抽象代数

2021 年 8 月 7 日

第一部分

群论

第一章　群作用

1.1　Sylow定理

命题1.1. *设G是有限群，H是G的子群，G包含有一个p-Sylow子群P，则存在$g \in G$使得$H \cap gPg^{-1}$是H的p-Sylow子群.*

Proof. 令

$$X := G/P$$

是P在G中的左陪集的全体，G按照左乘作用在X上.注意到对任意$x = gP \in X$，由定义

$$\begin{aligned} H_x &= \{h \in H \mid hgP = gP\} \\ &= H \cap G_x \\ &= H \cap gPg^{-1}, \end{aligned}$$

于是我们只需要证明存在$x \in X$使得$p \nmid [H : H_x]$，这就意味着H_x是一个p-Sylow子群.如果不满足，则

$$\begin{aligned} |X| &= \sum_{i=1}^{h} |X_i| = \sum_{i=1}^{h} |H \cdot x_i| \\ &= \sum_{i=1}^{h} [H : H_x], \end{aligned}$$

进而$p \mid |X|$，这与P是G的p-Sylow子群矛盾. □

定理1.2. *任意有限群G都有p-Sylow子群，其中$p \mid |G|$是一个素数.*

Proof. $G \hookrightarrow \mathscr{S}_n \hookrightarrow$ □

定理1.3. *任意有限群G都有p-Sylow子群，其中$p \mid |G|$是一个素数.*

Proof. $G \hookrightarrow \mathscr{S}_n \hookrightarrow$ □

1.2　两个特殊的单群

引理1.1 (Iwasawa). *设群G作用在集合X上是双传递的，并且*

(i) G是完备(perfect)的，即G没有非平凡的$Abel$商群；

(ii) 存在$x \in X$，稳定子G_x包含一个$Abel$正规子群A，使得

$$\bigcup_{g \in G} gAg^{-1}$$

生成G，

则G/H是单群，其中H是G作用在X上的核.

Proof. 设N是G的真包含H的正规子群，我们希望证明$N = G$.

设x是条件中描述的元素，取$M := G_x$，由双传递知，M是极大子群，而且$H \subseteq M$.于是，$NM = M$或G.若$NM = M$，取$h \in N, g \in G$，那么$g^{-1}hg \in N \subseteq M$，进而$hgM = gM$，这意味着$h$作用在$G/M = G/G_x = X$上是稳定的，即$h \in H$，矛盾.于是，$NM = G$.

令$\tilde{G} := G/N$，$\tilde{A}$是A在$\tilde{G}$下的像，那么映射

$$M \to G \to \tilde{G}$$

是满射，于是$\tilde{A}$是$\tilde{G}$的正规子群.注意到$\bigcup_{g \in G} gAg^{-1}$生成了$G$，我们自然有$\bigcup_{g \in G} g\tilde{A}g^{-1}$生成了$\tilde{G}$.这意味着$\tilde{A} = \tilde{G}$，即$\tilde{G}$是Abel群，根据(i)我们有$N = G$. □

定理1.4. *设K是域，n是不小于2的整数，$|K| > 3$，则$PSL_n(K)$是单群.*

Proof. 考虑$G := SL_n(K)$作用在$X := \mathbb{P}^{n-1}(K)$，我们需要验证：

(i) G作用在X上是双传递的.事实上，G作用在X上是n-传递的.

(ii) 取$x := [1, 0, \cdots, 0]$，于是

$$G_x = \left\{ \begin{pmatrix} a & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \right\},$$

其中

$$A := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & I & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \right\}$$

是我们希望的Abel正规子群.设$1 \leq i, j \leq n$是不同的整数，那么$I + cE_{i,j} \in SL_n(K)$，并且$I + cE_{i,j}$与A中的某个元素共轭.但是

$$SL_n(K) = gen. I + cE_{i,j}.$$

最后证明G是完备的.这只要证明$\{I + cE_{i,j}\}$是交换子. □

Group with operators:

定义. Fix a set Ω, an $\Omega-$group (or a group with operator set Ω) is a group $(G, -)$ s.t. for all $x \in \Omega$ and $g \in G$, we have a $g^x \in G$ satisfying $(g_1 g_2)^x = g_1^x g_2^x$ for all $g_1, g_2 \in G$.

Example: $\Omega = \emptyset \to$ usual groups

A Ω-subgroup is H of G is a subgroup is a subgroup stable under Ω actions.

设G是幂零群，H是G的真子群.那么H也是$N_G(H)$的真子群.

Proof. 对G的幂零长度进行归纳.

取$A = Z(G)$，于是G/A的幂零长度小于n.若$A \subseteq H$，则归纳假设说明.若$A \subsetneq H$，则我们已经找到H之外的元素. □

设G是有限群，则下列描述等价：

(i) G是幂零的；

(ii) G是p群的积；

(iii) 对任意素数p，G包含唯一的p-Sylow子群；

(iv) G中任意两个互素阶元素交换.

第二章　习题

练习2.1. 设S是一个半群，那么下面论断等价：

(i) $\forall a, b \in S$，$ab = a$或$\forall a, b \in S$，$ab = b$；

(ii) $\forall a, b, c, d \in S$，$ac = bd \Rightarrow a = b$或$c = d$；

(iii) 设f是S上的任意映射，$f(ab) = f(a)f(b)$.

练习2.2. 设G是一个半群.证明G是一个群当且仅当方程$gx = h$和$xg = h$对于任意$g, h \in G$成立.

Proof. 只需要证明单位元的存在性即可.

若$gx_0 = g$，取$z \in G$使得$zg = h$，于是$hx_0 = h$对于任意$h \in G$成立.若$gx_1 = g = x_2 g$，则$x_1 = x_2 x_1 = x_2$. □

练习2.3. 我们如此定义平面$\mathbb{R}^2$的旋转变换群G：它的元素是R_θ其中$\theta \in [0, 2\pi)$，元素R_φ与R_θ的乘法定义为

$$R_\varphi * R_\theta = \begin{cases} R_{\varphi+\theta} & 若\varphi + \theta < 2\pi \\ R_{\varphi+\theta-2\pi} & 若\varphi + \theta \geq 2\pi \end{cases}.$$

证明$G \cong S^1 = \mathbb{C}^* \cong \mathrm{SO}(2)$.

练习2.4. 设N是群G的正规子群，则G/N交换当且仅当$G' \subseteq N$.

练习2.5. 设群G满足$\forall g \in G$，$g^2 = 1$.求证G是Abel群.

Proof. 任取$g, h \in G$，由条件知$(gh)^2 = 1$，于是$ghgh = 1$.但是$g = g^{-1}$且$h = h^{-1}$，于是$g^{-1}hgh^{-1} = 1$，即$gh = hg$. □

练习2.6. 设群$G := \langle a, b \mid a^2 = 1, b^3 = 1 \rangle$.求证

$$G \cong \mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}) \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})/\{I, -I\}$$

[提示：$a \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.]

练习2.7. 设G是有限群，群同态$\varphi : G \to G$满足$\varphi(x) = x^n$.求证φ是自同构当且仅当$(n, |G|) = 1$.

Proof. 一方面，若$(n, |G|) = 1$，任取$g \in \mathrm{Ker}\,\varphi$，那么

$$1 = \varphi(g) = g^n,$$

于是若$g\neq 1$，则存在素数$p\mid (n,|g|)$，但$p\mid |G|$，因此与$(n,|G|)=1$矛盾，故$G=1$.由于G是有限的，故φ也是满射，因此是自同构.

另一方面，若$\varphi: G\to G$是自同构，若$(n,|G|)\neq 1$，则存在素数$p\mid (n,|G|)$，由Cauchy定理，存在$g\in G$使得$|g|=p$，故

$$\varphi(g)=g^n=g^{pt}=(g^p)t=1,$$

与$\varphi: G\to G$是自同构矛盾. □

练习2.8. (i)求证A_n作用在$\{1,\cdots,n\}$是$(n-2)-$传递的.

(ii)设群G作用在X上是2-传递的，则对任意$x\in X$，G_x是G的极大子群.

(iii)由前面的结果证明A_n是单群.

练习2.9. 设G是一个有限群，H是G得一个真子群，证明存在G的一个等价类C使得$H\cap C=\emptyset$.

Proof. 由Jordan引理，存在一个G的元素g使得g左乘作用在$X:=G/H$上无不动点，于是$g\cdot aH\neq aH$.故$a^{-1}ga\notin H$对任意$a\in G$成立，取$C=G\cdot g$即可. □

练习2.10. 有限群G非平凡地作用在集合A上，满足$|G|>|A|!$，求证G存在非平凡的正规子群.

Proof. 考虑映射

$$\begin{aligned}\varphi: G&\to \mathfrak{S}_A\\ g&\mapsto \sigma_g\end{aligned}$$

□

练习2.11 (不动点定理(fixed points theorem)). 设G是一个p群，作用在一个有限集X上，令$X^G:=\{x\in X\mid gx=x,\forall g\in G\}$，求证

$$|X|\equiv |X^G| \pmod p.$$

Proof. 令$\mathcal{O}$是一个G-轨道，满足$\mathcal{O}\subseteq X-X^G$，于是存在$x\in X$使得$\mathcal{O}=G\cdot x$.由稳定子等式知$|\mathcal{O}|=|G\cdot x|=[G:G_x]$.但$G$是一个$p$群，故$[G:G_x]$是$p$的次方，故$|\mathcal{O}|\equiv 0 \pmod p$.注意到$X-X^G$是这样一些轨道的无交并，故

$$|X|-|X^G|=\left|\coprod_{\mathcal{O}\subseteq X-X^G}\mathcal{O}\right|=\sum_{\mathcal{O}\subseteq X-X^G}|\mathcal{O}|\equiv 0 \pmod p.$$

□

练习2.12. 设G是一个有限群，素数p整除$|G|$.求证存在G的p阶元素.

Proof. 定义

$$X:=\{(g_1,\cdots,g_p)|g_i\in G, g_1\cdots g_p=1\},$$

$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$按照如下方式作用在X上：

$$1\cdot(g_1,\cdots,g_p)=(g_p,g_1,\cdots,g_{p-1}).$$

注意到$g_pg_1\cdots g_{p-1}=g_p(g_1\cdots g_{p-1}g_p)g_p^{-1}=1$，群作用是良定义的.注意到本质上这$p$个坐标中$p-1$个是自由的，于是$|X|=|G|^{p-1} \pmod p$.考虑

$$X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}=\{(g,\cdots,g)|g\in G,g^p=1\},$$

于是$|X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}|=\#\{(g,\cdots,g)|g\in G,g^p=1\}$.由不动点定理，

$$|X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}|\cong|X|\cong 0 \pmod p.$$

但是$(1,\cdots,1)\in X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}$，故$|X^{\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}}|\geq p$. □

练习2.13. 设p是一素数，$G=GL_n(F_p)$，写出一个G的Sylow-p子群，算出它的阶并求出G中全部Sylow-p子群的个数.

Proof. $|G|=(p^n-1)(p^n-p)\cdots(p^n-p^{n-1})$，于是$p^{\frac{n(n-1)}{2}}$恰好整除$|G|$，因而Sylow-$p$子群阶数为$p^{\frac{n(n-1)}{2}}$.由此，显然所有对角元素为1的上三角矩阵组成的子群是G的Sylow-p子群，记为U.

由Sylow第二定理，为计算Sylow-p子群个数，我们只需要求得U的所有共轭子群的个数，设X是所有U的共轭子群组成的集合，$N=\{g\in G|gUg^{-1}=U\}$是U的正规化子，于是由计数公式，我们有

$$|G|=|X||U|.$$

另一方面，容易验证N是所有上三角矩阵组成的子群，故$|N|=(p-1)^np^{\frac{n(n-1)}{2}}$，于是 □

练习2.14. 设21阶群G中元素g的等价类$C(g)$的阶为3,试求g的阶.

Proof. 由计数公式，$|Z(g)|=7$，故$|g|\neq 21$，否则G为循环群.若$|g|=3$，则除g^n外，存在$h\in G$使得$gh=hg$，由于$h\in Z(g)$因此$|h|=7$，这样与$|Z(g)|=7$矛盾，于是$|g|=7$. □

练习2.15. 12阶群G含有一个4阶等价类，证明G的中心是平凡的.

Proof. 反设$Z(G)$不平凡，则存在$x\in G$满足$x\neq 1$且与G中所有元素交换.设$g\in G$的等价类是四阶，故$Z(g)$是G的三阶循环子群；另一方面显然$x\in Z(g)$，因此x的阶恰为3，即$Z(G)$有3个不同的元素.考虑类方程

$$12=1+1+1+|C_1|+|C_2|+4$$

只能有$|C_1|=2,|C_2|=3$.但这导致存在元素的中心化子阶为4，从而$Z(G)$不能是其子群，矛盾. □

练习2.16. 设群G的自同构群$\mathrm{Aut}(G)$是循环群，证明G是交换群.

练习2.17. 设群G作用在集合X上，使得所有的轨道都是无限集.求证对X的任意有限子集A,B，存在$g\in G$使得$gA\cap B=\emptyset$.

练习2.18. 设H是有限群G的子群，G有p-Sylow子群S.求证存在$g\in G$使得$H\cap gSg^{-1}$是H的p-Sylow子群.

第二部分

环论

第三章　环的基本性质

3.1　主理想整环

第四章　环的因子分解

4.1　Euclid整环和主理想整环

引理4.1. 设R是主理想整环，则$\forall a,b\in R$，存在$u,v\in R$使得$ua+vb=(a,b)$.

Proof. 令$I=\{ra+sb\mid r,s\in R\}$，显然I是R的理想，且$I\subseteq((a,b))$，存在$f\in R$使得$I=(f)$，其中$((a,b))$是由a,b的最大公约数生成的理想，$f\mid a$且$f\mid b$.反设$I\subsetneqq((a,b))$，那么$(a,b)\mid f$但$f\nmid(a,b)$，这与(a,b)是a,b的最大公因数矛盾. □

引理4.2. 设R是主理想整环，$f(x)\in R[x]$，若$\alpha\in\mathrm{Frac}(R)$满足$f(\alpha)=0$，则$\alpha\in R$.

4.2　唯一分解整环

命题4.1. 设R是整环，且任意元素$a\in R$都可以被分解为不可约元素的成绩，那么R是唯一分解整环当且仅当所有R的不可约理想都是素理想.

例4.1. 求方程$y^2=x^3-1$的所有整数解.

Proof. 我们考虑环$\mathbb{Z}[i]$中的分解

$$x^3=y^2+1=(y+i)(y-i),$$

注意到$y+i$和$y-i$是互素的.这因为，如若不然，我们可以找到Gauss整数π使得$\pi\mid(y+i,y-i)$.于是$\pi\mid(y+i)-(y-i)=2i$，故不妨设$\pi=1+i$.同时注意到$\pi\mid x^3$，因此在整数环中

$$2=\pi\bar{\pi}\mid x^3\bar{x^3}=x^6,$$

故x是偶数.但这意味着$y^2=x^3-1\equiv 7\pmod 8$，这就导致了矛盾.

由于环$\mathbb{Z}[i]$是唯一分解整环，因此我们假设$y+i=u\pi_1^{f_1}\cdots\pi_t^{f_t}$，其中$u$是单位，$\pi_i(i=1,\cdots,t)$是素数，$f_i(i=1,\cdots,t)$是整数.再由唯一分解和之前证明的互素性，存在整数$e_i(i=1,\cdots,t)$使得$f_i=3e_i$成立，这意味着存在$\alpha=a+bi$满足

$$v(y+i)=\alpha^3=(a+bi)^3=(a^3-3ab^2)+(3a^2b-b^3)i.$$

分别讨论$v=\pm1,\pm i$的情形，我们得到要么$a=\pm1,b=0$要么$a=0,b=\pm1$，但总有$y+i=i$.于是整数为$(1,0)$和$(-1,0)$. $\square$

第五章 环

求证交换环的极大理想一定是素理想. [假设环R中的极大理想$\mathfrak{m}$不是素理想，则存在$ab \in \mathfrak{m}$满足$a \notin \mathfrak{m}$, $b \notin \mathfrak{m}$.构造$I = \{c + ra | c \in \mathfrak{m},\ r \in R\}$.证明$\mathfrak{m} \subsetneq I \subsetneq R$.]

Solution 设$\mathfrak{m}$是环R中的极大理想，且不是素理想，于是存在$ab \in \mathfrak{m}$满足$a \notin \mathfrak{m}$, $b \notin \mathfrak{m}$.令$I = \{c+ra | c \in \mathfrak{m},\ r \in R\}$，显然$\mathfrak{m} \subsetneq I$.任取$c_1 + r_1 a,\ c_2 + r_2 a \in I$，于是$(c_1 + r_1 a) + (c_2 + r_2 a) = (c_1 + c_2) + (r_1 + r_2)a$，由$\mathfrak{m}$是理想$c_1 + c_2 \in \mathfrak{m}$，因而$(c_1 + r_1 a) + (c_2 + r_2 a) = (c_1 + c_2) + (r_1 + r_2)a \in I$；再任取$c + ra \in I$, $s \in R$，由$\mathfrak{m}$是理想可知$sc \in \mathfrak{m}$，故$s(c+ra) = sc + (sr)a \in I$，即$I$是理想.最后证明$I \subsetneq R$.否则，存在$c + ra \in I$使得$c + ra = 1$，于是$cb + rab = b$，注意到$c,\ ab \in \mathfrak{m}$，这导致了$b \in \mathfrak{m}$，矛盾.于是理想$I$满足$\mathfrak{m} \subsetneq I \subsetneq R$，这与$\mathfrak{m}$是极大理想矛盾，因此$\mathfrak{m}$素理想. ■

练习5.1. 证明

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{R})$$

作为环同构于$\mathbb{C}$.

练习5.2. 证明

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \middle| \, a, b \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathrm{M}_2(\mathbb{C})$$

作为环同构于$\mathbb{H}$.

试说明任意交换环都是某个集合上的映射. [考虑环R中元素在$\mathrm{Spec}\, R$上的映射，$f \mapsto f + \mathfrak{p}$.]

练习5.3. 设k是域，求$k[x]/(x^2)$的所有素理想.

Proof. 显然(0)不是素理想.由于$k[x]$主理想整环，故$k[x]/(x^2)$也是主理想整环，因此其中的理想都是形如$(p(x))/(x^2)$的.由于在$k[x]/(x^2)$中$x^2 = 0$，故$(p(x))/(x^2)$由一个零次或一次多项式生成，记为$(p(x))/(x^2) = (ax + b)/(x^2)$.若$b \neq 0$，则在$k[x]/(x^2)$中

$$(ax + b)\frac{ax - b}{-b^2} = \frac{a^2x^2 - b^2}{-b^2} = 1$$

因此$(ax + b)/(x^2)$是单位理想，故只有素理想(x). □

求证整环R上的齐次多项式的因子必为齐次多项式.

设$f(x_1, \cdots, x_n)$是R上的多项式，考虑$\hat{f}(x_1, \cdots, x_n, t) = f(tx_1, \cdots, tx_n) \in R[x_1, \cdots, x_n, t]$，则$f(x_1, \cdots, x_n)$是齐次多项式当且仅当$\hat{f}(x_1, \cdots, x_n, t) = t^d f(x_1, \cdots, x_n)$.

设$f(x_1,\cdots,x_n)=g(x_1,\cdots,x_n)h(x_1,\cdots,x_n)$，于是

$$\hat{f}(x_1,\cdots,x_n)=\hat{g}(x_1,\cdots,x_n)\hat{h}(x_1,\cdots,x_n)=g(tx_1,\cdots,tx_n)h(tx_1,\cdots,tx_n)$$

另一方面，

$$\begin{aligned}\hat{g}(x_1,\cdots,x_n)&=g_0+g_1t+\cdots+g_at^a\\ \hat{h}(x_1,\cdots,x_n)&=h_0+h_1t+\cdots+h_bt^b\end{aligned}$$

其中$g_i,h_j\in R[x_1,\cdots,x_n]$且$g_a,h_b\neq 0$.由$f(x_1,\cdots,x_n)$是齐次多项式知

$$f(x_1,\cdots,x_n)t^d=\hat{g}(x_1,\cdots,x_n)\hat{h}(x_1,\cdots,x_n)=(g_0+g_1t+\cdots+g_at^a)(h_0+h_1t+\cdots+h_bt^b)$$

看作整环$R[x_1,\cdots,x_n]$上关于t的多项式展开并对比系数，可以递归地得到$g_j=h_j=0,i\neq a,j\neq b$. ■

练习5.4. 求证有限整环R必为除环.

Solution 任取$s\in R$，构造环同态

$$\varphi_s:R\longrightarrow R \tag{5.1}$$

$$r\longmapsto sr \tag{5.2}$$

由R是整环知，φ_s是R到自身的单同态，但R是有限的，故φ_s必然也是满同态，故存在$v\in R$使得$sv=\varphi_s(v)=1$.同理，存在$u\in R$使得$us=1$，故R是除环. ■

练习5.5. 求证若交换环R是整环且仅有有限多个理想，则R必为域.

Solution. 任取$0\neq u\in R$，考虑理想

$$(u)\supseteq(u^2)\supseteq\cdots(u^n)\supseteq\cdots$$

是无穷多个理想，故存在正整数m使得$(u^m)=(u^{m+1})$，因此存在$v\in R$使得

$$u^m=cu^{m+1}.$$

根据消去律$1=uv$，因此R中任意非零元素可逆，是域. □

设R是一个带单位元的环，$f:R\to R$是R上Abel群的自同态.求证$\forall a,b\in R,f(ab)=f(a)f(b)$或$\forall a,b\in R,f(ab)=f(b)f(a)$当且仅当$\forall a,b\in R$，$f(ab)=f(a)f(b)$或$f(ab)=f(b)f(a)$.

Solution 令$S_a=\{b\in R|f(ab)=f(a)f(b)\},T_b=\{a\in R|f(ab)=f(a)f(b)\}$，容易证明$S_a$和$T_b$是$R$的子群.但是$S_a\cup T_b=R$，故仅有平凡的情况. ■

求证$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$是唯一分解整环.

Proof. 任取$\alpha=a+b\sqrt{-2},\beta=c+d\sqrt{-2}\in\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$，在$\mathbb{C}$中计算$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{ac+2bd}{c^2+2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+2d^2}\sqrt{-2}=q+r\sqrt{-2}$，其中$q,r\in\mathbb{Q}$.取$e=[q+\frac{1}{2}],f=[r+\frac{1}{2}]$，则$|q-e|\leq\frac{1}{2},|r-f|\leq\frac{1}{2}$，进而

$$\begin{aligned}\alpha-(e+f\sqrt{-2})\beta&=(q+r\sqrt{-2})\beta-(e+f\sqrt{-2})\beta\\&=[(q-e)+(r-f)\sqrt{-2})]\beta,\end{aligned}$$

故

$$
\begin{aligned}
|\alpha-(e+f\sqrt{-2})\beta| &= |(q-e)+(r-f)\sqrt{-2})||\beta| \\
&= (|q-e|^2+2|r-f|^2)|\beta| \\
&\le \frac{3}{4}|\beta|<|\beta|.
\end{aligned}
$$

于是$\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$是Euclid整环，进而是唯一分解整环. □

练习5.6. 设R是交换环，F是R的分式域.$f(x),g(x)\in R[x]$，于是$f(x),g(x)$自然地可以看作$F[x]$中的元素.证明$f(x),g(x)$在$R[x]$中的最大公因式同于在$F[x]$中的最大公因式.

练习5.7. 设整环R不是主理想整环.求证R中存在极大的不能由一个元素生成的理想.

Proof. 我们将用Zorn引理来证明这个事实.令$\mathcal{P}$为R中非主理想的全体，$I_1\subseteq I_2\subseteq\cdots I_n\subseteq\cdots$是$\mathcal{P}$中的一条链，我们需要证明$I:=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n$是理想，且不是主理想.

任取$a,b\in I$和$r,s\in R$，由定义存在m,n使得$a\in I_m,b\in I_n$.假设$m\le n$，则$a,b\in I_n$，因而$ra+sb\in I_n\in I$，故I是理想.若I是主理想，那么存在$a\in R$使得$I=(a)$.但是根据定义，存在自然数n使得$a\in I_n$，这样$I_n\subseteq I=(a)\subseteq I_n$，$I_n$也是主理想，矛盾.故$I$不是主理想. □

练习5.8. 正文中我们证明了

练习5.9. 设F是域，R是$\times_{i=1}^{n}F$的子环，且R作为Abel群是有限生成的.若R是整环，求证任意非零元素$(a_1,\cdots,a_n)\in R$满足$\prod_{i=1}^{n}a_i\neq 0\in F$.

第三部分

模理论

第六章　模的基本理论

6.1　直和与直积

6.2　Hom函子

定理6.1.

$$\mathrm{Hom}_R\left(\bigoplus_{i\in I} M_i, N\right) \cong \prod_{i\in I} \mathrm{Hom}_R\left(M_i, N\right)$$

并且，如果我们有一族模同态$f_i : M_i \to N$，那么有如下交换图

第七章　PID上的模

7.1　Smith标准型

定理7.1. 设F是域，$R = F[x]$，矩阵$A \in M_{m,n}(R)$.则存在$P \in GL_m(R)$和$Q \in GL_n(R)$使得

$$PAQ = \begin{pmatrix} a_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a_r & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Proof. □

设F是域，V是F上的有限维线性空间，$T : V \to V$是线性映射，于是V自然地是一个$F[x]$模，其中$x \cdot \alpha = T(\alpha)$.选取$V$的一组基$\{\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n\}$，并且定义矩阵$A$使得

$$x \cdot \epsilon_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} \epsilon_i,$$

再定义$B = xI - A \in M_n(R)$，那么作为R模，$V \cong R^n/BR^n$.

第八章　特殊的R模

8.1　投射模

定义. 设R是含幺环.若左R模P满足对任意满同态$g: M \to N$和任意模同态$h: P \to N$，都存在$\tilde{h}: P \to M$使得$g \circ \tilde{h} = h$，即有如下交换图则称P是**投射模**(projective module).

第九章　模

练习9.1. 求证R模M的零化子$\operatorname{ann} M$是同构不变的，即若R模N与M同构，则$\operatorname{ann} M = \operatorname{ann} N$.

练习9.2. 设m, n是两个不同的正整数.求证$\mathbb{R}^m$和$\mathbb{R}^n$是同构的Abel群.

Proof. 我们只需要证明作为$\mathbb{Q}$-向量空间$\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n$，进而我们需要的结果是自然的.

我们可以找到$\mathbb{R}^m$的一组基$\{\epsilon_i\}_{i\in I}$（作为$\mathbb{Q}$-向量空间）和$\mathbb{R}^n$的一组基$\{\eta_j\}_{j\in J}$.这样我们只要证明I与J有相同的集合势即可. □

练习9.3. 求证任给定环R中的理想I, J，

$$R/I \otimes_R R/J \cong R/(I+J).$$

第四部分

域和Galois理论

第十章　域理论和Galois理论

练习10.1. 设$F(\alpha)$是域F的扩张，$[F(\alpha):F]$是奇数.求证$[F(\alpha^2):F]=[F(\alpha):F]$.

练习10.2. 设F是域，$A,B\in M_n(F)$.求证AB和BA有相同的特征多项式.

Proof. 考虑扩域$F(y)$，则$\det(yI-A)\neq 0$，故$yI-A$可逆，于是$(yI-A)B=(yI-A)(B(yI-A))(yI-A)^{-1}$与$B(yI-A)$相似. □

练习10.3. 如果域F满足-1不能写成平方和的形式，即不存在$a_i\in F, 1\le i\le n$使得$-1=\sum_{i=1}^n a_i^2$，则称F是形式实数域(formally real).求证如下论断是等价的：

(i) F是形式实数域；

(ii) F是有序域；

(iii) $\sum_{i=1}^n a_i^2=0$意味着$a_i=0$对任意i成立.

练习10.4. 设F是域，且E是F上多项式$f(x)\in F[x]$的分裂域.求证

(i)

(ii)

练习10.5.

1. 设G是循环群，并且我们用乘法记号.设$g,h\in G$都不是平方元素，即不存在$x\in G$使得$x^2=g$或$x^2=h$.求证gh^{-1}是平方元素.
2. 设K/F是域扩张，a是F中的非零元素.假设s,t是$\langle a\rangle\in F^\times$中的元素，且满足在$F$中$s$和$t$都不是平方元素，但存在$\alpha,\beta\in K$使得$s=\alpha^2, t=\beta^2$.证明$K$的子域$F(\alpha)=F(\beta)$.
3. 证明若F是有限域且特征不为2，那么F的任意扩域K都包含且仅包含一个阶数为2的F的扩域.

练习10.6. 题目中我们将证明，存在不可约多项式$f(x)\in\mathbb{Z}[x]$满足它在$\mathbb{F}_p[x]$中的像不都是不可约的.

(i) 求证$f(x)=x^4+1$在$\mathbb{Z}[x]$中不可约.

(ii) 求证$f(x)=x^4+1$在$\mathbb{F}_p[x]$中可约.

第五部分

范畴论

第十一章　范畴论

11.1　Cat

练习11.1. 设X是一个拓扑空间，证明X可以成为一个范畴，其中X的对象是所有的开集，$\hom_X(U,V)$是单点集当且仅当$U\subseteq V$，否则$\hom_X(U,V)=\emptyset$.若$U\subseteq V$，我们称$\hom_X(U,V)$中的元素为包含映射，记为$i:U\to V$.

练习11.2. 设$\mathcal{C}$是范畴，$A\in\operatorname{ob}\mathcal{C}$.定义$A$的自同构群是$\hom_{\mathcal{C}}(A,A)$中的所有同构态射组成的集合，群的乘法是态射的复合，即$\operatorname{Aut}(A)=\{f:A\to A\mid f\text{ 是同构}\}$.求证同构对象的自同构群是同构的.

练习11.3. 这个习题中我们对范畴$R-\mathbf{Alg}$稍作推广，得到新的范畴$R-\mathbf{ALG}$，满足$\operatorname{ob}R-\mathbf{ALG}:=\operatorname{ob}R-\mathbf{Alg}$，给定$R$代数$A,B$，

$$\hom_{R-\mathbf{ALG}}(A,B):=\{{}_AM_B\mid\ {}_AM_B\text{是}(A,B)\text{双模且作为右}B\text{模是投射且有限生成的}\},$$

求证复合${}_BN_C\circ_A M_B$给出一个范畴结构.

11.2

练习11.4. 设$f:B\to A$和$g:C\to A$是两个集合间的映射，求证$\mathbf{Set}$中存在纤维积$B\times_A C$.

Proof. 令$B\times_A C:=\{(b,c)\mid f(b)=g(c)\}$，我们要证明这样定义的纤维积满足相应的泛性质. □

练习11.5. 设T是范畴$\mathcal{C}$中的终对象，A,B是$\mathcal{C}$的对象，求证

$$A\times B\cong A\times_T B.$$

练习11.6. 在习题11.1中我们对任意拓扑空间X定义了一个范畴$\mathbf{Open}(X)$，设U,V是范畴中的两个对象，即两个开集，证明$U\times_X V$存在.此外，对任意一族开集$\{U_i\}_{i\in I}$，证明$\coprod_{i\in I}U_i$存在，且$\coprod_{i\in I}U_i$是U的开覆盖当且仅当$\coprod_{i\in I}U_i\cong U$.

练习11.7. 设范畴$\mathcal{C}$中存在任意两个对象的乘积，则纤维积

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] \arrow[d] & A \arrow[d, "{(f,g)}"] \\ B \arrow[r, "{(\mathrm{id},\mathrm{id})}"] & B\times B \end{tikzcd}$$

给出了态射$f,g:A\rightrightarrows B$的等值子K.

*练习*11.8. 设$\mathcal{C}$是范畴，A,B是$\mathcal{C}$的对象，若存在态射$s:A\to B$和$r:B\to A$使得$rs=\mathrm{id}_A$，则称r是s的*收缩*(retract)或者*左逆*(left inverse)，s是r的*截面*(section)或*右逆*(right inverse)，A是B的一个*收缩*(retract).一个简单的例子是在R模范畴$R-\mathbf{Mod}$中，N是M的收缩当且仅当存在R模P使得$M=N\oplus P$.如果$f:X_1\to Y_1, g:X_2\to Y_2$是范畴$\mathcal{C}$的态射，且满足以下交换图

$$\begin{tikzcd}
X_1 \arrow[r, "s_1"] \arrow[d, "f"] & Y_1 \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "g"] & X_1 \arrow[d, "f"] \\
X_2 \arrow[r, "s_2"] & Y_2 \arrow[r, "r_2"] & X_1,
\end{tikzcd}$$

其中X_j是Y_j的收缩，$s_jr_j=\mathrm{id}_{X_j}$（$j=1,2$），则称f是g的*收缩*(retract).求证：若f是g的收缩，g是同构，则f也是同构.

11.3

*练习*11.9. 设X是一个集合，定义$F(X)$是以X为基生成的自由群.给出合理的定义说明$F:\mathbf{Set}\rightrightarrows\mathbf{Gp}$是一个函子，这个函子被称为*自由函子*(free functor).

*练习*11.10. 设G是一个群，BG定义如下：$\mathrm{ob}\,\mathrm{B}G=*$，$\hom_{\mathrm{B}G}(*,*)=G$.

(i) 证明BG是一个范畴.

(ii) 证明函子$F:\mathrm{B}G\rightrightarrows\mathbf{Set}$定义了$G$在集合$F(*)$上的一个（左）群作用.
在(ii)中我们并没有必要限定构造的函子的值域为$\mathbf{Set}$.*函子*$F:\mathrm{B}G\rightrightarrows\mathbf{Vec}_k$*定义了一个*$k$*线性表示，函子*$F:\mathrm{B}G\rightrightarrows\mathbf{Top}$*定义了一个*$G$*空间.*

(iii) 假定我们有两个函子$F,G:\mathrm{B}G\rightrightarrows\mathcal{C}$，显式地写出自然变换所满足的交换条件.由这样自然变换所确定的范畴$\mathcal{C}$中的态射称为*G-等变的*(G-equivariant).

*练习*11.11. 设n是任意一个自然数.定义$[n]$是有$n+1$个对象的小范畴，且其中的箭头是序列$\{0\to1\to\cdots\to n\}$.设$\mathbf{\Delta}$是所有$[n]$组成的范畴，态射是$[n]$到$[m]$的函子.

(i) 求证：与范畴$[0]$等价的范畴当且仅当每个hom集合都仅有一个元素.

(ii) 定义$[n]'$是$n+1$元的全序集，其元素记为$\{0\le1\le\cdots\le n\}$.设$\mathbf{\Delta}'$是所有$[n]'$组成的范畴，态射是$[n]'$到$[m]'$的保序映射，即$f:[n]'\to[m]'$满足$i\le j$必有$f(i)\le f(j)$.证明$\mathbf{\Delta}'$是一个范畴，且存在一个范畴的同构$\mathbf{\Delta}'\rightrightarrows\mathbf{\Delta}$.于是我们无意区分两个范畴，都称为*单纯范畴*(simplicial category)或者*全序范畴*(ordering category)，也无意区分两个范畴不同的对象.

(iii) 证明

$$d^i_{n+1}:[n]\to[n+1]$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & n \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & i+1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n+1
\end{tikzcd}$$

和

$$s_n^i : [n+1] \to [n]$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[d] & i+1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & n+1 \arrow[dl] \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n &
\end{tikzcd}$$

都是范畴$\mathbf{\Delta}$中的态射，且满足

$$\begin{aligned}
d^j_{[n+1]} d^i_{[n]} &= d^i_{[n+1]} d^{j-1}_{[n]}, & \forall\, i < j \\
s^j_{[n]} s^i_{[n+1]} &= s^i_{[n]} s^{j+1}_{[n+1]}, & \forall\, i \le j \\
s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} &= d^i_{[n]} s^{j-1}_{[n-1]}, & \forall\, i < j \\
s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} &= \mathrm{id}_{[n]}, & i = j \text{ 或 } i = j+1 \\
s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} &= d^{i-1}_{[n]} s^j_{[n-1]}, & \forall\, i > j+1.
\end{aligned}$$

其中，d^i称为第i个对偶面映射(coface map)，s^i称为第i个对偶退化映射(codegeneracy map).

(iv) 证明$\mathbf{\Delta}$中所有的态射都可以由d^i和s^j生成.更准确地说，任意$f \in \hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m])$有唯一的分解

$$f = d^{i_1} \circ \cdots \circ d^{i_r} \circ s^{j_1} \circ \cdots \circ s^{j_s},$$

其中$m = n + r - s$，$i_1 < \cdots < i_r$且$j_1 < \cdots < j_s$.

练习11.12. (i) 设$\mathcal{C}$是范畴，A, B是$\mathcal{C}$的对象，$f \in \hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.证明$f$诱导了自然变换

$$f_* : \hom_{\mathcal{C}}(-,A) \Rightarrow \hom_{\mathcal{C}}(-,B)$$

和

$$f^* : \hom_{\mathcal{C}}(B,-) \Rightarrow \hom_{\mathcal{C}}(A,-).$$

(ii) 在(i)的记号下，证明f是一个同构当且仅当f_*是同构，当且仅当f^*是同构.

练习11.13. 设$\mathcal{C}, \mathcal{J}$是范畴，A是$\mathcal{C}$的对象，证明下面的定义构成一个函子

$$\begin{aligned}
Const_A : \mathcal{J} &\rightrightarrows \mathcal{C} \\
j &\mapsto A \\
(a : i \to j) &\mapsto \mathrm{id}_A
\end{aligned}$$

我们称之为常值函子(constant function).证明，任意$\mathcal{C}$中的态射$f : A \longrightarrow B$可以诱导一个自然变换

$$f_* : Const_A \Rightarrow Const_B.$$

进一步，存在函子$\Delta : \mathcal{C} \rightrightarrows Funct(\mathcal{J}, \mathcal{C})$，把对象$A$映为$Const_A$，态射$f : A \to B$映为$f_* : Const_A \Rightarrow Const_B$.

练习11.14. 设F_1, F_2是函子$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$\eta : F_1 \Rightarrow F_2$.

1. 若G是函子$\mathcal{D} \to \mathcal{E}$，证明$G\eta : GF_1 \Rightarrow GF_2$，$(G\eta)_A := G(\eta_A)$是自然态射.

2. 若G是函子$\mathcal{B} \to \mathcal{C}$，证明$\eta G : F_1 G \Rightarrow F_2 G$，$(\eta G)_A := \eta_{G(A)}$是自然态射.

练习11.15 (Categories for the Working Mathematician, P37). 设$\mathcal{C}, \mathcal{D}$和$\mathcal{E}$是范畴，如果F是函子$\mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{E}$，则称$F$是定义在$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$上的**双函子**(bifunctor)，其中函子性条件显式地写为：对任意$\mathcal{C}$中的态射$f : A \to B$和$\mathcal{D}$中的态射$g : C \to D$.如果对于任意$\mathcal{C}$中的对象A和$\mathcal{D}$中的对象C，都有证明存在$(\mathcal{C}, \mathcal{D})$上的双函子$F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{E}$，满足

$$F(-, C) = L_C$$

且

$$F(A, -) = R_A.$$

练习11.16.

练习11.17. 给定范畴$\mathcal{C}, \mathcal{D}, \mathcal{E}$和函子$F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}, G : \mathcal{E} \to \mathcal{C}$.构造范畴$\mathcal{M}$和函子$P : \mathcal{M} \to \mathcal{D}, Q : \mathcal{M} \to \mathcal{E}$使得对任意范畴$\mathcal{N}$和函子$K : \mathcal{N} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{N} \to \mathcal{E}$，若有图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{N} \arrow[r, "K"] \arrow[d, "H"] & \mathcal{E} \arrow[d, "G"] \\
\mathcal{D} \arrow[r, "F"] & \mathcal{C}
\end{tikzcd}$$

交换，都有唯一存在的函子: $\mathcal{N} \to \mathcal{M}$.这个范畴同构意义下是唯一的，我们记为$\mathcal{E} \times_{\mathcal{C}} \mathcal{D}$.

Proof. 定义 □

练习11.18. 给定函子$F : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$，任取$\mathcal{C}$中的对象$A$，都可以给出$\mathcal{C}$的只包含$A$一个对象和一个态射$\mathrm{id}_A : A \to A$的子范畴，记为$*_A$，求证$\mathcal{F} \times_{\mathcal{C}} *_A$是$\mathcal{F}$的子范畴，它包含所有被$F$映到$A$的对象和映为$\mathrm{id}_A : A \to A$的态射.于是$\mathcal{F}$可以被看做函子$\mathcal{C} \to \mathbf{CAT}$.

11.4

练习11.19. 设$\mathcal{C}$与$\mathcal{D}$是等价的范畴.若$\mathcal{C}$中存在始对象，证明$\mathcal{D}$也存在始对象.

练习11.20. 给定函子$F : \mathcal{D} \rightrightarrows \mathcal{C}$和$G : \mathcal{E} \rightrightarrows \mathcal{C}$，证明如下构造是范畴，我们称之为$\mathcal{D}, \mathcal{E}$的纤维范畴(comma category)，记为$(F, G)$：

1. 它的对象是三元组(X, Y, f)，其中X是$\mathcal{D}$的对象，Y是$\mathcal{E}$的对象，$f \in \hom_{\mathcal{C}}(F(X), G(Y))$；

2. 二元组(h, k)是(X_1, Y_1, f_1)到(X_2, Y_2, f_2)的态射当且仅当

$$G(k) f_1 = f_2 F(h),$$

即有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
F(X_1) \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "F(h)"] & G(Y_1) \arrow[d, "G(k)"] \\
F(X_2) \arrow[r, "f_2"] & G(Y_2),
\end{tikzcd}$$

其中，$h \in \hom_{\mathcal{D}}(X_1, X_2)$，$k \in \hom_{\mathcal{E}}(Y_1, Y_2)$.

接下来的习题中我们将详细地用范畴的语言讨论范畴当中“图”的概念，并讨论追图（*diagram chasing*）和用图表示交换性的技术.

定义. 设$\mathcal{C}$是一个范畴，则$\mathcal{C}$的一个**图(diagram)**是一个函子$F : \mathcal{J} \rightrightarrows \mathcal{C}$.其中，$\mathcal{J}$是一个小范畴，被称为**指标范畴(indexing category)**.

练习11.21. 设$F : \mathcal{C} \rightrightarrows \mathcal{D}$是忠实函子.求证任意在$\mathcal{D}$中交换的$\mathcal{C}$中的图都在$\mathcal{C}$中交换.

11.5

练习11.22. 设$k - \mathbf{Vec}$是域k上向量空间全体组成的范畴，$k - \mathbf{FinVec}$是k上有限维向量空间全体组成的满子范畴，U是有限维k向量空间，求证函子$F : k - \mathbf{FinVec} \to k - \mathbf{FinVec}, V \mapsto V \otimes_k U$是可表的，其代表元素为$(U^*, \mathrm{id}_U \in F((U^*) = U^* \otimes_k U)$.

练习11.23. 设R是交换环，$\varphi : M \to N$是R模同态$\varphi : M \to N$，定义函子$K : R - \mathbf{Mod} \rightrightarrows \mathbf{Ab}$，满足对任意对象$P$，

$$K(P) := \mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}_R(P, M) \xrightarrow{f_*} \mathrm{Hom}_R(P, N)),$$

对任意R模同态$f : P \to Q$

$$K(f) := h_M|_{K(P)}$$

求证函子K是可表的.

练习11.24. 求证反变幂集函子是可表的.

练习11.25. 证明以下函子是不可表的：

1. $F : \mathbf{Ring} \rightrightarrows \mathbf{Set}$，$R \mapsto \{r^2 \mid r \in R\}$；
2. $G : \mathbf{Ring} \rightrightarrows \mathbf{Set}$，其中$G$把环$R$映到$R$的所有幂零元素组成的集合；
3. $O : \mathbf{Top} \rightrightarrows \mathbf{Set}$，其中$O$把Hausdorff空间$X$映到$X$的所有开集组成的集合；
4. $P : \mathbf{Set} \rightrightarrows \mathbf{Set}$，；
5. $S : \mathbf{Gp} \rightrightarrows \mathbf{Set}$，其中$S$把群$G$映到$G$的所有子群组成的集合.

Proof. 反设函子F是可表的，于是存在环R使得$\eta : F \cong \hom_{\mathbf{Ring}}(R, -)$.特别地，$F(R) \cong \hom_{\mathbf{Ring}}(R, R)$.取$F(R)$中的在这个同构下对应到$\mathrm{id}_R$的元素$u$，由$F$的构造，存在$r \in R$使得$u = r^2$.我们将会证明$u$具有如下泛性质：对任意环$S$和任意$S$中的平方元素$s^2$，存在唯一的同态$f : R \to S$使得$f(u) = s^2$.这是因为我们有如下交换图

$$\begin{tikzcd}
\hom_{\mathbf{Ring}}(R, R) \arrow[r, "g^*"] \arrow[d, "\eta_R"] & \hom_{\mathbf{Ring}}(R, S) \arrow[d, "\eta_S"] \\
F(R) \arrow[r, "F(g)"] & F(S),
\end{tikzcd}$$

并且对于任意$g \in \hom_{\mathbf{Ring}}(R,S) \leftrightsquigarrow s^2$，存在唯一的$g^*$使得$g^*(\mathrm{id}_R)=g$，具体来说，令$g:=\eta_S^{-1}(s^2)$，那么

$$F(g)(u)=F(g)(\eta_R(\mathrm{id}_R))=\eta_S(g^*(\mathrm{id}_R))=\eta_S(g)=s^2.$$

假设还有一个态射h满足条件，那么

$$h^*(\mathrm{id}_R)=(\eta_S^{-1}\circ F(h)\circ\eta_R)(\mathrm{id}_R)=(\eta_S^{-1}\circ F(h))(u)=\eta_S^{-1}(s^2)=g,$$

于是我们的论断得证.

考虑$S=\mathbb{Z}[x]$，$s=x$，根据刚刚所证明的，存在唯一的环同态$g:R\to\mathbb{Z}[x]$使得$g(u)=x^2$.零$m:\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z}[x]$，$x\mapsto -x$，那么$m\circ g$也是将$u$映到$x^2$的态射.故矛盾. □

11.6

练习11.26. 设函子$F,G:\mathcal{C}\rightrightarrows\mathbf{Set}$是自然同构的.证明自然同构$\eta:F\Rightarrow G$诱导了它们元素范畴的同构：

$$\int F\cong\int G.$$

练习11.27. 证明反变函子$F:\mathcal{C}\rightrightarrows\mathbf{Set}$可表当且仅当其元素范畴$\int F$存在终对象.

练习11.28. 设$\mathcal{C}$是一个小范畴，$\mathcal{D}$是一个上完备的局部小范畴，考虑2函子

$$S:\mathcal{C}^\circ\times\mathcal{C}\to\mathcal{D},$$

那么我们称f_*与f^*的上等值子

$$\prod_{f:A_0\to A_1}S(A_0,A_1)\rightrightarrows\prod_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S(A,A)$$

为S的上终止(co-end)，其中f_*是复合$S(A_0,A_1)\xrightarrow{S(f,\mathrm{id})}S(A_1,A_1)\hookrightarrow\prod_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S(A,A)$，$f^*$是复合$S(A_0,A_1)\xrightarrow{S(\mathrm{id},f)}S(A_0,A_0)\hookrightarrow\prod_{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S(A,A)$，记为$\int^{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S$.

1. 求证$\int^{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S$具有如下泛性质：对任意$\mathcal{C}$中的态射$f:A_0\to A_1$，存在唯一的$\varphi_{A_0}$和$\varphi_{A_1}$使得下图交换

$$\begin{tikzcd} S(A_0,A_1) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "f^*"] & S(A_1,A_1) \arrow[d, "\varphi_{A_0}"] \\ S(A_0,A_0) \arrow[r, "\varphi_{A_1}"] & \int^{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}S. \end{tikzcd}$$

2. 设R是环，F,G是函子$F:\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Mod}-R$和$G:\mathcal{C}\to R-\mathbf{Mod}$.定义函子$S:=F\boxplus_R G:\mathcal{C}^\circ\times\mathcal{C}\to\mathbf{Ab}$，将对象$(A,B)$映为$F(A)\otimes_R G(B)$，将态射$(f:C\to A,g:B\to D)$映到$F(f)\boxtimes_R G(g):F(A)\otimes_R G(B)\to F(C)\otimes_R G(D),x\otimes y\mapsto F(f)(x)\otimes G(g)(y)$.在此基础上定义对象

$$F\otimes_{A,R}G:=\int^{A\in\mathbf{ob}\ \mathcal{C}}F(f)\boxtimes_R G(g).$$

若函子$R^\circ[\hom_{\mathcal{C}}(-,A)]:\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Mod}-R$，将对象$C$映到$\hom_{\mathcal{C}}(C,A)$生成的自由$R$模，证明

$$R^\circ[\hom_{\mathcal{C}}(-,A)]\otimes_{A,R}G\cong G(A).$$

证明对R作为自己的右模的常值函子$Const_R:\mathcal{C}^\circ\to\mathbf{Mod}-R$满足

$$Const_R\otimes_{A,R}G\cong\mathrm{colim}_{\mathcal{C}}G.$$

11.7

练习11.29. 设范畴$\mathcal{C},\mathcal{D}$间的函子$F:\mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D}:G$互为左右伴随，证明$\mathcal{C}\simeq\mathcal{D}$当且仅当这个伴随给出的单位$\eta$和余单位$\xi$都是自然同构.

练习11.30. 设范畴$\mathcal{C},\mathcal{D}$间的函子$F:\mathcal{C}\rightleftarrows\mathcal{D}:G$互为左右伴随，证明对任意指标范畴$\mathcal{J}$，$F,G$诱导了伴随$F_*:\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{C})\rightleftarrows\mathrm{Funct}(\mathcal{J},\mathcal{D}):G_*$.

第六部分

高阶范畴论和群论

11.8 范畴中的代数对象

11.8.1 对象上的结构

我们还是从具体的例子来考虑.假设G是一个群，那么G本身作为一个集合也就是集合范畴中的对象.我们想用范畴的语言描述G的群结构时，自然的想法是G作为一个群，它的结构性质是否可以被范畴中的信息所刻画.这样我们无外乎要处理G中的单位元、乘法和求逆，而它们刚刚好可以从态射和它们的交换性得出.假设范畴$\mathcal{C}$满足：

1. 存在终对象E；
2. 对对象G，$G\times G$和$G\times G\times G$都存在.

如果我们有三个态射

$$
\begin{aligned}
&\mu : G\times G\to G && \text{(multiplication)}\\
&i : G\to G && \text{(inversion)}\\
&e : E\to G && \text{(identity)}
\end{aligned}
$$

满足以下交换图，分别被称为：结合性(associativity)

$$
\begin{tikzcd}
G\times G\times G \arrow[r, "{(\mu,\mathrm{id}_G)}"] \arrow[d, "{(\mathrm{id}_G,\mu)}"'] & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\
G\times G \arrow[r, "\mu"] & G,
\end{tikzcd}
$$

左逆(left inverse)

$$
\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[rr, "{(i,\mathrm{id}_G)}"] & & G\times G \arrow[d, "\mu"] \\
G \arrow[u, "\Delta"] \arrow[r] & E \arrow[r, "e"] & G,
\end{tikzcd}
$$

和左单位(left identity)

$$
\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[r, "{(\cdot,\mathrm{id}_G)}"] & E\times G \arrow[r, "{(e,\mathrm{id}_G)}"] & G\times G \arrow[dl, "\mu"] \\
& G \arrow[ul, "\Delta"] &
\end{tikzcd},
$$

其中左逆当中的$\Delta : G\to G\times G$是对角态射，则称G是范畴$\mathcal{C}$中的**群对象**(group object)，三个态射称为G上的**群结构**(group structure).下面的命题说明这样的定义是合理的，于是在不同的范畴中我们有了群结构的推广：

命题11.1. *集合范畴**Set**中的对象G是群对象当且仅当G是一个群.*

Proof. □

定义. 若G, H是范畴$\mathcal{C}$中的群对象，态射$f : G \to H$满足

$$\begin{tikzcd} G \times G \arrow[r, "\mu_G"] \arrow[d, "f \times f"'] & G \arrow[d, "f"] \\ H \times H \arrow[r, "\mu_H"] & H \end{tikzcd}$$

是交换图，则称f是一个同态(homomorphism).

定理11.2. 设G是范畴$\mathcal{C}$中的对象，那么G是群对象当且仅当函子$h_G :=$有分解

同样地，我们可以用图的方式描述群作用.注意到我们在不同范畴中对作用映射的要求不同，比方说在集合范畴中作用只是普通的映射，但在拓扑范畴中作用就必然是连续的.这刚刚好可以用范畴的语言简单地表达

定义. 设G是范畴$\mathcal{C}$中的群对象，X是$\mathcal{C}$中的对象，且$G \times X, G \times G \times X$存在.那么群对象$G$在$X$上的作用(action)是一个态射$\sigma : G \times X \to X$，满足

$$\begin{tikzcd} G \times G \times X \arrow[r, "(\mu, \mathrm{id}_X)"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_G, \sigma)"'] & G \times X \arrow[d, "\sigma"] \\ G \times X \arrow[r, "\sigma"] & X, \end{tikzcd}$$

其中μ是群对象G的乘法.

定义. G等变

当我们在范畴中有一个用交换图定义的对象时，我们自然地会考虑它的对偶定义

11.9 Kan扩张

在之前范畴论的讨论中，我们

定义. 给定函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$和$G : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$，那么$F$关于$G$的左Kan扩张(the left Kan extension of F along G)是函子$\mathcal{L}_G(F) : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$和自然变换$\eta : F \Rightarrow \mathcal{L}_G(F) \circ G$，满足图

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_{\eta}"] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{L}_G(F)"'] &
\end{tikzcd}
$$

交换且对任意满足如此交换图的函子$H:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$和自然变换$\xi:F\Rightarrow H\circ G$

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_{\xi}"] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd}
$$

使得存在唯一的自然变换$\delta:\mathcal{L}_G(F)\Rightarrow H$满足$\xi=G\delta\circ\eta$，即

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E}, \arrow[ur, bend left, "\mathcal{L}_G(F)"] \arrow[ur, bend right, "H"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\delta"] &
\end{tikzcd}
$$

或者换句话说，$(\mathcal{L}_G(F),\eta)$在所有满足相应交换图的对象中是始对象.对偶地，我们有F关于G的右Kan扩张(the right Kan extension of F along G)是函子$\mathcal{R}_G(F):\mathcal{E}\to\mathcal{D}$和自然变换$\eta:F\Rightarrow\mathcal{L}_G(F)\circ G$，满足图

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "{}_{\eta}\Uparrow"] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "\mathcal{R}_G(F)"'] &
\end{tikzcd}
$$

例11.1. 给定范畴$\mathcal{C}$和对象A，对任意函子$F:\mathcal{C}\to\mathbf{Set}$，Yoneda引理说明存在自然的同构

$$\varphi:\hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h^A,F)\cong F(A):\psi,$$

其中$\varphi(\eta)=\eta_A(\mathrm{id}_A)$.令[0]表示有一个对象和该对象上的恒等态射组成的范畴，

$$
\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[rr, "*"] \arrow[dr, "\mathrm{Const}_A"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_{\eta^a}"] & \mathbf{Set} \\
& \mathcal{C} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}
$$

其中函子$*$把[0]映到只有一个元素的集合$\{*\}$.对任意$a\in F(A)$，有自然变换$\eta^a:\{*\}\to F(A),*\mapsto a$，并且所有的自然变换$*\Rightarrow F\circ\mathrm{Const}_A$都是某个$\eta^a$.特别地，有交换图

$$
\begin{tikzcd}
{[0]} \arrow[rr, "*"] \arrow[dr, "\mathrm{Const}_A"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_{\eta^{\mathrm{id}_A}}"] & \mathbf{Set} \\
& \mathcal{C} \arrow[ur, "h^A"'] &
\end{tikzcd}
.
$$

根据Yoneda引理中的证明，$\psi(a)\circ\eta^{\mathrm{id}_A}=\eta^{\psi(a)_A(\mathrm{id}_A)}=\eta^a$，于是证明了有唯一的分解

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[rr, "*"] \arrow[dr, "\mathrm{Const}_A"'] & & \mathbf{Set} \\ & \mathcal{C}, \arrow[ur, bend left, "h^A"] \arrow[ur, bend right, "F"'] \arrow[ur, phantom, "\Downarrow\psi(a)"] & \end{tikzcd},$$

因此$\mathcal{L}_{\mathrm{Const}_A}(*) = h^A$.

将$\mathcal{C}$换为$\mathcal{C}^\circ$，那么同样地可以证明$\mathcal{R}_{\mathrm{Const}_A}(*) = h_A$.

例11.2. 任意给定群G，那么存在唯一的函子$[0] \to BG$.对于$\mathcal{C}$中的任意G对象$X : BG \to \mathcal{C}$，自然变换

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[rr, "\mathrm{Const}_A"] \arrow[dr] & \Downarrow & \mathcal{C} \\ & BG \arrow[ur, "X"'] & \end{tikzcd}$$

对应A到$X(*)$的态射.于是若$\mathcal{C}$中有余积，那么态射$A \to X(*)$对应到G等变的态射

$$\coprod_{g \in G} A \to X(*),$$

其中G在左边的作用由G在指标上的左乘给出，再通过在单位$e \in G$上的限制得到

$$\begin{tikzcd} {[0]} \arrow[rr, "\mathrm{Const}_A"] \arrow[dr] & \Downarrow_{\iota_e} & \mathcal{C} \\ & BG \arrow[ur, "\coprod_{g \in G} A"'] & \end{tikzcd}$$

是左Kan扩张$\mathcal{L}(\mathrm{Const}_A)$.

引理11.1. $\mathcal{L}_G(F)$具有关于F的函子性.

Kan扩张的万有性质可以给出特定自然变换之间的一一对应，但问题是，实际中的范畴$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{D})$和$\mathrm{Fun}(\mathcal{C}, \mathcal{E})$可能并不是局部小的.我们并不想借助更高级的集合理论讨论真类之间的双射，因此为了计算$\mathcal{L}_G(F)$和$\mathcal{R}_G(F)$，转而考虑函子

$$\mathrm{Nat}(F, - \circ G) : \mathrm{Funct}(\mathcal{E}, \mathcal{D}) \to \mathbf{SET},$$

它把函子$H : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$映到$F$到该函子复合$H \circ G$的自然变换的全体.如前定义，对于任意的函子$H : \mathcal{E} \to \mathcal{D}$和自然变换$\xi : F \Rightarrow H \circ G$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \Downarrow_{\xi} & \mathcal{D} \\ & \mathcal{E} \arrow[ur, "H"'] & \end{tikzcd},$$

它诱导了

$$\begin{aligned} \mathrm{Nat}(H, -) &\Rightarrow \mathrm{Nat}(F, - \circ G) \\ (\zeta : H \Rightarrow K, K) &\mapsto ((G\zeta) \circ \xi : F \Rightarrow G \circ H \Rightarrow G \circ K, K \circ G), \end{aligned}$$

而Kan扩张的泛性质说明了

$$\mathrm{Nat}(\mathcal{L}_G(F),-)\Rightarrow\mathrm{Nat}(F,-\circ G)$$

是自然同构，即$(\mathcal{L}_G(F),\eta)$是函子$\mathrm{Nat}(F,-\circ G)$的代表.对偶地，对于任意的函子$H:\mathcal{E}\to\mathcal{D}$和自然变换$\xi:H\circ G\Rightarrow F$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \arrow[d, phantom, "\xi\Uparrow"] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E} \arrow[ur, "H"'] &
\end{tikzcd},$$

存在相应的

$$\mathrm{Nat}(F,-\circ G)\Rightarrow\mathrm{Nat}(H,-)$$
$$(\xi\circ(G\zeta),K\circ G)\mapsto(\zeta:H\Rightarrow K,K),$$

而Kan扩张的泛性质说明了

$$\mathrm{Nat}(F,-\circ G)\Rightarrow\mathrm{Nat}(\mathcal{R}_G(F),-)$$

是自然同构.对比伴随函子的定义，我们有

定理11.3. *给定$G:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$和范畴$\mathcal{D}$，且任意函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$关于$G$的左Kan扩张与右Kan扩张都存在，那么函子*

$$G^*:\mathrm{Funct}(\mathcal{E},\mathcal{D})\to\mathrm{Funct}(\mathcal{C},\mathcal{D})$$
$$H\mapsto H\circ G$$

的左右伴随存在，分别由$\mathcal{L}_G(-)$和$\mathcal{R}_G(-)$给出.

Proof. 根据对称性，我们只需要验证左伴随.事实上，根据前面的讨论只需要说明

$$\mathrm{Nat}(H,-)\Rightarrow\mathrm{Nat}(F,-\circ G)$$
$$(\zeta:H\Rightarrow K,K)\mapsto((G\zeta)\circ\xi:F\Rightarrow G\circ H\Rightarrow G\circ K,K\circ G)$$

对于任意H的自然性.

习题???? 说明$-\circ G$和$\mathrm{Nat}(H,-)$都是函子，因此习题??? 说明$\zeta\mapsto(G\zeta)\circ\xi$是自然变换. □

例11.3. 设k是域，G是给定的群，$k-\mathbf{Rep}_G$是所有k上的G表示组成的范畴，那么习题?? 说明存在范畴的等价

$$\mathrm{Funct}(BG,k-\mathbf{Vec})\simeq k-\mathbf{Rep}_G.$$

若H是G的子群，那么嵌入自然地给出了函子$i:BH\hookrightarrow BG$，于是存在函子

$$i^*:k-\mathbf{Rep}_G\to k-\mathbf{Rep}_H$$

这实际上是群表示的限制，也记为Res_H^G.函子Res_H^G的左右伴随都存在，它的左伴随称为诱导，记为Ind_H^G，它的右伴随称为余诱导，记为Coind_H^G.同样地我们可以对G集合、G空间等进行类似的讨论.

对于给定的图

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "G"'] & \mathcal{D} \\
& \mathcal{E},
\end{tikzcd}
$$

我们尝试构造F沿G的左Kan扩张.对于任意的$B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{E}$，按定义$\mathcal{L}_G F(B)$是在$G$的像集中最接近$\mathcal{C}$中该对象在$F$下的像；注意到范畴$G/B$包含了所有$\mathcal{C}$中“在$G$下映到$\mathcal{E}/B$”的态射，它有到$\mathcal{C}$的自然的投影$P : G/B \to \mathcal{C}$，其中的终对象是$G$下与$B$最接近的对象；再经过$F$的作用后我们可以在$\mathcal{D}$中衡量与要定义的$\mathcal{L}_G F(B)$的距离，我们要选取最接近的，因此

$$\mathrm{colim}[G/B \xrightarrow{P} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}]$$

理论上应该给出左Kan扩张在对象下的作用.于是

定理11.4. *给定函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$和$G : \mathcal{C} \to \mathcal{E}$，且对任意任意范畴$\mathcal{E}$中的对象$B$余极限*

$$\mathcal{L}_G F(B) := \mathrm{colim}[G/B \xrightarrow{P} \mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D}]$$

存在，那么如上的定义给出了左Kan扩张，并且单位变换

$$\eta : F \Rightarrow \mathcal{L}_G F \circ G$$

由colim的泛性质给出.

首先回顾范畴G/B的定义（习题???）.

11.10 幺半范畴和

在我们非常多的关注的例子当中，一个（局部小）范畴的hom集合通常附带有其他的结构

定义. 设$\mathcal{C}$是给定的范畴，则$\mathcal{C}$上的幺半结构(monoidal structure)包含如下信息：

1. 一个二函子$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$，一般被称为张量积(tensor product)或者幺半积(monoidal product);
2. $\mathcal{C}$中的对象I，被称为单位对象(unit object, identity object)；
3. 自然同构α, λ, ρ，分别被称为结合子(associator)、左单位子(left unitor)和右单位子(right)，其中$\alpha : (- \otimes -) \otimes - \Rightarrow - \otimes (- \otimes -)$是自然同构$\alpha_{A,B,C} : (A \otimes B) \otimes C \to A \otimes (B \otimes C)$，$\lambda, \rho$是自然同构$\lambda : I \otimes - \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$，$\lambda_A : I \otimes A \cong A$，$\rho : - \otimes I \Rightarrow \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}$，满足对任意$\mathcal{C}$中的对象$A, B, C, D$，下图

$$
\begin{tikzcd}
((A \otimes B) \otimes C) \otimes D \arrow[r, "\alpha_{A,B,C} \otimes \mathrm{id}_D"] \arrow[d, "\alpha_{A \otimes B, C, D}"'] & A \otimes (B \otimes C) \otimes D \arrow[r, "\alpha_{A, B \otimes C, D}"] & A \otimes ((B \otimes C) \otimes D) \arrow[d, "\mathrm{id}_A \otimes \alpha_{B,C,D}"] \\
(A \otimes B) \otimes (C \otimes D) \arrow[rr, "\alpha_{A,B,C \otimes D}"] & & A \otimes (B \otimes (C \otimes D)),
\end{tikzcd}
$$

交换，且对任意$\mathcal{C}$中的对象A, B，下图

$$\begin{tikzcd}
(A\otimes I)\otimes B \arrow[rr, "\alpha_{A,I,B}"] \arrow[dr, "\rho_A\otimes \mathrm{id}_B"'] & & A\otimes(I\otimes B) \arrow[dl, "\mathrm{id}_A\otimes\lambda_B"] \\
& A\otimes B &
\end{tikzcd},$$

交换，

则称$(\mathcal{C}, \otimes, I)$为幺半范畴(monoidal category)，若自然同构α, ρ, λ都是恒等，那么称$\mathcal{C}$是严格幺半范畴(strict monoidal category).

例11.4. 设R是环，那么范畴$(R-\mathbf{Mod}, \oplus)$和$(R-\mathbf{Mod}, \otimes)$都是对称幺半范畴.

定义. 设$(\mathcal{C}, \otimes, I)$为幺半范畴，若我们还有

1.

则称$(\mathcal{C}, \otimes)$为对称幺半范畴(symmetric monoidal category)，若自然同构α, ρ, λ都是恒等，那么称$\mathcal{C}$是严格幺半范畴(strict monoidal category).

定义. 设$(\mathcal{B}, \otimes, I)$是一个对称幺半范畴，那么一个$\mathcal{B}$范畴($\mathcal{B}$-category)$\mathcal{C}$包含如下信息：

1. 对象的全体$\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，
2. 任意$A, B \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$给出态射对象$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) \in \mathrm{ob}\,\mathcal{B}$，
3. 对任意$A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，存在态射$\mathrm{id}_A : I \to \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, A)$，且
4. 对任意$A, B, C \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，存在态射

$$\circ : \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B, C) \times \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A, B) \to \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(C, A),$$

对任意$A, B, C, D \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，满足以下交换图

1. 符合的结合性

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(C,D)\times\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B,C)\times\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "\mathrm{id}\otimes\circ"] \arrow[d, "\circ\otimes\mathrm{id}"'] & \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(C,D)\times\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,C) \arrow[d, "\circ"] \\
\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(B,D)\times\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r, "\circ"] & \underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(A,D),
\end{tikzcd}$$

2. 单位态射

$$\begin{tikzcd}
\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\times I \arrow[rr, "\mathrm{id}\times\mathrm{id}_A"] \arrow[dr, "\cong"'] & & \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\times\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,A) \arrow[dl, "\circ"] \\
& \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) &
\end{tikzcd},$$

和

$$\begin{tikzcd}
\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,B)\times\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[dr, "\circ"'] & & I\times\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[ll, "\mathrm{id}_B\times\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& \underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B) &
\end{tikzcd}.$$

称$\mathcal{B}$为基范畴，也称$\mathcal{C}$是(enriched category over $\mathcal{B}$).

换句话说，这里我们将范畴定义中的态射集改成基范畴$\mathcal{B}$中的对象，符合和恒等用$\mathcal{B}$中的态射表示，而所要求的相容性与普通范畴的态射集hom在**Set**中的交换图一致.

注意范畴是范畴$\mathcal{C}$的额外信息，或者hom与$\underline{\hom}$的存在并不矛盾.但对于通常的例子而言，$\underline{\hom}$忘却额外的结构之后得到的就是hom.

例11.5. 一个最简单的例子是对于任意的范畴$\mathcal{C}$，它自然地是**Set**上的范畴.

例11.6. 设A是只包含一个对象的**Ab**范畴，那么A是含幺环.

例11.7. 根据例11.4，$(\mathbf{Ab},\otimes_{\mathbb{Z}})$是幺半范畴.对于环$R$，考虑$R-\mathbf{Mod}$中的态射集$\hom_{R-\mathbf{Mod}}(M,N)$，可以自然地定义上面的加法使得它是一个Abel群，记这个Abel群为$\underline{\hom}_{R-\mathbf{Mod}}(M,N)$（以区别于没有任何结构的集合）.按定义，模态射的复合是$\mathbb{Z}$线性的，因此复合是一个Abel群同态，而且复合的结合性从**Set**中复合的结合性直接得到.

$(\mathbf{Ab},\otimes_{\mathbb{Z}})$中的单位对象是$\mathbb{Z}$，并且作为集合和Abel群都存在同态$\underline{\hom}_{R-\mathbf{Mod}}(\mathbb{Z},M)\cong M$，这个同构也给出了所谓的单位态射（区分于Abel群中的单位元），于是$R-\mathbf{Mod}$是$(\mathbf{Ab},\otimes_{\mathbb{Z}})$上的范畴.

定义. 给定幺半范畴$(\mathcal{C},\otimes,I)$，若对于任意$S\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，函子$-\otimes S$存在右伴随函子$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(S,-)$，则称$\mathcal{C}$是闭幺半范畴(closed monoidal categories).

对于闭幺半范畴$\mathcal{C}$，$-\otimes-$的（双）函子性使得子$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$也是（双）函子，并且有

$$\hom_{\mathcal{C}}(A\otimes B,C)\cong\hom_{\mathcal{C}}(A,\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)).$$

这时$\mathcal{C}$是本身上的范畴，且若$\epsilon:????$ 是伴随函子对$(-\otimes B,\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,-))$的余单位，那么复合

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\to\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,C)$$

是如下态射

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(A,B)\otimes A\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\epsilon}\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(B,C)\otimes B\xrightarrow{\epsilon}C,$$

其中对$\mathcal{C}$中的任意对象A，$\mathrm{id} : A \to A$是映射$I \to A$，它在如上所述的伴随函子对下面对应于自然同构$I \otimes A \cong A$.

练习11.31. 验证$\underline{\mathrm{hom}}_{\mathcal{C}}(-,-)$的函子性.

练习11.32. 给定闭幺半范畴$\mathcal{C}$，假设它是完备和余完备的，那么存在如下构造：

第七部分

Lie理论

第十二章　Lie代数

给定李代数$\mathfrak{g}$，$x \in \mathfrak{g}$，称映射$y \mapsto \mathrm{ad}_x(y) = [x, y]$为伴随表示

对李代数$\mathfrak{g}$，称由

$$C^1\mathfrak{g} := \mathfrak{g}$$
$$C^{n+1}\mathfrak{g} := [\mathfrak{g}, C^n\mathfrak{g}]$$

定义的$\mathfrak{g}$的递降子代数为$\mathfrak{g}$的lower central series.明显地，

$$[C^m\mathfrak{g}, C^n\mathfrak{g}] \subseteq C^{m+n}\mathfrak{g}.$$

定义. 给定李代数$\mathfrak{g}$，若存在正整数n使得$C^n\mathfrak{g} = 0$，则称$\mathfrak{g}$是幂零的(nilpotent).

定义. 若李代数$\mathfrak{g}$满足存在自然数n使得$C^n\mathfrak{g} = 0$，则称$\mathfrak{g}$是幂零的.

命题12.1. 给定特征0的域F上的有限维李代数$\mathfrak{g}$，那么下列条件等价：

1. $\mathfrak{g}$是幂零的，且$C^{r+1}\mathfrak{g} = 0$，

2. 对任意$x_0, \cdots, x_r \in \mathfrak{g}$，

$$[x_0, [x_1, [\cdots, x_r] \cdots]] = (\mathrm{ad}_{x_0}) \cdots (\mathrm{ad}_{x_{r-1}})(x_r) = 0,$$

3. 存在$\mathfrak{g}$的一个递降理想滤子

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{a}_0 \supseteq \mathfrak{a}_1 \supseteq \cdots \mathfrak{a}_r = 0$$

满足$[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}_i] \subseteq \mathfrak{a}_{i+1}$对所有$0 \leq i \leq r-1$成立.

定义. 对于李代数$\mathfrak{g}$，子集

$$\{x \in \mathfrak{g} \mid [x,y]=0\text{对于所有}y\in\mathfrak{g}\text{成立}\}$$

称为$\mathfrak{g}$的中心(center).

命题12.2. *给定李代数$\mathfrak{g}$和包含在中心的理想$\mathfrak{a}$，那么$\mathfrak{g}$是幂零的当且仅当$\mathfrak{g}/\mathfrak{a}$是幂零的.*

*例*12.1. 设V是n维向量空间，给定V的上升子空间序列$D=\{D_i\}_{1\le i\le n}$

$$0=D_0\subseteq D_1\subseteq\cdots\subseteq D_n=V$$

满足$\dim V_i=i$，并且定义

$$\mathfrak{n}(D):=\{x\in\mathfrak{gl}(V)\mid xD_{i+1}\subseteq D_i\},$$

那么$\mathfrak{n}(D)$是幂零的且$C^n\mathfrak{n}(D)=0$.我们称这样的一个子空间序列为V的一个旗帜(flag).

事实上，

用矩阵表示这个例子是说存在V的一组基使得所有矩阵是严格上三角的.

定理12.3. *有限维李代数$\mathfrak{g}$，那么它是幂零的当且仅当对任意的$x\in\mathfrak{g}$，ad_x是幂零的.*

定理12.4. *设V是有限维线性空间，$\mathfrak{g}$是$\mathfrak{gl}(V)$的子李代数，那么如下叙述等价：*

1. *$\mathfrak{g}$是幂零的；*
2. *存在V的旗帜D满足$\mathfrak{g}\subseteq\mathfrak{gl}(V)$.*

类似群和代数的情形，给定李代数$\mathfrak{g}$和向量空间$V\neq 0$，那么称一个李代数同态$\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$为$\mathfrak{g}$在$V$上的一个线性表示(linear representation)，也称V是一个$\mathfrak{g}$模.V中的向量v若满足对任意$x\in\mathfrak{g}$，$\varphi(x)(v)=0$都成了，则称v是一个$\mathfrak{g}$作用下的不变量(invariant).

推论12.4.1. *给定李代数$\mathfrak{g}$的有限维线性表示$\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$，若$\varphi(x)$对任意$x\in\mathfrak{g}$都是幂零的，那么存在$v\in V$是$\mathfrak{g}$作用下的不变量.*

对李代数$\mathfrak{g}$，称由

$$D^1\mathfrak{g}:=\mathfrak{g}$$
$$D^{n+1}\mathfrak{g}:=[D^n\mathfrak{g},D^n\mathfrak{g}]$$

定义的$\mathfrak{g}$的递降子代数为$\mathfrak{g}$的导出序列(derived series).

定义. 若李代数$\mathfrak{g}$满足存在自然数n使得$D^n\mathfrak{g}=0$，则称$\mathfrak{g}$是可解的(solvable).

命题12.5. *1.* 幂零李代数是可解的，

2. 可解李代数的子李代数、商李代数和扩张都是可解的，

3. 给定有限维向量空间V的旗帜D，令

$$\mathfrak{b}(D):=\{x\in\mathfrak{gl}(V)\mid xD_i\subseteq D_i\}$$

是D对应的$Borel$代数，那么$\mathfrak{b}(D)$是可解的.

命题12.6. 给定有限维李代数$\mathfrak{g}$，则如下是等价的：

1. $\mathfrak{g}$是可解的且$D^r\mathfrak{g}=0$，

2. 存在$\mathfrak{g}$的递降理想

$$\mathfrak{g}=\mathfrak{a}_0\supseteq\mathfrak{a}_1\supseteq\cdots\supseteq\mathfrak{a}_r=0$$

使得$[\mathfrak{a}_i,\mathfrak{a}_i]\subseteq\mathfrak{a}_{i+1}$成立（即$\mathfrak{a}_i/\mathfrak{a}_{i+1}$是交换的）.

第三项可以理解为（非严格的）上三角矩阵.

定理12.7 (Lie)**.** 设k是特征0的代数闭域，$\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$是有限维李代数$\mathfrak{g}$的有限维线性表示.若$\mathfrak{g}$是可解的，则存在$V$的旗帜$D$使得$\varphi(\mathfrak{g})\subseteq\mathfrak{b}(D)$.

推论12.7.1. 设k是特征0的代数闭域，$\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$是有限维李代数$\mathfrak{g}$的有限维线性表示，且$\mathfrak{g}$是可解的，那么有限维$\mathfrak{g}$单模必是1维的.

推论12.7.2. 设k是特征0的代数闭域，$\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$是有限维李代数$\mathfrak{g}$的有限维线性表示，且$\mathfrak{g}$是可解的，那么存在$v\in V$对任意$x\in\mathfrak{g}$都是$\varphi(x)$的特征向量.

引理12.1. 设k是特征0的代数闭域，$\varphi:\mathfrak{g}\to\mathfrak{gl}(V)$是有限维李代数$\mathfrak{g}$的有限维线性表示，$\mathfrak{h}$是$\mathfrak{g}$的理想，$v\neq 0$是$V$中的元素，那么

定理12.8 (Cartan's Criterion). 设k是特征0的代数闭域，$\mathfrak{g}$是$\mathfrak{gl}(V)$的有限维子李代数，那么$\mathfrak{g}$是可解的当且仅当

$$\mathrm{Tr}(x \circ y) = 0$$

对任意$x \in \mathfrak{g}, y \in [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$成立.

12.1 半单李代数

根据命题，若$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$是李代数$\mathfrak{g}$的可解理想，那么扩张

$$0 \to \mathfrak{a} \to \mathfrak{a} + \mathfrak{b} \to \mathfrak{b}/(\mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}) \to 0$$

说明$\mathfrak{a} + \mathfrak{b}$也是李代数$\mathfrak{g}$的可解理想，于是存在$\mathfrak{g}$的极大可解子理想，记为$\mathfrak{r}$，称为根理想(radical).

定义. 李代数$\mathfrak{g}$的根理想$\mathfrak{r}$满足$\mathfrak{r} = 0$，则称$\mathfrak{g}$是半单的(semi-simple).

例12.2. 给定有限维线性空间V，那么$\mathfrak{sl}(V)$是半单的.

定理12.9. 给定李代数$\mathfrak{g}$和根理想$\mathfrak{r}$，那么

1. $\mathfrak{g}/\mathfrak{r}$是半单的，且
2. 存在$\mathfrak{g}$的子李代数$\mathfrak{s}$使得$\mathfrak{g} = \mathfrak{s} \oplus \mathfrak{r}$.

事实上，投影$\mathfrak{s} \to \mathfrak{g}/\mathfrak{r}$是同构，于是$\mathfrak{g}$是一个半单李代数与一个可解理想的半直积，这称为Levi分解.

定义. 给定双线性形式$B : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to k$，若满足

$$B([x, y], z) + B(y, [x, z]) = 0$$

对任意$x, y, z \in \mathfrak{g}$都成立，则称该双线性形式是不变的(invariant).

例12.3. 定义双线性形式

$$K(x, y) := \mathrm{Tr}(\mathrm{ad}\ x \circ \mathrm{ad}\ y),$$

称其为Killing形式(Killing form)，它是一个不变双线性形.

定理12.10 (Cartan-Killing)**.** 李代数$\mathfrak{g}$是半单的当且仅当它的*Killing*形式是非退化的.

定理12.11. 给定半单李代数$\mathfrak{g}$及其理想$\mathfrak{a}$，那么$\mathfrak{a}$关于*Killing*形式的垂直空间$\mathfrak{b}$也是$\mathfrak{a}$的直和补，并且存在自然的同构

$$\mathfrak{g} \cong \mathfrak{a} \times \mathfrak{b}.$$

推论12.11.1. 任意半单李代数的子李代数、商李代数和乘积都是半单的.

定义. 给定李代数$\mathfrak{s}$，若$\mathfrak{s}$是非交换的且它的理想仅有0及其本身，则称$\mathfrak{s}$是单的(simple).

例12.4. 任意给定维数不小于2的向量空间V，则$\mathfrak{sl}(V)$是单李代数.

定理12.12. 李代数$\mathfrak{g}$是半单的当且仅当它是单李代数的乘积.

定义. 给定李代数$\mathfrak{g}$，若k线性映射$D : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$满足

$$D([x, y]) = [D(x), y] + [x, D(y)]$$

对所有$x, y \in \mathfrak{g}$都成立，则称D是$\mathfrak{g}$的一个微分(derivation)，若存在$z \in \mathfrak{g}$使得$D = \mathfrak{ad}_z$，则称D是一个内微分(inner derivation).

定理12.13. 半单李代数的微分一定是内微分.

定义. 给定半单李代数$\mathfrak{g}$，$x \in \mathfrak{g}$，

1. 若ad_x是幂零的，则称x是幂零的，
2. 若ad_x是半单的，即对应的矩阵在k的代数闭包中可对角化，则称x是半单的.

定理12.14. 若$\mathfrak{g}$是半单李代数，那么任意元素$x \in \mathfrak{g}$都可以写成

$$x = s + n$$

的形式，其中s是半单元素，n是幂零元素，且$[s, n] = 0$.特别地，若元素$y \in \mathfrak{g}$与x交换，则也与s和n交换.

定理12.15. 给定半单李代数$\mathfrak{g}$的表示$\varphi : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$，若$x$是幂零的，则$\varphi(x)$也是幂零的.

定理12.16 (Weyl)**.** 任意（有限维）的半单李代数表示都是完全可约的.

定理12.17. 给定有限维$\mathbb{R}$李代数$\mathfrak{g}$，那么$\mathfrak{g}$是交换的（对应地，幂零、可解、半单的）当且仅当$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}} := \mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$是交换的（对应地，幂零、可解、半单的）.

12.2 $\mathfrak{sl}_2$

依照定义

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a + d = 0 \right\},$$

其中的Lie括号满足

$$[A, B] := AB - BA,$$

于是$\mathfrak{sl}_2$自然有一组基

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

且满足

$$[X, Y] = H,\ [H, X] = 2X,\ [H, Y] = -2Y.$$

显然元素H是半单的，并且它生成的子Lie代数

$$\mathfrak{h} := \mathbb{C} \cdot H$$

是$\mathfrak{sl}_2$中的Cartan子代数.

定义. 给定$\mathfrak{sl}_2$模V，对任意$\lambda \in \mathbb{C}$，令

$$V^\lambda := \{v \in V \mid H \cdot v = \lambda v\},$$

称V^λ中的元素的权重(weight)是λ.

命题12.18. 给定$\mathfrak{sl}_2$模V，那么

1. 和$\sum_{\lambda \in \mathbb{C}} V^\lambda$是直和，
2. 若元素x具有权重λ，则Xx具有权重$\lambda - 2$.

Proof.

$$HXx = [H, X] + XHx = 2Xx + \lambda Xx = (\lambda + 2)Xx,$$

□

定义. 给定$\mathfrak{sl}_2$模V和$\lambda \in \mathbb{C}$，若元素$e \in V$具有权重λ且

$$Xe = 0,$$

则称e具有权重λ的原元素(primitive of weight λ).

命题12.19. 给定$\mathfrak{sl}_2$模V和$\lambda \in \mathbb{C}$，元素$e \in V$是具有权重λ的原元素当且仅当e张成的直线在$\mathfrak{sl}_2$的*Borel*群作用下不变.

命题12.20. 任意有限维$\mathfrak{sl}_2$模V都有一个原元素.

练习12.1. 考虑序列$\{Xx, X^2x, X^3, \cdots\}$，证明其中最后一个非零元素是一个原元素.

定理12.21. 给定$\mathfrak{sl}_2$模V和其中的原元素e，令$e_n := \frac{Y^n e}{n!}, n \geq 0$且$e_{-1} = 0$，那么

$$\begin{aligned} He_n &= (\lambda - 2n)e_n, \\ Ye_n &= (n+1)e_{n+1}, \\ Xe_n &= (\lambda - n + 1)e_{n-1} \end{aligned}$$

对任意的$n \geq 0$都成立.

推论12.21.1. 如定理条件，那么如下两种情况必有一成立且仅有一种成立

1. $\{e_n\}_{n\geq 0}$是线性无关的，
2. e的权重λ是整数m，$\{e_0, \cdots, e_m\}$是线性无关的且$e_i = 0$对任意$i > m$都成立.

推论12.21.2. 若V是有限维$\mathfrak{sl}_2$模，那么推论中的情形2成立，且$\{e_0, \cdots, e_m\}$张成了$\mathfrak{sl}_2$不变的子模.

记$\{e_0, \cdots, e_m\}$张成的模为W_m.

定理12.22.
1. W_m是不可约$\mathfrak{sl}_2$模，
2. 所有的有限维$\mathfrak{sl}_2$不可约模都同构于某个W_m.

12.3 根系

给定一个有限维$\mathbb{R}$线性空间V，α是V中的向量，s是V的线性自同构，满足

1. $s(\alpha) = -\alpha$，
2. V的子集$H := \{v \in V \mid s(v) = v\}$是$V$的超平面，

则称s是V关于α的对称(symmetry with vector α).

练习12.2. 求证$V = H \oplus \mathbb{R}\alpha$.设$V^*$是$V$的对偶空间，求证存在唯一的$\alpha^* \in V^*$使得$\alpha^*(\alpha) = 2$且$\alpha^*(H) = 0$.

一方面，给定一个关于α的对称s，令$H := \mathrm{Ker}\ s$，α^*是练习给出的线性函数，那么

$$s(x) = x - \alpha^*(x)\alpha$$

对任意$x \in V$成立，也记为$s = \mathrm{id} - \alpha^* \otimes \alpha$.反过来，任给定向量和超平面$H$，记$\alpha^*$是练习确定的线性函数，那么

$$\begin{aligned} s : V &\to V \\ x &\mapsto x - \alpha^*(x)\alpha \end{aligned}$$

是一个对称.

引理12.2. 给定一个有限维线性空间V和其中的非零向量α，设R是V的有限集且张成V，那么至多存在唯一的V关于α的对称s使得$s(R) = R$.

Proof. 设s_1, s_2是两个满足要求的对称，令$u := s_1^{-1} \circ s_2$，那么u是V的自同构且$u(\alpha) = \alpha, u(R) = R$. □

定义. 给定有限维$\mathbb{R}$向量空间V和它的子集R，满足

1. R是有限集，不包含0且R张成了V，
2. 对任意的$\alpha \in R$，存在关于α的对称s_α使得R是不变的，
3. 对任意的$\alpha, \beta \in R$，$s_\alpha(\beta) - \beta$是α的整数倍，

则称R是V的一个根系(root system).

根据之前的讨论，对称s_α可以写为$\mathrm{id} - \alpha^* \otimes \alpha$，此时性质3等价于

$$\langle \alpha^*, \beta \rangle \in \mathbb{Z}.$$

此外，由性质2立即得到$-\alpha = s_\alpha(\alpha) \in R$.

定义. 给定V中的根系R，称

$$\langle s_\alpha \rangle_{\alpha \in R} \leq GL(V)$$

为R对应的Weyl群(Weyl group).