# 余切复形

G.Li

在交换代数中，环同态 $\alpha : R \to A$ 的光滑性可以通过相对微分模 $\Omega_{A/R}$ 来描述，由于

$$\Omega_{-/R} : R-\mathbf{Algebra} \to R-\mathbf{Mod}$$

是一个函子，因而给定一个单纯 $R$ 代数 $A_*$，都可以由这个函子得到一个单纯 $R$ 模 $(\Omega_{A/R})_*$，且一个单纯 $R$ 代数态射 $f : A_* \to B_*$ 也给出单纯 $R$ 模态射 $(\Omega_{f/R})_*$.

**定义.** 给定环同态 $f : R \to S$，若 $A_*$ 是 $s(S)_*$ 在 $s(R)_*$ 上的单纯预解，令

$$\mathcal{L}_{S/R} := \Omega_{A/R} \otimes_A s(S)_*,$$

于是 $\mathcal{L}_{S/R}$ 是一个单纯 $s(S)_*$ 模，称它对应的复形 $L_{S/R}$ 为 $S$ 在 $R$ 上的余切复形 (cotangent complex of $S$ over $R$).

由于单纯预解是同伦下唯一的，于是 $L_{S/R}$ 是良定义的.

**练习 1.** 设 $s(R)_* \hookrightarrow A_* \twoheadrightarrow s(S)_*$ 是一个单纯预解，令

$$I := \mathrm{Ker}\ A_* \to s(S)_*,$$

证明存在单纯 $s(S)_*$ 模同构

$$I/I^2 \cong \mathcal{L}_{S/R}.$$

**定义.** 给定 $R$ 代数 $A$ 和 $A$ 模 $M$，借助余切复形可以定义 André-Quillen 同调 (André-Quillen homology)（对应地，André-Quillen 上同调 (André-Quillen cohomology)）为

$$D_n(A/R, M) := H_n(L_{A/R} \otimes_S M)$$

（对应地，$D^n(A/R, M) := H_{-n}(\mathrm{Hom}(L_{A/R}, M))$）.

**例 1.** *设 $X$ 是未定元的集合，$R$ 是交换环且 $S = R[X]$ 是以 $X$ 为未定元的 $R$ 多项式代数，那么*

$$\mathcal{L}_{S/R} \simeq s(\Omega_{S/R})_*,$$

*进而对任意 $n > 0$，$D^n(S/R, M) = D_n(S/R, M) = 0$.*

**引理 1.** *设 $R$ 是交换环.*

1. *若 $P$ 是投射 $R$ 模，那么扩张*

$$\mathcal{L}_{\mathrm{Sym}_R(P)/R} \to s(\Omega_{\mathrm{Sym}_R(P)/R})_*$$

*是弱等价.*

*2.* 若 $A, B$ 是 $R$ 代数，且 $A, B$ 中至少一个是 $R$ 平坦的，那么

$$s(A\otimes_R B)_*\otimes_{s(A)_*}\mathcal{L}_{A/R}\oplus s(A\otimes_R B)_*\otimes_{s(B)_*}\mathcal{L}_{B/R}\to\mathcal{L}_{s(A\otimes_R B)_*/R}$$

是 $s(A\otimes_R B)_*$ 模同构.

**命题 1** (基变换)**.** 设 $R$ 是交换环，$A$ 是 $R$ 代数，$f: R\to S$ 是交换环间的态射，因此有

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{f} & S \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A\otimes_R S, \end{array}$$

这诱导了单纯 $s(A\otimes_R S)_*$ 模同态

$$\mathcal{L}_{A/R}\otimes_{s(A)_*} s(A\otimes_R S)_*\to\mathcal{L}_{A\otimes_R S/S}.$$

**定理 2** (平坦基变换)**.** *如定理 1中的条件，若 $f, \alpha$ 中任意一个是平坦的，则定理 1中诱导的同态是弱等价.*

**定理 3.** *设 $R\to S\to T$ 是交换环的映射，那么*

$$s(T)_*\otimes\mathcal{L}_{S/R}\to\mathcal{L}_{T/R}\to\mathcal{L}_{T/S}$$

*是单纯 $s(T)_*$ 模的余纤维序列，于是对任意的 $T$ 模 $P$，存在 $T$ 模长正合序列*

$$\cdots\to D_1(S/R, P)\to D_1(T/R, P)\to D_1(T/S, P)\to P\otimes_T\Omega_{S/R}\to P\otimes_T\Omega_{T/R}\to P\otimes_T\Omega_{T/S}\to 0,$$

*特别地，当 $P=T$ 时，这个序列是相对余切序列的延申.*

**定理 4.** *交换环的态射 $f: R\to S$ 是光滑的当且仅当 $L_{S/R}\to\Omega_{S/R}$ 是弱等价且 $\Omega_{S/R}$ 是投射 $S$ 模. 特别地，$f$ 是平展的当且仅当 $L_{S/R}$ 只有平凡上同调.*

以上的三个定理证明都需要用到模型范畴，我们略过.

除此之外，我们还有一种对余切复形更加范畴化的构造方式，它来源于 Quilen. 定理 3告诉我们，$L_{A/R}$ 事实上是 $\Omega_{A/R}$ 的导出函子，但在之前的构造我们并没有用同调代数中已经存在的结果，这主要的原因是范畴 $R-\mathbf{Algebra}$ 不是一个 Abel 范畴（原因：一个 $R$ 代数同态 $f: A\to B$ 没有核）.Quillen 的想法是将这个范畴 “Abel 化”，这就是在后面讨论的内容. 引理 3在另一方面说明范畴 $R-\mathbf{Algebra}$ 不是合适的范畴.

我们尝试用两个例子说明这样的考虑是合适的: 考虑 $Y$ 是一个拓扑空间，$X$ 是它的 CW 逼近. 令 $\mathrm{Ab}(X)$ 是 $X$ 上的自由拓扑 Abel 群，那么 Dold-Thom 定理说明

$$\pi_*(\mathrm{Ab}(X))\cong H_*(X)\cong H_*(Y).$$

注意到我们在求 $\mathrm{Ab}(-)$ 之前必须要找一个 CW 逼近，用模型范畴的语言来说，这是一个余纤维替代 (cofibrant replacement). 所以我们可以把奇异复形看作 $\mathrm{Ab}(-)$ 的导出函子. 另一个例子来源于单纯代数的同伦群，Dold-Kan 对应说明一个单纯代数 $A_*$ 的同伦群与它的 Abel 化的同调群是一样的. 这里我们不需要取余纤维替代，只是因为单纯代数的范畴中所有的对象都是余纤维.

**定义.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴，若 $\mathcal{C}$ 中的对象 $A$ 满足函子 $\hom_{\mathcal{C}}(-, A): \mathcal{C}\to\mathbf{Set}$ 可以分解为

$$\mathcal{C}\to\mathbf{Ab}\xrightarrow{U}\mathbf{Set},$$

则称 $A$ 是 Abel 群对象 (abelian group object). 对 Abel 群对象 $A, B$，态射 $f : A \to B$ 若满足对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 $C$，映射

$$\hom_{\mathcal{C}}(C, f) : \hom_{\mathcal{C}}(C, A) \to \hom_{\mathcal{C}}(C, B)$$

都是群同态，则称 $f$ 是 Abel 群对象态射 (a morphism of abelian group objects).

对范畴 $\mathcal{C}$ 记它的 Abel 群对象和 Abel 群对象态射组成的范畴为 $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$.

**引理 2.** *对任意范畴 $\mathcal{C}$，*

$$s(\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}) \simeq (s\mathcal{C})_{\mathrm{ab}}.$$

**练习 2.** 设范畴的嵌入 $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 有左伴随 $\mathrm{Ab} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$，那么嵌入 $s\mathcal{C}_{\mathrm{ab}} \hookrightarrow s\mathcal{C}$ 也有左伴随，在每一层都是 Ab.

**定义.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个模型范畴，且 $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$ 上也有模型范畴结构，满足 $\mathcal{C}_{\mathrm{ab}} \hookrightarrow \mathcal{C}$ 是右 Quillen 伴随，有左 Quillen 伴随 $\mathrm{Ab} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}_{\mathrm{ab}}$，称为 Abel 化 (abelianisation).

**引理 3.** *$R - \mathbf{Algebra}$ 中的 Abel 群对象只有零代数.*

设 $R$ 是给定的交换环，$A$ 是给定的 $R$ 代数，接下来我们的讨论都限定在范畴 $R - \mathbf{Algebra}/A$ 中，即所有的 $R$ 代数映射 $f : A \to B$ 的全体（注意这里的斜线范畴的方向与正常情况是反过来的，因为最终我们需要对环求 Spec，于是所有箭头的方向会反过来）. 考虑函子

$$\ltimes : A - \mathbf{Mod} \to R - \mathbf{Algebra}/A$$
$$M \mapsto A \ltimes M,$$

其中，$A \ltimes M$ 作为 $A$ 模是 $A \oplus M$，且乘法满足

$$(a, m) \cdot (b, n) := (ab, an + bm).$$

**命题 5.** *函子 $\ltimes : A - \mathbf{Mod} \to R - \mathbf{Algebra}/A$ 有分解 $A - \mathbf{Mod} \to (R - \mathbf{Algebra}/A)_{\mathrm{ab}} \hookrightarrow R - \mathbf{Algebra}/A$，并且给出了范畴的等价*

$$A - \mathbf{Mod} \simeq (R - \mathbf{Algebra}/A)_{\mathrm{ab}}.$$

*证明.* □

**定理 6.**

$$\Omega_{-/R} \otimes_{-} A : R - \mathbf{Algebra}/A \leftrightarrows A - \mathbf{Mod} : \ltimes$$

*是一对伴随函子.*

于是根据练习 2，这个伴随可以扩张到

$$s(R - \mathbf{Algebra}/A) \leftrightarrows s(A - \mathbf{Mod}).$$

在给定两个范畴正确的模型范畴结构后，可以证明

**引理 4.** *上述提到的左右伴随函子都是 Quillen 伴随.*

**定义.** 余切复形函子是全左导出函子

$$\mathcal{L}\mathrm{Ab} : D(s(R - \mathbf{Algebra}/A)) \to D(s(A - \mathbf{Mod})).$$

$R$ 代数 $A$ 的余切复形是

$$\mathcal{L}_{A/R} := \mathcal{L}\mathrm{Ab}(s(A)_*).$$