第一章　单纯对象

1.1　单纯集和单纯复形

设 n 是任意一个自然数. 定义 $[n]$ 是有 $n+1$ 个对象的小范畴，且其中的箭头是序列 $\{0 \to 1 \to \cdots \to n\}$. 设 $\mathbf{\Delta}$ 是所有 $[n]$ 组成的范畴，态射是 $[n]$ 到 $[m]$ 的函子. 这个范畴有非常具体的描述：定义 $[n]'$ 是 $n+1$ 元的全序集，其元素记为 $\{0 \leq 1 \leq \cdots \leq n\}$. 设 $\mathbf{\Delta}'$ 是所有 $[n]'$ 组成的范畴，态射是 $[n]'$ 到 $[m]'$ 的保序映射，即 $f : [n]' \to [m]'$ 满足 $i \leq j$ 必有 $f(i) \leq f(j)$. 证明 $\mathbf{\Delta}'$ 是一个范畴，且存在一个范畴的同构 $\mathbf{\Delta}' \to \mathbf{\Delta}$. 于是我们无意区分两个范畴，都称为*单纯范畴* (simplicial category) 或者*全序范畴* (ordering category)，也无意区分两个范畴不同的对象. 注意到

$$\begin{aligned} d^i_{n+1} : [n] &\to [n+1] \\ k &\mapsto \begin{cases} k, & k < i \\ k+1, & k \geq i. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & n \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & i+1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n+1
\end{tikzcd}$$

和

$$\begin{aligned} s^i_n : [n+1] &\to [n] \\ k &\mapsto \begin{cases} k, & k \leq i \\ k-1, & k > i. \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[d] & i+1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & n+1 \arrow[dl] \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n &
\end{tikzcd}$$

都是范畴 $\mathbf{\Delta}$ 中的态射，且满足

$$\begin{aligned}
d^j_{[n+1]} d^i_{[n]} &= d^i_{[n+1]} d^{j-1}_{[n]}, && \forall\ i < j \\
s^j_{[n]} s^i_{[n+1]} &= s^i_{[n]} s^{j+1}_{[n+1]}, && \forall\ i \leq j \\
s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} &= d^i_{[n]} s^{j-1}_{[n-1]}, && \forall\ i < j \\
s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} &= \mathrm{id}_{[n]}, && i = j \text{ 或 } i = j+1 \\
s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} &= d^{i-1}_{[n]} s^j_{[n-1]}, && \forall\ i > j+1.
\end{aligned}$$

其中，d^i 称为第 i 个对偶面映射 (coface map)，s^i 称为第 i 个对偶退化映射 (codegeneracy map).$\mathbf{\Delta}$ 中所有的态射都可以由 d^i 和 s^j 生成. 更准确地说，任意 $f \in \hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m])$ 有唯一的分解

$$f = d^{i_1} \circ \cdots \circ d^{i_r} \circ s^{j_1} \circ \cdots \circ s^{j_s},$$

其中 $m = n + r - s$，$i_1 < \cdots < i_r$ 且 $j_1 < \cdots < j_s$.

定义. 一个单纯集 (simplicial set) 是一个反变函子 $X : \mathbf{\Delta}^{\circ} \to \mathbf{Set}$. 更一般地，范畴 $\mathcal{C}$ 中的一个单纯对象 (simplicial object) 是反变函子 $X : \mathbf{\Delta}^{\circ} \to \mathcal{C}$. 对偶地，可以定义上单纯对象 (cosimplicial object) 是协变函子 $Y : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{C}$.

对单纯集 X，一般我们用 X_n 来表示集合 $X([n])$，且其中的元素称为 n 单形 (n-simplicies). 若 n 单形 $x \in X_n$ 满足存在 $y \in X_{n-1}$ 使得 $X(s^j)(y) = x$，则称 x 是退化的 (degenerate). 我们用 **sSet** 表示所有单纯集组成的范畴，其中对象间的态射是 $X \Rightarrow Y$ 的自然态射，具体来说，是对每个 n 都有一个集合间的态射 $f_n : X_n \to Y_n$，在 $\mathbf{\Delta}$ 的作用下保持不动.

对于一个单纯集 X，一般我们采用记号 $d_i := X(d^i) : X_{n+1} \to X_n$ 和 $s_j := X(s^j) : X_n \to X_{n+1}$，称为面映射和退化映射.

$$\begin{tikzcd} X_0 \arrow[r, "s^0"] & X_1 \arrow[l, shift right=2ex, "d^1"'] \arrow[l, shift left=2ex, "d^1"] \arrow[r, shift left=1ex, "s^1"] \arrow[r, shift right=1ex, "s^1"'] & X_2 \arrow[r, "\pi_2"] & \cdots \end{tikzcd}$$

习题 1.1.1. 设 X 是单纯集，记

$$X_n^{\deg} := \bigcup_{j=0}^{n-1} s_j(X_{n-1})$$

为 n 单形中的所有退化元素. 求证

$$X_n^{\deg} = \bigcup_{\substack{f:[n]\to[k] \\ f \neq \mathrm{id}}} X(f)(X_k).$$

例 1. 设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴，那么我们可以自然地定义一个单纯集 $N\mathcal{C}$，称为范畴 $\mathcal{C}$ 的神经 *(nerve)*，其中 $N\mathcal{C}_0$ 是集合 $\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，$N\mathcal{C}_1$ 是集合 $\mathrm{mor}\,\mathcal{C}$，对任意 $n > 1$ 定义

$$N\mathcal{C}_n := \{(f_n, \cdots, f_1) \mid f_i \in \mathrm{mor}\,\mathcal{C}\text{且}f_i\text{与}f_{i+1}\text{可复合为 } f_{i+1}f_i,\ \forall 1 \leq i \leq n\}.$$

通常，我们用相连的箭头

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

来表示 $N\mathcal{C}_n$ 中的元素. 这样当 $1 < i < n$ 我们有自然的面映射

$$\begin{aligned} d_i : N\mathcal{C}_n &\to N\mathcal{C}_{n-1} \\ (f_n, \cdots, f_i, f_{i-1}, \cdots, f_1) &\mapsto (f_n, \cdots, f_i f_{i-1}, \cdots, f_1), \end{aligned}$$

当 $i = 0, n$ 时，我们分别舍弃 A_0 和 A_n. 退化映射 $s_i : N\mathcal{C}_n \to N\mathcal{C}_{n+1}$ 是简单的，只要在第 i 项和第 $i+1$ 项之间加一个 A_i，取为 $A_i \xrightarrow{\mathrm{id}} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1}$. 之后我们会对范畴的神经进行更详细的讨论.

例 2. 拓扑上，我们有一个上单纯集 $\Delta : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Top}$，事实上这个函子是我们定义单纯范畴的最初启发. 考虑函子 Δ 将 $[n]$ 映到标准 n 单形

$$\Delta_n = \{(x_0, \cdots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0 + \cdots + x_n = 1, x_i \geq 0\},$$

对偶面映射 $d^i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$ 定义为将 Δ_{n-1} 映为第 i 个坐标为 *0* 的面，即 $(x_0, \cdots, x_{i-1}, x_i, \cdots, x_{n-1}) \mapsto (x_0, \cdots, x_{i-1}, 0, x_i, \cdots, x_{n-1})$，对偶退化映射 $s^i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$ 将坐标 x_i 与 x_{i+1} 相加，即 $(x_0, \cdots, x_i, , x_{i+1} \cdots, x_{n+1}) \mapsto (x_0, \cdots, x_i + x_{i+1}, \cdots, x_{n+1})$.

设 X 是拓扑空间，这样就可以定义的单纯集 SX，其中 $(SX)_n$ 是所有连续映射 $\Delta^n \to X$，面映射

$$d_i : (SX)_{n+1} \to (SX)_n$$

将 $f : \Delta_{n+1} \to X$ 映到 $f \circ d^i : \Delta_n \to X$，退化映射

$$s_j : (SX)_{n-1} \to (SX)_n$$

将 $f : \Delta_{n-1} \to X$ 映到 $f \circ s^j : \Delta_n \to X.SX$ 被称为空间 X 的奇异复形 *(total singular complex)*，通常它给出了拓扑空间的奇异同调.

给定 $[n]$ 的一个非空子集 σ，定义 Δ_σ 为 Δ^n 中 $\{e_i\}_{i\in\sigma}$ 的凸包 *(convex hull)*，即

$$\Delta_\sigma := \left\{ \sum_{i\in\sigma} a_i \mathbf{e}_i \;\middle|\; \sum_{i\in\sigma} a_i = 1, a_i \geq 0, \forall i \in \sigma \right\} \subseteq \Delta^n,$$

我们称 Δ_σ 为 Δ 的 σ 面 *(σ-face)*.$\mathbb{R}^n$ 中同胚于 Δ_n 中有限多个 σ 面的并的子空间称为多面体 *(polyhedron)*. 对于一个多面体 P，我们可以把它表达为不同的 σ 面的并，每一个这样的同胚被称为 P 的一个三角剖分 *(triangulation)*.

在拓扑中，对于一个空间我们会考虑它对应的单纯剖分，这样的一个单纯剖分通常被称为单纯复形. 非拓扑的情形下同样可以定义单纯复形，这样定义的单纯复形对应于一个拓扑空间的单纯剖分：

定义. 设 V 是一个集合，则 V 上的单纯复形 (simplicial complex)X 是 V 的一个非空有限子集族，满足 X 在取子集作用下闭，即

$$\forall \sigma \in X,\ \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in X.$$

引理 1.1.1. 对于集合 V 上的单纯复形 X，如下构造的 $|X|$ 是一个拓扑空间，且具有被 X 描述的单纯剖分：

取定 $\mathbb{R}$ 线性空间 $\mathbb{V} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} V$，对任意 $\sigma \in X$，令 Δ_σ 是由 $\sigma \subseteq V$ 生成的凸包. 那么

$$|X| := \bigcup_{\sigma \in X} \Delta_\sigma \subseteq \mathbb{V}$$

与 $K := \{i_\sigma : \Delta_\sigma \to |X|\}$ 构成一个拓扑单纯剖分，其中 $i_\sigma : \Delta_\sigma \to |X|$ 是自然的嵌入.

反过来，任意给定拓扑空间 X 的单纯剖分 K

单纯复形并不具有非常好的性质，比如单纯复形的商并不一定是单纯复形. 但是每一个单纯复形都对应一个单纯集，且我们能利用这个单纯集重新构造之前的单纯复形. 这意味着，单纯集可以看作单纯复形的自然推广.

定义. 给定全序集合 V 上的单纯复形 X，我们可以定义它对应的单纯集 $SS_*(X)$，其中

$$SS_n(X) := \{(v_0, \cdots, v_n) \mid \{v_0, \cdots, v_n\} \in X\},$$

对任意 $\mathbf{\Delta}$ 中的态射 $f : [m] \to [n]$，定义

$$\begin{aligned} SS(f) : SS_n(X) &\to SS_m(X) \\ (v_0, \cdots, v_n) &\mapsto (v_{f(0)}, \cdots, v_{f(n)}). \end{aligned}$$

习题 1.1.2. 这里我们要验证单纯复形可以完全地由它对应的单纯集给出，因而单纯集是更广泛的概念. 考虑习题 1.1.1中的定义，验证

$$SS_*(X)^{\text{nondeg}} \cong X.$$

习题 1.1.3. 在引理 1.1.1中我们证明了抽象单纯复形和拓扑单纯复形的一一对应. 在拓扑中有一个比单纯复形广泛一点的概念拟单纯复形 (semi-simplicial complex)，定义为

在本小节最后我们引入循环范畴 (cyclic category)$\mathbf{\Delta}_C$，其中 $\mathbf{\Delta}_C$ 的对象同于 $\mathbf{\Delta}$，而 $\mathbf{\Delta}_C$ 的态射由 $d^i_{[n]} : [n] \to [n+1], s^j_{[n+1]} : [n+1] \to [n]$ 和 $\tau_n : [n] \to [n]$ 生成，满足三类关系：(i)$d^i_{[n]}, s^j_{[n+1]}$ 之间的关系同于 $\mathbf{\Delta}$；(ii)$\tau_{n+1} \circ d^i_{[n]} = d^{i-1}_{[n]} \circ \tau_n$ 和 $\tau_{n+1} \circ d^0_{[n]} = d^n_{[n]}$, $\tau_n \circ s^j_{[n+1]} = s^{i-1}_{[n]} \circ \tau_{n+1}$ 和 $\tau_n \circ s^0_{[n+1]} = s^n_{[n]} \circ \tau^2_{n+1}$; (iii)$\tau^{n+1}_n = \mathrm{id}_{[n]}$. 下面的定理叙述了两个范畴之间的关系.

定理 1.1.1. $\mathbf{\Delta}_C$ 是 $\mathbf{\Delta}$ 的（非满）子范畴，且满足

1. $\mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C}([n]) \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$.
2. 任意 $\mathbf{\Delta}_C$ 中的态射 $f \in \hom_{\mathbf{\Delta}_C}([n], [m])$ 都可以写成如下分解 $f = \varphi \circ \gamma$，其中 $\varphi \in \hom_{\mathbf{\Delta}}([n], [m])$ 且 $\gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C}([n])$.

例 3 (要检查方向)**.** 定义函子 $\mathbf{\Delta}_C^\circ \to \mathbf{Set}$, 将对象 $[n]$ 映到 $\mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n]) = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$, 任取 $a \in \hom_{\mathbf{\Delta}_C}([n], [m])$ 和 $g \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C}([n])$，由刚刚的唯一分解，$f = g \circ a$ 存在唯一的分解 $f = \varphi \circ \gamma$ 满足 $\varphi \in \hom_{\mathbf{\Delta}}([n], [m])$ 且 $\gamma \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C}([n])$，记 $g^*(a) = \varphi, a^*(g) = \gamma$. 于是对于任意给定的 $g \in \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n])$，我们有

$$\begin{aligned} g^* : \hom_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n], [m]) &\to \hom_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n], [m]) \\ a &\mapsto g^*(a) \end{aligned}$$

和任意给定的 $a \in \hom_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n],[m])$，

$$\begin{aligned} a^* : \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n]) &\to \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C^\circ}([n]) \\ g &\mapsto a^*(g). \end{aligned}$$

1.2 泛单纯集

1.2.1 Yoneda 引理

范畴理论中最重要的工具之一就是 Yoneda 引理. 我们记 $\hat{\mathcal{C}}$ 为范畴 $\mathbf{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})$，$h_B := \hom_{\mathcal{C}}(-, B)$，那么 Yoneda 引理表述如下：

定理 1.2.1 (Yoneda)**.** 对任意局部小范畴 $\mathcal{C}$ 和函子 $F : \mathcal{C}^\circ \to \mathbf{Set}$，存在关于 F 和 $\mathcal{C}$ 都自然的同构

$$\varphi : \hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h_B, F) \cong F(B).$$

作为推论，当 $F = h_D$ 时，自然同构为

$$\hom_{\mathcal{C}}(B, D) = \hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h_B, h_D),$$

其中映射将态射 $f : B_1 \to B_2$ 映到 $h(f) = \hom_{\mathcal{C}}(f, D)$. 考虑函子

$$\begin{aligned} h : \mathcal{C} &\to \hat{\mathcal{C}} \\ B &\mapsto \hom_{\mathcal{C}}(-, B) \\ (f : B_1 \to B_2) &\mapsto h(f), \end{aligned}$$

Yoneda 引理说明这是一个满忠实的函子，我们称其为 Yoneda 函子.

注意到任意一个单纯集是一个到集合范畴的函子，故我们可以对其应用 Yoneda 引理. 由定义显然有 $\hat{\mathbf{\Delta}} = \mathbf{sSet}$. 考虑 $h_{[n]} := \hom_{\mathbf{\Delta}}(-, [n])$，这些函子都是单纯集，具体说来，我们需要确定面映射和退化映射：面映射 $d_i : h_{[n]}([k]) \to h_{[n]}([k-1])$ 是 $\mathbf{Set}$ 中 d^i 的前置复合，即

$$d_i : h_{[n]}([k]) \to h_{[n]}([k-1]) = \{[k] \xrightarrow{f} [n]\} \mapsto \{[k-1] \xrightarrow{d^i} [k] \xrightarrow{f} [n]\},$$

类似地退化映射 s_i 是 $\mathbf{Set}$ 中 s^i 的前置复合. 同时，Yoneda 函子的满忠实性说明

$$\hom_{\mathbf{\Delta}}([k], [n]) \cong \hom_{\mathbf{sSet}}(h_{[k]}, h_{[n]}),$$

即 $h_{[k]}$ 到 $h_{[n]}$ 的所有自然变换由 $\mathbf{\Delta}$ 中的态射 $[k] \to [n]$ 所决定，因此所有的 $h_{[n]}$ 在一起组成一个上单纯集.

定义. 单纯集

$$h_{[n]} := \hom_{\mathbf{\Delta}}(-, [n])$$

被称为标准 n 单形 (standard n-simplex)，我们也记为 $\mathbf{\Delta}_{[n]}$.

引理 1.2.1. 设 X 是单纯集，函子

$$\begin{aligned}\mathbf{sSet} &\to \mathbf{Set}\\ X &\mapsto X([n])\end{aligned}$$

是可表的，其代表是标准 n 单形 $\mathbf{\Delta}_{[n]}$.

如果我们考虑更一般情形的 Yoneda 引理，我们有自然同构

$$\hom_{\mathbf{sSet}}(\mathbf{\Delta}_{[n]}, X) \cong X([n]).$$

于是任意给定一个 n 单形 $x \in X([n])$，我们有一个自然变换

$$\mathbf{\Delta}_{[n]} \Rightarrow X$$

与之对应，而它在面映射下的象 $d_i(x) \in X([n-1])$ 则对应于自然态射

$$\mathbf{\Delta}_{[n-1]} \xrightarrow{d^i} \mathbf{\Delta}_{[n]} \Rightarrow X.$$

命题 1.2.2 (稠密性定理)**.** 令 $\int X$ 是单纯集 X 的元素范畴，则以 $\int X$ 为图的余极限满足

$$\operatorname{colim}_{x\in X_n}\mathbf{\Delta}_{[n]} \cong X.$$

1.2.2　伴随函子

设 $\mathcal{D}$ 是任意上完备（即任意图为小范畴的余极限都存在）的局部小范畴，L 是协变函子 $\mathcal{D} \to \mathbf{sSet}$，我们希望考虑 L 的右伴随函子 $R : \mathbf{sSet} \to \mathcal{D}$ 的性质. 由定义，我们有关于 $X \in \operatorname{ob}\mathbf{sSet}$ 和 $B \in \operatorname{ob}\mathcal{D}$ 都自然的同构

$$\hom_{\mathcal{D}}(L(X), B) \cong \hom_{\mathbf{sSet}}(X, R(B)).$$

任意给定协变函子 $F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{D}$，由函子 F 我们可以如下构造右伴随函子 R，任意给定 $\mathcal{D}$ 中的对象 B，$R(B)$ 是单纯集，所有的 n 单形构成集合

$$R(B)_n := \hom_{\mathcal{D}}(F([n]), B),$$

且面映射和边缘映射分别定义为

$$d_i^{[n]} := \hom_{\mathcal{D}}(F(d^i_{[n]}), B)$$

和

$$s_j^{[n]} := \hom_{\mathcal{D}}(F(s^j_{[n]}), B),$$

根据 F 和 hom 的函子性，d_i 与 s_j 满足相应的关系，因此 $R(B)$ 是单纯集.

1.3 小范畴的神经

这一节我们详细讨论小范畴的神经. 在非特别指出的情形下，本小节 $\mathcal{C}$ 都代表一个小范畴. 回顾例 1中的定义，单纯集 $N\mathcal{C}$ 的全体 n 单形 $N\mathcal{C}_n$ 包含有可连续复合的 n 个态射，记为 $(f_n, \cdots, f_1)$. 面映射 $d_i^{[n]}$ 将

$$A_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

映到

$$A_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{f_i \circ f_{i-1}} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n,$$

且在 $i = 0, n$ 时映射舍弃 A_i 和相连的映射. 类似地退化映射 $s_j^{[n]}$ 将

$$A_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{i-2}} A_{i-1} \xrightarrow{f_{i-1}} A_i \xrightarrow{f_i} A_{i+1} \xrightarrow{f_{i+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

映到

$$A_0 \xrightarrow{f_1} \cdots \xrightarrow{f_{j-2}} A_{j-1} \xrightarrow{f_{j-1}} A_j \xrightarrow{f_j} A_j \xrightarrow{f_j} A_{j+1} \xrightarrow{f_{j+1}} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

例 4. 设 G 是群，那么 $\mathbf{B}G$ 是一个只有一个对象的小范畴. 由于 $\operatorname{mor} \mathbf{B}G = G$，故 $N\mathbf{B}G_n = G^n$. 注意到 $\mathbf{B}G$ 中态射的复合是群乘法，于是

$$d_i : G^n \to G^{n-1}$$
$$(g_1, \cdots, g_n) \mapsto \begin{cases} (g_2, \cdots, g_n) & i = 0 \\ (g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_n) & 0 < i < n \\ (g_1, \cdots, g_{n-1}) & i = n \end{cases}$$

（注意到这里函子 $\mathbf{B}$ 对复合的方式产生了影响，因此角标产生了变化）和

$$s_j : G^n \to G^{n+1}$$
$$(g_1, \cdots, g_n) \mapsto (g_1, \cdots, g_{j-1}, 1, g_j, \cdots, g_n).$$

注意到这里的映射恰是群上同调所需要的映射.

另一方面，我们还有构造 $\mathbf{E}G$，其中 $\operatorname{ob} \mathbf{E}G = G$，$\hom_{\mathbf{E}G}(g, h) = \{x \in G \mid xg = h\} = \{hg^{-1}\}$ 且态射的复合是群乘法.

二者之间有如下的关系：

1. 存在自然的单纯集投影

$$p : N\mathbf{E}G \to N\mathbf{B}G$$
$$(g_0, \cdots, g_n) \mapsto (g_0 g_n^{-1}, \cdots, g_{n-1} g_n^{-1}).$$

2. G 在 $N\mathbf{E}G$ 上有右作用

$$(g_0, \cdots, g_n) \cdot g = (g_0 g, \cdots, g_n g),$$

于是有交换图

$$\begin{tikzcd}
N\mathbf{E}G \arrow[rr, "p_*"] \arrow[dr] & & N\mathbf{B}G \\
& N\mathbf{E}G/G. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

这是最简单的单纯 G 主从的例子：

$$\begin{aligned}
N\mathbf{E}G \times N\mathbf{B}G &\to N\mathbf{B}G \\
((g_0, \cdots, g_n), (h_1, \cdots, h_n)) &\mapsto (g_0 h_1 g_1^{-1}, \cdots, g_{n-1} h_n g_n^{-1}).
\end{aligned}$$

例 5. 设 X 是拓扑空间，$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ 是 X 的一个开覆盖.

例 6 (Borel 构造)**.** 设群 G 作用在集合 X 上，我们可以构造该作用的广群（*groupoid*，这是一个范畴不是一个群）$G \circlearrowright X$：其中 $\mathrm{ob}\, G \circlearrowright X = X$，$\hom_{G \circlearrowright X}(x, y) = \{g \in G \mid gx = y\}$ 且态射的复合是群乘法. 于是 $NG \circlearrowright X_n = G^n \times X$，面映射和退化映射分别为

$$\begin{aligned}
d_i : G^n \times X &\to G^{n-1} \times X \\
(g_1, \cdots, g_n, x) &\mapsto \begin{cases} (g_2, \cdots, g_n, x) & i = 0 \\ (g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_n, x) & 0 < i < n \\ (g_1, \cdots, g_{n-1}, g_n x) & i = n \end{cases}
\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}
s_j : G^n \times X &\to G^{n+1} \times X \\
(g_1, \cdots, g_n, x) &\mapsto (g_1, \cdots, g_{j-1}, 1, g_j, \cdots, g_n, x).
\end{aligned}$$

注意 $N\mathbf{B}G \cong NG \circlearrowright \{*\}$ 且 $N\mathbf{E}G \cong NG \circlearrowright G$.

例 7. 设 $\mathcal{C}$ 是一个小范畴，$X : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$ 是协变函子，于是 X 的元素范畴 $\int X$ 是小范畴. 若 $\eta : X_1 \Rightarrow X_2$ 是自然变换，则我们可以构造一个函子

$$\int \eta : \int X_1 \to \int X_2,$$

将对象 (A, x) 映到 $(A, \eta_A(x))$，将态射 $(f : A \to B, \varphi)$ 映到 $(f, \eta_A(\varphi))$. 这样对于任意的函子 X，我们有

$$\mathcal{C} \xrightarrow{X} \mathbf{Cat} \xrightarrow{N} \mathbf{sSet} \xrightarrow{|-|} \mathbf{Top}.$$

本节的最后我们引入如下自然存在且非常重要的问题：给定一个单纯集 X，它是否一定是某个小范畴的神经？如果不一定，在何时我们可以断定 X 是一个小范畴的神经？这个问题我们留到下一节回答，这需要更多的工具来进行讨论.

1.4 子单纯集

在完成了许多关于单纯集的讨论，一个自然的想法是我们希望研究单纯集的子结构. 按照代数中通常对于子结构的定义，比较自然的，若 Y 是单纯集 X 的子单纯集，那么对于每个自然数 n，Y_n 都需要是 X_n 的子集，并且我们希望 Y 所给定态射都是完全由 X 给定的态射决定——对任意 $f : [n] \to [m]$，$X(f)$ 在 Y_n 的限

制就是 $Y(f)$. 后一个条件就是在说范畴 $\mathbf{\Delta}$ 作用在 Y 上是封闭的. 通常，我们并不直接给出一个单纯子集，一般情况下我们给出一族称为生成元 (generator) 的态射，称包含它们的最小 X 的子单纯集为这族态射生成的子单纯集.

定义. 给定自然数 $0 \le i \le n$，标准 n 单形 $\mathbf{\Delta}_{[n]}$ 由 $d^i_{[n]} : \mathbf{\Delta}_{[n-1]} \to \mathbf{\Delta}_{[n]}$ 生成的子集被称为 $\mathbf{\Delta}_{[n]}$ 的第 i 面 (i-th face)，记为 $\partial_i \mathbf{\Delta}_{[n]}$，即

$$\partial_i \mathbf{\Delta}_{[n]} \cong: \mathbf{\Delta}_{[n-1]} \xrightarrow{d^i_{[n]}} \mathbf{\Delta}_{[n]}.$$

几何上，n 单形的第 i 面就是标号为 i 的点相对的第 i 个坐标为 0 的面. 如果我们将所有的面组合起来，几何上这是一个 n 维球面，对单纯集的这样操作将得到单纯球面:

定义. 标准 n 单形 $\mathbf{\Delta}_{[n]}$ 由 $\{d^i_{[n]} : \mathbf{\Delta}_{[n-1]} \to \mathbf{\Delta}_{[n]} \mid 0 \le i \le n\}$ 生成的子单纯集称为标准单纯 n 球面 (standard simplicial n-sphere)，记为 $\partial \mathbf{\Delta}_{[n]}$，即

$$\partial \mathbf{\Delta}_{[n]} = \bigcup_{0 \le i \le n} \partial_i \mathbf{\Delta}_{[n]}.$$

习题 1.4.1. 求证:

1. $\partial \mathbf{\Delta}_{[n]} = \operatorname{colim}_{\mathbf{\Delta}_{[n-2]} \xrightarrow{d^i_{[n-1]}} \mathbf{\Delta}_{[n-1]}} \mathbf{\Delta}_{[n-1]} \xrightarrow{d^i_{[n]}} \mathbf{\Delta}_{[n]}$.
2. 任取 $k < n$，则 $\partial \mathbf{\Delta}_{[n]}([k]) = \hom_{\mathbf{\Delta}}([k], [n])$.

更一般地，单纯集 X 的单纯 n 球面是单纯集间的映射 $\partial \mathbf{\Delta}_{[n]} \to X$. 如果几何球面去掉一个面，我们将得到一个可缩的有界闭集. 对应到单纯集则是

定义. 标准 n 单形 $\mathbf{\Delta}_{[n]}$ 由 $\{d^i_{[n]} : \mathbf{\Delta}_{[n-1]} \to \mathbf{\Delta}_{[n]} \mid 0 \le i \le n, i \ne k\}$ 生成的子单纯集称为标准单纯角 (standard simplicial horn)，记为 $\mathbf{\Lambda}^k_{[n]}$，即

$$\mathbf{\Lambda}^k_{[n]} = \bigcup_{0 \le i \le n, i \ne k} \partial_i \mathbf{\Delta}_{[n]}.$$

习题 1.4.2. 求证:

1. $\mathbf{\Lambda}^k_{[n]} = \operatorname{colim}_{\mathbf{\Delta}_{[n-2]} \xrightarrow{d^i_{[n-1]}} \mathbf{\Delta}_{[n-1]}} \mathbf{\Delta}_{[n-1]} \xrightarrow{d^i_{[n]}} \mathbf{\Delta}_{[n]}$.
2. 任取 $j < n-1$，则 $\mathbf{\Lambda}^k_{[n]}([j]) = \hom_{\mathbf{\Delta}}([j], [n])$，且 $\mathbf{\Lambda}^k_{[n]}([n-1]) = \hom_{\mathbf{\Delta}}([n-1], [n]) - \{d^k\}$.

更一般地，单纯集 X 的单纯角是单纯集间的映射 $\mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \to X$. 值得注意的是，对任意的自然数 n 和 $0 \le k \le n$ 我们有自然的嵌入映射 $\mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \hookrightarrow \partial\mathbf{\Delta}_{[n]}$. 这样我们可以引入一个关于单纯集的特殊性质——角填充 (horn filling)，我们特别关心具有一定角填充性质的单纯集.

定义. 单纯集 X 若具有角填充性质，即对任意自然数 n 和 $0 \le k \le n$，给定单纯映射 $f:\mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \to X$，存在（但不要求唯一）$\tilde{f}:\partial\mathbf{\Delta}_{[n]} \to X$ 使得图

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X \\ \partial\mathbf{\Delta}_{[n]} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

交换，则称 X 为 Kan 复形 (Kan complex).

引理 1.4.1. *若 X 是拓扑空间，则它的奇异复形 SX（例 2）是 Kan 复形.*

Kan 复形在同伦理论当中有重要的作用.

定义. 单纯集 X 若具有内角填充性质，即对任意自然数 n 和 $0 < k < n$，给定单纯映射 $f:\mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \to X$，存在（但不要求唯一）$\tilde{f}:\partial\mathbf{\Delta}_{[n]} \to X$ 使得图

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X \\ \partial\mathbf{\Delta}_{[n]} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

交换，则称 X 为拟范畴 (quasi-category) 或无穷范畴 (infinity category,∞-category).

我们从另一个角度来考虑，设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，$M \subseteq \operatorname{mor}\mathcal{C}$ 是一类 $\mathcal{C}$ 的态射，若态射 $f:A \to B$ 满足对任意 M 中的态射 $g:C \to D$，都存在态射 $h:C \to A$ 和 $k:D \to B$ 使得有态射 $\varphi:D \to A$ 满足交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & C \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ B & D, \arrow[l, "k"] \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

则称 f 具有右对于 M 的右提升性质 (right lifting property with respect to M). 于是，无穷范畴的定义是说单纯集 X 满足它关于单点单纯集 $*$ 的投影对于内角包含态射 $i^k_{[n]}:\mathbf{\Lambda}^k_{[n]} \hookrightarrow \mathbf{\Delta}_{[n]}, 0 < k < n$ 有右提升性质. 而 $i^k_{[n]}$ 诱导了

$$
\begin{tikzcd}
\hom_{\mathbf{sSet}}(\mathbf{\Delta}_{[n]}, X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \hom_{\mathbf{sSet}}(\mathbf{\Lambda}^k_{[n]}, X) \arrow[d, "="] \\
X([n]) = X_n \arrow[r, "(i^k_{[n]})^*"] & \mathbf{\Lambda}^k_{[n]}(X),
\end{tikzcd}
$$

定义又等价于诱导的 $(i^k_{[n]})^*$ 是满射.

定理 1.4.1 (Joyal)**.** 设 **QuasiCat** 是 **sSet** 中由无穷范畴组成的满子范畴，那么 **QuasiCat** 上有自然的模型范畴结构.

例 8. 设 C 是任意局部小？范畴，则它的神经 NC 是一个无穷范畴. 并且，这样得到的无穷范畴具有特别的性质——它的内角填充都是唯一的，或者说之前讨论的映射 $(i^k_{[n]})^*$ 是单射.