同调代数

G.Li

第一章　导出函子

1.1　上链和正合性

定义. 给定加性范畴$\mathcal{A}$中的一族对象及态射

$$X^\bullet : \cdots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \cdots$$

满足$d^n \circ d^{n-1} = 0$对任意n都成立，则称$(X^\bullet, d^\bullet)$是$\mathcal{A}$中的一个**上链**(cochain).

根据

定义. 设$(X^\bullet, d^\bullet)$是$\mathcal{A}$中的上链，满足$X^n = 0$对所有的$n < 0$都成立.若有$\eta : A \to X_0$使得$d^0 \circ \eta = 0$，则称$(X^\bullet, d^\bullet)$是的(augmented).若还有$H_n(X^\bullet) = 0$对所有的$n > 0$都成立，且η诱导了同构$A \cong H_0(X^\bullet)$，则称$(X^\bullet, d^\bullet)$是A的消解(resolution).

对偶地，我们也有加性范畴$\mathcal{A}$中的**链**(chain)的概念.我们记

例1.1. 给定代数R，若M是R模，且$P^\bullet$和$I^\bullet$分别是M的投射消解和内射消解，则如下三个横向的序列是$R-$**Mod**中的一个上链

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "d^{-2}"] & P^{-2} \arrow[r, "d^{-1}"] \arrow[d] & P^{-1} \arrow[r, "d^{0}"] \arrow[d] & P^{0} \arrow[r] \arrow[d, "\epsilon"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^{0} \arrow[r, "d^{0}"] & I^{1} \arrow[r, "d^{1}"] & I^{2} \arrow[r, "d^{2}"] & \cdots ,
\end{tikzcd}$$

且他们有相同的上同调.

例1.2. 设$(X^\bullet, d^\bullet)$是$\mathcal{A}$中的一个上链，定义上链$\tau^{\leq 0}(X^\bullet, d^\bullet)$为

$$\cdots \xrightarrow{d^{-2}} X^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} \mathrm{Ker}\ d^0 \xrightarrow{0} 0 \to \cdots ,$$

那么我们可以证明，

$$H^n(\tau^{\leq 0}(X^\bullet)) = \begin{cases} H^n(X^\bullet) & n \leq 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases},$$

类似地我们也有构造$\tau_{\geq 0}(X^\bullet, d^\bullet)$，

$$\cdots \to 0 \to X^0/\mathrm{Im}\, d^1 \xrightarrow{\bar{d}^0} X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \to \cdots,$$

例1.3. 给定交换环R和（可能非交换的）R代数A，M是A双模，那么可以定义Chevalley-Eilenberg映射

$$\begin{aligned}
\delta_n : M \otimes_R \bigwedge_{i=1}^{n} A &\to M \otimes_R \bigwedge_{i=1}^{n-1} A \\
m \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge a_n &\mapsto \sum_{i=1}^{n} (-1)^i [m, a_i] \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge a_n \\
&\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq n}^{n} (-1)^{i+j-1} m \otimes [a_i, a_j] \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge \hat{a}_j \wedge \cdots \wedge a_n,
\end{aligned}$$

我们来验证这给出一个R模链复形.

事实上，Chevalley-Eilenberg同调只依赖于A的Lie代数结构和M的Lie代数模结构

定理1.1. 设

$$0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$$

是$Abel$范畴$\mathcal{A}$中上链的正合列，那么存在上同调的长正合列

$$\cdots \to H^n(X^\bullet) \to H^n(Y^\bullet) \to H^n(Z^\bullet) \to H^{n+1}(X^\bullet) \to \cdots.$$

Proof. 我们将长正合序列具体写出来

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_X^n \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_Y^n \arrow[r] \arrow[d] & \ker d_Z^n \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] \arrow[d] & X^n \arrow[r] \arrow[d] & Y^n \arrow[r] \arrow[d] & Z^n \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & X^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & Y^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & Z^{n+1} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
& \operatorname{coker} d_X^n \arrow[r] & \operatorname{coker} d_Y^n \arrow[r] & \operatorname{coker} d_Z^n \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

于是存在如下交换图，且横向序列由蛇形引理都是正合的：

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{coker} d_X^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_X^n"] & \operatorname{coker} d_Y^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Y^n"] & \operatorname{coker} d_Z^{n-1} \arrow[r] \arrow[d, "\bar{d}_Z^n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \ker d_X^{n+1} \arrow[r] & \ker d_Y^{n+1} \arrow[r] & \ker d_Z^{n+1}, &
\end{tikzcd}$$

其中$\bar{d}_X^n : \operatorname{coker} d_X^{n-1} \to \ker d_X^{n+1}$是下图

$$\begin{tikzcd}
 & & \ker d_X^{n+1} \arrow[d] & \\
X^{n-1} \arrow[r] & X^n \arrow[r] \arrow[d] & X^{n+1} \arrow[r] & X^{n+2} \\
 & \operatorname{coker} d_X^{n-1} \arrow[uur, dashed] \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

由$d_X^n : X^n \to X^{n+1}$诱导的$\operatorname{coker} d_X^{n-1} \dashrightarrow \ker d_X^{n+1}$（在$R$模的情形就是选取一个代表元素$X^n/\operatorname{im} d_X^{n-1} \cong \operatorname{coker} d_X^{n-1}$，然后用$d_X^n$将代表元映到$\ker d_X^{n+1}$中）.再次根据蛇形引理，有长正合序列

$$\ker \bar{d}_X^n \to \ker \bar{d}_Y^n \to \ker \bar{d}_Z^n \to \operatorname{coker} \bar{d}_X^n \to \operatorname{coker} \bar{d}_Y^n \to \operatorname{coker} \bar{d}_Z^n.$$

但是，

$$\ker \bar{d}_X^n \cong \frac{\ker d_X^n}{\operatorname{im} d_X^{n-1}} = H^n(X^\bullet)$$

且

$$\operatorname{coker} \bar{d}_X^n \cong \frac{\ker d_X^{n+1}}{\operatorname{im} d_X^n} = H^{n+1}(X^\bullet),$$

这样就得到了希望的长正合序列. □

在蛇形引理的证明中，态射$\ker \bar{d}_Z^n \to \operatorname{coker} \bar{d}_X^n$是困难的，并且在长正合序列中它对应了阶数提升的态射$H^n(Z^\bullet) \to H^{n+1}(X^\bullet)$.这里有必要将整个态射详细清楚地描述出来.

练习1.1. 给定一族Abel范畴$\mathcal{A}$中的对象$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$和态射

$$d_i^{[n]} : X_n \to X_{n-1}, 0 \le i \le n$$

满足

$$d_i^{[n]} d_j^{[n]} = d_{j-1}^{[n]} d_i^{[n]}$$

对$0 \le i < j \le n$成立，则称$\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$是预单纯的(pre-simplicial)，且$d_i^{[n]}$是面映射(face maps).求证定义

$$\partial_n := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i^{[n]}$$

满足$\partial_{n-1}\partial_n = 0$.

练习1.2 (Hopf迹定理). 设$V^\bullet, W^\bullet$是域k上有界（$\exists N > 0$使得当$|n| > N$时$V^n = 0$）上链，且对任意n，V^n和W^n都是有限维k向量空间，$f : V^\bullet \to W^\bullet$是链同态，$f_* : H^n(V^\bullet) \to H^n(W^\bullet)$是诱导的上同调群同态.求证

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{Tr} f^n = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \operatorname{Tr} f_*^n.$$

1.2 链同伦

另一方面，我们希望从拓扑的角度解释这样称呼他们的原因，设$f : X \to Y$是拓扑空间的连续函数，那么f的映射柱是拓扑空间$(X \times I) \coprod_f Y$，其中粘合依赖于$f : X \times \{1\} \to Y$，它在同伦的定义中起到了重要的作用.回顾拓扑中映射f, g的一个同伦是一个连续映射$H : X \times I \to Y$，满足$H|_{X\times\{0\}} = f$且$H|_{X\times\{1\}} = g$，用交换图表示即为

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & X \times I \arrow[d, "H"] & X \arrow[l, "j"'] \arrow[dl, "g"] \\ & Y & \end{tikzcd},$$

其中$i : X \to X \times I, x \mapsto (x, 0)$且$j : X \to X \times I, x \mapsto (x, 1)$.用到拓扑空间中余积是不交并的事实，上图又可以表示为

$$\begin{tikzcd} X \coprod X \arrow[r, "i \coprod j"] \arrow[dr, "f \coprod g"'] & X \times I \arrow[d, "H"] \\ & Y, \end{tikzcd}$$

注意到$X \times I$恰是$\mathrm{id}_X : X \to X$的映射柱，因而映射同伦的存在性恰由映射柱描述.这样的事情同样发生在$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中，一个上链映射的同伦$s : f \simeq g$可以给出一个$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$的交换图

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \oplus X^\bullet \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{Cyl}(\mathrm{id}_X)^\bullet \arrow[d] \\ & Y^\bullet, \end{tikzcd}$$

习题-将给出验证.

练习1.3. 习题**??**中给了预单纯复形$h_i^{[n]} : X_n \to X_{n+1}$

$$\begin{aligned} &d_i^{[n+1]} h_j^{[n]} = h_{j-1}^{[n-1]} d_i^{[n]}, && \forall\, i < j \\ &d_i^{[n+1]} h_i^{[n]} = d_i^{[n+1]} h_{i-1}^{[n]}, && i = j \text{ 或 } i = j+1 \\ &d_i^{[n+1]} h_j^{[n]} = h_j^{[n-1]} d_{i-1}^{[n]}, && \forall\, i > j+1, \\ &d_0 h_0 = f, d_{n+1} h_n = g. \end{aligned}$$

求证$h := \sum_{i=0}^n (-1) h^i$给出了链同伦.

1.3 映射锥和映射柱

给定Abel范畴$\mathcal{A}$，且设$X^\bullet = (X^n, d_X^n) \in \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$是$\mathcal{A}$中对象组成的复形，那么我们可以定义一个新的复形$X[n]^\bullet$，满足$(X[n])^i = X^{n+i}$，$d^i_{X[n]} = (-1)^n d_X^{n+i} : (X[n])^i \to (X[n])^{i+1}$.若$f : X^\bullet \to Y^\bullet$是一个链同态，则我们有诱导的链同态$f[n] : X[n]^\bullet \to Y[n]^\bullet$，满足$f[n]^i = f^{n+i} : (X[n])^i \to (Y[n])^i$.

我们称[1]为平移函子(translation by 1 functor)，它是拓扑中$- \times [0,1]$的类比.之后这个函子将给出了????上的一个三角结构(triangulated structure).

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$的一个链同态$f : X^\bullet \to Y^\bullet$，那么$f$的映射锥(mapping cone)是$\mathcal{A}$中对象组成的一个链$\mathrm{Cone}(f)^\bullet$满足

$$\mathrm{Cone}(f)^i := X[1]^i \oplus Y^i$$

和

$$d^i_{\mathrm{Cone}(f)} := \begin{pmatrix} d^i_{X[1]} & 0 \\ f[1]^i & d^i_Y \end{pmatrix} : \begin{tikzcd} X^{n-1} \arrow[r] \arrow[dr] & X^{n-2} \\ \oplus & \oplus \\ Y^n \arrow[r] & Y^{n-1}, \end{tikzcd}$$

类似地我们可以定义f的映射柱(mapping cylinder)，它是$\mathcal{A}$中对象组成的一个链$\mathrm{Cyl}(f)^\bullet := X^\bullet \oplus X[1]^\bullet \oplus Y^\bullet$，其中

$$d^i_{\mathrm{Cyl}(f)} := \begin{pmatrix} d^i_X & -\mathrm{id}_{X[1]} & 0 \\ 0 & d^i_{X[1]} & 0 \\ 0 & f[1]^i & d^i_Y \end{pmatrix}.$$

这样微分映射的定义很明显是合理的，它们都是上链：

$$d^{i+1}_{\mathrm{Cone}(f)} \circ d^i_{\mathrm{Cone}(f)} = \begin{pmatrix} d^{i+1}_{X[1]} & 0 \\ f[1]^{i+1} & d^{i+1}_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^i_{X[1]} & 0 \\ f[1]^i & d^i_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d^{i+1}_{X[1]} \circ d^i_{X[1]} & 0 \\ f[1]^{i+1} \circ d^i_{X[1]} + d^{i+1}_Y \circ f[1]^i & d^{i+1}_Y \circ d^i_{X[1]} \end{pmatrix} = 0,$$

且

$$d^{i+1}_{\mathrm{Cyl}(f)} \circ d^i_{\mathrm{Cyl}(f)} = \begin{pmatrix} d^{i+1}_X & -\mathrm{id}_{X[1]} & 0 \\ 0 & d^{i+1}_{X[1]} & 0 \\ 0 & f[1]^{i+1} & d^{i+1}_Y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d^i_X & -\mathrm{id}_{X[1]} & 0 \\ 0 & d^i_{X[1]} & 0 \\ 0 & f[1]^i & d^i_Y \end{pmatrix}$$

例1.4. 设$X^\bullet, Y^\bullet$是单对象上链，$f : X^\bullet \to Y^\bullet$是链映射，那么由定义

$$\mathrm{Cone}(f) = \cdots \to 0 \to X^0 \xrightarrow{f} Y^0 \to 0 \to \cdots,$$

其中Y^0所在的位置是0阶位置，且有$H^0 = \mathrm{coker}\, f, H^{-1} = \ker f$.

引理1.1. *Abel*范畴$\mathcal{A}$的一个链同态$f : X^\bullet \to Y^\bullet$诱导了同构$f^* : H^*(X^\bullet) \to H^*(Y^\bullet)$当且仅当$H^*(\mathrm{Cone}(f)) = 0$.

Proof. 如下短正合列

$$0 \to Y^\bullet \xrightarrow{i} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{p} X[1]^\bullet \to 0$$

（其中i是嵌入p是投影）诱导了上同调群的长正合列

$$\cdots \to H^n(\mathrm{Cone}(f)) \to H^n(X[1]) \to H^{n+1}(Y) \to H^{n+1}(\mathrm{Cone}(f)) \to \cdots,$$

于是$H^n(X[1]) = H^{n+1}(X) \cong H^{n+1}(X)$当且仅当$H^n(\mathrm{Cone}(f)) = 0$对所有$n$成立，于是只要说明诱导长正合序列的连接态射是由$f$诱导的即可.考虑????? □

命题1.2. 设*Abel*范畴$\mathcal{A}$的一个链同态$f: X^\bullet \to Y^\bullet$满足$\mathrm{Cone}(f) \simeq 0$，那么$f$是链同伦等价.

Proof. 令$i: Y^\bullet \to \mathrm{Cone}(f)$是嵌入$p: \mathrm{Cone}(f) \to X[1]^\bullet$是投影.

首先，$i \simeq 0$当且仅当f有右同伦逆，即存在链映射$g: Y^\bullet \to X^\bullet$使得$fg \simeq \mathrm{id}_{Y^\bullet}$.一方面，若$i \simeq 0$，那么存在$h: Y^\bullet \to \mathrm{Cone}(f)[-1]$满足

$$d_{\mathrm{Cone}(f)}^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_Y^n = i,$$

按照直和分解$\mathrm{Cone}(f) := X[1]^\bullet \oplus Y^\bullet$，存在$s: Y^\bullet \to Y[-1]^\bullet$和$g: Y^\bullet \to X^\bullet$满足$h = s + g$，于是上式可以写为

$$\begin{pmatrix} d_{X[1]}^{n-1} & 0 \\ f[1]^{n-1} & d_Y^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g^n \\ s^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g^{n+1} \\ s^{n+1} \end{pmatrix} d_Y^n = \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{id}_Y \end{pmatrix}.$$

这意味着$g: Y^\bullet \to X^\bullet$是链映射，且

$$f[1]^{n-1} \circ g^n + d_Y^{n-1} \circ s^n + s^{n+1} \circ d_Y^n = \mathrm{id}_Y,$$

即g是右同伦逆.另一方面，f有右同伦逆，记为链映射$g: Y^\bullet \to X^\bullet$和$s: Y^\bullet \to Y[-1]^\bullet$，那么之前证明中的矩阵等式成立，于是找到了$h := s + g$满足$d_{\mathrm{Cone}(f)}^{n-1} \circ h^n + h^{n+1} \circ d_Y^n = i$，即$i \simeq 0$.

再来，$p \simeq 0$当且仅当f有左同伦逆，即存在链映射$h: Y^\bullet \to X^\bullet$使得$hf \simeq \mathrm{id}_{Y^\bullet}$.

最后，我们回到命题的证明来.$\mathrm{Cone}(f) \simeq 0$意味着$\mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)} \simeq 0$，于是$i = \mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)} \circ i \simeq 0 \circ i = 0$并且$p = p \circ \mathrm{id}_{\mathrm{Cone}(f)} \simeq p \circ 0 = 0$，于是根据前面的讨论，$f$同时有左右同伦逆，因此$f$是同伦等价. □

拓扑上，考虑

定理1.3. 任给定*Abel*范畴$\mathcal{A}$的一个链同态$f: X^\bullet \to Y^\bullet$，都存在如下$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$的正合列：

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r] & Y^\bullet \arrow[r, "\bar{\pi}"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & X^\bullet[1] \arrow[r] & 0 \\
0 \arrow[r] & X^\bullet \arrow[r, "\bar{f}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"] & \mathrm{Cyl}(f) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\beta"] & \mathrm{Cone}(f) \arrow[r] & 0 & \\
 & X^\bullet \arrow[r, "f"] & Y^\bullet & & &
\end{tikzcd}$$

推论1.3.1.

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$，称$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中的图

$$X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \xrightarrow{h} X^\bullet[1]$$

为其中的一个三角(triangle)，三角间的态射(morphism)是如下交换图

$$\begin{array}{ccccccc} X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \xrightarrow{g} & Z^\bullet & \xrightarrow{h} & X^\bullet[1] \\ \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \downarrow u[1] \\ K^\bullet & \xrightarrow{i} & L^\bullet & \xrightarrow{j} & M^\bullet & \xrightarrow{k} & K^\bullet[1] \end{array}$$

给定三角，若存在f使得三角同构于

$$X^\bullet \xrightarrow{f} \mathrm{Cyl}(f) \xrightarrow{\pi} \mathrm{Cone}(f) \xrightarrow{\delta} X^\bullet[1]$$

则称它是特异三角(distinguished triangle).

如上定义给出的是

$$\begin{tikzcd} X^\bullet \arrow[dr, "u"'] & & Z^\bullet \arrow[ll, "w"] \\ & Y^\bullet, \arrow[ur, "v"'] & \end{tikzcd}$$

其中w

命题1.4. $\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中的任意短正合序列$0 \to X^\bullet \xrightarrow{f} Y^\bullet \xrightarrow{g} Z^\bullet \to 0$都拟同构于某个特异三角.

Proof. 考虑如下交换图

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & \xrightarrow{g} & Z^\bullet & \xrightarrow{h} & 0 \\ & & \downarrow u & & \downarrow v & & \downarrow w & & \\ 0 & \longrightarrow & X^\bullet & \xrightarrow{f} & \mathrm{Cyl}(f) & \xrightarrow{\pi} & \mathrm{Cone}(f) & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

□

练习1.4. 设$\left(X^\bullet \oplus Y^\bullet, d = \begin{pmatrix} f & g \\ l & k \end{pmatrix}\right)$是上链复形，$(Y^\bullet, k^\bullet)$可缩且$h : Y^\bullet \to Y^\bullet[1]$是链同伦，求证

$$(\mathrm{id}, -hk) : (X^\bullet, f - ghl) \hookrightarrow (X^\bullet \oplus Y^\bullet, d)$$

是拟同构.

Proof. 首先来验证$(X^\bullet, f - ghl)$是链复形.由于

$$d^2 = \begin{pmatrix} f^2 + gl & fg + gk \\ lf + kl & lg + k^2 \end{pmatrix} = 0,$$

因此

$$\begin{aligned} (f - ghl)^2 &= f^2 - fghl - ghlf + (ghl)^2 \\ &= f^2 + g(hk + kh)l + ghk^2hl, \end{aligned}$$

由于k是微分映射且$h : \mathrm{id} \simeq 0$是收缩同伦，故如上计算$(f - ghl)^2 = 0$.

再来验证$(\mathrm{id}, -hk)$是链映射 □

1.4 内射消解和投射消解

定义. (augmented)

1.5 δ函子和导出函子

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A},\mathcal{B}$，$\mathcal{A}\to\mathcal{B}$的（协变）$\delta$函子($\delta$-functor)是一族函子$\{T^i:\mathcal{A}\to\mathcal{B}\}_{i\in\mathbb{N}}$，和对任意$\mathcal{A}$中的短正合序列

$$0\to X\to Y\to Z\to 0,$$

都有态射$\delta^i_{Z\to X}:T^i(Z)\to T^{i+1}(X)$，满足

1. 对任意给定的$\mathcal{A}$中的短正合序列$0\to X\to Y\to Z\to 0$，都存在长正合列
2. 若有$\mathcal{A}$中的短正合列交换图那么态射$\delta^i_{Z\to X}$给出了自然的交换图

$$\begin{array}{ccc} T^i(Z_1) & \xrightarrow{\delta^i_{Z_1\to X_1}} & T^{i+1}(X_1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ T^i(Z_2) & \xrightarrow{\delta^i_{Z_2\to X_2}} & T^{i+1}(X_2). \end{array}$$

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A},\mathcal{B}$和加性函子$F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$，若对任意$\mathcal{A}$中的对象$X$，都存在单态射$i:X\to I$使得$F(i)=0$，则称$F$是effecable的.对偶地，若对于任意任意$\mathcal{A}$中的对象$Z$，都存在单态射$p:P\to Z$使得$F(p)=0$，则称$F$是coeffecable的.

定理1.5. *给定$Abel$范畴$\mathcal{A},\mathcal{B}$和δ函子$(T^i,\delta)_{i\in\mathbb{N}}$，若对于任意$i>0$，$T^i$都是有效的函子，那么$(T^i,\delta)_{i\in\mathbb{N}}$在所有$\delta$函子中是始对象，即*

Proof. □

推论1.5.1. *右导出函子是有效的，反之也成立.*

第二章 Tor函子和Ext函子

2.1 R模同调与Tor函子

定义. 给定（右）R模链复形$(C_\bullet, \partial_\bullet)$和（左）$R$模$N$，则以$N$为系数的$C_\bullet$的同调(the homology of $C_\bullet$ with coefficient in N)为

$$H_n(C_\bullet; N) := H_n(C_\bullet \otimes_R N),$$

其中复形$C_\bullet \otimes_R N$是

$$\cdots \to C_{n+1} \otimes_R N \xrightarrow{\partial_{n+1} \otimes_R N} C_n \otimes_R N \xrightarrow{\partial_n \otimes_R N} C_{n+1} \otimes_R N \to \cdots.$$

定理2.1.

推论2.1.1. 给定R模短正合列

$$0 \to M \to N \to P \to 0,$$

满足P是平坦的，那么

1. M是平坦的当且仅当N是平坦的，
2. 对任意R模Q，$0 \to M \otimes_R Q \to N \otimes_R Q \to P \otimes_R Q \to 0$也是正合列.

2.2 R模上同调与Ext函子

2.2.1 R模同调与上同调的转换

2.3 特殊链复形和万有系数定理

2.3.1 特殊链复形

引理2.1. 设$(P_\bullet, \partial_\bullet)$是投射$R$模链复形，$H_n(P_\bullet) = 0$对任意$n$成立，且所有的$\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$也都是投射的，则$P_\bullet \simeq 0$.

Proof. 令$Z_n := \mathrm{Ker}\,\partial_n, B_n := \mathrm{Im}\,\partial_{n+1}$，那么对所有的整数$n$我们有短正合序列

$$0 \to Z_n \hookrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \to 0.$$

根据投射R模的提升性质，存在$h_{n-1} : B_{n-1} \to P_n$使得下图交换：

$$\begin{tikzcd} & & & B_{n-1} \arrow[dl, dashed, "h_{n-1}"'] \arrow[d, equal] & \\ 0 \arrow[r] & Z_n \arrow[r, hook] & P_n \arrow[r, "\partial_n"] & B_{n-1} \arrow[r] & 0. \end{tikzcd}$$

因此$P_n = Z_n \oplus h_{n-1}(B_{n-1})$.由于$H_n(P_\bullet) = 0$，$Z_n = B_n$，于是复形可以重写为

$$\cdots \to Z_{n+1} \oplus h_n Z_n \xrightarrow{\partial_{n+1}} Z_n \oplus h_{n-1} Z_{n-1} \xrightarrow{\partial_n} Z_{n-1} \oplus h_{n-2} Z_{n-2} \to \cdots,$$

满足$\partial_n|_{Z_n} = 0, \partial_n|_{h_{n-1}Z_{n-1}} = (h_{n-1})^{-1}$，于是

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & Z_{n+1} \oplus h_n Z_n \arrow[r] \arrow[d, equal] & Z_n \oplus h_{n-1} Z_{n-1} \arrow[r, "\partial_n"] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h_{n-1}"'] & Z_{n-1} \oplus h_{n-2} Z_{n-2} \arrow[r] \arrow[d, equal] \arrow[dl, "h_{n-2}"'] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & Z_{n+1} \oplus h_n Z_n \arrow[r] & Z_n \oplus h_{n-1} Z_{n-1} \arrow[r, "\partial_n"] & Z_{n-1} \oplus h_{n-2} Z_{n-2} \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

给出了链同伦$\mathrm{id} \simeq 0$. □

作为推论，考虑投射R模链复形的态射$f : M_\bullet \to N_\bullet$诱导了同构$f_* : H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$，那么$H_n(\mathrm{Cone}(f)) = 0$对任意$n$成立.但是，$\mathrm{Cone}(f)$也是投射$R$模链复形，由刚刚的引理$\mathrm{Cone}(f) \simeq 0$，于是根据命题**??**的对偶，$f$是链同伦.这样我们证明了

命题2.2. 若投射R模链复形的态射$f : M_\bullet \to N_\bullet$诱导了同构$f_* : H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$，那么$f$是链同伦.

事实上，我们还可以证明更强的结论：如果同调群的同构$H_*(M_\bullet) \cong H_*(N_\bullet)$并不是由特定的态射诱导的话，给定的自由$R$模链复形$M_\bullet, N_\bullet$依旧依旧是同伦等价的，即：

定理2.3. 若$(M_\bullet, \partial_\bullet^M), (N_\bullet, \partial_\bullet^N)$是自由$R$模链复形，那么$M_\bullet \simeq N_\bullet$当且仅当$H_n(M_\bullet) = H_n(N_\bullet)$对任意$n$成立.

为了证明定理**??**，我们需要建立由同调群映射到链复形态射的提升，即

命题2.4. 给定R模链复形$M_\bullet, N_\bullet$且$M^\bullet$是投射链复形，且$\mathrm{Ker}\ \partial_n^M, \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}^M$都是投射的，则对于任意上同调群的同态$\varphi_* : H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$都可以找到链复形态射$f : M_\bullet \to N_\bullet$，使得$f_* = \varphi_*$.

Proof. 按照假设$Z_n^M := \mathrm{Ker}\ \partial_n, B_n^M := \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$都是投射的，于是存在交换图

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & B_n^M \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}_n|_{B_n^M}"] & Z_n^M \arrow[r, "\pi_n^M"] \arrow[d, dashed, "\tilde{f}_n"] & H_n^M \arrow[r] \arrow[d, "\varphi_n"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_n^N \arrow[r] & Z_n^N \arrow[r, "\pi_n^N"] & H_n^N \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

其中上下两行的正合性说明，对任意$\partial_{n+1}^M(m) = b \in B_n^M$，

$$\pi_n^N \circ \tilde{f}_n(b) = \pi_n^N \circ \tilde{f}_n(\partial_{n+1}(m)) = \varphi_n(\pi_n^M \circ \partial_{n+1}^M(m)) = 0,$$

因此$\tilde{f}_n(b) \in \mathrm{Ker}\ \pi_n^N = B_n^N$，这样只需要将$\tilde{f}_n$扩张到$M_n$即可.

考虑**??**中的分解$M_n = Z_n^M \oplus h_{n-1}(B_{n-1}^M)$，在如下交换图中

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & Z_n^M \arrow[r] \arrow[dd, "\tilde{f}_n"] & M_n \arrow[r] & B_{n-1}^M \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
 & & & B_{n-1}^M \arrow[ul, "h_{n-1}"'] \arrow[dl, dashed, "k_{n-1}"] \arrow[d, "\tilde{f}_n|_{B_{n-1}^M}"] & \\
0 \arrow[r] & Z_n^N \arrow[r] & N_n \arrow[r] & B_{n-1}^N \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

再次根据自由模的投射性质存在$k_{n-1} : B_{n-1}^M \to N_n$.于是，定义

$$\begin{aligned}
f_n : M_n &\to N_n \\
(z, h_{n-1}(b)) &\mapsto \tilde{f}_n(z) + k_{n-1}(b),
\end{aligned}$$

这样只需要验证f是链映射且$f_* = \varphi_*$即可.计算得

$$f_n \partial_{n+1}^M((z, h_n(b))) = f_n(b, 0) = \tilde{f}_n(b) = \partial_{n+1}^N \circ k_n(b) = \partial_{n+1}^N(\tilde{f}_{n+1}(z) + k_n(b)) = \partial_{n+1}^N f_{n+1}((z, h_n(b))),$$

于是f是链映射，且$f_*([z]) = [\tilde{f}_n(z)]$，$\tilde{f}_n$的定义交换图说明$\varphi_n \circ \pi_n^M = \pi_n^N \circ \tilde{f}_n$，这样$[\tilde{f}_n(z)] = \varphi_n([z])$，即$f_* = \varphi_*$. □

结合命题**??**，此时定理**??**已经完成了证明.更进一步地，我们还有

命题2.5. 给定R模投射链复形$M_\bullet, N_\bullet$，且$\mathrm{Ker}\ \partial_n^M, \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}^M, \mathrm{Ker}\ \partial_n^N, \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}^N$都是投射的，若$H_*(M_\bullet), H_*(N_\bullet)$也都是投射的，且态射$f, g : M_\bullet \to N_\bullet$诱导相同的同态$f_* = g_* : H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$，那么$f \simeq g$.

Proof. 令$Z_n^M := \mathrm{Ker}\ \partial_n^M, B_n^M := \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}^M, Z_n^N := \mathrm{Ker}\ \partial_n^N, B_n^N := \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}^N$，将$H_*(M_\bullet)$看作（边缘算子为0的）链复形，那么显然$H_*(M_\bullet) = H_*(H_*(M_\bullet))$（这里固定一个同构视为相等），根据命题**??**，存在链映射$j_\bullet : M_\bullet \to H_*(M_\bullet)$使得$j_*$是同构$H_*(M_\bullet) = H_*(H_*(M_\bullet))$.根据命题**??**，$j_\bullet$存在同伦逆，记为$j_\bullet^{-1}$.类似地，存在链映射$k_\bullet : N_\bullet \to H_*(N_\bullet)$使得$k_*$是同构$H_*(N_\bullet) = H_*(H_*(N_\bullet))$，$k_\bullet^{-1}$是同伦逆.于是

$$f \simeq (k \circ k^{-1}) \circ f \circ (j \circ j^{-1}) = k \circ (k^{-1} \circ f \circ j) \circ j^{-1}.$$

另一方面，链复形$H_*(M_\bullet), H_*(N_\bullet)$的边缘算子都是0，链映射$H_*(M_\bullet) \to H_*(N_\bullet)$和它诱导的$H_*(H_*(M_\bullet)) \to H_*(H_*(N_\bullet))$没有差别，因此

$$k^{-1} \circ f \circ j = (k^{-1} \circ f \circ j)_* = k_*^{-1} \circ f_* \circ j_* = \mathrm{id} \circ f_* \circ \mathrm{id} = f_*,$$

同理$k^{-1} \circ g \circ j = g_*$，综合起来

$$f \simeq k \circ (k^{-1} \circ f \circ j) \circ j^{-1} = k \circ f_* \circ j^{-1} = k \circ g_* \circ j^{-1} = k \circ (k^{-1} \circ g \circ j) \circ j^{-1} \simeq g.$$

□

2.3.2 万有系数定理

定理2.6. 给定环R和平坦右R模组成的复形$P_\bullet$，使得所有的子模$\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$也都是平坦的，那么对于任意的左$R$模$N$和$n \in \mathbb{Z}$，都存在正合序列

$$0 \to H_n(P_\bullet) \otimes_R N \to H_n(P_\bullet; N) \to \mathrm{Tor}_1^R(H_{n-1}(P_\bullet), N) \to 0.$$

Proof. 首先对任意$n \in \mathbb{Z}$存在正合列

$$0 \to Z_n \hookrightarrow P_n \xrightarrow{\partial_n} B_{n-1} \to 0,$$

根据推论**??**，Z_n也都是平坦的，且诱导的

$$0 \to Z_n \otimes_R N \to P_n \otimes_R N \to B_{n-1} \otimes_R N \to 0$$

也是正合列.这样，存在Abel群复形的短正合序列

$$0 \to Z_\bullet \otimes_R N \to P_\bullet \otimes_R N \to B[-1]_\bullet \otimes_R N \to 0,$$

并且诱导了长正合序列

$$\cdots \to H_{n+1}(B[-1]_\bullet \otimes_R N) \xrightarrow{\delta} H_n(Z_\bullet \otimes_R N) \to H_n(P_\bullet \otimes_R N) \to H_n(B[-1]_\bullet \otimes_R N) \to \cdots.$$

注意到$(Z_\bullet, \partial_\bullet|_Z)$和$(B[-1]_\bullet, \partial_\bullet|_B)$的边缘算子都是0，故$H_n(Z_\bullet \otimes_R N) = Z_n \otimes_R N, H_n(B[-1]_\bullet \otimes_R N) = B_{n-1} \otimes_R N$.这样，之前的长正合序列是

$$\cdots \to B_n \otimes_R N \xrightarrow{\delta_n} Z_n \otimes_R N \to H_n(P_\bullet \otimes_R N) \to B_{n-1} \otimes_R N \to \cdots,$$

其中，映射$\delta: B_n\otimes_R N\to Z_n\otimes_R N$恰好是嵌入$i_n: B_n\to Z_n$在$-\otimes_R N$下的象，这样有正合列

$$0\to \mathrm{Coker}\,\delta_n\to H_n(P_\bullet\otimes_R N)\to \mathrm{Ker}\,\delta_{n-1}\to 0.$$

注意到

$$0\to B_n\to Z_n\to H_n(P_\bullet)\to 0$$

是$H_n(P_\bullet)$的平坦消解，因此根据Tor诱导的长正合序列

$$0\to \mathrm{Tor}_1^R(H_n(P_\bullet),N)\to B_n\otimes_R N\xrightarrow{\delta_n} Z_n\otimes_R N\to H_n(P_\bullet)\otimes_R N\to 0,$$

代入即可. □

对偶地，有上同调的万有系数定理：

定理2.7. 给定环R和投射右R模组成的复形$P_\bullet$，使得所有的子模$\mathrm{Im}\,\partial_{n+1}$也都是投射的，那么对于任意的左$R$模$N$和$n\in\mathbb{Z}$，都存在（非典范的）分裂正合序列

$$0\to \mathrm{Ext}_R^1(H_{n-1}(P_\bullet),N)\to H^n(P_\bullet;N)\to \mathrm{Hom}_R(H_n(P_\bullet,N))\to 0.$$

引理2.2. 给定主理想整环R和自由R模M，则M的子模也是自由的.

定义. 设$M^\bullet$是R模上链复形，若对每一个$n\in\mathbb{Z}$，M^n都是自由R模，则称$M^\bullet$是自由链复形(free cochain complex).

推论2.7.1. 若$M_\bullet$是主理想整环R模的自由链复形，那么存在自然的正合序列

$$0\to H_n(M_\bullet)\otimes_R N\to H_n(M_\bullet;N)\to \mathrm{Tor}(H_{n-1}(M_\bullet),N)\to 0,$$

对偶地，

例2.1. 给定一个拓扑空间X，

2.4 双复形和链复形中的乘法对象

2.4.1 双复形和全复形

定义. 分次模/分次对象

定义. 设M, N是分次R模，若R模态射$f : M \to N$满足存在整数d，使得对任意$n \in \mathbb{Z}$都有$f : M_n \to N_{n+k}$，则称f是阶数为k的分次映射(graded map of degree k).

命题2.8. *若$M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$分别是阶数为$k, l$的分次映射，则$g \circ f$是阶数为$k + l$的分次映射.*

定义. 一个双分次模(bigraded module)是一族有两个指标的R模

$$M := \{M^{p,q}\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}},$$

一般我们记为$M^{\bullet\bullet}$.若M, N是双分次模，一族映射

$$f = \{f^{p,q} : M^{p,q} \to N^{p+k,q+l}\}_{(p,q)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}$$

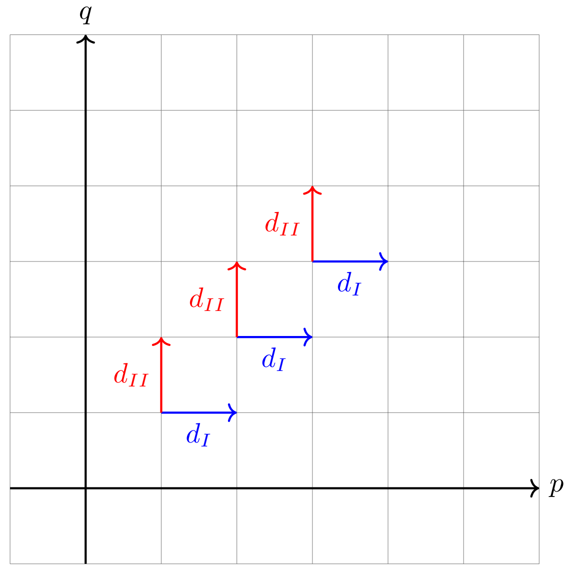
若都是R模映射，则称f是阶数为(k, l)的双分次映射.

接下来我们都用上同调的序号记号.

定义. 设M是双分次R模，d_I, d_{II}是两个阶数分别为$(1, 0)$和$(0, 1)$的双分次微分映射（即$d_I^{p+1,q} \circ d_I^{p,q} = 0$，$d_{II}^{p,q+1} \circ d_{II}^{p,q} = 0$）.若映射满足

$$d_I^{p,q+1} \circ d_{II}^{p,q} + d_{II}^{p+1,q} \circ d_I^{p,q} = 0,$$

则称(M, d_I, d_{II})是一个**双复形**(bicomplex).



例2.2. 设M是双分次R模，d_I,δ是两个阶数分别为$(1,0)$和$(0,1)$的双分次微分映射，使得M是一个交换图（注意这和双复形差了一个符号!），那么我们可以通过符号变换构造一个双复形.令$d_{II}^{p,q}=(-1)^p\delta^{p,q}$，那么

$$d_I^{p,q+1}\circ d_{II}^{p,q}+d_{II}^{p+1,q}\circ d_I^{p,q}=$$

定义. 给定环R和$M^\bullet\in \mathrm{Com}^\bullet(\mathbf{Mod}-R), N^\bullet\in \mathrm{Com}^\bullet(R-\mathbf{Mod})$，定义$M^\bullet\otimes N^\bullet$是一个$\mathbf{Ab}$上的双复形

$$\begin{aligned} M^\bullet\otimes N^\bullet=(M^i\otimes_R N^j, & d_I^{i,j}=d_M^i\otimes_R \mathrm{id}_{N^j}:M^i\otimes_R N^j\to M^{i+1}\otimes_R N^j\\ & d_{II}^{i,j}=(-1)^i\mathrm{id}_{M^i}\otimes_R d_N^j:M^i\otimes_R N^j\to M^i\otimes_R N^{j+1})_{(i,j)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}},\end{aligned}$$

如下图

$$\begin{tikzcd} M^i\otimes_R N^{j+1} \arrow[r, "d_I^{i+1,j}"] & M^{i+1}\otimes_R N^{j+1} \\ M^i\otimes_R N^j \arrow[u, "d_{II}^{i,j}"] \arrow[r, "d_I^{i,j}"'] & M^{i+1}\otimes_R N^j. \arrow[u, "d_{II}^{i,j+1}"'] \end{tikzcd}$$

注意到

$$\begin{aligned} &(d_I^{i,j+1}\circ d_{II}^{i,j}+d_{II}^{i+1,j}\circ d_I^{i,j})(m\otimes n)\\ &=(-1)^i(d_M^i\otimes_R \mathrm{id}_{N^{j+1}})\circ(\mathrm{id}_{M^i}\otimes_R d_N^j)(m\otimes n)+(-1)^{i+1}(\mathrm{id}_{M^i}\otimes_R d_N^{j+1})\circ(d_M^i\otimes_R \mathrm{id}_{N^j})(m\otimes n)\\ &=(-1)^i((d_M^i\otimes_R d_N^j)(m\otimes n)-(d_M^i\otimes_R d_N^j)(m\otimes n))\\ &=0,\end{aligned}$$

因此$M^\bullet\otimes N^\bullet$是双复形.

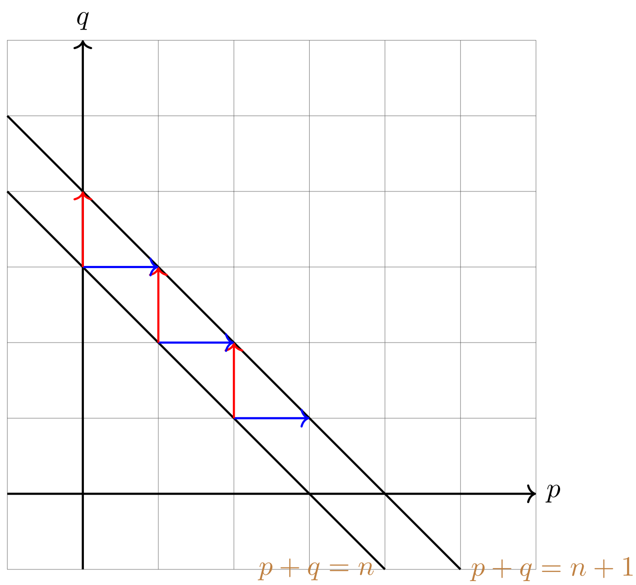
定义. 设M是双分次R模，那么

$$\mathrm{Tot}(M)^n := \bigoplus_{p+q=n} M^{p,q}$$

和$D^n : \mathrm{Tot}(M)^n \to \mathrm{Tot}(M)^{n+1}$，

$$D^n := \sum_{p+q=n} (d_I^{p,q} + d_{II}^{p,q})$$

称为M的全复形(total complex).



引理2.3. *若M是双复形，则$(\mathrm{Tot}(M), D)$是复形.*

很多时候，我们关心的上同调问题是某个双复形的全复形的上同调群，而谱序列就是一种计算全复形上同调群的某种技巧.

例2.3. 设M是双分次R模，(M, d_I, d_{II})是一个双复形，那么我们可以定义双复形的转置M^T：这意味着

$$\mathrm{Tot}(M) = \mathrm{Tot}(M^T).$$

2.4.2 复形中的乘法对象

定义. 给定R模复形$M^\bullet$和$N^\bullet$，那么它们的张量积(tensor product)$(M \otimes N)^\bullet$满足

$$(M \otimes N)^n := \bigoplus_{i+j=n} M^i \otimes_R N^j,$$

微分映射由

$$\begin{aligned} d^n : (M\otimes N)^n &\to (M\otimes N)^{n+1} \\ x\otimes y &\mapsto d_M^n(x)\otimes y + (-1)^{\deg x} x\otimes d_N^n(y) \end{aligned}$$

扩张给出.

我们来验证如上定义给出了一个上链复形：

如下命题说明这样的定义是自然的：

命题2.9. 给定R模复形$M^\bullet$和$N^\bullet$，记$M^\bullet\otimes N^\bullet$是双复形

此处有图

那么

$$\mathrm{Tot}(M^\bullet\otimes N^\bullet)\simeq (M\otimes N)^\bullet.$$

Proof. □

引理2.4. 给定R模复形同态的同伦$f_1^\bullet\simeq f_2^\bullet : M_1^\bullet\to M_2^\bullet$和$g_1^\bullet\simeq g_2^\bullet : N_1^\bullet\to N_2^\bullet$，那么存在链同伦

$$f_1^\bullet\otimes g_1^\bullet\simeq f_2^\bullet\otimes g_2^\bullet : (M_1\otimes N_1)^\bullet\to (M_2\otimes N_2)^\bullet,$$

特别地若有链同伦等价$M_1^\bullet\simeq M_2^\bullet, N_1^\bullet\simeq N_2^\bullet$，则有$(M_1\otimes N_1)^\bullet\simeq (M_2\otimes N_2)^\bullet$.

例2.4.

$$\mathbb{Z}[m]\otimes\mathbb{Z}[n]=\mathbb{Z}[m+n],$$

$$(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m]\otimes\mathbb{Z}[n]=\mathbb{Z}[m]\otimes(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[n]=(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m+n]$$

练习2.1. 求证上链复形$(\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m]\otimes(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})[n]$的上同调群是

$$H^q((\mathbb{Z}/k\mathbb{Z})[m]\otimes(\mathbb{Z}/l\mathbb{Z})[n])=\begin{cases}\mathbb{Z}/\gcd(k,l)\mathbb{Z} & q=m+n, m+n+1\\ 0 & q\neq m+n, m+n+1.\end{cases}$$

命题2.10. 给定R模复形$M^\bullet$和$N^\bullet$，那么双线性函数

$$\begin{aligned} M^p\times N^q &\to (M\otimes N)^{p+q} \\ (x,y) &\mapsto x\otimes y \end{aligned}$$

诱导了上同调之间的映射

$$H^p(M^\bullet)\times H^q(N^\bullet)\to H^{p+q}((M\otimes N)^\bullet).$$

Proof. 任取$(x,y)\in Z^p(M^\bullet)\times Z^q(N^\bullet)$，按照定义

$$d(x\otimes y)=d_M^p(x)\otimes y+(-1)^{\deg x}x\otimes d_N^q(y)=0,$$

于是$-\times-(Z^\bullet(M^\bullet)\times Z^\bullet(M^\bullet))\subseteq Z^\bullet((M\otimes N)^\bullet)$.类似地，任意$(d_M^{n-1}(x),y)\in B^p(M^\bullet)\times Z^q(N^\bullet)$满足

$$d(x\otimes y)=d_M^{p-1}(x)\otimes y+(-1)^{\deg x}x\otimes d_N^{q-1}(y)=d_M^{p-1}(x)\otimes y,$$

因此$-\times-(B^\bullet(M^\bullet)\times Z^\bullet(M^\bullet))\subseteq B^\bullet((M\otimes N)^\bullet)$，对偶地$-\times-(Z^\bullet(M^\bullet)\times B^\bullet(M^\bullet))\subseteq B^\bullet((M\otimes N)^\bullet)$.于是诱导的映射

$$H^p(M^\bullet)\times H^q(N^\bullet)\to H^{p+q}((M\otimes N)^\bullet)$$

满足$([z^p],[z^q])\mapsto[z^p\otimes z^q]$是良定义的，线性性是根据定义直接的. □

推论2.10.1. 给定交换环R和R模上链复形$S^\bullet$，对任意指标p,q存在双线性映射$-\smile-:S^p\times S^q\to S^{p+q}$满足

$$d(\alpha\smile\beta)=d(\alpha)\smile\beta+(-1)^{\deg\alpha}\alpha\smile d(\beta), \tag{2.1}$$

那么有诱导的“乘法”

$$-\smile-:H^p(S^\bullet)\times H^q(S^\bullet)\to H^{p+q}(S^\bullet).$$

Proof. 根据张量积的泛性质，存在R线性映射$S^p\otimes_R S^q\dashrightarrow S^{p+q}$（也记为$\smile$）满足交换图

$$\begin{tikzcd} S^p\times S^q \arrow[r, "\smile"] \arrow[d, "\otimes"'] & S^{p+q} \\ S^p\otimes_R S^q, \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

于是等式??说明诱导的$\smile$: $S^p\otimes_R S^q\dashrightarrow S^{p+q}$是链映射，因此存在

$$\smile: H^{p+q}((S\otimes S)^\bullet)\to H^{p+q}(S^\bullet).$$

复合命题??给出的上同调之间的映射，这样得到了所希望的$-\smile-:H^p(S^\bullet)\times H^q(S^\bullet)\to H^{p+q}(S^\bullet)$. □

例2.5. 给定拓扑空间，那么在$S^\bullet(X)$上有定义的乘积

命题2.11. 上同调的张量积满足：

1. 结合性：对任意$x\in H^p(M^\bullet),y\in H^q(N^\bullet),z\in H^r(L^\bullet)$，

$$(x\otimes y)\otimes z=x\otimes(y\otimes z),$$

2. 自然性：任意给定上链映射$f:M^\bullet\to U^\bullet$和$g:N^\bullet\to V^\bullet$，那么对任意的$x\in H^p(M^\bullet),y\in H^q(N^\bullet)$，

$$(f\otimes g)^{p+q}(x\otimes y)=f^p(x)\otimes g^q(y).$$

定理2.12 (Künneth). 给定环R和平坦右R模组成的复形$P_\bullet$和左R模复形$Q_\bullet$，使得所有的子模$\mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$也都是平坦的，那么对于任意的和$n\in\mathbb{Z}$，都存在正合序列

$$0\to\bigoplus_{p+q=n}H_p(P_\bullet)\otimes_R H_q(Q_\bullet)\to H_n((P\otimes Q)_\bullet)\to\bigoplus_{p+q=n-1}\mathrm{Tor}_1^R(H_p(P_\bullet),H_q(Q_\bullet))\to 0.$$

推论2.12.1. 给定主理想整环R的自由R模上链复形$M_1^\bullet,M_2^\bullet,N_1^\bullet,N_2^\bullet$，满足$H^n(M_1^\bullet)\cong H^n(M_2^\bullet),H^n(N_1^\bullet)\cong H^n(N_2^\bullet)$对所有的$n\in\mathbb{Z}$成立，那么$H^n(M_1^\bullet\otimes M_2^\bullet)\cong H^n(N_1^\bullet\otimes N_2^\bullet)$对所有的$n\in\mathbb{Z}$成立.

推论2.12.2. 给定主理想整环R的自由R模上链复形$M^\bullet,N^\bullet$，使得$H^n(N^\bullet)$都是有限生成的自由模，那么

$$H^*(M^\bullet\otimes N^\bullet)\cong H^*(M^\bullet)\otimes H^*(N^\bullet).$$

这一小节的所有内容都可以形式地对偶到链复形的范畴上，得到相同的结果.

2.4.3 同调与上同调

这里我们只讨论上同调由同调给出的情形，另一种情形完全对偶地可以得出.此时，假定$(M_\bullet,\partial_\bullet^M),(N_\bullet,\partial_\bullet^N)$是给定的$R$模链复形，$(M^\bullet=\mathrm{Hom}_R(M_\bullet,R),d_M^\bullet=\mathrm{Hom}_R(\partial_\bullet^M,R)),(N^\bullet=\mathrm{Hom}_R(N_\bullet,R),d_N^\bullet=\mathrm{Hom}_R(\partial_\bullet^N,R))$是诱导的上链复形.

事实上，如此的设定并不是必须的，在后面的所有构造和证明中，我们真正用到的是给定一个R模复形$(M_\bullet,\partial_\bullet^M)$和$R$模上链复形$(M^\bullet,d_M^\bullet)$，存在$R$双线性的映射

$$\langle -,-\rangle : M^n\times M_n\to R$$

满足

$$\langle d(f),m\rangle=\langle f,\partial(m)\rangle$$

对任意$f\in M^n,m\in M_n,n\in\mathbb{Z}$都成立.但是，在本小节我们还是选择最初具体的假定，以帮助理解.

首先，命题??的对偶给出了链复形层面的张量积，而它本身给出了上链复形层面的张量积.当上链复形是由链复形诱导时，张量积同样可以被诱导：

引理2.5. 双线性函数

$$\begin{aligned}M^p\times N^q&\to(M\otimes N)^{p+q}\\(\alpha,\beta)&\mapsto(\alpha\otimes\beta:(m,n)\mapsto\alpha(a)\beta(n))\end{aligned}$$

诱导了$(M\otimes N)^\bullet$的微分映射

$$\begin{aligned}d^n:(M\otimes N)^n&\to(M\otimes N)^{n+1}\\\alpha\otimes\beta&\mapsto d_M^n(\alpha)\otimes\beta+(-1)^{\deg\alpha}\alpha\otimes d_N^n(\beta),\end{aligned}$$

且给出了上同调类的张量积

$$H^p(M^\bullet)\times H^q(N^\bullet)\to H^{p+q}((M\otimes N)^\bullet).$$

Proof. 计算可得

$$\begin{aligned}\langle d(\alpha\otimes\beta), a\otimes b\rangle &= \langle \alpha\otimes\beta, \partial(a\otimes b)\rangle\\ &= \langle \alpha\otimes\beta, \partial(a)\otimes b+(-1)^{\deg a}a\otimes\partial(b)\rangle\\ &= \langle\alpha,\partial(a)\rangle\langle\beta,b\rangle+(-1)^{\deg a}\langle\alpha,a\rangle\langle\beta,\partial(b)\rangle\\ &= \langle d\alpha,a\rangle\langle\beta,b\rangle+(-1)^{\deg\alpha}\langle\alpha,a\rangle\langle d\beta,b\rangle\\ &= \langle d(\alpha)\otimes\beta+(-1)^{\deg\alpha}\alpha\otimes d(\beta), a\otimes b\rangle,\end{aligned}$$

于是 □

此时，同调与上同调存在相互的作用：

命题2.13. 双线性函数

$$\begin{aligned}-\frown -: N^q\times(M\otimes N)_{p+q} &\to M_p\\ (\beta, a\otimes b)&\mapsto \beta(b)a\end{aligned}$$

对任意$\beta\in N^q, c\in(M\otimes N)_{p+q}$满足

$$\partial(\beta\frown c)=(-1)^p d\beta\frown c+\beta\frown(\partial c),$$

于是诱导了上同调在同调上的乘积

$$H^q(N^\bullet)\times H_{p+q}((M\otimes N)^\bullet)\to H_p(M_\bullet).$$

Proof. 设$c=\sum_{i=0}^N a_i\otimes b_i$，那么

$$\begin{aligned}\beta\frown(\partial c) &= \beta\frown\left(\sum_{i=0}^N\partial a_i\otimes b_i+\sum_{i=0}^N(-1)^{\deg a_i}a_i\otimes\partial b_i\right)\\ &=\sum_{i=0}^N\beta(b_i)\partial a_i+\sum_{i=0}^N(-1)^{\deg c-\deg b_i}\beta(\partial b_i)a_i\\ &=\partial\sum_{i=0}^N\beta(b_i)a_i+\sum_{i=0}^N(-1)^{\deg c-\deg\beta-1}d\beta(b_i)a_i\\ &=\partial(\beta\frown c)-(-1)^{\deg c-\deg\beta}d\beta\frown c.\end{aligned}$$

□

例2.6. 给定拓扑空间X，

命题2.14. 任意给定$\alpha\in H^p(M^\bullet),\beta\in H^q(N^\bullet),\gamma\in H^r(L^\bullet),a\in H_{p+q}(M\otimes N),b\in H_{p+q+r}(M\otimes N\otimes L)$，满足

1. 结合性：$(\beta\otimes\gamma)\frown c=\beta\frown(\gamma\frown c)$，

2. 对偶性：$\langle\alpha\otimes\beta,b\rangle=\langle\alpha,\beta\frown b\rangle$，

3. 自然性：任意给定上链映射$f:M_\bullet\to U_\bullet$和$g:N_\bullet\to V_\bullet$，那么对任意的$x\in H^p(M^\bullet),y\in H^q(N^\bullet)$，

$$f_*((g^*\beta)\frown b)=\beta\frown(f\otimes g)(b),$$

用交换图表示为

$$\begin{tikzcd}
N^q & \times & (M\otimes N)_{p+q} \arrow[r, "\frown"] \arrow[d, "f\otimes g"] & M_p \arrow[d, "f"] \\
V^q \arrow[u, "g"] & \times & (U\otimes V)_{p+q} \arrow[r, "\frown"] & U_p
\end{tikzcd}$$

2.5 一个例子：

我们感兴趣的是一类特殊图的极限，被称为Abel群组成的塔(tower of abelian groups)，其中指标集$I=\mathbb{N}^\circ$是偏序集

$$\cdots\to 2\to 1\to 0,$$

用**Ab**中的对象表示就是

$$\cdots\to A_2\to A_1\to A_0,$$

或者更形式地，这样一个对象就是函子

$$A:\mathbb{N}^\circ\to\mathbf{Ab}.$$

它的极限$\lim_{\leftarrow}A_n$

$$\alpha:\prod_{i\in\mathbb{N}^\circ}A_i\to\prod_{i\in\mathbb{N}^\circ}A_i$$

定义. 给定一个Abel群塔$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$，考虑映射

$$\Delta:\prod_{i\in\mathbb{N}^\circ}A_i\to\prod_{i\in\mathbb{N}^\circ}A_i,$$

其中$\Delta=\mathrm{id}-\alpha$，定义

$$\lim_{\leftarrow}^{n}A_i:=\begin{cases}\lim_{\leftarrow}A_i & n=0\\ \mathrm{Coker}\,\Delta & n=1\\ 0 & \text{其他情况.}\end{cases}$$

定义. 设一个Abel群塔$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$若满足对任意$m\geq 0$，都存在$n\geq m$使得$i\geq n$时，映射

$$A_i\to A_m$$

的像对所有的i都相同，则称$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$满足Mittag-Leffler条件.

定理2.15. *若Abel群塔$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$满足Mittag-Leffler条件，那么*

$$\lim_{\leftarrow}{}^{1} A_n=0.$$

Proof. □

命题2.16. *设$\cdots\to A_2\to A_1\to A_0$是一个正向系，满足任意$A_i$都是零调的Abel群上链复形，且所有的$A_{i+1}\to A_i$都是满射，那么$\lim_{\leftarrow} A_n$也是零调的.*

第三章　谱序列

同调代数关心了许多基本的问题，比如给定R模M的子模K同态$f : K \to N$，

3.1　滤子和正合对

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，X是$\mathcal{A}$中的对象，则X的一个递降滤子(descending filtration)是一族X的子对象$\{F^n X\}_{n\in\mathbb{Z}}$满足

$$0 \subseteq \cdots \subseteq F^{n+1}X \subseteq F^n X \subseteq \cdots X.$$

例3.1.

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，D, E是$\mathcal{A}$中的双分次对象，f, g, h是双分次映射，若

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "f"] & & D \arrow[dl, "g"] \\ & E \arrow[ul, "h"] & \end{tikzcd}$$

是正合的，那么称(D, E, f, g, h)是正合对(exact couple).

定理3.1. *每一个$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的上链$X^\bullet$的滤子$F^pX^\bullet$都给出一个正合对*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[rr, "f\ (-1,1)"] & & D \arrow[dl, "g\ (0,0)"] \\ & E, \arrow[ul, "h\ (1,0)"] & \end{tikzcd}$$

其中映射的度在图中已经标出.

Proof. 我们有复形的短正合列

$$0 \to F^{p+1}X^\bullet \xrightarrow{i^{p+1}} F^pX^\bullet \xrightarrow{\pi^p} F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet \to 0,$$

这诱导了上同调群的长正合序列

$$\begin{aligned}\cdots \to & H^n(F^{p+1}X^\bullet) \xrightarrow{H^n(i^{p+1})} H^n(F^pX^\bullet) \xrightarrow{H^n(\pi^p)} H^n(F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet) \to \\ \xrightarrow{\delta^n} & H^{n+1}(F^{p+1}X^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(i^{p+1})} H^{n+1}(F^pX^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(\pi^p)} H^{n+1}(F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet) \to \cdots .\end{aligned}$$

我们取$n = p+q$，$f = H^\bullet(i^{p+1}), g = H^\bullet(\pi^p), h = \delta^\bullet$，并且

$$D = \{D^{p,q} := H^{p+q}(F^pX^\bullet)\}$$
$$E = \{E^{p,q} := H^{p+q}(F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet)\}$$

代入到长正合序列中即为

$$\cdots \to D^{p+1,q-1} \xrightarrow{f^{p+1,q-1}} D^{p,q} \xrightarrow{g^{p,q}} E^{p,q} \xrightarrow{h^{p,q}} D^{p+1,q} \to \cdots .$$

□

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，X是$\mathcal{A}$中的双分次对象，d是双分次映射满足$d \circ d = 0$，则称(X,d)是微分双分次对象(differential bigraded object).

若(X,d)是微分双分次对象，d的阶数为(k,l)，那么定义(X,d)的上同调为

$$H(X,d)^{p,q} := \frac{\ker d^{p,q}}{\operatorname{im} d^{p-k,q-l}}.$$

定理3.2. *若(D,E,f,g,h)是Abel范畴$\mathcal{A}$上的一个正合对，那么$d := h \circ g : E \to E$给出$\mathcal{A}$上的一个微分双分次对象(E,d)，且存在一个新的正合对(D_2,E_2,f_2,g_2,h_2)*

$$\begin{tikzcd} D_2 \arrow[rr, "f_2"] & & D_2 \arrow[dl, "g_2"] \\ & E_2, \arrow[ul, "h_2"] & \end{tikzcd}$$

满足$E_2 = H(E,d)$，称为导出对(derived couple).

Proof. 首先我们验证微分.按照定义，$d \circ d = (h \circ g) \circ (h \circ g) = h \circ (g \circ h) \circ g = h \circ 0 \circ g = 0$.

按照条件定义$E_2 = H(E,d)$，定义

$$D_2 := \operatorname{Im} f,$$

且$f_2 := f|_{D_2} = f \circ \iota$，其中$\iota : D_2 \to D$是嵌入. □

推论3.2.1. *每一个Abel范畴$\mathcal{A}$中的上链$X^\bullet$的滤子$F^pX^\bullet$都给出一族正合对*

$$\begin{tikzcd} D_r \arrow[rr, "f_r\ (1,-1)"] & & D_r \arrow[dl, "g_r\ (1-r,r-1)"] \\ & E_r, \arrow[ul, "h_r\ (-1,2)"] & \end{tikzcd}$$

且满足

1. 双分次映射f_r, g_r, h_r的度分别为$(1,-1),(1-r,r-1)$和$(-1,2)$.

2. 微分d_r的度为()，它由$hf_{-r+1}g$诱导.

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，$\mathcal{A}$上的谱序列$(E_r,d_r)_{r\geq 1}$是一族$\mathcal{A}$中的对象和态射的全体$E=(E_r^{p,q},d_r^{p,q})$，满足

1. 态射$d_r^{p,q}: E_r^{p,q}\to E_r^{p+r,q-r+1}$定义在第$r$页，且是微分映射，即$d_r^{p+r,q-r+1}\circ d_r^{p,q}=0$.

2. 有同构
$$H^{p,q}(E_r):=\frac{\mathrm{Ker}\ d_r^{p,q}}{\mathrm{Im}\ d_r^{p+r,q-r+1}}\cong E_{r+1}^{p,q}.$$

3.2 收敛性

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，X是$\mathcal{A}$的对象，Y是X的子对象，Z是Y的子对象，则Y/Z称为X的一个子商(subquotient).

若$(E_r,d_r)_{r\geq 1}$是谱序列，那么$E_2=H(E_2,d_2)$是E_1的子商：$E_2:=Z_2/B_2$.同理我们知道E_3是E_2的子商，且
$$B_1\subseteq B_2\subseteq\cdots B_r\subseteq\cdots\subseteq Z_r\subseteq Z_2\subseteq Z_1\subseteq E_1.$$

定义. 给定谱序列$(E_r,d_r)_{r\geq 1}$，定义$Z_\infty:=\bigcap_{r\geq 1}Z_r$，$B_\infty:=\bigcup_{r\geq 1}B_r$，则谱序列的极限项(limit term)为
$$E_\infty^{p,q}:=\frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q}}.$$

借用MacLane的描述，Z^r是出现到第r页的对象，B^r是被第r页限制的对象，而Z^∞和B^∞是一直出现和最终被限制的对象.

引理3.1. 设$(E_r,d_r)_{r\geq 1}$是谱序列，那么

1. $E_{r+1}=E_r$当且仅当$Z_{r+1}=Z_r, B_{r+1}=B_r$.

2. 若存在s使得对任意$r\geq s$都有$E_{r+1}=E_r$，则$E_\infty=E_s$.

考虑$\mathcal{A}$中上链$X^\bullet$的一个滤子$F^pX^\bullet$，于是我们有单同态$i^p: F^pX^\bullet \to X^\bullet$，这诱导了$H^n(i^p): H^n(F^pX^\bullet) \to H^n(X^\bullet)$.由于$F^pX^\bullet \subseteq F^{p-1}X^\bullet$，我们有$\mathrm{Im}\ H^n(i^p) \subseteq \mathrm{Im}\ H^n(i^{p-1}) \subseteq H^n(X^\bullet)$，这意味着

$$\Phi^p H^n(X^\bullet) := \mathrm{Im}\ H^n(i^p)$$

是$H^n(X^\bullet)$的一个滤子，称为$F^pX^\bullet$的诱导滤子(derived filtration).

定义. 设$X^\bullet$是Abel范畴$\mathcal{A}$上的上链，$F^pX^\bullet$是上链的滤子.若$\forall n \in \mathbb{Z}$都能找到整数$l(n)$和$u(n)$使得$F^{u(n)}X^n = 0$且$F^{l(n)}X^n = X^n$，则称滤子$F^pX^\bullet$是有界的(bounded).

定义. 给定Abel范畴中的谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$，若存在分次对象H^n和H^n的有界滤子Φ^pH^n满足

$$E_\infty^{p,q} \cong \frac{\Phi^p H^n}{\Phi^{p+1} H^n},$$

则称谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$收敛到(converges to)H^n，记为

$$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n.$$

定理3.3. *Abel范畴$\mathcal{A}$中的上链$X^\bullet$的滤子$F^pX^\bullet$给出的谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$都满足*

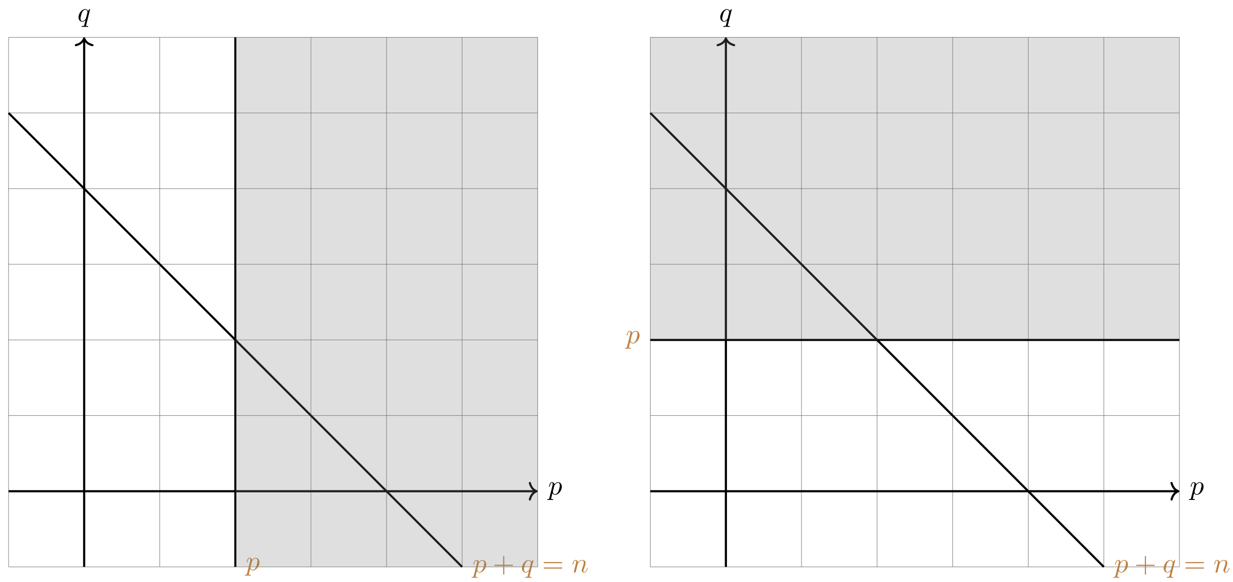
1. *对任意给定的p, q都存在r使得$E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$.*
2. *$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$.*

Proof. □

命题3.4. *设$X^{\bullet\bullet}$是三象限双复形，且设${}^IE_r^{p,q}, {}^{II}E_r^{p,q}$是$\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet})$的第一滤子和第二滤子所诱导的谱序列，那么*

1. *第一滤子和第二滤子都是有界的.*
2. *对任意p, q都存在页数$r = r(p,q)$使得${}^IE_\infty^{p,q} = {}^IE_r^{p,q}, {}^{II}E_r^{p,q} = {}^{II}E_\infty^{p,q}$.*
3. *${}^IE_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$且${}^{II}E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.*

虽然这个结果看上去很不错，但不论是符号上还是实际计算上这些都并不能够帮助我们.



(a) 第一滤子　　(b) 第二滤子

3.3 全复形的上同调

定义. 设M是双分次R模，(M, d_I, d_{II})是一个双复形，那么称

$$({}^{I}F^{p}\mathrm{Tot}(M))^{n} := \bigoplus_{i\geq p} M^{i,n-i} = \cdots \oplus M^{p+2,q-2} \oplus M^{p+1,q-1} \oplus M^{p,q}$$

为Tot(M)的第一滤子(the first filtration)，称

$$({}^{II}F^{p}\mathrm{Tot}(M))^{n} := \bigoplus_{j\geq p} M^{n-j,j} = \cdots \oplus M^{p-2,q+2} \oplus M^{p-1,q+1} \oplus M^{p,q}$$

为Tot(M)的第二滤子(the second filtration).

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，称$H_I^p(H_{II}^q(X^{\bullet\bullet}))$为$X^{\bullet\bullet}$的第一上同调(the first iterated cohomology)，称$H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet}))$为$X^{\bullet\bullet}$的第二上同调(the second iterated cohomology).

定理3.5. *给定$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，则*

1. ${}^{I}E_1^{p,q} = H_{II}^q(X^{p,\bullet})$.

2. ${}^{I}E_2^{p,q} = H_I^p(H_{II}^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.

对偶地，我们同样有

定理3.6. 给定$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，则

1. ${}^{II}E_1^{p,q} = H_I^q(X^{\bullet,p})$.

2. ${}^{II}E_2^{p,q} = H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.

例3.2. 给定R模范畴中的交换图

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & Q \\ {\scriptstyle h}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle k} \\ M & \xrightarrow{f} & N, \end{array}$$

做适当的变换我们得到一个三象限双复形$X^{\bullet\bullet}$，我们考虑N,P都是Q的子模的特殊情形，来计算该双复形的全复形

$$0 \to M \xrightarrow{()} P \oplus N \xrightarrow{g+k} Q$$

的上同调.

定义. 设$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$是Abel范畴中的谱序列，若$E_2^{p,q} = 0$对所有非零的q都成立，则称E_r落在p轴上(collapses on the p-axis).

命题3.7. 设$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$三象限谱序列，且$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$，若称$E_r$落在任意轴上，则

1. $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$对任意$p,q$成立.

2. 若E_r落在p轴上，则$H^n(X^\bullet) = E_2^{n,0}$；若$E_r$落在$q$轴上，则$H^n(X^\bullet) = E_2^{0,n}$.

定理3.8. 给定$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的三象限谱序列$(E_r, d_r)_{r\geq 1}$，且$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$，则

1. 对任意n都存在满同态$E_2^{n,0} \to E_\infty^{0,n}$和单同态$E_2^{0,n} \to E_\infty^{n,0}$.

2. 对任意n都存在满同态$E_\infty^{n,0} \to H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$和单同态$E_\infty^{0,n} \to H^n(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$.

3. 存在正合序列

$$0 \to E_2^{1,0} \to H^1(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet})) \to E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \to H^2(\mathrm{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$$

3.4 Cartan-Eilenberg预解

定义. 设$X^\bullet$是Abel范畴$\mathcal{A}$上的上链，那么称

$$0 \to Z^n \to X^n \xrightarrow{d^n} B^{n+1} \to 0$$
$$0 \to B^n \hookrightarrow Z^n \to H^n \to 0$$

为$X^\bullet$的基本短正合列(fundamental exact sequence).若上链复形$X^\bullet$的基本短正合列都分裂，则称$X^\bullet$分裂(split).

定义. 设$X^\bullet$是Abel范畴$\mathcal{A}$上的上链，如果

$$0 \to X^\bullet \to I^{0,\bullet} \to I^{1,\bullet} \to \cdots$$

是整合列且对每个p以下每个整合列都是$\mathcal{A}$中的内射预解

$$0 \to X^p \to I^{0,p} \to I^{1,p} \to \cdots$$
$$0 \to Z^p(X^\bullet) \to Z^{0,p} \to Z^{1,p} \to \cdots$$
$$0 \to B^p(X^\bullet) \to B^{0,p} \to B^{1,p} \to \cdots$$
$$0 \to H^p(X^\bullet) \to H^{0,p} \to H^{1,p} \to \cdots$$

则称这是$X^\bullet$的一个Cartan-Eilenberg内射预解(Cartan-Eilenberg injective resolution).

定理3.9. *若Abel范畴$\mathcal{A}$中包含有足够多的内射对象，则$\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中的每个上链复形都有Cartan-Eilenberg内射预解.*

3.5 Kunneth谱序列

3.6 Grothendieck谱序列

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，且含有足够多的内射对象，X是$\mathcal{A}$的对象，$F : \mathcal{A} \rightrightarrows \mathbf{Ab}$是加性函子.若$R^pF(X) = 0$对于任意$p \geq 1$都成立，则称$X$是右$F$零调的(right F-acyclic).

定理3.10 (Grothendieck谱序列)**.** 设$F:\mathcal{A}\rightrightarrows\mathcal{B},G:\mathcal{A}\rightrightarrows\mathcal{C}$是$Abel$范畴间的协变加性函子，且$\mathcal{B}$中包含足够多的内射对象，$F$将$\mathcal{A}$中的内射对象映为$\mathcal{B}$中的右$G$零调对象.那么对任意$\mathcal{A}$中的对象$X$，存在第一象限的收敛谱序列

$$E_2^{p,q}:=(R^pG\circ R^qF)(X)\Rightarrow R^{p+q}(G\circ F)(X).$$

Proof. 选取X在$\mathcal{A}$中的一个内射预解

$$0\to X\to J^1\to J^2\to\cdots,$$

于是我们得到$\mathcal{B}$中的一个 □

第四章　导出范畴

在之前非常多的情形中，当求得一个上链后，我们只关心它的上同调，对于上同调相同而各项和微分可能不同的上链并不做区别.形式上说，上链之间的同构过分严格，拟同构才是合适的进行分类的等价关系.但是在范畴

$$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$$

中，若态射$f^\bullet$是拟同构，它很难是同构，这就导致了很多问题，比如函子$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,-)$并不将拟同构映成拟同构.本章我们要建立形式化的语言，用同构的方式处理拟同构，也给导出函子建立更一般的框架.

4.1　范畴的局部化

定理4.1. 设$\mathcal{C}$是一个范畴，U是其中的一族态射，则存在同构下唯一的范畴$\mathcal{C}[U^{-1}]$和函子$Q:\mathcal{C}\to\mathcal{C}[U^{-1}]$，使得$U$中所有的态射都被$Q$映到$\mathcal{C}[U^{-1}]$中的同构，且满足如下泛性质：对任意范畴$\mathcal{D}$和任意函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，若$F$将$U$中所有的态射映到$\mathcal{D}$中的同构，则有唯一的分解

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{C}[U^{-1}] \arrow[d, dashed, "\tilde{F}"] \\ & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

我们称范畴$\mathcal{C}[U^{-1}]$为的$\mathcal{C}$局部化(localization).

练习4.1. 定义范畴$\mathcal{D}$满足$\mathrm{ob}\,\mathcal{D}=\mathrm{ob}\,\mathbf{Ab}$，$\hom_{\mathcal{D}}(A,B):=\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A\otimes\mathbb{Q},B\otimes\mathbb{Q})$.求证函子

$$\begin{aligned} \iota:\mathbf{Ab}&\to\mathcal{D}\\ M&\mapsto M\\ (f:M\to N)&\mapsto(f\otimes\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}:M\otimes\mathbb{Q},N\otimes\mathbb{Q}) \end{aligned}$$

是局部化.

这里需要注意，因为范畴中的一族态射U可以取得非常不理想，因此局部化之后的范畴可能并非再是局部小的.但这里我们忽略这样的问题，我们假定（虽然并不真实，但相较于主要问题，范畴本身的问题需要在其他的地方讨论）我们还是得到想要的范畴.

定义. 设U是范畴$\mathcal{C}$中的一族态射，满足如下条件：

1. 对任意$\mathcal{C}$中的对象A，$\mathrm{id}_A \in U$，且U关于态射的复合封闭，
2. (扩张条件)对任意$\mathcal{C}$中的态射$f : A \to B$和U中的态射$u : C \to B$，存在$\mathcal{C}$中的态射$g : D \to C$和U中的态射$v : D \to A$使得
$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "v"'] & C \arrow[d, "u"] \\ A \arrow[r, "f"] & B. \end{tikzcd}$$
对偶地，对任意$\mathcal{C}$中的态射$f : B \to A$和U中的态射$u : B \to C$，存在$\mathcal{C}$中的态射$g : C \to D$和U中的态射$v : A \to D$使得
$$\begin{tikzcd} D & C \arrow[l, "g"'] \\ A \arrow[u, "v"] & B, \arrow[l, "f"] \arrow[u, "u"'] \end{tikzcd}$$
3. 对任意$\mathcal{C}$中的态射$f, g : A \rightrightarrows B$，存在$u \in U$使得$uf = ug$当且仅当存在$v \in U$使得$fv = gv$，

则称这一族态射U是局部的(localizing).

练习4.2. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，$\mathcal{B}$是$\mathcal{A}$的满子范畴，且$\mathcal{B}$对求子对象和商对象封闭.求证
$$U := \{f : X \to Y \mid \ker f, \operatorname{coker} f \in \mathcal{B}\}$$
是局部态射族.

我们大费周章地考虑对求逆态射的限制条件，重要的是当态射族U满足这些条件时，局部化范畴中的态射时非常容易描述的：

引理4.1. 设U是范畴$\mathcal{C}$中的一族局部态射，那么$\mathcal{C}[U^{-1}]$可以被如下地描述：$\mathcal{C}[U^{-1}]$的对象同于$\mathcal{C}$中的对象，$A \to B$的态射可以被描述为如下的图的等价类：
$$\begin{tikzcd} & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A & & B, \end{tikzcd}$$
其中，$u \in U$，$f : D \to B$是任意$\mathcal{C}$中的态射，记为$\frac{f}{u}$或者fu^{-1}.且$\frac{f}{u}$等价于$\frac{g}{v}$当且仅当存在$\frac{h}{w}$使得如下图交换
$$\begin{tikzcd} & & F \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\ & D \arrow[dl, "u"'] \arrow[drrr, "f"' near start] & & E \arrow[dlll, "v" near start] \arrow[dr, "g"] & \\ A & & & & B, \end{tikzcd}$$

其中图中$u, v, uw \in U$（但w可能不在U中），恒等态射是$\mathrm{id}_A = \frac{\mathrm{id}_A}{\mathrm{id}_A}$.最后，根据定义中的扩张条件，$\frac{f}{u} : A \to B$与$\frac{g}{v} : B \to C$的复合是

$$\begin{tikzcd}
& & F \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
& D \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "f"] & & E \arrow[dl, "v"'] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & B & & C
\end{tikzcd}
\quad \Longrightarrow \quad
\begin{tikzcd}
& F \arrow[dl, "uw"'] \arrow[dr, "gh"] & \\
A & & C.
\end{tikzcd}$$

Proof. 我们首先验证如上定义了一个等价关系.自反性是考虑下图

$$\begin{tikzcd}
& & D \arrow[dl, "\mathrm{id}_D"'] \arrow[dr, "\mathrm{id}_D"] & & \\
& D \arrow[dl, "u"'] \arrow[drrr, "f" near end] & & D \arrow[dlll, "u"' near end] \arrow[dr, "f"] & \\
A & & & & B,
\end{tikzcd}$$

对称性是已知

$$\begin{tikzcd}
& & F \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
& D \arrow[dl, "u"'] \arrow[drrr, "f" near end] & & E \arrow[dlll, "v"' near end] \arrow[dr, "g"] & \\
A & & & & B,
\end{tikzcd}$$

其中按定义$vh = uw \in U$，于是

$$\begin{tikzcd}
& & F \arrow[dl, "h"'] \arrow[dr, "w"] & & \\
& E \arrow[dl, "v"'] \arrow[drrr, "g" near end] & & D \arrow[dlll, "u"' near end] \arrow[dr, "f"] & \\
A & & & & B,
\end{tikzcd}$$

给出了等价关系.接下来是传递性，给定$X \to Y$的等价代表元

$$\begin{tikzcd}
& & M \arrow[dl, "w"'] \arrow[dr, "h"] & & \\
& A_1 \arrow[dl, "u"'] \arrow[drrr, "f" near end] & & A_2 \arrow[dlll, "v"' near end] \arrow[dr, "g"] & \\
X & & & & Y
\end{tikzcd}$$

和$Y \to Z$的等价代表元

$$\begin{tikzcd}
& & N \arrow[dl, green, "w"'] \arrow[dr, green, "h"] & & \\
& B_1 \arrow[dl, red, "u"'] \arrow[drrr, "f"] & & B_2 \arrow[dlll, red, "v"'] \arrow[dr, "g"] & \\
Y & & & & Z,
\end{tikzcd}$$

为方便读图，红色表示U中的态射，绿色表示复合特定U中的态射后是U中的态射（例如w本身不是U中的态射但uw是U中的态射），于是根据扩张条件可以找到C_1, C_2使得交换图

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r] \arrow[d, red, "w_1"] & B_1 \arrow[d, red, "v_1"] \\
A_1 \arrow[r, "f_1"] & Y
\end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd}
C_2 \arrow[r] \arrow[d, red, "w_2"] & B_2 \arrow[d, red, "v_2"] \\
A_2 \arrow[r, "f_2"] & Y
\end{tikzcd}$$

成立，这是在不同代表元下的复合.我们希望找到对象P给出交换图

$$\begin{tikzcd}
& & & & P \arrow[dl, green] \arrow[dr, green] & & & & \\
& & & C_1 \arrow[ddll, red, bend right, "w_1"'] \arrow[ddrr] & & C_2 \arrow[ddll, red, "w_2"'] \arrow[ddrr, bend left] & & & \\
& & M \arrow[dl, green, "p"'] \arrow[dr, green, "h"] & & & & N \arrow[dl, green, "q"'] \arrow[dr, green, "k"] & & \\
& A_1 \arrow[dl, red, "u_1"'] \arrow[drrr, "f_1"] & & A_2 \arrow[dlll, red, "u_2"'] \arrow[dr, "f_2"] & & B_1 \arrow[dl, red, "v_1"'] \arrow[drrr, "g_1"] & & B_2 \arrow[dlll, red, "v_2"'] \arrow[dr, "g_2"] & \\
X & & & & Y & & & & Z,
\end{tikzcd}$$

进而说明复合$[X \leftarrow C_1 \rightarrow Z]$与$[X \leftarrow C_2 \rightarrow Z]$是等价的.再次根据扩张条件可以找到

$$\begin{tikzcd}
Q_1 \arrow[r] \arrow[d, red] & C_1 \arrow[d, red, "u_1w_1"] \\
M \arrow[r, "u_1p"] & X
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
Q_2 \arrow[r] \arrow[d, red] & Q_1 \arrow[d, red, "u_1w_1"] \\
N \arrow[r, "u_1p"] & Y
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d, red] & C_2 \arrow[d, red, "w_2"] \\
Q_2 \arrow[r, "u_1p"] & A_2
\end{tikzcd}$$

接下来我们要验证态射的复合不依赖于代表元的选取.

最后我们验证这样构造的范畴具有相应的泛性质，因而这个范畴是我们希望的局部化.首先，存在自然的局部化函子

$$\begin{aligned} Q:\mathcal{C} &\to \mathcal{C}[U^{-1}] \\ A &\mapsto A \\ (f:A\to B) &\mapsto \frac{f}{\mathrm{id}_A}, \end{aligned}$$

这样对于任意的$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，若$F$将$U$中所有的态射映到$\mathcal{D}$中的同构，可以定义

$$\begin{aligned} \bar{F}:\mathcal{C}[U^{-1}] &\to \mathcal{D} \\ A &\mapsto F(A) \\ \frac{f}{u} &\mapsto F(f)F(u)^{-1}, \end{aligned}$$

（这里的顺序是重要的：） □

练习4.3. 验证证明中给出的Q是函子.

定理4.2. 设U是加性范畴$\mathcal{C}$中的一族局部态射，那么$\mathcal{C}[U^{-1}]$也是加性范畴.

但是，我们希望研究的情形非常不幸地不满足这些局部的条件：对于Abel范畴$\mathcal{A}$的上链复形范畴$\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$，拟同构不是局部的（习题???）.下一节我们将用合适的方式处理这个问题，使得我们这节建立的理论起到作用.结束之前，我们引入如下命题，在之后考虑有界复形时它会给我们理想的结果.

命题4.3. 设U是范畴$\mathcal{C}$中的一族局部态射，$\mathcal{D}$是$\mathcal{C}$的满子范畴，如果$U_{\mathcal{D}}:=U\cap\mathrm{mor}\,\mathcal{D}$是$\mathcal{D}$的局部态射，且如下的条件满足一条

1. 对任意U中的态射$u:C\to D$，若$D\in\mathrm{ob}\,\mathcal{D}$，则一定存在$B\in\mathrm{ob}\,\mathcal{D}$和态射$f:B\to C$使得$u\circ f\in U$，

2.

那么$\mathcal{D}[U_{\mathcal{D}}^{-1}]\hookrightarrow\mathcal{C}[U^{-1}]$是一个满忠实的嵌入.

4.2 同伦范畴与导出范畴

引理4.2. 设$\mathcal{A}$是*Abel*范畴，$D(\mathcal{A}):=\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})[Qiso^{-1}]$，且设$Q:\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})\to D(\mathcal{A})$是局部化函子.求证若$f:X^\bullet\to X^\bullet$链同伦与$\mathrm{id}_X$，那么在$D(\mathcal{A})$中$Q(f)=\mathrm{id}_X$.

Proof. 我们先假定如下事实： □

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$，定义$\mathcal{A}$的同伦范畴(homotopy category)$K(\mathcal{A})$如下：

1. $\mathrm{ob}\, K(\mathcal{A}) = \mathrm{ob}\, \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$，
2. 对任意$X^\bullet, Y^\bullet \in \mathrm{ob}\, \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})$，$\mathrm{hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet) := \mathrm{hom}_{\mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)/\simeq$.

定理4.4. 对*Abel*范畴$\mathcal{A}$，$* = +, -, b, \bullet$，那么

1. $f \in \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$是同构当且仅当它可以被图

$$\begin{tikzcd} & Z^\bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X^\bullet & & Y^\bullet \end{tikzcd}$$

   表示，且图中的两个态射都是拟同构.

2. $f \in \mathrm{Hom}_{K^*(\mathcal{A})}(X^\bullet, Y^\bullet)$且$Q(f) = 0$，那么$f^n : H^n(X^\bullet) \to H^n(Y^\bullet) = 0$对任意$n \in \mathbb{Z}$成立.
3. 嵌入函子$[0] : \mathcal{A} \to D^*(\mathcal{A})$是满忠实的，即存在集合的同构

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{D^*(\mathcal{A})}(X[0], Y[0]).$$

命题4.5. 若$X^\bullet$是*Abel*范畴$\mathcal{A}$上的零调复形，$I^\bullet$是内射复形，那么

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet) = 0.$$

命题4.6. 若$X^\bullet \to Y^\bullet$是拟同构，$I^\bullet$是内射复形，那么

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(Y^\bullet, I^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$$

是同构.

推论4.6.1.

$$\mathrm{Hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet) \to \mathrm{Hom}_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$$

是同构.

定义.

$$\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{A}}(X,Y) :=$$

定理4.7.

4.3 三角范畴

定义. 给定加性范畴$\mathcal{D}$，如果在$\mathcal{D}$上存在如下信息

1. 加性自同构$T:\mathcal{D}\to\mathcal{D}$，它被称为平移函子(translation functor)，通常对于对象$X\in\mathcal{D}$，记$X[1]:=T(X)$，
2. 一族被称为特异三角(distingushed triangle)的图

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

和特异三角间的态射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k"] & C \arrow[r, "l"] & A[1], \end{tikzcd}$$

满足以下公理：

TR 1. (a) $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} X[1]$是特异三角；

(b) 任意同构于特异三角的图都是特异三角（特异三角在同构下封闭）；

(c) 任意态射$X \xrightarrow{u} Y$都可以扩张为一个特异三角$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$.

TR 2. 若$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$是特异三角，那么$Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$也是特异三角.

TR 3. 给定两个特异三角$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$和$A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} C \xrightarrow{l} X[1]$，若存在$f:X\to A$和$g:Y\to B$使得$g\circ u = j\circ f$，那么存在（不要求唯一）的态射$h:Z\to C$构成特异三角间的态射

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, dashed, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\ A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k"] & C \arrow[r, "l"] & A[1]. \end{tikzcd}$$

TR 4.

$$
\begin{tikzcd}
 & & Z \arrow[dr] & \\
 & A \arrow[ur] \arrow[dl] \arrow[dd] & & Y \arrow[ll] \arrow[dl, dashed] \\
B \arrow[uurr] \arrow[dr] & & X \arrow[ll, dashed] \arrow[uu, dashed] & \\
 & C \arrow[ur, dashed] \arrow[uurr] & &
\end{tikzcd}
$$

则称$\mathcal{D}$是一个三角范畴(triangulated category).若只有前三条公理成立，则称$\mathcal{D}$是预三角范畴(pre-triangulated categories).

练习4.4. 若$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$是$\mathcal{D}$中的特异三角，求证$v \circ u, w \circ v, (-u[1]) \circ w$都是零态射.

练习4.5. 若

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & X[1] \arrow[d, "f[1]"] \\
A \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "k"] & C \arrow[r, "l"] & A[1],
\end{tikzcd}
$$

是特异三角间的态射，且f, g都是同构，求证h也是同构.

定义. 给定（预）三角范畴$\mathcal{D}, \mathcal{E}$，若函子$F : \mathcal{D} \to \mathcal{E}$和自然态射$\eta : F(-[1]) \Rightarrow F(-)[1]$满足对任意$\mathcal{D}$中的特异三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1],$$

都能得到$\mathcal{E}$中的特异三角

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\eta_X \circ F(w)} F(X)[1],$$

则称函子F是正合的(exact)或三角的(triangulated).

定义. 给定（预）三角范畴$\mathcal{D}$和Abel范畴$\mathcal{A}$，若加性协变函子H将特异三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

映为$\mathcal{A}$中的正合序列

$$H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H(v)} H(Z) \xrightarrow{H(w)} H(X[1]),$$

则称函子H是上同调的(cohomological).若加性反变函子$H : \mathcal{D}^\circ \to \mathcal{A}$对应的函子$H^\circ : \mathcal{D} \to \mathcal{A}^\circ$是上同调的，则称$H$是反变同调的.

通常对于上同调函子，记$H^n(X) := H(X[n])$，于是$H^0(X) := H(X)$.于是，TR2说明给定一个特异三角就可以得到一个$\mathcal{A}$中的长正合序列.

定义. 给定三角范畴$\mathcal{D}$和Abel范畴$\mathcal{A}$，若函子$G : \mathcal{A} \to \mathcal{D}$满足对任意$\mathcal{A}$中的短正合序列

$$0 \to X \to Y \to Z \to 0$$

都存在自然的同构$\delta_{X\to Y\to Z}$使得

$$X \to Y \to Z \xrightarrow{\delta_{X\to Y\to Z}} X[1]$$

是$\mathcal{D}$中的特异三角，则称G是δ函子(δ-functor).自然性意味着短正合序列的态射

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

给出特异三角的态射

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{\delta_{X\to Y\to Z}} & X[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\delta_{A\to B\to C}} & A[1]. \end{array}$$

4.3.1　同伦范畴

4.3.2　导出范畴

命题4.8. 对$Abel$范畴$\mathcal{A}$，$\mathrm{Com}^*(\mathcal{A})$中的短正合列

$$0 \to X^\bullet \to Y^\bullet \to Z^\bullet \to 0$$

诱导了$D^*(\mathcal{A})$中的特异三角.

4.3.3　生成元

定义. 给定三角范畴$\mathcal{D}$和对象E，若$\mathcal{D}$中包含E的最小的saturated满三角子范畴是$\mathcal{D}$，或者换句话说$\langle E\rangle = \mathcal{D}$，则称$E$是典型生成元(classical generator).

定义. 给定三角范畴$\mathcal{D}$和对象E，

1. 若存在正整数n使得$\langle E\rangle_n = \mathcal{D}$，则称$E$是强生成元(strong generator).

2. 若$\mathrm{Hom}(E, X[n]) = 0$对任意整数$n$都成立意味着$X \cong 0$，则称$E$是弱生成元(weak generator).

4.4 导出函子

给定Abel范畴间的函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，它自然诱导了函子$\mathrm{Com}^\bullet(F) : \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{A}) \to \mathrm{Com}^\bullet(\mathcal{B})$和$K(F) : K(\mathcal{A}) \to K(\mathcal{B})$.由于$F$与平移函子交换，诱导的函子保持范畴上面的三角结构.自然地我们会希望F诱导了导出范畴上的正合函子.在函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$本身是正合函子时，这是没问题的（命题**??**），但一般情形$K(F)$不将拟同构映为拟同构.不过退一步，当F是左正合或右正合时，在适当的情形我们可以找到相应的构造使得有对应诱导的函子.

在先前的章节中我们讨论过这个论题，这里我们用导出范畴的角度来定义导出函子，具体来说，给定一个Abel范畴的左（对应的，右）正合函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，在一定的情况下存在一个扩张函子$RF : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{B})$（对应的，$LF : D^-(\mathcal{A}) \to D^-(\mathcal{B})$），称为$F$的右导出函子(right derived functor).

命题4.9. *设Abel范畴间的函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$是正合的，那么*

1. *$K^*(F)$将拟同构映到拟同构，因此它诱导了函子$D^*(F) : D^*(\mathcal{A}) \to D^*(\mathcal{B})$，*
2. *$D^*(F)$是正合函子，即它将特异三角映到特异三角.*

定义. 设$\mathcal{A}$是Abel范畴，$\mathcal{R} \subseteq \mathrm{Ob}\,\mathcal{A}$是一族对象，对给定的左（右）正合函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$满足

1. F将$K^+(\mathcal{R})$（$K^-(\mathcal{R})$）中的零调序列映到零调序列，
2. $\mathcal{A}$中的任意对象都是$\mathcal{R}$中对象的子对象（商对象），

则称$\mathcal{R}$是适应于F的对象族(adapted to F).

例4.1. 给定R模M，对函子$M \otimes_R -$，所有的平坦R模就是适应于该函子的一族对象.

定理4.10. *设$\mathcal{R}$是Abel范畴$\mathcal{A}$中适应于左正合函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$的对象，令$U_\mathcal{R}$为$K^+(\mathcal{R})$中的拟同构，那么$U_\mathcal{R}$在$K^+(\mathcal{R})$中是局部的，且自然的函子*

$$K^+(\mathcal{R})[U_\mathcal{R}^{-1}] \to D^+(\mathcal{A})$$

是范畴的等价.

给定一个左正合函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，我们回顾一下经典意义下导出函子的构造，以$\mathrm{Hom}_\mathbb{Z}(M, -)$为例：这是一个左正合函子，为了求得它的右导出函子$\mathrm{Ext}^n_\mathbb{Z}(M, -)$，首先取给定的Abel群$N$的内射消解$I^\bullet$

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & N \arrow[r] \arrow[d, "\eta"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & I^0 \arrow[r, "d^0"] & I^1 \arrow[r, "d^1"] & I^2 \arrow[r, "d^2"] & \cdots,
\end{tikzcd}$$

再用$I^\bullet$代替$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,-)$中原本的$N$，得到上链

$$\cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, I^0) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, I^1) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, I^2) \longrightarrow \cdots,$$

它在$D^+(\mathbf{Ab})$中的像即是导出函子的像.这相当于选取一个范畴的同构（后面会说明如同经典情况的构造，不依赖于这个同构的选取）

$$P : D^+(\mathcal{A}) \to K^+(\mathcal{R})[U_{\mathcal{R}}^{-1}],$$

然后

$$R\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M,-) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, P(-))$$

就是要找的导出函子.

定义. 对于左正合函子$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，存在如下的图

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^+(F)"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{B}}"] & D^+(\mathcal{B}) \\
& D^+(\mathcal{A}) &
\end{tikzcd}$$

若有函子$RF : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{A})$和自然态射$\eta : Q_{\mathcal{B}} \circ K^+(F) \Rightarrow RF \circ Q_{\mathcal{A}}$

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^+(F)"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\eta"] & D^+(\mathcal{B}) \\
& D^+(\mathcal{A}) \arrow[ur, "RF"'] &
\end{tikzcd}$$

使得任意函子$G : D^+(\mathcal{A}) \to D^+(\mathcal{A})$和自然态射$\xi : Q_{\mathcal{B}} \circ K^+(F) \Rightarrow RF \circ Q_{\mathcal{A}}$

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^+(F)"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{B}}"] \arrow[d, phantom, "\Downarrow\xi"] & D^+(\mathcal{B}) \\
& D^+(\mathcal{A}) \arrow[ur, "G"'] &
\end{tikzcd}$$

都存在唯一的自然变换δ :

$$\begin{tikzcd}
K^+(\mathcal{A}) \arrow[r, "K^+(F)"] \arrow[dr, "Q_{\mathcal{A}}"'] & K^+(\mathcal{B}) \arrow[r, "Q_{\mathcal{B}}"] & D^+(\mathcal{B}) \\
& D^+(\mathcal{A}), \arrow[ur, bend left, "RF"] \arrow[ur, bend right, "G"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta"] &
\end{tikzcd}$$

则称RF是F的右导出函子(right derived functor).

以上定义的交换图说明，一个左正合函子的右导出函子是对应图的左Kan扩张.根据Kan扩张的唯一性，导出函子若存在则一定唯一，这个事实对下面定理的证明非常关键.

定理4.11. *假设左正合函子$F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$有适应于$F$的对象族$\mathcal{R}$，那么$RF$存在且同构下唯一.*

4.5　例子

给定环R和$M\in\mathbf{Mod}-R$，函子

$$M\otimes_R - : R-\mathbf{Mod}\to\mathbf{Ab}$$

是右正合的，

第五章 层及其上同调

5.1 层的基本理论

在几何中，我们经常遇到从局部性质到整体性质的过渡，例如我们在讲光滑函数时对光滑性的定义是局部的，但光滑性可以是整体的性质；任意一个流形都是局部可定向的，但一个流形并不一定是整体可定向的.在从局部到整体的过渡中，我们通常使用的方法是局部坐标，当局部坐标满足一定性质时我们可以找到更大的坐标，这个更大的坐标限制到小的坐标上与原来小的坐标有相同的性质.如果将这样的过程抽象出来就是层的构造.

5.1.1 预层与层的基本性质

定义. 设X是一个拓扑空间.对X的每个开集U，我们赋予其一个Abel群$\mathscr{F}(U)$，并且对任意满足$V \subseteq U$的开集U, V，存在映射$\rho_V^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$，满足如下条件：

(i) $\mathscr{F}(\emptyset) = 0$；

(ii) $\rho_U^U = \mathrm{id}_{\mathscr{F}(U)}$；

(iii) 对所有满足$W \subseteq V \subseteq U$的开集$U, V, W$，$\rho_W^V \circ \rho_V^U = \rho_W^U$；

这样的在拓扑空间X上的结构$\mathscr{F}$我们称为**预层**(presheaf)，$\mathscr{F}(U)$中的元素称为开集U的**截面**(section)，映射$\rho_V^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$称为**限制映射**(restriction map).

例5.1. 设X是一个复流形，$\mathscr{M}$是如下定义的**亚纯函数层**(sheaf of meromorphic functions)

$$\mathscr{M}(U) := \{f : U \to \mathbb{C} \mid f\text{是亚纯的}\},$$

且对于任意$f \in \mathscr{M}(U)$和开集$V \subseteq U$，定义$\rho_V^U(f)$是f在V上的限制，则$\mathscr{M}$是X上的预层.

在上面的例子中，预层$\mathscr{M}$的限制同态确实是函数的限制——但通常而言，限制同态可以是任意的映射.对于元素$s \in \mathscr{F}(U)$，我们也用通常的限制记号：$s|_V := \rho_V^U(s)$，然而这一般与真正函数的限制很不同.

注意到任意的拓扑空间X可以自然地成为一个范畴$\mathbf{Open}(X)$，这样每个预层都是一个反变函子$\mathbf{Open}(X) \to \mathbf{Ab}$，可以想到的是，我们并不需要将函子的值域限定为$\mathbf{Ab}$，其他任意合理的范畴都可以得到有用的预层.当值域范畴为$\mathbf{Ab}$、$\mathbf{Ring}$、$R-\mathbf{Mod}$时，我们分别称$\mathscr{F}$为X上的Abel群预层、环预层和R模预层.

这种对于预层的理解还有其他的好处——我们可以非常容易地定义预层之间的**态射**(morphism)——一个预层的态射就是函子间的自然变换.如果我们显式地将预层态射$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$的定义写出来，即是对任意$X$中的开集$V \subseteq U$，我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "\theta_V^U"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\varphi_V"] & \mathscr{G}(V), \end{tikzcd}$$

其中ρ_V^U, θ_V^U分别是预层$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$的限制映射.这样对于拓扑空间X，我们得到了一个范畴$\mathbf{PShAb}(X)$，其对象是X上的Abel群预层，态射是预层的态射.

例5.2. 设X是任意的拓扑空间，M是任意的Abel群，对开集U定义$M_X(U) = M$对于满足$V \subseteq U$的开集，限制映射都是恒等映射，则M_X是一个预层，称为常预层(constant sheaf).如果N也是一个Abel群，$\varphi : M \to N$是群同态，则我们自然地有预层的映射

$$\varphi_X : M_X \to N_X,$$

定义为

$$(\varphi_X)_U := \varphi : M_X(U) \to N_X(U).$$

例5.3.

例5.4.

预层的结构中蕴含了空间上“函数”的很多局部信息，对于一个预层我们有专门的结构刻画这样的信息：

定义. 设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的预层，那么称

$$\mathscr{F}_x := \varinjlim_{x \in U} \mathscr{F}(U)$$

为$\mathscr{F}$在点x处的**茎**(stalk)，其中U取遍所有包含点x的开集，正向系中的态射由限制态射给定.

根据正极限的定义，对于任意包含x的开集U，存在自然的态射$\rho_x^U : \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}_x$使得与正向系相容，即对于满足$V \subseteq U$的开集，

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[d, "\rho_V^U"'] \arrow[dr, "\rho_x^U"] & \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\rho_x^V"'] & \mathscr{F}_x. \end{tikzcd}$$

为简化记号，通常对于截面$s \in \mathscr{F}(U)$，我们记$s_x := \rho_x^U(s)$.同样地，余极限的函子性告诉我们，对于任意X中的点x，若$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层间的态射，那么有诱导的点$x$处茎的态射

$$\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$$

使得对任意开集U有如下交换图

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}(U) \arrow[r, "\varphi_U"] \arrow[d, "(\rho_{\mathscr{F}})^U_x"'] & \mathscr{G}(U) \arrow[d, "(\rho_{\mathscr{G}})^U_x"] \\ \mathscr{F}_x \arrow[r, "\varphi_x"] & \mathscr{G}_x, \end{tikzcd}$$

因此，我们有$\varphi_x(s_x) = \varphi_U(s)_x$.

练习5.1. 证明我们有如下的显式构造：

$$\mathscr{F}_x \cong \left(\prod_{x\in U} \mathscr{F}(U)\right) / \sim,$$

其中，若$s \in \mathscr{F}(U), t \in \mathscr{F}(V)$的等价关系$s \sim t$定义为存在包含于$U \cap V$的$x$的邻域$W$使得$s|_W = t|_W$.

练习5.2. 设U是X中包含点x的开集，求证

$$\mathscr{F}_x \cong (\mathscr{F}|_U)_x.$$

Proof. 我们证明$\mathscr{F}_x$满足$(\mathscr{F}|_U)_x$的泛性质，那么根据唯一性二者必然同构.

一方面，U中任意包含x的开集W满足

$$\mathscr{F}|_U(W) = \mathscr{F}(W),$$

这自然地继承了与限制态射相容的态射$\mathscr{F}|_U(W) \to \mathscr{F}_x$.另一方面，对任意开集$V \subseteq X$，给定与$\mathbf{Open}(U)$相容的对象$\{A, \{\lambda_W : \mathscr{F}(W) \to A\}_{\{W\subseteq U\}}\}$，限制态射$\mathscr{F}(V) \to \mathscr{F}(V \cap U)$使得它成为与$\mathbf{Open}(X)$相容的对象，因此根据泛性质存在唯一的态射$\mathscr{F}_x \to A$与$\mathbf{Open}(X)$中的限制态射相容，因而与与$\mathbf{Open}(U)$相容，这恰是$(\mathscr{F}|_U)_x$的泛性质. □

例5.5. 设M是给定的Abel群，$x \in X$是拓扑空间中的一个点，定义预层$M(x)$满足

$$M(x)(U) := \begin{cases} M & x \in U \\ 0 & x \notin U, \end{cases}$$

限制态射要么是恒等映射要么是零映射.如果我们计算$M(x)$在点y的茎，

但是，预层并不是我们所希望的定义在拓扑空间上的代数结构.多数情况下我们希望的是从局部的信息中可以得到足够的整体信息，并且整体能够得到的信息一定程度上完全由局部信息得到，于是我们有下面的定义：

定义. 设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的预层，如果$\mathscr{F}$满足如下条件：

(i) （局部性(locality)）若$\{U_i\}_{i\in I}$是开集U的一族开覆盖，$s, t \in \mathscr{F}(U)$满足对于任意$i \in I$都有$s|_{U_i} = t_{U_i}$成立，则$s = t \in \mathscr{F}(U)$；

(ii) （粘合条件(gluing)）若$\{U_i\}_{i\in I}$是开集U的一族开覆盖，一族元素$s_i \in \mathscr{F}(U_i)$满足$s_i|_{U_i\cap U_j} = s_j|_{U_i\cap U_j}$，那么存在$s \in \mathscr{F}(U)$使得$s|_{U_i} = s_i$成立；

则称$\mathscr{F}$为X上的**层**(sheaf).

定义的合理性告诉我们并不是所有的预层都是层，对于某些拓扑空间X，常预层就不是层.但是，某些定义的预层本身就是层，如下例.最重要的是层的行为形态非常类似于全体可定义的函数，因此函数的全体必然是层.

例5.6. 例??中的构造是一个层，更一般地，如果X是拓扑空间，$\mathscr{F}$是定义在X上满足某些性质（诸如连续、全纯、光滑等等）的函数预层，且限制映射就是函数的限制，那么这个预层是层.

例5.7. 若$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的预层，U是开集，那么我们可以定义$\mathscr{F}$在U上的限制，记为$\mathscr{F}|_U$，它是U上的层，对任意U中的开集V，定义

$$\mathscr{F}|_U(V) = \mathscr{F}(U\cap V) = \mathscr{F}(V),$$

且对应$W\subseteq V$的限制同态$\mathscr{F}|_U(V)\to\mathscr{F}|_U(W)$定义为限制同态$\mathscr{F}(V)\to\mathscr{F}(W)$.明显的事实是，$\mathscr{F}|_U(V)\to\mathscr{F}|_U(W)$是预层，并且如果$\mathscr{F}$是层则$\mathscr{F}|_U(V)\to\mathscr{F}|_U(W)$也是层.

更抽象一些地，我们可以用范畴的语言描述层公理：若$\{U_i\}_{i\in I}$是开集U的一族开覆盖，那么层公理等价于下图

$$\mathscr{F}(U)\xrightarrow{p}\prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i)\rightrightarrows\prod_{i,j\in I}\mathscr{F}(U_i\cap U_j),$$

是一个等值子（equalizer），其中第一个态射由$\rho^U_{U_i}=\mathscr{F}(U_i\hookrightarrow U)$诱导，$f,g:\prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i)\rightrightarrows\prod_{i,j\in I}\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$分别由$\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}\circ\pi_i:\prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i)\to\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$和$\rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}\circ\pi_j:\prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_j)\to\mathscr{F}(U_i\cap U_j)$诱导.

练习5.3. 证明上述等价性.

Proof. 根据范畴中乘积对象的泛性质，p,f,g的映射完全由$\pi_i\circ p,\pi_{i,j}\circ f,\pi_{i,j}\circ g$决定.

假设$\mathscr{F}$是层，且我们能找到集合间的映射$q:A\to\prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i)$使得$f\circ q=g\circ q$，于是对任意$A$中的元素$a$，$\pi_{i,j}\circ f\circ q(a)=\pi_{i,j}\circ g\circ q(a)$，这意味着对于$U_i$，我们能找到$\mathscr{F}(U_i)$中的元素$\pi_i\circ q(a)$使得

$$\rho^{U_i}_{U_i\cap U_j}(\pi_i\circ q(a))=\pi_{i,j}\circ f\circ q(a)=\pi_{i,j}\circ g\circ q(a)=\rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}(\pi_i\circ q(a)),$$

故由层的定义，存在唯一的元素$\tilde{q}(a)\in\mathscr{F}(U)$使得

$$\rho^U_{U_i}(\tilde{q}(a))=\pi_i\circ q(a),$$

即存在唯一的集合间的映射$\tilde{q}:A\to\mathscr{F}(U)$满足$q=p\circ\tilde{q}$，故$\mathscr{F}(U)$是等值子.

反过来，设$\mathscr{F}(U)$是f,g的等值子，若在每个$i\in I$，$\mathscr{F}(U_i)$中都有元素s_i满足$s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}$，根据乘积结构的泛性质，这意味着在$\prod_{i\in I}\mathscr{F}(U_i)$中存在元素$\{s_i\}_{i\in I}$满足

$$\pi_{i,j}\circ f(\{s_i\}_{i\in I})=s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}=\pi_{i,j}\circ g(\{s_i\}_{i\in I}),$$

故$f(\{s_i\}_{i\in I})=g(\{s_i\}_{i\in I})$.根据集合范畴中等值子的构造，存在唯一的$s\in\mathscr{F}(U)$使得$p(s)=\{s_i\}_{i\in I}$，因此

$$s|_{U_i}=\pi_i\circ p(s)=s_i,$$

$\mathscr{F}$是层. □

层之间的态射与预层之间态射的定义相同，即对于层$\mathscr{F},\mathscr{G}$，$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是层态射当且仅当$\varphi$是预层的态射.这意味着我们可以定义范畴$\mathbf{ShAb}(X)$，且它是$\mathbf{PShAb}(X)$的满子范畴.在之后的内容我们会看到，当我们选取的范畴$\mathcal{A}$是Abel范畴时，$\mathbf{PSh}\mathcal{A}(X)$也是一个Abel范畴.

局部性可以用茎的语言来描述：

命题5.1. 设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是拓扑空间$X$上层的态射，那么$\varphi$是同构当且仅当对于任意$x \in X$，诱导的$\varphi_x : \mathscr{F}_x \to \mathscr{G}_x$都是同构.

对层这种构造的一种理解方式是说，它是弯曲空间上满足一定性质的“函数”的全体，不同性质的选取决定了层结构的不同.

练习5.4. 设$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$是X上的两个预层，验证$U \mapsto \hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$有自然的预层结构，且若$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$还是$X$上的层，则预层$U \mapsto \hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathscr{F}|_U, \mathscr{G}|_U)$是层，记为$\mathscr{H}\mathrm{om}(\mathscr{F}, \mathscr{G})$，称作$\mathscr{F}$到$\mathscr{G}$的局部态射层(sheaf of local morphisms of $\mathscr{F}$ into $\mathscr{G}$).

练习5.5. 设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的一个预层，则下面的构造给出一个拓扑空间，其中底集$\bar{\mathscr{F}} = \coprod_{x \in X} \mathscr{F}_x = \{(x, s_x) \mid x \in X, s_x \in \mathscr{F}_x\}$是所有茎的不交并，并对任意给定$X$中的开集$U$和$s \in \mathscr{F}(U)$给定如下一组拓扑基

$$(U, s) := \{(x, s_x) \mid x \in U\}.$$

求证：

(i) 存在自然的连续映射$\pi : \bar{\mathscr{F}} \to X$，将点$(x, s_x)$映到$x$.并且，对任意的开集$U$和$s \in \mathscr{F}(U)$，存在$\pi$在$U$上的截面(section)$\sigma : U \to \bar{\mathscr{F}}$（截面是指连续函数$\sigma$使得$\pi \circ \sigma$是$U$上的恒等函数）.记对应$\mathscr{F}$的$U$上所有截面为$\Gamma(U, \mathscr{F})$.

(ii) 反之，若$\mathscr{F}$还是层，求证任意U上的截面σ都是如上述方式构造的.

(iii) 由上证明若$\mathscr{F}$是层，则$\pi : \bar{\mathscr{F}} \to X$的连续函数截面层同构于$\mathscr{F}$.

(iv) 若$\mathscr{G}$也是拓扑空间X上的一个预层，$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层的态射，证明$\varphi$诱导了$\bar{\mathscr{F}} \to \bar{\mathscr{G}}$的连续映射.

空间$\bar{\mathscr{F}}$称为预层$\mathscr{F}$的平展空间(étale space).这实际上是Serre最初给的层的定义，我们用的是更现代的观点来看，但习题说明了两者是完全相同的.

Solution. (i) 根据定义，π显然是连续的.定义$\sigma : x \mapsto (x, s_x)$，注意到$\sigma^{-1}(\bigcup_{i \in I} A_i) = \bigcup_{i \in I} \sigma^{-1}(A_i)$，因而为证明$\sigma$是连续的只需要证明对任意的$X$中的开集$V$，$\sigma^{-1}((V, t))$也是开集即可.但是若$t = s$则$\sigma^{-1}((V, t)) = \sigma^{-1}((V, s)) = V \cap U$，若$t \neq s$则$\sigma^{-1}((V, t)) = \emptyset$.故得证.

(ii) 设$\sigma : U \to \bar{\mathscr{F}}$是$U$上的截面，于是对于任意的$x \in U$，存在$s \in \mathscr{F}(U)$使得$\sigma(x) = (x, s_x)$.若$x, y$是$U$中的两个点，$\sigma(x) = (x, s_x)$且$\sigma(y) = (y, t_y)$.根据芽的定义，我们可以找到$x, y$的邻域$V, W$使得$s \in \mathscr{F}(V), t \in \mathscr{F}(W)$.考虑开集

$$(V, s) = \{(z, s_z) \mid z \in V\}$$

和

$$(W, t) = \{(z, t_z) \mid t \in W\},$$

根据σ的连续性，$\tilde{V} := \sigma^{-1}((V, s))$和$\tilde{W} := \sigma^{-1}((W, t))$都是$U$中的非空开集，分别包含$x$和$y$.对于任意$z \in \tilde{V} \cap \tilde{W}$，由$\sigma$的映射性$(z, s_z) = \sigma(z) = (z, t_z)$，故存在$z$的一个邻域$O \subseteq \tilde{V} \cap \tilde{W}$使得$s|_O = t|_O$.但是$z$是任取的，故$s|_{\tilde{V} \cap \tilde{W}} = t|_{\tilde{V} \cap \tilde{W}}$.这样我们就得到了$U$的一个开覆盖，且在开集重合的部分截面是相容的.根据层公理，存在唯一的$r \in \mathscr{F}(U)$使得$\sigma(x) = (x, r_x)$.

(iii) 记$\mathscr{F}'$为$\pi:\bar{\mathscr{F}}\to X$的截面层.定义

$$\begin{aligned}\theta:\mathscr{F}&\to\mathscr{F}'\\ \theta_U:\mathscr{F}(U)&\to\mathscr{F}'(U)\\ s&\mapsto\sigma(x\mapsto(x,s_x)),\end{aligned}$$

于是我们需要验证对任意的开集U，θ_U是群同构，且对任意满足$V\subseteq U$的开集U,V都有图

$$\begin{tikzcd}\mathscr{F}(U) \arrow[r, "\theta_U"] \arrow[d, "\rho_V^U"'] & \mathscr{F}'(U) \arrow[d, "|_V"] \\ \mathscr{F}(V) \arrow[r, "\theta_V"] & \mathscr{F}'(V),\end{tikzcd}$$

交换，其中$|_V$是U上函数在V的限制.

对于$\mathscr{F}'(U)$中的截面σ,τ，$\sigma+\tau$的定义是$\sigma+\tau:x\mapsto(x,s_x+t_x)$，其中$\sigma(x)=(x,s_x)$，$\tau(x)=(x,t_x)$.于是，同态性由正极限的性质保证，再根据前一部分$\theta_U$是同构，其中，层公理的局部性对应$\theta$的单射性，在局部性的存在下粘合条件等价于满射（充分性由前一部分证明，必要性考虑到截面本质上是映射，是自动满足粘合条件的）.任取$x\in V$和$s\in\mathscr{F}(U)$，正极限保证$s_x=(s|_V)_x$，这即是图的交换性.

(iv) 定义

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}:\bar{\mathscr{F}}&\to\bar{\mathscr{G}}\\ (x,s_x)&\mapsto(x,\varphi_x(s_x)),\end{aligned}$$

于是我们只要证明函数是连续的即可.对$\bar{\mathscr{G}}$的任意X中的开集U，若t是$\mathscr{G}(U)$中的截面，则对于(U,t)中的任意点(x,t_x)，若它在$\bar{\varphi}$的像中，则存在$(x,s_x)\in\mathscr{F}_x$使得$\varphi_x(s_x)=t_x$.这意味着，存在x的邻域W使得$\varphi_W(s)|_{W\cap U}=t|_{W\cap U}$.于是，开集基中的元素$(W\cap U,s|_{W\cap U})$包含于$\bar{\varphi}$的原像中，故

$$\varphi^{-1}((U,t))=\coprod_{W\text{是}U\text{中的开集，且}s\in\mathscr{F}(W)\text{满足}\varphi_W(s)=t|_W}(W,s),$$

按照定义这是一个开集. □

练习5.6. 设$\varphi_i:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$是拓扑空间$X$上层的态射，$i=1,2$，且对于任意$x\in X$，都有$(\varphi_1)_x=(\varphi_2)_x$，证明$\varphi_1=\varphi_2$.

5.1.2 层化

对于一个预层$\mathscr{F}$和X中的开集U，我们可以定义

$$\tilde{\mathscr{F}}(U):=\{s:U\to\coprod_{x\in U}\mathscr{F}_x\mid s\text{满足公理(i)和(ii)}\}$$

其中

(i) 对每个U中的点x，$s(x)\in\mathscr{F}_x$；

(ii) 对每个U中的点x，都存在开邻域$V\subseteq U$和截面$t\in\mathscr{F}(V)$使得对于所有的$y\in V$都有$s(y)=t_y$.

对于$\mathscr{F}$中的任意截面$s \in \mathscr{F}(U)$，我们都可以定义一个映射$\tilde{s}: U \to \coprod_{x\in U} \mathscr{F}_x, y \mapsto s_y$.显然$\tilde{s} \in \tilde{\mathscr{F}}(U)$，因此我们定义了一个预层的态射$\zeta: \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$.

命题5.2. *若预层$\mathscr{F}$是层，则$\zeta: \mathscr{F} \to \tilde{\mathscr{F}}$是层的同构.*

如果尽可能具体地解释层化，这个构造就是把原本没有的截面加到层的对象当中去，进而形成我们需要的足够多的粘合信息，而我们是局部来完成这个扩充的.刚刚我们介绍的层化事实上就是用一个点的局部信息（茎）去构造相应的函数，可以说层公理所描述的本质信息就是一定类型的函数.我们对于层化的定义满足如下的泛性质和函子性：

命题5.3 (函子性)**.** *设$\varphi: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层的态射，那么存在层态射$\tilde{\varphi}: \tilde{\mathscr{F}} \to \tilde{\mathscr{G}}$使得下面的图交换：*

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{F} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\zeta_{\mathscr{F}}"'] & \mathscr{G} \arrow[d, "\zeta_{\mathscr{G}}"] \\
\tilde{\mathscr{F}} \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \tilde{\mathscr{G}}.
\end{tikzcd}$$

Proof. 对任意X中的开集U，考虑点$x \in U$和截面$s \in \tilde{\mathscr{F}}(U)$，我们定义

$$\tilde{\varphi}_U(s)(x) := \varphi_x(s(x)).$$

我们需要验证定义是层的态射，并验证图的交换性. □

推论5.3.1 (泛性质)**.** *设$\varphi: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层的态射，若$\mathscr{G}$是层，则存在Abel群的同构*

$$\hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(\mathscr{F}, \mathscr{G}) \cong \hom_{\mathbf{ShAb}(X)}(\tilde{\mathscr{F}}, \mathscr{G}).$$

事实上，我们并不需要拓扑空间X中所有开集U所对应的对象$\mathscr{F}(U)$，如果给定X的一组基$\mathscr{B}$中所有所有开集U对应的对象$\mathscr{F}(U)$，并且这些对象满足层公理，那么我们存在唯一的X上的层：

定理5.4 ($\mathscr{B}$-层)**.** *设$\mathscr{B}$是拓扑空间X的一组开集基，对于每个$U, V \in \mathscr{B}$，存在Abel群$\mathscr{F}(U)$和限制同态$\rho^U_V: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$满足预层公理和层公理，那么称$\mathscr{F}$是一个**$\mathscr{B}$-层**($\mathscr{B}$-sheaf).于是*

1. *任意$\mathscr{B}$-层都可以唯一地扩张为一个X上的Abel群层.*
2. *给定X上的两个$\mathscr{B}$-层$\mathscr{F}$和$\mathscr{G}$，且对每个$\mathscr{B}$中的开集U都有群态射*

$$\varphi_U: \mathscr{F}(U) \to \mathscr{G}(U)$$

与$\mathscr{B}$-层的限制态射相容，那么存在唯一的层态射$\varphi: \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是$\mathscr{B}$-层的扩张.

Proof. 对任意X中的开集V，定义

$$\mathscr{F}(V) := \varprojlim_{U\in\mathscr{B}\text{满足}U\subseteq V} \mathscr{F}(U),$$

其中逆向系中的态射由限制态射给定.我们需要证明：(i)该定义与原定义相容；(ii)若$V\subseteq W$，则存在$\rho_V^W:\mathscr{F}(W)\to\mathscr{F}(V)$与原有的限制函数相容，且新构造的限制函数间也相容；(iii)如此定义的预层构成一个层.

(i)由极限的定义即可得到，因为若$V\in\mathscr{B}$，V就是被V包含的$\mathscr{B}$中开集在嵌入映射下的终对象，因此$\mathscr{F}(V)$是始对象.(ii)可以由极限的函子性推得.这样我们只要验证这是一个层即可，等价地，我们证明对任意的开覆盖，是一个等值子. □

推论5.4.1 (层的粘合原理). *设$\mathcal{U}=\{U_i\}_{i\in I}$是拓扑空间$X$的开覆盖.若对任意$\mathcal{U}$中的开集$U$，$\mathscr{F}_U$都是$U$上的层，并且*

$$\varphi_{U,V}:\mathscr{F}_U|_{U\cap V}\to\mathscr{F}_V|_{U\cap V}$$

都是同构，在$U\cap V\cap W$上满足

$$\varphi_{V,W}\circ\varphi_{U,V}=\varphi_{U,W},$$

则存在唯一的X上的层$\mathscr{F}$使得有层的同构$\psi:\mathscr{F}|_U\to\mathscr{F}_U$且满足如下相容性：对任意$U,V\in\mathcal{U}$

$$\varphi_{U,V}\circ\psi_U|_{U\cap V}=\psi_V|_{U\cap V}:\mathscr{F}|_{U\cap V}\to\mathscr{F}_V|_{U\cap V}.$$

Proof. 我们将验证如下论断：(i) 被$\mathcal{U}$中的开集包含的所有的开集构成X的一组拓扑基$\mathscr{B}$；(ii) 所给出的粘合条件自然地给出了一个$\mathscr{B}$-层，于是根据定理**??**存在性和唯一性都得证.

(i) 这是一个单纯的拓扑问题，我们略过证明.(ii) 对任意$\mathscr{B}$中的开集W，我们可以找到$U\in\mathcal{U}$使得$W\subseteq U$，于是定义

$$\mathscr{F}(W):=\mathscr{F}_U(W),$$

且若$W_1\subseteq W_2\subseteq U$，那么限制态射$\rho_{W_1}^{W_2}:\mathscr{F}(W_2)\to\mathscr{F}(W_1)$定义为层$\mathscr{F}_U$从$W_1$到$W_2$的限制.这样定义首先出现的问题是，我们对于$U\in\mathcal{U}$的选取可能不是唯一的，因而，首先验证定义是合理的.

假设对于W，存在不同的

由于原本的$\mathscr{F}_U$是U上的层，根据例**??**，我们这样的定义也是层，于是根据之前的定理，这个层存在且同构下唯一. □

事实上，粘合后的层$\mathscr{F}$是容易描述的：对任意的开集W，$\mathscr{F}(W)$是所有$\{s_U\}_{U\in\mathcal{U}}$的全体，其中$s_U\in\mathscr{F}_U(W\cap U)$且满足$\varphi_{U,V}(s_U)$在$U\cap V\cap W$上等于$\varphi_{V,U}(s_V)$.

引入层化后我们其实有了对于层更进一步的认识——层完全由每点上的茎完全决定，而决定的方式就是寻找连续的截面（习题**??**）.在英语中，sheaf一词的含义是“a bundle of stalks”，即一捆稻谷，我们想象

练习5.7. 设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的预层.证明平展空间$\bar{\mathscr{F}}$的截面层$\mathscr{F}'$同构于$\mathscr{F}$的层化.

Proof. 在习题??中我们定义了预层的态射

$$\begin{aligned}\theta : \mathscr{F} &\to \mathscr{F}'\\ \theta_U : \mathscr{F}(U) &\to \mathscr{F}'(U)\\ s &\mapsto \sigma(x \mapsto (x, s_x)),\end{aligned}$$

于是只要证明$\mathscr{F}'$的泛性质就能够说明同构.设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层到层的态射，于是根据习题??我们有连续映射$\bar{\varphi} : \bar{\mathscr{F}} \to \bar{\mathscr{G}}$，进而对于任意的截面$s : U \to \bar{\mathscr{F}}$，$\bar{\varphi} \circ s$也是$U$上的截面，这样我们定义了

$$\begin{aligned}\varphi' : \mathscr{F}' &\to \mathscr{G}' \cong \mathscr{G}\\ \varphi'_U : \mathscr{F}'(U) &\to \mathscr{G}'(U)\\ s &\mapsto \bar{\varphi} \circ s.\end{aligned}$$

φ'_U是群同态由由φ的预层的态射性保证，而它显然与两个层的限制态射相容，于是我们得到了层的态射.

再证明唯一性.假设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是预层到层的态射，层态射$\tilde{\varphi} : \mathscr{F}' \to \mathscr{G}$满足

$$\begin{tikzcd} \mathscr{F}' \arrow[r, "\tilde{\varphi}"] & \mathscr{G} \\ \mathscr{F}. \arrow[u, "\theta"] \arrow[ur, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

任取$\sigma \in \mathscr{F}'(U)$，即截面$\sigma : U \to \bar{\mathscr{F}}$，对任意$x \in U$，若$\sigma(x) = (x, s_x)$，那么任取$\sigma_x$的代表元$\tau$，于是存在$W \subseteq U$使得$\sigma|_W = \tau|_W$，因此$\tau(x) = (x, s_x)$，于是可以定义$\eta_x : (\mathscr{F}')_x \to \mathscr{F}_x$，$\sigma_x \mapsto s_x$.根据截面加法的定义，这显然是一个群态射.一方面，我们显然有$\eta_x \circ \theta_x = \mathrm{id}_{\mathscr{F}_x}$.另一方面，仍然假定$\sigma(x) = (x, s_x)$，那么由连续性$V = \sigma^{-1}((U, s))$是$U$中的非空开集，这意味着对任意$y \in V$，$\sigma(y) = (y, s_y)$，于是$\sigma|_V = \theta(s)|_V$，$\theta_x(s_x) = \sigma_x$.因此，$\theta_x \circ \eta_x = \mathrm{id}_{(\mathscr{F}')_x}$.再根据习题??，$\tilde{\varphi}$是唯一确定的. □

5.1.3 底空间变换

这一节我们考虑这样的问题，

定义. 设$f : X \to Y$是拓扑空间的连续映射，如果$\mathscr{F}$是X上的预层，则如下定义的

$$\begin{aligned}f_*\mathscr{F} : \mathbf{Open}(Y) &\to \mathbf{Ab}\\ U &\mapsto f_*\mathscr{F}(U) := \mathscr{F}(f^{-1}(U))\end{aligned}$$

是一个预层，称为预层$\mathscr{F}$的**推出**(pushfroward).

对于Y中的开集$V \subseteq U$，我们定义限制同态$f_*\mathscr{F}(U) \to f_*\mathscr{F}(V)$是$\mathscr{F}(f^{-1}(U))$到$\mathscr{F}(f^{-1}(V))$的限制同态，即若$s \in f_*\mathscr{F}(U)$，则

$$s|_V = (s \in \mathscr{F}(f^{-1}(U)))|_{f^{-1}(V)}.$$

引理5.1. 设$f:X\to Y$是拓扑空间的连续映射，如果$\mathscr{F}$是X上的层，则推出$f_*\mathscr{F}$是Y上的层.

Proof. 任取Y中的开集V，设$\mathcal{V}=\{V_i\}_{i\in I}$是$V$的开覆盖，那么$\mathcal{U}=\{U_i:=f^{-1}(V_i)\}_{i\in I}$是$U:=f^{-1}(V)$的开覆盖.于是，若给定$s_i\in f_*\mathscr{F}(V_i)=\mathscr{F}(U_i)$，满足$s_i|_{V_i\cap V_j}=s_j|_{V_i\cap V_j}$，于是$s_i|_{U_i\cap U_j}=s_j|_{U_i\cap U_j}$.由$\mathscr{F}$是层得知存在唯一的$s\in\mathscr{F}(U)$使得$s|_{U_i}=s_i$.按照层推出的定义，这个$s$就是$f_*\mathscr{F}(V)$中要找的唯一的元素，故$f_*\mathscr{F}$是层. □

如果我们还有一个X上的预层态射$\varphi:\mathscr{F}\to\mathscr{G}$，则对于任意的$Y$中的开集$U$，同态映射$\varphi_{\varphi^{-1}(U)}:\mathscr{F}(\varphi^{-1}(U))\to\mathscr{G}(\varphi^{-1}(U))$和限制映射$\rho^{\varphi^{-1}(U)}_{\varphi^{-1}(V)}$相容，于是$\varphi_{\varphi^{-1}(U)}:\mathscr{F}(\varphi^{-1}(U))\to\mathscr{G}(\varphi^{-1}(U))$自然地可以看作$\varphi_{\varphi^{-1}(U)}:f_*\mathscr{F}(U)\to f_*\mathscr{G}(U)$，这样我们说明了$f_*\varphi$是预层态势$f_*\mathscr{F}\to f_*\mathscr{G}$.如果还有$\psi:\mathscr{G}\to\mathscr{H}$，那么很明显地有$f_*(\psi\circ\varphi)=f_*\psi\circ f_*\varphi$.于是$f_*$是一个函子$\mathbf{PShAb}(X)\rightrightarrows\mathbf{PShAb}(Y)$.

练习5.8. 设$f:X\to Y$和$g:Y\to Z$是两个连续映射，那么

$$(g\circ f)_*=g_*\circ f_*.$$

定义. 设$f:X\to Y$是拓扑空间的连续映射，如果$\mathscr{G}$是Y上的预层，则如下定义的

$$\begin{aligned} f_P\mathscr{G}:\mathbf{Open}(X)&\rightrightarrows\mathbf{Ab}\\ V&\mapsto f_P\mathscr{G}(U):=\varinjlim_{\substack{V\in\mathbf{Open}(Y)\\ f(U)\subseteq V}}\mathscr{G}(V)\end{aligned}$$

是一个预层，称为预层$\mathscr{G}$的**拉回**(pullback).

引理5.2. 设X和Y是拓扑空间，$f:X\to Y$是连续映射，那么下面的同构关于$\mathscr{G}$和$\mathscr{F}$是自然的：

$$\hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(f_P\mathscr{G},\mathscr{F})\cong\hom_{\mathbf{PShAb}(Y)}(\mathscr{G},f_*\mathscr{F}).$$

Proof. 我们首先证明同构.设$\varphi\in\hom_{\mathbf{PShAb}(X)}(f_P\mathscr{G},\mathscr{F})$，于是任意给定$X$中的开集，按照极限的定义，$\varphi_U:f_P\mathscr{G}(U)\to\mathscr{F}(U)$完全由一族相容的态射

$$\varphi_V:$$

其中V取遍所有包含$f(U)$的开集. □

与推出不同的是，即使$\mathscr{G}$是Y上的层，$f_P\mathscr{G}$也可能并不是一个层，但作为预层，层的拉回也有很好的函子性质.我们称$f_P^{-1}\mathscr{G}$的层化为$\mathscr{G}$的**逆象层**(inverse sheaf)，记为$f^{-1}\mathscr{G}$.

定义. 设X是拓扑空间，$\mathscr{F}$是X上的层

5.1.4 层范畴及其中的正合性

设$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$是空间$X$上预层的态射，

引理5.3. *层态射的单态射是范畴意义下的单态射，且层态射的满态射是范畴意义下的满态射.*

Proof. □

给定拓扑空间X和上面的层$\mathscr{F}$，若对于任意的$V \subseteq U$，限制映射$\mathscr{F}(U) \to \mathscr{F}(V)$都是满射，则称$\mathscr{F}$是flasque.

练习5.9. 求证层态射单射（满射）的局部性：给定拓扑空间X和开覆盖$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$使得层态射$\varphi : \mathscr{F} \to \mathscr{G}$的限制

$$\varphi_{U_i} : \mathscr{F}_{U_i} \to \mathscr{G}_{U_i}$$

对所有的$i \in I$都是单射（满射），那么φ本身也是单射（满射）.

Proof. □

练习5.10 (层的零扩张). 设X是拓扑空间，Z是X的闭集，$i : Z \to X$是嵌入映射.令$U := X - Z$是Z在X中的补集，$j : U \to X$是嵌入映射.

1. 设$\mathscr{F}$是Z上的层，证明

$$(i_*\mathscr{F})_x = \begin{cases} \mathscr{F}_x & x \in Z \\ 0 & x \notin Z. \end{cases}$$

   于是我们称$i_*\mathscr{F}$是$\mathscr{F}$在X上的零扩张.证明若X上的层$\mathscr{F}$对所有$x \notin Z$满足$\mathscr{F}_x = 0$，那么层的同态

$$\rho_Z^X : (i_*\mathscr{F})|_Z \to \mathscr{F}$$

   是同构，并且由此推导出对任意Z上的层$\mathscr{G}$，存在唯一的X上的层$\mathscr{F}$满足对所有$x \in Z$满足$\mathscr{F}_x = \mathscr{G}_x$，对所有$x \notin Z$满足$\mathscr{F}_x = 0$.

2. 设$\mathscr{G}$是U上的层，定义X上的层$\mathscr{G}$满足对任意X中的开集V，

$$j_!\mathscr{G}(V) := \begin{cases} \mathscr{G}(V) & V \subseteq U \\ 0 & \text{其他情况.} \end{cases}$$

   证明

$$(j_!\mathscr{G})_x = \begin{cases} \mathscr{G}_x & x \in U \\ 0 & \text{其他情况,} \end{cases}$$

   并且证明$j_!\mathscr{G}$是满足以上条件且限制在U上是$\mathscr{G}$的唯一一个层.

3. 现在假设$\mathscr{F}$是X上的层，证明我们有如下层的正合列：

$$0 \to j_!(\mathscr{F}|_U) \to \mathscr{F} \to i_*(\mathscr{F}|_Z) \to 0.$$

Proof. 1.直接由定义，若$x \in U$，那么存在x在X中的邻域V使得$V \cap Z = \emptyset$，此时$i_*\mathscr{F}(V) = \mathscr{F}(i^{-1}(V)) = \mathscr{F}(\emptyset) = 0$，因此对任意包含$x$的开集$W$，$i_*\mathscr{F}(W \cap V) = 0$，即$(i_*\mathscr{F})_x = 0$.另一方面，若$x \in Z$，那么

$$(i_*\mathscr{F})_x = \operatorname{colim}_{W\text{是包含}x\text{的开集}}(i_*\mathscr{F})(W) = \operatorname{colim}_{W\text{是包含}x\text{的开集}}\mathscr{F}(W \cap Z) = \mathscr{F}_x.$$

□

定义. 给定拓扑空间X和Abel群层$\mathscr{F}$，若对任意开集U，$\mathscr{F}(U)$是环，并且所有的限制映射都是环同态，则称$\mathscr{F}$是X上的环层(sheaf of rings).

5.2 Čech上同调

之前的理论中我们建立了层的上同调理论，但我们面临一个相当严重的问题——对于一个给定的层，它的上同调几乎是不可计算的.虽然任意层的内射都是存在的，但构造过于庞大Čech上同调的主要思想是我们考虑拓扑空间中开覆盖所包含的组合信息，

设X是拓扑空间，$\mathscr{F}$是X上的层，$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是$X$的一族开覆盖.对任意$q \geq 0$，我们定义$\mathscr{F}$（对于$\mathcal{U}$）的$q$群(group of q-cochain of $\mathscr{F}$ (relative to $\mathcal{U}$))为

$$C^q(\mathcal{U}, \mathscr{F}) = \prod_{(\lambda_0,\cdots,\lambda_q)\in\Lambda^{q+1}} \mathscr{F}(U_{\lambda_0} \cap \cdots \cap U_{\lambda_q}),$$

进而可以定义上边缘映射

$$d^q : C^q(\mathscr{F}, \mathcal{U}) \to C^{q+1}(\mathscr{F}, \mathcal{U})$$

满足将$d^q(\{f_{\lambda_0,\cdots,\lambda_q}\})$的$(\lambda_0, \cdots, \lambda_{q+1})$项是

$$\sum_{i=0}^{q}(-1)^i f_{\lambda_0,\cdots,\hat{\lambda_i},\cdots,\lambda_{q+1}}.$$

这给出了一个上链，验证如下：

事实上，Čech上链是这样给出的：给定拓扑空间X的开覆盖$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$，存在$\mathcal{U}$给出的单纯集$N\mathcal{U}$，其中的映射都是开集的嵌入

引理5.4. 对任意拓扑空间X和X上的层$\mathscr{F}$，$\mathcal{U} = \{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$是$X$的一族开覆盖，都有

$$\check{H}^0(\mathscr{F}, \mathcal{U}) \cong \Gamma(X, \mathscr{F}).$$

命题5.5. 若$\mathcal{V}$是拓扑空间X开覆盖$\mathcal{U}$的加细，

第六章　其他类型的同调

6.1　超上同调

我们考虑这样的问题：设$\mathscr{F}$是拓扑空间X上的层

$$\mathscr{F}:\mathbf{Open}(X)^{\circ}\to\mathcal{B},$$

其中$\mathcal{B}$是Abel范畴，此时$\mathscr{F}$是以$\mathcal{B}$中对象为对象的层.那么可以求X关于层$\mathscr{F}$的上同调

$$H^{i}(\mathscr{F},X),$$

它是$\mathcal{B}$中的对象.特别地，当$\mathcal{B}$是某个给定Abel范畴$\mathcal{A}$的上链复形范畴时，每个上同调都是一个$\mathcal{A}$的上链复形，此时还可以求上链复形$H^{i}(\mathscr{F},X)$的上同调

命题6.1. 设$\mathscr{F}^{\bullet}$是拓扑空间X上的层上链复形，$f^{\bullet}:\mathscr{F}^{\bullet}\to\mathscr{G}^{\bullet}$是*injective*的拟同构.则对于任意的内射复形$\mathscr{I}^{\bullet}$和复形的态射$g^{\bullet}:\mathscr{F}^{\bullet}\to\mathscr{I}^{\bullet}$，存在态射$\tilde{g}^{\bullet}:\mathscr{G}^{\bullet}\to\mathscr{I}^{\bullet}$使得

$$g^{\bullet}=\tilde{g}^{\bullet}\circ f^{\bullet}.$$

命题6.2. 设$f:C^{\bullet}\to D^{\bullet}$是链映射，$C^{\bullet}\to I^{\bullet,\bullet}$和$D^{\bullet}\to J^{\bullet,\bullet}$是两个*Cardan-Eilenburg*消解，那么存在链映射$\tilde{f}^{\bullet,\bullet}:I^{\bullet,\bullet}\to J^{\bullet,\bullet}$是$f^{\bullet}$上的映射.

给定一个n维复流形X，那么可以定义其上的$\mathbb{C}$向量空间层的复形

$$0\to\mathscr{O}_X\to\Omega_X^1\xrightarrow{\partial}\Omega_X^2\xrightarrow{\partial}\cdots\xrightarrow{\partial}\Omega_X^n\to 0,$$

其中Ω_X^q是X上的全纯q形式，那么如上复形是常层$\mathbb{C}$的消解.

6.2　Lie

定义. 给定k上的Lie代数$\mathfrak{g}$，M是$\mathfrak{g}$模，定义如下的

$$C_n^{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, M) := M \otimes_k \bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{g},$$

其中$\bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{g} = \mathfrak{g} \wedge_k \cdots \wedge_k \mathfrak{g}$，并且有边缘映射

$$\begin{aligned}\partial_n : M \otimes_k \bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{g} &\to M \otimes_k \bigwedge_{i=1}^{n-1} \mathfrak{g}\\ m \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge a_n &\mapsto \sum_{i=1}^n (-1)^i [m, a_i] \otimes a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge a_n\\ &\qquad + \sum_{1 \le i < j \le n} (-1)^{i+j-1} m \otimes [a_i, a_j] \wedge a_1 \wedge \cdots \wedge \hat{a}_i \wedge \cdots \wedge \hat{a}_j \wedge a_n,\end{aligned}$$

称复形$(C_\bullet^{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, M), \partial_\bullet)$为Lie代数$\mathfrak{g}$以$M$为系数的Chevalley-Eilenberg复形(Chevalley-Eilenberg).对偶地，定义如下的

$$C^n_{\mathrm{CE}}(\mathfrak{g}, M) := \mathrm{Hom}_k\left(\bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{g}, M\right)$$

和微分映射

$$d^n : \mathrm{Hom}_k\left(\bigwedge_{i=1}^n \mathfrak{g}, M\right) \to \mathrm{Hom}_k\left(\bigwedge_{i=1}^{n+1} \mathfrak{g}, M\right)$$

满足

$$\begin{aligned}d\omega(x_1 \wedge \cdots \wedge x_{n+1}) &= \sum_{i=1}^{n+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot \omega(x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge x_n)\\ &\qquad + \sum_{1 \le i < j \le n+1} (-1)^{i+j} \omega([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \cdots \wedge \hat{x}_i \wedge \cdots \wedge \cdots \wedge \hat{x}_j \wedge \cdots x_n),\end{aligned}$$

则称$(C^\bullet_{\mathrm{CE}}, d^\bullet)$是

6.3 Hochschild

本节中我们都假定k是交换环，理想的情况下它会是域.

定义. 给定交换基代数k和k代数A，若（对称）k模M同时具有左右A模结构，且满足对任意$a, b \in A, m \in M$都有

$$(am)b = a(mb),$$

且k在M上的左右作用与A在M上的左右作用相容，则称M是一个A双模(A-bimodule).若A还有单位元，则一般要求

$$1m = m = m1.$$

记$A^e = A \otimes_k A$，那么一个A双模M同时是一个左A^e模，作用由

$$(a \otimes b)m = amb$$

给出.或者，一个A双模M同时是一个右A^e模，作用由

$$m(a \otimes b) = b^{-1}ma$$

给出.

定义. 给定交换基代数k和k代数A，M是A双模，给定A模

$$C_n(A, M) := M \otimes_k A^{\otimes n},$$

其中$A^{\otimes n} := A \otimes_k \cdots \otimes_k A$，并且有如下Hochschild边缘映射

$$\begin{aligned} \partial_n : C_n(A, M) &\to C_{n-1}(A, M) \\ m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n &\mapsto ma_1 \otimes \cdots \otimes a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ &+ (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}, \end{aligned}$$

那么$(C_\bullet(A, M), \partial_\bullet)$称为Hochschild复形(Hochschild complex)，对应的同调群称为A以M为系数的Hochschild同调群(Hochschild homology group of A with coefficients in M)，记为$HH_\bullet(A, M)$.特别地若$M = A$，我们记$HH_\bullet(A)$.

引理6.1. $(C_\bullet(A, M), \partial_\bullet)$是链复形.

Proof. 定义

$$\begin{aligned} d_i^{[n]} : C_n(A, M) &\to C_{n-1}(A, M) \\ d_0(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= ma_1 \otimes \cdots \otimes a_n \\ d_i(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= m \otimes a_1 \otimes \cdots a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ d_n(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) &:= a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}, \end{aligned}$$

于是

$$d_i^{[n]} d_j^{[n]} = d_{j-1}^{[n]} d_i^{[n]}$$

对$0 \leq i < j \leq n$成立，这样$C_\bullet(A, M)$是预单纯的，因此根据习题**??**，$(C_\bullet(A, M), \partial_\bullet)$是链复形. □

事实上，如上定义的同调群$HH_\bullet(A, M)$关于M有函子性：给定一个A双模同态$\psi : M \to N$，那么它诱导

的

$$\psi_\bullet : C_\bullet(A,M) \to C_\bullet(A,N)$$
$$\psi_n : m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto \psi(m) \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

是一个链映射，因此诱导了Hochschild同调群的同态；同时群$HH_\bullet(A,M)$关于A也有函子性：给定一个k代数同态$\varphi : A \to B$，它诱导的

$$\varphi_\bullet : C_\bullet(A,M) \to C_\bullet(B,M)$$
$$\varphi_n : m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto m \otimes \varphi(a_1) \otimes \cdots \otimes \varphi(a_n)$$

是一个链映射，因此诱导了Hochschild同调群的同态.

例6.1. 首先考虑$HH_0(A,M)$.按定义，$HH_0(A,M) = C_0(A,M)/\mathrm{Im}\,\partial_1$，注意到$\partial_1 : a \otimes m \mapsto ma - am$的定义使得$\mathrm{Im}\,\partial_1$中的元素都是形如$ma - am$这样的元素生成的，因此

$$HH_0(A,M) = M/\langle ma - am\rangle =: M/[M,A].$$

特别地，$HH_0(A) = A/[A,A]$.

例6.2. 当$A = k$时，$C_n(A) = k$对于任意n都成立，并且$d_i^{[n]} = \mathrm{id}$对任意$1 \le i \le n$.于是，Hochschild复形是

$$\cdots \to k \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} \cdots \xrightarrow{1} k \xrightarrow{0} k,$$

因此$HH_*(k) = k[0]$.

练习6.1. 给定k代数A，记$Z(A) := \{z \in A \mid az = za \ \forall a \in A\}$为$A$的中心，求证$Z(A)$在$C_\bullet(A,M)$上的作用

$$z \cdot (m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := zm \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

和

$$(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) \cdot z := mz \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$$

是同伦的.事实上，这还是个单纯同伦.

命题6.3. 若A是含幺的交换k代数，那么存在自然的同构

$$HH_1(A) \cong \Omega^1_{A/k}.$$

若M还是对称的A双模（即$am = ma$对任意$a \in A, m \in M$）都成立，那么存在自然同构

$$HH_1(A,M) \cong M \otimes_A \Omega^1_{A/k}.$$

Proof. 由于A是交换代数，因此$\partial_1 : A \otimes_k A \to A$（例**??**）是0映射，因此

$$HH_1(A) \cong A \otimes_k A/\langle ab \otimes c - a \otimes bc + ca \otimes b\rangle.$$

这样对于映射

$$HH_1(A) \to \Omega^1_{A/k}$$
$$a \otimes b \mapsto adb$$

是良定义的，且是A模同态.容易验证这是一个同构. □

接下来我们希望用导出函子的语言来描述Hochschild同调.

定义. 给定k代数A，记A°为A的对偶代数（即与A具有相同的元素，但乘法定义为$a^\circ \cdot b^\circ := (ba)^\circ$），令$A^e := A \otimes_k A^\circ$，那么对于任意的$A$双模$M$都有$A^e$的左作用

$$(a \otimes b)m := amb.$$

那么如下链复形称为bar复形(Bar complex)：

$$\bar{C}_\bullet : \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_{n+1}} A^{\otimes n+1} \xrightarrow{\bar{\partial}_n} A^{\otimes n} \xrightarrow{\bar{\partial}_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\bar{\partial}_1} A^{\otimes 2} \to 0,$$

其中$A^{\otimes 2}$处于0阶位置，且$\bar{\partial}_n := \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$（注意到求和不取到$n+1$）.由乘法定义的映射

$$\mu : A \otimes_k A \to A$$

是复形$\bar{C}_\bullet$的扩张.

很明显

$$HH_*(A) \cong H_*(M \otimes_{A^e} \bar{C}_\bullet),$$

即Hochschild同调是A^e模链复形$\bar{C}_\bullet$以M为系数的同调.

命题6.4. *设k代数A是含幺的，那么复形$\bar{C}_\bullet$（附有扩张$\mu : \bar{C}_\bullet \to A$）是$A^e$模$A$的自由$A^e$模消解，它称为bar消解(Bar resolution).*

Proof. 对于这里的证明我们通过构造新的称为退化映射(degeneracy may)的结构，来获得新的信息完成证明.定义

$$s : A^{\otimes n} \to A^{\otimes n+1}$$
$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto 1 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n,$$

那么可以验证$d_i s = s d_{i-1}$对任意$i = 1, \cdots, n-1$成立，且$d_0 s = \mathrm{id}$，于是

$$\bar{\partial} s + s \bar{\partial} = \mathrm{id},$$

因此这证明了$\bar{C}_\bullet$是消解. □

在如上的证明中我们事实用到了A有左单位的事实，当A有右单位时，取

$$s : A^{\otimes n} \to A^{\otimes n+1}$$
$$a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \mapsto a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes 1$$

即可.此外，复形$\bar{C}_\bullet$的边缘算子$\bar{\partial}$完全由如下性质决定：

1. $\bar{\partial}$是左A模同态，

2. $\bar{\partial}_0 = \mu$，

3. $\bar{\partial} s + s\bar{\partial} = \mathrm{id}$，

并且这事实上给出了链同构$C_\bullet(A, A^e) \cong \bar{C}_\bullet$.

事实上，我们可以扩充如上的构造使得$C_\bullet(A, M)$成为一个单纯对象，因而可以通过商去退化对象得到正规化的Hochschild复形，鉴于这些讨论需要其他工具的建立，在此略去.

定理6.5. 给定k代数A，若A是投射k模，那么对任意A双模M，存在自然的同构

$$HH_n(A, M) \cong \mathrm{Tor}_n^{A^e}(M, A).$$

Proof. 根据假设，$A^{\otimes n}$对于任意自然数n也是投射k模，因此$A^{\otimes n+2} = A \otimes_k A^{\otimes n} \otimes_k A$是投射$A^e$模（其中模结构由$(a \otimes b)(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) := aa_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}b$给出）.这是因为，? ? ?

于是，注意到$M \otimes_{A^e} A^{\otimes n+2} \cong M \otimes_k A^{\otimes n}$，定理成立. □

类似于拓扑中的同调理论，对于任意A的双边理想I，短正合列$0 \to I \to A \to A/I \to 0$诱导了同调群的长正合列

$$\cdots \to HH_n(A, I) \to HH_n(A) \to HH_n(A/I) \to HH_{n-1}(A, I) \to \cdots,$$

因此可以称$HH_n(A, I)$是相对Hochschild同调群.更一般地，对于任意的k代数同态$A \to B$，它诱导的链映射$C_\bullet(A) \to C_\bullet(B)$的映射锥给出了诱导的长正合列.

练习6.2. 给定两个含幺k代数，那么存在自然同构

$$HH_*(A \oplus B) \cong HH_*(A) \oplus HH_*(B).$$

练习6.3. 记$Z(A)$是A的中心，$U \subseteq Z(A)$是乘性子集且$1 \in U$，对任意左A模M定义$M[U^{-1}] := Z(A)[U^{-1}] \otimes_A M$，那么当$A$是$k$平坦时，存在自然的同构

$$HH_n(A, M)[U^{-1}] \cong HH_n(A, M[U^{-1}]) \cong HH_n(A[U^{-1}], M[U^{-1}]).$$

练习6.4. 给定一族k代数同态$\{f_i : A_i \to A_{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$，求证

$$\mathrm{colim}_i HH_n(A_i) \cong HH_n(\mathrm{colim}_i A_i).$$

练习6.5. 给定（离散）群G并记$k[G]$为G的群代数，并且给定$k[G]$双模M.设G在M上的（右）作用是

$$m^g := g^{-1}mg,$$

求证存在自然同构

$$HH_*(k[G], M) \cong H_*(G, M),$$

其中$H_*(G, M)$是M系数的群同调.

练习6.6. 给定平坦A双模的短正合列$0 \to M \to N \to P \to 0$，求证存在长正合列

$$\cdots \to HH_n(A, M) \to HH_n(A, N) \to HH_n(A, P) \to HH_{n-1}(A, M) \to \cdots .$$

事实上，只要$0 \to M \to N \to P \to 0$是$k$分裂的即可.

练习6.7. 给定k代数A的双边理想I, J，尝试定义双相对Hochschild同调$HH_*(A; I, J)$使得存在如下长整合列

$$\cdots \to HH_n(A, I) \to HH_n(A; I, J) \to HH_n(A, J) \to HH_{n-1}(A, I) \to \cdots ,$$

并且证明当$I \cap J = 0$时，$HH_0(A; I, J) = 0$且$HH_1(A; I, J) = I \otimes_{A^e} J$.

6.3.1 Cohomology

$$HH^*(A) \cong H^*(\mathrm{Hom}_{A^e}(\bar{C}_\bullet, M)),$$

具体地，对于任意的$f \in \mathrm{Hom}_{A^e}(\bar{C}_\bullet, M)$，

$$df(a_1 \otimes \cdots \otimes a_n)$$

例6.3.

$$HH^0(A, M) = M^A := \{m \in M \mid ma = am \;\forall a \in A\}$$

$$HH^1(A, M) = \mathrm{Der}(A, M)/\{\text{内微分}\}$$

定理6.6. 给定带单位元的k代数A和A双模M，那么存在自然的双射

$$HH^2(A, M) \cong \mathcal{E}xt(A, M),$$

其中$\mathcal{E}xt(A, M)$是A关于M的平方零扩张的等价类的全体.

6.3.2 Hochschild-Kostant-Rosenberg

定理6.7.

6.4　循环上同调

给定R代数A，上一节中我们定义了A的Hochschild复形$C_\bullet(A|R)$，这一节我们考虑$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$在复形上的作用，它诱导了一个新的同调，称为循环同调设t_n是$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$的一个生成元，定义$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$在$A^{\otimes n+1}$上的作用为

$$t_n \cdot (a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := (-1)^n (a_n \otimes a_0 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}),$$

对其进行先行扩张，并称它为循环算子(cyclic operator).定义

$$N := 1 + t + \cdots + t^n$$

为t对应的范数算子(norm operator).

引理6.2. 如上提到的算子满足

$$(1-t)\bar{\partial} = \partial(1-t),\ \bar{\partial}N = N\partial,$$

其中∂

Proof. □

如上引理说明

$$\begin{array}{ccccccccc}
\downarrow \partial & & \downarrow -\bar{\partial} & & \downarrow \partial & & \downarrow -\bar{\partial} & & \\
A^{\otimes 3} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 3} & \xleftarrow{N} & \\
\downarrow \partial & & \downarrow -\bar{\partial} & & \downarrow \partial & & \downarrow -\bar{\partial} & & \\
A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes 2} & \xleftarrow{N} & \\
\downarrow \partial & & \downarrow -\bar{\partial} & & \downarrow \partial & & \downarrow -\bar{\partial} & & \\
A & \xleftarrow{1-t} & A & \xleftarrow{N} & A & \xleftarrow{1-t} & A & \xleftarrow{N} &
\end{array}$$

是一个双复形，称为循环双复形(cyclic bicomplex)，记为$CC_{\bullet,\bullet}(A)$.

定义. 给定?? A，称

$$HC_n(A) := H_n(\mathrm{Tot}(CC_{\bullet,\bullet}(A)))$$

为A的循环同调(cyclic homology).在需要时，用$HC_n(A|R)$来强调基环R.

事实上，循环同调$HC_*(A|R)$关于A和R都有函子性.

注意到$\mathrm{Coker}(A^{\otimes n+1} \xrightarrow{1-t} A^{\otimes n+1})$是循环群$\mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$下不变的，记$C_n^\lambda(A) := \mathrm{Coker}(A^{\otimes n+1} \xrightarrow{1-t} A^{\otimes n+1})$，引理**??**说明存在如下复形

$$C_\bullet^\lambda(A) := \cdots \to C_n^\lambda(A) \xrightarrow{\partial} C_{n-1}^\lambda(A) \xrightarrow{\partial} \cdots \xrightarrow{\partial} C_0^\lambda(A)$$

是良定义的，称为Connes复形(Connes' complex)，记它的同调为$H_*^\lambda(A)$.此时，存在自然的映射$p_\bullet : \mathrm{Tot}(CC_{\bullet,\bullet}(A)) \to C_\bullet^\lambda(A)$，它在第一列上是取商，在其余列上是0.

命题6.8. 若基环R包含$\mathbb{Q}$作为子环，那么诱导的映射$p_*: HC_*(A) \to H_*^\lambda(A)$是同构.

Proof. □

6.5 函子上同调

给定小范畴$\mathcal{C}$，记$\mathcal{C}-\mathbf{Mod}$（对应的，$\mathbf{Mod}-\mathcal{C}$）为所有$\mathcal{C}$到$k-\mathbf{Vect}$的协变函子（对应的，反变函子）组成的范畴.

引理6.3. 范畴$\mathcal{C}-\mathbf{Mod}$是$Abel$范畴且有足够多的投射和内射对象.

Proof. □

自然地可以构造（双）函子

$$-\otimes_{\mathcal{C}}-: \mathcal{C}-\mathbf{Mod}\times\mathbf{Mod}-\mathcal{C}\to k-\mathbf{Vect},$$

使得

$$F\otimes_{\mathcal{C}} G=\left(\bigoplus_{A\in\mathrm{ob}\ \mathcal{C}} F(A)\otimes_k G(A)\right)\Big/\langle (G(f)(x))\otimes y-x\otimes(F(f)(y))\rangle,$$

其中$x\in F(A), y\in G(B)$ for all possible $B\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$ and f runs over $\hom_{\mathcal{C}}(B,A)$.于是，导出函子

$$-\otimes_{\mathcal{C}}^{\mathbf{L}}-$$

是存在的.特别地，对任意$M\in\mathcal{C}-\mathbf{Mod}$和$N\in\mathbf{Mod}-\mathcal{C}$，$\mathrm{Tor}_i^{\mathcal{C}}(M,N)$是有意义的.

附录 A　Abel范畴

一定程度上说，我们构造范畴的目的是抽象出原本一些对象之间的行为，用更一般的方式去理解之前的对象和之间的行为.在代数中，模是一类非常友好的对象，我们希望找到足够抽象的一类对象，他们之间的行为类似于模（或者Abel群），这样的范畴就是Abel范畴.

同调代数中绝大多数的研究对象是Abel范畴中的对象，它们具有许多良好的性质，在这一章中我们将列举绝大部分.但是，同调代数的学习并不需要知道每一个这样性质的来源和证明，甚至在很多情形下一个Abel范畴完全可以看成一个R模范畴，虽然这并不准确，但足够对同调代数有正确的理解.这里的建议是大致浏览这一章，知道Abel范畴的定义和一些基本性质，然后进入正式的同调代数的学习，在适当并且需要的时候再去了解和分析Abel范畴中一些性质的证明.

A.1　Abel范畴

这一节我们不区分范畴内对象的同构和相等.

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$中的两个单态射$f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$，若存在$h : A_1 \leftrightarrows A_2 : k$使得图

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[dr, "f_1"] \arrow[dd, shift left, "h"] & \\ & B, \\ A_2 \arrow[ur, "f_2"'] \arrow[uu, shift left, "k"] & \end{tikzcd}$$

是交换的，则称单态射$f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$是等价的(equivalent).对偶地，给定范畴$\mathcal{C}$中的两个满态射$g_1 : B \to C_1, g_2 : B \to C_2$，若存在$h : C_1 \leftrightarrows C_2 : k$使得图

$$\begin{tikzcd} & C_1 \arrow[dd, shift left, "h"] \\ B \arrow[ur, "g_2"] \arrow[dr, "g_1"'] & \\ & C_2 \arrow[uu, shift left, "k"] \end{tikzcd},$$

是交换的，则称满态射$f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$是等价的(equivalent).称$B$的单态射的等价类为$B$的子对象(subobject)，$B$的满态射的等价类为$B$的商对象(quotient object)

练习A.1. 求证若$f_1 : A_1 \to B, f_2 : A_2 \to B$都是单态射，那么满足交换图

$$\begin{tikzcd} A_1 \arrow[dd, "h"] \arrow[dr, "f_1"] & \\ & B, \\ A_2 \arrow[ur, "f_2"] & \end{tikzcd}$$

的$h : A_1 \to A_2$是单射.

若$A_1 \to B, A_2 \to B$分别是某个子对象的代表元，且存在$A_1 \to A_2$使图交换，则称子对象A_1被子对象A_2包含.注意到子对象不具有传递性.

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$中的两个态射$f, g : X \to Y$，若存在对象K和态射$i : K \to X$满足

1. $f \circ i = g \circ i$；
2. 若对任意满足$f \circ h = g \circ h$态射$h : Z \to X$都存在唯一的分解

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] & X \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & Y \\ Z \arrow[u, dashed] \arrow[ur, "h"] & & \end{tikzcd}$$

则称K是f, g的等值子(equalizer).若范畴$\mathcal{C}$存在零对象，那么称f与0的等值子为f的核(kernel)，记为$\ker f$.

A.1.1　Abel范畴的加性

定义. 若范畴$\mathcal{A}$满足

1. $\mathcal{A}$中零对象存在；
2. 对$\mathcal{A}$中任意两个对象X, Y，它们的和与积都存在；
3. 若$f : X \to Y$是$\mathcal{A}$中的态射，则$\ker f$与$\operatorname{coker} f$存在；
4. 任意单态射（满足左消去律）都是某个态射的核，任意满态射（满足右消去律）都是某个态射的余核；

则称$\mathcal{A}$是Abel范畴(Abelian category).

练习A.2. 在Abel范畴$\mathcal{A}$中，证明

1. 单态射$f:X\to Y$的核是0，满态射$g:Y\to Z$的余核是0.
2. $0\to X$的余核是$X\xrightarrow{\mathrm{id}_X}X$，$Y\to 0$的核是$Y\xrightarrow{\mathrm{id}_Y}Y$.

Proof. 由于两个部分都有两个互相对偶的命题，因此都只证一部分.

1. $f:X\to Y$是单态射，若$t:T\to X$使得$f\circ t=0$，那么那么有$T\to X\to Y=0\to X\to Y$，根据消去律$t=0$，这意味着$T\to X$有分解$T\to 0\to X$.

2. 这是因为对任意$k:X\to Z$，$0\to X\to Z=0$. □

给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的对象X,Y，记它们的和为$X+Y$或$X\oplus Y$（$X\coprod Y,X\otimes Y$），泛性质诱导的映射分别记为

$$X\xrightarrow{\begin{pmatrix}1&0\end{pmatrix}}X+Y$$

和

$$Y\xrightarrow{\begin{pmatrix}0&1\end{pmatrix}}X+Y.$$

对应地，记它们的积为$X\times Y$或者$X\prod Y$，泛性质诱导的态射为

$$X\times Y\xrightarrow{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}X$$

和

$$X\times Y\xrightarrow{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}}Y.$$

进一步地，若给定了$f:W\to X,g:W\to Y$，根据泛性质存在$W\to X\times Y$，这个映射记为$(f,g):W\to X\times Y$；若给定了$h:X\to Z,k:Y\to Z$，根据泛性质存在$X+Y\to Z$，这个映射记为$\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}:X+Y\to Z$.我们举例说明这样的记号使得态射的符合满足矩阵乘法.考虑给定了$f:W\to X,g:W\to Y$，那么复合

$$W\xrightarrow{\begin{pmatrix}f&g\end{pmatrix}}X\times Y\xrightarrow{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}X$$

用矩阵乘法写出来恰好是$f:W\to X$，满足泛性质.

A.1.2 态射的分解

按定义，$\ker f$给出了X的一个子对象，$\operatorname{coker} f$给出了Y的一个商对象.记$\mathbf{S}X$是范畴$\mathcal{C}$中对象X的所有子对象全体，$\mathbf{Q}X$是X的所有商对象全体，那么ker和coker给出了一对映射

$$\ker:\mathbf{Q}X\leftrightarrows\mathbf{S}X:\operatorname{coker},$$

其中ker将一个满态射给出它的核，coker将单态射给出它的余核.

练习A.3. 验证如上所述的映射是良定义的.更一般地，证明ker是单态射，coker是满态射.

Proof. 我们需要验证两方面：单态射的coker是满态射（对偶地满态射的ker是单态射），且ker把等价的满态射映到等价的单态射（对偶地coker把等价的单态射映到等价的满态射）.

给定态射$f : X \to Y$，我们要验证$Y \to \operatorname{coker}(X \to Y)$有右消去律，即对任意的$k, l : \operatorname{coker}(X \to Y) \rightrightarrows Z$，若$k \circ \operatorname{coker}(X \to Y) = l \circ \operatorname{coker}(X \to Y)$，那么$k = l$.考虑$k - l : \operatorname{coker}(X \to Y) \to Z$，由于$k \circ \operatorname{coker}(X \to Y) = l \circ \operatorname{coker}(X \to Y)$，$(k - l) \circ \operatorname{coker}(X \to Y) = 0 : Y \to \operatorname{coker}(X \to Y) \to Z$，这意味着复合映射$X \to Y \to Z = 0$，按照coker的定义，存在唯一的态射$\operatorname{coker}(X \to Y) \to Z$使得$Y \to \operatorname{coker}(X \to Y) \to Z$是0的分解；但如同之前所述，$k - l$满足分解，$0 : \operatorname{coker}(X \to Y) \to Z$同样满足分解，因此$k - l = 0$，即$k = l$.

假设$X_1 \to Y$和$X_2 \to Y$是等价的单态射，那么存在态射$i : X_1 \leftrightarrows X_2 : j$使得

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[dd, shift right, "i"'] \arrow[dr, "f_1"] & \\
& Y, \\
Y_2 \arrow[uu, shift right, "j"'] \arrow[ur, "f_2"] &
\end{tikzcd}$$

是交换的，根据coker的函子性存在交换图

$$\begin{tikzcd}
& \operatorname{coker}(X_1 \to Y) \arrow[dd, shift left, "\operatorname{coker} i"] \\
Y \arrow[ur, "g_2"] \arrow[dr, "g_1"'] & \\
& \operatorname{coker}(X_2 \to Y) \arrow[uu, shift left, "\operatorname{coker} j"]
\end{tikzcd} ,$$

因此将等价类映到等价类. □

命题A.1. ker和coker是$Abel$范畴$\mathcal{A}$下的互逆映射.

Proof. 给定单态射$f : X \to Y$，于是它是某个态射$Y \to Z$的核.取$C = \operatorname{coker} f$，于是存在唯一的态射$C \to Z$使下图交换：

$$\begin{tikzcd}
\ker(Y \to Z) = X \arrow[dd, dashed] \arrow[dr, "f"] & & C = \operatorname{coker} f \arrow[dd] \\
& Y \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
\ker(Y \to C) = K \arrow[ur, "k"] & & Z.
\end{tikzcd}$$

注意到复合$X \to Y \to C = 0$，于是根据核的泛性质存在$X \dashrightarrow K$使得上图是交换的；同理，$K \to Y \to Z = K \to Y \to C \to Z = 0 \to Z = 0$，存在$K \dashrightarrow X$使得图是交换的，于是据定义$X \xrightarrow{f} Y$与$K \xrightarrow{k} Y$是等价的子对象.

注意到，coker将态射$f : X \to Y$映到$Y \to C = \operatorname{coker} f$，ker再将$Y \to C = \operatorname{coker} f$映到$k : \ker(Y \to C) = K \to Y$，于是$f : X \to Y$等价于$\operatorname{coker}(\ker(f))$，因此$\operatorname{coker} \circ \ker = \mathrm{id}_{\mathbf{S}X}$.同理，对偶地可以证明$\ker \circ \operatorname{coker} = \mathrm{id}_{\mathbf{Q}X}$. □

推论A.1.1. *若$X_1 \to Y$和$X_2 \to Y$是等价的单态射，那$X_1 \to Y$和$X_2 \to Y$是同构的.*

Proof. 设$C = \mathrm{coker}(X_1 \to Y)$，$K = \ker(Y \to C)$，于是根据命题$X_1$（因此$X_2$）与$K$是等价的. 考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "k"] & & \\
X_1 \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r] & C \\
K \arrow[ur, "k"] & &
\end{tikzcd},$$

于是

$$\begin{aligned}
K \to X_1 \to K \to Y \to C &= K \to X_1 \to Y \to C \\
&= K \to Y \to C = 0,
\end{aligned}$$

但根据核的泛性质，存在唯一的$\mathrm{id} : K \to K$使得上图交换，因此$f \circ g = \mathrm{id}_K$，即$X_1 \to Y \cong K \to Y$，这就证明了结论. □

推论A.1.2. *在$Abel$范畴$\mathcal{A}$中，$C = \mathrm{coker}\ f$单态射$f : X \to Y$的余核，那么$f : X \to Y$是$Y \to C$的核.*

Proof. 根据定义，$\mathrm{coker}(X \to Y) = Y \to C$，于是根据之前的命题

$$X \to Y \cong \ker(\mathrm{coker}(X \to Y)) = \ker(Y \to C).$$

□

练习A.4. 证明ker和coker是反序的映射.

练习A.5. 给定Abel范畴中的图

$$W \to X \to Y \to Z,$$

且任意相邻的态射的复合为0，求证$X \to Y$诱导了相容的

$$C = \mathrm{coker}(W \to X) \dashrightarrow K = \ker(Y \to Z).$$

Proof. 考虑

$$\begin{tikzcd}
 & & K \arrow[d] & \\
W \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[r] & Z \\
 & C \arrow[uur, dashed] \arrow[ur, dashed] & &
\end{tikzcd}$$

由于$W \to X \to Y = 0$，按定义存在$C \dashrightarrow Y$与图交换，于是$X \to C \dashrightarrow Y \to Z = 0$，根据$X \to C$是满态射，$C \dashrightarrow Y \to Z = 0$，再由$K$的泛性质存在$C \dashrightarrow K$与整幅图交换. □

定理A.2. *设$f : X \to Y$是$Abel$范畴中的态射，且f同时是单态射和满态射，于是f是同构.*

Proof. 由于$f : X \to Y$是满射，0是coker $f.Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y} Y$是$Y \to 0$的核，且根据前面的命题，$f : X \to Y$也是$Y \to 0$的核，因此根据核的泛性质， □

设W, X是Abel范畴$\mathcal{A}$中对象Y的两个子对象，那么称同时为W和X的子对象的Y的子对象的极大子对象为W与X的交(intersection)，记为$W \cap X$.

> **命题A.3.** *Abel范畴$\mathcal{A}$中元素Y的任意两个子对象W, X都有交.*

Proof. 令$Z = \mathrm{coker}(W \to Y)$，$K = \ker(X \to Y \to Z)$，于是

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r] \arrow[d, dashed] & X \arrow[d] & \\ W \arrow[r] & Y \arrow[r] & Z \end{tikzcd}$$

中$K \to X \to Y \to Z = 0$，由前面W是的$Y \to Z$的核，因此存在唯一的$K \dashrightarrow W$使得图是交换的.

接下来只要证明对任意Y的子对象S，若它同时还是X和W的子对象，则它是K的子对象.给定交换图

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d] \\ W \arrow[r] & Y, \end{tikzcd}$$

使得$i : S \to X$和$j : S \to W$都是单态射，那么$S \to X \to Y \to Z = S \to W \to Y \to Z = (S \to W) \circ 0 = 0$，于是存在唯一的态射$S \to K$使得$S \to K \to X = i$.同时，再根据$W$是的$Y \to Z$的核，存在唯一的$j : S \to W$使得图交换，但$S \to K \dashrightarrow W$也满足该交换图，因此$S \to K \dashrightarrow W = j$.这意味着$K$是$W, X$的交. □

推论A.3.1. *设$f : Y \to X$和$g : Z \to X$是Abel范畴$\mathcal{A}$中的单态射，则存在纤维积$Y \times_X Z$.*

Proof. 由于f, g都是单态射，存在它们的交，记为$i : K \to X, j : K \to Y$.任取$W \xrightarrow{h} Y, W \xrightarrow{k} Z$满足交换图

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "h"] \arrow[d, "k"'] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & X, \end{tikzcd}$$

令$C = \mathrm{coker}(Z \to X)$，于是$W \to Y \to X \to C = W \to Z \to X \to C = W \to 0 = 0$，根据前面的证明，$K$是$Y \to X \to C$的核因此存在唯一的$W \dashrightarrow K$使得图（不包括蓝色部分）

$$\begin{tikzcd} W \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[ddr, bend right, "k"', blue] & & & \\ & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & Y \arrow[d] & \\ & Z \arrow[r] & X \arrow[r] & C \end{tikzcd}$$

是交换的，并且

$$W \xrightarrow{h} Y \to X \to C = W \dashrightarrow K \to Z \to Y \to C = 0,$$

注意到Z是$X\to C$的核因此有唯一的分解$W\to Z\to X\to C$，但是$h:W\to Z$和$W\dashrightarrow K\to Z$都满足分解，因此如上的图是交换的.

我们再来证明这样的$W\dashrightarrow K$是唯一的.对于任意满足交换图的态射$g:W\to K$，它必然是$W\to Y\to X\to C=0$的分解，因此根据$K=\ker(Y\to X\to C)$分解是唯一的. $\square$

> **命题A.4.** 对任意$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射$f:X\to Y$和$g:X\to Y$，它们的等值子存在.

Proof. 考虑$X\xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & f\end{pmatrix}}X\times Y$和$X\xrightarrow{\begin{pmatrix}1 & g\end{pmatrix}}X\times Y$，它们都有左逆因此都是单态射，由前面的命题存在交，记为K，满足交换图

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"'] & X \arrow[d, "\begin{pmatrix}1 & f\end{pmatrix}"] \\ X \arrow[r, "\begin{pmatrix}1 & g\end{pmatrix}"'] & X\times Y, \end{tikzcd}$$

其中K是拉回.再次根据左逆的存在性，$i=j$，于是按定义拉回的泛性质说明K是f,g的等值子. $\square$

> **定理A.5.** 设$f:Y\to X$和$g:Z\to X$是$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射，则存在纤维积$Y\times_X Z$.

Proof. 考虑

$$\begin{tikzcd} Y\times Z \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & X, \end{tikzcd}$$

它们的等值子满足相应的泛性质，因此定理成立. $\square$

> **引理A.1.** 设如下$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的拉回交换图
>
> $$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "g"] & U, \end{tikzcd}$$
>
> 那么h诱导了同构$\ker l\cong\ker g$，更准确地讲，若(K,k)是l的核，则(K,hk)是g的核.（对偶地推出图诱导了余核的同构,）由此如果f是满态射那么h是满态射.

Proof. 任取$w:W\to Y$使得$W\to Y\to U=0$，因此

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[dr, dashed] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[ddr, bend right, "w"'] & & \\
& Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\
& Y \arrow[r, "g"] & U
\end{tikzcd}$$

构成了交换图.由于Z是拉回，因此存在$W \dashrightarrow Z$与整幅图交换，这意味着$W \dashrightarrow Z \to X = 0$，由于$K$是$Z \to X$的核，存在唯一的$W \to K$使得$W \to K \to Z = W \dashrightarrow Z$.这样验证了$(K, hk)$是$g$的核的泛性质，因此$h$诱导了同构.

现在假设f是满态射，那么由于Z是拉回，

$$0 \to Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} l & h \end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}} U$$

是正合的，同时f是满态射意味着对任意$u, v : U \rightrightarrows V$，若$u \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} = v \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$则$uf = vf$，因此$u = v$，即$\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$是满态射，所以

$$0 \to Z \xrightarrow{\begin{pmatrix} l & h \end{pmatrix}} X \times Y \xrightarrow{\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}} U \to 0$$

是短正合序列.这样，交换图

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "l"] \arrow[d, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r, "g"] & U,
\end{tikzcd}$$

同时是推出，因此上段讨论的对偶说明$\mathrm{coker}\ h = \mathrm{coker}\ f = 0$，即$h$是满态射. □

定义. 给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的态射$f : X \to Y$，称

$$\ker \mathrm{coker}\ f$$

为f的像(image)，记为$\mathrm{im}\ f$.

命题A.6. *Abel范畴$\mathcal{A}$中的态射$f : X \to Y$的像是使得复合*

$$X \to \mathrm{im}\ f \to Y$$

是$f : X \to Y$的最小的Y的子对象.

Proof. 首先我们证明，Y的子对象$S \hookrightarrow Y$使得分解$X \to S \to Y = X \to Y$存在当且仅当$X \to Y \to \mathrm{coker}(S \hookrightarrow Y) = 0$.一方面，若$Y$的子对象$S \hookrightarrow Y$使得分解$X \to S \to Y = X \to Y$存在，那么$X \to Y \to \mathrm{coker}(S \to Y) = X \to S \to Y \to \mathrm{coker}(S \to Y) = X \to 0 = 0$；另一方面，若$Y$的子对象$S \hookrightarrow Y$使得$X \to Y \to \mathrm{coker}(S \hookrightarrow Y) = 0$，根据推论??，$S \to Y$是$Y \to \mathrm{coker}(S \hookrightarrow Y)$的核，因此存在$X \dashrightarrow S$使得$X \dashrightarrow S \to Y = X \to Y$.

根据推论??，$\mathrm{coker}(\mathrm{im}\, f) = \mathrm{coker}(\ker(\mathrm{coker}(X \to Y))) = \mathrm{coker}(X \to Y)$，因此$X \to Y \to \ker(\mathrm{im}\, f) = 0$，于是存在分解

$$X \to \mathrm{im}\, f \to Y = X \to Y.$$

若还有另一个分解$X \to J \to Y = X \to Y$，由前一段的讨论，$X \to Y \to \mathrm{coker}(J \to X) = 0$，因此存在（满）态射$\mathrm{coker}(X \to Y) = \mathrm{coker}(\mathrm{im}\, f) \to \mathrm{coker}(J \to X)$，根据ker的函子性这对应了唯一的（单）态射$\mathrm{im}\, f = \ker(\mathrm{coker}(X \to Y)) \dashrightarrow J = \ker(\mathrm{coker}(J \to X))$，因此是最小的.此外如图

$$\begin{tikzcd}
& \mathrm{im}\, f \arrow[dd, dashed, "\varphi"] \arrow[dr, "i"] & & \\
X \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "q"'] & & Y \arrow[r, "g"] & C, \\
& J \arrow[ur, "j"'] & &
\end{tikzcd}$$

右侧是交换的，因此

$$\begin{aligned} j \circ \varphi \circ p &= i \circ p \\ &= j \circ q, \end{aligned}$$

由于j是单态射，这意味着$\varphi \circ p = q$，即整幅图是交换的. □

对偶地，可以的定义态射$f : X \to Y$的余像(coimage)是coker ker f，那么如上命题对偶地说明余像是使得复合$X \to \mathrm{coim}\, f \to Y$是$f : X \to Y$的最大的$X$的商对象.

推论A.6.1. 设$f : X \to Y$是$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射，则

1. f是满态射当且仅当$\mathrm{im}\, f = Y$，当且仅当$\mathrm{coker}\, f = 0$；

2. f是单态射当且仅当$\ker f = 0$，当且仅当$\mathrm{coim}\, f = X$.

推论A.6.2. 给定$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射$f : X \to Y$，$X \to \mathrm{im}\, f$是满态射.

Proof. 假设$X \to \mathrm{im}\, f$不是满态射，那么$\mathrm{im}\, f \neq Y$，取$J = \ker(\mathrm{im}\, f \hookrightarrow Y)$，它是严格小于$\mathrm{im}\, f$的子对象，于是$J \hookrightarrow \mathrm{im}\, f \hookrightarrow Y$是子对象，因此存在交换图

$$\begin{tikzcd}
J \arrow[d] \arrow[dr] & & \\
\mathrm{im}\, f \arrow[r, "i"] & Y \arrow[r] \arrow[dr] & \mathrm{coker}(\mathrm{im}\, f \hookrightarrow Y) \arrow[d] \\
& & \mathrm{coker}(J \hookrightarrow Y)
\end{tikzcd}$$

这意味着$X \to Y \to \operatorname{coker}(J \hookrightarrow Y) = X \to Y \to \operatorname{coker}(\operatorname{im} f \hookrightarrow Y) \to \operatorname{coker}(J \hookrightarrow Y) = 0 \to \operatorname{coker}(J \hookrightarrow Y) = 0$，于是$X \to J \to Y$是一个分解.同时，$X \to J \to \operatorname{im} f \to Y = X \to J \to Y = X \to \operatorname{im} f \to Y$，且$\operatorname{im} f \to Y$是单态射，因此$X \to J \to \operatorname{im} f = X \to \operatorname{im} f$，即$J$是使得分解成立的更小的子对象.这与$\operatorname{im} f$是满足分解最小的子对象矛盾，因此$X \to \operatorname{im} f$是满态射. □

定理A.7. *设$f : X \to Y$是Abel范畴$\mathcal{A}$中的态射，则存在唯一的分解*

$$X \xrightarrow{p} I \xrightarrow{i} Y,$$

使得$p : X \to I$是满态射，$i : i \to Y$是单态射.

此外，如果$k : K \to X$是$f : X \to Y$的核，$c : Y \to C$是$f : X \to Y$的余核，则$k : K \to X$也是$p : X \to I$的核，$c : Y \to C$也是$i : I \to Y$的余核，且$i : I \to Y$是$c : Y \to C$的核，$p : X \to I$是$k : K \to X$的余核.

Proof. 首先我们来证明分解的唯一性.假设我们有两个不同的对象$I, \bar{I}$满足上述分解，于是我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
& I \arrow[dr, "i"] & & \\
X \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "\bar{p}"'] & & Y \arrow[r, "g"] & Z, \\
& \bar{I} \arrow[uu, dashed, "\varphi"] \arrow[ur, "\bar{i}"'] & &
\end{tikzcd}$$

其中$i : I \to Y$是$g : Y \to Z$的核. 由核的定义，我们有$g \circ i = 0$，进而$g \circ \bar{i} \circ \bar{p} = g \circ f = g \circ i \circ p = 0$.但$\bar{p}$是满态射说明$\bar{p}$存在右消去，故$g \circ \bar{i} = 0$.再根据核的分解，存在唯一的$\varphi : \bar{I} \to I$使得右边三角形交换，即$i \circ \varphi = \bar{i}$.故$i \circ \varphi \circ \bar{p} = \bar{i} \circ \bar{p} = f = i \circ p$.但$i$是单态射因此存在左消去，于是$\varphi \circ \bar{p} = p$.这样就证明了$\varphi$使整个图交换.同样地，我们可以构造$\psi : I \to \bar{I}$使整幅图交换，根据抽象无意义$\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_I$且$\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\bar{I}}$，故$I \cong \bar{I}$，唯一性得证.

推论?? 说明了$I = \operatorname{im} f$是满足条件的的一个分解，因此分解是存在的.同时$J = \operatorname{coim} f$也是一个分解，因此根据刚刚证明的分解的唯一性，$\operatorname{im} f \cong \operatorname{coim} f$.这意味着剩余的论断是成立的. □

练习A.6. 设$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$是Abel范畴$\mathcal{A}$中的态射，求证$g \circ f = 0$当且仅当$\operatorname{im} f$是$\ker g$的子对象.

A.1.3　正合性

定理A.8. *设$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$是Abel范畴$\mathcal{A}$中的态射，则如下描述等价：*

1. $\operatorname{im}(X \to Y) = \ker(Y \to Z)$;
2. $\operatorname{coker}(X \to Y) = \operatorname{coim}(Y \to Z)$;
3. $X \to Y \to Z = 0$且$\ker(Y \to Z) \to Y \to \operatorname{coker}(X \to Y) = 0$.

Proof. 我们来证明1与3是等价的，这样对偶地可以证明2与3是等价的.

若1是成立的，记$I := \mathrm{im}(X \to Y) = \ker(Y \to Z)$，于是根据分解$X \to Y \to Z = X \to I \to Y \to Z = X \to 0 = 0$.另一方面，$\ker(Y \to Z) = \mathrm{im}(X \to Y) = \ker(\mathrm{coker}(X \to Y))$，因此直接由定义

$$\ker(Y \to Z) \to Y \to \mathrm{coker}(X \to Y) = \ker(\mathrm{coker}(X \to Y)) \to Y \to \mathrm{coker}(X \to Y) = 0.$$

若3是成立的，记$I := \mathrm{im}(X \to Y) = \ker(\mathrm{coker}(X \to Y))$，$\ker(Y \to Z) \to Y \to \mathrm{coker}(X \to Y) = 0$意味着存在唯一的$\ker(Y \to Z) \dashrightarrow I$与已知的态射相容，并且它是单态射，于是$\ker(Y \to Z) \leq I$.同时，$X \to Y \to Z = 0$蕴含着分解$X \to \ker(Y \to Z) \to Y \to Z = 0$，同时命题**??**说明$X \to I \to Y$是最小的分解，因此存在单态射$I \to \ker(Y \to Z)$，这样$\ker(Y \to Z) = I$. □

对于满足以上任意条件的态射序列$X \to Y \to Z$，称该序列在Y处正合(exact).

定理A.9 (Abel范畴的稳定性). *设$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$是$Abel$范畴$\mathcal{A}$中的态射，则如下描述等价：*

1. $0 \to X \to Y \to Z \to 0$*是短正合序列；*
2. *图*

$$\begin{CD} X @>>> Y \\ @VVV @VVV \\ 0 @>>> Z \end{CD}$$

是拉回图；

3. *图*

$$\begin{CD} X @>>> Y \\ @VVV @VVV \\ 0 @>>> Z \end{CD}$$

是推出图.

A.1.4 Abel范畴中对象的元素和态射

事实上，我们并不需要完全范畴化地处理Abel范畴，公理所保证的性质使我们可以用类似处理元素的方式处理Abel范畴中的对象.我们将详细地构建这样的技术，于是Abel范畴事实上与**Ab**并没有特别多的区别.

给定Abel范畴$\mathcal{A}$中的对象Y，Y中的对象y是如下等价类(X, h)，其中$X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{A}$，$h : X \to Y$，$(X_1, h_1)$等价于$(X_2, h_2)$当且仅当

- 存在$Z \in \mathrm{ob}\,\mathcal{A}$和满态射$u_1 : Z \to X_1, u_2 : Z \to X_2$满足$h_1 u_1 = h_2 u_2$，即有交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dr, "h_1"] & \\
Z \arrow[ur, "u_1"] \arrow[dr, "u_2"'] & & Y \\
 & X_2. \arrow[ur, "h_2"'] &
\end{tikzcd}
$$

由引理??如上所述的关系是等价关系.一般并没有通常的方法使得集合之间的映射$\{Y_1\text{中的元素}\} \to \{Y_2\text{中的元素}\}$对应到$\mathcal{A}$中的态射$Y_1 \to Y_2$，但反过来当给定了态射之后可以构造自然的集合间的映射，并且元素的存在可以帮我们简单地验证正合性：

定理A.10. 设$f : Y_1 \to Y_2$是$Abel$范畴中的态射，y是Y_1的元素，有代表元(X, h)，求证f给出了集合间的映射

$$
\begin{aligned}
f : \{Y_1\text{中的元素}\} &\to \{Y_2\text{中的元素}\} \\
[(X, h)] &\mapsto [(X, f \circ h)],
\end{aligned}
$$

并且

1. $f : Y_1 \to Y_2$是单态射当且仅当$f(y) = 0$意味着$y = 0$，
2. $f : Y_1 \to Y_2$是单态射当且仅当$f(y_1) = f(y_2)$意味着$y_1 = y_2$，
3. $f : Y_1 \to Y_2$是满态射当且仅当对任意Y_2的元素z，存在Y_1的元素y使得$f(y) = z$，
4. $f : Y_1 \to Y_2$是0态射当且仅当对任意Y_1的元素y，$f(y) = 0$，
5. 序列$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$在$Y$处正合当且仅当$g \circ f = 0$并且对任意的$y \in Y$，若$g(y) = 0$则存在$x \in X$使得$f(x) = y$，
6.

Proof. □

引理A.2 (5引理)**.**

定理A.11 (蛇形引理)**.** 给定交换图

$$
\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f"] & Y_1 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "g"] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "\beta_1"] & Y_2 \arrow[r, "\beta_2"] & Z_2, &
\end{tikzcd}
$$

那么存在长正合序列

$$\ker f \xrightarrow{a_1} \ker g \xrightarrow{a_2} \ker h \xrightarrow{\delta} \operatorname{coker} f \xrightarrow{b_1} \operatorname{coker} g \xrightarrow{b_2} \operatorname{coker} h,$$

其中a_1, a_2和b_1, b_2分别由α_1, α_2和β_1, β_2诱导，连接态射$\delta : \ker h \to \operatorname{coker} f$

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[r] \arrow[d, equal] & K \arrow[r] \arrow[d] & \ker h \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & X_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f"] & Y_1 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "g"] & Z_1 \arrow[r] \arrow[d, "h"] & 0 \\
0 \arrow[r] & X_2 \arrow[r, "\beta_1"] \arrow[d] & Y_2 \arrow[r, "\beta_2"] \arrow[d] & Z_2 \arrow[d, equal] & \\
0 \arrow[r] & \operatorname{coker} f \arrow[r] & C \arrow[r] & Z_2 &
\end{tikzcd}$$

练习A.7. 假定对Abel范畴$\mathcal{A}$蛇形引理成立，求证5引理成立.

Proof.
$$\begin{tikzcd}
A_1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "f_1"] & A_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & A_4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[d, "f_4"] & A_5 \arrow[d, "f_5"] \\
B_1 \arrow[r, "\beta_1"] & B_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & B_4 \arrow[r, "\beta_4"] & B_5
\end{tikzcd}$$

考虑

$$\begin{tikzcd}
 & A_2/\ker \alpha_2 \arrow[r, "\alpha_2"] \arrow[d, "f_2"] & A_3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[d, "f_3"] & \ker \alpha_4 \arrow[r] \arrow[d, "f_4"] & 0 \\
0 \arrow[r] & B_2/\ker \beta_2 \arrow[r, "\beta_2"] & B_3 \arrow[r, "\beta_3"] & \ker \beta_4 &
\end{tikzcd}$$

□

A.1.5 Abel范畴中的特殊对象

定义. 设P是Abel范畴$\mathcal{A}$中的对象，满足对任意的满态射$f : X \to Y$和任意态射$g : P \to Y$，都可以找到$h : P \to X$使得$g = f \circ h$，

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "g"] & \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

练习A.8. 设$s : P \to P$是Abel范畴$\mathcal{A}$中的态射，(P, s)是$\mathcal{A}/P$的投射对象，证明P是$\mathcal{A}$中的投射对象.

Proof. 任取$\mathcal{A}$中的满态射$g : X \to Y$， □

A.2 Abel范畴间函子

定义. 若$\mathcal{C},\mathcal{D}$加性范畴，协变函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$满足对任意$\mathcal{C}$中的对象$X,Y$，由$F$诱导的映射$\hom_{\mathcal{C}}(X,Y)\to\hom_{\mathcal{D}}(F(X),F(Y))$是群同态，则称$F$是加性函子(additive functor).

定理A.12. *设$\mathcal{A},\mathcal{B}$是$Abel$范畴，$F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$是加性函子当且仅当$F$保直和.*

命题A.13. *$Abel$范畴间的左正合函子是加性的.*

定义. 若范畴间协变函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$满足对任意$\mathcal{C}$中的对象$A,B$，由$F$诱导的映射$\hom_{\mathcal{C}}(A,B)\to\hom_{\mathcal{D}}(F(A),F(B))$是单射，则称$F$是嵌入(embedding).

定理A.14. *设$\mathcal{A},\mathcal{B}$是$Abel$范畴，$F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$是加性函子，则下列陈述等价*

1. *F是嵌入.*
2. *F将非交换图映为非交换图.*
3. *F将非正合序列映为非正合序列.*

A.2.1 Serre subcategory

A.3 嵌入定理

练习A.9. 设k是域，$k-\mathbf{grMod}$是所有$\mathbb{Z}$分次k模组成的范畴，满足

$$\mathrm{Hom}(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n,\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}W_n):=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}\mathrm{Hom}(V_n,W_n),$$

$\mathcal{A}$是所有微分态射为0的k微分模组成的范畴，求证

$$\begin{aligned}F:k-\mathbf{grMod}&\to\mathcal{A}\\ \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n&\mapsto(\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n[n],d=0)\end{aligned}$$

是范畴的等价.