Geometric Invariant Theory

Guanyu Li

这份材料是我在读 Mumford 的著作 Geometric Invariant Theory 和在 Daniel Halpern-Leistner 课堂上做的笔记，它不是自洽的，也忽略了很多该去讨论的东西，当然也避免不了错误. 这份笔记只是基于我自己理解对 GIT/Moduli spaces 理论做的一份综述. 有一些名词我也不知道该怎么翻译，就将就着来算了.

1 一般的模问题

模问题 (moduli problem) 是代数几何当中一类最基本的问题.

定理 1.1. *设 k 是域，S 是 k 概型，那么存在如下的 1-1 对应*

$$\{(\mathcal{L}, s_0, \cdots, s_n) \mid \mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S), s_i \in H^0(S, \mathcal{L})\text{生成}\mathcal{L}\}/\sim \leftrightarrow \hom_k(S, \mathbb{P}^n),$$

其中左边的等价关系 $(\mathcal{L}, s_0, \cdots, s_n) \sim (\mathcal{M}, t_0, \cdots, t_n)$ 定义为存在同构 $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ 使得 $t_i = \varphi(s_i)$. 给定 $(\mathcal{L}, s_0, \cdots, s_n)$，那么它对应的态射是 $f : S \to \mathbb{P}^n, P \mapsto [s_0(P), \cdots, s_n(P)]$，反过来给定一个态射 $f : S \to \mathbb{P}^n$，取 $\mathcal{L} := f^*\mathscr{O}(1)$，$s_i := f^*(x_i)$.

事实上很难给出模问题的准确的定义，但一般一个反变函子

$$\mathcal{M} : \mathbf{Sch}_{/S} \to \mathbf{Set}$$

给的想要参数化的对象，这个反变函子就称为一个模问题. 下面的例子是我们主要考虑的:

例 1. *考虑函子*

$$\begin{aligned} &\mathcal{M} : \mathbf{Sch}_{/S} \to \mathbf{Set} \\ &\qquad X \mapsto \left\{ \begin{array}{c} E \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle t} \\ X \end{array} \middle| \, p\text{是平坦态射，在每一点的纤维都是亏格为 1 的曲线，且}p \circ t = \mathrm{id}_S \right\}, \end{aligned}$$

若 $f : X \to Y$ 是概型的态射，

定理 1.2. *设 E_1, E_2 是两个*

2 空间和层

定义. 设 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的范畴，给定 $\mathcal{F}$ 中的态射 $f : A \to B$，若对任意 $\mathcal{F}$ 中的对象 C 和态射 $g : C \to B$，只要有 $\mathcal{C}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd} P(C) \arrow[d, "\tilde{h}"'] \arrow[dr, "P(g)"] & \\ P(A) \arrow[r, "P(f)"] & P(B), \end{tikzcd}$$

都存在唯一 $\mathcal{F}$ 中的态射 $h:C\to A$ 使得 $P(h)=\tilde{h}$，即

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B, \end{tikzcd}$$

则称 f 是笛卡尔态射 (cartesian morphism).

定义. 设 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的范畴，若对任意 $\mathcal{F}$ 中的对象 A 和 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f:X\to P(A)$，都存在 $\mathcal{F}$ 中的笛卡尔态射 $g:C\to A$ 使得 $P(g)=f$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, squiggly] & A \arrow[d, squiggly] \\ X \arrow[r, "f=P(g)"] & P(A), \end{tikzcd}$$

则称 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 (fibred category).

例 2. 设 $\mathcal{C}$ 是给定的范畴，A 是 $\mathcal{C}$ 中的对象，于是我们有 A 上的斜线范畴 $\mathcal{C}/A$ 和自然的函子 $P:\mathcal{C}/A\to\mathcal{C}$. 对任意的 $f_{/A}:B\to D$，由定义 $P(f_{/A})=f:B\to D$. 给定 $\mathcal{C}/A$ 中的对象 $u:B\to A$ 和 $w:D\to A$ 对任意 $\mathcal{C}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ B \arrow[r, "f"] & D, \end{tikzcd}$$

给出了 $\mathcal{C}/A$ 中的对象 $C\xrightarrow{w\circ h=w\circ f\circ g}D$，且由于 $w\circ f=u$，$g:C\to B$ 是 $\mathcal{C}/A$ 中的态射，这意味着 $\mathcal{C}/A$ 中的态射都是笛卡尔的.

例 3. 设 $\mathcal{C}$ 是给定的范畴，且其中任意的纤维积存在，定义范畴 $\mathcal{C}^{\to}$ 如下，它的对象是 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f:X\to A$，态射 $\alpha=(h,k):f:X\to A\Rightarrow g:Y\to B$ 是交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "k"] \\ Y \arrow[r, "g"] & B. \end{tikzcd}$$

考虑函子 $P:\mathcal{C}^{\to}\to\mathcal{C}$，它将 $\mathcal{C}^{\to}$ 中对象 $f:X\to A$ 映到 A，将态射 $\alpha=(h,k)$ 映到 $k:A\to B$. 我们要证明 α 是笛卡尔态射当且仅当 X 是 α 的定义交换图的拉回，简称 α 是一个笛卡尔图.

首先我们考虑若 $\alpha=(h,k)$ 是一个笛卡尔态射，由定义如果我们有 $\mathcal{C}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[dd, "u"'] \arrow[dr, dashed, "u"'] \arrow[drr, "g"] & & \\
& X \arrow[r, "k"] \arrow[dd, "u"] & Y \arrow[dd, "u"] \\
C \arrow[dr, "u"'] \arrow[drr, "g"] & & \\
& A \arrow[r, "k"] & B,
\end{tikzcd}$$

其中 g

定义. $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ 若满足对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A，$\mathcal{F}(A)$ 都是群胚，即 $\mathcal{F}$ 中被映到 id 的态射都是可逆的，则称 $\mathcal{F}$ 是群胚纤维范畴 (category fibred over groupoid).

定理 2.1 (Yoneda)**.**

定义. Grothendieck 拓扑

定义. 设 $\mathcal{D}$ 上的范畴 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{D}$ 是纤维范畴，$G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是函子，则对象是配对 $(X \in \operatorname{ob}\mathcal{C}, A \in \mathcal{F}(f(X)))$，态射 $f : (X, A) \to (Y, B)$ 是满足 $P(f) \in \hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(f(X)), \mathcal{F}(f(Y)))$ 的 $\mathcal{F}$ 中的态射 $f : X \to Y$ 的范畴 $G^{-1}(\mathcal{F})$ 被称为 $\mathcal{F}$ 关于 G 的拉回.

$$\begin{tikzcd}
G^{-1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "G^{-1}(P)"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "P"] \\
\mathcal{C} \arrow[r, "G"] & \mathcal{D}.
\end{tikzcd}$$

在上面的定义中，我们没有把纤维范畴的拉回写为“对称”的，这是因为，虽然我们可以证明 $G^{-1}(\mathcal{F})$ 就是范畴的纤维积 $\mathcal{F} \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}$，但是下面的事情说明定义对于纤维性并不对称：

引理 2.1. *$G^{-1}(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴.*

定义.

例 4. *我们来验证若 X 是 S 上的概型，则自然的忘却函子 $P : \mathbf{Sch}_X \to \mathbf{Sch}_S$ 是叠. 另一方面，任取*

3 BG

4 几种不同的商

接下来我们会一直有如下假定：给定一个概型 S，我们考虑范畴 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群对象 G/S，如果作为概型 G 是光滑的，则称 G 是一个 S 上的代数群 (algebraic group).

例 5. *假设 k 是域，$S := \operatorname{Spec} k$，那么以下是代数群：*

1. $\mathbb{G}_m := \operatorname{Spec}\, k[t, t^{-1}]$.

2. $\mathbb{G}_a := \operatorname{Spec}\, k[x]$.

3. $GL_n := \mathrm{Spec}\ k[x_{i,j}, \det^{-1}]_{1\le i,j\le n}$.

设 G 作用在概型 X 上，T 是另一个概型，$f: T \to X$ 是一个 T 值点，那么我们有映射 $G\times_S T \xrightarrow{\mathrm{id}_G\times f} G\times_S X \xrightarrow{\sigma} X$，进而可以定义

$$\psi_f^G : G\times_S T \to G\times_S T$$

为 $(\sigma\circ(\mathrm{id}_G\times f), p_2)$，简记为 ψ_f. 我们称 ψ_f 的像为 f 的轨道 (orbit)，记为 $o(f)$. 另一方面，$X\times_S T$ 是 T 上的概型，于是我们自然地有截面

$$(f, \mathrm{id}_T) : X\times_S T \to T.$$

我们定义 $S(f)$ 为纤维积

$$\begin{tikzcd} S(f) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "{(f,\mathrm{id}_T)}"] \\ G\times_S T \arrow[r, "\psi_f"] & X\times_S T, \end{tikzcd}$$

这是 G 的子群.

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma: G\times_S X\to X$，若存在 S 上的态射 $\varphi: X\to Y$ 满足

1. 有交换图：

$$\begin{tikzcd} G\times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y, \end{tikzcd}$$

2. Y 在上图意义下具有泛性质，即若有 S 上的概型 Z 和态射 $\phi: X\to Z$ 满足图

$$\begin{tikzcd} G\times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, "\phi"] & Z, \end{tikzcd}$$

交换，则存在唯一的态射 $\chi: Y\to Z$ 使得 $\phi = \chi\circ\varphi$，

那么称 Y 是 G 作用在 X 上的一个范畴商 (categorical quotient).

换言之，G 作用在 X 上的范畴商是作用映射和投影映射的推出.

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma: G\times_S X\to X$，若存在 S 上的态射 $\varphi: X\to Y$ 满足

1. 有交换图：

$$\begin{tikzcd} G\times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y, \end{tikzcd}$$

2. φ 是满态射，且
$$\Psi = (\sigma, p_2) : G \times_S X \to X \times_S X$$
的像是 $X \times_Y X$，

3. φ 是拓扑商，也就是说，$U \subseteq Y$ 是开集当且仅当 $\varphi^{-1}(U) \subseteq X$ 是开集，

4. Y 的结构层 $\mathscr{O}_Y$ 是 $\varphi_*\mathscr{O}_X$ 的包含不变函数的子层，即对于 $f \in \Gamma(U, \varphi_*\mathscr{O}_X) = \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathscr{O}_X)$ 是 $\Gamma(U, \mathscr{O}_Y)$ 的元素当且仅当下图交换
$$\begin{tikzcd} G \times_S \varphi^{-1}(U) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & \varphi^{-1}(U) \arrow[d, "F"] \\ \varphi^{-1}(U) \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^1, \end{tikzcd}$$
其中 F 是 f 对应的态射，

那么称 Y 是 G 作用在 X 上的一个几何商 (geometric quotient).

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \to X$ 和作用的范畴/几何商 $\varphi : X \to Y$，若对任意 $f : Y' \to Y$，下面的纤维积
$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$
都使 f' 是一个范畴/几何商，则称 Y 是万有范畴/几何商 (universal - quotient). 若以上只对平坦 (flat) 的成立，则称 Y 是一致范畴/几何商 (uniform - quotient)

命题 4.1. *设 $\varphi : X \to Y$ 是 G 作用在 X 上的几何商，那么 $\varphi : X \to Y$ 也是范畴商.*

命题 4.2. *设 X, Y 都是 S 上的不可约、正规、Noetherian 概型，$\varphi : X \to Y$ 是有限型的、dominating 态射，Y 中 generic point 的剩余域是特征 0 的，*

5 可约（reductive）代数群

定义. 设 G 是代数群，一个 G 的表示 (representation) 就是一个态射 $\rho : G \to GL_n$，且满足如下交换图
$$\begin{tikzcd} G \times_S G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\rho\times\rho"'] & G \arrow[d, "\rho"] \\ GL_n \times_S GL_n \arrow[r, "m"] & GL_n, \end{tikzcd}$$
其中 μ 是 G 中的乘法，m 是 GL_n 中的乘法.

假设 G 是线性代数群，$S := \Gamma(G, \mathscr{O}_X)$，那么群乘法自然诱导了一个环同态 $\hat{\mu} : S \to S \otimes_k S$，单位态射诱导了 $\hat{i} : S \to k$，因此对任意一个 k 向量空间 V，我们可以定义 G 在 V 上的对偶作用为线性空间的同态
$$\hat{\sigma} : V \to S \otimes_k V,$$
满足

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[d, "\hat{\sigma}"'] & S \otimes_k V \arrow[d, "\hat{\mu}\otimes \mathrm{id}_V"] \\
S \otimes_k V \arrow[r, "\mathrm{id}_S\otimes\hat{\sigma}"] & S \otimes_k S \otimes_k V
\end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_V"'] & S \otimes_k V \arrow[r, "\hat{i}\otimes \mathrm{id}_V"] & V
\end{tikzcd}$$

定义. 设 G 是代数群，$\hat{\sigma}$ 是 G 在 V 上的对偶作用，若 V 的子空间 W 满足 $\hat{\sigma}(W) \subseteq S \otimes_k W$，则称 W 是 V 的不变子空间 (invariant subspace).

引理 5.1. *设 G 是代数群，$\hat{\sigma}$ 是 G 在 V 上的对偶作用，那么 V 是自己有限维不变子空间的并 (逆极限).*

定义. 设 G 是代数群，若它的 radical 是一个环（torus），那么称 G 是 reductive 的.

定理 5.1. *设 X 是 k 上的仿射概形，G 是可约代数群，且 $\sigma : G \times_k X \to X$ 是 G 在 X 上的作用. 那么作用存在一致范畴商 (Y, φ)，且 φ 是 universially submersive，且 Y 是仿射概形. 若 X 还是代数的，那么 Y 也是 k 上代数的.*

6 GIT 商

A 附录：点函子

这种观点来自于 Grothendieck.

定义. 设 X 是 S 上的概型，则 X 的一个 T 点是一个态射 $f : T \to X$ 满足交换图

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\
& S. &
\end{tikzcd}$$

我们考虑如下的例子：$X = \mathrm{Spec}\ \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$，由于 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$ 是个域，故该概形只有一个点，但是如果考虑 $X_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\ \mathbb{C}[x]/(x^2+1) = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]/(x+i) \times \mathbb{C}[x]/(x-i))$. 注意到 X 不是一个 $\mathbb{R}$ 点（因为若有环同态 $\varphi : \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{R}$，那么 $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ 满足 $0 = \varphi(x^2+1) = \varphi(x)^2+1$），这很容易理解——在这个点上的层不是 $\mathbb{R}$. 对于一个概型，即便它是定义在

命题 A.1. *设 $(X, \mathscr{O}_X)$ 是概型，则任取一点 $x \in X$，存在概型 $(T, \mathscr{O}_T)$ 和态射 $f : T \to X$ 满足 $x = f(T)$.*

首先我们证明

引理 A.1. *任意给定概型 X 和局部环 $(R, \mathfrak{m})$，那么我们有集合的一一对应*

$$\{\text{概型间的态射} f : \mathrm{Spec}\ R \to X\} \rightleftarrows \{X\text{中的点}x\text{和局部环的局部同态}\varphi : \mathscr{O}_{X,x} \to R\}.$$

我们考虑复合函子

$$\mathbf{Sch}_S \to \mathrm{Fun}(\mathbf{Sch}_S^\circ, \mathbf{Set}) \to \mathrm{Fun}(\mathbf{Ring}, \mathbf{Set}),$$

其中第一个是 Yoneda 嵌入，第二个函子是 $\mathrm{Fun}(\mathrm{Spec}\,-, \mathbf{Set})$. 第一个函子显然是满忠实的，但第二个函子不是的. 考虑 $\hom_{\mathbf{Sch}_S}(\mathrm{Spec}\,-, \mathbb{P}_S^n)$ 和 $\hom_{\mathbf{Sch}_S}(\mathrm{Spec}\,-, \mathbb{P}_S^m)$ 两个函子，它们都是映到空集的常值函子（从仿射概型到射影），但他们间有非平凡的态射诱导的自然变换. 问题在于它们的复合是满忠实的