

# 同调代数



# 第一章 导出函子

## 1.1

定义. 给定加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的一族对象及态射

$$X^\bullet : \dots \xrightarrow{d^{n-1}} X^n \xrightarrow{d^n} X^{n+1} \xrightarrow{d^{n+1}} \dots$$

满足 $d^n \circ d^{n-1} = 0$ 对任意 $n$ 都成立, 则称 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个上链(cochain).

对偶地, 我们也有加性范畴 $\mathcal{A}$ 中的链(chain)的概念. 我们记

例1. 给定代数 $R$ , 若 $M$ 是 $R$ 模, 且 $P^\bullet$ 和 $I^\bullet$ 分别是 $M$ 的投射预解和内射预解, 则如下三个横向的序列是 $R - \text{Mod}$ 中的一个上链

$$\begin{array}{cccccccccccccccc} \dots & \xrightarrow{d^{-2}} & P^{-2} & \xrightarrow{d^{-1}} & P^{-1} & \xrightarrow{d^0} & P^0 & \xrightarrow{\epsilon} & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \dots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{\eta} & I^0 & \xrightarrow{d^0} & I^1 & \xrightarrow{d^1} & I^2 & \xrightarrow{d^2} & \dots \end{array}$$

, 且他们有相同的上同调.

例2. 设 $(X^\bullet, d^\bullet)$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个上链, 定义上链 $\tau^{\leq 0}(X^\bullet, d^\bullet)$ 为

$$\dots \xrightarrow{d^{-2}} X^{-1} \xrightarrow{d^{-1}} \text{Ker } d^0 \xrightarrow{0} 0 \rightarrow \dots,$$

那么我们可以证明,

$$H^n(\tau^{\leq 0}(X^\bullet)) = \begin{cases} H^n(X^\bullet) & n \leq 0 \\ 0 & n > 0 \end{cases},$$

类似地我们也有构造 $\tau_{\geq 0}(X^\bullet, d^\bullet)$ ,

$$\dots \rightarrow 0 \rightarrow X^0 / \text{Im } d^1 \xrightarrow{\bar{d}^0} X^1 \xrightarrow{d^1} X^2 \rightarrow \dots,$$

**定理1.1.1.** 设

$$0 \rightarrow X^\bullet \rightarrow Y^\bullet \rightarrow Z^\bullet \rightarrow 0$$

是Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中上链的正合列, 那么存在上同调的长正合列

$$\cdots \rightarrow H^n(X^\bullet) \rightarrow H^n(Y^\bullet) \rightarrow H^n(Z^\bullet) \rightarrow H^{n+1}(X^\bullet) \rightarrow \cdots$$

*Proof.* 我们将长正合序列具体写出来

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & \ker d_X^n & \longrightarrow & \ker d_Y^n & \longrightarrow & \ker d_Z^n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X^n & \longrightarrow & Y^n & \longrightarrow & Z^n \longrightarrow 0 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & X^{n+1} & \longrightarrow & Y^{n+1} & \longrightarrow & Z^{n+1} \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & \text{coker } d_X^n & \longrightarrow & \text{coker } d_Y^n & \longrightarrow & \text{coker } d_Z^n \longrightarrow 0, \end{array}$$

于是存在如下交换图, 且横向序列由蛇形引理都是正合的:

$$\begin{array}{ccccccc} \text{coker } d_X^{n-1} & \longrightarrow & \text{coker } d_Y^{n-1} & \longrightarrow & \text{coker } d_Z^{n-1} & \longrightarrow & 0 \\ \downarrow \bar{d}_X^n & & \downarrow \bar{d}_Y^n & & \downarrow \bar{d}_Z^n & & \\ 0 & \longrightarrow & \ker d_X^{n+1} & \longrightarrow & \ker d_Y^{n+1} & \longrightarrow & \ker d_Z^{n+1}, \end{array}$$

其中 $\bar{d}_X^n : \text{coker } d_X^{n-1} \rightarrow \ker d_X^{n+1}$ , (在 $R$ 模的情形就是选取一个代表元素 $X^n / \text{im } d_X^{n-1} \cong \text{coker } d_X^{n-1}$ , 然后用 $d_X^n$ 将代表元映到 $\ker d_X^{n+1}$ 中). 再次根据蛇形引理, 有长正合序列

$$\ker \bar{d}_X^n \rightarrow \ker \bar{d}_Y^n \rightarrow \ker \bar{d}_Z^n \rightarrow \text{coker } \bar{d}_X^n \rightarrow \text{coker } \bar{d}_Y^n \rightarrow \text{coker } \bar{d}_Z^n.$$

但是,

$$\ker \bar{d}_X^n \cong \frac{\ker d_X^n}{\text{im } d_X^{n-1}} = H^n(X^\bullet)$$

且

$$\text{coker } \bar{d}_X^n \cong \frac{\ker d_X^{n+1}}{\text{im } d_X^n} = H^{n+1}(X^\bullet),$$

这样就得到了希望的长正合序列. □

## 1.2

给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ , 且设 $X^\bullet = (X^n, d_X^n) \in \text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 中对象组成的复形, 那么我们可以定义一个新的复形 $X[n]^\bullet$ , 满足 $(X[n])^i = X^{n+i}$ ,  $d_{X[n]}^i = (-1)^n d_X^{n+i} : (X[n])^i \rightarrow (X[n])^{i+1}$ . 若 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ 是一个链同态, 则我们有诱导的链同态 $f[n] : X[n]^\bullet \rightarrow Y[n]^\bullet$ , 满足 $f[n]^i = f^{n+i} : (X[n])^i \rightarrow (Y[n])^i$ .

我们称 $[1]$ 为平移函子(translation by 1 functor), 它是拓扑中 $-\times[0, 1]$ 的类比. 之后这个函子将给出了????上的一个三角结构(triangulated structure).

定义. 给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 的一个链同态 $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ , 那么 $f$ 的映射锥(mapping cone)是 $\mathcal{A}$ 中对象组成的一个链 $\text{Cone}(f)^\bullet$ 满足

$$\text{Cone}(f)^i := X[1]^i \oplus Y^i$$

和

$$d_{\text{Cone}(f)}^i := \begin{pmatrix} d_{X[1]}^i & 0 \\ f[1]^i & d_Y^i \end{pmatrix}.$$

类似地我们可以定义 $f$ 的映射柱(mapping cylinder), 它是 $\mathcal{A}$ 中对象组成的一个链 $\text{Cyl}(f)^\bullet := X^\bullet \oplus X[1]^\bullet \oplus Y^\bullet$ , 其中

$$d_{\text{Cyl}(f)}^i := \begin{pmatrix} d_X^i & -\text{id}_{X[1]} & 0 \\ 0 & -d_{X[1]}^i & 0 \\ 0 & f[1]^i & d_Y^i \end{pmatrix}.$$

这样微分映射的定义很明显是合理的, 它们都是上链:

例3. 设 $X^\bullet, Y^\bullet$ 是单对象上链,  $f : X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ 是链映射, 那么由定义

$$\text{Cone}(f) = \cdots \rightarrow 0 \rightarrow X^0 \xrightarrow{f} Y^0 \rightarrow 0 \rightarrow \cdots,$$

其中 $Y^0$ 所在的位置是0阶位置, 且有 $H^0, H^{-1}$ .

另一方面, 我们希望从拓扑的角度解释这样称呼他们的原因, 设 $f : X \rightarrow Y$ 是拓扑空间的连续函数, 那么 $f$ 的映射柱是拓扑空间 $(X \times I) \amalg_f Y$ , 其中粘合依赖于 $f : X \times \{1\} \rightarrow Y$ , 它在同伦的定义中起到了重要的作用. 回顾拓扑中映射 $f, g$ 的一个同伦是一个连续映射 $H : X \times I \rightarrow Y$ , 满足 $H|_{X \times \{0\}} = f$ 且 $H|_{X \times \{1\}} = g$ , 用交换图表示即为

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{i} & X \times I & \xleftarrow{j} & X \\ & \searrow f & \downarrow H & \swarrow g & \\ & & Y & & \end{array},$$

其中 $i : X \rightarrow X \times I, x \mapsto (x, 0)$ 且 $j : X \rightarrow X \times I, x \mapsto (x, 1)$ . 用到拓扑空间中余积是不交并的事实, 上图又可以表示为

$$\begin{array}{ccc} X \amalg X & \xrightarrow{i \amalg j} & X \times I \\ & \searrow f \amalg g & \downarrow H \\ & & Y, \end{array}$$

注意到 $X \times I$ 恰是 $\text{id}_X : X \rightarrow X$ 的映射柱, 因而映射同伦的存在性恰由映射柱描述. 这样的事情同样发生在 $\text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 中, 一个上链映射的同伦 $s : f \simeq g$ 可以给出一个 $\text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ 的交换图

$$\begin{array}{ccc} X^\bullet \oplus X^\bullet & \longrightarrow & \text{Cyl}(\text{id}_X)^\bullet \\ & \searrow & \downarrow \\ & & Y^\bullet, \end{array}$$

习题-将给出验证.

**引理1.2.1.** 任给定  $Abel$  范畴  $\mathcal{A}$  的一个链同态  $f: X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ , 都存在如下  $Com^\bullet(\mathcal{A})$  的正合列:

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & Y^\bullet & \xrightarrow{\bar{\pi}} & Cone(f) & \xrightarrow{\pi} & X^\bullet[1] \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \alpha & & \downarrow id & & \\
 0 & \longrightarrow & X^\bullet & \xrightarrow{\bar{f}} & Cyl(f) & \xrightarrow{\pi} & Cone(f) \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow id & & \downarrow \beta & & \\
 & & X^\bullet & \xrightarrow{f} & Y^\bullet & & 
 \end{array}$$

**推论1.2.0.1.**

**定义.** 给

**习题1.2.1.** 设  $(X^\bullet \oplus Y^\bullet, d = \begin{smallmatrix} f & g \\ l & k \end{smallmatrix})$  是上链复形,  $Y^\bullet$  可缩且  $h: Y^\bullet \rightarrow Y^\bullet[1]$  是链同伦, 求证

$$(X^\bullet, f - gh) \hookrightarrow (X^\bullet \oplus Y^\bullet, d)$$

是拟同构.

## 第二章 谱序列

### 2.1 双复形和全复形

定义. 分次模/分次对象

定义. 设  $M, N$  是分次  $R$  模, 若  $R$  模态射  $f : M \rightarrow N$  满足存在整数  $d$ , 使得对任意  $n \in \mathbb{Z}$  都有  $f : M_n \rightarrow N_{n+k}$ , 则称  $f$  是阶数为  $k$  的分次映射(graded map of degree  $k$ ).

命题2.1.1. 若  $M \xrightarrow{f} N \xrightarrow{g} P$  分别是阶数为  $k, l$  的分次映射, 则  $g \circ f$  是阶数为  $k + l$  的分次映射.

定义. 一个双分次模(bigraded module)是一族有两个指标的  $R$  模

$$M := \{M^{p,q}\}_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}},$$

一般我们记为  $M^{\bullet\bullet}$ . 若  $M, N$  是双分次模, 一族映射

$$f = \{f^{p,q} : M^{p,q} \rightarrow N^{p+k,q+l}\}_{(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$$

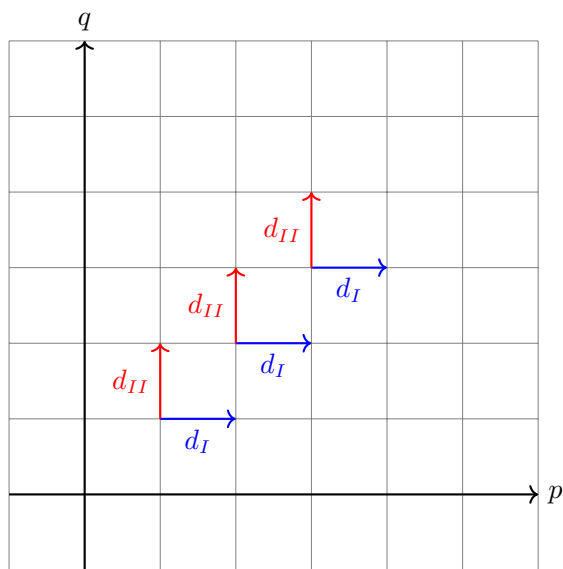
若都是  $R$  模映射, 则称  $f$  是阶数为  $(k, l)$  的双分次映射.

接下来我们都用上同调的序号记号.

定义. 设  $M$  是双分次  $R$  模,  $d_I, d_{II}$  是两个阶数分别为  $(1, 0)$  和  $(0, 1)$  的双分次微分映射 (即  $d_I^{p+1,q} \circ d_I^{p,q} = 0$ ,  $d_{II}^{p,q+1} \circ d_{II}^{p,q} = 0$ ). 若映射满足

$$d_I^{p,q+1} \circ d_{II}^{p,q} + d_{II}^{p+1,q} \circ d_I^{p,q} = 0,$$

则称 $(M, d_I, d_{II})$ 是一个**双复形**(bicomplex).



**例4.** 设 $M$ 是双分次 $R$ 模,  $d_I, \delta$ 是两个阶数分别为 $(1, 0)$ 和 $(0, 1)$ 的双分次微分映射, 使得 $M$ 是一个交换图 (注意这和双复形差了一个符号!), 那么我们可以通过符号变换构造一个双复形. 令 $d_{II}^{p,q} = (-1)^p \delta^{p,q}$ , 那么

$$d_I^{p,q+1} \circ d_{II}^{p,q} + d_{II}^{p+1,q} \circ d_I^{p,q} =$$

**定义.** 设 $M$ 是双分次 $R$ 模, 那么

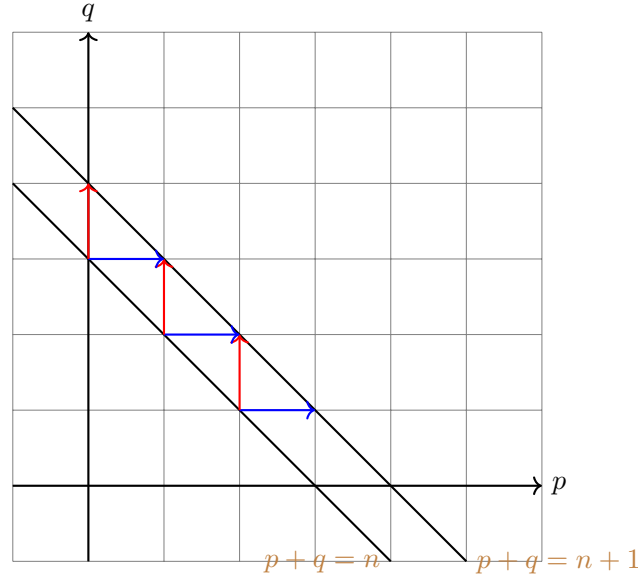
$$\text{Tot}(M)^n := \bigoplus_{p+q=n} M^{p,q}$$

和 $D^n : \text{Tot}(M)^n \rightarrow \text{Tot}(M)^{n+1}$ ,

$$D^n := \sum_{p+q=n} (d_I^{p,q} + d_{II}^{p,q})$$

称为 $M$ 的全复形(total complex).





**引理2.1.1.** 若 $M$ 是双复形, 则 $(\text{Tot}(M), D)$ 是复形.

很多时候, 我们关心的上同调问题是某个双复形的全复形的上同调群, 而谱序列就是一种计算全复形上同调群的某种技巧.

**例5.** 设 $M$ 是双分次 $R$ 模,  $(M, d_I, d_{II})$ 是一个双复形, 那么我们可以定义双复形的转置 $M^T$ : 这意味着

$$\text{Tot}(M) = \text{Tot}(M^T).$$

## 2.2 滤子和正合对

**定义.** 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴,  $X$ 是 $\mathcal{A}$ 中的对象, 则 $X$ 的一个递降滤子(descending filtration)是一族 $X$ 的子对象 $\{F^n X\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 满足

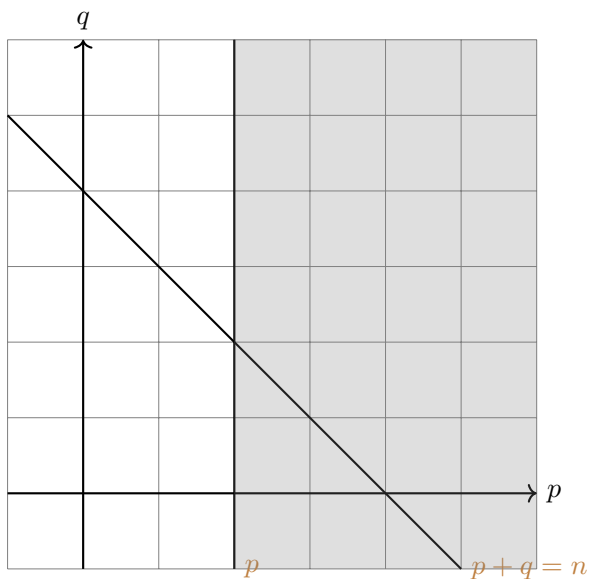
$$0 \subseteq \cdots \subseteq F^{n+1} X \subseteq F^n X \subseteq \cdots X.$$

**定义.** 设 $M$ 是双分次 $R$ 模,  $(M, d_I, d_{II})$ 是一个双复形, 那么称

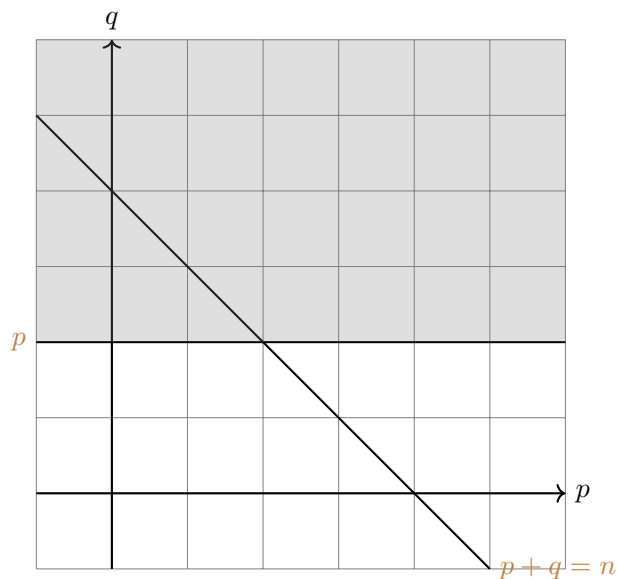
$$({}^I F^p \text{Tot}(M))^n := \bigoplus_{i \geq p} M^{i, n-i} = \cdots \oplus M^{p+2, q-2} \oplus M^{p+1, q-1} \oplus M^{p, q}$$

为 $\text{Tot}(M)$ 的第一滤子(the first filtration), 称

$$({}^{II} F^p \text{Tot}(M))^n := \bigoplus_{j \geq p} M^{n-j, j} = \cdots \oplus M^{p-2, q+2} \oplus M^{p-1, q+1} \oplus M^{p, q}$$



(a) 第一滤子



(b) 第二滤子

为 $\text{Tot}(M)$ 的第二滤子(the second filtration).

定义. 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴,  $D, E$ 是 $\mathcal{A}$ 中的双分次对象,  $f, g, h$ 是双分次映射, 若

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f} & D \\ & \swarrow h & \searrow g \\ & E & \end{array}$$

是正合的, 那么称 $(D, E, f, g, h)$ 是正合对(exact couple).

定理2.2.1. 每一个Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的上链 $X^\bullet$ 的滤子 $F^p X^\bullet$ 都给出一个正合对

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{f(-1,1)} & D \\ & \swarrow h(1,0) & \searrow g(0,0) \\ & E, & \end{array}$$

其中映射的度在图中已经标出.

*Proof.* 我们有复形的短正合列

$$0 \rightarrow F^{p+1} X^\bullet \xrightarrow{i^{p+1}} F^p X^\bullet \xrightarrow{\pi^p} F^p X^\bullet / F^{p+1} X^\bullet \rightarrow 0,$$

这诱导了上同调群的长正合序列

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow H^n(F^{p+1}X^\bullet) &\xrightarrow{H^n(i^{p+1})} H^n(F^pX^\bullet) \xrightarrow{H^n(\pi^p)} H^n(F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet) \rightarrow \\ &\xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(F^{p+1}X^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(i^{p+1})} H^{n+1}(F^pX^\bullet) \xrightarrow{H^{n+1}(\pi^p)} H^{n+1}(F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet) \rightarrow \cdots \end{aligned}$$

我们取  $n = p + q$ ,  $f = H^\bullet(i^{p+1})$ ,  $g = H^\bullet(\pi^p)$ ,  $h = \delta^\bullet$ , 并且

$$\begin{aligned} D &= \{D^{p,q} := H^{p+q}(F^pX^\bullet)\} \\ E &= \{E^{p,q} := H^{p+q}(F^pX^\bullet/F^{p+1}X^\bullet)\} \end{aligned}$$

代入到长正合序列中即为

$$\cdots \rightarrow D^{p+1,q-1} \xrightarrow{f^{p+1,q-1}} D^{p,q} \xrightarrow{g^{p,q}} E^{p,q} \xrightarrow{h^{p,q}} D^{p+1,q} \rightarrow \cdots$$

□

**定义.** 设  $\mathcal{A}$  是 Abel 范畴,  $X$  是  $\mathcal{A}$  中的双分次对象,  $d$  是双分次映射满足  $d \circ d = 0$ , 则称  $(X, d)$  是微分双分次对象(differential bigraded object).

若  $(X, d)$  是微分双分次对象,  $d$  的阶数为  $(k, l)$ , 那么定义  $(X, d)$  的上同调为

$$H(X, d)^{p,q} := \frac{\ker d^{p,q}}{\operatorname{im} d^{p-k,q-l}}.$$

**定理2.2.2.** 若  $(D, E, f, g, h)$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  上的一个正合对, 那么  $d := h \circ g : E \rightarrow E$  给出  $\mathcal{A}$  上的一个微分双分次对象  $(E, d)$ , 且存在一个新的正合对  $(D_2, E_2, f_2, g_2, h_2)$

$$\begin{array}{ccc} D_2 & \xrightarrow{f_2} & D_2 \\ & \swarrow h_2 & \searrow g_2 \\ & E_2 & \end{array}$$

满足  $E_2 = H(E, d)$ , 称为导出对(derived couple).

*Proof.* 首先我们验证微分. 按照定义,  $d \circ d = (h \circ g) \circ (h \circ g) = h \circ (g \circ h) \circ g = h \circ 0 \circ g = 0$ .

按照条件定义  $E_2 = H(E, d)$ , 定义

$$D_2 := \operatorname{Im} f,$$

且  $f_2 := f|_{D_2} = f \circ \iota$ , 其中  $\iota : D_2 \rightarrow D$  是嵌入.

□

**推论2.2.2.1.** 每一个 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的上链  $X^\bullet$  的滤子  $F^p X^\bullet$  都给出一族正合对

$$\begin{array}{ccc} D_r & \xrightarrow{f_r(1,-1)} & D_r \\ & \swarrow h_r(-1,2) & \searrow g_r(1-r,r-1) \\ & E_r & \end{array}$$

且满足

1. 双分次映射  $f_r, g_r, h_r$  的度分别为  $(1, -1), (1 - r, r - 1)$  和  $(-1, 2)$ .
2. 微分  $d_r$  的度为  $(0, 0)$ , 它由  $hf_{-r+1}g$  诱导.

**定义.** 设  $\mathcal{A}$  是 Abel 范畴,  $\mathcal{A}$  上的谱序列  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$  是一族  $\mathcal{A}$  中的对象和态射的全体  $E = (E_r^{p,q}, d_r^{p,q})$ , 满足

1. 态射  $d_r^{p,q} : E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$  定义在第  $r$  页, 且是微分映射, 即  $d_r^{p+r, q-r+1} \circ d_r^{p,q} = 0$ .
2. 有同构

$$H^{p,q}(E_r) := \frac{\text{Ker } d_r^{p,q}}{\text{Im } d_r^{p+r, q-r+1}} \cong E_{r+1}^{p,q}.$$

## 2.3 收敛性

**定义.** 设  $\mathcal{A}$  是 Abel 范畴,  $X$  是  $\mathcal{A}$  的对象,  $Y$  是  $X$  的子对象,  $Z$  是  $Y$  的子对象, 则  $Y/Z$  称为  $X$  的一个子商(subquotient).

若  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$  是谱序列, 那么  $E_2 = H(E_2, d_2)$  是  $E_1$  的子商:  $E_2 := Z_2/B_2$ . 同理我们知道  $E_3$  是  $E_2$  的子商, 且

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots B_r \subseteq \cdots \subseteq Z_r \subseteq Z_2 \subseteq Z_1 \subseteq E_1.$$

**定义.** 给定谱序列  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ , 定义  $Z_\infty := \bigcap_{r \geq 1} Z_r$ ,  $B_\infty := \bigcup_{r \geq 1} B_r$ , 则谱序列的极限项(limit term)为

$$E_\infty^{p,q} := \frac{Z_\infty^{p,q}}{B_\infty^{p,q}}.$$

借用 MacLane 的描述,  $Z^r$  是出现到第  $r$  页的对象,  $B^r$  是被第  $r$  页限制的对象, 而  $Z^\infty$  和  $B^\infty$  是一直出现和最终被限制的对象.

**引理 2.3.1.** 设  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$  是谱序列, 那么

1.  $E_{r+1} = E_r$  当且仅当  $Z_{r+1} = Z_r, B_{r+1} = B_r$ .
2. 若存在  $s$  使得对任意  $r \geq s$  都有  $E_{r+1} = E_r$ , 则  $E_\infty = E_s$ .

考虑 $\mathcal{A}$ 中上链 $X^\bullet$ 的一个滤子 $F^p X^\bullet$ , 于是我们有单同态 $i^p : F^p X^\bullet \rightarrow X^\bullet$ , 这诱导了 $H^n(i^p) : H^n(F^p X^\bullet) \rightarrow H^n(X^\bullet)$ . 由于 $F^p X^\bullet \subseteq F^{p-1} X^\bullet$ , 我们有 $\text{Im } H^n(i^p) \subseteq \text{Im } H^n(i^{p-1}) \subseteq H^n(X^\bullet)$ , 这意味着

$$\Phi^p H^n(X^\bullet) := \text{Im } H^n(i^p)$$

是 $H^n(X^\bullet)$ 的一个滤子, 称为 $F^p X^\bullet$ 的诱导滤子(derived filtration).

**定义.** 设 $X^\bullet$ 是Abel范畴 $\mathcal{A}$ 上的上链,  $F^p X^\bullet$ 是上链的滤子. 若 $\forall n \in \mathbb{Z}$ 都能找到整数 $l(n)$ 和 $u(n)$ 使得 $F^{u(n)} X^n = 0$ 且 $F^{l(n)} X^n = X^n$ , 则称滤子 $F^p X^\bullet$ 是有界的(bounded).

**定义.** 给定Abel范畴中的谱序列 $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ , 若存在分次对象 $H^n$ 和 $H^n$ 的有界滤子 $\Phi^p H^n$ 满足

$$E_\infty^{p,q} \cong \frac{\Phi^p H^n}{\Phi^{p+1} H^n},$$

则称谱序列 $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ 收敛到(converges to) $H^n$ , 记为

$$E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n.$$

**定理2.3.1.** Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的上链 $X^\bullet$ 的滤子 $F^p X^\bullet$ 给出的谱序列 $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ 都满足

1. 对任意给定的 $p, q$ 都存在 $r$ 使得 $E_r^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ .
2.  $E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$ .

*Proof.*

□

**命题2.3.2.** 设 $X^{\bullet\bullet}$ 是三象限双复形, 且设 $^I E_r^{p,q}, {}^{II} E_r^{p,q}$ 是 $\text{Tot}(X^{\bullet\bullet})$ 的第一滤子和第二滤子所诱导的谱序列, 那么

1. 第一滤子和第二滤子都是有界的.
2. 对任意 $p, q$ 都存在页数 $r = r(p, q)$ 使得 $^I E_\infty^{p,q} = {}^I E_r^{p,q}, {}^{II} E_\infty^{p,q} = {}^{II} E_r^{p,q}$ .
3.  $^I E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$ 且 ${}^{II} E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$ .

虽然这个结果看上去很不错, 但不论是符号上还是实际计算上这些都并不能够帮助我们.

**定义.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的三象限双复形 $X^{\bullet\bullet}$ , 称 $H_I^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet}))$ 为 $X^{\bullet\bullet}$ 的第一上同调(the first iterated cohomology), 称 $H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet}))$ 为 $X^{\bullet\bullet}$ 的第二上同调(the second iterated cohomology).

**定理2.3.3.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的三象限双复形 $X^{\bullet\bullet}$ , 则

1.  ${}^I E_1^{p,q} = H_{II}^q(X^{p,\bullet}).$
2.  ${}^I E_2^{p,q} = H_I^p(H_{II}^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet})).$

对偶地, 我们同样有

**定理2.3.4.** 给定Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中的三象限双复形 $X^{\bullet\bullet}$ , 则

1.  ${}^{II} E_1^{p,q} = H_I^q(X^{\bullet,p}).$
2.  ${}^{II} E_2^{p,q} = H_{II}^p(H_I^q(X^{\bullet\bullet})) \Rightarrow_p H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet})).$

**例6.** 给定 $R$ 模范畴中的交换图

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{g} & Q \\ \uparrow h & & \uparrow k \\ M & \xrightarrow{f} & N, \end{array}$$

做适当的变换我们得到一个三象限双复形 $X^{\bullet\bullet}$ , 我们考虑 $N, P$ 都是 $Q$ 的子模的特殊情形, 来计算该双复形的全复形

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\quad} P \oplus N \xrightarrow{g+k} Q$$

的上同调.

**定义.** 设 $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ 是Abel范畴中的谱序列, 若 $E_2^{p,q} = 0$ 对所有非零的 $q$ 都成立, 则称 $E_r$ 落在 $p$ 轴上(collapses on the  $p$ -axis).

**命题2.3.5.** 设 $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ 三象限谱序列, 且 $E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(X^\bullet)$ , 若称 $E_r$ 落在任意轴上, 则

1.  $E_2^{p,q} = E_\infty^{p,q}$ 对任意 $p, q$ 成立.
2. 若 $E_r$ 落在 $p$ 轴上, 则 $H^n(X^\bullet) = E_2^{n,0}$ ; 若 $E_r$ 落在 $q$ 轴上, 则 $H^n(X^\bullet) = E_2^{0,n}$ .

**定理2.3.6.** 给定 *Abel* 范畴  $\mathcal{A}$  中的三象限谱序列  $(E_r, d_r)_{r \geq 1}$ , 且  $E_2^{p,q} \Rightarrow_p H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$ , 则

1. 对任意  $n$  都存在满同态  $E_2^{n,0} \rightarrow E_\infty^{0,n}$  和单同态  $E_2^{0,n} \rightarrow E_\infty^{n,0}$ .
2. 对任意  $n$  都存在满同态  $E_\infty^{n,0} \rightarrow H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$  和单同态  $E_\infty^{0,n} \rightarrow H^n(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$ .
3. 存在正合序列

$$0 \rightarrow E_2^{1,0} \rightarrow H^1(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet})) \rightarrow E_2^{0,1} \xrightarrow{d_2} E_2^{2,0} \rightarrow H^2(\text{Tot}(X^{\bullet\bullet}))$$

## 2.4 Cartan-Eilenberg预解

**定义.** 设  $X^\bullet$  是 *Abel* 范畴  $\mathcal{A}$  上的上链, 那么称

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow Z^n \rightarrow X^n \xrightarrow{d^n} B^{n+1} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow B^n \hookrightarrow Z^n \rightarrow H^n \rightarrow 0 \end{aligned}$$

为  $X^\bullet$  的基本短正合列(fundamental exact sequence). 若上链复形  $X^\bullet$  的基本短正合列都分裂, 则称  $X^\bullet$  分裂(split).

**定义.** 设  $X^\bullet$  是 *Abel* 范畴  $\mathcal{A}$  上的上链, 如果

$$0 \rightarrow X^\bullet \rightarrow I^{0,\bullet} \rightarrow I^{1,\bullet} \rightarrow \dots$$

是整合列且对每个  $p$  以下每个整合列都是  $\mathcal{A}$  中的内射预解

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow X^p \rightarrow I^{0,p} \rightarrow I^{1,p} \rightarrow \dots \\ 0 \rightarrow Z^p(X^\bullet) \rightarrow Z^{0,p} \rightarrow Z^{1,p} \rightarrow \dots \\ 0 \rightarrow B^p(X^\bullet) \rightarrow B^{0,p} \rightarrow B^{1,p} \rightarrow \dots \\ 0 \rightarrow H^p(X^\bullet) \rightarrow H^{0,p} \rightarrow H^{1,p} \rightarrow \dots \end{aligned}$$

则称这是  $X^\bullet$  的一个 Cartan-Eilenberg 内射预解(Cartan-Eilenberg injective resolution).

**定理2.4.1.** 若 *Abel* 范畴  $\mathcal{A}$  中包含有足够多的内射对象, 则  $\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$  中的每个上链复形都有 *Cartan-Eilenberg* 内射预解.

## 2.5 Grothendieck谱序列

**定义.** 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴, 且含有足够多的内射对象,  $X$ 是 $\mathcal{A}$ 的对象,  $F : \mathcal{A} \Rightarrow \mathbf{Ab}$ 是加性函子. 若 $R^p F(X) = 0$ 对于任意 $p \geq 1$ 都成立, 则称 $X$ 是右 $F$ 零调的(right  $F$ -acyclic).

**定理2.5.1** (Grothendieck谱序列). 设 $F : \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}, G : \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C}$ 是Abel范畴间的协变加性函子, 且 $\mathcal{B}$ 中包含足够多的内射对象,  $F$ 将 $\mathcal{A}$ 中的内射对象映为 $\mathcal{B}$ 中的右 $G$ 零调对象. 那么对任意 $\mathcal{A}$ 中的对象 $X$ , 存在第一象限的收敛谱序列

$$E_2^{p,q} := (R^p G \circ R^q F)(X) \Rightarrow R^{p+q}(G \circ F)(X).$$

*Proof.* 选取 $X$ 在 $\mathcal{A}$ 中的一个内射预解

$$0 \rightarrow X \rightarrow J^1 \rightarrow J^2 \rightarrow \cdots,$$

于是我们得到 $\mathcal{B}$ 中的一个

□



## 第三章 导出范畴

### 3.1 范畴的局部化

**定理3.1.1.** 设 $\mathcal{C}$ 是一个范畴， $U$ 是其中的一族态射，则存在同构下唯一的范畴 $\mathcal{C}[U^{-1}]$ 和函子 $Q : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}[U^{-1}]$ ，使得 $U$ 中所有的态射都被 $Q$ 映到 $\mathcal{C}[U^{-1}]$ 中的同构，且满足如下泛性质：对任意范畴 $\mathcal{D}$ 和任意函子 $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ ，若 $F$ 将 $U$ 中所有的态射映到 $\mathcal{D}$ 中的同构，则有唯一的分解

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{Q} & \mathcal{C}[U^{-1}] \\ & \searrow F & \downarrow \bar{F} \\ & & \mathcal{D}. \end{array}$$

我们称范畴 $\mathcal{C}[U^{-1}]$ 为的 $\mathcal{C}$ 局部化(*localization*).

**习题3.1.1.** 定义范畴 $\mathcal{D}$ 满足 $\text{ob } \mathcal{D} = \text{ob } \mathbf{Ab}$ ， $\text{hom}_{\mathcal{D}}(A, B) := \text{hom}_{\mathbf{Ab}}(A \otimes \mathbb{Q}, B \otimes \mathbb{Q})$ . 求证函子

$$\begin{aligned} \iota : \mathbf{Ab} &\rightarrow \mathcal{D} \\ M &\mapsto M \\ (f : M \rightarrow N) &\mapsto (f \otimes \text{id}_{\mathbb{Q}} : M \otimes \mathbb{Q}, N \otimes \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

是局部化.

这里需要注意，因为范畴中的一族态射 $U$ 可以取得非常不理想，因此局部化之后的范畴可能并非再是局部小的. 但这里我们忽略这样的问题，我们假定（虽然并不真实，但相较于主要问题，范畴本身的问题需要在其他的地方讨论）我们还是得到想要的范畴.

**定义.** 设 $U$ 是范畴 $\mathcal{C}$ 中的一族态射，满足如下条件：

1. 对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 $A$ ， $\text{id}_A \in U$ ，且 $U$ 关于态射的复合封闭，
2. (扩张条件) 对任意 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : A \rightarrow B$ 和 $U$ 中的态射 $u : C \rightarrow B$ ，存在 $\mathcal{C}$ 中的态射 $g : D \rightarrow C$ 和 $U$ 中的态射 $v : D \rightarrow A$ 使得

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g} & C \\ v \downarrow & & \downarrow u \\ A & \xrightarrow{f} & B. \end{array}$$

对偶地, 对任意 $C$ 中的态射 $f: B \rightarrow A$ 和 $U$ 中的态射 $u: B \rightarrow C$ , 存在 $C$ 中的态射 $g: C \rightarrow D$ 和 $U$ 中的态射 $v: A \rightarrow D$ 使得

$$\begin{array}{ccc} D & \xleftarrow{g} & C \\ v \uparrow & & \uparrow u \\ A & \xleftarrow{f} & B, \end{array}$$

3. 对任意 $C$ 中的态射 $f, g: A \rightrightarrows B$ , 存在 $u \in U$ 使得 $uf = ug$ 当且仅当存在 $v \in U$ 使得 $fv = gv$ , 则称这一族态射 $U$ 是局部的(localizing).

**习题3.1.2.** 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴,  $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$ 的满子范畴, 且 $\mathcal{B}$ 对求子对象和商对象封闭. 求证

$$U := \{f: X \rightarrow Y \mid \ker f, \operatorname{coker} f \in \mathcal{B}\}$$

是局部态射族.

我们大费周章地考虑对求逆态射的限制条件, 重要的是当态射族 $U$ 满足这些条件时, 局部化范畴中的态射时非常容易描述的:

**引理3.1.1.** 设 $U$ 是范畴 $C$ 中的一族局部态射, 那么 $C[U^{-1}]$ 可以被如下地描述:  $C[U^{-1}]$ 的对象同于 $C$ 中的对象,  $A \rightarrow B$ 的态射可以被描述为如下的图的等价类:

$$\begin{array}{ccc} & D & \\ u \swarrow & & \searrow f \\ A & & B, \end{array}$$

其中,  $u \in U$ ,  $f: D \rightarrow B$ 是任意 $C$ 中的态射, 记为 $\frac{f}{u}$ . 且 $\frac{f}{u}$ 等价于 $\frac{g}{v}$ 当且仅当存在 $\frac{h}{w}$ 使得如下图交换

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & w \swarrow & & \searrow h & \\ & D & & E & \\ u \swarrow & & \searrow f & & \searrow g \\ A & & & & B, \end{array}$$

且恒等态射是 $\operatorname{id}_A = \frac{\operatorname{id}_A}{\operatorname{id}_A}$ . 最后, 根据定义中的扩张条件,  $\frac{f}{u}: A \rightarrow B$ 与 $\frac{g}{v}: B \rightarrow C$ 的复合是

$$\begin{array}{ccccc} & & F & & \\ & w \swarrow & & \searrow h & \\ & D & & E & \\ u \swarrow & & \searrow f & & \searrow g \\ A & & B & & C \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ccc} & F & \\ uw \swarrow & & \searrow gh \\ A & & C. \end{array}$$

*Proof.* 我们首先验证如上定义了一个等价关系.

接下来我们要验证态射的复合不依赖于代表元的选取. 最后我们验证这样构造的范畴具有相应的泛性质, 因而这个范畴是我们希望的局部化.  $\square$

**定理3.1.2.** 设 $U$ 是加性范畴 $C$ 中的一族局部态射, 那么 $C[U^{-1}]$ 也是加性范畴.

但是, 我们希望研究的情形非常不幸地不满足这些局部的条件: 对于Abel范畴 $\mathcal{A}$ 的上链复形范畴 $\text{Com}^\bullet(\mathcal{A})$ , 拟同构不是局部的.

**命题3.1.3.** 设 $U$ 是范畴 $C$ 中的一族局部态射,  $D$ 是 $C$ 的满子范畴, 如果 $U_D := U \cap \text{mor } D$ 是 $D$ 的局部态射, 且如下的条件满足一条

1. 对任意 $U$ 中的态射 $u: C \rightarrow D$ , 若 $D \in \text{ob } D$ , 则一定存在 $B \in \text{ob } D$ 和态射 $f: B \rightarrow C$ 使得 $u \circ f \in U$ ,
- 2.

那么 $D[U_D^{-1}] \hookrightarrow C[U^{-1}]$ 是一个满忠实的嵌入.

## 3.2 同伦范畴与导出范畴

**引理3.2.1.** 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴,  $D(\mathcal{A}) := \text{Com}^\bullet(\mathcal{A})[Qiso^{-1}]$ , 且设 $Q: \text{Com}^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow D(\mathcal{A})$ 是局部化函子. 求证若 $f: X^\bullet \rightarrow X^\bullet$ 链同伦与 $\text{id}_X$ , 那么在 $D(\mathcal{A})$ 中 $Q(f) = \text{id}_X$ .

*Proof.* 我们先假定如下事实:  $\square$

**命题3.2.1.** 若 $X^\bullet$ 是Abel范畴 $\mathcal{A}$ 上的零调复形,  $I^\bullet$ 是内射复形, 那么

$$\text{hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet) = 0.$$

**命题3.2.2.** 若 $X^\bullet \rightarrow Y^\bullet$ 是拟同构,  $I^\bullet$ 是内射复形, 那么

$$\text{hom}_{K(\mathcal{A})}(Y^\bullet, I^\bullet) \rightarrow \text{hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$$

是同构.

推论3.2.2.1.

$$\mathrm{hom}_{K(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet) \rightarrow \mathrm{hom}_{D(\mathcal{A})}(X^\bullet, I^\bullet)$$

是同构.

定义.

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{A}}^i(X, Y) :=$$

定理3.2.3.

### 3.3 三角范畴

定义. 给定加性范畴 $\mathcal{D}$ , 如果在 $\mathcal{D}$ 上存在如下信息

1. 加性自同构 $T : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ , 它被称为平移函子(translation functor), 通常对于对象 $X \in \mathcal{D}$ , 记 $X[1] := T(X)$ ,
2. 一族被称为特异三角(distinguished triangle)的图

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

和特异三角间的态射

$$\begin{array}{ccccccc} X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\ A & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{k} & C & \xrightarrow{l} & A[1], \end{array}$$

满足以下公理:

TR 1. (a)  $X \xrightarrow{\mathrm{id}_X} X \xrightarrow{0} 0 \xrightarrow{0} X[1]$ 是特异三角;

(b) 任意同构于特异三角的图都是特异三角 (特异三角在同构下封闭);

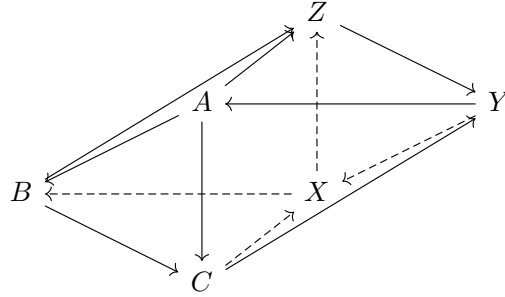
(c) 任意态射 $X \xrightarrow{u} Y$ 都可以扩张为一个特异三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ .

TR 2. 若 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是特异三角, 那么 $Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1] \xrightarrow{-u[1]} Y[1]$ 也是特异三角.

TR 3. 给定两个特异三角 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 和 $A \xrightarrow{j} B \xrightarrow{k} C \xrightarrow{l} A[1]$ , 若存在 $f : X \rightarrow A$ 和 $g : Y \rightarrow B$ 使得 $g \circ u = j \circ f$ , 那么存在 (不要求唯一) 的态射 $h : Z \rightarrow C$ 构成特异三角间的态射

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\
\downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\
A & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{k} & C & \xrightarrow{l} & A[1].
\end{array}$$

TR 4.



则称 $\mathcal{D}$ 是一个三角范畴(triangulated category).若只有前三条公理成立, 则称 $\mathcal{D}$ 是预三角范畴(pre-triangulated categories).

**习题3.3.1.** 若 $X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$ 是 $\mathcal{D}$ 中的特异三角, 求证 $v \circ u, w \circ v, (-u[1]) \circ w$ 都是零态射.

**习题3.3.2.** 若

$$\begin{array}{ccccccc}
X & \xrightarrow{u} & Y & \xrightarrow{v} & Z & \xrightarrow{w} & X[1] \\
\downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & & \downarrow f[1] \\
A & \xrightarrow{j} & B & \xrightarrow{k} & C & \xrightarrow{l} & A[1],
\end{array}$$

是特异三角间的态射, 且 $f, g$ 都是同构, 求证 $h$ 也是同构.

**定义.** 给定(预)三角范畴 $\mathcal{D}, \mathcal{E}$ , 若函子 $F: \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{E}$ 和自然态射 $\eta: F(-[1]) \Rightarrow F(-)[1]$ 满足对任意 $\mathcal{D}$ 中的特异三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1],$$

都能得到 $\mathcal{E}$ 中的特异三角

$$F(X) \xrightarrow{F(u)} F(Y) \xrightarrow{F(v)} F(Z) \xrightarrow{\eta_X \circ F(w)} F(X)[1],$$

则称函子 $F$ 是正合的(exact)或三角的(triangulated).

**定义.** 给定(预)三角范畴 $\mathcal{D}$ 和Abel范畴 $\mathcal{A}$ , 若加性协变函子 $H$ 将特异三角

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[1]$$

映为 $\mathcal{A}$ 中的正合序列

$$H(X) \xrightarrow{H(u)} H(Y) \xrightarrow{H(v)} H(Z) \xrightarrow{H(w)} H(X[1]),$$

则称函子 $H$ 是上同调的(cohomological).若加性反变函子 $H : \mathcal{D}^\circ \rightarrow \mathcal{A}$ 对应的函子 $H^\circ : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{A}^\circ$ 是上同调的, 则称 $H$ 是反变同调的.

通常对于上同调函子, 记 $H^n(X) := H(X[n])$ , 于是 $H^0(X) := H(X)$ .于是, TR2说明给定一个特异三角就可以得到一个 $\mathcal{A}$ 中的长正合序列.

**定义.** 给定三角范畴 $\mathcal{D}$ 和Abel范畴 $\mathcal{A}$ , 若函子 $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ 满足对任意 $\mathcal{A}$ 中的短正合序列

$$0 \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow 0$$

都存在自然的同构 $\delta_{X \rightarrow Y \rightarrow Z}$ 使得

$$X \rightarrow Y \rightarrow Z \xrightarrow{\delta_{X \rightarrow Y \rightarrow Z}} X[1]$$

是 $\mathcal{D}$ 中的特异三角, 则称 $G$ 是 $\delta$ 函子( $\delta$ -functor).自然性意味着短正合序列的态射

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C \longrightarrow 0 \end{array}$$

给出特异三角的态射

$$\begin{array}{ccccccc} X & \longrightarrow & Y & \longrightarrow & Z & \xrightarrow{\delta_{X \rightarrow Y \rightarrow Z}} & X[1] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\delta_{A \rightarrow B \rightarrow C}} & A[1]. \end{array}$$

### 3.3.1 生成元

**定义.** 给定三角范畴 $\mathcal{D}$ 和对象 $E$ , 若 $\mathcal{D}$ 中包含 $E$ 的最小的saturated满三角子范畴是 $\mathcal{D}$ , 或者换句话说 $\langle E \rangle = \mathcal{D}$ , 则称 $E$ 是典型生成元(classical generator).

**定义.** 给定三角范畴 $\mathcal{D}$ 和对象 $E$ ,

1. 若存在正整数 $n$ 使得 $\langle E \rangle_n = \mathcal{D}$ , 则称 $E$ 是强生成元(strong generator).
2. 若 $\text{hom}(E, X[n]) = 0$ 对任意整数 $n$ 都成立意味着 $X \cong 0$ , 则称 $E$ 是弱生成元(weak generator).

### 3.4 导出函子

给定Abel范畴间的函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , 它自然诱导了函子 $\text{Com}^\bullet(F) : \text{Com}^\bullet(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Com}^\bullet(\mathcal{B})$ 和 $K(F) : K(\mathcal{A}) \rightarrow K(\mathcal{B})$ . 由于 $F$ 与平移函子交换, 诱导的函子保持范畴上面的三角结构. 自然地我们会希望 $F$ 诱导了导出范畴上的正合函子. 在函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 本身是正合函子时, 这是没问题的 (命题??), 但一般情形 $K(F)$ 不将拟同构映为拟同构. 不过退一步, 当 $F$ 是左正合或右正合时, 在适当的情形我们可以找到相应的构造使得有对应诱导的函子.

在先前的章节中我们讨论过这个论题, 这里我们用导出范畴的角度来定义导出函子, 具体来说, 给定一个Abel范畴的左 (对应的, 右) 正合函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , 在一定的情况下存在一个扩张函子 $RF : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{B})$  (对应的,  $LF : D^-(\mathcal{A}) \rightarrow D^-(\mathcal{B})$ ), 称为 $F$ 的右导出函子(right derived functor).

**命题3.4.1.** 设Abel范畴间的函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 是正合的, 那么

1.  $K^*(F)$ 将拟同构映到拟同构, 因此它诱导了函子 $D^*(F) : D^*(\mathcal{A}) \rightarrow D^*(\mathcal{B})$ ,
2.  $D^*(F)$ 是正合函子, 即它将特异三角映到特异三角.

**定义.** 设 $\mathcal{A}$ 是Abel范畴,  $\mathcal{R} \subseteq \text{Ob } \mathcal{A}$ 是一族对象, 对给定的左 (右) 正合函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 满足

1.  $F$ 将 $K^+(\mathcal{R})$  ( $K^-(\mathcal{R})$ ) 中的零调序列映到零调序列,
2.  $\mathcal{A}$ 中的任意对象都是 $\mathcal{R}$ 中对象的子对象 (商对象),

则称 $\mathcal{R}$ 是适应于 $F$ 的对象族(adapted to  $F$ ).

**例7.** 给定 $R$ 模 $M$ , 对函子 $M \otimes_R -$ , 所有的平坦 $R$ 模就是适应于该函子的一族对象.

**定理3.4.2.** 设 $\mathcal{R}$ 是Abel范畴 $\mathcal{A}$ 中适应于左正合函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ 的对象, 令 $U_{\mathcal{R}}$ 为 $K^+(\mathcal{R})$ 中的拟同构, 那么 $U_{\mathcal{R}}$ 在 $K^+(\mathcal{R})$ 中是局部的, 且自然的函子

$$K^+(\mathcal{R})[U_{\mathcal{R}}^{-1}] \rightarrow D^+(\mathcal{A})$$

是范畴的等价.

给定一个左正合函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , 我们回顾一下经典意义下导出函子的

**定义.** 对于左正合函子 $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ , 存在如下的图

$$\begin{array}{ccccc}
 K^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K^+(F)} & K^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{Q_{\mathcal{B}}} & D^+(\mathcal{B}) \\
 & \searrow Q_{\mathcal{A}} & & & \\
 & & D^+(\mathcal{A}) & & 
 \end{array}$$

若有函子  $RF : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{A})$  和自然态射  $\eta : Q_{\mathcal{B}} \circ K^+(F) \Rightarrow RF \circ Q_{\mathcal{A}}$

$$\begin{array}{ccccc}
 K^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K^+(F)} & K^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{Q_{\mathcal{B}}} & D^+(\mathcal{B}) \\
 & \searrow Q_{\mathcal{A}} & \downarrow \eta & \nearrow RF & \\
 & & D^+(\mathcal{A}) & & 
 \end{array}$$

使得任意函子  $G : D^+(\mathcal{A}) \rightarrow D^+(\mathcal{A})$  和自然态射  $\xi : Q_{\mathcal{B}} \circ K^+(F) \Rightarrow RF \circ Q_{\mathcal{A}}$

$$\begin{array}{ccccc}
 K^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K^+(F)} & K^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{Q_{\mathcal{B}}} & D^+(\mathcal{B}) \\
 & \searrow Q_{\mathcal{A}} & \downarrow \xi & \nearrow G & \\
 & & D^+(\mathcal{A}) & & 
 \end{array}$$

都存在唯一的自然变换  $\delta$  :

$$\begin{array}{ccccc}
 K^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{K^+(F)} & K^+(\mathcal{B}) & \xrightarrow{Q_{\mathcal{B}}} & D^+(\mathcal{B}) \\
 & \searrow Q_{\mathcal{A}} & & \nearrow RF & \\
 & & D^+(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\delta} & D^+(\mathcal{A}) \\
 & & & \nearrow G & 
 \end{array}$$

则称  $RF$  是  $F$  的右导出函子(right derived functor).

### 3.5 例子

给定环  $R$  和  $M \in \mathbf{Mod} - R$ , 函子

$$M \otimes_R - : R - \mathbf{Mod} \rightarrow \mathbf{Ab}$$

是右正合的,

**定义.** 给定环  $R$  和  $M^\bullet \in \mathbf{Com}^\bullet(\mathbf{Mod} - R)$ ,  $N^\bullet \in \mathbf{Com}^\bullet(R - \mathbf{Mod})$ , 定义  $M^\bullet \otimes N^\bullet$  是一个  $\mathbf{Ab}$  上的双复形

$$\begin{aligned}
 M^\bullet \otimes N^\bullet &= (M^i \otimes_R N^j, d_I^{i,j} = d_M^i \otimes_R \text{id}_{N^j} : M^i \otimes_R N^j \rightarrow M^{i+1} \otimes_R N^j \\
 d_{II}^{i,j} &= (-1)^i \text{id}_{M^i} \otimes_R d_N^j : M^i \otimes_R N^j \rightarrow M^i \otimes_R N^{j+1})_{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}},
 \end{aligned}$$

如下图



$$\begin{array}{ccc}
M^i \otimes_R N^{j+1} & \xrightarrow{d_I^{i+1,j}} & M^{i+1} \otimes_R N^{j+1} \\
d_{II}^{i,j} \uparrow & & \uparrow d_{II}^{i,j+1} \\
M^i \otimes_R N^j & \xrightarrow{d_I^{i,j}} & M^{i+1} \otimes_R N^j.
\end{array}$$

注意到

$$\begin{aligned}
& (d_I^{i,j+1} \circ d_{II}^{i,j} + d_{II}^{i+1,j} \circ d_I^{i,j})(m \otimes n) \\
&= (-1)^i (d_M^i \otimes_R \text{id}_{N^{j+1}}) \circ (\text{id}_{M^i} \otimes_R d_N^j)(m \otimes n) + (-1)^{i+1} (\text{id}_{M^i} \otimes_R d_N^{j+1}) \circ (d_M^i \otimes_R \text{id}_{N^j})(m \otimes n) \\
&= (-1)^i ((d_M^i \otimes_R d_N^j)(m \otimes n) - (d_M^i \otimes_R d_N^j)(m \otimes n)) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

因此  $M^\bullet \otimes N^\bullet$  是双复形.



# 附录 A Abel范畴

一定程度上说, 我们构造范畴的目的是抽象出原本一些对象之间的行为, 用更一般的方式去理解之前的对象和之间的行为. 在代数中, 模是一类非常友好的对象, 我们希望找到足够抽象的一类对象, 他们之间的行为类似于模 (或者Abel群), 这样的范畴就是Abel范畴.

同调代数中绝大多数的研究对象是Abel范畴中的对象, 它们具有许多良好的性质, 在这一章中我们将列举绝大部分. 但是, 同调代数的学习并不需要知道每一个这样性质的来源和证明, 甚至在很多情形下一个Abel范畴完全可以看成一个 $R$ 模范畴, 虽然这并不准确, 但足够对同调代数有正确的理解. 这里的建议是大致浏览这一章, 知道Abel范畴的定义和一些基本性质, 然后进入正式的同调代数的学习, 在适当并且需要的时候再去了解和分析Abel范畴中一些性质的证明.

## A.1 Abel范畴中态射的分解

子对象/商对象

定义. 给定范畴 $C$ 中的两个态射 $f, g: X \rightarrow Y$ , 若存在对象 $K$ 和态射 $i: K \rightarrow X$ 满足

1.  $f \circ i = g \circ i$ ;
2. 若对任意满足 $f \circ h = g \circ h$ 态射 $h: Z \rightarrow X$ 都存在唯一的分解

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{i} & X \\ \uparrow \scriptstyle h & \nearrow & \downarrow \scriptstyle f, g \\ Z & & Y \end{array}$$

则称 $K$ 是 $f, g$ 的等值子(equalizer).

等值子是无法分辨给定态射 $f, g: X \rightarrow Y$ 的, 并且它是所有不能分辨两个给定态射的

定义. 若范畴 $\mathcal{A}$ 满足

1.  $\mathcal{A}$ 中零对象存在;
2. 对 $\mathcal{A}$ 中任意两个对象 $X, Y$ , 它们的和与积都存在;

3. 若  $f : X \rightarrow Y$  是  $\mathcal{A}$  中的态射, 则  $\ker f$  与  $\operatorname{coker} f$  存在;
4. 任意单态射都是某个态射的核, 任意满态射都是某个态射的余核;

则称  $\mathcal{A}$  是 Abel 范畴 (Abelian category).

么半范畴 (monoidal category), 或者张量范畴

考虑  $\ker$  和  $\operatorname{coker}$ , 这两个函子可以看作是  $S$  和  $Q$  之间的两个映射, 于是我们有

**定理 A.1.1.**  $\ker$  和  $\operatorname{coker}$  是 Abel 范畴下的互逆映射.

**定理 A.1.2.** 设  $f : X \rightarrow Y$  是 Abel 范畴中的态射, 且  $f$  同时是单态射和满态射, 于是  $f$  是同构.

**引理 A.1.1.** 设  $f : Y \rightarrow X$  和  $g : Z \rightarrow X$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的单态射, 则存在纤维积  $Y \times_X Z$ .

**引理 A.1.2.** 对任意 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的态射  $f : X \rightarrow Y$  和  $g : X \rightarrow Y$ , 它们的等值子存在.

**定理 A.1.3.** 设  $f : Y \rightarrow X$  和  $g : Z \rightarrow X$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的态射, 则存在纤维积  $Y \times_X Z$ .

**定理 A.1.4.** 设  $f : X \rightarrow Y$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的态射, 则

1.  $f$  是满态射当且仅当  $\operatorname{im} f = Y$ , 当且仅当  $\operatorname{coker} f = 0$ ;
2.  $f$  是单态射当且仅当  $\ker f = 0$ , 当且仅当  $\operatorname{coim} f = X$ .

**定理 A.1.5.** 设  $f : X \rightarrow Y$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的态射, 则存在唯一的分解

$$X \xrightarrow{p} I \xrightarrow{i} Y,$$

使得  $p : X \rightarrow I$  是满态射,  $i : I \rightarrow Y$  是单态射.

此外, 如果  $k : K \rightarrow X$  是  $f : X \rightarrow Y$  的核,  $c : Y \rightarrow C$  是  $f : X \rightarrow Y$  的余核, 则  $k : K \rightarrow X$  也是  $p : X \rightarrow I$  的核,  $c : Y \rightarrow C$  也是  $i : I \rightarrow Y$  的余核, 且  $i : I \rightarrow Y$  是  $c : Y \rightarrow C$  的核,  $p : X \rightarrow I$  是  $k : K \rightarrow X$  的余核.

*Proof.* 假设我们有两个不同的对象  $I, \bar{I}$  满足上述分解, 于是我们有如下交换图

$$\begin{array}{ccccc} & & I & & \\ & \nearrow p & \uparrow \varphi & \searrow i & \\ X & & & & Y \xrightarrow{g} Z, \\ & \searrow \bar{p} & \downarrow \bar{i} & \nearrow & \\ & & \bar{I} & & \end{array}$$

其中  $i : I \rightarrow Y$  是  $g : Y \rightarrow Z$  的核. 由核的定义, 我们有  $g \circ i = 0$ , 进而  $g \circ \bar{i} \circ \bar{p} = g \circ f = g \circ i \circ p = 0$ . 但  $\bar{p}$  是满态射说明  $\bar{p}$  存在右逆, 故  $g \circ \bar{i} = 0$ . 再根据核的分解, 存在唯一的  $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$  使得右边三角形交换, 即  $i \circ \varphi = \bar{i}$ . 故  $i \circ \varphi \circ \bar{p} = \bar{i} \circ \bar{p} = f = i \circ p$ . 但  $i$  是单态射因此存在左逆, 于是  $\varphi \circ \bar{p} = p$ . 这样就证明了  $\varphi$  使整个图交换.

同样地, 我们可以构造  $\psi : I \rightarrow \bar{I}$  使整幅图交换, 根据抽象无意义  $\varphi \circ \psi = \text{id}_I$  且  $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\bar{I}}$ , 故  $I \cong \bar{I}$ , 唯一性得证.  $\square$

**定义.** 设  $P$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的对象, 满足对任意的满态射  $f : X \rightarrow Y$  和任意态射  $g : P \rightarrow Y$ , 都可以找到  $h : P \rightarrow X$  使得  $g = f \circ h$ ,

$$\begin{array}{ccccc} & & P & & \\ & \nwarrow h & \downarrow g & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

**习题 A.1.1.** 设  $s : P \rightarrow P$  是 Abel 范畴  $\mathcal{A}$  中的态射,  $(P, s)$  是  $\mathcal{A}/P$  的投射对象, 证明  $P$  是  $\mathcal{A}$  中的投射对象.

*Proof.* 任取  $\mathcal{A}$  中的满态射  $g : X \rightarrow Y$ ,  $\square$

## A.2 Abel 范畴的函子

**定义.** 若  $\mathcal{C}, \mathcal{D}$  加性范畴, 协变函子  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  满足对任意  $\mathcal{C}$  中的对象  $X, Y$ , 由  $F$  诱导的映射  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(X, Y) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}}(F(X), F(Y))$  是群同态, 则称  $F$  是加性函子 (additive functor).

**定理 A.2.1.** 设  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  是 Abel 范畴,  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  是加性函子当且仅当  $F$  保直和.

**命题A.2.2.** *Abel*范畴间的左正合函子是加性的.

**定义.** 若范畴间协变函子  $F : \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{D}$  满足对任意  $\mathcal{C}$  中的对象  $A, B$ , 由  $F$  诱导的映射  $\text{hom}_{\mathcal{C}}(A, B) \rightarrow \text{hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$  是单射, 则称  $F$  是嵌入(embedding).

**定理A.2.3.** 设  $\mathcal{A}, \mathcal{B}$  是 *Abel* 范畴,  $F : \mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$  是加性函子, 则下列陈述等价

1.  $F$  是嵌入.
2.  $F$  将非交换图映为非交换图.
3.  $F$  将非正合序列映为非正合序列.

### A.3 嵌入定理

**习题A.3.1.** 设  $k$  是域,  $k\text{-grMod}$  是所有  $\mathbb{Z}$  分次  $k$  模组成的范畴, 满足

$$\text{Hom}\left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n, \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} W_n\right) := \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \text{Hom}(V_n, W_n),$$

$\mathcal{A}$  是所有微分态射为 0 的  $k$  微分模组成的范畴, 求证

$$F : k\text{-grMod} \rightarrow \mathcal{A}$$

$$\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n \mapsto \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} V_n[n], d = 0\right)$$

是范畴的等价.