Geometric Invariant Theory

Guanyu Li

这份材料是我在读 Mumford 的著作 Geometric Invariant Theory 和在 Daniel Halpern-Leistner 课堂上做的笔记，它不是自洽的，也忽略了很多该去讨论的东西，当然也避免不了错误. 这份笔记只是基于我自己理解对 GIT/Moduli spaces 理论做的一份综述. 有一些名词我也不知道该怎么翻译，就将就着来算了.

1　代数几何预备知识

定理 1.1. 给定概型的态射 $f : X \to Y$，若对任意

引理 1.1. 若环同态 $f : R \to S$ 是忠实平坦的，那么对任意的 R 模 M，序列

$$0 \to M \to M \otimes_R S \xrightarrow{\iota_1 - \iota_2} M \otimes_R S \otimes_R S$$

是正合的，其中 $\iota_1 : M \otimes_R S \to M \otimes_R S \otimes_R S$ 由 $m \otimes s \mapsto m \otimes 1 \otimes s$ 诱导.

命题 1.2. 给定仿射概型 X，且设 $f : U \to V$ 是仿射概型间的忠实平坦态射，那么

$$h_X(U) \to h_X(V) \rightrightarrows h_X(V \times_U V)$$

是等值子.

命题 1.3. 设 $f : Y \to X, g : Z \to X$ 是概型的态射，满足存在 $y \in Y, z \in Z$ 使得 $f(y) = g(z)$，那么存在 $p \in Y \times_X Z$ 满足 $\mathrm{pr}_1(p) = y, \mathrm{pr}_2(p) = z$.

证明. 令 $\kappa(x) := \mathscr{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x$，于是我们有域扩张 $\kappa(x) \hookrightarrow \kappa(y)$ 和 $\kappa(x) \hookrightarrow \kappa(z)$. 进而 $\kappa(y) \otimes_{\kappa(x)} \kappa(z)$ 是非零的，故存在极大理想 $\mathfrak{m}$，令 $K := \kappa(y) \otimes_{\kappa(x)} \kappa(z)/\mathfrak{m}$，则 K 是 $\kappa(x)$ 的包含 $\kappa(y)$ 和 $\kappa(z)$ 的扩张.

设 U 是 X 中包含 x 的仿射概型，那么

$$\mathrm{Spec}\ K \to \mathrm{Spec}\ \kappa(y) \to Y \xrightarrow{f} X$$

和

$$\mathrm{Spec}\ K \to \mathrm{Spec}\ \kappa(z) \to Z \xrightarrow{g} X$$

相同，故我们得到了映射 $\mathrm{Spec}\ K \to Y \times_X Z$. □

2　一般的模问题

模问题 (moduli problem) 是代数几何当中一类最基本的问题.

定理 2.1. 设 k 是域，S 是 k 概型，那么存在如下的 1-1 对应

$$\{(\mathcal{L}, s_0, \cdots, s_n) \mid \mathcal{L} \in \mathrm{Pic}(S), s_i \in H^0(S, \mathcal{L})\text{生成}\mathcal{L}\}/\sim \leftrightarrow \hom_k(S, \mathbb{P}^n),$$

其中左边的等价关系 $(\mathcal{L}, s_0, \cdots, s_n) \sim (\mathcal{M}, t_0, \cdots, t_n)$ 定义为存在同构 $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ 使得 $t_i = \varphi(s_i)$. 给定 $(\mathcal{L}, s_0, \cdots, s_n)$，那么它对应的态射是 $f : S \to \mathbb{P}^n, P \mapsto [s_0(P), \cdots, s_n(P)]$，反过来给定一个态射 $f : S \to \mathbb{P}^n$，取 $\mathcal{L} := f^*\mathscr{O}(1)$，$s_i := f^*(x_i)$.

事实上很难给出模问题的准确的定义，但一般一个反变函子

$$\mathcal{M} : \mathbf{Sch}_{/S} \to \mathbf{Set}$$

给的想要参数化的对象，这个反变函子就称为一个模问题. 下面的例子是我们主要考虑的:

例 1. 考虑函子

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathbf{Sch}_{/S} &\to \mathbf{Set} \\ X &\mapsto \left\{ \begin{array}{c} E \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow\big\uparrow{\scriptstyle t} \\ X \end{array} \middle| \, p\text{是平坦态射，在每一点的纤维都是亏格为 1 的曲线，且}p \circ t = \mathrm{id}_S \right\}, \end{aligned}$$

若 $f : X \to Y$ 是概型的态射，$\mathcal{M}(f)$ 由下图给出

$$\begin{tikzcd} E \times_Y X \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y. \end{tikzcd}$$

例 2. 考虑函子

$$\begin{aligned} \mathcal{M} : \mathbf{Sch}_{/S} &\to \mathbf{Set} \\ X &\mapsto \left\{ \begin{array}{c} C \\ {\scriptstyle p}\big\downarrow \\ X \end{array} \middle| \, \text{对 } X \text{ 的每一点 } x\text{，纤维 } C_x \text{ 是几何连通、正规、光滑且亏格为 } g \text{ 的曲线} \right\}, \end{aligned}$$

定理 2.2. 设 E_1, E_2 是两个 k 上的椭圆曲线，则

定义. 给定函子 $\mathcal{M} : \mathbf{Sch}^\circ \to \mathbf{Set}$ 和 k 概型 M，若

1. 存在自然态射 $\eta : \mathcal{M} \Rightarrow \hom_{\mathbf{Sch}}(-, M)$ 使得对任意的 $\xi : \mathcal{M} \Rightarrow \hom_{\mathbf{Sch}}(-, X)$,都存在唯一的 $f : X \to M$ 满足下图交换:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, Rightarrow, "\eta"] \arrow[dr, Rightarrow, "\xi"'] & \hom_{\mathbf{Sch}}(-, M) \arrow[d, dashed, "\hom_{\mathbf{Sch}}(-,f)"] \\ & \hom_{\mathbf{Sch}}(-, X). \end{tikzcd}$$

2. 对任意包含 k 的代数闭域 K,

$$\eta_K : \mathcal{M}(\mathrm{Spec}\ K) \to \hom_{\mathbf{Sch}}(\mathrm{Spec}\ K, M)$$

都是一个双射,

那么称 M 是 $\mathcal{M}$ 的一个粗模空间.

3 空间和层

定义. Grothendieck 拓扑

例 3 (fidèlement plat de présentation finie)**.**

定理 3.1. *嵌入函子*

$$\mathbf{Sh}(\mathcal{C}) \hookrightarrow \mathbf{Fun}(\mathcal{C}, \mathbf{Set})$$

存在左伴随函子.

定义. 一个等价于位形上的层范畴的范畴成为拓扑斯 (topos).

例 4. **Sch** 上的层范畴等价于 **AffSch** 上的层范畴.

引理 3.1. *若 $\mathscr{F} : \mathbf{Sch}^\circ \to \mathbf{Set}$ 是 Zariski 层，那么它是 fppf 层当且仅当对任意 fppf 映射 $fU \to V$,*

$$F(U) \to F(V) \rightrightarrows F(V \times_U V)$$

是等值子.

定理 3.2. *若 $f : X \to Y$ 是概型的态射，那么 h_X 是 $\mathbf{Sch}_Y$ 上的 fppf 层.*

4 纤维范畴

定义. 设 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的范畴, 给定 $\mathcal{F}$ 中的态射 $f : A \to B$, 若对任意 $\mathcal{F}$ 中的对象 C 和态射 $g : C \to B$, 只要有 $\mathcal{C}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd} P(C) \arrow[d, "\tilde{h}"'] \arrow[dr, "P(g)"] & \\ P(A) \arrow[r, "P(f)"] & P(B), \end{tikzcd}$$

都存在唯一 $\mathcal{F}$ 中的态射 $h : C \to A$ 使得 $P(h) = \tilde{h}$，即

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, dashed, "h"'] \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B, \end{tikzcd}$$

则称 f 是笛卡尔态射 (cartesian morphism).

定义. 设 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的范畴，若对任意 $\mathcal{F}$ 中的对象 A 和 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f : X \to P(A)$，都存在 $\mathcal{F}$ 中的笛卡尔态射 $g : C \to A$ 使得 $P(g) = f$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, dashed, "g"] \arrow[d, squiggly] & A \arrow[d, squiggly] \\ X \arrow[r, "f=P(g)"] & P(A), \end{tikzcd}$$

则称 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 (fibred category).

当给定一个纤维范畴 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C}$ 时，$\mathcal{F}$ 自然地可以看作一个函子 $\mathcal{C}\to\mathrm{CAT}$，它将 $\mathcal{C}$ 中的对象 X 映到 $\mathcal{F}(X):=\{A\in\mathrm{ob}\,\mathcal{F}\mid P(A)=X\}$，且

$$\hom_{\mathcal{F}(X)}(A,B)=\begin{cases}\{f\mid P(f)=\mathrm{id}_{P(A)}\} & P(A)=P(B)\\ \emptyset & P(A)\neq P(B)\end{cases}.$$

例 5. 设 $\mathcal{C}$ 是给定的范畴，A 是 $\mathcal{C}$ 中的对象，于是我们有 A 上的斜线范畴 $\mathcal{C}/A$ 和自然的函子 $P:\mathcal{C}/A\to\mathcal{C}$. 对任意的 $f_{/A}:B\to D$，由定义 $P(f_{/A})=f:B\to D$. 给定 $\mathcal{C}/A$ 中的对象 $u:B\to A$ 和 $w:D\to A$ 对任意 $\mathcal{C}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "h"] & \\ B \arrow[r, "f"] & D, \end{tikzcd}$$

给出了 $\mathcal{C}/A$ 中的对象 $C\xrightarrow{w\circ h=w\circ f\circ g}D$，且由于 $w\circ f=u$，$g:C\to B$ 是 $\mathcal{C}/A$ 中的态射，这意味着 $\mathcal{C}/A$ 中的态射都是笛卡尔的.

例 6. 设 $\mathcal{C}$ 是给定的范畴，且其中任意的纤维积存在，定义范畴 $\mathcal{C}^{\to}$ 如下，它的对象是 $\mathcal{C}$ 中的态射 $f:X\to A$，态射 $\alpha=(h,k):f:X\to A\Rightarrow g:Y\to B$ 是交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & A \arrow[d, "k"] \\ Y \arrow[r, "g"] & B. \end{tikzcd}$$

考虑函子 $P:\mathcal{C}^{\to}\to\mathcal{C}$，它将 $\mathcal{C}^{\to}$ 中对象 $f:X\to A$ 映到 A，将态射 $\alpha=(h,k)$ 映到 $k:A\to B$. 我们要证明 α 是笛卡尔态射当且仅当 X 是 α 的定义交换图的拉回，简称 α 是一个笛卡尔图.

首先我们考虑若 $\alpha=(h,k)$ 是一个笛卡尔态射，由定义如果我们有 $\mathcal{C}$ 中的交换图

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[drr, "g"] \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[dd, "u"'] & & \\ & X \arrow[r, "k"] \arrow[dd, "u"] & Y \arrow[dd, "u"] \\ C \arrow[dr, "u"'] \arrow[drr, "g"] & & \\ & A \arrow[r, "k"] & B, \end{tikzcd}$$

其中 g

定义. 给定 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 $P:\mathcal{F}\to\mathcal{C},Q:\mathcal{G}\to\mathcal{C}$，若函子 $H:\mathcal{F}\to\mathcal{G}$ 将 $\mathcal{F}$ 中的笛卡尔态射映到 $\mathcal{G}$ 中的笛卡尔态射，且满足交换图

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "H"] \arrow[d, "P"'] & \mathcal{G} \arrow[dl, "Q"] \\ \mathcal{C}, & \end{tikzcd}$$

则称 H 是纤维范畴的态射 (morphism of fibred categories). 我们记 $\mathcal{F}$ 到 $\mathcal{G}$ 的所有态射为

$$\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F},\mathcal{G}).$$

若 $H_1, H_2 : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ 是两个纤维范畴的态射，若自然变换 $\eta : H_1 \Rightarrow H_2$ 若满足对任意的 $A \in \mathrm{ob}\,\mathcal{F}$，$\mathcal{G}$ 中的态射 $\eta_A : H_1(A) \to H_2(A)$ 在 $\mathcal{G}(P_{\mathcal{F}}(A))$ 中，即 $P_{\mathcal{G}}(\eta_A) = \mathrm{id}_{P_{\mathcal{F}}(A)}$，则称 η 是保基自然变换 (base-preserving natural transformation).

引理 4.1. 给定 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$，那么 $\mathcal{F}$ 中的任意态射 $f : A \to B$ 都可以分解为

$$A \xrightarrow{h} C \xrightarrow{u} B,$$

其中 $h : A \to C$ 是 $\mathcal{F}(P(A))$ 中的态射，且 $u : C \to B$ 是笛卡尔态射.

命题 4.1.

定理 4.2 (2-Yoneda)**.** 映射

$$\begin{aligned}\eta : \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{C}/A, \mathcal{F}) &\to \mathcal{F}(A)\\ (g : \mathcal{C}/A \to \mathcal{F}) &\mapsto g(\mathrm{id}_A)\end{aligned}$$

是纤维范畴的态射，并且诱导了两个范畴的等价.

推论 4.2.1.

定义. $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$ 若满足对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A，$\mathcal{F}(A)$ 都是群胚，即 $\mathcal{F}$ 中被映到 id 的态射都是可逆的，则称 $\mathcal{F}$ 是群胚纤维范畴 (category fibred over groupoid).

命题 4.3. 设 $\mathcal{C}$ 上有纤维范畴 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}, Q : \mathcal{G} \to \mathcal{C}$，若 $\mathcal{F}$ 是集合纤维范畴，则范畴 $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 是一个集合，若 $\mathcal{F}$ 是群胚纤维范畴，则范畴 $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ 是一个群胚.

定义. 给定 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{C}$，对于 $\mathcal{C}$ 中的对象 X 和 $\mathcal{F}(X)$ 中的对象 A, B，存在如下的预层：

$$\mathrm{Iso}(A,B) : \mathcal{C}^{\circ}/X \to \mathbf{Set},$$

对于 $Y \xrightarrow{f} X$，由给定的 cleavage 选定拉回 f^*A 和 f^*B（它们都是 $\mathcal{F}(Y)$ 中的对象），那么

$$\mathrm{Iso}(A,B)(Y \xrightarrow{f} X) := \mathrm{hom}_{\mathcal{F}(Y)}(f^*A, f^*B).$$

对于 $\mathcal{C}/X$ 中的态射 $h : Y \to Z$，函子得到的限制映射是

$$\mathrm{hom}_{\mathcal{F}(Y)}(f^*A, f^*B) \xrightarrow{h^*} \mathrm{hom}_{\mathcal{F}(Z)}(g^*f^*A, g^*f^*B) \cong \mathrm{hom}_{\mathcal{F}(Z)}((fg)^*A, (fg)^*B).$$

习题 4.1. 验证上述定义中的 h^* 是良定义的.

4.1 拉回和推出

习题 4.2. 若 $\mathcal{G}, \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ 都是群胚，且存在函子 $F_i : \mathcal{H}_i \to \mathcal{G}$，那么 $\mathcal{H}_1 \times_{\mathcal{G}} \mathcal{H}_2$.

定义. 设 $\mathcal{D}$ 上的范畴 $P : \mathcal{F} \to \mathcal{D}$ 是纤维范畴, $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是函子, 则对象是配对 $(X \in \mathrm{ob}\,\mathcal{C}, A \in \mathcal{F}(f(X)))$, 态射 $f : (X, A) \to (Y, B)$ 是满足 $P(f) \in \hom_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(f(X)), \mathcal{F}(f(Y)))$ 的 $\mathcal{F}$ 中的态射 $f : X \to Y$ 的范畴 $G^{-1}(\mathcal{F})$ 被称为 $\mathcal{F}$ 关于 G 的拉回.

$$\begin{tikzcd} G^{-1}(\mathcal{F}) \arrow[r] \arrow[d, "G^{-1}(P)"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "P"] \\ \mathcal{C} \arrow[r, "G"] & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

在上面的定义中, 我们没有把纤维范畴的拉回写为 "对称" 的, 这是因为, 虽然我们可以证明 $G^{-1}(\mathcal{F})$ 就是范畴的纤维积 $\mathcal{F} \times_{\mathcal{D}} \mathcal{C}$, 但是下面的事情说明定义对于纤维性并不对称:

引理 4.2. *$G^{-1}(\mathcal{F})$ 是 $\mathcal{C}$ 上的纤维范畴.*

定义.

例 7.

5 叠

定义. 设 F, G 是函子 $\mathcal{C}^\circ \to \mathbf{Set}$, 自然态射 $\eta : F \Rightarrow G$ 若满足对任意 $\mathcal{C}$ 中的对象 A 和自然态射 $\epsilon : h_A \Rightarrow G$, 纤维积函子

$$h_A \times_G F : \mathcal{C}^\circ \to \mathbf{Set}$$

是可表的, 则称 F 是相对于 G 可表的 (representable relative to G).

定义. 给定函子 $F, G : \mathbf{Aff}^\circ_{/S} \to \mathbf{Set}$, 自然态射 $\eta : F \Rightarrow G$ 若满足

1. η 是相对可表的,

2. 对任意 $\mathbf{Aff}^\circ_{/S}$ 中的对象 A 和自然态射 $\epsilon : h_A \Rightarrow G$, $h_A \times_G F \Rightarrow h_A$ 是一个开 (相对的闭) 嵌入,

则称 η 是仿射开 (相对的, 闭) 嵌入 (affine open (resp. closed) embedding).

例 8. *我们来验证若 X 是 S 上的概型, 则自然的忘却函子 $P : \mathbf{Sch}_X \to \mathbf{Sch}_S$ 是叠. 另一方面, 任取*

6 几种不同的商

接下来我们会一直有如下假定: 给定一个概型 S, 我们考虑范畴 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群对象 G/S, 如果作为概型 G 是光滑的, 则称 G 是一个 S 上的代数群 (algebraic group).

例 9. *假设 k 是域, $S := \mathrm{Spec}\ k$, 那么以下是代数群:*

1. $\mathbb{G}_m := \mathrm{Spec}\ k[t, t^{-1}]$.

2. $\mathbb{G}_a := \mathrm{Spec}\ k[x]$.

3. $GL_n := \mathrm{Spec}\ k[x_{i,j}, \det^{-1}]_{1 \le i,j \le n}$.

设 G 作用在概型 X 上，T 是另一个概型，$f: T \to X$ 是一个 T 值点，那么我们有映射 $G \times_S T \xrightarrow{\mathrm{id}_G \times f} G \times_S X \xrightarrow{\sigma} X$，进而可以定义

$$\psi_f^G : G \times_S T \to G \times_S T$$

为 $(\sigma \circ (\mathrm{id}_G \times f), p_2)$，简记为 ψ_f. 我们称 ψ_f 的像为 f 的轨道 (orbit)，记为 $o(f)$. 另一方面，$X \times_S T$ 是 T 上的概型，于是我们自然地有截面

$$(f, \mathrm{id}_T) : X \times_S T \to T.$$

我们定义 $S(f)$ 为纤维积

$$\begin{tikzcd} S(f) \arrow[r] \arrow[d] & T \arrow[d, "{(f,\mathrm{id}_T)}"] \\ G \times_S T \arrow[r, "\psi_f"] & X \times_S T, \end{tikzcd}$$

这是 G 的子群.

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \to X$，若存在 S 上的态射 $\varphi : X \to Y$ 满足

1. 有交换图:

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y, \end{tikzcd}$$

2. Y 在上图意义下具有泛性质，即若有 S 上的概型 Z 和态射 $\phi : X \to Z$ 满足图

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\phi"] \\ X \arrow[r, "\phi"] & Z, \end{tikzcd}$$

   交换，则存在唯一的态射 $\chi : Y \to Z$ 使得 $\phi = \chi \circ \varphi$,

那么称 Y 是 G 作用在 X 上的一个范畴商 (categorical quotient).

换言之，G 作用在 X 上的范畴商是作用映射和投影映射的推出.

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \to X$，若存在 S 上的态射 $\varphi : X \to Y$ 满足

1. 有交换图:

$$\begin{tikzcd} G \times_S X \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y, \end{tikzcd}$$

2. φ 是满态射，且

$$\Psi = (\sigma, p_2) : G \times_S X \to X \times_S X$$

   的像是 $X \times_Y X$,

3. φ 是拓扑商，也就是说，$U \subseteq Y$ 是开集当且仅当 $\varphi^{-1}(U) \subseteq X$ 是开集，

4. Y 的结构层 $\mathscr{O}_Y$ 是 $\varphi_*\mathscr{O}_X$ 的包含不变函数的子层，即对于 $f \in \Gamma(U, \varphi_*\mathscr{O}_X) = \Gamma(\varphi^{-1}(U), \mathscr{O}_X)$ 是 $\Gamma(U, \mathscr{O}_Y)$ 的元素当且仅当下图交换

$$\begin{tikzcd} G \times_S \varphi^{-1}(U) \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "p_2"'] & \varphi^{-1}(U) \arrow[d, "F"] \\ \varphi^{-1}(U) \arrow[r, "F"] & \mathbb{A}^1, \end{tikzcd}$$

   其中 F 是 f 对应的态射，

那么称 Y 是 G 作用在 X 上的一个几何商 (geometric quotient).

定义. 给定 $\mathbf{Sch}_S$ 中的群作用 $\sigma : G \times_S X \to X$ 和作用的范畴/几何商 $\varphi : X \to Y$，若对任意 $f : Y' \to Y$，下面的纤维积

$$\begin{tikzcd} X \times_Y Y' \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & Y' \arrow[d, "f"] \\ X \arrow[r, "\varphi"] & Y \end{tikzcd}$$

都使 f' 是一个范畴/几何商，则称 Y 是万有范畴/几何商 (universal - quotient). 若以上只对平坦 (flat) 的成立，则称 Y 是一致范畴/几何商 (uniform - quotient)

命题 6.1. *设 $\varphi : X \to Y$ 是 G 作用在 X 上的几何商，那么 $\varphi : X \to Y$ 也是范畴商.*

命题 6.2. *设 X, Y 都是 S 上的不可约、正规、Noetherian 概型，$\varphi : X \to Y$ 是有限型的、dominating 态射，Y 中 generic point 的剩余域是特征 0 的，*

7 可约（reductive）代数群

定义. 设 G 是代数群，一个 G 的表示 (representation) 就是一个态射 $\rho : G \to GL_n$，且满足如下交换图

$$\begin{tikzcd} G \times_S G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\rho\times\rho"'] & G \arrow[d, "\rho"] \\ GL_n \times_S GL_n \arrow[r, "m"] & GL_n, \end{tikzcd}$$

其中 μ 是 G 中的乘法，m 是 GL_n 中的乘法.

假设 G 是线性代数群，$S := \Gamma(G, \mathscr{O}_X)$，那么群乘法自然诱导了一个环同态 $\hat{\mu} : S \to S \otimes_k S$，单位态射诱导了 $\hat{i} : S \to k$，因此对任意一个 k 向量空间 V，我们可以定义 G 在 V 上的对偶作用为线性空间的同态

$$\hat{\sigma} : V \to S \otimes_k V,$$

满足

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[d, "\hat{\sigma}"'] & S \otimes_k V \arrow[d, "\hat{\mu}\otimes \mathrm{id}_V"] \\ S \otimes_k V \arrow[r, "\mathrm{id}_S \otimes \hat{\sigma}"] & S \otimes_k S \otimes_k V \end{tikzcd}$$

和

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\hat{\sigma}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_V"'] & S \otimes_k V \arrow[r, "\hat{i}\otimes \mathrm{id}_V"] & V \end{tikzcd}$$

定义. 设 G 是代数群，$\hat{\sigma}$ 是 G 在 V 上的对偶作用，若 V 的子空间 W 满足 $\hat{\sigma}(W) \subseteq S \otimes_k W$，则称 W 是 V 的不变子空间 (invariant subspace).

引理 7.1. *设 G 是代数群，$\hat{\sigma}$ 是 G 在 V 上的对偶作用，那么 V 是自己有限维不变子空间的并 (逆极限).*

定义. 设 G 是代数群，若它的 radical 是一个环（torus），那么称 G 是 reductive 的.

定理 7.1. *设 X 是 k 上的仿射概形，G 是可约代数群，且 $\sigma : G \times_k X \to X$ 是 G 在 X 上的作用. 那么作用存在一致范畴商 (Y, φ)，且 φ 是 universially submersive，且 Y 是仿射概形. 若 X 还是代数的，那么 Y 也是 k 上代数的.*

8 BG

定义. 设 $\mathcal{C}$ 位形，且 $\mathscr{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 上的群层

定义. 设 G 是代数群，$P, X \in \mathbf{Sch}_{/S}$ 且 $\pi : P \to X$ 是光滑的满态射，若存在态射 $\sigma : G \times_S P \to P$ 满足

1. 下图交换：

$$\begin{tikzcd} G \times G \times P \arrow[r, "(\mu, \mathrm{id}_P)"] \arrow[d, "(\mathrm{id}_G, \sigma)"'] & G \times P \arrow[d, "\sigma"] \\ G \times P \arrow[r, "\sigma"] & P, \end{tikzcd}$$

2. 存在恒等截面 $e : X \to P$ 满足

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "(e, \mathrm{id}_P)"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_P"'] & G \times_S P \arrow[r] & P \end{tikzcd}$$

   交换，

3. 态射 $\sigma \times \mathrm{pr}_2 : G \times P \to P \times P$ 是同构，

则称 P 是 G 主丛 (principal G-bundle).

9 GIT 商

A 附录：点函子

这种观点来自于 Grothendieck.

定义. 设 X 是 S 上的概型，则 X 的一个 T 点是一个态射 $f : T \to X$ 满足交换图

$$\begin{tikzcd} T \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & X \arrow[dl] \\ & S. & \end{tikzcd}$$

我们考虑如下的例子：$X = \operatorname{Spec} \mathbb{R}[x]/(x^2+1)$，由于 $\mathbb{R}[x]/(x^2+1) \cong \mathbb{C}$ 是个域，故该概形只有一个点，但是如果考虑 $X_{\mathbb{C}} = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x]/(x^2+1) = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x]/(x+i) \times \mathbb{C}[x]/(x-i))$. 注意到 X 不是一个 $\mathbb{R}$ 点（因为若有环同态 $\varphi : \mathbb{R}[x]/(x^2+1) \to \mathbb{R}$，那么 $\varphi(x) \in \mathbb{R}$ 满足 $0 = \varphi(x^2+1) = \varphi(x)^2+1$），这很容易理解——在这个点上的层不是 $\mathbb{R}$. 对于一个概型，即便它是定义在

例 10. 考虑函子

$$\begin{aligned} F : \mathbf{CommRing} &\to \mathbf{Set} \\ R &\mapsto R^{\times}, \end{aligned}$$

可以证明 $F \cong \hom_{\mathbf{CommRing}}(\mathbb{Z}[x, x^{-1}], -)$.

例 11. 这个例子是定理 *2.1*的类比，意在说明，按照点函子的观点，一个概型 $X \to S$ 就是一个函子

$$(\mathbf{Sch}/S)^{\circ} \to \mathbf{Set},$$

反过来一个可表的函子也给出了同构唯一的概型，但我们可以考虑定义域更小的函子

$$R - \mathbf{Algebra} \to \mathbf{Set},$$

也给出同样的概型. 给定函子

$$\begin{aligned} F : R - \mathbf{Algebra} &\to \mathbf{Set} \\ A &\mapsto \{(P, s_1, \cdots, s_r) \mid \text{满足 } P \text{ 是投射 } A \text{ 模，} s_i \in P \text{且} s_1, \cdots, s_r \text{生成} P\} / \sim, \end{aligned}$$

其中 $(P, s_1, \cdots, s_r) \sim (Q, t_1, \cdots, t_r)$ 当且仅当存在 A 模的同构 $f : P \to Q$ 使得 $f(s_i) = t_i$，那么可以证明这个函子

命题 A.1. 设 $(X, \mathscr{O}_X)$ 是概型，则任取一点 $x \in X$，存在概型 $(T, \mathscr{O}_T)$ 和态射 $f : T \to X$ 满足 $x = f(T)$.

首先我们证明

引理 A.1. 任意给定概型 X 和局部环 $(R, \mathfrak{m})$，那么我们有集合的一一对应

$$\{\text{概型间的态射} f : \operatorname{Spec} R \to X\} \rightleftarrows \{X \text{中的点} x \text{和局部环的局部同态} \varphi : \mathscr{O}_{X,x} \to R\}.$$

我们考虑复合函子

$$\mathbf{Sch}_S \to \operatorname{Fun}(\mathbf{Sch}_S^{\circ}, \mathbf{Set}) \to \operatorname{Fun}(\mathbf{Ring}, \mathbf{Set}),$$

其中第一个是 Yoneda 嵌入，第二个函子是 $\operatorname{Fun}(\operatorname{Spec} -, \mathbf{Set})$. 第一个函子显然是满忠实的，但第二个函子不是的. 考虑 $\hom_{\mathbf{Sch}_S}(\operatorname{Spec} -, \mathbb{P}_S^n)$ 和 $\hom_{\mathbf{Sch}_S}(\operatorname{Spec} -, \mathbb{P}_S^m)$ 两个函子，它们都是映到空集的常值函子（从仿射概型到射影），但他们间有非平凡的态射诱导的自然变换. 问题在于它们的复合是满忠实的