq (M_2 \otimes N_2)^\bullet$.

如果将引理的链同伦换为拟同构, 则结论并不正确.

例 2.4.

$$\mathbb{Z}[m] \otimes \mathbb{Z}[n] = \mathbb{Z}[m+n],$$

$$(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m] \otimes \mathbb{Z}[n] = \mathbb{Z}[m] \otimes (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[n] = (\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m+n]$$

习题 2.1. 求证上链复形 $(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m] \otimes (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})[n]$ 的上同调群是

$$H^q((\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m] \otimes (\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})[n]) = \begin{cases} \mathbb{Z}/\gcd(k,l)\mathbb{Z} & q = m+n, m+n+1 \\ 0 & q \neq m+n, m+n+1. \end{cases}$$

命题 2.11. 给定 R 模复形 $M^\bullet$ 和 $N^\bullet$, 那么双线性函数

$$\begin{aligned} M^p \times N^q &\to (M \otimes N)^{p+q} \\ (x, y) &\mapsto x \otimes y \end{aligned}$$

诱导了上同调之间的映射
$$H^p(M^\bullet) \times H^q(N^\bullet) \to H^{p+q}((M \otimes N)^\bullet).$$

证明. 任取 $(x,y) \in Z^p(M^\bullet) \times Z^q(N^\bullet)$，按照定义
$$d(x \otimes y) = d_M^p(x) \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes d_N^q(y) = 0,$$
于是 $- \times -(Z^\bullet(M^\bullet) \times Z^\bullet(M^\bullet)) \subseteq Z^\bullet((M \otimes N)^\bullet)$. 类似地，任意 $(d_M^{n-1}(x), y) \in B^p(M^\bullet) \times Z^q(N^\bullet)$ 满足
$$d(x \otimes y) = d_M^{p-1}(x) \otimes y + (-1)^{\deg x} x \otimes d_N^{q-1}(y) = d_M^{p-1}(x) \otimes y,$$
因此 $- \times -(B^\bullet(M^\bullet) \times Z^\bullet(M^\bullet)) \subseteq B^\bullet((M \otimes N)^\bullet)$，对偶地 $- \times -(Z^\bullet(M^\bullet) \times B^\bullet(M^\bullet)) \subseteq B^\bullet((M \otimes N)^\bullet)$. 于是诱导的映射
$$H^p(M^\bullet) \times H^q(N^\bullet) \to H^{p+q}((M \otimes N)^\bullet)$$
满足 $([z^p],[z^q]) \mapsto [z^p \otimes z^q]$ 是良定义的，线性性是根据定义直接的. □

推论 2.11.1. 给定交换环 R 和 R 模上链复形 $S^\bullet$，对任意指标 p,q 存在双线性映射 $- \smile - : S^p \times S^q \to S^{p+q}$ 满足
$$d(\alpha \smile \beta) = d(\alpha) \smile \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \smile d(\beta), \tag{2.1}$$
那么有诱导的“乘法”
$$- \smile - : H^p(S^\bullet) \times H^q(S^\bullet) \to H^{p+q}(S^\bullet).$$

证明. 根据张量积的泛性质，存在 R 线性映射 $S^p \otimes_R S^q \dashrightarrow S^{p+q}$（也记为 $\smile$）满足交换图
$$\begin{tikzcd} S^p \times S^q \arrow[r, "\smile"] \arrow[d, "\otimes"'] & S^{p+q} \\ S^p \otimes_R S^q, \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$
于是等式2.1说明诱导的 $\smile$: $S^p \otimes_R S^q \dashrightarrow S^{p+q}$ 是链映射，因此存在
$$\smile: H^{p+q}((S \otimes S)^\bullet) \to H^{p+q}(S^\bullet).$$
复合命题2.11给出的上同调之间的映射，这样得到了所希望的 $- \smile - : H^p(S^\bullet) \times H^q(S^\bullet) \to H^{p+q}(S^\bullet)$. □

例 2.5. 给定拓扑空间，那么在 $S^\bullet(X)$ 上有定义的乘积

命题 2.12. 上同调的张量积满足:

1. 结合性: 对任意 $x \in H^p(M^\bullet), y \in H^q(N^\bullet), z \in H^r(L^\bullet)$,
$$(x \otimes y) \otimes z = x \otimes (y \otimes z),$$
2. 自然性: 任意给定上链映射 $f: M^\bullet \to U^\bullet$ 和 $g: N^\bullet \to V^\bullet$，那么对任意的 $x \in H^p(M^\bullet), y \in H^q(N^\bullet)$,
$$(f \otimes g)^{p+q}(x \otimes y) = f^p(x) \otimes g^q(y).$$

定理 2.13 (Künneth)**.** 给定环 R 和平坦右 R 模组成的复形 $P_\bullet$ 和左 R 模复形 $Q_\bullet$，使得所有的子模 $\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$ 也都是平坦的，那么对于任意的和 $n \in \mathbb{Z}$，都存在正合序列

$$0 \to \bigoplus_{p+q=n} H_p(P_\bullet) \otimes_R H_q(Q_\bullet) \to H_n((P \otimes Q)_\bullet) \to \bigoplus_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}_1^R(H_p(P_\bullet), H_q(Q_\bullet)) \to 0.$$

推论 2.13.1. 给定主理想整环 R 的自由 R 模上链复形 $M_1^\bullet, M_2^\bullet, N_1^\bullet, N_2^\bullet$，满足 $H^n(M_1^\bullet) \cong H^n(M_2^\bullet), H^n(N_1^\bullet) \cong H^n(N_2^\bullet)$ 对所有的 $n \in \mathbb{Z}$ 成立，那么 $H^n(M_1^\bullet \otimes M_2^\bullet) \cong H^n(N_1^\bullet \otimes N_2^\bullet)$ 对所有的 $n \in \mathbb{Z}$ 成立.

推论 2.13.2. 给定主理想整环 R 的自由 R 模上链复形 $M^\bullet, N^\bullet$，使得 $H^n(N^\bullet)$ 都是有限生成的自由模，那么

$$H^*(M^\bullet \otimes N^\bullet) \cong H^*(M^\bullet) \otimes H^*(N^\bullet).$$

这一小节的所有内容都可以形式地对偶到链复形的范畴上，得到相同的结果.

2.4.3 同调与上同调

这里我们只讨论上同调由同调给出的情形，另一种情形完全对偶地可以得出. 此时，假定 $(M_\bullet, \partial_\bullet^M), (N_\bullet, \partial_\bullet^N)$ 是给定的 R 模链复形，$(M^\bullet = \mathrm{Hom}_R(M_\bullet, R), d_M^\bullet = \mathrm{Hom}_R(\partial_\bullet^M, R)), (N^\bullet = \mathrm{Hom}_R(N_\bullet, R), d_N^\bullet = \mathrm{Hom}_R(\partial_\bullet^N, R))$ 是诱导的上链复形.

事实上，如此的设定并不是必须的，在后面的所有构造和证明中，我们真正用到的是给定一个 R 模复形 $(M_\bullet, \partial_\bullet^M)$ 和 R 模上链复形 $(M^\bullet, d_M^\bullet)$，存在 R 双线性的映射

$$\langle -, - \rangle : M^n \times M_n \to R$$

满足

$$\langle d(f), m \rangle = \langle f, \partial(m) \rangle$$

对任意 $f \in M^n, m \in M_n, n \in \mathbb{Z}$ 都成立. 但是，在本小节我们还是选择最初具体的假定，以帮助理解.

首先，命题2.11的对偶给出了链复形层面的张量积，而它本身给出了上链复形层面的张量积. 当上链复形是由链复形诱导时，张量积同样可以被诱导：

引理 2.5. 双线性函数

$$M^p \times N^q \to (M \otimes N)^{p+q}$$
$$(\alpha, \beta) \mapsto (\alpha \otimes \beta : (m, n) \mapsto \alpha(a)\beta(n))$$

诱导了 $(M \otimes N)^\bullet$ 的微分映射

$$d^n : (M \otimes N)^n \to (M \otimes N)^{n+1}$$
$$\alpha \otimes \beta \mapsto d_M^n(\alpha) \otimes \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \otimes d_N^n(\beta),$$

且给出了上同调类的张量积

$$H^p(M^\bullet) \times H^q(N^\bullet) \to H^{p+q}((M \otimes N)^\bullet).$$

证明. 计算可得

$$\begin{aligned}\langle d(\alpha\otimes\beta), a\otimes b\rangle &= \langle \alpha\otimes\beta, \partial(a\otimes b)\rangle \\ &= \langle \alpha\otimes\beta, \partial(a)\otimes b + (-1)^{\deg a} a\otimes\partial(b)\rangle \\ &= \langle \alpha, \partial(a)\rangle\langle\beta, b\rangle + (-1)^{\deg a}\langle\alpha, a\rangle\langle\beta, \partial(b)\rangle \\ &= \langle d\alpha, a\rangle\langle\beta, b\rangle + (-1)^{\deg\alpha}\langle\alpha, a\rangle\langle d\beta, b\rangle \\ &= \langle d(\alpha)\otimes\beta + (-1)^{\deg\alpha}\alpha\otimes d(\beta), a\otimes b\rangle,\end{aligned}$$

于是 □

此时，同调与上同调存在相互的作用：

命题 2.14. 双线性函数

$$\begin{aligned}-\frown - : N^q\times(M\otimes N)_{p+q} &\to M_p \\ (\beta, a\otimes b) &\mapsto \beta(b)a\end{aligned}$$

对任意 $\beta\in N^q, c\in(M\otimes N)_{p+q}$ 满足

$$\partial(\beta\frown c) = (-1)^p d\beta\frown c + \beta\frown(\partial c),$$

于是诱导了上同调在同调上的乘积

$$H^q(N^\bullet)\times H_{p+q}((M\otimes N)^\bullet)\to H_p(M_\bullet).$$

证明. 设 $c=\sum_{i=0}^N a_i\otimes b_i$，那么

$$\begin{aligned}\beta\frown(\partial c) &= \beta\frown\left(\sum_{i=0}^N \partial a_i\otimes b_i + \sum_{i=0}^N (-1)^{\deg a_i} a_i\otimes\partial b_i\right) \\ &= \sum_{i=0}^N \beta(b_i)\partial a_i + \sum_{i=0}^N (-1)^{\deg c-\deg b_i}\beta(\partial b_i)a_i \\ &= \partial\sum_{i=0}^N \beta(b_i)a_i + \sum_{i=0}^N (-1)^{\deg c-\deg\beta-1} d\beta(b_i)a_i \\ &= \partial(\beta\frown c) - (-1)^{\deg c-\deg\beta} d\beta\frown c.\end{aligned}$$

□

例 2.6. 给定拓扑空间 X，

命题 2.15. 任意给定 $\alpha\in H^p(M^\bullet),\beta\in H^q(N^\bullet),\gamma\in H^r(L^\bullet),a\in H_{p+q}(M\otimes N),b\in H_{p+q+r}(M\otimes N\otimes L)$，满足

1. 结合性: $(\beta \otimes \gamma) \frown c = \beta \frown (\gamma \frown c)$,
2. 对偶性: $\langle \alpha \otimes \beta, b \rangle = \langle \alpha, \beta \frown b \rangle$,
3. 自然性: 任意给定上链映射 $f : M_\bullet \to U_\bullet$ 和 $g : N_\bullet \to V_\bullet$, 那么对任意的 $x \in H^p(M^\bullet), y \in H^q(N^\bullet)$,

$$f_*((g^*\beta) \frown b) = \beta \frown (f \otimes g)(b),$$

用交换图表示为

$$\begin{tikzcd} N^q & \times & (M \otimes N)_{p+q} \arrow[r, "\frown"] \arrow[d, "f\otimes g"] & M_p \arrow[d, "f"] \\ V^q \arrow[u, "g"] & \times & (U \otimes V)_{p+q} \arrow[r, "\frown"] & U_p \end{tikzcd}$$

2.5 一个例子:

我们感兴趣的是一类特殊图的极限, 被称为 Abel 群组成的塔 (tower of abelian groups), 其中指标集 $I = \mathbb{N}^\circ$ 是偏序集

$$\cdots \to 2 \to 1 \to 0,$$

用 **Ab** 中的对象表示就是

$$\cdots \to A_2 \to A_1 \to A_0,$$

或者更形式地, 这样一个对象就是函子

$$A : \mathbb{N}^\circ \to \mathbf{Ab}.$$

它的极限 $\lim_\leftarrow A_n$

$$\alpha : \prod_{i\in\mathbb{N}^\circ} A_i \to \prod_{i\in\mathbb{N}^\circ} A_i$$

定义. 给定一个 Abel 群塔 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, 考虑映射

$$\Delta : \prod_{i\in\mathbb{N}^\circ} A_i \to \prod_{i\in\mathbb{N}^\circ} A_i,$$

其中 $\Delta = \mathrm{id} - \alpha$, 定义

$$\lim_{\leftarrow}^{n} A_i := \begin{cases} \lim_\leftarrow A_i & n = 0 \\ \mathrm{Coker}\ \Delta & n = 1 \\ 0 & \text{其他情况}. \end{cases}$$

定义. 设一个 Abel 群塔 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 若满足对任意 $m \geq 0$，都存在 $n \geq m$ 使得 $i \geq n$ 时，映射

$$A_i \to A_m$$

的像对所有的 i 都相同，则称 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 Mittag-Leffler 条件.

定理 2.16. *若 Abel 群塔 $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 满足 Mittag-Leffler 条件，那么*

$$\lim_{\leftarrow}{}^{1} A_n = 0.$$

证明. □

命题 2.17. *设 $\cdots \to A_2 \to A_1 \to A_0$ 是一个正向系，满足任意 A_i 都是零调的 Abel 群上链复形，且所有的 $A_{i+1} \to A_i$ 都是满射，那么 $\lim_{\leftarrow} A_n$ 也是零调的.*

第三章　谱序列

同调代数关心了许多基本的问题，比如给定 R 模 M 的子模 K 同态 $f: K \to N$，

3.1　滤子和正合对

定义. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴，X 是 $\mathcal{A}$ 中的对象，则 X 的一个递降滤子 (descending filtration)是一族 X 的子对象 $\{F_nX\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足

$$X \supseteq \cdots \supseteq F_nX \supseteq F_{n+1}X \supseteq \cdots 0.$$

对偶地，若 X 的子对象 $\{F^nX\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足

$$0 \subseteq \cdots \subseteq F^nX \subseteq F^{n+1}X \subseteq \cdots X,$$

则称这是递增滤子 (ascending filtration).

如上定义中递增与递降事实上只是对偶的存在，递降滤子用于处理上同调的情形，递增滤子处理同调的情形. 略微不同于之前的讨论，谱序列中虽然同调与上同调依然是对偶的，但实际的处理会非常麻烦. 因此我们这章选择列出包含对偶的结果，但证明则是完全对称的.

例 3.1. 取 Abel 范畴

定义. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴，D, E 是 $\mathcal{A}$ 中的对象，f, g, h 是映射，若

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "f"] & & D \arrow[dl, "g"] \\ & E \arrow[ul, "h"] & \end{tikzcd}$$

是正合的，那么称 (D, E, f, g, h) 是正合对 (exact couple).

定理 3.1. 每一个 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 中的上链 $X^\bullet$ 的滤子 $F_pX^\bullet$ 都给出一个正合对

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "f\ (-1{,}1)"] & & D \arrow[dl, "g\ (0{,}0)"] \\ & E, \arrow[ul, "h\ (1{,}0)"] & \end{tikzcd}$$

其中映射的度在图中已经标出.

证明. 我们有复形的短正合列

$$0 \to F_{p+1}X^\bullet \xrightarrow{i_{p+1}} F_pX^\bullet \xrightarrow{\pi_p} F_pX^\bullet/F_{p+1}X^\bullet \to 0,$$

这诱导了上同调群的长正合序列

$$\begin{aligned} \cdots \to & H^n(F_{p+1}X^\bullet) \xrightarrow{H^n(i_{p+1})} H^n(F_pX^\bullet) \xrightarrow{H^n(\pi_p)} H^n(F_pX^\bullet/F_{p+1}X^\bullet) \to \\ \xrightarrow{\delta^n} & H^{n+1}(F_{p+1}X^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(i_{p+1})} H^{n+1}(F_pX^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(\pi_p)} H^{n+1}(F_pX^\bullet/F_{p+1}X^\bullet) \to \cdots . \end{aligned}$$

我们取 $n = p+q$，$f = H^\bullet(i_{p+1}), g = H^\bullet(\pi_p), h = \delta^\bullet$，并且

$$\begin{aligned} D &= \{D^{p,q} := H^{p+q}(F_pX^\bullet)\} \\ E &= \{E^{p,q} := H^{p+q}(F_pX^\bullet/F_{p+1}X^\bullet)\} \end{aligned}$$

代入到长正合序列中即为

$$\cdots \to D^{p+1,q-1} \xrightarrow{f^{p+1,q-1}} D^{p,q} \xrightarrow{g^{p,q}} E^{p,q} \xrightarrow{h^{p,q}} D^{p+1,q} \to \cdots .$$

□

定义. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴，X 是 $\mathcal{A}$ 中的双分次对象，d 是双分次映射满足 $d \circ d = 0$，则称 (X, d) 是微分双分次对象 (differential bigraded object).

若 (X, d) 是微分双分次对象，d 的阶数为 (k, l)，那么定义 (X, d) 的上同调为

$$H(X, d)^{p,q} := \frac{\ker\ d^{p,q}}{\mathrm{im}\ d^{p-k,q-l}}.$$

定理3.1于是可以描述为，上链的（递降）滤子给出双分次正合对.

定理 3.2. *若 (D, E, f, g, h) 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的一个正合对，那么 $d := g \circ h : E \to E$ 给出 $\mathcal{A}$ 上的一个微分对象 (E, d)，且存在一个新的正合对 $(D_2, E_2, f_2, g_2, h_2)$*

$$\begin{tikzcd} D_2 \arrow[rr, "f_2"] & & D_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & E_2, \arrow[ul, "h_2"] & \end{tikzcd}$$

满足 $E_2 = H(E, d)$，称为导出对 (derived couple).

证明. 首先我们验证微分. 按照定义，$d\circ d=(g\circ h)\circ(g\circ h)=g\circ(h\circ g)\circ h=g\circ 0\circ h=0$.

按照条件定义 E_2 是子商对象 $H(E,d)$，定义 D 的子对象

$$D_2:=\mathrm{im}\ f\subseteq D,$$

且 $f_2:=f|_{D_2}=f\circ\iota$，其中 $\iota:D_2\hookrightarrow D$ 是嵌入. □

从证明中可以看出，诱导对中的 D_2 是子对象，诱导的态射 f_2 是限制，而 E_2 是 E 的子商对象. 在 $\mathcal{A}$ 是 $R-\mathbf{Mod}$ 时，g_2,h_2 有简单的描述：

1. 任取 $y\in D_2$，因此存在 $x\in D$ 使得 $y=f(x)$，且 $g(x)$ 是上闭链（直接验证 $d(g(x))=g\circ h(g(x)=g(h\circ g(x)))=0$），于是 g_2 可以定义为 $g(x)$ 所代表的 $H(E,d)$ 中的元素，即

$$\begin{aligned}g_2:D_2&\to E_2\\ y=f(x)&\mapsto[g(x)].\end{aligned}$$

2. 任取 $[z]\in E_2$，其中 $z\in E$ 是上闭链满足 $0=d(z)=g(h(z))$，于是 $h(z)\in\mathrm{Ker}\ g=\mathrm{Im}\ f=D_2$，因而 $h_2([z])$ 可以定义为 $h(z)$，即

$$\begin{aligned}h_2:E_2&\to D_2\\ [z]&\mapsto h(z).\end{aligned}$$

二者由于恰是证明中所描述的态射，因而良定义与正合性是已经证明的.

推论 3.2.1. *每一个 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的上链 $X^\bullet$ 的滤子 $F^pX^\bullet$ 都给出一族正合对*

$$\begin{tikzcd} D_r \arrow[rr, "f_r\ (1,-1)"] & & D_r \arrow[dl, "g_r\ (1-r,r-1)"] \\ & E_r, \arrow[ul, "h_r\ (-1,2)"] & \end{tikzcd}$$

且满足

1. 双分次映射 f_r,g_r,h_r 的度分别为 $(1,-1),(1-r,r-1)$ 和 $(-1,2)$.

2. 微分 d_r 的度为 $()$，它由 $hf_{-r+1}g$ 诱导.

证明. □

定义. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴，$\mathcal{A}$ 上的谱序列 $(E_r,d_r)_{r\geq 0}$ 是一族 $\mathcal{A}$ 中的对象和态射的全体 $E=(E_r^{p,q},d_r^{p,q})$，满足

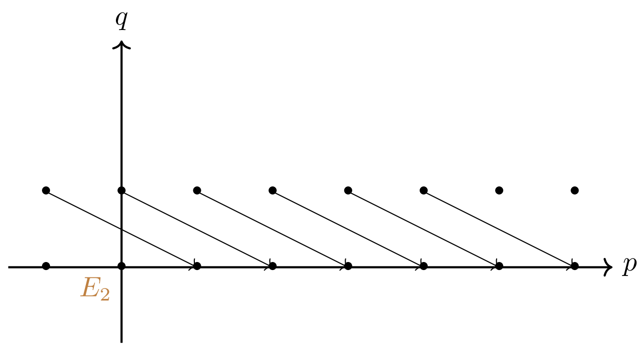
1. 态射 $d_r^{p,q}:E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}$ 定义在第 r 页，且是微分映射，即 $d_r^{p+r,q-r+1}\circ d_r^{p,q}=0$.

2. 有同构

$$H^{p,q}(E_r):=\frac{\mathrm{Ker}\ d_r^{p,q}}{\mathrm{Im}\ d_r^{p+r,q-r+1}}\cong E_{r+1}^{p,q}.$$

推论3.2.1并没有给出第 0 页的描述，但实际上它是存在的，我们将会在后面讨论.

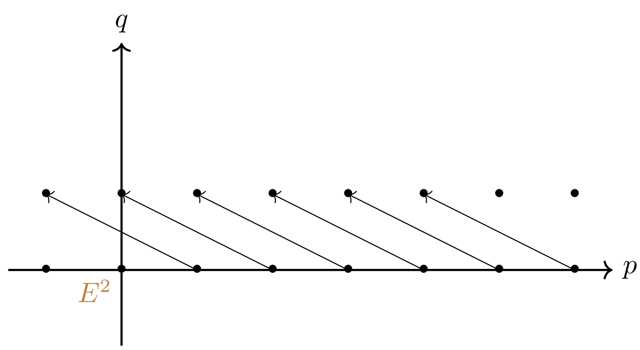
通常谱序列用图来表示更加容易，这里我们画出了第一页第二页



和第三页

的情形. 可以看到，微分映射的阶数是随着页数的变化而变化的.

如上定义是上同调谱序列的定义，对偶地还有同调谱序列



习题 3.1. 给定谱序列 $(E_r, d_r)_{r\geq 0}$，p, q 是给定的整数. 求证若

3.2　收敛性

若 $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$ 是谱序列，那么 $E_2 = H(E_2, d_2)$ 是 E_1 的子商：$E_2 := Z_2/B_2$. 同理我们知道 E_3 是 E_2 的子商，且

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots B_r \subseteq \cdots \subseteq Z_r \subseteq Z_2 \subseteq Z_1 \subseteq E_1.$$

定义. 给定谱序列 $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$，定义 $Z_\infty := \bigcap_{r\geq 1} Z_r$，$B_\infty := \bigcup_{r\geq 1} B_r$，则谱序列的极限项 (limit term) 为

$$E_\infty^{p,q} := \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q}}.$$

借用 MacLane 的描述，Z^r 是出现到第 r 页的对象，B^r 是被第 r 页限制的对象，而 Z^∞ 和 B^∞ 是一直出现和最终被限制的对象.

引理 3.1. 设 $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$ 是谱序列，那么

1. $E_{r+1} = E_r$ 当且仅当 $Z_{r+1} = Z_r, B_{r+1} = B_r$.
2. 若存在 s 使得对任意 $r \geq s$ 都有 $E_{r+1} = E_r$，则 $E_\infty = E_s$.

例 3.2.

考虑 $\mathcal{A}$ 中上链 $X^\bullet$ 的一个滤子 $F^pX^\bullet$，于是我们有单同态 $i^p : F^pX^\bullet \to X^\bullet$，这诱导了 $H^n(i^p) : H^n(F^pX^\bullet) \to H^n(X^\bullet)$. 由于 $F^pX^\bullet \subseteq F^{p-1}X^\bullet$，我们有 $\mathrm{Im}\ H^n(i^p) \subseteq \mathrm{Im}\ H^n(i^{p-1}) \subseteq H^n(X^\bullet)$，这意味着

$$\Phi^p H^n(X^\bullet) := \mathrm{Im}\ H^n(i^p)$$

是 $H^n(X^\bullet)$ 的一个滤子，称为 $F^pX^\bullet$ 的诱导滤子 (derived filtration).

定义. 设 $X^\bullet$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的上链，$F^pX^\bullet$ 是上链的滤子. 若 $\forall n \in \mathbb{Z}$ 都能找到整数 $l(n)$ 和 $u(n)$ 使得 $F^{u(n)}X^n = 0$ 且 $F^{l(n)}X^n = X^n$，则称滤子 $F^pX^\bullet$ 是有界的 (bounded).

定义. 给定 Abel 范畴中的谱序列 $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$，若存在分次对象 H^n 和 H^n 的有界滤子 $\Phi^p H^n$ 满足

$$E_\infty^{p,q} \cong \frac{\Phi^p H^n}{\Phi^{p+1} H^n},$$

则称谱序列 $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$ 收敛到 (converges to)H^n，记为

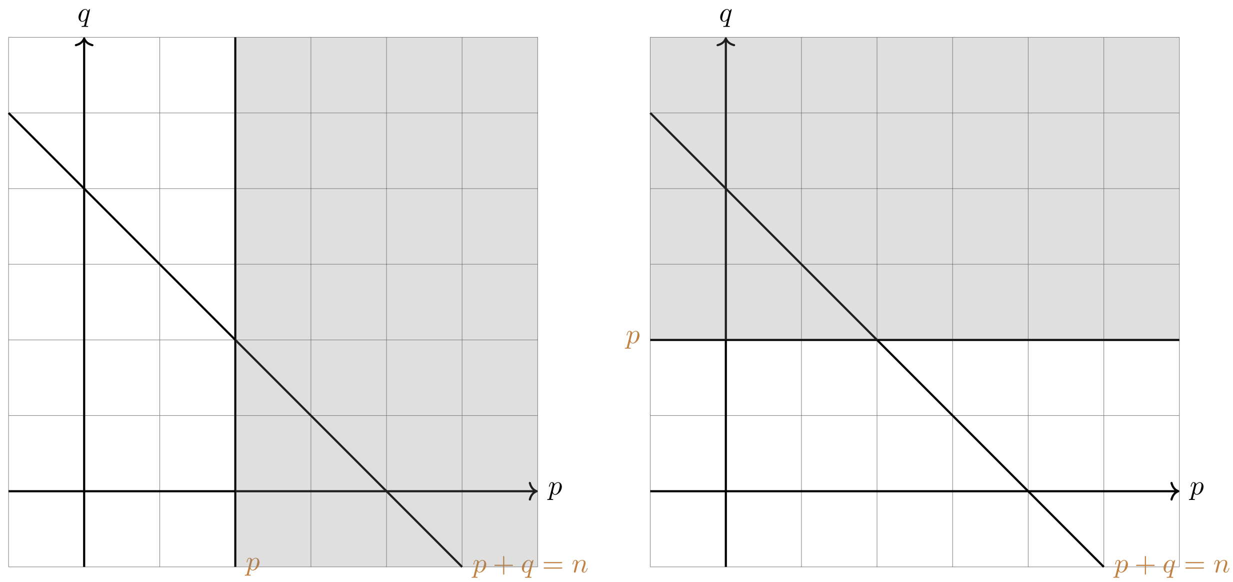
$$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n.$$

定理 3.3. *Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的上链 $X^\bullet$ 的滤子 $F^pX^\bullet$ 给出的谱序列 $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$ 都满足*

1. 对任意给定的 p, q 都存在 r 使得 $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.
2. $E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$.

证明. □

命题 3.4. 设 $X^{\bullet\bullet}$ 是三象限双复形，且设 ${}^IE_r^{p,q}, {}^{II}E_r^{p,q}$ 是 $\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet})$ 的第一滤子和第二滤子所诱导的谱序列，那么



(a) 第一滤子 (b) 第二滤子

1. 第一滤子和第二滤子都是有界的.
2. 对任意 p, q 都存在页数 $r = r(p,q)$ 使得 ${}^{I}E_{\infty}^{p,q} ={}^{I} E_r^{p,q}, {}^{II}E_r^{p,q} ={}^{II} E_{\infty}^{p,q}$.
3. ${}^{I}E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$ 且 ${}^{II}E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.

虽然这个结果看上去很不错，但不论是符号上还是实际计算上这些都并不能够帮助我们.

3.3 全复形的上同调

定义. 设 M 是双分次 R 模，(M, d_I, d_{II}) 是一个双复形，那么称

$$({}^{I}F^p\mathrm{Tot}(M))^n := \bigoplus_{i \geq p} M^{i,n-i} = \cdots \oplus M^{p+2,q-2} \oplus M^{p+1,q-1} \oplus M^{p,q}$$

为 $\mathrm{Tot}(M)$ 的第一滤子 (the first filtration)，称

$$({}^{II}F^p\mathrm{Tot}(M))^n := \bigoplus_{j \geq p} M^{n-j,j} = \cdots \oplus M^{p-2,q+2} \oplus M^{p-1,q+1} \oplus M^{p,q}$$

为 $\mathrm{Tot}(M)$ 的第二滤子 (the second filtration).

定义. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的三象限双复形 $X^{\bullet\bullet}$, 称 $H_I^p(H_{II}^q(X^{\bullet\bullet}))$ 为 $X^{\bullet\bullet}$ 的第一上同调 (the first iterated cohomology)，称 $H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet}))$ 为 $X^{\bullet\bullet}$ 的第二上同调 (the second iterated cohomology).

定理 3.5. *给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的三象限双复形 $X^{\bullet\bullet}$，则*

1. ${}^IE_1^{p,q} = H_{II}^q(X^{p,\bullet})$.
2. ${}^IE_2^{p,q} = H_I^p(H_{II}^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.

对偶地，我们同样有

定理 3.6. *给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的三象限双复形 $X^{\bullet\bullet}$，则*

1. ${}^{II}E_1^{p,q} = H_I^q(X^{\bullet,p})$.
2. ${}^{II}E_2^{p,q} = H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.

例 3.3. 给定 R 模范畴中的交换图

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "g"] & Q \\ M \arrow[u, "h"] \arrow[r, "f"] & N \arrow[u, "k"'] \end{tikzcd},$$

做适当的变换我们得到一个三象限双复形 $X^{\bullet\bullet}$，我们考虑 N, P 都是 Q 的子模的特殊情形，来计算该双复形的全复形

$$0 \to M \xrightarrow{()} P \oplus N \xrightarrow{g+k} Q$$

的上同调.

定义. 设 $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$ 是 Abel 范畴中的谱序列，若 $E_2^{p,q} = 0$ 对所有非零的 q 都成立，则称 E_r 落在 p 轴上 (collapses on the p-axis).

命题 3.7. *设 $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$ 三象限谱序列，且 $E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$，若称 E_r 落在任意轴上，则*

1. $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ *对任意 p, q 成立.*
2. *若 E_r 落在 p 轴上，则 $H^n(X^\bullet) = E_2^{n,0}$；若 E_r 落在 q 轴上，则 $H^n(X^\bullet) = E_2^{0,n}$.*

定理 3.8. 给定 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 中的三象限谱序列 $(E_r, d_r)_{r\geq 1}$，且 $E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$，则

1. 对任意 n 都存在满同态 $E_2^{n,0} \to E_\infty^{0,n}$ 和单同态 $E_2^{0,n} \to E_\infty^{n,0}$.
2. 对任意 n 都存在满同态 $E_\infty^{n,0} \to H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$ 和单同态 $E_\infty^{0,n} \to H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.
3. 存在正合序列
$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet})) \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to H^2(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$$

例 3.4. 给定 Abel 群的上链复形 $C^\bullet$，$A^\bullet$ 是 $C^\bullet$ 的子复形，考虑如下谱序列，其中第 0 页为

$$\begin{tikzcd}
C^0/A^0 \arrow[d] & \\
C^1/A^1 \arrow[d] & A^0 \arrow[d] \\
C^2/A^2 \arrow[d] & A^1 \arrow[d] \\
C^3/A^3 \arrow[d] & A^2 \arrow[d] \\
\vdots & \vdots
\end{tikzcd}$$

3.4 Cartan-Eilenberg 预解

定义. 设 $X^\bullet$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的上链，那么称

$$0 \to Z^n \to X^n \xrightarrow{d^n} B^{n+1} \to 0$$
$$0 \to B^n \hookrightarrow Z^n \to H^n \to 0$$

为 $X^\bullet$ 的基本短正合列 (fundamental exact sequence). 若上链复形 $X^\bullet$ 的基本短正合列都分裂，则称 $X^\bullet$ 分裂 (split).

定义. 设 $X^\bullet$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 上的上链，如果

$$0 \to X^\bullet \to I^{0,\bullet} \to I^{1,\bullet} \to \cdots$$

是整合列且对每个 p 以下每个整合列都是 $\mathcal{A}$ 中的内射预解

$$\begin{gathered}0 \to X^p \to I^{0,p} \to I^{1,p} \to \cdots \\ 0 \to Z^p(X^\bullet) \to Z^{0,p} \to Z^{1,p} \to \cdots \\ 0 \to B^p(X^\bullet) \to B^{0,p} \to B^{1,p} \to \cdots \\ 0 \to H^p(X^\bullet) \to H^{0,p} \to H^{1,p} \to \cdots\end{gathered}$$

则称这是 $X^\bullet$ 的一个 Cartan-Eilenberg 内射预解 (Cartan-Eilenberg injective resolution).

定理 3.9. *若 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中包含有足够多的内射对象，则 $\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 中的每个上链复形都有 Cartan-Eilenberg 内射预解.*

3.5 Kunneth 谱序列

3.6 Grothendieck 谱序列

定义. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴，且含有足够多的内射对象，X 是 $\mathcal{A}$ 的对象，$F : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbf{Ab}$ 是加性函子. 若 $R^pF(X) = 0$ 对于任意 $p \geq 1$ 都成立，则称 X 是右 F 零调的 (right F-acyclic).

定理 3.10 (Grothendieck 谱序列)**.** *设 $F : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{B}, G : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathcal{C}$ 是 Abel 范畴间的协变加性函子，且 $\mathcal{B}$ 中包含足够多的内射对象，F 将 $\mathcal{A}$ 中的内射对象映为 $\mathcal{B}$ 中的右 G 零调对象. 那么对任意 $\mathcal{A}$ 中的对象 X，存在第一象限的收敛谱序列*

$$E_2^{p,q} := (R^pG \circ R^qF)(X) \Rightarrow R^{p+q}(G \circ F)(X).$$

证明. 选取 X 在 $\mathcal{A}$ 中的一个内射预解

$$0 \to X \to J^1 \to J^2 \to \cdots,$$

于是我们得到 $\mathcal{B}$ 中的一个 □

第四章　导出范畴

在之前非常多的情形中，当求得一个上链后，我们只关心它的上同调，对于上同调相同而各项和微分可能不同的上链并不做区别. 形式上说，上链之间的同构过分严格，拟同构才是合适的进行分类的等价关系. 但是在范畴

$$\mathrm{Com}^{\bullet}(\mathcal{A})$$

中，若态射 $f^{\bullet}$ 是拟同构，它很难是同构，这就导致了很多问题，比如函子 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,-)$ 并不将拟同构映成拟同构. 本章我们要建立形式化的语言，用同构的方式处理拟同构，也给导出函子建立更一般的框架.

4.1　范畴的局部化

定理 4.1. *设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，U 是其中的一族态射，则存在同构下唯一的范畴 $\mathcal{C}[U^{-1}]$ 和函子 $Q:\mathcal{C}\to\mathcal{C}[U^{-1}]$，使得 U 中所有的态射都被 Q 映到 $\mathcal{C}[U^{-1}]$ 中的同构，且满足如下泛性质：对任意范畴 $\mathcal{D}$ 和任意函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，若 F 将 U 中所有的态射映到 $\mathcal{D}$ 中的同构，则有唯一的分解*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{C}[U^{-1}] \arrow[d, dashed, "\tilde{F}"] \\ & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

我们称范畴 $\mathcal{C}[U^{-1}]$ 为的 $\mathcal{C}$ 局部化 (localization).

习题 4.1. 定义范畴 $\mathcal{D}$ 满足 $\mathrm{ob}\ \mathcal{D}=\mathrm{ob}\ \mathbf{Ab}$，$\hom_{\mathcal{D}}(A,B):=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\otimes\mathbb{Q},B\otimes\mathbb{Q})$. 求证函子

$$\begin{aligned} \iota:\mathbf{Ab}&\to\mathcal{D}\\ M&\mapsto M\\ (f:M\to N)&\mapsto(f\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}:M\otimes\mathbb{Q},N\otimes\mathbb{Q}) \end{aligned}$$

是局部化.

这里需要注意，因为范畴中的一族态射 U 可以取得非常不理想，因此局部化之后的范畴可能并非再是局部小的. 但这里我们忽略这样的问题，我们假定（虽然并不真实，但相较于主要问题，范畴本身的问题需要在其他的地方讨论）我们还是得到想要的范畴.

定义. 设 U 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族态射，满足如下条件：

1. 对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A，$\mathrm{id}_A \in U$，且 U 关于态射的复合封闭，
2. (扩张条件) 对任意 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : A \to B$ 和 U 中的态射 $u : C \to B$，存在 $\mathcal{C}$ 中的态射 $g : D \to C$ 和 U 中的态射 $v : D \to A$ 使得

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & C \arrow[d, "u"] \\ A \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$

对偶地，对任意 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : B \to A$ 和 U 中的态射 $u : B \to C$，存在 $\mathcal{C}$ 中的态射 $g : C \to D$ 和 U 中的态射 $v : A \to D$ 使得

$$\begin{tikzcd} D & C \arrow[l, "g"'] \\ A \arrow[u, "v"] & B, \arrow[l, "f"] \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$

3. 对任意 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f, g : A \rightrightarrows B$，存在 $u \in U$ 使得 $uf = ug$ 当且仅当存在 $v \in U$ 使得 $fv = gv$，

则称这一族态射 U 是局部的 (localizing).

习题 4.2. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴，$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的满子范畴，且 $\mathcal{B}$ 对求子对象和商对象封闭. 求证

$$U := \{f : X \to Y \mid \ker f, \operatorname{coker} f \in \mathcal{B}\}$$

是局部态射族.

我们大费周章地考虑对求逆态射的限制条件，重要的是当态射族 U 满足这些条件时，局部化范畴中的态射时非常容易描述的：

引理 4.1. 设 U 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族局部态射，那么 $\mathcal{C}[U^{-1}]$ 可以被如下地描述：$\mathcal{C}[U^{-1}]$ 的对象同于 $\mathcal{C}$ 中的对象，$A \to B$ 的态射可以被描述为如下的图的等价类：

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A & & B, \end{tikzcd}$$

其中，$u \in U$，$f : D \to B$ 是任意 $\mathcal{C}$ 中的态射，记为 $\frac{f}{u}$ 或者 fu^{-1}. 且 $\frac{f}{u}$ 等价于 $\frac{g}{v}$ 当且仅当存在 $\frac{h}{w}$ 使得如下图交换

$$\begin{tikzcd} & & F \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[drrr, "f"' near start] & & E \arrow[dlll, "v" near start] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & & & B, \end{tikzcd}$$

其中图中 $u, v, uw \in U$（但 w 可能不在 U 中），恒等态射是 $\mathrm{id}_A = \frac{\mathrm{id}_A}{\mathrm{id}_A}$. 最后，根据定义中的扩张条件，$\frac{f}{u}: A \to B$ 与 $\frac{g}{v}: B \to C$ 的复合是

$$\begin{tikzcd}
 & & F \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
 & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & & E \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
 & F \arrow[dl, "uw"'] \arrow[dr, "gh"] & \\
A & & C.
\end{tikzcd}$$

证明. 我们首先验证如上定义了一个等价关系. 自反性是考虑下图

$$\begin{tikzcd}
 & & D \arrow[dl, "\mathrm{id}_D"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_D"] & & \\
 & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[rrrd, "f"' near end] & & D \arrow[llld, "u" near end] \arrow[dr, "f"] & \\
A & & & & B,
\end{tikzcd}$$

对称性是已知

$$\begin{tikzcd}
 & & F \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
 & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[rrrd, "f"' near end] & & E \arrow[llld, "v" near end] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & & & B,
\end{tikzcd}$$

其中按定义 $vh = uw \in U$，于是

$$\begin{tikzcd}
 & & F \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "w"] & & \\
 & E \arrow[dl, "v"'] \arrow[rrrd, "g"' near end] & & D \arrow[llld, "u" near end] \arrow[dr, "f"] & \\
A & & & & B,
\end{tikzcd}$$

给出了等价关系. 接下来是传递性，给定 $X \to Y$ 的等价代表元

$$\begin{tikzcd}
 & & M \arrow[dl, green, "w"'] \arrow[dr, green, "h"] & & \\
 & A_1 \arrow[dl, red, "u"'] \arrow[rrrd, "f"' near end] & & A_2 \arrow[llld, red, "v" near end] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & & & Y
\end{tikzcd}$$

和 $Y \to Z$ 的等价代表元

$$\begin{tikzcd}
& & N \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
& B_1 \arrow[dl, "u"'] \arrow[drrr, "f"] & & B_2 \arrow[dlll, "v"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Y & & & & Z,
\end{tikzcd}$$

为方便读图，红色表示 U 中的态射，绿色表示复合特定 U 中的态射后是 U 中的态射（例如 w 本身不是 U 中的态射但 uw 是 U 中的态射），于是根据扩张条件可以找到 C_1, C_2 使得交换图

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r] \arrow[d, "w_1"] & B_1 \arrow[d, "v_1"] \\
A_1 \arrow[r, "f_1"] & Y
\end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[r] \arrow[d, "w_2"] & B_2 \arrow[d, "v_2"] \\
A_2 \arrow[r, "f_2"] & Y
\end{tikzcd}$$

成立，这是在不同代表元下的复合. 我们希望找到对象 P 给出交换图

$$\begin{tikzcd}
& & & & P \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & \\
& & & C_1 \arrow[ddll, bend right, "w_1"'] \arrow[ddrr] & & C_2 \arrow[ddll, "w_2"'] \arrow[ddrr, bend left] & & & \\
& & M \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "h"] & & & & N \arrow[dl, "q"'] \arrow[dr, "k"] & & \\
& A_1 \arrow[dl, "u_1"'] \arrow[drrr, "f_1"] & & A_2 \arrow[dlll, "u_2"'] \arrow[dr, "f_2"] & & B_1 \arrow[dl, "v_1"'] \arrow[drrr, "g_1"] & & B_2 \arrow[dlll, "v_2"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
X & & & & Y & & & & Z,
\end{tikzcd}$$

进而说明复合 $[X \leftarrow C_1 \to Z]$ 与 $[X \leftarrow C_2 \to Z]$ 是等价的. 再次根据扩张条件可以找到

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \arrow[r] \arrow[d] & C_1 \arrow[d, "u_1 w_1"] \\
M \arrow[r, "u_1 p"] & X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Q_2 \arrow[r] \arrow[d] & Q_1 \arrow[d, "u_1 w_1"] \\
N \arrow[r, "u_1 p"] & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d] & C_2 \arrow[d, "w_2"] \\
Q_2 \arrow[r, "u_1 p"] & A_2
\end{tikzcd}$$

接下来我们要验证态射的复合不依赖于代表元的选取.

最后我们验证这样构造的范畴具有相应的泛性质，因而这个范畴是我们希望的局部化. 首先，存在自然的局部化函子

$$\begin{aligned} Q : \mathcal{C} &\to \mathcal{C}[U^{-1}] \\ A &\mapsto A \\ (f : A \to B) &\mapsto \frac{f}{\mathrm{id}_A}, \end{aligned}$$

这样对于任意的 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，若 F 将 U 中所有的态射映到 $\mathcal{D}$ 中的同构，可以定义

$$\begin{aligned} \bar{F} : \mathcal{C}[U^{-1}] &\to \mathcal{D} \\ A &\mapsto F(A) \\ \frac{f}{u} &\mapsto F(f)F(u)^{-1}, \end{aligned}$$

(这里的顺序是重要的:) □

习题 4.3. 验证证明中给出的 Q 是函子.

定理 4.2. 设 U 是加性范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族局部态射，那么 $\mathcal{C}[U^{-1}]$ 也是加性范畴.

但是,我们希望研究的情形非常不幸地不满足这些局部的条件:对于 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的上链复形范畴 $\mathrm{Com}^{\bullet}(\mathcal{A})$，拟同构不是局部的（习题???）. 下一节我们将用合适的方式处理这个问题，使得我们这节建立的理论起到作用. 结束之前，我们引入如下命题，在之后考虑有界复形时它会给我们理想的结果.

命题 4.3. 设 U 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族局部态射，$\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{C}$ 的满子范畴，如果 $U_{\mathcal{D}} := U \cap \mathrm{mor}\ \mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 的局部态射，且如下的条件满足一条

1. 对任意 U 中的态射 $u : C \to D$，若 $D \in \mathrm{ob}\ \mathcal{D}$，则一定存在 $B \in \mathrm{ob}\ \mathcal{D}$ 和态射 $f : B \to C$ 使得 $u \circ f \in U$，

2.

那么 $\mathcal{D}[U_{\mathcal{D}}^{-1}] \hookrightarrow \mathcal{C}[U^{-1}]$ 是一个满忠实的嵌入.

本节的最后，我们讨论局部性与 Serre 子范畴之间的关系. 练习

4.2 同伦范畴与导出范畴

引理 4.2. 设 $\mathcal{A}$ 是 *Abel* 范畴，$D(\mathcal{A}) := \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})[Qiso^{-1}]$，且设 $Q : \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A}) \to D(\mathcal{A})$ 是局部化函子. 求证若 $f : X^\bullet \to X^\bullet$ 链同伦与 id_X，那么在 $D(\mathcal{A})$ 中 $Q(f) = \mathrm{id}_X$.

证明. 我们先假定如下事实: □

定义. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$，定义 $\mathcal{A}$ 的同伦范畴 (homotopy category)$K(\mathcal{A})$ 如下：

1. ob $K(\mathcal{A}) = \text{ob } \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$,
2. 对任意 $X^\bullet, Y^\bullet \in \text{ob } \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$，$\hom_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) := \hom_{\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)/\simeq$.

定理 4.4. 对 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$，$* = +, -, b, \bullet$，那么

1. $f \in \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 是同构当且仅当它可以被图

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X^\bullet & & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

表示，且图中的两个态射都是拟同构.

2. $f \in \mathrm{Hom}_{K^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$ 且 $Q(f) = 0$，那么 $f^n : H^n(X^\bullet) \to H^n(Y^\bullet) = 0$ 对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 成立.

3. 嵌入函子 $[0] : \mathcal{A} \to D^*(\mathcal{A})$ 是满忠实的，即存在集合的同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X[0], Y[0]).$$

命题 4.5. 若 $X^\bullet$ 是 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 上的零调复形，$I^\bullet$ 是内射复形，那么

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet) = 0.$$

命题 4.6. 若 $X^\bullet \to Y^\bullet$ 是拟同构，$I^\bullet$ 是内射复形，那么

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Y^\bullet, I^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$$

是同构.

推论 4.6.1.

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$$

是同构.

定义.

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X, Y) :=$$

定理 4.7.

4.3 三角范畴

定义. 给定加性范畴 $\mathcal{D}$，如果在 $\mathcal{D}$ 上存在如下信息

1. 加性自同构 $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$，它被称为平移函子 (translation functor)，通常对于对象 $X \in \mathcal{D}$，记 $X[1] := T(X)$，
2. 一族被称为特异三角 (distingushed triangle) 的图

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

和特异三角间的态射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k"] & C \arrow[r, "l"] & A[1], \end{tikzcd}$$

满足以下公理：

TR 1. (a) $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} X[1]$ 是特异三角；

(b) 任意同构于特异三角的图都是特异三角（特异三角在同构下封闭）；

(c) 任意态射 $X \xrightarrow{u} Y$ 都可以扩张为一个特异三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.

TR 2. 若 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是特异三角，那么 $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ 也是特异三角.

TR 3. 给定两个特异三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 和 $A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} C \xrightarrow{l} X[1]$，若存在 $f : X \to A$ 和 $g : Y \to B$ 使得 $g \circ u = j \circ f$，那么存在（不要求唯一）的态射 $h : Z \to C$ 构成特异三角间的态射

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k"] & C \arrow[r, "l"] & A[1].
\end{tikzcd}$$

TR 4.

$$\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[dr] & \\
 & A \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dd] & & Y \arrow[ll] \arrow[dl, dashed] \\
B \arrow[uurr] \arrow[dr] & & X \arrow[uu, dashed] \arrow[ll, dashed] & \\
 & C \arrow[ur, dashed] \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}$$

则称 $\mathcal{D}$ 是一个三角范畴 (triangulated category). 若只有前三条公理成立，则称 $\mathcal{D}$ 是预三角范畴 (pre-triangulated categories).

习题 4.4. 若 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是 $\mathcal{D}$ 中的特异三角，求证 $v \circ u, w \circ v, (-u[1]) \circ w$ 都是零态射.

习题 4.5. 若

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k"] & C \arrow[r, "l"] & A[1],
\end{tikzcd}$$

是特异三角间的态射，且 f, g 都是同构，求证 h 也是同构.

定义. 给定（预）三角范畴 $\mathcal{D}, \mathcal{E}$，若函子 $F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 和自然态射 $\eta : F(-[1]) \Rightarrow F(-)[1]$ 满足对任意 $\mathcal{D}$ 中的特异三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1],$$

都能得到 $\mathcal{E}$ 中的特异三角

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\eta_X \circ F(w)} F(X)[1],$$

则称函子 F 是正合的 (exact) 或三角的 (triangulated).

定义. 给定（预）三角范畴 $\mathcal{D}$ 和 Abel 范畴 $\mathcal{A}$，若加性协变函子 H 将特异三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

映为 $\mathcal{A}$ 中的正合序列

$$H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H(v)} H(Z) \xrightarrow{H(w)} H(X[1]),$$

则称函子 H 是上同调的 (cohomological). 若加性反变函子 $H:\mathcal{D}^\circ \to \mathcal{A}$ 对应的函子 $H^\circ:\mathcal{D}\to\mathcal{A}^\circ$ 是上同调的，则称 H 是反变同调的.

通常对于上同调函子，记 $H^n(X) := H(X[n])$，于是 $H^0(X) := H(X)$. 于是，TR2 说明给定一个特异三角就可以得到一个 $\mathcal{A}$ 中的长正合序列.

定义. 给定三角范畴 $\mathcal{D}$ 和 Abel 范畴 $\mathcal{A}$，若函子 $G:\mathcal{A}\to\mathcal{D}$ 满足对任意 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

都存在自然的同构 $\delta_{X\to Y\to Z}$ 使得

$$X \to Y \to Z \xrightarrow{\delta_{X\to Y\to Z}} X[1]$$

是 $\mathcal{D}$ 中的特异三角，则称 G 是 δ 函子 (δ-functor). 自然性意味着短正合序列的态射

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

给出特异三角的态射

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[r, "\delta_{X\to Y\to Z}"] \arrow[d] & X[1] \arrow[d] \\
A \arrow[r] & B \arrow[r] & C \arrow[r, "\delta_{A\to B\to C}"] & A[1].
\end{tikzcd}$$

4.3.1 同伦范畴

4.3.2 导出范畴

命题 4.8. 对 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$，$\mathrm{Com}^*(\mathcal{A})$ 中的短正合列

$$0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$$

诱导了 $D^*(\mathcal{A})$ 中的特异三角.

4.3.3 生成元

定义. 给定三角范畴 $\mathcal{D}$ 和对象 E，若 $\mathcal{D}$ 中包含 E 的最小的 saturated 满三角子范畴是 $\mathcal{D}$，或者换句话说 $\langle E\rangle = \mathcal{D}$，则称 E 是典型生成元 (classical generator).

定义. 给定三角范畴 $\mathcal{D}$ 和对象 E，

1. 若存在正整数 n 使得 $\langle E\rangle_n = \mathcal{D}$，则称 E 是强生成元 (strong generator).
2. 若 $\mathrm{Hom}(E, X[n]) = 0$ 对任意整数 n 都成立意味着 $X \cong 0$，则称 E 是弱生成元 (weak generator).

4.4 导出函子

给定 Abel 范畴间的函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，它自然诱导了函子 $\mathrm{Com}^\bullet(F) : \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A}) \to \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{B})$ 和 $K(F) : K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$. 由于 F 与平移函子交换，诱导的函子保持范畴上面的三角结构. 自然地我们会希望 F 诱导了导出范畴上的正合函子. 在函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 本身是正合函子时，这是没问题的（命题4.9），但一般情形 $K(F)$ 不将拟同构映为拟同构. 不过退一步，当 F 是左正合或右正合时，在适当的情形我们可以找到相应的构造使得有对应诱导的函子.

在先前的章节中我们讨论过这个论题，这里我们用导出范畴的角度来定义导出函子，具体来说，给定一个 Abel 范畴的左 (对应的，右) 正合函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，在一定的情况下存在一个扩张函子 $RF : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$ (对应的，$LF : D^-(\mathcal{A}) \to D^-(\mathcal{B})$)，称为 F 的右导出函子 (right derived functor).

命题 4.9. *设 Abel 范畴间的函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是正合的，那么*

1. *$K^*(F)$ 将拟同构映到拟同构，因此它诱导了函子 $D^*(F) : D^*(\mathcal{A}) \to D^*(\mathcal{B})$，*
2. *$D^*(F)$ 是正合函子，即它将特异三角映到特异三角.*

定义. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴，$\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$ 是一族对象，对给定的左（右）正合函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 满足

1. F 将 $K^+(\mathcal{R})$（$K^-(\mathcal{R})$）中的零调序列映到零调序列，
2. $\mathcal{A}$ 中的任意对象都是 $\mathcal{R}$ 中对象的子对象（商对象），

则称 $\mathcal{R}$ 是适应于 F 的对象族 (adapted to F).

例 4.1. 给定 R 模 M，对函子 $M \otimes_R -$，所有的平坦 R 模就是适应于该函子的一族对象.

定理 4.10. 设 $\mathcal{R}$ 是 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 中适应于左正合函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ 的对象，令 $U_{\mathcal{R}}$ 为 $K^+(\mathcal{R})$ 中的拟同构，那么 $U_{\mathcal{R}}$ 在 $K^+(\mathcal{R})$ 中是局部的，且自然的函子

$$K^+(\mathcal{R})[U_{\mathcal{R}}^{-1}]\to D^+(\mathcal{A})$$

是范畴的等价.

给定一个左正合函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$，我们回顾一下经典意义下导出函子的构造，以 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,-)$ 为例：这是一个左正合函子，为了求得它的右导出函子 $\mathrm{Ext}^n_{\mathbb{Z}}(M,-)$，首先取给定的 Abel 群 N 的内射消解 $I^\bullet$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] & I^2 \arrow[r, "d^2"] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

再用 $I^\bullet$ 代替 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,-)$ 中原本的 N，得到上链

$$\cdots\longrightarrow 0\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,I^0)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,I^1)\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,I^2)\longrightarrow\cdots,$$

它在 $D^+(\mathbf{Ab})$ 中的像即是导出函子的像. 这相当于选取一个范畴的同构（后面会说明如同经典情况的构造，不依赖于这个同构的选取）

$$P:D^+(\mathcal{A})\to K^+(\mathcal{R})[U_{\mathcal{R}}^{-1}],$$

然后

$$R\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,-):=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,P(-))$$

就是要找的导出函子.

定义. 对于左正合函子 $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$，存在如下的图

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^+(F)"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{B}}"] & D^+(\mathcal{B}) \\
& D^+(\mathcal{A}) &
\end{tikzcd}$$

若有函子 $RF:D^+(\mathcal{A})\to D^+(\mathcal{A})$ 和自然态射 $\eta:Q_{\mathcal{B}}\circ K^+(F)\Rightarrow RF\circ Q_{\mathcal{A}}$

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^+(F)"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & D^+(\mathcal{B}) \\
& D^+(\mathcal{A}) \arrow[ur, "RF"'] &
\end{tikzcd}$$

使得任意函子 $G:D^+(\mathcal{A})\to D^+(\mathcal{A})$ 和自然态射 $\xi:Q_{\mathcal{B}}\circ K^+(F)\Rightarrow RF\circ Q_{\mathcal{A}}$

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^+(F)"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\xi"] & D^+(\mathcal{B}) \\
& D^+(\mathcal{A}) \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

都存在唯一的自然变换 δ :

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^+(F)"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{B}}"] & D^+(\mathcal{B}) \\
& D^+(\mathcal{A}), \arrow[ur, bend left, "RF"] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta"] &
\end{tikzcd}$$

则称 RF 是 F 的右导出函子 (right derived functor).

以上定义的交换图说明，一个左正合函子的右导出函子是对应图的左 Kan 扩张. 根据 Kan 扩张的唯一性，导出函子若存在则一定唯一，这个事实对下面定理的证明非常关键.

定理 4.11. *假设左正合函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 有适应于 F 的对象族 $\mathcal{R}$，那么 RF 存在且同构下唯一.*

4.5　例子

给定环 R 和 $M \in \mathbf{Mod} - R$，函子

$$M \otimes_R - : R - \mathbf{Mod} \to \mathbf{Ab}$$

是右正合的，

第五章　层及其上同调

5.1　层的基本理论

在几何中，我们经常遇到从局部性质到整体性质的过渡，例如我们在讲光滑函数时对光滑性的定义是局部的，但光滑性可以是整体的性质；任意一个流形都是局部可定向的，但一个流形并不一定是整体可定向的. 在从局部到整体的过渡中，我们通常使用的方法是局部坐标，当局部坐标满足一定性质时我们可以找到更大的坐标，这个更大的坐标限制到小的坐标上与原来小的坐标有相同的性质. 如果将这样的过程抽象出来就是层的构造.

5.1.1　预层与层的基本性质

定义. 设 X 是一个拓扑空间. 对 X 的每个开集 U，我们赋予其一个 Abel 群 $\mathscr{F}(U)$，并且对任意满足 $V \subseteq U$ 的开集 U, V，存在映射 $\rho_V^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$，满足如下条件:

(i) $\mathscr{F}(\emptyset) = 0$;

(ii) $\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(U)}$;

(iii) 对所有满足 $W \subseteq V \subseteq U$ 的开集 U, V, W，$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$;

这样的在拓扑空间 X 上的结构 $\mathscr{F}$ 我们称为**预层** (presheaf), $\mathscr{F}(U)$ 中的元素称为开集 U 的**截面** (section), 映射 $\rho_V^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$ 称为**限制映射** (restriction map).

例 5.1. 设 X 是一个复流形，$\mathscr{M}$ 是如下定义的**亚纯函数层** (sheaf of meromorphic functions)

$$\mathscr{M}(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \mid f\text{是亚纯的}\},$$

且对于任意 $f \in \mathscr{M}(U)$ 和开集 $V \subseteq U$，定义 $\rho_V^U(f)$ 是 f 在 V 上的限制，则 $\mathscr{M}$ 是 X 上的预层.

在上面的例子中，预层 $\mathscr{M}$ 的限制同态确实是函数的限制——但通常而言，限制同态可以是任意的映射. 对于元素 $s \in \mathscr{F}(U)$，我们也用通常的限制记号：$s|_V := \rho_V^U(s)$，然而这一般与真正函数的限制很不同.

注意到任意的拓扑空间 X 可以自然地成为一个范畴 $\mathbf{Open}(X)$，这样每个预层都是一个反变函子 $\mathbf{Open}(X) \to \mathbf{Ab}$，可以想到的是，我们并不需要将函子的值域限定为 $\mathbf{Ab}$，其他任意合理的范畴都可以得到有用的预层. 当值域范畴为 $\mathbf{Ab}$、$\mathbf{Ring}$、$R-\mathbf{Mod}$ 时，我们分别称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的 Abel 群预层、环预层和 R 模预层.

这种对于预层的理解还有其他的好处——我们可以非常容易地定义预层之间的**态射** (morphism)——一个预层的态射就是函子间的自然变换. 如果我们显式地将预层态射 $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 的定义写出来，即是对任意 X 中的开集 $V \subseteq U$，我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\theta_V^U"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathscr{G}(V), \end{tikzcd}$$

其中 ρ_V^U, θ_V^U 分别是预层 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 的限制映射. 这样对于拓扑空间 X，我们得到了一个范畴 $\mathbf{PShAb}(X)$，其对象是 X 上的 Abel 群预层，态射是预层的态射.

例 5.2. 设 X 是任意的拓扑空间，M 是任意的 Abel 群，对开集 U 定义 $M_X(U) = M$ 对于满足 $V \subseteq U$ 的开集，限制映射都是恒等映射，则 M_X 是一个预层，称为常预层 (constant sheaf). 如果 N 也是一个 Abel 群，$\varphi : M \to N$ 是群同态，则我们自然地有预层的映射

$$\varphi_X : M_X \to N_X,$$

定义为

$$(\varphi_X)_U := \varphi : M_X(U) \to N_X(U).$$

例 5.3.

例 5.4.

预层的结构中蕴含了空间上“函数”的很多局部信息，对于一个预层我们有专门的结构刻画这样的信息:

定义. 设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上的预层，那么称

$$\mathscr{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U)$$

为 $\mathscr{F}$ 在点 x 处的**茎** (stalk)，其中 U 取遍所有包含点 x 的开集，正向系中的态射由限制态射给定.

根据正极限的定义，对于任意包含 x 的开集 U，存在自然的态射 $\rho_x^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$ 使得与正向系相容，即对于满足 $V \subseteq U$ 的开集，

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_V^U"'] \arrow[dr, "\rho_x^U"] & \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\rho_x^V"'] & \mathscr{F}_x. \end{tikzcd}$$

为简化记号，通常对于截面 $s \in \mathscr{F}(U)$，我们记 $s_x := \rho_x^U(s)$. 同样地，余极限的函子性告诉我们，对于任意 X 中的点 x，若 $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是预层间的态射，那么有诱导的点 x 处茎的态射

$$\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$$

使得对任意开集 U 有如下交换图

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "(\rho_{\mathscr{F}})_x^U"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "(\rho_{\mathscr{G}})_x^U"] \\ \mathscr{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathscr{G}_x, \end{tikzcd}$$

因此，我们有 $\varphi_x(s_x) = \varphi_U(s)_x$.

习题 5.1. 证明我们有如下的显式构造：

$$\mathscr{F}_x \cong \left(\prod_{x\in U} \mathscr{F}(U)\right) / \sim,$$

其中，若 $s \in \mathscr{F}(U), t \in \mathscr{F}(V)$ 的等价关系 $s \sim t$ 定义为存在包含于 $U \cap V$ 的 x 的邻域 W 使得 $s|_W = t|_W$.

习题 5.2. 设 U 是 X 中包含点 x 的开集，求证

$$\mathscr{F}_x \cong (\mathscr{F}|_U)_x.$$

证明. 我们证明 $\mathscr{F}_x$ 满足 $(\mathscr{F}|_U)_x$ 的泛性质，那么根据唯一性二者必然同构.

一方面，U 中任意包含 x 的开集 W 满足

$$\mathscr{F}|_U(W) = \mathscr{F}(W),$$

这自然地继承了与限制态射相容的态射 $\mathscr{F}|_U(W) \to \mathscr{F}_x$. 另一方面，对任意开集 $V \subseteq X$，给定与 $\mathbf{Open}(U)$ 相容的对象 $\{A, \{\lambda_W : \mathscr{F}(W) \to A\}_{\{W\subseteq U\}}\}$，限制态射 $\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(V \cap U)$ 使得它成为与 $\mathbf{Open}(X)$ 相容的对象，因此根据泛性质存在唯一的态射 $\mathscr{F}_x \to A$ 与 $\mathbf{Open}(X)$ 中的限制态射相容，因而与与 $\mathbf{Open}(U)$ 相容，这恰是 $(\mathscr{F}|_U)_x$ 的泛性质. □

例 5.5. 设 M 是给定的 Abel 群，$x \in X$ 是拓扑空间中的一个点，定义预层 $M(x)$ 满足

$$M(x)(U) := \begin{cases} M & x \in U \\ 0 & x \notin U, \end{cases}$$

限制态射要么是恒等映射要么是零映射. 如果我们计算 $M(x)$ 在点 y 的茎，

但是，预层并不是我们所希望的定义在拓扑空间上的代数结构. 多数情况下我们希望的是从局部的信息中可以得到足够的整体信息，并且整体能够得到的信息一定程度上完全由局部信息得到，于是我们有下面的定义：

定义. 设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上的预层，如果 $\mathscr{F}$ 满足如下条件：

(i)（局部性 (locality)）若 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是开集 U 的一族开覆盖，$s, t \in \mathscr{F}(U)$ 满足对于任意 $i \in I$ 都有 $s|_{U_i} = t_{U_i}$ 成立，则 $s = t \in \mathscr{F}(U)$；

(ii)（粘合条件 (gluing)）若 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是开集 U 的一族开覆盖，一族元素 $s_i \in \mathscr{F}(U_i)$ 满足 $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$，那么存在 $s \in \mathscr{F}(U)$ 使得 $s|_{U_i} = s_i$ 成立；

则称 $\mathscr{F}$ 为 X 上的**层** (sheaf).

定义的合理性告诉我们并不是所有的预层都是层，对于某些拓扑空间 X，常预层就不是层. 但是，某些定义的预层本身就是层，如下例. 最重要的是层的行为形态非常类似于全体可定义的函数，因此函数的全体必然是层.

例 5.6. 例5.1中的构造是一个层，更一般地，如果 X 是拓扑空间，$\mathscr{F}$ 是定义在 X 上满足某些性质（诸如连续、全纯、光滑等等）的函数预层，且限制映射就是函数的限制，那么这个预层是层.

例 5.7. 若 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上的预层，U 是开集，那么我们可以定义 $\mathscr{F}$ 在 U 上的限制，记为 $\mathscr{F}|_U$，它是 U 上的层，对任意 U 中的开集 V，定义

$$\mathscr{F}|_U(V) = \mathscr{F}(U \cap V) = \mathscr{F}(V),$$

且对应 $W \subseteq V$ 的限制同态 $\mathscr{F}|_U(V) \to \mathscr{F}|_U(W)$ 定义为限制同态 $\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(W)$. 明显的事实是, $\mathscr{F}|_U(V) \to \mathscr{F}|_U(W)$ 是预层，并且如果 $\mathscr{F}$ 是层则 $\mathscr{F}|_U(V) \to \mathscr{F}|_U(W)$ 也是层.

更抽象一些地，我们可以用范畴的语言描述层公理：若 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是开集 U 的一族开覆盖，那么层公理等价于下图

$$\mathscr{F}(U) \xrightarrow{p} \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \mathscr{F}(U_i \cap U_j),$$

是一个等值子 (equalizer), 其中第一个态射由 $\rho^U_{U_i} = \mathscr{F}(U_i \hookrightarrow U)$ 诱导, $f, g : \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i) \rightrightarrows \prod_{i,j\in I} \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$ 分别由 $\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j} \circ \pi_i : \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i) \to \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$ 和 $\rho^{U_j}_{U_i\cap U_j} \circ \pi_j : \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_j) \to \mathscr{F}(U_i \cap U_j)$ 诱导.

习题 5.3. 证明上述等价性.

证明. 根据范畴中乘积对象的泛性质，p, f, g 的映射完全由 $\pi_i \circ p, \pi_{i,j} \circ f, \pi_{i,j} \circ g$ 决定.

假设 $\mathscr{F}$ 是层，且我们能找到集合间的映射 $q : A \to \prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i)$ 使得 $f \circ q = g \circ q$，于是对任意 A 中的元素 a，$\pi_{i,j} \circ f \circ q(a) = \pi_{i,j} \circ g \circ q(a)$，这意味着对于 U_i，我们能找到 $\mathscr{F}(U_i)$ 中的元素 $\pi_i \circ q(a)$ 使得

$$\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(\pi_i \circ q(a)) = \pi_{i,j} \circ f \circ q(a) = \pi_{i,j} \circ g \circ q(a) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(\pi_i \circ q(a)),$$

故由层的定义，存在唯一的元素 $\tilde{q}(a) \in \mathscr{F}(U)$ 使得

$$\rho^U_{U_i}(\tilde{q}(a)) = \pi_i \circ q(a),$$

即存在唯一的集合间的映射 $\tilde{q} : A \to \mathscr{F}(U)$ 满足 $q = p \circ \tilde{q}$，故 $\mathscr{F}(U)$ 是等值子.

反过来，设 $\mathscr{F}(U)$ 是 f, g 的等值子，若在每个 $i \in I$，$\mathscr{F}(U_i)$ 中都有元素 s_i 满足 $s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$，根据乘积结构的泛性质，这意味着在 $\prod_{i\in I} \mathscr{F}(U_i)$ 中存在元素 $\{s_i\}_{i\in I}$ 满足

$$\pi_{i,j} \circ f(\{s_i\}_{i\in I}) = s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j} = \pi_{i,j} \circ g(\{s_i\}_{i\in I}),$$

故 $f(\{s_i\}_{i\in I}) = g(\{s_i\}_{i\in I})$. 根据集合范畴中等值子的构造，存在唯一的 $s \in \mathscr{F}(U)$ 使得 $p(s) = \{s_i\}_{i\in I}$，因此

$$s|_{U_i} = \pi_i \circ p(s) = s_i,$$

$\mathscr{F}$ 是层. □

层之间的态射与预层之间态射的定义相同，即对于层 $\mathscr{F},\mathscr{G}$，$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是层态射当且仅当 φ 是预层的态射. 这意味着我们可以定义范畴 $\mathbf{ShAb}(X)$，且它是 $\mathbf{PShAb}(X)$ 的满子范畴. 在之后的内容我们会看到，当我们选取的范畴 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴时，$\mathbf{PSh}\mathcal{A}(X)$ 也是一个 Abel 范畴.

局部性可以用茎的语言来描述：

命题 5.1. 设 $\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是拓扑空间 X 上层的态射，那么 φ 是同构当且仅当对于任意 $x\in X$，诱导的 $\varphi_x:\mathscr{F}_x\to\mathscr{G}_x$ 都是同构.

对层这种构造的一种理解方式是说，它是弯曲空间上满足一定性质的“函数”的全体，不同性质的选取决定了层结构的不同.

习题 5.4. 设 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 是 X 上的两个预层，验证 $U\mapsto \hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathscr{F}|_U,\mathscr{G}|_U)$ 有自然的预层结构，且若 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$ 还是 X 上的层，则预层 $U\mapsto \hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathscr{F}|_U,\mathscr{G}|_U)$ 是层，记为 $\mathscr{H}om(\mathscr{F},\mathscr{G})$，称作 $\mathscr{F}$ 到 $\mathscr{G}$ 的局部态射层 (sheaf of local morphisms of $\mathscr{F}$ into $\mathscr{G}$).

习题 5.5. 设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上的一个预层，则下面的构造给出一个拓扑空间，其中底集 $\bar{\mathscr{F}}=\coprod_{x\in X}\mathscr{F}_x=\{(x,s_x)\mid x\in X,s_x\in\mathscr{F}_x\}$ 是所有茎的不交并，并对任意给定 X 中的开集 U 和 $s\in\mathscr{F}(U)$ 给定如下一组拓扑基

$$(U,s):=\{(x,s_x)\mid x\in U\}.$$

求证：

(i) 存在自然的连续映射 $\pi:\bar{\mathscr{F}}\to X$，将点 (x,s_x) 映到 x. 并且，对任意的开集 U 和 $s\in\mathscr{F}(U)$，存在 π 在 U 上的截面 (section)$\sigma:U\to\bar{\mathscr{F}}$（截面是指连续函数 σ 使得 $\pi\circ\sigma$ 是 U 上的恒等函数）. 记对应 $\mathscr{F}$ 的 U 上所有截面为 $\Gamma(U,\mathscr{F})$.

(ii) 反之，若 $\mathscr{F}$ 还是层，求证任意 U 上的截面 σ 都是如上述方式构造的.

(iii) 由上证明若 $\mathscr{F}$ 是层，则 $\pi:\bar{\mathscr{F}}\to X$ 的连续函数截面层同构于 $\mathscr{F}$.

(iv) 若 $\mathscr{G}$ 也是拓扑空间 X 上的一个预层，$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是预层的态射，证明 φ 诱导了 $\bar{\mathscr{F}}\to\bar{\mathscr{G}}$ 的连续映射.

空间 $\bar{\mathscr{F}}$ 称为预层 $\mathscr{F}$ 的平展空间 (étale space). 这实际上是 Serre 最初给的层的定义，我们用的是更现代的观点来看，但习题说明了两者是完全相同的.

Solution. (i) 根据定义，π 显然是连续的. 定义 $\sigma:x\mapsto(x,s_x)$，注意到 $\sigma^{-1}(\bigcup_{i\in I}A_i)=\bigcup_{i\in I}\sigma^{-1}(A_i)$，因而为证明 σ 是连续的只需要证明对任意的 X 中的开集 V，$\sigma^{-1}((V,t))$ 也是开集即可. 但是若 $t=s$ 则 $\sigma^{-1}((V,t))=\sigma^{-1}((V,s))=V\cap U$，若 $t\neq s$ 则 $\sigma^{-1}((V,t))=\emptyset$. 故得证.

(ii) 设 $\sigma:U\to\bar{\mathscr{F}}$ 是 U 上的截面，于是对于任意的 $x\in U$，存在 $s\in\mathscr{F}(U)$ 使得 $\sigma(x)=(x,s_x)$. 若 x,y 是 U 中的两个点，$\sigma(x)=(x,s_x)$ 且 $\sigma(y)=(y,t_y)$. 根据芽的定义，我们可以找到 x,y 的邻域 V,W 使得 $s\in\mathscr{F}(V),t\in\mathscr{F}(W)$. 考虑开集

$$(V,s)=\{(z,s_z)\mid z\in V\}$$

和

$$(W,t)=\{(z,t_z)\mid t\in W\},$$

根据 σ 的连续性，$\tilde{V} := \sigma^{-1}((V,s))$ 和 $\tilde{W} := \sigma^{-1}((W,t))$ 都是 U 中的非空开集，分别包含 x 和 y. 对于任意 $z \in \tilde{V} \cap \tilde{W}$，由 σ 的映射性 $(z, s_z) = \sigma(z) = (z, t_z)$，故存在 z 的一个邻域 $O \subseteq \tilde{V} \cap \tilde{W}$ 使得 $s|_O = t|_O$. 但是 z 是任取的，故 $s|_{\tilde{V}\cap\tilde{W}} = t|_{\tilde{V}\cap\tilde{W}}$. 这样我们就得到了 U 的一个开覆盖，且在开集重合的部分截面是相容的. 根据层公理，存在唯一的 $r \in \mathscr{F}(U)$ 使得 $\sigma(x) = (x, r_x)$.

(iii) 记 $\mathscr{F}'$ 为 $\pi : \bar{\mathscr{F}} \to X$ 的截面层. 定义

$$\begin{aligned} \theta : \mathscr{F} &\to \mathscr{F}' \\ \theta_U : \mathscr{F}(U) &\to \mathscr{F}'(U) \\ s &\mapsto \sigma(x \mapsto (x, s_x)), \end{aligned}$$

于是我们需要验证对任意的开集 U，θ_U 是群同构，且对任意满足 $V \subseteq U$ 的开集 U, V 都有图

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{F}(U) & \xrightarrow{\theta_U} & \mathscr{F}'(U) \\ \rho^U_V\downarrow & & \downarrow|_V \\ \mathscr{F}(V) & \xrightarrow{\theta_V} & \mathscr{F}'(V), \end{array}$$

交换，其中 $|_V$ 是 U 上函数在 V 的限制.

对于 $\mathscr{F}'(U)$ 中的截面 σ, τ，$\sigma + \tau$ 的定义是 $\sigma + \tau : x \mapsto (x, s_x + t_x)$，其中 $\sigma(x) = (x, s_x)$，$\tau(x) = (x, t_x)$. 于是，同态性由正极限的性质保证，再根据前一部分 θ_U 是同构，其中，层公理的局部性对应 θ 的单射性，在局部性的存在下粘合条件等价于满射（充分性由前一部分证明，必要性考虑到截面本质上是映射，是自动满足粘合条件的）. 任取 $x \in V$ 和 $s \in \mathscr{F}(U)$，正极限保证 $s_x = (s|_V)_x$，这即是图的交换性.

(iv) 定义

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} : \bar{\mathscr{F}} &\to \bar{\mathscr{G}} \\ (x, s_x) &\mapsto (x, \varphi_x(s_x)), \end{aligned}$$

于是我们只要证明函数是连续的即可. 对 $\bar{\mathscr{G}}$ 的任意 X 中的开集 U，若 t 是 $\mathscr{G}(U)$ 中的截面，则对于 (U,t) 中的任意点 (x, t_x)，若它在 $\bar{\varphi}$ 的像中，则存在 $(x, s_x) \in \mathscr{F}_x$ 使得 $\varphi_x(s_x) = t_x$. 这意味着，存在 x 的邻域 W 使得 $\varphi_W(s)|_{W\cap U} = t|_{W\cap U}$. 于是，开集基中的元素 $(W \cap U, s|_{W\cap U})$ 包含于 $\bar{\varphi}$ 的原像中，故

$$\varphi^{-1}((U,t)) = \coprod_{W\text{是}U\text{中的开集，且}s\in\mathscr{F}(W)\text{满足}\varphi_W(s)=t|_W} (W, s),$$

按照定义这是一个开集. □

习题 5.6. 设 $\varphi_i : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是拓扑空间 X 上层的态射，$i = 1, 2$，且对于任意 $x \in X$，都有 $(\varphi_1)_x = (\varphi_2)_x$，证明 $\varphi_1 = \varphi_2$.

5.1.2 层化

对于一个预层 $\mathscr{F}$ 和 X 中的开集 U，我们可以定义

$$\tilde{\mathscr{F}}(U) := \{s : U \to \coprod_{x\in U} \mathscr{F}_x \mid s\text{满足公理 (i) 和 (ii)}\}$$

其中

(i) 对每个 U 中的点 x，$s(x)\in\mathscr{F}_x$；

(ii) 对每个 U 中的点 x，都存在开邻域 $V\subseteq U$ 和截面 $t\in\mathscr{F}(V)$ 使得对于所有的 $y\in V$ 都有 $s(y)=t_y$.

对于 $\mathscr{F}$ 中的任意截面 $s\in\mathscr{F}(U)$，我们都可以定义一个映射 $\tilde{s}:U\to\coprod_{x\in U}\mathscr{F}_x, y\mapsto s_y$. 显然 $\tilde{s}\in\tilde{\mathscr{F}}(U)$，因此我们定义了一个预层的态射 $\zeta:\mathscr{F}\to\tilde{\mathscr{F}}$.

命题 5.2. *若预层 $\mathscr{F}$ 是层，则 $\zeta:\mathscr{F}\to\tilde{\mathscr{F}}$ 是层的同构.*

如果尽可能具体地解释层化，这个构造就是把原本没有的截面加到层的对象当中去，进而形成我们需要的足够多的粘合信息，而我们是局部来完成这个扩充的. 刚刚我们介绍的层化事实上就是用一个点的局部信息（茎）去构造相应的函数，可以说层公理所描述的本质信息就是一定类型的函数. 我们对于层化的定义满足如下的泛性质和函子性:

命题 5.3 (函子性)**.** *设 $\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是预层的态射，那么存在层态射 $\tilde{\varphi}:\tilde{\mathscr{F}}\to\tilde{\mathscr{G}}$ 使得下面的图交换:*

$$\begin{CD} \mathscr{F} @>{\varphi}>> \mathscr{G} \\ @V{\zeta_{\mathscr{F}}}VV @VV{\zeta_{\mathscr{G}}}V \\ \tilde{\mathscr{F}} @>{\tilde{\varphi}}>> \tilde{\mathscr{G}}. \end{CD}$$

证明. 对任意 X 中的开集 U，考虑点 $x\in U$ 和截面 $s\in\tilde{\mathscr{F}}(U)$，我们定义

$$\tilde{\varphi}_U(s)(x):=\varphi_x(s(x)).$$

我们需要验证定义是层的态射，并验证图的交换性. □

推论 5.3.1 (泛性质)**.** *设 $\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是预层的态射，若 $\mathscr{G}$ 是层，则存在 Abel 群的同构*

$$\hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathscr{F},\mathscr{G})\cong\hom_{\mathbf{ShAb}(X)}(\tilde{\mathscr{F}},\mathscr{G}).$$

事实上，我们并不需要拓扑空间 X 中所有开集 U 所对应的对象 $\mathscr{F}(U)$，如果给定 X 的一组基 $\mathscr{B}$ 中所有所有开集 U 对应的对象 $\mathscr{F}(U)$，并且这些对象满足层公理，那么我们存在唯一的 X 上的层:

定理 5.4 ($\mathscr{B}$-层)**.** *设 $\mathscr{B}$ 是拓扑空间 X 的一组开集基，对于每个 $U,V\in\mathscr{B}$，存在 Abel 群 $\mathscr{F}(U)$ 和限制同态 $\rho^U_V:\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$ 满足预层公理和层公理，那么称 $\mathscr{F}$ 是一个* **$\mathscr{B}$-层** *($\mathscr{B}$-sheaf). 于是*

1. 任意 $\mathscr{B}$-层都可以唯一地扩张为一个 X 上的 Abel 群层.

2. 给定 X 上的两个 $\mathscr{B}$-层 $\mathscr{F}$ 和 $\mathscr{G}$，且对每个 $\mathscr{B}$ 中的开集 U 都有群态射

$$\varphi_U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$$

与 $\mathscr{B}$-层的限制态射相容，那么存在唯一的层态射 $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是 $\mathscr{B}$-层的扩张.

证明. 对任意 X 中的开集 V，定义

$$\mathscr{F}(V) := \varprojlim_{U\in\mathscr{B}\text{满足}U\subseteq V} \mathscr{F}(U),$$

其中逆向系中的态射由限制态射给定. 我们需要证明：(i) 该定义与原定义相容；(ii) 若 $V \subseteq W$，则存在 $\rho_V^W : \mathscr{F}(W) \to \mathscr{F}(V)$ 与原有的限制函数相容，且新构造的限制函数间也相容；(iii) 如此定义的预层构成一个层.

(i) 由极限的定义即可得到，因为若 $V \in \mathscr{B}$，V 就是被 V 包含的 $\mathscr{B}$ 中开集在嵌入映射下的终对象，因此 $\mathscr{F}(V)$ 是始对象.(ii) 可以由极限的函子性推得. 这样我们只要验证这是一个层即可，等价地，我们证明对任意的开覆盖，是一个等值子. □

推论 5.4.1 (层的粘合原理)**.** 设 $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$ 是拓扑空间 X 的开覆盖. 若对任意 $\mathcal{U}$ 中的开集 U，$\mathscr{F}_U$ 都是 U 上的层，并且

$$\varphi_{U,V} : \mathscr{F}_U|_{U\cap V} \to \mathscr{F}_V|_{U\cap V}$$

都是同构，在 $U \cap V \cap W$ 上满足

$$\varphi_{V,W} \circ \varphi_{U,V} = \varphi_{U,W},$$

则存在唯一的 X 上的层 $\mathscr{F}$ 使得有层的同构 $\psi : \mathscr{F}|_U \to \mathscr{F}_U$ 且满足如下相容性：对任意 $U, V \in \mathcal{U}$

$$\varphi_{U,V} \circ \psi_U|_{U\cap V} = \psi_V|_{U\cap V} : \mathscr{F}|_{U\cap V} \to \mathscr{F}_V|_{U\cap V}.$$

证明. 我们将验证如下论断：(i) 被 $\mathcal{U}$ 中的开集包含的所有的开集构成 X 的一组拓扑基 $\mathscr{B}$；(ii) 所给出的粘合条件自然地给出了一个 $\mathscr{B}$-层，于是根据定理5.4存在性和唯一性都得证.

(i) 这是一个单纯的拓扑问题，我们略过证明.(ii) 对任意 $\mathscr{B}$ 中的开集 W，我们可以找到 $U \in \mathcal{U}$ 使得 $W \subseteq U$，于是定义

$$\mathscr{F}(W) := \mathscr{F}_U(W),$$

且若 $W_1 \subseteq W_2 \subseteq U$，那么限制态射 $\rho_{W_1}^{W_2} : \mathscr{F}(W_2) \to \mathscr{F}(W_1)$ 定义为层 $\mathscr{F}_U$ 从 W_1 到 W_2 的限制. 这样定义首先出现的问题是，我们对于 $U \in \mathcal{U}$ 的选取可能不是唯一的，因而，首先验证定义是合理的.

假设对于 W，存在不同的

由于原本的 $\mathscr{F}_U$ 是 U 上的层，根据例5.7，我们这样的定义也是层，于是根据之前的定理，这个层存在且同构下唯一. □

事实上，粘合后的层 $\mathscr{F}$ 是容易描述的：对任意的开集 W，$\mathscr{F}(W)$ 是所有 $\{s_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ 的全体，其中 $s_U \in \mathscr{F}_U(W \cap U)$ 且满足 $\varphi_{U,V}(s_U)$ 在 $U \cap V \cap W$ 上等于 $\varphi_{V,U}(s_V)$.

引入层化后我们其实有了对于层更进一步的认识——层完全由每点上的茎完全决定，而决定的方式就是寻找连续的截面（习题5.7）. 在英语中，sheaf 一词的含义是 “a bundle of stalks”，即一捆稻谷，我们想象

习题 5.7. 设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上的预层. 证明平展空间 $\bar{\mathscr{F}}$ 的截面层 $\mathscr{F}'$ 同构于 $\mathscr{F}$ 的层化.

证明. 在习题5.5中我们定义了预层的态射

$$\begin{aligned}\theta : \mathscr{F} &\to \mathscr{F}'\\ \theta_U : \mathscr{F}(U) &\to \mathscr{F}'(U)\\ s &\mapsto \sigma(x \mapsto (x, s_x)),\end{aligned}$$

于是只要证明 $\mathscr{F}'$ 的泛性质就能够说明同构. 设 $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是预层到层的态射，于是根据习题5.5我们有连续映射 $\bar{\varphi} : \bar{\mathscr{F}} \to \bar{\mathscr{G}}$，进而对于任意的截面 $s : U \to \bar{\mathscr{F}}$，$\bar{\varphi} \circ s$ 也是 U 上的截面，这样我们定义了

$$\begin{aligned}\varphi' : \mathscr{F}' &\to \mathscr{G}' \cong \mathscr{G}\\ \varphi'_U : \mathscr{F}'(U) &\to \mathscr{G}'(U)\\ s &\mapsto \bar{\varphi} \circ s.\end{aligned}$$

φ'_U 是群同态由由 φ 的预层的态射性保证，而它显然与两个层的限制态射相容，于是我们得到了层的态射.

再证明唯一性. 假设 $\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$ 是预层到层的态射，层态射 $\tilde{\varphi} : \mathscr{F}' \to \mathscr{G}$ 满足

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}' \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \mathscr{G} \\ \mathscr{F}. \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

任取 $\sigma \in \mathscr{F}'(U)$，即截面 $\sigma : U \to \bar{\mathscr{F}}$，对任意 $x \in U$，若 $\sigma(x) = (x, s_x)$，那么任取 σ_x 的代表元 τ，于是存在 $W \subseteq U$ 使得 $\sigma|_W = \tau|_W$，因此 $\tau(x) = (x, s_x)$，于是可以定义 $\eta_x : (\mathscr{F}')_x \to \mathscr{F}_x$，$\sigma_x \mapsto s_x$. 根据截面加法的定义，这显然是一个群态射. 一方面，我们显然有 $\eta_x \circ \theta_x = \mathrm{id}_{\mathscr{F}_x}$. 另一方面，仍然假定 $\sigma(x) = (x, s_x)$，那么由连续性 $V = \sigma^{-1}((U, s))$ 是 U 中的非空开集，这意味着对任意 $y \in V$，$\sigma(y) = (y, s_y)$，于是 $\sigma|_V = \theta(s)|_V$，$\theta_x(s_x) = \sigma_x$. 因此，$\theta_x \circ \eta_x = \mathrm{id}_{(\mathscr{F}')_x}$. 再根据习题5.6，$\tilde{\varphi}$ 是唯一确定的. □

5.1.3 底空间变换

这一节我们考虑这样的问题，

定义. 设 $f : X \to Y$ 是拓扑空间的连续映射，如果 $\mathscr{F}$ 是 X 上的预层，则如下定义的

$$\begin{aligned}f_*\mathscr{F} : \mathbf{Open}(Y) &\to \mathbf{Ab}\\ U &\mapsto f_*\mathscr{F}(U) := \mathscr{F}(f^{-1}(U))\end{aligned}$$

是一个预层，称为预层 $\mathscr{F}$ 的**推出** (pushfroward).

对于 Y 中的开集 $V \subseteq U$，我们定义限制同态 $f_*\mathscr{F}(U) \to f_*\mathscr{F}(V)$ 是 $\mathscr{F}(f^{-1}(U))$ 到 $\mathscr{F}(f^{-1}(V))$ 的限制同态，即若 $s \in f_*\mathscr{F}(U)$，则

$$s|_V = (s \in \mathscr{F}(f^{-1}(U)))|_{f^{-1}(V)}.$$

引理 5.1. 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间的连续映射，如果 $\mathscr{F}$ 是 X 上的层，则推出 $f_*\mathscr{F}$ 是 Y 上的层.

证明. 任取 Y 中的开集 V，设 $\mathcal{V} = \{V_i\}_{i \in I}$ 是 V 的开覆盖，那么 $\mathcal{U} = \{U_i := f^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$ 是 $U := f^{-1}(V)$ 的开覆盖. 于是，若给定 $s_i \in f_*\mathscr{F}(V_i) = \mathscr{F}(U_i)$，满足 $s_i|_{V_i \cap V_j} = s_j|_{V_i \cap V_j}$，于是 $s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j}$. 由 $\mathscr{F}$ 是层得知存在唯一的 $s \in \mathscr{F}(U)$ 使得 $s|_{U_i} = s_i$. 按照层推出的定义，这个 s 就是 $f_*\mathscr{F}(V)$ 中要找的唯一的元素，故 $f_*\mathscr{F}$ 是层. □

如果我们还有一个 X 上的预层态射 $\varphi: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$，则对于任意的 Y 中的开集 U，同态映射 $\varphi_{\varphi^{-1}(U)}: \mathscr{F}(\varphi^{-1}(U)) \to \mathscr{G}(\varphi^{-1}(U))$ 和限制映射 $\rho^{\varphi^{-1}(U)}_{\varphi^{-1}(V)}$ 相容，于是 $\varphi_{\varphi^{-1}(U)}: \mathscr{F}(\varphi^{-1}(U)) \to \mathscr{G}(\varphi^{-1}(U))$ 自然地可以看作 $\varphi_{\varphi^{-1}(U)}: f_*\mathscr{F}(U) \to f_*\mathscr{G}(U)$，这样我们说明了 $f_*\varphi$ 是预层态势 $f_*\mathscr{F} \to f_*\mathscr{G}$. 如果还有 $\psi: \mathscr{G} \to \mathscr{H}$，那么很明显地有 $f_*(\psi \circ \varphi) = f_*\psi \circ f_*\varphi$. 于是 f_* 是一个函子 $\mathbf{PShAb}(X) \rightrightarrows \mathbf{PShAb}(Y)$.

习题 5.8. 设 $f: X \to Y$ 和 $g: Y \to Z$ 是两个连续映射，那么

$$(g \circ f)_* = g_* \circ f_*.$$

定义. 设 $f: X \to Y$ 是拓扑空间的连续映射，如果 $\mathscr{G}$ 是 Y 上的预层，则如下定义的

$$\begin{aligned} f_P\mathscr{G} : \mathbf{Open}(X) &\rightrightarrows \mathbf{Ab} \\ V &\mapsto f_P\mathscr{G}(U) := \varinjlim_{\substack{V \in \mathbf{Open}(Y) \\ f(U) \subseteq V}} \mathscr{G}(V) \end{aligned}$$

是一个预层，称为预层 $\mathscr{G}$ 的**拉回** (pullback).

引理 5.2. 设 X 和 Y 是拓扑空间，$f: X \to Y$ 是连续映射，那么下面的同构关于 $\mathscr{G}$ 和 $\mathscr{F}$ 是自然的：

$$\hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(f_P\mathscr{G}, \mathscr{F}) \cong \hom_{\mathbf{PShAb}(Y)}(\mathscr{G}, f_*\mathscr{F}).$$

证明. 我们首先证明同构. 设 $\varphi \in \hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(f_P\mathscr{G}, \mathscr{F})$，于是任意给定 X 中的开集，按照极限的定义，$\varphi_U: f_P\mathscr{G}(U) \to \mathscr{F}(U)$ 完全由一族相容的态射

$$\varphi_V:$$

其中 V 取遍所有包含 $f(U)$ 的开集. □

与推出不同的是，即使 $\mathscr{G}$ 是 Y 上的层，$f_P\mathscr{G}$ 也可能并不是一个层，但作为预层，层的拉回也有很好的函子性质. 我们称 $f_P^{-1}\mathscr{G}$ 的层化为 $\mathscr{G}$ 的**逆象层** (inverse sheaf)，记为 $f^{-1}\mathscr{G}$.

定义. 设 X 是拓扑空间，$\mathscr{F}$ 是 X 上的层

5.1.4 层范畴及其中的正合性

设 $\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 是空间 X 上预层的态射，

引理 5.3. 层态射的单态射是范畴意义下的单态射，且层态射的满态射是范畴意义下的满态射.

证明. □

给定拓扑空间 X 和上面的层 $\mathscr{F}$，若对于任意的 $V\subseteq U$，限制映射 $\mathscr{F}(U)\to\mathscr{F}(V)$ 都是满射，则称 $\mathscr{F}$ 是 flasque.

习题 5.9. 求证层态射单射（满射）的局部性：给定拓扑空间 X 和开覆盖 $\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$ 使得层态射 $\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$ 的限制

$$\varphi_{U_i}:\mathscr{F}_{U_i}\to\mathscr{G}_{U_i}$$

对所有的 $i\in I$ 都是单射（满射），那么 φ 本身也是单射（满射）.

证明. □

习题 5.10 (层的零扩张). 设 X 是拓扑空间，Z 是 X 的闭集，$i:Z\to X$ 是嵌入映射. 令 $U:=X-Z$ 是 Z 在 X 中的补集，$j:U\to X$ 是嵌入映射.

1. 设 $\mathscr{F}$ 是 Z 上的层，证明

$$(i_*\mathscr{F})_x=\begin{cases}\mathscr{F}_x & x\in Z\\ 0 & x\notin Z.\end{cases}$$

于是我们称 $i_*\mathscr{F}$ 是 $\mathscr{F}$ 在 X 上的零扩张. 证明若 X 上的层 $\mathscr{F}$ 对所有 $x\notin Z$ 满足 $\mathscr{F}_x=0$，那么层的同态

$$\rho_Z^X:(i_*\mathscr{F})|_Z\to\mathscr{F}$$

是同构, 并且由此推导出对任意 Z 上的层 $\mathscr{G}$, 存在唯一的 X 上的层 $\mathscr{F}$ 满足对所有 $x\in Z$ 满足 $\mathscr{F}_x=\mathscr{G}_x$, 对所有 $x\notin Z$ 满足 $\mathscr{F}_x=0$.

2. 设 $\mathscr{G}$ 是 U 上的层，定义 X 上的层 $\mathscr{G}$ 满足对任意 X 中的开集 V，

$$j_!\mathscr{G}(V):=\begin{cases}\mathscr{G}(V) & V\subseteq U\\ 0 & \text{其他情况}.\end{cases}$$

证明

$$(j_!\mathscr{G})_x=\begin{cases}\mathscr{G}_x & x\in U\\ 0 & \text{其他情况},\end{cases}$$

并且证明 $j_!\mathscr{G}$ 是满足以上条件且限制在 U 上是 $\mathscr{G}$ 的唯一一个层.

3. 现在假设 $\mathscr{F}$ 是 X 上的层，证明我们有如下层的正合列：

$$0 \to j_!(\mathscr{F}|_U) \to \mathscr{F} \to i_*(\mathscr{F}|_Z) \to 0.$$

证明. 1. 直接由定义, 若 $x \in U$, 那么存在 x 在 X 中的邻域 V 使得 $V \cap Z = \emptyset$, 此时 $i_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(i^{-1}(V)) = \mathscr{F}(\emptyset) = 0$，因此对任意包含 x 的开集 W，$i_*\mathscr{F}(W \cap V) = 0$，即 $(i_*\mathscr{F})_x = 0$. 另一方面，若 $x \in Z$，那么

$$(i_*\mathscr{F})_x = \mathrm{colim}_{W\text{是包含}x\text{的开集}}(i_*\mathscr{F})(W) = \mathrm{colim}_{W\text{是包含}x\text{的开集}}\mathscr{F}(W \cap Z) = \mathscr{F}_x.$$

□

定义. 给定拓扑空间 X 和 Abel 群层 $\mathscr{F}$，若对任意开集 U，$\mathscr{F}(U)$ 是环，并且所有的限制映射都是环同态，则称 $\mathscr{F}$ 是 X 上的环层 (sheaf of rings).

5.2 Cech 上同调

之前的理论中我们建立了层的上同调理论，但我们面临一个相当严重的问题——对于一个给定的层，它的上同调几乎是不可计算的. 虽然任意层的内射都是存在的，但构造过于庞大 Cech 上同调的主要思想是我们考虑拓扑空间中开覆盖所包含的组合信息，

设 X 是拓扑空间，$\mathscr{F}$ 是 X 上的层，$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 X 的一族开覆盖. 对任意 $q \geq 0$，我们定义 $\mathscr{F}$（对于 $\mathcal{U}$）的 q 群 (group of q-cochain of $\mathscr{F}$ (relative to $\mathcal{U}$)) 为

$$C^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \prod_{(\lambda_0,\cdots,\lambda_q)\in\Lambda^{q+1}} \mathscr{F}(U_{\lambda_0} \cap \cdots \cap U_{\lambda_q}),$$

进而可以定义上边缘映射

$$d^q : C^q(\mathscr{F},\mathcal{U}) \to C^{q+1}(\mathscr{F},\mathcal{U})$$

满足将 $d^q(\{f_{\lambda_0,\cdots,\lambda_q}\})$ 的 $(\lambda_0, \cdots, \lambda_{q+1})$ 项是

$$\sum_{i=0}^{q}(-1)^i f_{\lambda_0,\cdots,\hat{\lambda_i},\cdots,\lambda_{q+1}}.$$

这给出了一个上链，验证如下：

事实上，Cech 上链是这样给出的：给定拓扑空间 X 的开覆盖 $\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，存在 $\mathcal{U}$ 给出的单纯集 $N\mathcal{U}$，其中的映射都是开集的嵌入

引理 5.4. 对任意拓扑空间 X 和 X 上的层 $\mathscr{F}$，$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ 是 X 的一族开覆盖，都有

$$\check{H}^0(\mathscr{F},\mathcal{U}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F}).$$

命题 5.5. 若 $\mathcal{V}$ 是拓扑空间 X 开覆盖 $\mathcal{U}$ 的加细，

第六章　群的同调代数

6.1　群的同调和上同调

设 G 是一个群.

定义. 给定 Abel 群 A，若 G 在 A 上右一个（左）作用，则称 A 是一个 G 模 (G-module).

注意到给定 G 模 A 等价于给定 Abel 群 A 和群同态 $G \to \mathrm{Aut}(A)$. 由于 Abel 群等同于 $\mathbb{Z}$ 模，因而 G 模等同于 $\mathbb{Z}[G]$ 模.

定义. 给定 G 模 A，记

$$A^G := \{a \in A \mid g \cdot a = a \text{对所有} g \in G \text{成立}\}$$

是 A 中被 G 作用不变的元素的全体.

引理 6.1. 给定 G 模 A 和具有平凡作用的 G 模 $\mathbb{Z}$，则

$$A^G \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A).$$

证明. 任意给定 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$，由于 G 在 $\mathbb{Z}$ 上的作用是平凡的，$\alpha(1) = \alpha(g \cdot 1) = g\alpha(1)$，于是映射

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A) &\to A^G \\ \alpha &\mapsto \alpha(1) \end{aligned}$$

是良定义的，这显然是一个 Abel 群同态. 注意到 $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$ 完全由 $\alpha(1)$ 决定，因此这是一个单射；同时该映射是满射，得证. $\square$

引理6.1说明给定 G 模的短正合列

$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$

存在诱导的 Abel 群（也是平凡 G 模）正合列

$$0 \to A^G \to B^G \to C^G,$$

即 $-^G$ 是一个左正合的函子. 因此，只要能够找到一个平凡 G 模 $\mathbb{Z}$ 的投射消解，那么套用之前的理论可以得到 $\mathrm{Ext}^i_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}, A)$，我们称其为群 G 以 A 为系数的上同调群

例 6.1. 考虑 $G = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \langle \sigma \rangle$ 是有限循环群，取

$$N := 1 + \sigma + \cdots + \sigma^{n-1} \in \mathbb{Z}[G],$$

那么

$$(1-\sigma)N = N(1-\sigma) = 0 \in \mathbb{Z}[G],$$

于是可以验证

$$\xrightarrow{1-\sigma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{1-\sigma} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{N} \mathbb{Z}[G] \xrightarrow{\sigma \mapsto 1} \mathbb{Z} \to 0$$

是 $\mathbb{Z}$ 的消解，于是对于任意 G 模 A，由 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}[G], A) = A$ 我们得到了复形

$$0 \to A$$

定义. 给定群 G，取

$$F_n := \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G] \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}[G]$$

（共有 $n+1$ 个张量积项），G 在 F_n 上的作用由

$$g \cdot (g_0 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) := (g \cdot g_0) \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n$$

诱导，且有

$$d_i^{[n]} : F_n \to F_{n-1},\ \ 0 \le i \le n$$

满足

$$d_i^{[n]}(1 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) := \begin{cases} g_1 \cdot (1 \otimes g_2 \otimes \cdots \otimes g_n) & i = 0, \\ (1 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_{i-1} \otimes g_i g_{i+1} \otimes \cdots \otimes g_n) & 0 < i < n, \\ 1 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_{n-1} & i = n. \end{cases}$$

引理 6.2. 如上定义中，

1. F_n 是自由 $\mathbb{Z}[G]$ 模，且它的一组基可选为 $\{1 \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n\}_{g_i \in G}$，
2. $\{d_i^{[n]}\}_{0 \le i \le n}$ 扩张为一组 $\mathbb{Z}[G]$ 模同态，满足

$$d_i^{[n]} d_j^{[n]} = d_{j-1}^{[n]} d_i^{[n]},$$

因此根据习题*1.1*，

$$\partial_n := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^{[n]}$$

给出了链复形

$$0 \leftarrow F_0 \xleftarrow{\partial_1} F_1 \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} F_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} \cdots.$$

3. $\epsilon : F_0 = \mathbb{Z}[G] \to \mathbb{Z}, \sum_{i=1}^N n_i g_i \mapsto \sum_{i=1}^N n_i$ 给出了增广链复形

$$0 \leftarrow \mathbb{Z} \xleftarrow{\epsilon} F_0 \xleftarrow{\partial_1} F_1 \xleftarrow{\partial_2} \cdots \xleftarrow{\partial_n} F_n \xleftarrow{\partial_{n+1}} \cdots.$$

4.

引理6.2说明构造的 $\{F_n\}$ 给出了平凡 $\mathbb{Z}[G]$ 模 $\mathbb{Z}$ 的一个消解，我们称之为标准消解 (standard resolution) 或 bar 消解 (bar resolution).

习题 6.1. 除了 bar 消解外，

第七章　其他类型的同调

7.1　超上同调

我们考虑这样的问题：设 $\mathscr{F}$ 是拓扑空间 X 上的层

$$\mathscr{F}:\mathbf{Open}(X)^{\circ}\to\mathcal{B},$$

其中 $\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴，此时 $\mathscr{F}$ 是以 $\mathcal{B}$ 中对象为对象的层. 那么可以求 X 关于层 $\mathscr{F}$ 的上同调

$$H^i(\mathscr{F},X),$$

它是 $\mathcal{B}$ 中的对象. 特别地，当 $\mathcal{B}$ 是某个给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 的上链复形范畴时，每个上同调都是一个 $\mathcal{A}$ 的上链复形，此时还可以求上链复形 $H^i(\mathscr{F},X)$ 的上同调

命题 7.1. *设 $\mathscr{F}^\bullet$ 是拓扑空间 X 上的层上链复形，$f^\bullet:\mathscr{F}^\bullet\to\mathscr{G}^\bullet$ 是 injective 的拟同构. 则对于任意的内射复形 $\mathscr{I}^\bullet$ 和复形的态射 $g^\bullet:\mathscr{F}^\bullet\to\mathscr{I}^\bullet$，存在态射 $\tilde{g}^\bullet:\mathscr{G}^\bullet\to\mathscr{I}^\bullet$ 使得*

$$g^\bullet=\tilde{g}^\bullet\circ f^\bullet.$$

命题 7.2. *设 $f:C^\bullet\to D^\bullet$ 是链映射，$C^\bullet\to I^{\bullet,\bullet}$ 和 $D^\bullet\to J^{\bullet,\bullet}$ 是两个 Cardan-Eilenburg 消解，那么存在链映射 $\tilde{f}^{\bullet,\bullet}:I^{\bullet,\bullet}\to J^{\bullet,\bullet}$ 是 $f^\bullet$ 上的映射.*

给定一个 n 维复流形 X，那么可以定义其上的 $\mathbb{C}$ 向量空间层的复形

$$0\to\mathscr{O}_X\to\Omega_X^1\xrightarrow{\partial}\Omega_X^2\xrightarrow{\partial}\cdots\xrightarrow{\partial}\Omega_X^n\to 0,$$

其中 Ω_X^q 是 X 上的全纯 q 形式，那么如上复形是常层 $\mathbb{C}$ 的消解.

7.2　Lie

定义. 给定 k 上的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$，M 是 $\mathfrak{g}$ 模，定义如下的

$$C_n^{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, M) := M \otimes_k \bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{g},$$

其中 $\bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \wedge_k \cdots \wedge_k \mathfrak{g}$，并且有边缘映射

$$\begin{aligned}
\partial_n : M \otimes_k \bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{g} &\to M \otimes_k \bigwedge_{i=1}^{n-1} \mathfrak{g} \\
m \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge a_n &\mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [m, a_i] \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge a_n \\
&\quad + \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j-1} m \otimes [a_i, a_j] \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge \hat{a}_j \wedge a_n,
\end{aligned}$$

称复形 $(C_\bullet^{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, M), \partial_\bullet)$ 为 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 以 M 为系数的 Chevalley-Eilenberg 复形 (Chevalley-Eilenberg). 对偶地，定义如下的

$$C_{\mathrm{CE}}^n(\mathfrak{g}, M) := \mathrm{Hom}_k \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{g}, M \right)$$

和微分映射

$$d^n : \mathrm{Hom}_k \left(\bigwedge_{i=1}^{n} \mathfrak{g}, M \right) \to \mathrm{Hom}_k \left(\bigwedge_{i=1}^{n+1} \mathfrak{g}, M \right)$$

满足

$$\begin{aligned}
d\omega(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot \omega(x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n) \\
&\quad + \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots x_n),
\end{aligned}$$

则称 $(C_{\mathrm{CE}}^\bullet, d^\bullet)$ 是

7.3 Hochschild

本节中我们都假定 k 是交换环，理想的情况下它会是域.

定义. 给定交换基代数 k 和 k 代数 A，若（对称）k 模 M 同时具有左右 A 模结构，且满足对任意 $a, b \in A, m \in M$ 都有

$$(am)b = a(mb),$$

且 k 在 M 上的左右作用与 A 在 M 上的左右作用相容，则称 M 是一个 A 双模 (A-bimodule). 若 A 还有单位元，则一般要求

$$1m = m = m1.$$

记 $A^e = A \otimes_k A$，那么一个 A 双模 M 同时是一个左 A^e 模，作用由

$$(a \otimes b)m = amb$$

给出. 或者，一个 A 双模 M 同时是一个右 A^e 模，作用由

$$m(a \otimes b) = b^{-1}ma$$

给出.

定义. 给定交换基代数 k 和 k 代数 A，M 是 A 双模，给定 A 模

$$C_n(A, M) := M \otimes_k A^{\otimes n},$$

其中 $A^{\otimes n} := A \otimes_k \cdots \otimes_k A$，并且有如下 Hochschild 边缘映射

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n(A, M) &\to C_{n-1}(A, M) \\ m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto ma_1 \otimes \cdots \otimes a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &\quad + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}, \end{aligned}$$

那么 $(C_\bullet^{\text{Hoch}}(A, M), \partial_\bullet)$ 称为 Hochschild 复形 (Hochschild complex)，对应的同调群称为 A 以 M 为系数的 Hochschild 同调群 (Hochschild homology group of A with coefficients in M)，记为 $HH_\bullet(A, M)$. 特别地若 $M = A$，我们记 $HH_\bullet(A)$.

引理 7.1. *$(C_\bullet(A, M), \partial_\bullet)$ 是链复形.*

证明. 定义

$$\begin{aligned} d_i^{[n]} : C_n(A, M) &\to C_{n-1}(A, M) \\ d_0(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= ma_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\ d_i(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= m \otimes a_1 \otimes \cdots a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ d_n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}, \end{aligned}$$

于是

$$d_i^{[n]} d_j^{[n]} = d_{j-1}^{[n]} d_i^{[n]}$$

对 $0 \le i < j \le n$ 成立，这样 $C_\bullet(A, M)$ 是预单纯的，因此根据习题1.1，$(C_\bullet(A, M), \partial_\bullet)$ 是链复形. □

事实上，如上定义的同调群 $HH_\bullet(A, M)$ 关于 M 有函子性：给定一个 A 双模同态 $\psi : M \to N$，那么它

诱导的

$$\psi_\bullet : C_\bullet(A, M) \to C_\bullet(A, N)$$
$$\psi_n : m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto \psi(m) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

是一个链映射，因此诱导了 Hochschild 同调群的同态；同时群 $HH_\bullet(A, M)$ 关于 A 也有函子性：给定一个 k 代数同态 $\varphi : A \to B$，它诱导的

$$\varphi_\bullet : C_\bullet(A, M) \to C_\bullet(B, M)$$
$$\varphi_n : m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto m \otimes \varphi(a_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(a_n)$$

是一个链映射，因此诱导了 Hochschild 同调群的同态.

例 7.1. 首先考虑 $HH_0(A, M)$. 按定义，$HH_0(A, M) = C_0(A, M)/\mathrm{Im}\ \partial_1$，注意到 $\partial_1 : a \otimes m \mapsto ma - am$ 的定义使得 $\mathrm{Im}\ \partial_1$ 中的元素都是形如 $ma - am$ 这样的元素生成的，因此

$$HH_0(A, M) = M/\langle ma - am\rangle =: M/[M, A].$$

特别地，$HH_0(A) = A/[A, A]$.

例 7.2. 当 $A = k$ 时，$C_n(A) = k$ 对于任意 n 都成立，并且 $d_i^{[n]} = \mathrm{id}$ 对任意 $1 \le i \le n$. 于是，Hochschild 复形是

$$\cdots \to k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} k,$$

因此 $HH_*(k) = k[0]$.

习题 7.1. 给定 k 代数 A，记 $Z(A) := \{z \in A \mid az = za\ \forall a \in A\}$ 为 A 的中心，求证 $Z(A)$ 在 $C_\bullet(A, M)$ 上的作用

$$z \cdot (m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := zm \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

和

$$(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \cdot z := mz \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

是同伦的. 事实上，这还是个单纯同伦.

命题 7.3. 若 A 是含幺的交换 k 代数，那么存在自然的同构

$$HH_1(A) \cong \Omega^1_{A/k}.$$

若 M 还是对称的 A 双模（即 $am = ma$ 对任意 $a \in A, m \in M$）都成立，那么存在自然同构

$$HH_1(A, M) \cong M \otimes_A \Omega^1_{A/k}.$$

证明. 由于 A 是交换代数，因此 $\partial_1 : A \otimes_k A \to A$（例7.1）是 0 映射，因此

$$HH_1(A) \cong A \otimes_k A/\langle ab \otimes c - a \otimes bc + ca \otimes b\rangle.$$

这样对于映射

$$HH_1(A) \to \Omega^1_{A/k}$$
$$a \otimes b \mapsto adb$$

是良定义的，且是 A 模同态. 容易验证这是一个同构. □

接下来我们希望用导出函子的语言来描述 Hochschild 同调.

定义. 给定 k 代数 A，记 A° 为 A 的对偶代数（即与 A 具有相同的元素，但乘法定义为 $a^\circ \cdot b^\circ := (ba)^\circ$），令 $A^e := A \otimes_k A^\circ$，那么对于任意的 A 双模 M 都有 A^e 的左作用

$$(a \otimes b)m := amb.$$

那么如下链复形称为 bar 复形 (Bar complex)：

$$\bar{C}_\bullet(A) : \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} A^{\otimes n+1} \xrightarrow{\bar{\partial}_n} A^{\otimes n} \xrightarrow{\bar{\partial}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_1} A^{\otimes 2} \to 0,$$

其中 $A^{\otimes 2}$ 处于 0 阶位置，且 $\bar{\partial}_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$（注意到求和不取到 $n+1$）. 由乘法定义的映射

$$\mu : A \otimes_k A \to A$$

是复形 $\bar{C}_\bullet$ 的扩张.

很明显

$$HH_*(A) \cong H_*(M \otimes_{A^e} \bar{C}_\bullet),$$

即 Hochschild 同调是 A^e 模链复形 $\bar{C}_\bullet$ 以 M 为系数的同调.

命题 7.4. *设 k 代数 A 是含幺的，那么复形 $\bar{C}_\bullet$（附有扩张 $\mu : \bar{C}_\bullet \to A$）是 A^e 模 A 的自由 A^e 模消解，它称为 bar 消解 (Bar resolution).*

证明. 对于这里的证明我们通过构造新的称为退化映射 (degeneracy may) 的结构，来获得新的信息完成证明. 定义

$$s : A^{\otimes n} \to A^{\otimes n+1}$$
$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n,$$

那么可以验证 $d_i s = s d_{i-1}$ 对任意 $i = 1, \cdots, n-1$ 成立，且 $d_0 s = \mathrm{id}$，于是

$$\bar{\partial} s + s \bar{\partial} = \mathrm{id},$$

因此这证明了 $\bar{C}_\bullet$ 是消解. □

在如上的证明中我们事实用到了 A 有左单位的事实，当 A 有右单位时，取

$$s : A^{\otimes n} \to A^{\otimes n+1}$$
$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1$$

即可. 此外，复形 $\bar{C}_\bullet$ 的边缘算子 $\bar{\partial}$ 完全由如下性质决定：

1. $\bar{\partial}$ 是左 A 模同态，
2. $\bar{\partial}_0 = \mu$,
3. $\bar{\partial} s + s\bar{\partial} = \mathrm{id}$,

并且这给出了链同构 $C_\bullet(A, A^e) \cong \bar{C}_\bullet$.

事实上，我们可以扩充如上的构造使得 $C_\bullet(A, M)$ 成为一个单纯对象，因而可以通过商去退化对象得到正规化的 Hochschild 复形，鉴于这些讨论需要其他工具的建立，在此略去.

定理 7.5. 给定 k 代数 A，若 A 是投射 k 模，那么对任意 A 双模 M，存在自然的同构

$$HH_n(A, M) \cong \mathrm{Tor}_n^{A^e}(M, A).$$

证明. 根据假设，$A^{\otimes n}$ 对于任意自然数 n 也是投射 k 模，因此 $A^{\otimes n+2} = A \otimes_k A^{\otimes n} \otimes_k A$ 是投射 A^e 模（其中模结构由 $(a \otimes b)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) := aa_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}b$ 给出）. 这是因为,???

于是，注意到 $M \otimes_{A^e} A^{\otimes n+2} \cong M \otimes_k A^{\otimes n}$，定理成立. □

例 7.3.

类似于拓扑中的同调理论，对于任意 A 的双边理想 I，短正合列 $0 \to I \to A \to A/I \to 0$ 诱导了同调群的长正合列

$$\cdots \to HH_n(A, I) \to HH_n(A) \to HH_n(A/I) \to HH_{n-1}(A, I) \to \cdots,$$

因此可以称 $HH_n(A, I)$ 是相对 Hochschild 同调群. 更一般地，对于任意的 k 代数同态 $A \to B$，它诱导的链映射 $C_\bullet(A) \to C_\bullet(B)$ 的映射锥给出了诱导的长正合列.

习题 7.2. 给定两个含幺 k 代数，那么存在自然同构

$$HH_*(A \oplus B) \cong HH_*(A) \oplus HH_*(B).$$

习题 7.3. 记 $Z(A)$ 是 A 的中心，$U \subseteq Z(A)$ 是乘性子集且 $1 \in U$，对任意左 A 模 M 定义 $M[U^{-1}] := Z(A)[U^{-1}] \otimes_A M$，那么当 A 是 k 平坦时，存在自然的同构

$$HH_n(A, M)[U^{-1}] \cong HH_n(A, M[U^{-1}]) \cong HH_n(A[U^{-1}], M[U^{-1}]).$$

习题 7.4. 给定一族 k 代数同态 $\{f_i : A_i \to A_{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$，求证

$$\mathrm{colim}_i HH_n(A_i) \cong HH_n(\mathrm{colim}_i A_i).$$

习题 7.5 (MacLane). 给定（离散）群 G 并记 $k[G]$ 为 G 的群代数，并且给定 $k[G]$ 双模 M. 设 G 在 M 上的（右）作用是

$$m^g := g^{-1}mg,$$

求证存在自然同构

$$HH_*(k[G], M) \cong H_*(G, M),$$

其中 $H_*(G, M)$ 是 M 系数的群同调.

证明.

$$\varphi : C_\bullet^{\mathrm{Hoch}}(k[G], M) \to C_\bullet^{\mathrm{EM}}(G, M)$$
$$\varphi_n : C_n^{\mathrm{Hoch}}(k[G], M) \to C_n^{\mathrm{EM}}(G, M)$$
$$m \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \mapsto m^{g_1 \cdot \cdots \cdot g_n} \otimes g_1 \otimes \cdots \otimes g_n.$$

□

习题 7.6. 给定平坦 A 双模的短正合列 $0 \to M \to N \to P \to 0$，求证存在长正合列

$$\cdots \to HH_n(A, M) \to HH_n(A, N) \to HH_n(A, P) \to HH_{n-1}(A, M) \to \cdots.$$

事实上，只要 $0 \to M \to N \to P \to 0$ 是 k 分裂的即可.

习题 7.7. 给定 k 代数 A 的双边理想 I, J，尝试定义双相对 Hochschild 同调 $HH_*(A; I, J)$ 使得存在如下长整合列

$$\cdots \to HH_n(A, I) \to HH_n(A; I, J) \to HH_n(A, J) \to HH_{n-1}(A, I) \to \cdots,$$

并且证明当 $I \cap J = 0$ 时，$HH_0(A; I, J) = 0$ 且 $HH_1(A; I, J) = I \otimes_{A^e} J$.

7.3.1 Cohomology

$$HH^*(A) \cong H^*(\mathrm{Hom}_{A^e}(\bar{C}_\bullet, M)),$$

具体地，对于任意的 $f \in \mathrm{Hom}_{A^e}(\bar{C}_\bullet, M)$，

$$df(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := a_1 f(a_2 \otimes \cdots \otimes a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n) + (-1)^n f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}) a_n.$$

例 7.4.

$$HH^0(A, M) = M^A := \{m \in M \mid ma = am \ \forall a \in A\}$$
$$HH^1(A, M) = \mathrm{Der}(A, M)/\{\text{内微分}\}$$

定理 7.6. 给定带单位元的 k 代数 A 和 A 双模 M，那么存在自然的双射

$$HH^2(A, M) \cong \mathcal{E}xt(A, M),$$

其中 $\mathcal{E}xt(A, M)$ 是 A 关于 M 的平方零扩张的等价类的全体.

例 7.5. 考虑 $A := k[x_1, \cdots, x_n]$ 和任意 A 双模 M（因此 M 可以看作 A^e 模），我们希望计算

$$HH_i(A, M) = \mathrm{Tor}_i^{A^e}(A, M).$$

7.3.2 Hochschild-Kostant-Rosenberg

定理 7.7.

7.4 循环上同调 *

给定 R 代数 A，上一节中我们定义了 A 的 Hochschild 复形 $C_\bullet(A|R)$，这一节我们考虑 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 在复形上的作用，它诱导了一个新的同调，称为循环同调设 t_n 是 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 的一个生成元，定义 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 在 $A^{\otimes n+1}$ 上的作用为

$$t_n \cdot (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := (-1)^n (a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}),$$

对其进行先行扩张，并称它为循环算子 (cyclic operator). 定义

$$N := 1 + t + \cdots + t^n$$

为 t 对应的范数算子 (norm operator).

引理 7.2. *如上提到的算子满足*

$$\begin{aligned}(1-t)\bar{\partial} &= \partial(1-t),\\ \bar{\partial} N &= N\partial,\end{aligned}$$

其中 ∂ 是 Hochschild 复形的边缘映射 $\partial_n : C_n(A, M) \to C_{n-1}(A, M)$，$\bar{\partial}_n$ 是 bar 复形的边缘映射 $\partial_n : \bar{C}_n(A) \to \bar{C}_{n-1}(A)$.

证明. 按定义， □

如上引理说明

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "\partial"] & {} \arrow[d, "-\bar{\partial}"] & {} \arrow[d, "\partial"] & {} \arrow[d, "-\bar{\partial}"] & \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "\partial"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-\bar{\partial}"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "\partial"] & A^{\otimes 3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-\bar{\partial}"] & {} \arrow[l, "N"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "\partial"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-\bar{\partial}"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "\partial"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-\bar{\partial}"] & {} \arrow[l, "N"'] \\
A & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & {} \arrow[l, "N"']
\end{tikzcd}$$

是一个双复形，称为循环双复形 (cyclic bicomplex)，记为 $CC_{\bullet,\bullet}(A)$.

定义. 给定?? A，称

$$HC_n(A) := H_n(\mathrm{Tot}(CC_{\bullet,\bullet}(A)))$$

为 A 的循环同调 (cyclic homology). 在需要时，用 $HC_n(A|R)$ 来强调基环 R.

事实上，循环同调 $HC_*(A|R)$ 关于 A 和 R 都有函子性.

注意到 $\mathrm{Coker}(A^{\otimes n+1} \xrightarrow{1-t} A^{\otimes n+1})$ 是循环群 $\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$ 下不变的，记 $C_n^\lambda(A) := \mathrm{Coker}(A^{\otimes n+1} \xrightarrow{1-t} A^{\otimes n+1})$，引理7.2说明存在如下复形

$$C_\bullet^\lambda(A) := \cdots \to C_n^\lambda(A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^\lambda(A) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0^\lambda(A)$$

是良定义的，称为 Connes 复形（Connes' complex），记它的同调为 $H_*^\lambda(A)$. 此时，存在自然的映射 $p_\bullet : \mathrm{Tot}(CC_{\bullet,\bullet}(A)) \to C_\bullet^\lambda(A)$，它在第一列上是取商，在其余列上是 0.

命题 7.8. *若基环 R 包含 $\mathbb{Q}$ 作为子环，那么诱导的映射 $p_* : HC_*(A) \to H_*^\lambda(A)$ 是同构.*

证明. □

7.5 应用：形变与上同调

几何上，

7.5.1 一阶形变

给定 k 代数 A，我们考虑如下问题：A 上的乘法实际上是一个 k 映射 $A \otimes_k A \to A$，在所有的这样映射的全体 $\mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$ 中，并不是所有的元素都可以成为乘法——我们依旧要求乘法满足结合律，但这导致对这样元素的讨论变得困难了许多，因此相应的比较系统的方式考虑“切空间”问题，更准确地说，一阶形变的问题.

于是，考虑从旧的乘法中定义一个新的“乘法”

$$a * b := ab + \epsilon f(a,b),$$

其中 $f \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$，那么结合律

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

就具体地写为

$$(ab + \epsilon f(a,b))c + \epsilon f(ab + \epsilon f(a,b), c) = a(bc + \epsilon f(b,c)) + \epsilon f(a, bc + \epsilon f(b,c)),$$

根据 f 的双线性性，上式被化简为

$$abc + \epsilon f(a,b)c + \epsilon f(ab,c) + \epsilon^2 f(f(a,b),c) = abc + \epsilon a f(b,c) + \epsilon f(a,bc) + \epsilon^2 f(a, f(b,c)).$$

注意到这里考虑的是一阶问题（即在环 $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ 上考虑问题），视 $\epsilon^2 = 0$，因此我们得到关于 f 的条件

$$f(a,b)c + f(ab,c) = af(b,c) + f(a,bc), \tag{7.1}$$

它对应于乘法的结合性条件.

另一方面，注意到 $GL_k(A)$ 在 A 上的作用本质上不改变乘法，因此在考虑乘法的时候我们希望去除掉 $GL_k(A)$ 的影响. 假定 $T \in GL_k(A)$ 满足

$$T(a) := a + \epsilon g(a),$$

其中 $g \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$. 这样，$T$ 对乘法 $- * -$ 的拉回为

$$a *_T b := T(T^{-1}(a) * T^{-1}(b)).$$

由于我们是在环 $k[\epsilon]/(\epsilon^2)$ 上考虑问题，$T^{-1} = \mathrm{id} - \epsilon g$（习题7.8）. 直接计算得到

$$\begin{aligned}
ab + \epsilon f_T(a,b) &= a *_T b := T(T^{-1}(a) * T^{-1}(b)) \\
&= T(T^{-1}(a)T^{-1}(b) + \epsilon f(T^{-1}(a), T^{-1}(b))) \\
&= T^{-1}(a)T^{-1}(b) + \epsilon f(T^{-1}(a), T^{-1}(b)) + \epsilon g(T^{-1}(a)T^{-1}(b) + \epsilon f(T^{-1}(a), T^{-1}(b))) \\
&= (a - \epsilon g(a))(b - \epsilon g(b)) + \epsilon f(a - \epsilon g(a), b - \epsilon g(b)) \\
&\quad + \epsilon g((a - \epsilon g(a))(b - \epsilon g(b)) + \epsilon f(a - \epsilon g(a), b - \epsilon g(b))) \\
&= ab - \epsilon(g(a)b + ag(b)) + \epsilon^2 g(a)g(b) + \epsilon f(a - \epsilon g(a), b - \epsilon g(b)) \\
&\quad + \epsilon g(ab - \epsilon(g(a)b + ag(b)) + \epsilon^2 g(a)g(b) + \epsilon f(a - \epsilon g(a), b - \epsilon g(b))) \\
&= ab - \epsilon(g(a)b + ag(b)) + \epsilon f(a,b) + \epsilon g(ab),
\end{aligned}$$

这给出了关系

$$f_T(a,b) = f(a,b) - g(a)b - ag(b) + g(ab). \tag{7.2}$$

综上，我们关心的对象是 $\mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$ 中满足7.1式的乘法 f 在7.2式下的等价类.

观察如上的关系，这恰好给出了对应

$$\{\text{环}A\text{的一阶形变等价类}\} \leftrightarrow HH^2(A).$$

习题 7.8. 依照上面讨论的记号，求证

$$T^{-1}(a) = a - \epsilon g(a).$$

例 7.6. 考虑 k 代数 $A := k[\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}]$，作为 k 向量空间它有一组基 $\{1, \sigma\}$，满足 $\sigma^2 = 1$. 上闭链条件7.1给出关系

$$\begin{gathered}
f(1,1)1 + f(1,1) = 1f(1,1) + f(1,1) \\
f(1,1)\sigma + f(1,\sigma) = 1f(1,\sigma) + f(1,\sigma) \\
f(1,\sigma)1 + f(\sigma,1) = 1f(\sigma,1) + f(1,\sigma) \\
f(1,\sigma)\sigma + f(\sigma,\sigma) = 1f(\sigma,\sigma) + f(1,\sigma^2) \\
f(\sigma,1)1 + f(\sigma,1) = \sigma f(1,1) + f(\sigma,1) \\
f(\sigma,1)\sigma + f(\sigma,\sigma) = \sigma f(1,\sigma) + f(\sigma,\sigma) \\
f(\sigma,\sigma)1 + f(\sigma^2,1) = \sigma f(\sigma,1) + f(\sigma,\sigma) \\
f(\sigma,\sigma)\sigma + f(\sigma^2,\sigma) = \sigma f(\sigma,\sigma) + f(\sigma,\sigma^2),
\end{gathered}$$

去掉平凡等式与重复的等式，（考虑到交换性）有关系

$$\begin{gathered}
f(1,\sigma) = f(\sigma,1) \\
f(1,\sigma) = \sigma f(1,1).
\end{gathered}$$

于是，f 可由如下定义给出：

$$\begin{aligned} f(1,1) &:= c_1 + c_2\sigma \\ f(1,\sigma) &:= c_2 + c_1\sigma \\ f(\sigma,1) &:= c_2 + c_1\sigma \\ f(\sigma,\sigma) &:= c_3 + c_4\sigma, \end{aligned}$$

其中 $c_1, \cdots, c_4 \in k$ 是常数. 另一方面，记

$$\begin{aligned} g(1) &:= a_1 + a_2\sigma \\ g(\sigma) &:= a_3 + a_4\sigma, \end{aligned}$$

那么上边缘给出

$$\begin{aligned} dg(1,1) &= a_1 + a_2\sigma \\ dg(1,\sigma) &= a_2 + a_1\sigma \\ dg(\sigma,1) &= a_2 + a_1\sigma \\ dg(\sigma,\sigma) &= (2a_4 - a_1) + (2a_3 - a_2)\sigma, \end{aligned}$$

上面的计算恰好说明每一个上闭链都是上边缘，即 $HH^2(A) = 0$.

例 7.7. 考虑 k 代数 $A := k[\epsilon]/(\epsilon^2)$，依照例7.6中的计算方法（不同的是这里 $\epsilon^2 = 0$），可以得到

$$\begin{aligned} f(1,1) &:= c_1 + c_2\epsilon \\ f(1,\epsilon) &:= c_1\epsilon \\ f(\epsilon,1) &:= c_1\epsilon \\ f(\epsilon,\epsilon) &:= c_3 + c_4\epsilon, \end{aligned}$$

上边缘给出关系

$$\begin{aligned} dg(1,1) &= a_1 + a_2\epsilon \\ dg(1,\epsilon) &= a_1\epsilon \\ dg(\epsilon,1) &= a_1\epsilon \\ dg(\epsilon,\epsilon) &= a_3\epsilon, \end{aligned}$$

这意味着非边缘的上闭链都形如

$$f(\epsilon,\epsilon) = c_3,$$

因此 $HH^2(A) = k$.

7.5.2　高阶形变和

上一节当中我们讨论了一阶形变，对应的同样还有高阶形变，我们首先来讨论所谓的二阶形变. 类似之前的定义，记新的乘法为

$$a * b := ab + \epsilon f_1(a,b) + \epsilon^2 f_2(a,b),$$

其中 $f_1, f_2 \in \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A)$，如同上一节对结合律的计算，我们不仅得到相同的关系式7.1

$$f_1(a,b)c + f_1(ab,c) = af_1(b,c) + f_1(a,bc),$$

还得到新的关系式

$$f_1(f_1(a,b),c) - f_1(a, f_1(b,c)) = f_2(a,b)c + f_2(ab,c) - af_2(b,c) - f_2(a,bc), \tag{7.3}$$

容易观察得到等式的右边恰好是 f_2 在微分映射下的像 $df_2 \in \mathrm{Hom}(A \otimes_k A \otimes_k A, A)$.

定义. 给定域 k 和 k 向量空间的上链复形 $(L^\bullet, d^\bullet)_{\mathbb{Z}}$，记 $L := \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} L^i$，若还存在双线性映射

$$[-,-] : L \times L \to L$$

满足

1. 映射 $[-,-]$ 是齐次 (homogeneous) 且反对称的 (skew symmetric)，即 $[L^i, L^j] \subseteq L^{i+j}$ 对任意 $i, j \in \mathbb{Z}$ 成立，且对任意齐次元素 $x \in L^i, y \in L^j$，

$$[x,y] = (-1)^{\deg x \deg y + 1}[y,x],$$

2. 映射 $[-,-]$ 满足分次 Jacobi 等式，即 $x \in L^i, y \in L^j, z \in L^p$，

$$(-1)^{\deg x \deg z}[x,[y,z]] + (-1)^{\deg y \deg x}[y,[z,x]] + (-1)^{\deg z \deg y}[z,[x,y]] = 0,$$

3. 微分映射 d 满足分次 Leibnitz 恒等式，即 $x \in L^i, y \in L^j$，

$$d[x,y] = [dx,y] + (-1)^{\deg x}[x,dy],$$

则称 $(L^\bullet, [-,-], d^\bullet)$ 是一个微分分次 Lie 代数 (differential graded Lie algebra).

这里奇妙的事情是存在合适的定义方式使得计算 Hochschild 上同调的复形是一个微分分次 Lie 代数.

定义. 给定 $f \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes m+1}), g \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n+1})$, 对任意 $i = 1, \cdots, m+1$, 定义 $f \circ_i g \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n+m+1})$

$$f \circ_i g(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+n+1}) := f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{i-1} \otimes g(a_i \otimes \cdots \otimes a_{i+n}) \otimes \cdots \otimes a_{m+n+1}).$$

进而可以定义 circle product

$$f \circ g := \sum_{i=1}^{m+1} (-1)^{(i+1)n} f \circ_i g.$$

引理 7.3. 给定 $f \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes m+1}), g \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n+1})$，若定义 *cup product*

$$(f \smile g)(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+n+2}) := f(a_1 \otimes \cdots \otimes a_{m+1})g(a_{m+2} \otimes \cdots \otimes a_{m+n+2}),$$

则

$$d(f \circ g) = f \circ dg + (-1)^n df \circ g + (-1)^{(m+1)(n+1)+n} f \smile g + (-1)^{n+1} g \smile f.$$

命题 7.9. *Gerstenhaber* 括号

$$[f,g] := f \circ g - (-1)^{\deg f \deg g} g \circ f$$

和 $-d$ 使得 $(\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes \bullet +1}), [-,-], -d)$ 成为一个微分分次 *Lie* 代数.

证明. □

推论 7.9.1. 若 $f \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, A)$ 是上闭链，那么 $[f,f] \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes 2n+1}, A)$ 也是上闭链.

回到原来的问题，注意到

$$f_1 \circ f_1(a \otimes b \otimes c) = 2f_1(f_1(a \otimes b) \otimes c) - 2f_1(a \otimes f_1(b \otimes c))$$

恰好是等式7.3的左边的两倍，因此7.3式可重新写为

$$\frac{1}{2}[f_1, f_1] = df_2.$$

又由于 f_2 是上闭链，这说明存在二阶形变

$$a * b := ab + \epsilon f_1(a,b) + \epsilon^2 f_2(a,b),$$

是以 f_1 为截断的一阶形变的扩张当且仅当

$$0 = [f_1, f_1] \in HH^3(A),$$

因此称 $[f_1, f_1]$（的等价类）为一阶形变 $ab + \epsilon f_1$ 扩张到二阶形变 $ab + \epsilon f_1 + \epsilon^2 f_2$ 的阻碍 (obstruction).

借助如上的工具，记 A 中的乘法为

$$\begin{aligned} m : A \times A &\to A \\ (a,b) &\mapsto ab, \end{aligned}$$

那么结合律

$$m(m(a,b),c) = m(a, m(b,c))$$

可以等价地写为

$$[m,m] = 0,$$

Leibnitz 法则

$$d(m(a,b)) = m(d(a),b) + m(a,d(b))$$

可写为

$$[d,m] = 0,$$

而 Hochschild 微分

$$d(f) = [m,f]$$

对任意 $f \in \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes n+1}, A)$ 都成立.

例 7.8.

对于更一般 n 阶扩张的情形，我们实际上是在考虑系数环 $k[\epsilon]/(\epsilon^{n+1})$ 上的情形，如同之前的计算对比每个 ϵ^k 的系数有方程

$$\sum_{i+j=0}^{k} f_j(a, f_i(b,c)) = \sum_{i+j=0}^{k} f_j(f_i(a,b),c),$$

当 $k=0$ 时这恰好是 A 中的乘法

7.6 函子上同调 *

给定小范畴 $\mathcal{C}$，记 $\mathcal{C}-\mathbf{Mod}$（对应的，$\mathbf{Mod}-\mathcal{C}$）为所有 $\mathcal{C}$ 到 $R-\mathbf{Mod}$ 的协变函子（对应的，反变函子）组成的范畴. 根据例A.3，这也是一个 Abel 范畴. 但为了

定义. 给定幺半小范畴 $\mathcal{C}$，若 $\mathcal{C}$ 中的对象与 $\mathbb{N}$ 对应（于是对象被记为 $\{[n]\}_{n\in\mathbb{N}}$），且幺半结构同于自然数的加法结构，即

$$[n] \otimes [m] = [n+m],$$

则称范畴 $\mathcal{C}$ 为一个 PROP.

例 7.9. 记 $\mathbf{FinSet}_*$ 是具有基点的所有有限集合组成的范畴，即

1. $\mathbf{FinSet}_*$ 的对象包括 $\{[n] := \{0,1,\cdots,n\}\}_{n\in\mathbb{N}}$，其中 $0 \in [n]$ 是集合的基点，
2. $\mathbf{FinSet}_*$ 的态射包括所有保基点的集合映射的全体，
3. $\mathbf{FinSet}_*$ 的幺半结构由楔积给出，即

$$[n] \wedge [m] = [n+m],$$

明显地这是一个 PROP.

引理 7.4. 函子 $R[\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}([n],-)]$ 和 $R[\mathrm{hom}_{\mathcal{C}}(-,[n])]$ 都是投射的.

证明. 给定左 $\mathcal{C}$ 模 F, G 和满射 $\tau : F \Rightarrow G$，我们需要证明对任意的态射 $\alpha : R[\hom_{\mathcal{C}}([n], -)]$，都有提升

$$\begin{tikzcd} & R[\hom_{\mathcal{C}}([n],-)] \arrow[dl, dashed, "\tilde{\alpha}"'] \arrow[d, Rightarrow, "\alpha"] & \\ F \arrow[r, Rightarrow, "\tau"] & G \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

注意到对任意的左模 $H, K : \mathcal{C} \rightrightarrows R - \mathbf{Mod}$，$\mathrm{Nat}(H, K)$ 也有自然的 k 模结构，满足

$$(\alpha + \beta)_A := \alpha_A + \beta_A,$$
$$(r\alpha)_A := r\alpha_A.$$

记 $h^n := R[\hom_{\mathcal{C}}([n], -)]$ 是由集合 $\hom_{\mathcal{C}}([n], -)$ 生成的自由 R 模，因此 Yoneda 引理中的自然同构

$$\begin{aligned} \Phi : \mathrm{Nat}(h^n, G) \leftrightarrows G([n]) : \Psi \\ \alpha \mapsto \alpha_{[n]}(\mathrm{id}_{[n]}) \\ \eta^m \leftarrow\!\shortmid m \end{aligned}$$

是 R 模的同构，其中 η^m 是自然变换

$$\begin{aligned} \eta^m : \hom_{\mathcal{C}}(A, -) \Rightarrow F \\ \eta^m_B : \hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to F(B) \\ h \mapsto F(h)(m). \end{aligned}$$

这意味着在此 Yoneda 对应下，α 对应到 $G([n])$ 中的某个元素 m，例A.3说明

$$\tau_{[n]} : F([n]) \to G([n])$$

是满射，因此存在 $\tilde{m} \in F([n])$ 使得 $\tau_{[n]}(\tilde{m}) = m$，记 $\tilde{\alpha}$ 是 $\tilde{m}$ 在 Yoneda 映射下对应的自然变换，Yoneda 的自然性说明了最初图的交换性，得证.

对函子 $R[\hom_{\mathcal{C}}(-, [n])]$ 的证明是相同的. □

命题 7.10. *若范畴 $\mathcal{C}$ 是 PROP，那么 $\mathcal{C} - \mathbf{Mod}$ 有足够多的投射和内射对象.*

证明. 考虑

$$\bigoplus_{\substack{A \in \mathrm{ob}\ \mathcal{C} \\ a \in F(A)}} h_A \Rightarrow F,$$

其中自然变换 $h_A \Rightarrow F$ 由 Yoneda 引理对应到元素 $a \in F(A)$ 给出 □

自然地可以构造（双）函子

$$- \otimes_{\mathcal{C}} - : \mathbf{Mod} - \mathcal{C} \times \mathcal{C} - \mathbf{Mod} \to R - \mathbf{Mod},$$

使得

$$G \otimes_{\mathcal{C}} F = \left(\bigoplus_{A \in \mathrm{ob}\ \mathcal{C}} G(A) \otimes_k F(A) \right) \Big/ \langle (G(f)(x)) \otimes y - x \otimes (F(f)(y)) \rangle_{\substack{x \in G(A), y \in F(B), \\ A, B \in \mathrm{ob}\ \mathcal{C}, \\ f \in \hom_{\mathcal{C}}(A, B)}},$$

或者可以表示为

$$F \otimes_{\mathcal{C}} G \cong \operatorname{coeq}\Big(\bigoplus_{f\in \hom_{\mathcal{C}}(A,B)} G(B)\otimes_k F(A) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightrightarrows}} \bigoplus_{A\in \mathrm{ob}\ \mathcal{C}} G(A)\otimes_k F(A)\Big),$$

其中对任意的 $x \in G(A), y \in F(B)$，$f^*(x\otimes y) := x\otimes F(f)(y), f_*(x\otimes y) := G(f)(x))\otimes y$.

例 7.10. 记 R 是映到 R 作为 R 模本身的常值函子，那么

$$F \otimes_{\mathcal{C}} R \cong \operatorname{colim}_{\mathcal{C}} F.$$

这里直接应用了余极限的计算方法.

习题 7.9.

$$F \otimes_{\mathcal{C}} h^n \cong F([n])$$

特别地，对任意 $M \in \mathcal{C}-\mathbf{Mod}$ 和 $N \in \mathbf{Mod}-\mathcal{C}$，$\operatorname{Tor}_i^{\mathcal{C}}(M,N)$ 是有意义的.

例 7.11. 考虑 $\mathcal{C} = \mathbf{FinSet}_*$ 的情形（见例7.9），给定交换 k 代数 A 和对称 $A-A$ 双模 M，定义函子

$$\begin{aligned} L(A,M) : \mathbf{FinSet}_* &\to k-\mathbf{Vec} \\ [n] &\mapsto M\otimes_k A^{\otimes n}, \end{aligned}$$

并且对于任意 $f:[n]\to[m]$，$L(A,M)(f)$ 定义为

$$\begin{aligned} M\otimes_k A^{\otimes n} &\to M\otimes_k A^{\otimes m} \\ a_0\otimes\cdots\otimes a_n &\mapsto b_0\otimes\cdots\otimes b_m, \end{aligned}$$

其中

$$b_j := \prod_{f(i)=j} a_i,\ \ j=0,\cdots,m.$$

这里有几个技术性的条件：我们要求有限集是带基点的原因在于 $L(A,M)([n]) = M\otimes_k A^{\otimes n}$ 中的元素地位并不一样——第 0 项只能是 M 中的元素，不能与其他元素交换位置，但取 $M=A$ 时则不需要有这个要求；在 b_j 的定义中并没有规定乘法中每个 a_i 的位置，这样在 A 是交换代数时如上的定义才没有歧义，T.Pirashvili 在 [1] 中讨论了 A 非交换的情形.

考虑一组有限集及之间的态射

$$\begin{aligned} (S^1)_n &:= \{(0,\cdots,0,1,\cdots,1)\}/\sim,\ \ n\in\mathbb{N} \\ d_i^{[n]} &: (S^1)_n \to (S^1)_{n-1} \\ (a_0,\cdots,a_n) &\mapsto (a_0,\cdots,\hat{a}_i,\cdots,a_n) \end{aligned}$$

其中 $(S^1)_n$ 中的数组共 $n+1$ 项（这里我们将 i 与有 i 个 0 的数组等同起来），等价关系定义为 $(0,\cdots,0)\sim(1,\cdots,1)$. 按照之前的定义，

$$L(A,M)((S^1)_n) = M\otimes_k A^{\otimes n},$$

而 $L(A,M)(d_i^{[n]})$ 是

$$\begin{aligned} M\otimes_k A^{\otimes n} &\to M\otimes_k A^{\otimes n-1} \\ a_0\otimes\cdots\otimes a_n &\mapsto \begin{cases} a_0a_1\otimes a_2\otimes\cdots\otimes a_n & i=0 \\ a_0\otimes\cdots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_n & i=1,\cdots,n-1 \\ a_na_0\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_{n-1} & i=n, \end{cases} \end{aligned}$$

这恰好是 Hochschild 复形.

在例7.11中我们给 Hochschild 一个新的解释，

例 7.12.

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathbf{B}G}(k,F)\cong H_i(G;k)$$

例 7.13. 设 $\mathscr{G}$ 是 $\mathbf{Gp}$ 中所有有限生成自由群组成的满子范畴，于是给定域 k，

$$\mathrm{lin}_k:\mathscr{G}\hookrightarrow\mathbf{Gp}\xrightarrow{\mathrm{ab}}\mathbf{Ab}\xrightarrow{-\otimes_{\mathbb{Z}}k}k-\mathbf{Vec}$$

那么

$$\mathrm{Tor}_i^{\mathscr{G}^\circ}(k[G],\mathrm{lin}_k)\cong H_{i+1}(G;k)$$

其中 $H_{i+1}(G;k)$ 是群 G 以 k 为系数的群同调.

$h^1(\langle n\rangle)=k[\hom_{\mathscr{G}}(\langle 1\rangle,\langle n\rangle)]=k[\langle n\rangle]$

$$h^1\Rightarrow\mathrm{lin}_k,$$

习题 7.10.

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathscr{G}}(k[G],\mathrm{lin}_k)\cong ?H^{i+1}(G;k)$$

附录 A　Abel 范畴

一定程度上说，我们构造范畴的目的是抽象出原本一些对象之间的行为，用更一般的方式去理解之前的对象和之间的行为. 在代数中，模是一类非常友好的对象，我们希望找到足够抽象的一类对象，他们之间的行为类似于模（或者 Abel 群），这样的范畴就是 Abel 范畴.

同调代数中绝大多数的研究对象是 Abel 范畴中的对象，它们具有许多良好的性质，在这一章中我们将列举绝大部分. 但是，同调代数的学习并不需要知道每一个这样性质的来源和证明，甚至在很多情形下一个 Abel 范畴完全可以看成一个 R 模范畴，虽然这并不准确，但足够对同调代数有正确的理解. 这里的建议是大致浏览这一章，知道 Abel 范畴的定义和一些基本性质，然后进入正式的同调代数的学习，在适当并且需要的时候再去了解和分析 Abel 范畴中一些性质的证明.

A.1　Abel 范畴

这一节我们不区分范畴内对象的同构和相等.

定义. 给定范畴 $\mathcal{C}$，若其中的始对象和终对象都存在，并且二者相同（即存在对象既是始对象也是终对象），则称该对象为零对象 (zero object).

习题 A.1. 给定范畴 $\mathcal{C}$ 和 Abel 范畴 $\mathcal{A}$，满足 $\mathcal{A}$ 中存在零对象，求证范畴 $\operatorname{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ 也存在零对象.

证明. 我们需要验证 $\operatorname{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{A})$ 中的零对象是常值零函子，即函子

$$\begin{aligned}\mathrm{Const}_0 : \mathcal{C} &\to \mathcal{A}\\ A &\mapsto 0.\end{aligned}$$

任意给定函子 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$ 和自然变换 $\alpha : F \Rightarrow \mathrm{Const}_0$，具体写出来对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A，

$$\alpha_A : F(A) \to 0$$

是 $\mathcal{A}$ 中的态射. 但是 0 是 $\mathcal{A}$ 中的零对象，因此 $\alpha_A = 0$，这意味着 Const_0 是终对象. 同理它是始对象. □

定义. 给定范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个单态射 $f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$，若存在 $h : A_1 \leftrightarrows A_2 : k$ 使得图

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dr, "f_1"] \arrow[dd, shift left, "h"] & \\
& B, \\
A_2 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[uu, shift left, "k"] &
\end{tikzcd}
$$

是交换的，则称单态射 $f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$ 是等价的 (equivalent). 对偶地，给定范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个满态射 $g_1 : B \to C_1, g_2 : B \to C_2$，若存在 $h : C_1 \leftrightarrows C_2 : k$ 使得图

$$
\begin{tikzcd}
& C_1 \arrow[dd, shift left, "h"] \\
B \arrow[ur, "g_2"] \arrow[dr, "g_1"'] & \\
& C_2 \arrow[uu, shift left, "k"]
\end{tikzcd}
,
$$

是交换的，则称满态射 $f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$ 是等价的 (equivalent). 称 B 的单态射的等价类为 B 的子对象 (subobject)，B 的满态射的等价类为 B 的商对象 (quotient object).

于是，对任意单态射 $A \hookrightarrow B$，它的等价类是 B 的一个子对象，记为 $A \subseteq B$，同样地，对任意一个满态射 $B \twoheadrightarrow C$，它的等价类是 B 的一个商对象，记为 $C = B/\sim$.

习题 A.2. 求证若 $f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$ 都是单态射，那么满足交换图

$$
\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[dr, "f_1"] \arrow[dd, "h"] & \\
& B, \\
A_2 \arrow[ur, "f_2"] &
\end{tikzcd}
$$

的 $h : A_1 \to A_2$ 是单射.

若 $A_1 \to B, A_2 \to B$ 分别是某个子对象的代表元，且存在 $A_1 \to A_2$ 使图交换，则称子对象 A_1 被子对象 A_2 包含. 注意到子对象不具有传递性.

定义. 给定范畴 $\mathcal{C}$ 中的两个态射 $f, g : X \to Y$，若存在对象 K 和态射 $i : K \to X$ 满足

1. $f \circ i = g \circ i$;
2. 若对任意满足 $f \circ h = g \circ h$ 态射 $h : Z \to X$ 都存在唯一的分解

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\
Z \arrow[u, dashed] \arrow[ur, "h"] & &
\end{tikzcd}
$$

则称 K 是 f,g 的等值子 (equalizer). 若范畴 $\mathcal{C}$ 存在零对象，那么称 f 与 0 的等值子为 f 的核 (kernel)，记为 $\ker f$.

A.1.1 Abel 范畴的加性

定义. 若范畴 $\mathcal{A}$ 满足

1. $\mathcal{A}$ 中零对象存在；
2. 对 $\mathcal{A}$ 中任意两个对象 X,Y，它们的和与积都存在；
3. 若 $f: X \to Y$ 是 $\mathcal{A}$ 中的态射，则 $\ker f$ 与 $\operatorname{coker} f$ 存在；
4. 任意单态射（满足左消去律）都是某个态射的核，任意满态射（满足右消去律）都是某个态射的余核；

则称 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴 (Abelian category).

习题 A.3. 在 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中，证明

1. 单态射 $f: X \to Y$ 的核是 0，满态射 $g: Y \to Z$ 的余核是 0.
2. $0 \to X$ 的余核是 $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X$，$Y \to 0$ 的核是 $Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y$.

证明. 由于两个部分都有两个互相对偶的命题，因此都只证一部分.

1. $f: X \to Y$ 是单态射，若 $t: T \to X$ 使得 $f \circ t = 0$，那么那么有 $T \to X \to Y = 0 \to X \to Y$，根据消去律 $t = 0$，这意味着 $T \to X$ 有分解 $T \to 0 \to X$.

2. 这是因为对任意 $k: X \to Z$，$0 \to X \to Z = 0$. □

给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象 X,Y，记它们的和为 $X+Y$ 或 $X \oplus Y$（$X \coprod Y, X \otimes Y$），泛性质诱导的映射分别记为

$$X \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}} X+Y$$

和

$$Y \xrightarrow{\begin{pmatrix}0 & 1\end{pmatrix}} X+Y.$$

对应地，记它们的积为 $X \times Y$ 或者 $X \prod Y$，泛性质诱导的态射为

$$X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 \\ 0\end{pmatrix}} X$$

和

$$X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}} Y.$$

进一步地,若给定了 $f: W \to X, g: W \to Y$,根据泛性质存在 $W \to X \times Y$,这个映射记为 $(f, g): W \to X \times Y$;若给定了 $h: X \to Z, k: Y \to Z$,根据泛性质存在 $X + Y \to Z$,这个映射记为 $\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}: X + Y \to Z$. 我们举例说明这样的记号使得态射的符合满足矩阵乘法. 考虑给定了 $f: W \to X, g: W \to Y$,那么复合

$$W \xrightarrow{\begin{pmatrix}f & g\end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}} X$$

用矩阵乘法写出来恰好是 $f: W \to X$,满足泛性质.

A.1.2 态射的分解

按定义,$\ker f$ 给出了 X 的一个子对象,$\operatorname{coker} f$ 给出了 Y 的一个商对象. 记 $\mathbf{S}X$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中对象 X 的所有子对象全体,$\mathbf{Q}X$ 是 X 的所有商对象全体,那么 ker 和 coker 给出了一对映射

$$\ker : \mathbf{Q}X \leftrightarrows \mathbf{S}X : \operatorname{coker},$$

其中 ker 将一个满态射给出它的核,coker 将单态射给出它的余核.

习题 A.4. 验证如上所述的映射是良定义的. 更一般地,证明 ker 是单态射,coker 是满态射.

证明. 我们需要验证两方面:单态射的 coker 是满态射(对偶地满态射的 ker 是单态射),且 ker 把等价的满态射映到等价的单态射(对偶地 coker 把等价的单态射映到等价的满态射).

给定态射 $f: X \to Y$,我们要验证 $Y \to \operatorname{coker}(X \to Y)$ 有右消去律,即对任意的 $k, l: \operatorname{coker}(X \to Y) \rightrightarrows Z$,若 $k \circ \operatorname{coker}(X \to Y) = l \circ \operatorname{coker}(X \to Y)$,那么 $k = l$. 考虑 $k - l: \operatorname{coker}(X \to Y) \to Z$,由于 $k \circ \operatorname{coker}(X \to Y) = l \circ \operatorname{coker}(X \to Y)$, $(k - l) \circ \operatorname{coker}(X \to Y) = 0: Y \to \operatorname{coker}(X \to Y) \to Z$,这意味着复合映射 $X \to Y \to Z = 0$,按照 coker 的定义,存在唯一的态射 $\operatorname{coker}(X \to Y) \to Z$ 使得 $Y \to \operatorname{coker}(X \to Y) \to Z$ 是 0 的分解;但如同之前所述,$k - l$ 满足分解,$0: \operatorname{coker}(X \to Y) \to Z$ 同样满足分解,因此 $k - l = 0$,即 $k = l$.

假设 $X_1 \to Y$ 和 $X_2 \to Y$ 是等价的单态射,那么存在态射 $i: X_1 \leftrightarrows X_2 : j$ 使得

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dr, "f_1"] \arrow[dd, shift left, "i"] & \\
& Y, \\
Y_2 \arrow[ur, "f_2"] \arrow[uu, shift left, "j"] &
\end{tikzcd}$$

是交换的,根据 coker 的函子性存在交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & \mathrm{coker}(X_1 \to Y) \arrow[dd, shift left, "\mathrm{coker}\ i"] \\
Y \arrow[ur, "g_2"] \arrow[dr, "g_1"'] & \\
 & \mathrm{coker}(X_2 \to Y) \arrow[uu, shift left, "\mathrm{coker}\ j"]
\end{tikzcd},
$$

因此将等价类映到等价类. □

命题 A.1. ker 和 coker 是 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 下的互逆映射.

证明. 给定单态射 $f : X \to Y$, 于是它是某个态射 $Y \to Z$ 的核. 取 $C = \mathrm{coker}\ f$, 于是存在唯一的态射 $C \to Z$ 使下图交换:

$$
\begin{tikzcd}
\ker(Y \to Z) = X \arrow[dd, dashed] \arrow[dr, "f"] & & C = \mathrm{coker}\ f \arrow[dd] \\
 & Y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\ker(Y \to C) = K \arrow[ur, "k"] & & Z.
\end{tikzcd}
$$

注意到复合 $X \to Y \to C = 0$，于是根据核的泛性质存在 $X \dashrightarrow K$ 使得上图是交换的；同理，$K \to Y \to Z = K \to Y \to C \to Z = 0 \to Z = 0$，存在 $K \dashrightarrow X$ 使得图是交换的，于是据定义 $X \xrightarrow{f} Y$ 与 $K \xrightarrow{k} Y$ 是等价的子对象.

注意到，coker 将态射 $f : X \to Y$ 映到 $Y \to C = \mathrm{coker}\ f$，ker 再将 $Y \to C = \mathrm{coker}\ f$ 映到 $k : \ker(Y \to C) = K \to Y$，于是 $f : X \to Y$ 等价于 $\mathrm{coker}(\ker(f))$，因此 $\mathrm{coker} \circ \ker = \mathrm{id}_{\mathsf{S}X}$. 同理，对偶地可以证明 $\ker \circ \mathrm{coker} = \mathrm{id}_{\mathsf{Q}X}$. □

推论 A.1.1. 若 $X_1 \to Y$ 和 $X_2 \to Y$ 是等价的单态射，那 $X_1 \to Y$ 和 $X_2 \to Y$ 是同构的.

证明. 设 $C = \mathrm{coker}(X_1 \to Y)$，$K = \ker(Y \to C)$，于是根据命题 X_1（因此 X_2）与 K 是等价的. 考虑交换图

$$
\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "k"] & & \\
X_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] & C \\
K \arrow[ur, "k"] & &
\end{tikzcd},
$$

于是

$$
\begin{aligned}
K \to X_1 \to K \to Y \to C &= K \to X_1 \to Y \to C \\
&= K \to Y \to C = 0,
\end{aligned}
$$

但根据核的泛性质，存在唯一的 $\mathrm{id} : K \to K$ 使得上图交换，因此 $f \circ g = \mathrm{id}_K$，即 $X_1 \to Y \cong K \to Y$，这就证明了结论. □

推论 A.1.2. *在 Abel 范畴* $\mathcal{A}$ *中，*$C = \operatorname{coker} f$ *单态射* $f : X \to Y$ *的余核，那么* $f : X \to Y$ *是* $Y \to C$ *的核.*

证明. 根据定义，$\operatorname{coker}(X \to Y) = Y \to C$，于是根据之前的命题

$$X \to Y \cong \ker(\operatorname{coker}(X \to Y)) = \ker(Y \to C).$$

□

定义. 设 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴，X 是 $\mathcal{A}$ 的对象，Y 是 X 的子对象，Z 是 Y 的子对象，则 Y/Z 称为 X 的一个子商 (subquotient).

习题 A.5. 证明 ker 和 coker 是反序的映射.

习题 A.6. 给定 Abel 范畴中的图

$$W \to X \to Y \to Z,$$

且任意相邻的态射的复合为 0，求证 $X \to Y$ 诱导了相容的

$$C = \operatorname{coker}(W \to X) \dashrightarrow K = \ker(Y \to Z).$$

证明. 考虑

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[d] & \\
W \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] & Z \\
 & C \arrow[ru, dashed] \arrow[ruu, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

由于 $W \to X \to Y = 0$，按定义存在 $C \dashrightarrow Y$ 与图交换，于是 $X \to C \dashrightarrow Y \to Z = 0$，根据 $X \to C$ 是满态射，$C \dashrightarrow Y \to Z = 0$，再由 K 的泛性质存在 $C \dashrightarrow K$ 与整幅图交换. □

定理 A.2. *设* $f : X \to Y$ *是 Abel 范畴中的态射，且* f *同时是单态射和满态射，于是* f *是同构.*

证明. 由于 $f : X \to Y$ 是满射，0 是 $\operatorname{coker} f.Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y$ 是 $Y \to 0$ 的核，且根据前面的命题，$f : X \to Y$ 也是 $Y \to 0$ 的核，因此根据核的泛性质， □

设 W, X 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中对象 Y 的两个子对象，那么称同时为 W 和 X 的子对象的 Y 的子对象的极大子对象为 W 与 X 的交 (intersection)，记为 $W \cap X$.

命题 A.3. *Abel 范畴* $\mathcal{A}$ *中元素* Y *的任意两个子对象* W, X *都有交.*

证明. 令 $Z = \operatorname{coker}(W \to Y)$，$K = \ker(X \to Y \to Z)$，于是

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X \arrow[d] & \\ W \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

中 $K \to X \to Y \to Z = 0$，由前面 W 是的 $Y \to Z$ 的核，因此存在唯一的 $K \dashrightarrow W$ 使得图是交换的.

接下来只要证明对任意 Y 的子对象 S，若它同时还是 X 和 W 的子对象，则它是 K 的子对象. 给定交换图

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d] \\ W \arrow[r] & Y, \end{tikzcd}$$

使得 $i : S \to X$ 和 $j : S \to W$ 都是单态射，那么 $S \to X \to Y \to Z = S \to W \to Y \to Z = (S \to W) \circ 0 = 0$，于是存在唯一的态射 $S \to K$ 使得 $S \to K \to X = i$. 同时，再根据 W 是的 $Y \to Z$ 的核，存在唯一的 $j : S \to W$ 使得图交换，但 $S \to K \dashrightarrow W$ 也满足该交换图，因此 $S \to K \dashrightarrow W = j$. 这意味着 K 是 W, X 的交. □

推论 A.3.1. *设 $f : Y \to X$ 和 $g : Z \to X$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的***单***态射，则存在纤维积 $Y \times_X Z$.*

证明. 由于 f, g 都是单态射，存在它们的交，记为 $i : K \to X, j : K \to Y$. 任取 $W \xrightarrow{h} Y, W \xrightarrow{k} Z$ 满足交换图

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & X, \end{tikzcd}$$

令 $C = \mathrm{coker}(Z \to X)$，于是 $W \to Y \to X \to C = W \to Z \to X \to C = W \to 0 = 0$，根据前面的证明，$K$ 是 $Y \to X \to C$ 的核因此存在唯一的 $W \dashrightarrow K$ 使得图（不包括蓝色部分）

$$\begin{tikzcd} W \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, bend right, blue, "k"'] & & \\ & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & Y \arrow[d] & \\ & Z \arrow[r] & X \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

是交换的，并且

$$W \xrightarrow{h} Y \to X \to C = W \dashrightarrow K \to Z \to Y \to C = 0,$$

注意到 Z 是 $X \to C$ 的核因此有唯一的分解 $W \to Z \to X \to C$，但是 $h : W \to Z$ 和 $W \dashrightarrow K \to Z$ 都满足分解，因此如上的图是交换的.

我们再来证明这样的 $W \dashrightarrow K$ 是唯一的. 对于任意满足交换图的态射 $g : W \to K$，它必然是 $W \to Y \to X \to C = 0$ 的分解，因此根据 $K = \ker(Y \to X \to C)$ 分解是唯一的. □

命题 A.4. *对任意 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f : X \to Y$ 和 $g : X \to Y$，它们的等值子存在.*

证明. 考虑 $X \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & f\end{pmatrix}} X\times Y$ 和 $X \xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & g\end{pmatrix}} X\times Y$，它们都有左逆因此都是单态射，由前面的命题存在交，记为 K，满足交换图

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "\begin{pmatrix}1 & f\end{pmatrix}"] \\ X \arrow[r, "\begin{pmatrix}1 & g\end{pmatrix}"'] & X\times Y, \end{tikzcd}$$

其中 K 是拉回. 再次根据左逆的存在性，$i=j$，于是按定义拉回的泛性质说明 K 是 f,g 的等值子. □

定理 A.5. 设 $f:Y\to X$ 和 $g:Z\to X$ 是 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射，则存在纤维积 $Y\times_X Z$.

证明. 考虑

$$\begin{tikzcd} Y\times Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & X, \end{tikzcd}$$

它们的等值子满足相应的泛性质，因此定理成立. □

引理 A.1. 设如下 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 中的拉回交换图

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & U, \end{tikzcd}$$

那么 h 诱导了同构 $\ker l \cong \ker g$，更准确地讲，若 (K,k) 是 l 的核，则 (K,hk) 是 g 的核.（对偶地推出图诱导了余核的同构,）由此如果 f 是满态射那么 h 是满态射.

证明. 任取 $w:W\to Y$ 使得 $W\to Y\to U=0$，因此

$$\begin{tikzcd} W \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, bend right, "w"'] & & \\ & Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\ & Y \arrow[r, "g"] & U \end{tikzcd}$$

构成了交换图. 由于 Z 是拉回，因此存在 $W \dashrightarrow Z$ 与整幅图交换，这意味着 $W\dashrightarrow Z\to X=0$，由于 K 是 $Z\to X$ 的核，存在唯一的 $W\to K$ 使得 $W\to K\to Z = W\dashrightarrow Z$. 这样验证了 (K,hk) 是 g 的核的泛性质，因此 h 诱导了同构.

现在假设 f 是满态射，那么由于 Z 是拉回，

$$0 \to Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} l & h \end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}} U$$

是正合的，同时 f 是满态射意味着对任意 $u, v : U \rightrightarrows V$，若 $u\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = v\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ 则 $uf = vf$，因此 $u = v$，即 $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ 是满态射，所以

$$0 \to Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} l & h \end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}} U \to 0$$

是短正合序列. 这样，交换图

$$\begin{array}{ccc} Z & \xrightarrow{l} & X \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow{g} & U, \end{array}$$

同时是推出，因此上段讨论的对偶说明 coker $h =$ coker $f = 0$，即 h 是满态射. □

定义. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f : X \to Y$，称

$$\text{ker coker } f$$

为 f 的像 (image)，记为 im f.

命题 A.6. *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f : X \to Y$ 的像是使得复合

$$X \to \text{im } f \to Y$$

是 $f : X \to Y$ 的最小的 Y 的子对象.

证明. 首先我们证明，Y 的子对象 $S \hookrightarrow Y$ 使得分解 $X \to S \to Y = X \to Y$ 存在当且仅当 $X \to Y \to \text{coker}(S \hookrightarrow Y) = 0$. 一方面，若 Y 的子对象 $S \hookrightarrow Y$ 使得分解 $X \to S \to Y = X \to Y$ 存在，那么 $X \to Y \to \text{coker}(S \to Y) = X \to S \to Y \to \text{coker}(S \to Y) = X \to 0 = 0$；另一方面，若 Y 的子对象 $S \hookrightarrow Y$ 使得 $X \to Y \to \text{coker}(S \hookrightarrow Y) = 0$，根据推论??，$S \to Y$ 是 $Y \to \text{coker}(S \hookrightarrow Y)$ 的核，因此存在 $X \dashrightarrow S$ 使得 $X \dashrightarrow S \to Y = X \to Y$.

根据推论??, $\text{coker}(\text{im } f) = \text{coker}(\text{ker}(\text{coker}(X \to Y))) = \text{coker}(X \to Y)$, 因此 $X \to Y \to \text{ker}(\text{im } f) = 0$, 于是存在分解

$$X \to \text{im } f \to Y = X \to Y.$$

若还有另一个分解 $X \to J \to Y = X \to Y$，由前一段的讨论，$X \to Y \to \operatorname{coker}(J \to X) = 0$，因此存在（满）态射 $\operatorname{coker}(X \to Y) = \operatorname{coker}(\operatorname{im} f) \to \operatorname{coker}(J \to X)$，根据 ker 的函子性这对应了唯一的（单）态射 $\operatorname{im} f = \ker(\operatorname{coker}(X \to Y)) \dashrightarrow J = \ker(\operatorname{coker}(J \to X))$，因此是最小的. 此外如图

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{im} f \arrow[rd, "i"] \arrow[dd, dashed, "\varphi"] & & \\
X \arrow[ru, "p"] \arrow[rd, "q"'] & & Y \arrow[r, "g"] & C, \\
& J \arrow[ru, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

右侧是交换的，因此

$$\begin{aligned} j \circ \varphi \circ p &= i \circ p \\ &= j \circ q, \end{aligned}$$

由于 j 是单态射，这意味着 $\varphi \circ p = q$，即整幅图是交换的. □

对偶地，可以的定义态射 $f : X \to Y$ 的余像 (coimage) 是 coker ker f，那么如上命题对偶地说明余像是使得复合 $X \to \operatorname{coim} f \to Y$ 是 $f : X \to Y$ 的最大的 X 的商对象.

推论 A.6.1. *设 $f : X \to Y$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射，则*

1. *f 是满态射当且仅当 $\operatorname{im} f = Y$，当且仅当 $\operatorname{coker} f = 0$；*

2. *f 是单态射当且仅当 $\ker f = 0$，当且仅当 $\operatorname{coim} f = X$.*

推论 A.6.2. *给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射 $f : X \to Y$，$X \to \operatorname{im} f$ 是满态射.*

证明. 假设 $X \to \operatorname{im} f$ 不是满态射，那么 $\operatorname{im} f \neq Y$，取 $J = \ker(\operatorname{im} f \hookrightarrow Y)$，它是严格小于 $\operatorname{im} f$ 的子对象，于是 $J \hookrightarrow \operatorname{im} f \hookrightarrow Y$ 是子对象，因此存在交换图

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[d] \arrow[rd] & & \\
\operatorname{im} f \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r] \arrow[rd] & \operatorname{coker}(\operatorname{im} f \hookrightarrow Y) \arrow[d] \\
& & \operatorname{coker}(J \hookrightarrow Y)
\end{tikzcd}$$

这意味着 $X \to Y \to \operatorname{coker}(J \hookrightarrow Y) = X \to Y \to \operatorname{coker}(\operatorname{im} f \hookrightarrow Y) \to \operatorname{coker}(J \hookrightarrow Y) = 0 \to \operatorname{coker}(J \hookrightarrow Y) = 0$，于是 $X \to J \to Y$ 是一个分解. 同时，$X \to J \to \operatorname{im} f \to Y = X \to J \to Y = X \to \operatorname{im} f \to Y$，且 $\operatorname{im} f \to Y$ 是单态射，因此 $X \to J \to \operatorname{im} f = X \to \operatorname{im} f$，即 J 是使得分解成立的更小的子对象. 这与 $\operatorname{im} f$ 是满足分解最小的子对象矛盾，因此 $X \to \operatorname{im} f$ 是满态射. □

定理 A.7. 设 $f: X \to Y$ 是 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射，则存在唯一的分解

$$X \xrightarrow{p} I \xrightarrow{i} Y,$$

使得 $p: X \to I$ 是满态射，$i: i \to Y$ 是单态射.

此外，如果 $k: K \to X$ 是 $f: X \to Y$ 的核，$c: Y \to C$ 是 $f: X \to Y$ 的余核，则 $k: K \to X$ 也是 $p: X \to I$ 的核，$c: Y \to C$ 也是 $i: I \to Y$ 的余核，且 $i: I \to Y$ 是 $c: Y \to C$ 的核，$p: X \to I$ 是 $k: K \to X$ 的余核.

证明. 首先我们来证明分解的唯一性. 假设我们有两个不同的对象 $I, \bar{I}$ 满足上述分解，于是我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
& I \arrow[dr, "i"] & & \\
X \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\bar{p}"'] & & Y \arrow[r, "g"] & Z, \\
& \bar{I} \arrow[uu, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "\bar{i}"'] & &
\end{tikzcd}$$

其中 $i: I \to Y$ 是 $g: Y \to Z$ 的核. 由核的定义，我们有 $g \circ i = 0$，进而 $g \circ \bar{i} \circ \bar{p} = g \circ f = g \circ i \circ p = 0$. 但 $\bar{p}$ 是满态射说明 $\bar{p}$ 存在右消去，故 $g \circ \bar{i} = 0$. 再根据核的分解，存在唯一的 $\varphi: \bar{I} \to I$ 使得右边三角形交换，即 $i \circ \varphi = \bar{i}$. 故 $i \circ \varphi \circ \bar{p} = \bar{i} \circ \bar{p} = f = i \circ p$. 但 i 是单态射因此存在左消去，于是 $\varphi \circ \bar{p} = p$. 这样就证明了 φ 使整个图交换. 同样地，我们可以构造 $\psi: I \to \bar{I}$ 使整幅图交换，根据抽象无意义 $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_I$ 且 $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\bar{I}}$，故 $I \cong \bar{I}$，唯一性得证.

推论?? 说明了 $I = \mathrm{im}\ f$ 是满足条件的的一个分解，因此分解是存在的. 同时 $J = \mathrm{coim}\ f$ 也是一个分解，因此根据刚刚证明的分解的唯一性，$\mathrm{im}\ f \cong \mathrm{coim}\ f$. 这意味着剩余的论断是成立的. □

结合习题A.6的结论，

习题 A.7. 设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射，求证 $g \circ f = 0$ 当且仅当 $\mathrm{im}\ f$ 是 $\ker g$ 的子对象.

A.1.3 例子

例 A.1. 若 $\mathcal{A}$ 是 Abel 范畴，则 $\mathcal{A}^{\circ}$ 也是 Abel 范畴.

例 A.2. 考虑范畴 $R-\mathbf{Mod}$

例 A.3. 假定 $\mathcal{C}$ 是小范畴，$\mathcal{A}$ 是给定的 Abel 范畴，考虑范畴 $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$，我们希望证明此范畴是 Abel 范畴.

这里需要构造和验证的条目我们依次列出来并进行证明：

1. 根据习题A.1，$\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ 中的零对象是常值零函子，即函子

$$\begin{aligned} \mathrm{Const}_0 : \mathcal{C} &\to \mathcal{A} \\ A &\mapsto 0. \end{aligned}$$

我们也记该函子为 0.

2. 范畴理论说明给定函子 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，在范畴 $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$ 中，$F \times G$ 和 $F \coprod G$ 都存在，并且都是逐点定义的. 给定 $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{A}$，由于在 $\mathcal{A}$ 中范畴的有限乘积和余乘积同构，因此 $F \times G \cong F \coprod G$.

3. 任意给定 $\alpha : F \Rightarrow G$，定义
$$\ker(\alpha)(A) := \ker(\alpha_A)$$
和
$$\mathrm{coker}(\alpha)(A) := \mathrm{coker}(\alpha_A),$$
根据 ker 与 coker 的函子性，$\ker(A)$ 与 $\mathrm{coker}(A)$ 也都是函子，并且逐点地可以验证它们分别满足相应的泛性质.

4. 最后要证明单态射是核，满态射是余核. 首先，范畴 $\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ 中的单态射和满态射都是逐点的单态射和满态射. 由于前一条的核和余核的定义都是逐点的，因此这一条是正确的.

A.1.4　正合性

定理 A.8. 设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 是 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射，则如下描述等价：

1. $\mathrm{im}(X \to Y) = \ker(Y \to Z)$;
2. $\mathrm{coker}(X \to Y) = \mathrm{coim}(Y \to Z)$;
3. $X \to Y \to Z = 0$ 且 $\ker(Y \to Z) \to Y \to \mathrm{coker}(X \to Y) = 0$.

证明. 我们来证明 1 与 3 是等价的，这样对偶地可以证明 2 与 3 是等价的.

若 1 是成立的，记 $I := \mathrm{im}(X \to Y) = \ker(Y \to Z)$，于是根据分解 $X \to Y \to Z = X \to I \to Y \to Z = X \to 0 = 0$. 另一方面，$\ker(Y \to Z) = \mathrm{im}(X \to Y) = \ker(\mathrm{coker}(X \to Y))$，因此直接由定义
$$\ker(Y \to Z) \to Y \to \mathrm{coker}(X \to Y) = \ker(\mathrm{coker}(X \to Y)) \to Y \to \mathrm{coker}(X \to Y) = 0.$$

若 3 是成立的，记 $I := \mathrm{im}(X \to Y) = \ker(\mathrm{coker}(X \to Y))$，$\ker(Y \to Z) \to Y \to \mathrm{coker}(X \to Y) = 0$ 意味着存在唯一的 $\ker(Y \to Z) \dashrightarrow I$ 与已知的态射相容，并且它是单态射，于是 $\ker(Y \to Z) \le I$. 同时，$X \to Y \to Z = 0$ 蕴含着分解 $X \to \ker(Y \to Z) \to Y \to Z = 0$，同时命题A.6说明 $X \to I \to Y$ 是最小的分解，因此存在单态射 $I \to \ker(Y \to Z)$，这样 $\ker(Y \to Z) = I$. □

对于满足以上任意条件的态射序列 $X \to Y \to Z$，称该序列在 Y 处正合 (exact). 特别地，若序列
$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$
在每处都正合，则称这是个短正合序列 (short exact sequence).

定理 A.9 (Abel 范畴的稳定性)**.** 设 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 是 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射，则如下描述等价：

1. $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 是短正合序列;

2. 图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

是拉回图;

3. 图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

是推出图.

证明. □

A.1.5 Abel 范畴中对象的元素和态射

事实上，我们并不需要完全范畴化地处理 Abel 范畴，公理所保证的性质使我们可以用类似处理元素的方式处理 Abel 范畴中的对象. 我们将详细地构建这样的技术，于是 Abel 范畴事实上与 **Ab** 并没有特别多的区别.

给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象 Y，Y 中的对象 y 是如下等价类 (X, h)，其中 $X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{A}$，$h : X \to Y$，$(X_1, h_1)$ 等价于 (X_2, h_2) 当且仅当

- 存在 $Z \in \mathrm{ob}\,\mathcal{A}$ 和满态射 $u_1 : Z \to X_1, u_2 : Z \to X_2$ 满足 $h_1u_1 = h_2u_2$，即有交换图

$$\begin{tikzcd} & X_1 \arrow[dr, "h_1"] & \\ Z \arrow[ur, "u_1"] \arrow[dr, "u_2"'] & & Y \\ & X_2. \arrow[ur, "h_2"'] & \end{tikzcd}$$

由引理A.1如上所述的关系是等价关系. 一般并没有通常的方法使得集合之间的映射 $\{Y_1\text{中的元素}\} \to \{Y_2\text{中的元素}\}$ 对应到 $\mathcal{A}$ 中的态射 $Y_1 \to Y_2$，但反过来当给定了态射之后可以构造自然的集合间的映射，并且元素的存在可以帮我们简单地验证正合性:

定理 A.10. 设 $f : Y_1 \to Y_2$ 是 *Abel* 范畴中的态射，y 是 Y_1 的元素，有代表元 (X, h)，求证 f 给出了集合间的映射

$$\begin{aligned} f : \{Y_1\text{中的元素}\} &\to \{Y_2\text{中的元素}\} \\ [(X, h)] &\mapsto [(X, f \circ h)], \end{aligned}$$

并且

1. $f : Y_1 \to Y_2$ 是单态射当且仅当 $f(y) = 0$ 意味着 $y = 0$，
2. $f : Y_1 \to Y_2$ 是单态射当且仅当 $f(y_1) = f(y_2)$ 意味着 $y_1 = y_2$，
3. $f : Y_1 \to Y_2$ 是满态射当且仅当对任意 Y_2 的元素 z，存在 Y_1 的元素 y 使得 $f(y) = z$，
4. $f : Y_1 \to Y_2$ 是 0 态射当且仅当对任意 Y_1 的元素 y，$f(y) = 0$，
5. 序列 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 在 Y 处正合当且仅当 $g \circ f = 0$ 并且对任意的 $y \in Y$，若 $g(y) = 0$ 则存在 $x \in X$ 使得 $f(x) = y$，
6.

证明. □

推论 A.10.1. 给定 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$，

1. 序列 $0 \to X \xrightarrow{f} Y$ 在 X 处是正合的当且仅当 f 是单态射，
2. 序列 $Y \xrightarrow{g} Z \to 0$ 在 Z 处是正合的当且仅当 g 是满态射，
3. 序列 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 是段正合列当且仅当 $X \xrightarrow{f} Y$ 是单射且 $Y \cong \operatorname{coker} f$，当且仅当 $Y \xrightarrow{g} Z$ 是满射且 $X \cong \ker g$.

证明. □

定义. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的子对象 $i : X \hookrightarrow Y$，称 $\operatorname{coker} i$ 为 Y 关于 X 的商，记为 Y/X.

根据练习A.4，商在同构的意义下是良定义的.

引理 A.2 (5 引理)**.**

定理 A.11 (蛇形引理)**.** 给定交换图

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f"] & Y_1 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "g"] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "\beta_1"] & Y_2 \arrow[r, "\beta_2"] & Z_2, &
\end{tikzcd}$$

那么存在长正合序列

$$\ker\ f \xrightarrow{a_1} \ker\ g \xrightarrow{a_2} \ker\ h \xrightarrow{\delta} \mathrm{coker}\ f \xrightarrow{b_1} \mathrm{coker}\ g \xrightarrow{b_2} \mathrm{coker}\ h,$$

其中 a_1, a_2 和 b_1, b_2 分别由 α_1, α_2 和 β_1, β_2 诱导，连接态射 $\delta : \ker\ h \to \mathrm{coker}\ f$ 是唯一存在的使得对于下图

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[r, "a_1"] \arrow[d, equal] & K = \mathrm{Ker}\ h \times_{Z_1} Y_1 \arrow[r, "a_2"] \arrow[d, "k"] & \ker\ h \arrow[r] \arrow[d, "i"] & 0 \\
 & X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f"] & Y_1 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "g"] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d, "p"] & Y_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d, "c"] & Z_2 \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{coker}\ f \arrow[r, "b_1"] & C = \mathrm{coker}\ f \coprod^{X_2} Y_2 \arrow[r, "b_2"] & Z_2 &
\end{tikzcd}$$

满足 $b_1 \circ \delta \circ a_2 = c \circ g \circ k$ 的态射.

证明. 根据引理A.1，a_2 是满态射且它的核是 Im a_1；注意到 $c \circ g \circ k \circ a_1 == 0$ 且 $b_2 \circ c \circ g \circ k == 0$，根据练习A.6，这样的 δ 存在且唯一. □

特别地，当 $\mathcal{A}$ 是 R 模范畴时，连接态射 δ 是容易写出来的，

习题 A.8. 假定对 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 蛇形引理成立，求证 5 引理成立.

证明.

$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

考虑

$$\begin{tikzcd}
 & A_2/\ker\ \alpha_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & \ker\ \alpha_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_2/\ker\ \beta_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & \ker\ \beta_4 &
\end{tikzcd}$$

□

A.1.6 Abel 范畴中的特殊对象

定义. 设 P 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象，若满足对任意的满态射 $f: X \to Y$ 和任意态射 $g: P \to Y$，都可以找到 $h: P \to X$ 使得 $g = f \circ h$，

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\ X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

则称 P 是投射对象 (projective object).

引理 A.3. 给定 *Abel* 范畴 $\mathcal{A}$ 及其中的一族投射对象 $\{P_i\}_{i\in I}$，其中 I 是指标集. 若 $\bigoplus_{i\in I} P_i$ 存在，则其也是投射的.

证明. ∎

定义. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$，若对任意对象 X 都存在 $\mathcal{A}$ 中的投射对象 P 和满态射

$$P \twoheadrightarrow X \to 0,$$

则称范畴 $\mathcal{A}$ 中有足够多的投射对象 (sufficiently many projective objects, enough projectives).

习题 A.9. 设 $s: P \to P$ 是 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的态射，(P, s) 是 $\mathcal{A}/P$ 的投射对象，证明 P 是 $\mathcal{A}$ 中的投射对象.

证明. 任取 $\mathcal{A}$ 中的满态射 $g: X \to Y$， ∎

A.2 Abel 范畴间函子

定义. 若 $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ 加性范畴，协变函子 $F: \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 满足对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 X, Y，由 F 诱导的映射 $\hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to \hom_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$ 是群同态，则称 F 是加性函子 (additive functor).

定理 A.12. 设 $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ 是 *Abel* 范畴，$F: \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是加性函子当且仅当 F 保直和.

命题 A.13. *Abel 范畴间的左正合函子是加性的.*

定义. 若范畴间协变函子 $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 满足对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A, B，由 F 诱导的映射 $\hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to \hom_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ 是单射，则称 F 是嵌入 (embedding).

定理 A.14. *设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 Abel 范畴，$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 是加性函子，则下列陈述等价*

1. *F 是嵌入.*
2. *F 将非交换图映为非交换图.*
3. *F 将非正合序列映为非正合序列.*

A.2.1 Serre subcategory

定义. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$，$\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的满子范畴，满足

1. $\mathcal{B}$ 的对象关于取子对象和商对象封闭，即对任意 $\mathcal{B}$ 中的对象 Y，若 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的短正合列，那么 X, Z 是 $\mathcal{B}$ 中的对象，
2. $\mathcal{B}$ 中的对象关于扩张封闭，即对任意 $\mathcal{B}$ 中的对象 X, Z，若 $0 \to X \to Y \to Z \to 0$ 是 $\mathcal{A}$ 中的短正合列，那么 Y 是 $\mathcal{B}$ 中的对象，

则称 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的 Serre 子范畴 (Serre subcategory).

例 A.4. **FinAb** 是 **Ab** 中的 Serre 子范畴

定理 A.15. *任意给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 和它的 Serre 子范畴 $\mathcal{B}$, 存在 Abel 范畴 $\mathcal{A}/\mathcal{B}$ 和正合函子 $P : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{B}$ 使得 $\mathcal{A}$ 中的对象 X 在 $\mathcal{B}$ 中当且仅当 $P(A) = 0$, 且对任意满足 $\mathcal{A}$ 中的对象 X 在 $\mathcal{B}$ 中当且仅当 $F(A) = 0$ 的正合函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$，存在唯一的正合函子 $H : \mathcal{A}/\mathcal{B} \to \mathcal{C}$ 使得图*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "P"'] & & \mathcal{C} \\
& \mathcal{A}/\mathcal{B} \arrow[ur, dashed, "H"'] &
\end{tikzcd}$$

交换.

证明. □

命题 A.16. 给定 *Abel* 范畴之间的伴随

$$F : \mathcal{A} \leftrightarrows \mathcal{B} : G,$$

1. 若 F 是左伴随的，那么 G 将内射对象映为内射对象，
2. 若 G 是左伴随的，那么 F 将投射对象映为投射对象.

A.3 嵌入定理

习题 A.10. 设 k 是域，$k-\mathbf{grMod}$ 是所有 $\mathbb{Z}$ 分次 k 模组成的范畴，满足

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n, \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} W_n) := \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}(V_n, W_n),$$

$\mathcal{A}$ 是所有微分态射为 0 的 k 微分模组成的范畴，求证

$$\begin{aligned} F : k - \mathbf{grMod} &\to \mathcal{A} \\ \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n &\mapsto (\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} V_n[n], d = 0) \end{aligned}$$

是范畴的等价.

定义. 给定 Abel 范畴 $\mathcal{A}$ 中的对象 X，若对任意的正向系 I 和分解

$$X = \sum_{i\in I} X_i = \mathrm{colim}_{i\in I} X_i,$$

其中 X_i 是 X 的子对象，都存在 $i_0 \in I$ 使得 $X_{i_0} = X$，则称 X 是有限生成的.

附录 B　A_∞

这节中我们始终假定 k 是域.

定义. k 上的 A_∞ 包含

1. $\mathbb{Z}$ 分次的 k 向量空间
$$A := \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} A^p,$$
2. 齐次 k 线性映射
$$m_n : A^{\otimes n} \to A,$$

满足

(i) m_n 的阶数为 $2-n$，并且 m_1 满足 $m_1 \circ m_1 = 0$（即 $A^\bullet, m_1$ 是上链复形），

(ii) 对任意 $n \geq 1$，有关系式
$$\sum_{n=r+s+t} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}(\mathrm{id}_A^{\otimes r} \otimes m_s \otimes \mathrm{id}_A^{\otimes t}) = 0.$$

索引

参考文献

[1] Teimuraz Pirashvili. On the PROP corresponding to bialgebras. *Cah. Topol. Géom. Différ. Catég.*, 43(3):221–239, 2002.