Geometric Invariant Theory

Guanyu Li

这份材料是我在读 Mumford 的著作 Geometric Invariant Theory 和在 Daniel Halpern-Leistner 课堂上做的笔记，它不是自洽的，也忽略了很多该去讨论的东西，当然也避免不了错误. 这份笔记只是基于我自己理解对 GIT/Moduli spaces 理论做的一份综述. 有一些名词我也不知道该怎么翻译，就将就着来算了.

1 空间和层

定义. 设 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的范畴, 给定 $\mathcal{F}$ 中的态射 $f : B \to A$, 若对任意 $\mathcal{F}$ 中的对象 C 和态射 $g : C \to A$, 只要有 $\mathcal{C}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd} P(C) \arrow[d, "\tilde{h}"'] \arrow[dr, "P(g)"] & \\ P(B) \arrow[r, "P(f)"] & P(A), \end{tikzcd}$$

都存在唯一 $\mathcal{F}$ 中的态射 $h : C \to B$ 使得 $P(h) = \tilde{h}$，即

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "g"] & \\ B \arrow[r, "f"] & A, \end{tikzcd}$$

则称 f 是笛卡尔态射 (cartesian morphism).

定义. 设 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的范畴，若对任意 $\mathcal{F}$ 中的对象 A 和 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : X \to P(A)$，都存在 $\mathcal{F}$ 中的笛卡尔态射 $g : C \to A$ 使得 $P(g) = f$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, squiggly] & A \arrow[d, squiggly] \\ X \arrow[r, "f=P(g)"] & P(A), \end{tikzcd}$$

则称 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 (fibred category).

例 1. 设 $\mathcal{C}$ 是给定的范畴, 且其中任意的纤维积存在, 定义范畴 $\mathcal{C}^{\to}$ 如下, 它的对象是 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : A \to B$, 态射 $\alpha = (h, k) : f : A \to B \Rightarrow g : C \to D$ 是交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[d, "k"] \\ C \arrow[r, "g"] & D. \end{tikzcd}$$

考虑函子 $P : \mathcal{C}^{\to} \to \mathcal{C}$，它将 $\mathcal{C}^{\to}$ 中对象 $f : A \to B$ 映到 B，将态射 $\alpha = (h, k)$ 映到 $k : B \to D$.

2 几种不同的商

接下来我们会一直有如下假定：给定一个概型 S，我们考虑范畴 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群对象 G/S，如果作为概型 G 是光滑的，则称 G 是一个 S 上的代数群 (algebraic group).

例 2. 假设 k 是域，$S := \mathrm{Spec}\ k$，那么以下是代数群：

1. $\mathbb{G}_m := \mathrm{Spec}\ k[t, t^{-1}]$.
2. $\mathbb{G}_a := \mathrm{Spec}\ k[x]$.
3. $GL_n := \mathrm{Spec}\ k[x_{i,j}, \det^{-1}]_{1\leq i,j\leq n}$.

设 G 作用在概型 X 上，T 是另一个概型，$f: T \to X$ 是一个 T 值点，那么我们有映射 $G \times_S T \xrightarrow{\mathrm{id}_G \times f} G \times_S X \xrightarrow{\sigma} X$，进而可以定义

$$\psi_f^G : G \times_S T \to G \times_S T$$

为 $(\sigma \circ (\mathrm{id}_G \times f), p_2)$，简记为 ψ_f. 我们称 ψ_f 的像为 f 的轨道 (orbit)，记为 $o(f)$. 另一方面，$X \times_S T$ 是 T 上的概型，于是我们自然地有截面

$$(f, \mathrm{id}_T) : X \times_S T \to T.$$

我们定义 $S(f)$ 为纤维积

$$\begin{tikzcd} S(f) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "(f,\mathrm{id}_T)"] \\ G \times_S T \arrow[r, "\psi_f"] & X \times_S T, \end{tikzcd}$$

这是 G 的子群.

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \to X$，若存在 S 上的态射 $\varphi : X \to Y$ 满足

1. 有交换图：

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y, \end{tikzcd}$$

2. Y 在上图意义下具有泛性质，即若有 S 上的概型 Z 和态射 $\phi : X \to Z$ 满足图

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, "\phi"] & Z, \end{tikzcd}$$

 交换，则存在唯一的态射 $\chi : Y \to Z$ 使得 $\phi = \chi \circ \varphi$,

那么称 Y 是 G 作用在 X 上的一个范畴商 (categorical quotient).

换言之，G 作用在 X 上的范畴商是作用映射和投影映射的推出.

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \to X$，若存在 S 上的态射 $\varphi : X \to Y$ 满足

1. 有交换图：

$$\begin{array}{ccc} G \times_S X & \xrightarrow{\sigma} & X \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y, \end{array}$$

2. φ 是满态射，且

$$\Psi = (\sigma, p_2) : G \times_S X \to X \times_S X$$

的像是 $X \times_Y X$，

3. φ 是拓扑商，也就是说，$U \subseteq Y$ 是开集当且仅当 $\varphi^{-1}(U) \subseteq X$ 是开集，

4. Y 的结构层 $\mathscr{O}_Y$ 是 $\varphi_*\mathscr{O}_X$ 的包含不变函数的子层，即对于 $f \in \Gamma(U, \varphi_*\mathscr{O}_X) = \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathscr{O}_X)$ 是 $\Gamma(U, \mathscr{O}_Y)$ 的元素当且仅当下图交换

$$\begin{array}{ccc} G \times_S \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{\sigma} & \varphi^{-1}(U) \\ {\scriptstyle p_2}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F} \\ \varphi^{-1}(U) & \xrightarrow{F} & \mathbb{A}^1, \end{array}$$

其中 F 是 f 对应的态射，

那么称 Y 是 G 作用在 X 上的一个几何商 (geometric quotient).

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \to X$ 和作用的范畴/几何商 $\varphi : X \to Y$，若对任意 $f : Y' \to Y$，下面的纤维积

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Y' & \longrightarrow & Y' \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

都使 f' 是一个范畴/几何商，则称 Y 是万有范畴/几何商 (universal - quotient). 若以上只对平坦 (flat) 的成立，则称 Y 是一致范畴/几何商 (uniform - quotient)

命题 2.1. *设 $\varphi : X \to Y$ 是 G 作用在 X 上的几何商，那么 $\varphi : X \to Y$ 也是范畴商.*

命题 2.2. *设 X, Y 都是 S 上的不可约、正规、Noetherian 概型，$\varphi : X \to Y$ 是有限型的、dominating 态射，Y 中 generic point 的剩余域是特征 0 的，*

3 可约（reductive）代数群

定义. 设 G 是代数群，一个 G 的表示 (representation) 就是一个态射 $\rho : G \to GL_n$，且满足如下交换图

$$\begin{array}{ccc} G \times_S G & \xrightarrow{\mu} & G \\ {\scriptstyle \rho\times\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\ GL_n \times_S GL_n & \xrightarrow{m} & GL_n, \end{array}$$

其中 μ 是 G 中的乘法，m 是 GL_n 中的乘法.

假设 G 是线性代数群，$S := \Gamma(G, \mathscr{O}_X)$，那么群乘法自然诱导了一个环同态 $\hat{\mu} : S \to S \otimes_k S$，单位态射诱导了 $\hat{i} : S \to k$，因此对任意一个 k 向量空间 V，我们可以定义 G 在 V 上的对偶作用为线性空间的同态

$$\hat{\sigma} : V \to S \otimes_k V,$$

满足

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[d, "\hat{\sigma}"'] & S \otimes_k V \arrow[d, "\hat{\mu} \otimes \mathrm{id}_V"] \\ S \otimes_k V \arrow[r, "\mathrm{id}_S \otimes \hat{\sigma}"] & S \otimes_k S \otimes_k V \end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_V"'] & S \otimes_k V \arrow[r, "\hat{i} \otimes \mathrm{id}_V"] & V \end{tikzcd}$$

定义. 设 G 是代数群，$\hat{\sigma}$ 是 G 在 V 上的对偶作用，若 V 的子空间 W 满足 $\hat{\sigma}(W) \subseteq S \otimes_k W$，则称 W 是 V 的不变子空间 (invariant subspace).

引理 3.1. *设 G 是代数群，$\hat{\sigma}$ 是 G 在 V 上的对偶作用，那么 V 是自己有限维不变子空间的并 (逆极限).*

定义. 设 G 是代数群，若它的 radical 是一个环（torus），那么称 G 是 reductive 的.

定理 3.1. *设 X 是 k 上的仿射概形，G 是可约代数群，且 $\sigma : G \times_k X \to X$ 是 G 在 X 上的作用. 那么作用存在一致范畴商 (Y, φ)，且 φ 是 universially submersive，且 Y 是仿射概形. 若 X 还是代数的，那么 Y 也是 k 上代数的.*

A　附录：点函子

这种观点来自于 Grothendieck.

定义. 设 X 是 S 上的概型，则 X 的一个 T 点是一个态射 $f : T \to X$ 满足交换图

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\ & S. & \end{tikzcd}$$

我们考虑如下的例子：$X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$，由于 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$ 是个域，故该概形只有一个点，但是如果考虑 $X_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]/(x^2+1) = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x]/(x+i) \times \mathbb{C}[x]/(x-i))$. 注意到 X 不是一个 $\mathbb{R}$ 点（因为没有自然的环的同态 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{R}$，否则有环同态 $\varphi : \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{R}$，那么 $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ 满足 $0 = \varphi(x^2+1) = \varphi(x)^2 + 1$），这很容易理解——在这个点上的层不是 $\mathbb{R}$. 对于一个概型，即便它是定义在

命题 A.1. *设 $(X, \mathscr{O}_X)$ 是概型，则任取一点 $x \in X$，存在概型 $(T, \mathscr{O}_T)$ 和态射 $f : T \to X$ 满足 $x = f(T)$.*