同伦代数

G.Li

目录

第零章　前言 **5**

第一章　单纯对象 **7**

1.1　单纯集和单纯复形 7

1.2　泛单纯集 12

1.2.1　Yoneda引理 12

1.2.2　伴随函子 14

1.3　几何实现 18

1.4　小范畴的神经 20

1.5　子单纯集 23

1.5.1　单纯集的商 25

1.6　提升性质 26

1.7　拓扑构造 28

1.7.1　单纯同伦 28

1.7.2　单纯同伦群 29

1.8　单纯范畴 29

第二章　模型范畴 **31**

2.1　模型范畴的定义与性质I 31

2.2　拓扑空间 32

2.2.1　第一个模型结构 32

2.2.2　第二个模型结构 39

2.3　模型范畴的定义与性质II 41

2.3.1　封闭性 41

2.3.2　同伦与同伦等价 44

2.3.3　Quillen对 51

2.4　链复形 53

2.5　单纯集 53

2.6　同伦范畴和导出函子 54

2.6.1　同伦范畴 54

2.6.2　导出函子 58

第三章 单纯代数 61

3.1 单纯模 61

3.1.1 单纯模范畴 61

3.1.2 单纯模的同伦群 62

3.1.3 单纯模中的代数对象 65

3.2 Dold-Kan对应 66

3.2.1 模型结构 66

3.3 单纯消解 66

第四章 同伦极限和同伦余极限 71

4.1 图的范畴 71

4.1.1 小对象论断 71

4.1.2 余纤维生成的范畴 74

4.2 万有模型范畴 76

4.3 同伦余极限 78

4.4 测试范畴 78

第五章 单纯群 81

5.1 单纯集和单纯复形 81

5.2 泛 81

5.3 回路群 82

5.4 约化单纯集 82

第六章 同伦范畴和局部化 85

6.1 范畴的局部化 85

6.1.1 86

6.2 同伦范畴的导出函子 88

6.3 模型范畴的Bousfield局部化 91

6.4 模型逼近 92

第七章 无穷范畴 95

7.1 拟范畴 95

7.1.1 拟范畴的范畴行为 95

第零章　前言

给定一个范畴$\mathcal{C}$，并且假定$\mathcal{C}$中有一族特殊的被称为弱等价(weak equivalence)的态射WE，这族态射包含了一定程度上逆特别不好的“同构”，甚至没有逆的却和同构行为非常相似的态射.这样的一个范畴被称为同伦化范畴(homotopical category)，其中一个弱等价通常表示为$X \xrightarrow{\sim} Y$.通常情况下，范畴$\mathcal{C}$中的弱等价被定义为“可以被某个函子取逆”的态射，比如

1. 所有拓扑空间范畴**Top**中诱导所有同伦群同构的连续映射，即弱同伦等价，此时函子为$\pi_* : \mathbf{Top} \to \mathbf{GradedSet}$（第0个同伦群不是群，只是一个集合）.

2. Abel范畴$\mathcal{A}$上所有上链复形范畴$\mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A})$中的拟同构，此时函子为$H^* : \mathbf{Com}^\bullet(\mathcal{A}) \to \mathbf{GradedAb}$.

拓扑上，通常把弱同伦等价的空间的全体称为一个同伦型(homotopy type)，在范畴**Top**中可以看作由某个代数不变量$\pi_*(X)$给出的某种等价关系.通常人们处理同伦型的范畴是拓扑空间的同伦范畴(homotopy category of topological spaces)，它定义为

但在这个范畴中，弱同伦等价是形式上可逆的——这启发了处理这一类问题的第一步，范畴的局部化.

第一章　单纯对象

1.1　单纯集和单纯复形

设n是任意一个自然数.定义$[n]$是有n+1个对象的小范畴，且其中的箭头是序列$\{0 \to 1 \to \cdots \to n\}$.设$\mathbf{\Delta}$是所有$[n]$组成的范畴，态射是$[n]$到$[m]$的函子.这个范畴有非常具体的描述：定义$[n]'$是$n+1$元的全序集，其元素记为$\{0 \le 1 \le \cdots \le n\}$.设$\mathbf{\Delta}'$是所有$[n]'$组成的范畴，态射是$[n]'$到$[m]'$的保序映射，即$f : [n]' \to [m]'$满足$i \le j$必有$f(i) \le f(j)$.$\mathbf{\Delta}'$是一个范畴，且存在一个范畴的同构$\mathbf{\Delta}' \to \mathbf{\Delta}$.于是我们无意区分两个范畴，都称为*单形范畴*(simplex category)或者*全序范畴*(ordering category)，也无意区分两个范畴不同的对象.注意到

$$d^i_{n+1} : [n] \to [n+1]$$

$$k \mapsto \begin{cases} k, & k < i \\ k+1, & k \ge i. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & n \arrow[dr] & \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & i+1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n+1
\end{tikzcd}$$

和

$$s^i_n : [n+1] \to [n]$$

$$k \mapsto \begin{cases} k, & k \le i \\ k-1, & k > i. \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] \arrow[d] & i \arrow[r] \arrow[d] & i+1 \arrow[r] \arrow[dl] & \cdots \arrow[r] & n+1 \arrow[dl] \\
0 \arrow[r] & 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & i-1 \arrow[r] & i \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n &
\end{tikzcd}$$

都是范畴$\mathbf{\Delta}$中的态射，且满足

$$\begin{aligned}
d^j_{[n+1]} d^i_{[n]} &= d^i_{[n+1]} d^{j-1}_{[n]}, & \forall\, i < j \\
s^j_{[n]} s^i_{[n+1]} &= s^i_{[n]} s^{j+1}_{[n+1]}, & \forall\, i \le j \\
s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} &= d^i_{[n]} s^{j-1}_{[n-1]}, & \forall\, i < j \\
s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} &= \mathrm{id}_{[n]}, & i = j \text{ 或 } i = j+1 \\
s^j_{[n]} d^i_{[n+1]} &= d^{i-1}_{[n]} s^j_{[n-1]}, & \forall\, i > j+1.
\end{aligned}$$

其中，d^i称为第i个对偶面映射(coface map)，s^i称为第i个对偶退化映射(codegeneracy map).$\mathbf{\Delta}$中所有的态射都可以由d^i和s^j生成.更准确地说，任意$f \in \hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m])$有唯一的分解

$$f = d^{i_1} \circ \cdots \circ d^{i_r} \circ s^{j_1} \circ \cdots \circ s^{j_s}, \tag{1.1}$$

其中$m = n + r - s$，$m \geq i_1 > \cdots > i_r \geq 0$且$0 \leq j_1 < \cdots < j_s < n$.

定义. 一个单纯集(simplicial set)是一个反变函子$X : \mathbf{\Delta}^\circ \to \mathbf{Set}$.更一般地，范畴$\mathcal{C}$中的一个单纯对象(simplicial object)是反变函子$X : \mathbf{\Delta}^\circ \to \mathcal{C}$.对偶地，可以定义上单纯对象(cosimplicial object)是协变函子$Y : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{C}$.

对单纯集X，一般我们用X_n来表示集合$X([n])$，且其中的元素称为n单形(n-simplicies).若n单形$x \in X_n$满足存在$y \in X_{n-1}$使得$X(s^j)(y) = x$，则称x是退化的(degenerate).我们用$s\mathbf{Set}$表示所有单纯集组成的范畴，其中对象间的态射是$X \Rightarrow Y$的自然态射，具体来说，是对每个n都有一个集合间的态射$f_n : X_n \to Y_n$，在$\mathbf{\Delta}$的作用下保持不动.

对于一个单纯集X，一般我们采用记号$d_i := X(d^i) : X_{n+1} \to X_n$和$s_j := X(s^j) : X_n \to X_{n+1}$，称为面映射和退化映射.

$$X_0 \;\substack{\xleftarrow{\;d^1\;} \\ \xrightarrow{\;s^0\;} \\ \xleftarrow{\;d^1\;}}\; X_1 \;\substack{\xrightarrow{\;s^1\;} \\ \xrightarrow{\;s^1\;}}\; X_2 \longrightarrow \cdots$$

具体地写出来，单纯关系是

$$\begin{aligned}
d_i^{[n]} d_j^{[n+1]} &= d_{j-1}^{[n]} d_i^{[n+1]}, && \forall\, i < j \\
s_i^{[n+1]} s_j^{[n]} &= s_{j+1}^{[n+1]} s_i^{[n]}, && \forall\, i \leq j \\
d_i^{[n+1]} s_j^{[n]} &= s_{j-1}^{[n-1]} d_i^{[n]}, && \forall\, i < j \\
d_i^{[n+1]} s_j^{[n]} &= \mathrm{id}_{[n]}, && i = j \text{ 或 } i = j+1 \\
d_i^{[n+1]} s_j^{[n]} &= s_j^{[n-1]} d_{i-1}^{[n]}, && \forall\, i > j+1.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

设X是单纯集，记

$$X_n^{\deg} := \bigcup_{j=0}^{n-1} s_j(X_{n-1}) \tag{1.3}$$

为n单形中的所有退化元素.

练习 1.1. 求证

$$X_n^{\deg} = \bigcup_{\substack{f:[n]\twoheadrightarrow[k] \\ f\neq \mathrm{id}}} X(f)(X_k),$$

其中$[n] \twoheadrightarrow [k]$表示从$[n]$到$[k]$的满射.

证明. 注意到$s_j \neq \mathrm{id}$且$s_j(X_{n-1})$实际定义为$X(s^j)(X_{n-1})$，s^j都是满射，因此由定义$X_n^{\deg} \subseteq \bigcup_{\substack{f:[n]\to[k] \\ f\neq \mathrm{id}}} X(f)(X_k)$.

反过来，任意给定满射$f : [n] \twoheadrightarrow [k]$，根据分解$f = d^{i_1} \circ \cdots \circ d^{i_r} \circ s^{j_1} \circ \cdots \circ s^{j_s}$的唯一性，若$r \neq 0$则与$f$是满射矛盾，即$f = s^{j_1} \circ \cdots \circ s^{j_s}$.于是，

$$X(f)(X_k) = X(s^{j_1} \circ \cdots \circ s^{j_s})(X_k) = s_{j_s}(X(s^{j_1} \circ \cdots \circ s^{j_{s-1}})(X_k)) \subseteq s_j(X_{n-1}).$$

□

例 1.1. 设$\mathcal{C}$是一个小范畴，那么我们可以自然地定义一个单纯集$N\mathcal{C}$，称为范畴$\mathcal{C}$的神经(nerve)，其中$N\mathcal{C}_0$是集合$\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，$N\mathcal{C}_1$是集合$\mathrm{mor}\,\mathcal{C}$，对任意$n>1$定义

$$N\mathcal{C}_n := \{(f_n,\cdots,f_1) \mid f_i \in \mathrm{mor}\,\mathcal{C}\text{且}f_i\text{与}f_{i+1}\text{可复合为}f_{i+1}f_i\text{，}\forall 1 \le i \le n\}.$$

通常，我们用相连的箭头

$$A_0 \xrightarrow{f_1} A_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} A_n$$

来表示$N\mathcal{C}_n$中的元素.这样当$1<i<n$我们有自然的面映射

$$d_i : N\mathcal{C}_n \to N\mathcal{C}_{n-1}$$
$$(f_n,\cdots,f_i,f_{i-1},\cdots,f_1) \mapsto (f_n,\cdots,f_if_{i-1},\cdots,f_1),$$

当$i=0,n$时，我们分别舍弃A_0和A_n.退化映射$s_i : N\mathcal{C}_n \to N\mathcal{C}_{n+1}$是简单的，只要在第$i$项和第$i+1$项之间加一个$A_i$，取为$A_i \xrightarrow{\mathrm{id}} A_i \xrightarrow{f_{i+1}} A_{i+1}$.之后我们会对范畴的神经进行更详细的讨论.

例 1.2. 拓扑上，我们有一个上单纯集$\Delta : \mathbf{\Delta} \to \mathbf{Top}$，事实上这个函子是我们定义单纯范畴的最初启发.考虑函子Δ将$[n]$映到标准n单形

$$\Delta_n = \{(x_0,\cdots,x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0+\cdots+x_n = 1, x_i \ge 0\},$$

对偶面映射$d^i : \Delta_{n-1} \to \Delta_n$定义为将$\Delta_{n-1}$映为第$i$个坐标为0的面，即$(x_0,\cdots,x_{i-1},x_i,\cdots,x_{n-1}) \mapsto (x_0,\cdots,x_{i-1},0,x_i,\cdots$
对偶退化映射$s^i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n$将坐标$x_i$与$x_{i+1}$相加，即$(x_0,\cdots,x_i,,x_{i+1}\cdots,x_{n+1}) \mapsto (x_0,\cdots,x_i+x_{i+1},\cdots,x_{n+1})$.

设X是拓扑空间，这样就可以定义的单纯集SX，其中$(SX)_n$是所有连续映射$\Delta^n \to X$，面映射

$$d_i : (SX)_{n+1} \to (SX)_n$$

将$f : \Delta_{n+1} \to X$映到$f \circ d^i : \Delta_n \to X$，退化映射

$$s_j : (SX)_{n-1} \to (SX)_n$$

将$f : \Delta_{n-1} \to X$映到$f \circ s^j : \Delta_n \to X$.$SX$被称为空间$X$的奇异复形(total singular complex)，通常它给出了拓扑空间的奇异同调.

给定$[n]$的一个非空子集σ，定义Δ_σ为Δ^n中$\{e_i\}_{i\in\sigma}$的凸包(convex hull)，即

$$\Delta_\sigma := \left\{ \sum_{i\in\sigma} a_i \mathbf{e}_i \,\middle|\, \sum_{i\in\sigma} a_i = 1, a_i \ge 0, \forall i \in \sigma \right\} \subseteq \Delta^n,$$

我们称Δ_σ为Δ的σ面(σ-face).$\mathbb{R}^n$中同胚于Δ_n中有限多个σ面的并的子空间称为多面体(polyhedron).对于一个多面体P，我们可以把它表达为不同的σ面的并，每一个这样的同胚被称为P的一个三角剖分(triangulation).

在拓扑中，对于一个空间我们会考虑它对应的单纯剖分，这样的一个单纯剖分通常被称为单纯复形.非拓扑的情形下同样可以定义单纯复形，这样定义的单纯复形对应于一个拓扑空间的单纯剖分：

定义. 设V是一个集合，则V上的单纯复形(simplicial complex)X是V的一个非空有限子集族，满足X在取子集作用下闭，即

$$\forall \sigma \in X,\ \emptyset \neq \tau \subseteq \sigma \Rightarrow \tau \in X.$$

引理 1.1. 对于集合V上的单纯复形X，如下构造的$|X|$是一个拓扑空间，且具有被X描述的单纯剖分：

取定$\mathbb{R}$线性空间$\mathbb{V} := \mathrm{span}_{\mathbb{R}} V$，对任意$\sigma \in X$，令$\Delta_\sigma$是由$\sigma \subseteq V$生成的凸包.那么

$$|X| := \bigcup_{\sigma \in X} \Delta_\sigma \subseteq \mathbb{V}$$

与$K := \{i_\sigma : \Delta_\sigma \to |X|\}$构成一个拓扑单纯剖分，其中$i_\sigma : \Delta_\sigma \to |X|$是自然的嵌入.

反过来，任意给定拓扑空间X的单纯剖分K

单纯复形并不具有非常好的性质，比如单纯复形的商并不一定是单纯复形.但是每一个单纯复形都对应一个单纯集，且我们能利用这个单纯集重新构造之前的单纯复形.这意味着，单纯集可以看作单纯复形的自然推广.

定义. 给定全序集合V上的单纯复形X，我们可以定义它对应的单纯集$SS_*(X)$，其中

$$SS_n(X) := \{(v_0, \cdots, v_n) \mid \{v_0, \cdots, v_n\} \in X\},$$

对任意$\mathbf{\Delta}$中的态射$f : [m] \to [n]$，定义

$$\begin{aligned} SS(f) : SS_n(X) &\to SS_m(X) \\ (v_0, \cdots, v_n) &\mapsto (v_{f(0)}, \cdots, v_{f(n)}). \end{aligned}$$

若单纯集X是某个单纯复形K对应的单纯集，则称它是多面体的(polyhedral).

练习 1.2. 这里我们要验证单纯复形可以完全地由它对应的单纯集给出，因而单纯集是更广泛的概念.考虑习题1.1中的定义，验证

$$SS_*(X)^{\mathrm{nondeg}} \cong X.$$

练习 1.3. 在引理1.1中我们证明了抽象单纯复形和拓扑单纯复形的一一对应.在拓扑中有一个比单纯复形广泛一点的概念拟单纯复形(semi-simplicial complex)，定义为

在本小节最后我们引入循环范畴(cyclic category)$\mathbf{\Delta}_C$，其中$\mathbf{\Delta}_C$的对象同于$\mathbf{\Delta}$，而$\mathbf{\Delta}_C$的态射由$d^i_{[n]} : [n] \to [n+1], s^j_{[n+1]} : [n+1] \to [n]$和$\tau_n : [n] \to [n]$生成，满足三类关系：

1.

$d^i_{[n]}, s^j_{[n+1]}$之间的关系同于$\mathbf{\Delta}$； $\tau_{n+1}\circ d^i_{[n]} = d^{i-1}_{[n]}\circ\tau_n$和$\tau_{n+1}\circ d^0_{[n]} = d^n_{[n]}$，$\tau_n\circ s^j_{[n+1]} = s^{i-1}_{[n]}\circ\tau_{n+1}$和$\tau_n\circ s^0_{[n+1]} = s^n_{[n]}\circ\tau^2_{n+1}$； $\tau_n^{n+1} = \mathrm{id}_{[n]}$.下面的定理叙述了两个范畴之间的关系.

定理 1.1. $\mathbf{\Delta}_C$是$\mathbf{\Delta}$的（非满）子范畴，且满足

1. $\mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C}([n]) \cong \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$.
2. 任意$\mathbf{\Delta}_C$中的态射$f\in\hom_{\mathbf{\Delta}_C}([n],[m])$都可以写成如下分解$f=\varphi\circ\gamma$，其中$\varphi\in\hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m])$且$\gamma\in \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C}([n])$.

证明. □

例 1.3 (循环圆，cyclic circle(要检查方向). 定义函子$\mathbf{\Delta}^\circ_C \to \mathbf{Set}$，将对象$[n]$映到$\mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}^\circ_C}([n]) = \mathbb{Z}/(n+1)\mathbb{Z}$，任取$a\in\hom_{\mathbf{\Delta}_C}([n],[m])$和$g\in\mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C}([n])$，由刚刚的唯一分解，$f = g\circ a$存在唯一的分解$f=\varphi\circ\gamma$满足$\varphi\in\hom_{\mathbf{\Delta}}([n],[m])$且$\gamma\in\mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}_C}([n])$，记$g^*(a)=\varphi, a^*(g)=\gamma$.于是对于任意给定的$g\in\mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}^\circ_C}([n])$，我们有

$$\begin{aligned} g^* : \hom_{\mathbf{\Delta}^\circ_C}([n],[m]) &\to \hom_{\mathbf{\Delta}^\circ_C}([n],[m]) \\ a &\mapsto g^*(a) \end{aligned}$$

和任意给定的$a\in\hom_{\mathbf{\Delta}^\circ_C}([n],[m])$，

$$\begin{aligned} a^* : \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}^\circ_C}([n]) &\to \mathrm{Aut}_{\mathbf{\Delta}^\circ_C}([n]) \\ g &\mapsto a^*(g). \end{aligned}$$

练习 1.4. 求证任意单纯集X_*, Y_*的积存在.

证明. 定义单纯集$(X\times Y)_*$满足

$$(X\times Y)_n := X_n\times Y_n,$$

且有面映射

$$d_i^{(X\times Y)[n]} = d_i^{X[n]}\times d_i^{Y[n]}$$

和退化映射

$$s_j^{(X\times Y)[n]} = s_j^{X[n]}\times s_j^{Y[n]},$$

这样只要验证$(X\times Y)_*$是单纯集且满足相应的泛性质即可.

首先验证如此定义的面映射和退化映射满足单纯恒等式. 然后验证如此定义的$(X\times Y)_*$满足相应的 □

练习 1.5. 定义范畴$\mathbf{\Delta}_+$是求证函子$\mathrm{res}:\mathbf{Funct}(\mathbf{\Delta}^\circ_+,\mathbf{Set})\to\mathbf{Funct}(\mathbf{\Delta}^\circ,\mathbf{Set})$存在左伴随$\pi_0$和右伴随triv 称$\mathbf{Funct}(\mathbf{\Delta}^\circ_+,\mathbf{Set})$中的对象是增广单纯集(augmented simplicial set).

练习 1.6. 求证对任意拓扑空间X，存在自然的积分映射

练习 1.7. 给定小范畴$\mathcal{C}$，求证存在范畴的同构

$$\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, s\mathbf{Set}) \cong \mathrm{Funct}(\mathbf{\Delta}^\circ, \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})),$$

记这两个同构的范畴为$s\mathrm{Pre}(\mathcal{C})$，称其中的对象为单纯预层(simplicial presheaf).

证明. 构造函子 □

1.2 泛单纯集

在涉及具体的构造前，我们先讨论一部分形式化的定义以及结果.

1.2.1 Yoneda引理

范畴理论中最重要的工具之一就是Yoneda引理.我们记$\hat{\mathcal{C}}$为范畴$\mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})$，$h_B := \hom_{\mathcal{C}}(-, B)$，那么Yoneda引理表述如下：

定理 1.2 (Yoneda)**.** *对任意局部小范畴$\mathcal{C}$和函子$F : \mathcal{C}^\circ \to \mathbf{Set}$，存在关于$F$和$\mathcal{C}$都自然的同构*

$$\varphi : \hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h_B, F) \cong F(B).$$

作为推论，当$F = h_D$时，自然同构为

$$\hom_{\mathcal{C}}(B, D) = \hom_{\hat{\mathcal{C}}}(h_B, h_D),$$

其中映射将态射$f : B_1 \to B_2$映到$h(f) = \hom_{\mathcal{C}}(f, D)$.考虑函子

$$\begin{aligned} h : \mathcal{C} &\to \hat{\mathcal{C}} \\ B &\mapsto \hom_{\mathcal{C}}(-, B) \\ (f : B_1 \to B_2) &\mapsto h(f), \end{aligned}$$

Yoneda引理说明这是一个满忠实的函子，我们称其为Yoneda函子.

注意到任意一个单纯集是一个到集合范畴的函子，故我们可以对其应用Yoneda引理.由定义显然有$\hat{\mathbf{\Delta}} = s\mathbf{Set}$.考虑$h_{[n]} := \hom_{\mathbf{\Delta}}(-, [n])$，这些函子都是单纯集，具体说来，我们需要确定面映射和退化映射：面映射$d_i : h_{[n]}([k]) \to h_{[n]}([k-1])$是$\mathbf{Set}$中$d^i$的前置复合，即

$$d_i : h_{[n]}([k]) \to h_{[n]}([k-1]) = \{[k] \xrightarrow{f} [n]\} \mapsto \{[k-1] \xrightarrow{d^i} [k] \xrightarrow{f} [n]\},$$

类似地退化映射s_i是$\mathbf{Set}$中s^i的前置复合.同时，Yoneda函子的满忠实性说明

$$\hom_{\mathbf{\Delta}}([k], [n]) \cong \hom_{s\mathbf{Set}}(h_{[k]}, h_{[n]}),$$

即$h_{[k]}$到$h_{[n]}$的所有自然变换由$\mathbf{\Delta}$中的态射$[k] \to [n]$所决定，因此所有的$h_{[n]}$在一起组成一个上单纯集.

定义. 单纯集
$$h_{[n]} := \hom_{\mathbf{\Delta}}(-,[n])$$
被称为标准n单形(standard n-simplex)，我们也记为$\mathbf{\Delta}^{[n]}$（上标的原因如前所述，所有的$h_{[n]}$在一起组成一个上单纯集）.

例 1.4. 我们具体地写出来单纯集$h_{[n]}$.按定义$h_{[n]}([k]) := \hom_{\mathbf{\Delta}}([k],[n])$，是所有$[k]$到$[n]$的保序映射的全体，任意一个映射$a:[k]\to[n]$给出了有序组$(a_0 = a(0),\cdots,a_k = a(k))$，满足$0\le a_0\le a_1\le\cdots\le a_k\le n$，因此
$$h_{[n]}([k]) = \{(a_0,\cdots,a_k) \mid 0\le a_0\le a_1\le\cdots\le a_k\le n\}.$$
给定态射$f:[k]\to[l]$，它给出了
$$\begin{aligned} h_{[n]}(f): h_{[n]}([l]) &\to h_{[n]}([k]) \\ (a_0,\cdots,a_l) &\mapsto (a_{f(0)},\cdots,a_{f(k)}), \end{aligned}$$
特别地这给出了$h_{[n]}$中的面映射
$$\begin{aligned} d_i^{[k]}: h_{[n]}([k]) &\to h_{[n]}([k-1]) \\ (a_0,\cdots,a_k) &\mapsto (a_0,\cdots,\hat{a}_i,\cdots,a_k) \end{aligned}$$
和退化映射
$$\begin{aligned} s_j^{[k]}: h_{[n]}([k]) &\to h_{[n]}([k+1]) \\ (a_0,\cdots,a_k) &\mapsto (a_0,\cdots,a_j,a_j,a_{j+1},\cdots,a_k). \end{aligned}$$
特别地，考虑$\mathbf{\Delta}^{[0]}$，按之前的讨论
$$\mathbf{\Delta}^{[0]}([k]) = \{(a_0,\cdots,a_k) \mid 0\le a_0\le a_1\le\cdots\le a_k\le 0\} = \{(0,\cdots,0)\},$$
即对任意k，$\mathbf{\Delta}^{[0]}([k])$只有一个元素，因此除了$\mathbf{\Delta}^{[0]}([0])$中的元素其余都是退化的.

例 1.5. 再来考虑标准单形之间的面映射和退化映射.

例 1.6. 给定单纯集X和单纯态射$\mathbf{\Delta}^{[0]}\to X$，这称为一个有基点的单纯集(pointed simplicial set)，根据例1.4的讨论，这实际上是给出了每个X_n中的一个元素x_n，使得$d_i(x_n) = x_{n-1}, s_j(x_n) = x_{n+1}$.带有基点的单纯集态射是交换图
$$\begin{tikzcd} & \mathbf{\Delta}^{[0]} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X \arrow[rr, "f"] & & Y, \end{tikzcd}$$
即是将基点映为基点的单纯集态射，所有带有基点的单纯集组成的范畴记为$s\mathbf{Set}_*$.

引理 1.2. 设X是单纯集，函子

$$\begin{aligned} s\mathbf{Set} &\to \mathbf{Set} \\ X &\mapsto X([n]) \end{aligned}$$

是可表的，其代表是标准n单形$\mathbf{\Delta}^{[n]}$.

如果我们考虑更一般情形的Yoneda引理，我们有自然同构

$$\hom_{s\mathbf{Set}}(\mathbf{\Delta}^{[n]}, X) \cong X([n]).$$

于是任意给定一个n单形$x \in X([n])$，我们有一个自然变换

$$\mathbf{\Delta}^{[n]} \Rightarrow X$$

与之对应，而它在面映射下的象$d_i(x) \in X([n-1])$则对应于自然态射

$$\mathbf{\Delta}^{[n-1]} \xrightarrow{d^i} \mathbf{\Delta}^{[n]} \Rightarrow X.$$

命题 1.3 (稠密性定理)**.** 令$\int X$是单纯集X的元素范畴，则以$\int X$为图的余极限满足

$$\mathrm{colim}_{x \in X_n} \mathbf{\Delta}^{[n]} \cong X.$$

1.2.2 伴随函子

作为泛单纯集的应用，本小节我们将会给出一种通用的构造特定左右伴随的方式，它将会给出后面用到的很多例子伴随性的证明，并将它们用同一个框架描述.

设$\mathcal{D}$是任意上完备（即任意图为小范畴的余极限都存在）的局部小范畴，L是协变函子$\mathcal{D} \to s\mathbf{Set}$，我们希望构造一对左右伴随函子$L : s\mathbf{Set} \leftrightarrows \mathcal{D} : R$并考虑它们的性质.由定义，我们有关于$X \in \mathrm{ob}\ \mathbf{sSet}$和$B \in \mathrm{ob}\ \mathcal{D}$都自然的同构

$$\hom_{\mathcal{D}}(L(X), B) \cong \hom_{s\mathbf{Set}}(X, R(B)).$$

任意给定协变函子$F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{D}$，由函子$F$我们可以如下构造右伴随函子$R$，任意给定$\mathcal{D}$中的对象$B$，$R(B)$是单纯集，所有的$n$单形构成集合

$$R(B)_n := \hom_{\mathcal{D}}(F([n]), B),$$

且面映射和边缘映射分别定义为

$$d_i^{[n]} := \hom_{\mathcal{D}}(F(d^i_{[n]}), B)$$

和

$$s_j^{[n]} := \hom_{\mathcal{D}}(F(s^j_{[n]}), B),$$

根据F和hom的函子性，d_i与s_j满足相应的关系，因此$R(B)$是单纯集，即

$$R(B) = \hom_{\mathcal{D}}(F(-), B).$$

于是给定$\mathcal{D}$中的态射$f : B \to D$，那么单纯集之间的态射$R(f) : R(B) \to R(D)$定义为$\hom_{\mathcal{D}}(F(-), f)$.

这样构造的函子R存在一个左伴随$L : \mathbf{sSet} \to \mathcal{D}$，定义为$F : \mathbf{\Delta} \to \mathcal{D}$沿Yoneda嵌入$\mathbf{\Delta} \hookrightarrow \mathbf{sSet}$的左Kan扩张：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "y"'] & \Downarrow & \mathcal{D} \\
& \mathbf{sSet} \arrow[ur, dashed, "L"'] &
\end{tikzcd}.$$

我们尝试具体地把函子L写出来：

首先介绍一个概念余终止(coend)，它是一个特殊的余极限（更一般地可以对一个二函子取余极限，这里是一个特殊的情形）.任意给定集合S和$\mathcal{D}$中的对象B，定义它们的余指数(copower)（或称为张量积(tensor)）为

$$S \otimes B := \coprod_{s \in S} B,$$

于是特别地，对单纯集X和自然数m, n，可以构造

$$X_m \otimes F([n]).$$

给定$\mathbf{\Delta}$中的态射$f : [n] \to [m]$，自然地由F诱导了态射

$$f_* : X_m \otimes F([n]) \to X_m \otimes F([m]),$$

同时由X诱导了态射

$$f^* : X_m \otimes F([n]) \to X_n \otimes F([n]).$$

这给出了下图

$$\begin{tikzcd}
X_m \otimes F([n]) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "f^*"'] & X_m \otimes F([m]) \arrow[d, dashed] \\
X_n \otimes F([n]) \arrow[r, dashed] & \cdot
\end{tikzcd},$$

当f取遍$\mathrm{mor}\ \mathbf{\Delta}$时，以上给出了

$$\coprod_{f:[n]\to[m]} X_m \otimes F([n]) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightrightarrows}} \coprod_{[n]} X_n \otimes F([n]),$$

此时，该图的余等值子coeq被称为余终止(coend)，记为

$$\int^{[n]} X \otimes F.$$

于是，定义函子$L : s\mathbf{Set} \to \mathcal{D}$为

$$L(X) := \int^{[n]} X \otimes F,$$

且对于单纯集之间的态射$f : X \to Y$，态射

$$Lf : X \to Y$$

由余极限的函子性给出.

定理 1.4. 如上构造的函子对$L : s\mathbf{Set} \rightleftarrows \mathcal{D} : R$是伴随函子对.

证明. 考虑
$$L(\mathbf{\Delta}^{[k]}) = \int^{[n]} \mathbf{\Delta}^{[k]} \otimes F,$$
按定义它是余等值子
$$\coprod_{f:[n]\to[m]} \mathbf{\Delta}^{[k]}([m]) \otimes F([n]) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightrightarrows}} \coprod_{[n]} \mathbf{\Delta}^{[k]}([n]) \otimes F([n]).$$
同时存在下图
$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Delta}^{[k]}([m]) \otimes F([n]) \arrow[r, "f_*"] \arrow[d, "f^*"'] & \mathbf{\Delta}^{[k]}([m]) \otimes F([m]) \arrow[d] \\
\mathbf{\Delta}^{[k]}([n]) \otimes F([n]) \arrow[r] & F([k]),
\end{tikzcd}$$
其中映射$\mathbf{\Delta}^{[k]}([n]) \otimes F([n]) \to F([k])$是$\coprod_{g\in\mathbf{\Delta}^{[k]}([n])}$

任取$X \in \mathrm{ob}\, \mathbf{sSet}$和$B \in \mathrm{ob}\, \mathcal{D}$，根据第一小节的讨论
$$\hom_{s\mathbf{Set}}(\mathbf{\Delta}^{[n]}, R(B)) \cong R(B)_n := \hom_{\mathcal{D}}(F([n]), B),$$
这样直接根据刚刚的证明
$$\hom_{\mathcal{D}}(L(\mathbf{\Delta}^{[n]}), B) \cong \hom_{s\mathbf{Set}}(\mathbf{\Delta}^{[n]}, R(B))$$
成立且是自然的，再根据稠密性定理1.3，任意的单纯集X都是余极限
$$\mathrm{colim}_{x\in X_n} \mathbf{\Delta}^{[n]} \cong X,$$
函子L的构造（也是一个余极限）说明它与余极限交换，因此
$$\begin{aligned}
\hom_{\mathcal{D}}(L(X), B) &\cong \hom_{\mathcal{D}}(L(\mathrm{colim}_{x\in X_n} \mathbf{\Delta}^{[n]}), B) \\
&\cong \mathrm{colim}_{x\in X_n} \hom_{\mathcal{D}}(L(\mathbf{\Delta}^{[n]}), B) \\
&\cong \mathrm{colim}_{x\in X_n} \hom_{\mathbf{sSet}}(\mathbf{\Delta}^{[n]}, R(B)) \cong \hom_{\mathbf{sSet}}(X, R(B)).
\end{aligned}$$
这里的每一步同构都是自然的，于是伴随性得证. □

练习 1.8. 用Yoneda引理证明
$$L(\mathbf{\Delta}^{[k]}) = \int^{[n]} \mathbf{\Delta}^{[k]} \otimes F = F([n]).$$

事实上，我们完全可以将伴随函子的自然同构写出来.给定一个单纯集的态射
$$\eta \in \hom_{s\mathbf{Set}}(X, R(B))$$
给出了集合间的映射$\eta_n : X_n \to R(B)_n = \hom_{\mathcal{D}}(F([n]), B)$，而利用它可以得到态射
$$\tilde{\eta}_n : X_n \otimes F([n]) \to B,$$
定义为$\coprod_{x\in X_n} \eta_n(x)$.一方面，根据$\eta$的自然性有交换图

$$\begin{array}{ccc} X_m & \xrightarrow{\eta_m} & \hom_{\mathcal{D}}(F([m]), B) \\ {\scriptstyle X(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (F(f))^*} \\ X_n & \xrightarrow{\eta_n} & \hom_{\mathcal{D}}(F([n]), B), \end{array}$$

对应于给定$f:[n]\to[m]$的交换图

$$\begin{array}{ccc} X_m \otimes F([n]) & \xrightarrow{f_*} & X_m \otimes F([m]) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\eta}_m} \\ X_n \otimes F([n]) & \xrightarrow{\tilde{\eta}_n} & B, \end{array}$$

根据余终止的定义，这给出了态射$\eta^\flat \in \hom_{\mathcal{D}}(L(X), B)$.

另一方面，给定态射$h\in\hom_{\mathcal{D}}(L(X),B)$，记余终止$L(X)$诱导的态射$X_n\otimes F([n])\to L(X)$为$\xi_n$，那么给定$f:[n]\to[m]$，余终止的定义直接诱导了交换图

$$\begin{array}{ccc} X_m \otimes F([n]) & \xrightarrow{f_*} & X_m \otimes F([m]) \\ {\scriptstyle f^*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h\circ\xi_m} \\ X_n \otimes F([n]) & \xrightarrow{h\circ\xi_n} & B, \end{array}$$

进而上一段的对应将$\{h\circ\xi_n\}_{[n]\in\mathbf{\Delta}}$对应到一族态射$\{h_n^\sharp : X_n\to R(B)_n = \hom_{\mathcal{D}}(F([n]),B)\}_{[n]\in\mathbf{\Delta}}$，且上面的交换图意味着

$$\begin{array}{ccc} X_m & \xrightarrow{h_m^\sharp} & \hom_{\mathcal{D}}(F([m]), B) \\ {\scriptstyle X(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle (F(f))^*} \\ X_n & \xrightarrow{h_n^\sharp} & \hom_{\mathcal{D}}(F([n]), B) \end{array}$$

是交换的，因此$h^\sharp$是自然变换.

注意到两个对应实质是两个交换图的对应，因而二者互逆，这给出了伴随性的证明.

例 1.7. 定义函子

$$F:\mathbf{\Delta}\to\mathbf{Top}$$
$$[n]\mapsto\Delta^n,$$

其中Δ^n是标准n单形，于是它给出的右伴随函子恰是奇异单纯集$S_*:\mathbf{Top}\to s\mathbf{Set}$（例1.2）.同时由于张量积$X_n\otimes F([m])$此时是将$X_n$看作具有离散拓扑的拓扑空间的乘积$X_n\times F([m])$，因此依据前面的讨论，如下定义函子

$$|X| := \int^{[n]} X\otimes F = \operatorname{coeq}\left(\coprod_{f:[n]\to[m]} X_m\otimes F([n]) \underset{f_*}{\overset{f^*}{\rightrightarrows}} \coprod_{[n]} X_n\otimes F([n])\right)$$

是S_*的左伴随函子，被称为几何实现(geometric realization)，下一节我们将详细讨论这个构造.

事实上，在这个公式中，它的形式是某类自由对象的商对象，这与代数中的张量积是非常类似的.从Kan扩张的角度讲，二者是同一个对象，因此这也是选取记号$\otimes$的原因.

例 1.8. 借助以上讨论，我们来证明$s\mathbf{Set}$是笛卡尔闭的，即对任意单纯集Y，存在函子$-\times Y: s\mathbf{Set}\to s\mathbf{Set}$的右伴随.事实上，这对于所有小范畴上的预层（即到$\mathbf{Set}$的函子）组成的范畴都成立.

对于给定的单纯集Y，考虑函子

$$\begin{aligned} F : \mathbf{\Delta} &\to s\mathbf{Set} \\ [n] &\mapsto \Delta^{[n]} \times Y \\ f &\mapsto f \times \mathrm{id}_Y. \end{aligned}$$

之前我们讨论过，L是F沿的Yoneda嵌入的左Kan扩张，而这里，F是Yoneda嵌入和$- \times Y$的复合，因此直接根据定义，$L = - \times Y$.于是**sSet**是笛卡尔闭的.

练习 1.9. 考虑所有群胚的范畴到小范畴的嵌入$F : \mathbf{Gpd} \to \mathbf{Cat}$，证明它给出了一对伴随函子

$$\Pi_1 : s\mathbf{Set} \leftrightarrows \mathbf{Cat} : N,$$

其中Π_1是取单纯集的基本群胚.

练习 1.10. 将本节中的证明推广，证明任意给定小范畴$\mathcal{C}$和余完备的范畴$\mathcal{D}$，存在一一对应

$$\mathrm{Funct}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) \leftrightarrows \mathrm{Adj}(\hat{\mathcal{C}}, \mathcal{D}),$$

其中$\hat{\mathcal{C}} = \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})$.

练习 1.11. 求证自然的嵌入$U : s\mathbf{Set}_* \hookrightarrow s\mathbf{Set}$存在左伴随函子$-_+ : s\mathbf{Set} \to s\mathbf{Set}_*$，并且该函子满足对任意单纯集$X$，

$$|X|_+ \cong |X_+|.$$

证明. 定义 □

1.3 几何实现

之前稠密性定理（命题1.3）说明每个单纯集都是一个余极限，注意这个余极限是在范畴**sSet**中取得的.如果我们在其他的范畴中取这个余极限会得到其他我们想要的对象，有时候这些对象会更加容易理解和计算：

定义. 给定单纯集X，称

$$|X| := \mathrm{colim}_{x \in X_n} |\mathbf{\Delta}^{[n]}|$$

为X的几何实现(geometric realization)，其中$|\mathbf{\Delta}^{[n]}|$是标准n单形Δ^n.

定理 1.5. 下列函子对

$$|-| : s\mathbf{Set} \rightleftarrows \mathbf{Top} : S$$

是伴随函子，即存在自然的同构

$$\hom_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) \cong \hom_{s\mathbf{Set}}(X, SY).$$

证明. 根据定义和余极限的性质

$$\hom_{\mathbf{Top}}(|X|, Y) :=$$

□

注意到例1.7中的构造也是函子S_*的左伴随函子，因此根据伴随函子的唯一性，有

推论 1.5.1. *本节中的定义与例1.7中几何实现的定义是自然同胚的.*

练习 1.12. 在例1.4中我们讨论了$\mathbf{\Delta}^{[n]}$的具体形式，现在我们具体计算它的几何实现.

然而，直接根据如上推论和例1.7中的定义，$|\mathbf{\Delta}^{[n]}|$

考虑面映射

定理 1.6. *对任意单纯集X，$|X|$是CW复形.*

证明. □

例 1.9. 在拓扑中，一个单纯复形的三角剖分是一个重要的工具，我们考虑定义单纯剖分函子

范畴**Top**一个重要的性质是集合$\hom_{\mathbf{Top}}$上有自然的结构使得集合是一个拓扑空间，且

$$\hom_{\mathbf{Top}}(X \times Y, Z) \cong \hom_{\mathbf{Top}}(X, \underline{\hom}_{\mathbf{Top}}(Y, Z))$$

是一个自然同构.伴随函子对$(|-|, S)$的存在提示这样的行为很可能也出现在范畴**sSet**中：

定义. 给定单纯集X_*, Y_*，它们的态射复形（映射空间）(function complex, mapping space)定义为

$$\underline{\hom}_{s\mathbf{Set}}(X, Y)_n := \hom_{s\mathbf{Set}}(\mathbf{\Delta}^{[n]} \times X_*, Y),$$

且面映射和退化映射分别为

$$\begin{aligned} d_i^{[n]} : \underline{\hom}_{s\mathbf{Set}}(X, Y)_n &\to \underline{\hom}_{s\mathbf{Set}}(X, Y)_{n-1} \\ f &\mapsto (d^i_{[n-1]} \times \mathrm{id}_X) \circ f \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} s_i^{[n]} : \underline{\hom}_{s\mathbf{Set}}(X, Y)_n &\to \underline{\hom}_{s\mathbf{Set}}(X, Y)_{n+1} \\ f &\mapsto (s^i_{[n+1]} \times \mathrm{id}_X) \circ f. \end{aligned}$$

它定义的想法来源于此：在范畴**Top**中，0态射一般考虑为映射本身，1态射是映射之间的映射，即同伦，因此更高阶态射考虑为高阶的同伦.拓扑中映射$f, g : X \rightrightarrows Y$之间的同伦恰好是$F : X \times \Delta^1 \to Y$，那么不难推广到更高阶的同伦.

定义. 若单纯集X_*满足$X_0=\{*\}$，则称它是约化的(reduced).所有约化单纯集组成的满子范畴记为$\mathbf{sSet}_0$.

在例1.2中我们构造了拓扑空间X对应的奇异单纯集$S_*(X)$，若X还是一个带有基点的拓扑空间，它的Eilenberg子复形是

$$\overline{S}_n(X):=\{f:\Delta^n\to X\mid f(v_i)=*\text{对}\Delta^n\text{所有的顶点}v_i\text{都成立}\}.$$

若记$\mathbf{Top}_{0,*}$是所有连通且有基点的拓扑空间的全体组成的满子范畴，则

命题 1.7. *函子对*

$$|-|:s\mathbf{Set}_0\leftrightarrows\mathbf{Top}_{0,*}:\overline{S}$$

是伴随函子.

证明. □

1.4 小范畴的神经

这一节我们详细讨论小范畴的神经.在非特别指出的情形下，本小节$\mathcal{C}$都代表一个小范畴.回顾例1.1中的定义，单纯集$N\mathcal{C}$的全体n单形$N\mathcal{C}_n$包含有可连续复合的n个态射，记为$(f_n,\cdots,f_1)$.面映射$d_i^{[n]}$将

$$A_0\xrightarrow{f_1}\cdots\xrightarrow{f_{i-2}}A_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}}A_i\xrightarrow{f_i}A_{i+1}\xrightarrow{f_{i+1}}\cdots\xrightarrow{f_n}A_n$$

映到

$$A_0\xrightarrow{f_1}\cdots\xrightarrow{f_{i-2}}A_{i-1}\xrightarrow{f_i\circ f_{i-1}}A_{i+1}\xrightarrow{f_{i+1}}\cdots\xrightarrow{f_n}A_n,$$

且在$i=0,n$时映射舍弃A_i和相连的映射.类似地退化映射$s_j^{[n]}$将

$$A_0\xrightarrow{f_1}\cdots\xrightarrow{f_{i-2}}A_{i-1}\xrightarrow{f_{i-1}}A_i\xrightarrow{f_i}A_{i+1}\xrightarrow{f_{i+1}}\cdots\xrightarrow{f_n}A_n$$

映到

$$A_0\xrightarrow{f_1}\cdots\xrightarrow{f_{j-2}}A_{j-1}\xrightarrow{f_{j-1}}A_j\xrightarrow{f_j}A_j\xrightarrow{f_j}A_{j+1}\xrightarrow{f_{j+1}}\cdots\xrightarrow{f_n}A_n.$$

更一般地，对任意

命题 1.8. *1. 自然存在的映射$N(\mathcal{C}\times\mathcal{D})\to N\mathcal{C}\times N\mathcal{D}$是同构.*

2. N是函子$\mathbf{Cat}\to s\mathbf{Set}$.

例 1.10. 考虑范畴$[n]$，我们来求出它的神经.

按定义，$N_k([n])$包含了$[n]$中k个可复合的态射，并且$[n]$中可复合的态射是$\leq$，因此

$$N_k([n]) = \{(a_0, \cdots, a_k) \mid 0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \leq n\} = \boldsymbol{\Delta}^{[n]}([k]).$$

另一方面，

$$d_i(0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_i \leq \cdots \leq a_k \leq n) = 0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq \hat{a}_i \leq \cdots \leq a_k \leq n$$

且

$$s_i(0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_i \leq \cdots \leq a_k \leq n) = 0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_i \leq a_i \leq \cdots \leq a_k \leq n,$$

这恰与例1.4中的计算结果相同，于是我们证明了$N([n]) = \boldsymbol{\Delta}^{[n]}$.

事实上，还可以用1.2.2节中的内容构造神经函子.令嵌入函子$F : \boldsymbol{\Delta} \to \mathbf{Cat}$为

$$[n] \mapsto [n],$$

其中$[n]$分别代表范畴$\boldsymbol{\Delta}$中的对象和（小）范畴$[n]$.那么1.2.2节中构造的右伴随函子给出

$$N\mathcal{C}_n := \hom_{\mathbf{Cat}}([n], \mathcal{C}),$$

这恰好是刚刚我们的定义.

同时，定理1.4说明神经函子$s\mathbf{Set} \leftarrow \mathbf{Cat} : N$应当有左伴随函子，一般记为$\tau_1 : s\mathbf{Set} \to \mathbf{Cat}$，

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{\Delta} \arrow[rr, hook] \arrow[dr, hook, "y"'] & & \mathbf{Cat} \arrow[dl, "N"] \\
& s\mathbf{Set}, \arrow[ur, dashed, "\tau_1"] &
\end{tikzcd}$$

它是一个左Kan扩张，如下我们具体地写出来：给定单纯集X，那么范畴$\tau_1(X)$的对象是

$$\mathrm{ob}\,\tau_1(X) := X_0,$$

$\tau_1(X)$的所有态射是X_1中元素生成的全体（因为“复合”后可能不在X_1中，因此要用类似于自由群生成的方式进行生成），$s_0 : X_0 \to X_1$给出了单位态射，$d_0, d_1 : X_1 \to X_0$分别给出了定义域和余定义域，并商去下列等价关系：若存在$x \in X_2$使得$d_2(x) = f, d_0(x) = g, d_1(x) = h$，那么$h = gf$，用交换图来表示为

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & 2 \\
& 1 \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}.$$

由于构造中的生成，这自然是一个范畴.

命题 1.9. *如上构造的τ_1是N的左伴随函子.进一步地，$\tau_1 \circ N = \mathrm{id}$.*

证明. 定理1.4已经说明了二者为伴随，只需要直接验证后面的论断. □

例 1.11. 设G是群，那么$\mathbf{B}G$是一个只有一个对象的小范畴.由于$\mathrm{mor}\ \mathbf{B}G = G$，故$N\mathbf{B}G_n = G^n$.注意到$\mathbf{B}G$中态射的复合是群乘法，于是

$$
\begin{aligned}
d_i : G^n &\to G^{n-1} \\
(g_1, \cdots, g_n) &\mapsto \begin{cases} (g_2, \cdots, g_n) & i = 0 \\ (g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_n) & 0 < i < n \\ (g_1, \cdots, g_{n-1}) & i = n \end{cases}
\end{aligned}
$$

（注意到这里函子$\mathbf{B}$对复合的方式产生了影响，因此角标产生了变化）和

$$
\begin{aligned}
s_j : G^n &\to G^{n+1} \\
(g_1, \cdots, g_n) &\mapsto (g_1, \cdots, g_{j-1}, 1, g_j, \cdots, g_n).
\end{aligned}
$$

注意到这里的映射恰是群上同调所需要的映射.

另一方面，我们还有构造$\mathbf{E}G$，其中$\mathrm{ob}\ \mathbf{E}G = G$，$\hom_{\mathbf{E}G}(g, h) = \{x \in G \mid xg = h\} = \{hg^{-1}\}$且态射的复合是群乘法.

二者之间有如下的关系：

1. 存在自然的单纯集投影

$$
\begin{aligned}
p : N\mathbf{E}G &\to N\mathbf{B}G \\
(g_0, \cdots, g_n) &\mapsto (g_0 g_n^{-1}, \cdots, g_{n-1} g_n^{-1}).
\end{aligned}
$$

2. G在$N\mathbf{E}G$上有右作用

$$(g_0, \cdots, g_n) \cdot g = (g_0 g, \cdots, g_n g),$$

于是有交换图

$$
\begin{tikzcd}
N\mathbf{E}G \arrow[rr, "p_*"] \arrow[dr] & & N\mathbf{B}G \\
& N\mathbf{E}G/G. \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

这是最简单的单纯G主丛的例子：

$$
\begin{aligned}
N\mathbf{E}G \times N\mathbf{B}G &\to N\mathbf{B}G \\
((g_0, \cdots, g_n), (h_1, \cdots, h_n)) &\mapsto (g_0 h_1 g_1^{-1}, \cdots, g_{n-1} h_n g_n^{-1}).
\end{aligned}
$$

以上构造的单纯集分别记为BG和EG.

上面的例子给出了

例 1.12. 如例1.11中的描述，对于群G可以构造对应的单纯集BG，特别地当$G = \mathbb{Z}$时，我们尝试具体地写出$B\mathbb{Z}$和$|B\mathbb{Z}|$.

按照定义，

$$(B\mathbb{Z})_n = \times_{i=1}^n \mathbb{Z}$$

例 1.13. 设X是拓扑空间，$\mathcal{U} = \{U_i\}_{i\in I}$是$X$的一个开覆盖.

练习 1.13. X good covering $X \simeq ||$.

例 1.14 (Borel构造). 设群G作用在集合X上，我们可以构造该作用的广群（groupoid，这是一个范畴不是一个群）$G \circlearrowright X$：其中ob $G \circlearrowright X = X$，$\hom_{G\circlearrowright X}(x,y) = \{g \in G \mid gx = y\}$且态射的复合是群乘法.于是$NG \circlearrowright X_n = G^n \times X$，面映射和退化映射分别为

$$\begin{aligned} d_i : G^n \times X &\to G^{n-1} \times X \\ (g_1, \cdots, g_n, x) &\mapsto \begin{cases} (g_2, \cdots, g_n, x) & i = 0 \\ (g_1, \cdots, g_i g_{i+1}, \cdots, g_n, x) & 0 < i < n \\ (g_1, \cdots, g_{n-1}, g_n x) & i = n \end{cases} \end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned} s_j : G^n \times X &\to G^{n+1} \times X \\ (g_1, \cdots, g_n, x) &\mapsto (g_1, \cdots, g_{j-1}, 1, g_j, \cdots, g_n, x). \end{aligned}$$

注意$N\mathbf{B}G \cong NG \circlearrowright \{*\}$且$N\mathbf{E}G \cong NG \circlearrowright G$.

例 1.15. 设$\mathcal{C}$是一个小范畴，$X : \mathcal{C} \to \mathbf{Set}$是协变函子，于是$X$的元素范畴$\int X$是小范畴.若$\eta : X_1 \Rightarrow X_2$是自然变换，则我们可以构造一个函子

$$\int \eta : \int X_1 \to \int X_2,$$

将对象(A, x)映到$(A, \eta_A(x))$，将态射$(f : A \to B, \varphi)$映到$(f, \eta_A(\varphi))$.这样对于任意的函子X，我们有

$$\mathcal{C} \xrightarrow{X} \mathbf{Cat} \xrightarrow{N} \mathbf{sSet} \xrightarrow{|-|} \mathbf{Top}.$$

事实上，τ_1不仅是做伴随函子，而且它是N的左逆，这意味着函子N是满忠实的，因此N诱导了$\mathbf{Cat}$到像的等价，于是可以引入如下自然存在且非常重要的问题：N的像范畴是什么，即给定一个单纯集X，它是否一定是某个小范畴的神经？如果不一定，在何时我们可以断定X是一个小范畴的神经？这个问题我们留到下一节回答，这需要更多的工具来进行讨论.

1.5 子单纯集

在完成了许多关于单纯集的讨论，一个自然的想法是我们希望研究单纯集的子结构.按照代数中通常对于子结构的定义，比较自然的，若Y是单纯集X的子单纯集，那么对于每个自然数n，Y_n都需要是X_n的子集，并且我们希望Y所给定态射都是完全由X给定的态射决定——对任意$f : [n] \to [m]$，$X(f)$在Y_n的限制就是$Y(f)$.后一个条件就是在说范畴$\mathbf{\Delta}$作用在Y上是封闭的.

定义. 给定单纯集X_*, Y_*，若存在单纯集的态射$i_* : Y_* \to X_*$使得对任意的$n \geq 0$，$i_n : Y_n \to X_n$都是集合之间的单射，则称Y_*是X_*的单纯子集().

例 1.16. 等式1.3定义的退化元素的全体不形成一个子单纯集.

通常，我们并不直接给出一个单纯子集，一般情况下我们给出一族称为生成元(generator)的态射，称包含它们的最小X的子单纯集为这族态射生成的子单纯集.

定义. 给定自然数$0 \leq i \leq n$，标准n单形$\mathbf{\Delta}^{[n]}$由$d^i_{[n-1]}: \mathbf{\Delta}^{[n-1]} \to \mathbf{\Delta}^{[n]}$生成的子集被称为$\mathbf{\Delta}^{[n]}$的第$i$面($i$-th face)，记为$\partial_i \mathbf{\Delta}^{[n]}$，即

$$\partial_i \mathbf{\Delta}^{[n]} := \mathbf{\Delta}^{[n-1]} \xrightarrow{d^i_{[n-1]}} \mathbf{\Delta}^{[n]}.$$

例 1.17. 具体来说，根据例1.4，我们可以具体地写出$\partial_i \mathbf{\Delta}^{[n]}$.由之前的讨论

$$\mathbf{\Delta}^{[n]}([k]) = \{(a_0, \cdots, a_k) \mid 0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \leq n\},$$

并且

$$\begin{gathered} d^i_{[n-1]}: \mathbf{\Delta}^{[n-1]} \to \mathbf{\Delta}^{[n]} \\ (a_0, \cdots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \cdots, a_k) \mapsto (a_0, \cdots, a_{i-1}, a_i + 1, a_{i+1} + 1, \cdots, a_k + 1), \end{gathered}$$

于是存在自然的单纯集的同构

$$d^i_{[n-1]}: \mathbf{\Delta}^{[n-1]} \to \partial_i \mathbf{\Delta}^{[n]}.$$

进一步地，对如上的同构取几何实现函子，那么

练习 1.14. 给定单纯集X的两个子单纯集Y_1, Y_2，求证$(Y_1 \cup Y_2)$也是X的子单纯集.

几何上，n单形的第i面就是标号为i的点相对的第i个坐标为0的面.如果我们将所有的面组合起来，几何上这是一个n维球面，对单纯集的这样操作将得到单纯球面：

定义. 标准n单形$\mathbf{\Delta}^{[n]}$由$\{d^i_{[n-1]}: \mathbf{\Delta}^{[n-1]} \to \mathbf{\Delta}^{[n]} \mid 0 \leq i \leq n\}$生成的子单纯集称为标准单纯$n$球面(standard simplicial n-sphere)，记为$\partial \mathbf{\Delta}^{[n]}$，即

$$\partial \mathbf{\Delta}^{[n]} = \bigcup_{0 \leq i \leq n} \partial_i \mathbf{\Delta}^{[n]}.$$

有时也用拓扑中的记号S^1来表示单纯球面.

例 1.18. 我们来具体地写出S^1

练习 1.15. 求证：

1. $\partial \mathbf{\Delta}^{[n]} = \operatorname{colim}_{\mathbf{\Delta}^{[n-2]} \xrightarrow{d^i_{[n-1]}} \mathbf{\Delta}^{[n-1]}} \mathbf{\Delta}^{[n-1]} \xrightarrow{d^i_{[n]}} \mathbf{\Delta}^{[n]}.$

2. 任取$k < n$，则$\partial \mathbf{\Delta}^{[n]}([k]) = \hom_{\mathbf{\Delta}}([k], [n])$.

更一般地，单纯集X的单纯n球面是单纯集间的映射$\partial \mathbf{\Delta}^{[n]} \to X$.如果几何球面去掉一个面，我们将得到一个可缩的有界闭集.对应到单纯集则是

定义. 标准n单形$\mathbf{\Delta}^{[n]}$由$\{d^i_{[n]}:\mathbf{\Delta}^{[n-1]}\to\mathbf{\Delta}^{[n]}\mid 0\le i\le n, i\neq k\}$生成的子单纯集称为标准单纯角(standard simplicial horn)，记为$\mathbf{\Lambda}^{[n]}_k$，即

$$\mathbf{\Lambda}^{[n]}_k=\bigcup_{0\le i\le n, i\neq k}\partial_i\mathbf{\Delta}^{[n]}.$$

例 1.19. 考虑$\mathbf{\Delta}^{[1]}$，按照例1.4中的讨论

练习 1.16. 求证：

1. $\mathbf{\Lambda}^{[n]}_k=\operatorname{colim}_{\mathbf{\Delta}^{[n-2]}\xrightarrow{d^i_{[n-1]}}\mathbf{\Delta}^{[n-1]}}\mathbf{\Delta}^{[n-1]}\xrightarrow{d^i_{[n]}}\mathbf{\Delta}^{[n]}$.

2. 任取$j<n-1$，则$\mathbf{\Lambda}^{[n]}_k([j])=\hom_{\mathbf{\Delta}}([j],[n])$，且$\mathbf{\Lambda}^{[n]}_k([n-1])=\hom_{\mathbf{\Delta}}([n-1],[n])-\{d^k\}$.

1.5.1 单纯集的商

定义. 给定单纯集X及其子单纯集Y，定义X关于Y的商单纯集(quotient simplicial set)X/Y满足

$$(X/Y)_n:=X_n/Y_n,$$

且面映射和退化映射分别由X的面映射和退化映射诱导，即

$$d_i^{X/Y([n+1])}(x)=\begin{cases}d_i^{X([n+1])}(x) & x\notin Y_{n+1}\\ Y_n/Y_n & x\in Y_{n+1}\end{cases}$$

和

$$s_i^{X/Y([n-1])}(x)=\begin{cases}s_i^{X([n-1])}(x) & x\notin Y_{n-1}\\ Y_n/Y_n & x\in Y_{n-1}.\end{cases}$$

练习 1.17. 求证给定单纯集X及其子单纯集Y，X关于Y的商X/Y也是单纯集.

例 1.20. 考虑单纯集$\mathbf{\Delta}^{[1]}$，态射$d^0,d^1:\mathbf{\Delta}^{[0]}\to\mathbf{\Delta}^{[1]}$给出了$\mathbf{\Delta}^{[1]}$的两个子单纯集，并且像集都是单点集.按照例1.4的描述，$d^i(\mathbf{\Delta}^{[0]})$（$i=0,1$）在$\mathbf{\Delta}^{[1]}_n$中的像是

$$(i,\cdots,i).$$

考虑$\mathbf{\Delta}^{[1]}/(d^0(\mathbf{\Delta}^{[0]})\cup d^1(\mathbf{\Delta}^{[0]}))$，即将$\mathbf{\Delta}^{[1]}_n$中的$(0,\cdots,0)$与$(1,\cdots,1)$等同起来，我们来计算该单纯集的几何实现.

拓扑上，我们知道$\mathbf{\Delta}^{[1]}_n$对应单位区间，单点在d^0,d^1下的像分别是区间的端点，那么粘合单位区间的端点拓扑上给出了S^1，这恰好对应刚刚的计算.

1.6 提升性质

更一般地，单纯集X的单纯角是单纯集间的映射$\mathbf{\Lambda}_k^{[n]} \to X$（引理1.2）.值得注意的是，对任意的自然数$n$和$0 \leq k \leq n$我们有自然的嵌入映射$\mathbf{\Lambda}_k^{[n]} \hookrightarrow \partial\mathbf{\Delta}^{[n]}$.这样我们可以引入一个关于单纯集的特殊性质——角填充(horn filling)，我们特别关心具有一定角填充性质的单纯集.

定义. 单纯集X若具有角填充性质，即对任意自然数n和$0 \leq k \leq n$，给定单纯映射$f : \mathbf{\Lambda}_k^{[n]} \to X$，存在（但不要求唯一）$\tilde{f} : \partial\mathbf{\Delta}^{[n]} \to X$使得图

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{\Lambda}_k^{[n]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X \\
\mathbf{\Delta}^{[n]} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

交换，则称X为Kan复形(Kan complex).

例 1.21. 考虑$\mathbf{\Delta}^{[2]}$，按照例1.4中的讨论，$\mathbf{\Delta}^{[2]}([k]) = \{(a_0, \cdots, a_k) \mid 0 \leq a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_k \leq 2\}$，即$\mathbf{\Delta}^{[2]}([0]) = \{0,1,2\}, \mathbf{\Delta}^{[2]}([1]) = \{(0,1),(0,2),(1,2)\}, \mathbf{\Delta}^{[2]}([2]) = \{(0,1,2)\}$且其余都是退化的.

左逆

$$\begin{tikzcd}
& 1 & \\
0 \arrow[ur] \arrow[rr] & & 2
\end{tikzcd}$$

复合

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & 2
\end{tikzcd}$$

右逆

$$\begin{tikzcd}
& 1 \arrow[dr] & \\
0 \arrow[rr] & & 2
\end{tikzcd}$$

例 1.22. 设$\mathcal{G}$是群胚，我们来说明$N\mathcal{G}$是Kan复形.

命题 1.10. *若X是拓扑空间，则它的奇异复形SX（例1.2）是Kan复形.*

证明. □

命题 1.11. 任意单纯群是Kan复形.

这个命题将会在之后证明.同时，Kan复形在同伦理论当中有重要的作用.

定理 1.12. 若X是Kan复形，那么$|X|$是

回到1.4节最后的问题，

定理 1.13. 单纯集X_*同伦于某个给定小范畴$\mathcal{C}$的神经当且仅当它具有唯一的内角提升.

证明. □

推论 1.13.1. 单纯集X_*同伦于某个给定群胚$\mathcal{G}$的神经当且仅当它具有唯一的角提升.

定义. 单纯集X若具有内角填充性质，即对任意自然数n和$0<k<n$，给定单纯映射$f:\mathbf{\Lambda}_k^{[n]}\to X$，存在（但不要求唯一）$\tilde{f}:\partial\mathbf{\Delta}^{[n]}\to X$使得图

$$\begin{tikzcd} \mathbf{\Lambda}_k^{[n]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & X \\ \mathbf{\Delta}^{[n]} \arrow[ur, "\tilde{f}"'] & \end{tikzcd}$$

交换，则称X为拟范畴(quasi-category)或无穷范畴(infinity category,∞-category).

我们从另一个角度来考虑，设$\mathcal{C}$是一个范畴，$M\subseteq \operatorname{mor}\mathcal{C}$是一类$\mathcal{C}$的态射，若态射$f:A\to B$满足对任意$M$中的态射$g:C\to D$，都存在态射$h:C\to A$和$k:D\to B$使得有态射$\varphi:D\to A$满足交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & C \arrow[l, "h"'] \arrow[d, "g"] \\ B & D, \arrow[l, "k"] \arrow[ul, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

则称f具有右对于M的右提升性质(right lifting property with respect to M).于是，无穷范畴的定义是说单纯集X满足它关于单点单纯集$*$的投影对于内角包含态射$i_{[n]}^k:\mathbf{\Lambda}_{[n]}^k\hookrightarrow\mathbf{\Delta}_{[n]},0<k<n$有右提升性质.而$i_{[n]}^k$诱导了

$$\begin{tikzcd} \hom_{\mathbf{sSet}}(\mathbf{\Delta}_{[n]},X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \hom_{\mathbf{sSet}}(\mathbf{\Lambda}_{[n]}^k,X) \arrow[d, "="] \\ X([n])=X_n \arrow[r, "(i_{[n]}^k)^*"] & \mathbf{\Lambda}_{[n]}^k(X), \end{tikzcd}$$

定义又等价于诱导的$(i^k_{[n]})^*$是满射.

定理 1.14 (Joyal)**.** 设**QuasiCat**是**sSet**中由无穷范畴组成的满子范畴，那么**QuasiCat**上有自然的模型范畴结构.

例 1.23. 设$\mathcal{C}$是任意局部小？范畴，则它的神经$N\mathcal{C}$是一个无穷范畴.并且，这样得到的无穷范畴具有特别的性质——它的内角填充都是唯一的，或者说之前讨论的映射$(i^k_{[n]})^*$是单射.

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$和

饱和的(saturated)

定理 1.15. 给定单纯集的包含$i : K \hookrightarrow K$和Kan纤维$p : X \to Y$，那么由交换图

$$\begin{tikzcd}
\underline{\hom}_{\mathbf{sSet}}(L,X) \arrow[r, "p_*"] \arrow[d, "i^*"] & \underline{\hom}_{\mathbf{sSet}}(L,Y) \arrow[d, "i^*"] \\
\underline{\hom}_{\mathbf{sSet}}(K,X) \arrow[r, "p_*"] & \underline{\hom}_{\mathbf{sSet}}(K,Y)
\end{tikzcd}$$

诱导的映射

$$\underline{\hom}_{\mathbf{sSet}}(L,X) \xrightarrow{(i^*,p_*)}$$

也是Kan纤维.

1.7　拓扑构造

1.7.1　单纯同伦

定义. 给定单纯集的态射$f, g : X_* \to Y_*$，那么一个f到g的单纯同伦(simplicial homotopy)是单纯态射

$$H : X \times \mathbf{\Delta}^{[1]} \to Y,$$

满足如下是交换图：

$$\begin{tikzcd}
 & L & \\
X_* \times \mathbf{\Delta}^{[0]} \arrow[r, "\mathrm{id}_X \times d^{[0]}"] \arrow[ur, "f"] & X_* \times \mathbf{\Delta}^{[1]} \arrow[u, "H"] & X_* \times \mathbf{\Delta}^{[0]}. \arrow[l, "\mathrm{id}_Y \times d^{[0]}"'] \arrow[ul, "g"']
\end{tikzcd}$$

与拓扑空间稍微不同的地方是，单纯同伦并不一定保证给出所有

定理 1.16. 给定单纯集X_*, Y_*，若Y是Kan复形则单纯同伦是$\hom_{\mathbf{sSet}}(X,Y)$上的等价关系.

证明. □

命题 1.17. 给定单纯集X_*，称包含为X的n骨架*(n-skeleton)*.对任意的单纯集X，

$$X = \mathrm{colim}_n X^{(n)} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} X^{(n)}.$$

练习 1.18. 给定函子$F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，若$\alpha : F \Rightarrow G$是自然变换，求证它诱导了同伦$N(\alpha) : NF \Rightarrow NG$.

由此证明，若$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G$是伴随对，则存在单纯集的弱等价$N\mathcal{C} \simeq N\mathcal{D}$.特别地，若$\mathcal{C}$中有始对象（或终对象），则$N\mathcal{C}$弱等价于单点.

练习 1.19. 求证$|PX| = P|X|$.

练习 1.20. 求证若X是可缩的单纯集，那么$S|X|$是可缩的单纯集.

证明. □

1.7.2 单纯同伦群

1.8 单纯范畴

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$，若存在映射空间(mapping space)函子

$$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(-,-) : \mathcal{C}^\circ \times \mathcal{C} \to \mathbf{sSet},$$

满足

1. $\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)_0 = \hom_{\mathcal{C}}(X,Y)$，
2. 函子$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(X,-) : \mathcal{C} \to \mathbf{sSet}$有左伴随

   $$X \otimes - : \mathbf{sSet} \to \mathcal{C},$$

   满足结合律

   $$X \otimes (Y \times Z) = (X \otimes Y) \otimes Z,$$

3. 函子$\underline{\hom}_{\mathcal{C}}(-,Y) : \mathcal{C}^\circ \to \mathbf{sSet}$有左伴随

   $$\underline{\hom}^{\mathcal{C}}(-,Y) : \mathbf{sSet} \to \mathcal{C}^\circ.$$

第二章 模型范畴

2.1 模型范畴的定义与性质I

定义. 设$\mathcal{M}$是范畴，我们有$\mathcal{M}$中的态射族WE, Fib和Cof，分别被称为弱等价（weak equivalence, $\xrightarrow{\sim}$）、纤维（fibration, $\twoheadrightarrow$）和余纤维（cofibration, $\hookrightarrow$）满足：

MC1. $\mathcal{M}$是（有限）完备和余完备的，

MC2. f, g和$g \circ f$中任意两个是弱等价则第三个也是弱等价，

MC3. 若态射f是g的收缩[1]，则若g属于态射族WE, Fib或Cof，则f也属于相同的态射族，

MC4. 任给定交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "h"] & B, \end{tikzcd}$$

其中i是余纤维p是纤维，且要么i要么p是一个弱等价，则存在提升$h : C \to B$使整个图交换，

MC5. 任意$\mathcal{M}$中的态射$f : A \to B$都有分解$f = q \circ i = p \circ j$，其中$p, q$是纤维，$i, j$是余纤维，$i, p$是弱等价，

则称范畴$\mathcal{M}$是模型范畴(model category).

若p既是纤维又是弱等价，则称p是零调纤维(acyclic fibration)或平凡纤维(trivial fibration)，对偶地若i既是余纤维又是弱等价，则称p是零调余纤维(acyclic cofibration)或平凡余纤维(trivial cofibration).

由于模型范畴$\mathcal{M}$是（有限）完备和余完备的，故存在始对象$\emptyset$和终对象$\{*\}$.若$\mathcal{M}$中的对象A满足$\emptyset \to A$是余纤维，则称A是余纤维对象(cofibrant object)，对偶地，若$\mathcal{M}$中的对象B满足$B \to \{*\}$是纤维，则称B是纤维对象(fibrant object).

关于图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\ X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "h"] & B, \end{tikzcd}$$

若提升$h : X \dashrightarrow E$存在，则称p关于i有右提升性质(right lifting property, RLP)或称i关于p有左提升性质(left lifting property, LLP).

例 2.1. 给定模型范畴$\mathcal{M}$，$C \in \mathrm{ob}\,\mathcal{M}$是给定的对象，那么$\mathcal{M}_{/C}$有自然的模型结构：

1. $f_{/C} : X_{/C} \to Y_{/C}$是弱等价当且仅当它本身在$\mathcal{M}$中的态射$f : X \to Y$是弱等价，
2. $i_{/C} : A_{/C} \to X_{/C}$是余纤维当且仅当它本身在$\mathcal{M}$中的态射$i : A \to X$是余纤维，
3. $p_{/C} : E_{/C} \to B_{/C}$是纤维当且仅当它本身在$\mathcal{M}$中的态射$p : E \to B$是纤维.

例 2.2. 给定模型范畴$\mathcal{M}$，那么范畴$\mathrm{mor}\,\mathcal{M}$有自然的模型结构.

例 2.3. 给定范畴$I = \{1 \leftarrow 0 \to 2\}$，那么$\mathrm{Funct}(I, \mathcal{M})$存在一个模型结构，使得$\mathrm{Funct}(I, \mathcal{M})$中的态射$\eta : F \Rightarrow G$是弱等价当且仅当$\eta_i$对任意$i \in \mathrm{ob}\, I$是弱等价，且$\eta$是余纤维当且仅当$\eta_0$是余纤维且诱导的

$$F(1) \coprod_{F(0)} G(0) \to G(1), F(2) \coprod_{F(0)} G(0) \to G(2)$$

是$\mathcal{M}$中的余纤维.

我们将用接下来的整节给出一个模型范畴的例子，并且借此说明模型范畴一定程度上处理了我们关注的同伦问题.

2.2　拓扑空间

2.2.1　第一个模型结构

定义. 给定拓扑空间的连续映射$i : A \to X$，若它满足同伦扩张性质(homotopy extension property, HEP)，即对任意的$f : X \to Y$，若存在同伦$H : A \times I \to Y$使得图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, hook, "i"'] & & A \times I \arrow[dl, "H"] \arrow[dd, "i\times\mathrm{id}"] \\
& Y & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "i_0"'] & & X \times I \arrow[ul, dashed, "\tilde{H}"]
\end{tikzcd}$$

是交换的，其中$i_0(x) = (x, 0)$，那么存在同伦$\tilde{H} : X \times I \to Y$是$H$的扩张，即$\tilde{H}$与整幅图交换，则称映射$i$是余纤维(cofibration).

通常情况下，$\tilde{H}$的存在不是唯一的，我们也不要求有唯一性.考虑到$\mathbf{Top}$是笛卡尔闭的，即对任意（紧生成、弱Hausdorff）的拓扑空间Y, Z，存在$\hom_{\mathbf{Top}}(Y, Z)$上的自然的拓扑结构，记为$\mathrm{Map}(Y, Z)$，满足

$$\hom_{\mathbf{Top}}(X \times Y, Z) \cong \hom_{\mathbf{Top}}(X, \mathrm{Map}(Y, Z))$$

是一个自然同构.于是上图在这个自然同构下等价于交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "H"] \arrow[d, hook, "i"'] & \mathrm{Map}(I,Y) \arrow[d, "p_0"] \\
X \arrow[r, "f"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & Y,
\end{tikzcd}$$

中$\tilde{H}$的存在性.

> **引理 2.1.** 若$i: A \to X$是余纤维，$g: A \to Y$是任意映射，那么g诱导的映射$Y \to Y \cup_g X$也是余纤维.

证明. 注意到$(Y \cup_g X) \times I \cong (Y \times I) \cup_{g\times\mathrm{id}} (X \times I)$，考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rrrr, "i_0"] \arrow[dr, "g"] \arrow[dddd, "i"] & & & & A \times I \arrow[dl, "g\times\mathrm{id}"'] \arrow[dddd, "i\times\mathrm{id}"] \\
& Y \arrow[rr] \arrow[dd] & & Y \times I \arrow[dl, "H"] \arrow[dd] & \\
& & Z & & \\
& Y \cup_g X \arrow[ur] \arrow[rr] & & (Y \cup_g X) \times I \arrow[ul, dashed, "\tilde{H}"] & \\
X \arrow[ur] \arrow[rrrr] & & & & X \times I, \arrow[ul] \arrow[uull, dashed]
\end{tikzcd}$$

由于左侧方块

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d] \\
Y \arrow[r] & Y \cup_g X
\end{tikzcd}$$

是推出，右侧方块

$$\begin{tikzcd}
A \times I \arrow[r, "i"] \arrow[d, "g"] & X \times I \arrow[d] \\
Y \times I \arrow[r] & (Y \cup_g X) \times I
\end{tikzcd}$$

也是推出图.由于$i: A \to X$是余纤维，因此存在$X \times I \dashrightarrow Z$与整幅图交换，这样由于$(Y \cup_g X) \times I$是推出存在$\tilde{H}: (Y \cup_g X) \times I \dashrightarrow Z$是$H$的提升. □

> **定义.** 给定连续映射$f: X \to Y$，则f的映射柱(mapping cylinder)是拓扑空间
>
> $$Mf := Y \cup_f (X \times I),$$
>
> 其中f按照给定的映射定义在$X \times \{0\}$上.

事实上，按定义Mf是推出

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "f"'] & X\times I \arrow[d] \\ Y \arrow[r] & Mf, \end{tikzcd}$$

因而连续映射的映射柱可以帮助检验一个连续映射是否是余纤维.考虑如下交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, hook, "i"'] & & A\times I \arrow[dl] \arrow[dd, "i\times\mathrm{id}"] \\ & Mi & \\ X \arrow[ur] \arrow[rr, "i_0"] & & X\times I, \arrow[ul, dashed, "r"] \end{tikzcd}$$

如果存在使得图交换的连续映射$r : X \times I \to Mi$，那么对任意的Y满足

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i_0"] \arrow[d, "i"'] & A\times I \arrow[d] \\ X \arrow[r, "f"] & Y, \end{tikzcd}$$

映射柱的泛性质给出唯一的连续映射$Mi \to Y$，与r的复合是想要的同伦.反过来，若i是余纤维，取r是余纤维定义给出的映射.

另一方面，任意给定的连续映射$f : X \to Y$都有分解

$$X \xrightarrow{j} Mf \xrightarrow{r} Y,$$

其中$j : x \mapsto (x, 1)$，$r : Mf \to Y$满足$r : y \mapsto y, (x, s) \mapsto f(x)$.记$i : Y \to Mf$是自然的包含，那么$r \circ i = \mathrm{id}_Y$，且$H : Mf \times I \to Mf, (y, t) \mapsto y, ((x, s), t) \mapsto (x, (1 - t)s)$给出了同伦$\mathrm{id}_{Mf} \simeq i \circ r$.

引理 2.2. 如上讨论的映射$j : X \to Mf$是余纤维.

证明. □

事实上，连续映射$f : X \to Y$的映射柱Mf满足这样的性质有更深刻的原因，这部分我们会作为同伦余极限进行讨论.

练习 2.1. 若嵌入映射$i : A \to X$是余纤维，且A是可缩的，求证商映射$q : X \to X/i(A)$是同伦等价.

证明. 考虑同伦$H : A \times I \to A$满足$H(-, 0) = \mathrm{id}$，$H(-, 1) = \{*\}$，那么由于i是余纤维存在提升

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, hook, "i"'] & & A\times I \arrow[dl, "H\circ i"] \arrow[dd, "i\times\mathrm{id}"] \\ & X & \\ X \arrow[ur, "\mathrm{id}_X"] \arrow[rr, "i_0"] & & X\times I, \arrow[ul, dashed, "\bar{H}"] \end{tikzcd}$$

满足$\tilde{H}(-,0)=\mathrm{id}$，$\tilde{H}(-,1)$将$i(A)$映到一点，且$\tilde{H}(i(A),1)\subseteq i(A)$.这样，对于任意的$t\in[0,1]$，$q\circ\tilde{H}(i(-),t)$将$i(A)$映到一点，根据商映射的泛性质存在交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\tilde{H}(-,t)"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "q"] \\
X/i(A) \arrow[r, "\bar{H}(-,t)"] & X/i(A).
\end{tikzcd}$$

特别地当$t=1$时，$\tilde{H}(-,1)$已经将$i(A)$映到一点，定义

$$\begin{aligned}
g: X/A &\to X \\
x &\mapsto \begin{cases} * & x=i(A)/i(A) \\ \tilde{H}(x,1) & x\in X-i(A) \end{cases},
\end{aligned}$$

这样$g\circ q=\tilde{H}(-,1)$（这也是按照商映射的泛性质分解得到的），同时对任意$\bar{x}\in X/i(A)$，$qg(\bar{x})=qgq(x)=q\circ\tilde{H}(x,1)=\bar{H}(q(x),1)=\bar{H}(\bar{x},1)$，即有交换图

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\tilde{H}(-,1)"] \arrow[d, "q"] & X \arrow[d, "q"] \\
X/i(A) \arrow[r, "\bar{H}(-,1)"] \arrow[ur, "g"] & X/i(A).
\end{tikzcd}$$

于是，$gq=\tilde{H}(-,1)\simeq\tilde{H}(-,0)=\mathrm{id}$且$qg=\bar{H}(-,1)\simeq\bar{H}(-,0)=\mathrm{id}$. $\square$

练习 2.2. 给定余纤维$i:A\to X$，$f:X\to X$满足$f\circ i=i$，且$f\simeq\mathrm{id}$.求证存在$g:X\to X$满足$g\circ i=i$且$g\circ f\simeq\mathrm{id}(\mathrm{rel}\ A)$.

证明. 选定同伦$H:f\Rightarrow\mathrm{id}_X$，注意到$H(i(-),0)=f\circ i=i$且$H(-,1)=\mathrm{id}_X$，映射$H(i,\mathrm{id}_I)$的同伦提升性质说明

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, hook, "i"'] & & A\times I \arrow[dl, "H(i,\mathrm{id})"] \arrow[dd, "i\times\mathrm{id}"] \\
& X & \\
X \arrow[ur, "\mathrm{id}_X"] \arrow[rr, "i_0"] & & X\times I \arrow[ul, dashed, "\bar{H}"]
\end{tikzcd}$$

存在同伦$\bar{H}:X\times I\dashrightarrow X$使得$\bar{H}\circ(i\times\mathrm{id})=H\circ(i\times\mathrm{id})$，并且$\bar{H}(-,0)=\mathrm{id}_X$.令$g:=\bar{H}(-,1)$，那么

$$g\circ i=\bar{H}(i(-),1)=H(i(-),1)=\mathrm{id}_X\circ i=i.$$

再次考虑同伦提升

$$\begin{tikzcd}
A\times I \arrow[rr, "i_0"] \arrow[dd, hook, "i\times\mathrm{id}"'] & & A\times I\times I \arrow[dl, "K"] \arrow[dd, "i\times\mathrm{id}\times\mathrm{id}"] \\
& X & \\
X\times I \arrow[ur, "J"] \arrow[rr, "i_0"] & & X\times I\times I, \arrow[ul, dashed, "L"]
\end{tikzcd}$$

其中J是同伦$J : g\circ f\simeq \mathrm{id}$，定义为

$$J(x,s) := \begin{cases} \tilde{H}(f(x),1-2s) & s\leq \frac{1}{2} \\ H(x,2s-1) & s\geq \frac{1}{2} \end{cases},$$

K是同伦

$$K(a,s,t) := \begin{cases} \tilde{H}(i(a),1-2s(1-t)) & s\leq \frac{1}{2} \\ H(i(a),1-2(1-s)(1-t)) & s\geq \frac{1}{2} \end{cases},$$

于是

$$g\circ f = J(-,0) = L(-,0,0)\simeq L(-,0,1)\simeq L(-,1,1)\simeq L(-,1,0) = J(-,1) = \mathrm{id}(\mathrm{rel}\ A),$$

这即为要证. □

与如上对偶地，有纤维的概念，它的性质几乎完全对偶于余纤维：

定义. 给定拓扑空间的连续映射$p : E\to B$，若它满足同伦提升性质(homotopy lifting property, HLP)，即对任意的$f : Y\to E$，若存在同伦$H : Y\times I\to B$（同样记为$H : Y\to B^I$）使得图

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, two heads, "p"'] & & E^I \arrow[ll, "p_0"'] \arrow[d, "i\times\mathrm{id}"] \\ & Y \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] \arrow[dr, "H"] & \\ B & & B^I \arrow[ll, "p_0"] \end{tikzcd}$$

是交换的，其中$p_0(\gamma) = \gamma(0)$，则称映射p是纤维(fibration).

上面的这个自然同构下等价于交换图

$$\begin{tikzcd} Y \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i_0"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\ Y\times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & B, \end{tikzcd}$$

中$\tilde{H}$的存在性.同样地，我们有

引理 2.3. *若$p : E\to B$是纤维，$g : Y\to B$是任意映射，那么g诱导的映射$Y\times_B E\to Y$也是纤维.*

引理2.3和2.1说明了余纤维关于推出封闭，纤维关于拉回封闭，事实上这是模型范畴一般正确的结论，我们将在引理2.3中证明一般的结果.

然而，这并不是范畴**Top**上唯一可能的模型结构，为做区别，称这里定义的余纤维是Hurewicz余纤维，纤维是Hurewicz纤维.范畴**Top**中的Hurewicz余纤维和Hurewicz纤维都是非空的，例如CW子复形诱导的映射$A\hookrightarrow X$是余纤维，当B是仿紧拓扑空间时B上的纤维丛是纤维.

定义. 给定连续映射$p : E \to B$，定义它的道路空间(mapping path space)是

$$Np := E \times_p B^I = \{(x, \gamma) \mid \gamma(0) = p(x)\} \subseteq E \times B^I.$$

明显地Np是拉回

$$\begin{tikzcd} Np \arrow[r] \arrow[d] & B^I \arrow[d, "p_0"] \\ E \arrow[r, "p"] & B, \end{tikzcd}$$

因而连续映射的道路空间可以帮助检验一个连续映射是否是纤维，即若图中

$$\begin{tikzcd} E \arrow[dd, two heads, "p"'] & & E^I \arrow[ll, "p_0"'] \arrow[dd, "i\times\mathrm{id}"] \\ & Np \arrow[ul] \arrow[ur, dashed] \arrow[dr] & \\ B & & B^I \arrow[ll, "p_0"] \end{tikzcd}$$

$Np \dashrightarrow E^I$存在则p是纤维.

引理 2.4. *若$i : A \to X$是纤维且B是空间，则诱导的映射*

$$B^i : B^X \to B^A$$

是纤维.

证明. 首先注意到

$$\begin{aligned} B^{Mi} &= \mathrm{Map}(Mi, B) = \mathrm{Map}(\mathrm{colim}(X \leftarrow A \xrightarrow{i_0} A \times I), B) \\ &= \lim(\mathrm{Map}(X, B) \to \mathrm{Map}(A, B) \xleftarrow{i_0^*} \mathrm{Map}(A \times I, B)) \\ &= \lim(\mathrm{Map}(X, B) \to \mathrm{Map}(A, B) \xleftarrow{i_0^*} \mathrm{Map}(A, B^I)) \\ &= \lim(B^X \to B^A \xleftarrow{i_0^*} (B^A)^I) = NB^i. \end{aligned}$$

考虑收缩映射$r : X \times I \to Mi$，那么

$$B^r : NB^i \cong B^{Mi} \to B^{X \times I} \cong (B^X)^I$$

给出了想要的提升. □

同时，对任意的连续映射$f : X \to Y$，可以找到分解

$$X \xrightarrow{\iota} Nf \xrightarrow{q} Y,$$

其中$\iota : x \mapsto (x, \mathrm{const}_{f(x)})$，$\mathrm{const}_{f(x)}$是在点$f(x)$上的常值路径，$q : (x, \gamma) \mapsto \gamma(1)$.于是

$$q(\iota(x)) = q(x, \mathrm{const}_{f(x)}) = f(x).$$

令$\pi : Nf \to X$是自然的投影$(x, \gamma) \mapsto x$，那么$\pi \circ \iota = \mathrm{id}_X$，且存在形变收缩

$$\begin{aligned} H : Nf \times I &\to Nf \\ ((x, \gamma), t) &\mapsto (x, \gamma_t), \end{aligned}$$

其中$\gamma_t(s) = \gamma((1-t)s)$，这给出了$\mathrm{id}_{Np} \simeq \iota \circ \pi$.

引理 2.5. *如上讨论的映射$q : Nf \to Y$是纤维.*

证明. 任意给定范畴**Top**中的交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i_0"'] & Np \arrow[d, "q"] \\ A \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"] & Y, \end{tikzcd}$$

我们需要构造同伦提升$\tilde{H}$.记$g : a \mapsto (g_1(a), g_2(a))$和

$$\gamma_{(a,t)}(s) = \begin{cases} g_2(a)(s + st) & \text{if } 0 \leq s \leq \frac{1}{1+t} \\ H(a, s + st - 1) & \text{if } \frac{1}{1+t} \leq s \leq 1, \end{cases}$$

令

$$\tilde{H}(a, t) = (g_1(a), \gamma_{(a,t)}),$$

那么根据

$$q \circ \tilde{H}(a, t) = q(g_1(a), \gamma_{(a,t)})(1) = H(a, t)$$

可知$\tilde{H}$是所要的提升. □

这样，我们可以叙述第一个具体的模型结构的结果了：

定理 2.1. *在范畴**Top**上存在模型结构，满足*

1. *弱等价是同伦等价，即映射$f : X \to Y$满足存在$g : Y \to X$，使得$f \circ g \simeq \mathrm{id}_Y, g \circ f \simeq \mathrm{id}_X$，*
2. *纤维是所有的Hurewicz纤维，*
3. *余纤维是所有的Hurewicz余纤维.*

证明. □

2.2.2 第二个模型结构

除去第一小节介绍的模型结构，**Top**上还存在其他的模型结构，一般而言这个模型结构

定理 2.2. *在范畴***Top***上存在模型结构，满足*

1. 弱等价是弱同伦等价，即映射$f : X \to Y$满足诱导的$\pi_i(f) : \pi_i(X) \to \pi_i(Y)$对所有的$i$都是同构，

2. 纤维是所有的$Serre$纤维，

3. 余纤维是胞腔粘贴映射的收缩，即图

$$\begin{tikzcd}
A_2 \arrow[r, "s"] \arrow[d, "j_2"] & A_1 \arrow[r, "r"] \arrow[d, "j_1"] & A_2 \arrow[d, "j_2"] \\
X_2 \arrow[r, "i"] & X_1 \arrow[r, "p"] & X_2
\end{tikzcd}$$

中若$r \circ s = \mathrm{id}_{A_2}, p \circ i = \mathrm{id}_{X_2}$，嵌入映射$j_1 : A_1 \hookrightarrow X_1$是相对$CW$复形（即$X_1/A_1$是$CW$复形），则$j_2 : A_2 \to X_2$是余纤维.

在这个模型结构中，所有的拓扑空间都是纤维对象，更重要的，它强调了CW复形的特殊地位：余纤维对象恰是CW复形的收缩.今后提到范畴**Top**时，若不加指明所指的模型结构是本小节提到的Serre模型.

练习 2.3. 在范畴**Top**中，若$A \hookrightarrow X$是相对CW复形，求证它沿$f : A \to Y$的推出$Y \hookrightarrow X \coprod_A Y$也是相对CW复形.

若相对CW复形$A \hookrightarrow X$同时还是弱同伦等价，求证它沿$f : A \to Y$的推出$Y \hookrightarrow X \coprod_A Y$也是弱同伦等价.

证明. □

证明. 首先来证明MC5)，即连续函数的分解.考虑所有形如

$$\begin{tikzcd}
\text{—}\Lambda^{n_D}_{k_D}\text{—} \arrow[r, "\alpha_D"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\
\text{—}\Delta^{n_D}_{k_D}\text{—} \arrow[r, "\beta_D"] & Y
\end{tikzcd}$$

的交换图，它们一起诱导了推出X_1

$$\begin{tikzcd}
\coprod_D \text{—}\Lambda^{n_D}_{k_D}\text{—} \arrow[r, "\{\alpha_D\}"] \arrow[d, hook] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "i_1"] & X_0 \arrow[d, "f=f_0"] \\
\coprod_D \text{—}\Delta^{n_D}_{k_D}\text{—} \arrow[r, "\{\beta_D\}"] & X_1 \arrow[r, "f_1"] & Y,
\end{tikzcd}$$

这样根据推出的泛性质我们得到了一个分解$f_0 = f_1 \circ i_1$.由于$\coprod_D |\Lambda^{n_D}_{k_D}| \hookrightarrow \coprod_D |\Delta^{n_D}_{k_D}|$是弱同伦等价的相对CW复形，$i_1$也是弱同伦等价的相对CW复形（习题2.3）.同样的构造考虑所有形如

$$\begin{tikzcd}
\text{—}\Lambda^{n_D}_{k_D}\text{—} \arrow[r, "\alpha_{D,1}"] \arrow[d, hook] & X_1 \arrow[d, "f_1"] \\
\text{—}\Delta^{n_D}_{k_D}\text{—} \arrow[r, "\beta_{D,1}"] & Y
\end{tikzcd}$$

的交换图，它们一起诱导了推出X_2

$$\begin{tikzcd}
\coprod_D |\Lambda^{n_D}_{k_D}| \arrow[r, "\{\alpha_{D,1}\}"] \arrow[d, hook] & X_1 \arrow[d, "i_2"] \arrow[dr, "f_1"] & \\
\coprod_D |\Delta^{n_D}_{k_D}| \arrow[r, "\{\beta_{D,1}\}"] & X_2 \arrow[r, "f_2"] & Y,
\end{tikzcd}$$

这样根据推出的泛性质我们得到了一个分解$f_1 = f_2 \circ i_2$.将这个操作进行下去，我们得到了图

$$\begin{tikzcd}
X = X_0 \arrow[r, "i_1"] \arrow[dr, "f=f_0"] & X_1 \arrow[r, "i_2"] \arrow[d, "f_1"] & X_2 \arrow[r, "i_3"] \arrow[dl, "f_2"] & \cdots \\
& Y, & &
\end{tikzcd}$$

那么余极限的泛性质给出了如下图

$$\begin{tikzcd}
X = X_0 \arrow[rr, "i_\infty"] \arrow[dr, "f_0=f"'] & & \operatorname{colim}_i X_i \arrow[dl, "f_\infty"] \\
& Y, &
\end{tikzcd}$$

这样需要证明i_∞是零调余纤维，f_∞是纤维即可.

由于每一个$i_n : X_{n-1} \hookrightarrow X_n$都是相对CW复形，

$$\operatorname{colim}_i X_i = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i,$$

于是

$$(\operatorname{colim}_i X_i)/X_0 = \left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i\right) \Big/ X_0 = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} (X_i/X_0)$$

是CW复形，因而$i_\infty : X_0 \to \operatorname{colim}_i X_i$是相对CW复形.为证明$i_\infty$是弱同伦等价，任取

$$f : (D^n, S^{n-1}) \to (\operatorname{colim}_i X_i, X_0),$$

由于D^n是紧集，根据CW复形的性质f的像一定在某个X_m中.但是$X_0 \hookrightarrow X_m$是弱同伦等价，因此存在$g : D^n \to X_0$使得$f \simeq_{\text{rel } S^{n-1}} g$，这样$[f] \in \pi_n(\operatorname{colim}_i X_i, X_0)$是0，即$i_\infty$是弱同伦等价.

最后来证明f_∞是纤维.考虑图

$$\begin{tikzcd}
|\Lambda^n_k| \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & \operatorname{colim}_i X_i \arrow[d, "f_\infty"] \\
|\Delta^n_k| \arrow[r, "\beta"] & Y,
\end{tikzcd}$$

$|\Lambda^n_k|$和$|\Delta^n_k|$的紧性说明存在j使得图

$$\begin{tikzcd}
|\Lambda^n_k| \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha_j"] \arrow[dd, hook] & & \operatorname{colim}_i X_i \arrow[dd, "f_\infty"] \\
& X_j \arrow[ur] \arrow[dr, "f_j"] & \\
|\Delta^n_k| \arrow[rr, "\beta"'] & & Y,
\end{tikzcd}$$

成立，于是只要找到提升$|\Delta^n_k| \to X_j$即可.但X_{j+1}的定义（作为推出）使得图

$$\begin{tikzcd}
\text{—}\Lambda^n_k\text{—} \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dd, hook] & & X_j \arrow[dl, "i_j"'] \arrow[dd, "f_j"] \\
& X_{j+1} \arrow[dr, "f_{j+1}"] & \\
\text{—}\Delta^n_k\text{—} \arrow[ur, "\beta_{j+1}"] \arrow[rr, "\beta"'] & & Y,
\end{tikzcd}$$

存在，因此得到了提升$\beta_{j+1} : |\Delta^n_k| \to X_{j+1}$. □

Quillen称如上证明的这个技巧为小对象论断(small object argument)，我们之后会对这个证明进行更详细的讨论和推广.

2.3 模型范畴的定义与性质II

这一节我们将继续探索模型范畴的一般性质，在之前一节的例子中这些都有良好的拓扑含义.

2.3.1 封闭性

更准确地讲，上一节定义的模型范畴是闭模型范畴(closed model category)，它在下述意义下是闭的，即零调纤维（对应的零调余纤维）和余纤维（对应的纤维）相互决定：

引理 2.6. *设$\mathcal{M}$是模型范畴，那么如下论断成立：*

1. *映射$i : A \to X$是余纤维当且仅当它对所有的零调纤维满足左提升性质.或者形式化地写为$\mathrm{Cof} = \mathrm{LLP}(\mathrm{Fib} \cap W)$，其中LLP表示满足所有左提升性质(left lifting property)的态射全体.*
2. *映射$i : A \to X$是零调余纤维当且仅当它对所有的纤维满足左提升性质.*
3. *映射$p : E \to B$是纤维当且仅当它对所有的零调余纤维满足右提升性质.*
4. *映射$p : E \to B$是零调纤维当且仅当它对所有的余纤维满足右提升性质.*

证明. 1.设$i : A \hookrightarrow X$是给定的余纤维，$p : E \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} B$是给定的零调纤维，且有交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\
X \arrow[r, "f"] & B,
\end{tikzcd}$$

那么自然由定义，存在$h : X \dashrightarrow E$与图交换，因此$\mathrm{Cof} \subseteq \mathrm{LLP}(\mathrm{Fib} \cap W)$.反过来，若给定映射$i : A \to X$，满足对任意零调纤维有左提升性质，那么有交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, hook, "j"] \arrow[d, "i"] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\
X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, "k"] & X,
\end{tikzcd}$$

其中$A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow X$是$A \to X$按照MC5进行的分解，且$p$是零调纤维，这意味着$i$是收缩

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "i"] & A \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "j"] & A \arrow[d, "i"] \\
X \arrow[r, "k"] & E \arrow[r, "p"] & X,
\end{tikzcd}$$

于是根据MC3)，i也是余纤维.

2. 仿照上一部分的定义，其中分解$A \hookrightarrow E \twoheadrightarrow B$要求$j : A \hookrightarrow E$是零调余纤维即可.剩余部分的证明可以完全对偶地完成. □

引理2.6自然地推出

命题 2.3. 在一个模型范畴中，

1. 余纤维和零调余纤维都对复合和推出封闭，特别地，任意同构都是余纤维.

2. 纤维和零调纤维都对复合和拉回封闭，特别地，任意同构都是纤维.

证明. 设$i : A \to X$是纤维，$f : A \to Y$是任意态射，于是有交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & Y \arrow[d] \\
X \arrow[r] & X \coprod_A Y,
\end{tikzcd}$$

根据引理2.6，只需要证明$Y \to X \coprod_A Y$对所有的零调纤维具有左提升性质即可.任给定的交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook, "i"'] & Y \arrow[r] \arrow[d, "\tilde{h}"'] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\
X \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & X \coprod_A Y \arrow[r] & B,
\end{tikzcd}$$

满足$p : E \twoheadrightarrow B$是零调余纤维，于是存在提升$\tilde{h} : X \to E$与图交换.注意到$X \coprod_A Y$是推出，因此根据泛性质存在$h : X \coprod_A Y \to E$，这就是所要的提升.

给定余纤维$i : A \to X, j : X \to Y$，对任意的零调纤维$E \twoheadrightarrow B$，考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, hook, "i"'] & E \arrow[dd, two heads, "p"] \\
X \arrow[d, hook, "j"'] \arrow[ur, dashed] & \\
Y \arrow[r] \arrow[uur, dashed] & B,
\end{tikzcd}$$

由于$i : A \to X$是余纤维，因此存在对于$A \to E$和$X \to Y \to B$的提升$X \dashrightarrow E$使得图交换，再由于$j : X \to Y$是余纤维，存在对于$X \dashrightarrow E$和$Y \to B$的提升$Y \dashrightarrow E$使得图交换，因此证明了$j \circ i$对$p : E \to B$有左提升性质，因此$j \circ i$是余纤维.

其余部分的证明完全类似. □

注意到以上命题中任意一条对弱等价都不成立.但实际情况下有些模型范畴对弱等价也有好的推出和拉回的性质，于是

定义. 给定模型范畴$\mathcal{M}$，若$\mathcal{M}$中的弱等价沿余纤维的推出也是弱等价，则称$\mathcal{M}$是左正规的(left proper)，对偶地若$\mathcal{M}$中的弱等价沿纤维的拉回也是弱等价，则称$\mathcal{M}$是右正规的(right proper).若$\mathcal{M}$同时左右正规，则称$\mathcal{M}$是正规的(proper).

回到一般的理论中，事实上，Quillen最初对模型范畴的定义并不是这里的定义，最开始的定义不包含MC3)三个态射族对取收缩的封闭性（注意到这一条在封闭性的证明中起到核心的作用），对应的最初的定义多了命题2.3及其对偶所述的条件，根据前面的证明，这是封闭性的推论，因此为强调有时会称本章刚开始定义的模型范畴为闭模型范畴(closed model category).虽然这样按Quillen最初定义的模型范畴更一般一点，但通常我们见到的都是闭模型范畴，在之后提到模型范畴时我们也指闭模型范畴.

练习 2.4. 证明所有同构的全体满足6选2公理.进而证明，任意范畴中的任意一族态射，若包含恒等态射并且满足6选2公理，则一定包含同构.

证明. □

练习 2.5. 给定一族态射$\{i_\lambda : A_\lambda \to X\}_{\lambda\in\Lambda}$且$\coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$存在，求证$\{i_\lambda : A_\lambda \to X\}_{\lambda\in\Lambda}$中的每个态射都是（零调）余纤维当且仅当诱导的
$$\coprod_{\lambda\in\Lambda} i_\lambda : \coprod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \to X$$
是（零调）余纤维.

证明. 由于后面内容使用到零调余纤维的情形，我们这里证明这个结论，余纤维的证明完全相同. □

定义. 给定模型范畴$\mathcal{M}$和其中的对象A，(MC5)说明典范态射$\emptyset \to A$有分解$\emptyset \hookrightarrow QA \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} A$，其中$\emptyset \hookrightarrow QA$是余纤维，$QA \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} A$是零调纤维，称$QA$是$A$的余纤维替代(cofibrant replacement).

任给定$f : X \to Y$，我们可以找到X, Y的余纤维替代QX, QY，于是有交换图

$$\begin{tikzcd}
QX \arrow[d] & QY \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"] & Y,
\end{tikzcd}$$

转化为

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[rr] \arrow[d, hook, "\sim"] & & QY \arrow[d, two heads] \\
QX \arrow[r] \arrow[urr, dashed, "Qf"] & X \arrow[r, "f"] & Y
\end{tikzcd}$$

后根据(MC4)，存在$Qf : QX \dashrightarrow QY$使得图是交换的，称$Qf$（也记为$\tilde{f}$）是$f$的余纤维提升(cofibrant lifting).

对偶地，对任意$\mathcal{M}$中的对象X，典范态射$X \to \{*\}$有分解$X \overset{\sim}{\hookrightarrow} RX \twoheadrightarrow \{*\}$，其中$X \overset{\sim}{\hookrightarrow} RX$是零调余纤维，$RX \twoheadrightarrow \{*\}$是纤维，$RX$称为$X$的纤维替代，且任意态射$f : X \to Y$也有纤维提升$Rf : RX \dashrightarrow RY$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, hook, "\sim"] & Y \arrow[r] & RY \arrow[d, two heads] \\
RX \arrow[rru, dashed, "Rf"] \arrow[rr] & & \{*\}.
\end{tikzcd}$$

练习 2.6. 若模型范畴$\mathcal{M}$中的对象X是纤维对象，那么它的余纤维替代QX同时是纤维对象和余纤维对象.

2.3.2 同伦与同伦等价

我们建立模型范畴的语言就是为了讨论同伦关系，因此在模型范畴中探讨合适的同伦的定义是必要的，这里的定义与**Top**中的同伦基本是相同的，但一般的模型范畴中同伦分左右，而在**Top**中左右同伦是相同的.

定义. 设$\mathcal{M}$是模型范畴，A是$\mathcal{M}$中的对象.对余对角线$\nabla : A \coprod A \to A$，MC5说明它可以分解为

$$\begin{tikzcd}
A \coprod A \arrow[d, hook, "i_0+i_1"'] \arrow[dr, "\nabla"] & \\
A \times I \arrow[r, two heads, "\sim"] & A,
\end{tikzcd}$$

其中$i_0 + i_1 : A \coprod A \to A \times I$是余纤维，$A \times I \twoheadrightarrow A$是零调纤维，称$A \times I$是对象$A$的柱对象(cylinder object).给定两个态射$f, g : A \rightrightarrows B$，若存在$A$的柱对象到$B$的态射$H$满足图

$$\begin{tikzcd}
A \coprod A \arrow[d, hook, "i_0+i_1"'] \arrow[dr, "f+g"] & \\
A \times I \arrow[r, "H"] & B,
\end{tikzcd}$$

交换，则称f左同伦于(left homotopic to)g，记为$f \simeq_l g$，$H : f \Rightarrow g$是f, g的左同伦(left homotopy)，意味着$\iota_0 \circ (i_0 + i_1) \circ H = f, \iota_1 \circ (i_0 + i_1) \circ H = g$.

由于MC5)中保证的分解并不一定具有函子性，因此也不能保证柱对象的存在具有函子性.注意在以上定义中，$A \times I$并不表示两个对象的积，$i_0 + i_1$也不表示两个态射的和，它们只是存在的某个对象和态射的记号.事实上，通常我们称这样的柱对象是非常好的(very good cylinder object)，之后会有在非模型范畴中关于柱对象的讨论，相应地定义也会有一定的弱化

1. 若余对角线$\nabla : A \coprod A \to A$有分解$A \coprod A \xrightarrow{i_0+i_1} A \times I \to A$，满足$i_0 + i_1$是余纤维且$A \times I \to A$是弱等价，则称$A \times I$是好的柱对象(good cylinder object)，
2. 若分解$A \coprod A \xrightarrow{i_0+i_1} A \times I \to A$只满足$A \times I \to A$是弱等价，则称$A \times I$是柱对象(cylinder object).

同样地，如上定义的左同伦是非常好的左同伦，这因为分解的对象$A \times I$是非常好的柱对象；当分解的对象$A \times I$是好的柱对象或者柱对象时，相应的左同伦被称为好的左同伦和左同伦.我们始终用记号$f \simeq_l g$表示态射f与g左同伦.

按定义，存在交换图

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "\iota_0"] \\ A \arrow[r, "\iota_1"] & A\coprod A, \end{tikzcd}$$

与i_0+i_1的复合给出了$A \rightrightarrows A\coprod A \to A\times I$，两个态射分别记为$i_0, i_1$.

> **引理 2.7.** *若A是模型范畴$\mathcal{M}$中的余纤维对象，$A\times I$是一个好的柱对象，那么$i_0, i_1 : A \to A\times I$是零调余纤维.*

证明. 根据假设，交换图中

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & A \arrow[d, "\iota_0"] \\ A \arrow[r, "\iota_1"] & A\coprod A, \end{tikzcd}$$

$\emptyset \to A$是余纤维，上图中的ι_0, ι_1都是余纤维，而$A\times I$是好的柱对象，i_0+i_1也是余纤维，于是$i_0, i_1 : A \to A\times I$是余纤维的复合，因此也是余纤维.

另一方面，复合$A \xrightarrow{\iota_0} A\coprod A \xrightarrow{i_0+i_1} A\times I \to A = A \xrightarrow{\iota_0} A\coprod A \xrightarrow{\nabla} A = \mathrm{id}$，注意到$A\times I \to A$是弱等价，由MC2)，$i_0 : A \to A\times I$是零调余纤维.对$i_1$的证明完全相同. □

引理直接说明了若$f \simeq_l g$，那么f是弱等价当且仅当g是弱等价.这是因为，$H\circ i_0 : A \to A\coprod A \to A\times I = A \to A\coprod A \to B = f$，同理$H\circ i_1 = g$，而引理说明$i_0, i_1$都是弱等价，因此按照MC2)，$f$是弱等价当且仅当$H$是弱等价，当且仅当$g$是弱等价.

> **引理 2.8.** *若态射$f \simeq_l g : A \to X$，那么存在好的左同伦$H : f \Rightarrow g$.如果X还是纤维对象，那么存在非常好的左同伦$H : f \Rightarrow g$.*

证明. 设$H : A\times I \to X$是左同伦$f \simeq_l g$，根据MC5)态射$A\coprod A \xrightarrow{i_0+i_1} A\times I$有分解

$$\begin{tikzcd} A\coprod A \arrow[d, hook, "j_0+j_1"'] \arrow[dr, "i_0+i_1"] \arrow[drr, "\nabla"] & & \\ A\times J \arrow[r, two heads, "\sim"] & A\times I \arrow[r, "\sim"] & A, \end{tikzcd}$$

其中j_0+j_1是余纤维，因此$A\times J$是一个好的柱对象（$A\times I \to A$不一定是纤维），因此

$$f+g = H\circ(i_0+i_1) = H\circ(A\times J \to A\times I)\circ(j_0+j_1),$$

即$H\circ(A\times J \to A\times I)$是一个好的同伦.

再假设X是纤维对象，根据前一部分的证明假定$H : f \Rightarrow g$是一个好的左同伦$A\times I \to X$.由MC5)，存在$A\times I \to A$的分解

$$\begin{tikzcd} A\coprod A \arrow[d, hook, "i_0+i_1"'] \arrow[dr, "\nabla"] & \\ A\times I \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, hook, "j"'] & A, \\ A\times J \arrow[ur, "\sim"'] & \end{tikzcd}$$

其中$j:A\times I\to A\times J$是余纤维，$A\times J\to A$是零调纤维，MC2)说明j也是弱等价.记$j_0+j_1=j\circ(i_0+i_1)$，因此$A\times J$是一个很好的柱对象.考虑交换图

$$\begin{tikzcd} A\times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "j"] & X \arrow[d] \\ A\times J \arrow[r] \arrow[ur, dashed] & \{*\}, \end{tikzcd}$$

MC4)说明存在提升$A\times J \dashrightarrow X$，这即是我们想要的同伦. □

引理2.8的前半部分说明对于模型范畴，存在左同伦$H:f\Rightarrow g$当且仅当存在好的左同伦$H':f\Rightarrow g$，左同伦关系完全可以用好的左同伦的存在性来定义.但是左（对偶地，右）同伦不一定必须要在模型范畴上定义，在其他情况下引理2.8并不正确.

命题 2.4. *给定$\mathcal{M}$中的纤维对象X和$f\simeq_l g:B\to X$，$h:A\to B$是任意态射，那么$f\circ h\simeq_l g\circ h$.*

证明. 假设$H:B\times J\to X$是非常好的左同伦$f\Rightarrow g$，其中$B\times J$是一个非常好的柱对象.取A的一个好的柱对象$A\times I$，那么有交换图

$$\begin{tikzcd} A\coprod A \arrow[r, "h\coprod h"] \arrow[d] & B\coprod B \arrow[r] & B\times J \arrow[d] \\ A\times I \arrow[r] \arrow[urr, dashed] & A \arrow[r, "h"] & B, \end{tikzcd}$$

根据MC4)存在提升$K:A\times I\dashrightarrow B\times J$，于是交换性说明态射$H\circ K:A\times I\to B\times J\to X$满足

$$(H\circ K)\circ i_0=H\circ j_0=f,\ (H\circ K)\circ i_1=H\circ j_1=g,$$

是所要的同伦. □

命题 2.5. *若A是$\mathcal{M}$中的余纤维对象，那么$\simeq_l$是$\hom_{\mathcal{M}}(A,X)$上的等价关系.*

证明. 自反性：由于A是自身的柱对象，于是交换图

$$\begin{tikzcd} A\coprod A \arrow[d, hook, "\nabla"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

给出了想要的同伦.

对称性：考虑$\iota_1+\iota_0: A\coprod A\to A\coprod A$（即换序态射），注意到$(f+g)(\iota_1+\iota_0)=g+f$，这说明若$f\simeq_l g$那么$g\simeq_l f$.

传递性：假设$f\simeq_l g, g\simeq_l h$，取定好的同伦$H: A\times I\to X, K: A\times J\to X$（即$H: f\Rightarrow g$和$K: g\Rightarrow h$），考虑推出图

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "j_0"'] & A\times I \arrow[d, "i"] \\
A\times J \arrow[r, "j"] & A\times IJ
\end{tikzcd}$$

（选择i_1, j_0的原因是二者与相应同伦的复合都是g），由引理2.7，i_1, j_0都是零调余纤维，再根据命题2.3，$A\to A\times IJ$是零调余纤维.另一方面，$A\xrightarrow{i_1} A\times I\xrightarrow{\sim} A = A\xrightarrow{j_0} A\times J\xrightarrow{\sim} A=\mathrm{id}_A$，根据推出的泛性质

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "j_0"'] & A\times I \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, two heads, "\sim"] & \\
A\times J \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, two heads, "\sim"'] & A\times IJ \arrow[dr, dashed] & \\
 & & A
\end{tikzcd}$$

存在$A\times IJ\dashrightarrow A$，由MC2)这是一个弱等价.同时，习题2.5说明$i_1+j_0: A\coprod A\to A\times IJ$是零调余纤维，因此$A\times IJ$是一个好的柱对象.再次根据推出的泛性质

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "j_0"'] & A\times I \arrow[d, "i"] \arrow[ddr, bend left, two heads, "H"] & \\
A\times J \arrow[r, "j"] \arrow[drr, bend right, two heads, "K"'] & A\times IJ \arrow[dr, dashed, "HK"] & \\
 & & X
\end{tikzcd}$$

存在由同伦H, K诱导的态射$HK: A\times IJ\to X$，注意到

$$HK\circ(i\circ i_0)=(HK\circ i)\circ i_0=H\circ i_0=f$$

且

$$HK\circ(j\circ j_1)=(HK\circ j)\circ j_1=H\circ j_1=h,$$

这就是我们想要的同伦$HK: f\Rightarrow h$. □

以上的结果提示，当A是余纤维对象的时候，可以定义商集$[A,X]_l:=\hom_{\mathcal{M}}(A,X)/\simeq_l$（或记为$\pi^l(A,X)$），它是$\hom_{\mathcal{M}}(A,X)$中所有等价类的全体.当$A$不是余纤维对象的时候，也可以定义$[A,X]_l$是由左同伦**生成**的等价类的全体.

引理 2.9. 给定模型范畴$\mathcal{M}$中的余纤维对象A，$p : E \to B$是零调纤维，那么

$$\begin{aligned} p_* : [A, E]_l &\to [A, B]_l \\ [f] &\mapsto [p \circ f] \end{aligned}$$

给出了集合间的双射.

证明. 首先验证映射是良定义的.给定$f, g : A \to E$，$H : f \Rightarrow g$是左同伦$A \times I \to E$，那么$p \circ H : p \circ f \Rightarrow p \circ g$是左同伦$A \times I \to E \to B$，因此$[p \circ f] = [p \circ g]$.

接下来验证p_*是满射.取定$[h] \in [A, B]_l$，那么有交换图

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\ A \arrow[r, "h"] & B, \end{tikzcd}$$

MC4)说明存在提升$f : A \to E$，交换性说明$p \circ f = h$，即$[h] = [p \circ f] = p_*([f])$.

最后说明p_*是单射.假设$f, g \in \hom_{\mathcal{M}}(A, E)$满足$p_*(f) = p_*(g)$，于是可以找到（好的）左同伦$H : p \circ f \Rightarrow p \circ g$，于是有交换图

$$\begin{tikzcd} A \coprod A \arrow[r, "f+g"] \arrow[d] & E \arrow[d, two heads, "p"] \\ A \times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed] & B, \end{tikzcd}$$

根据MC4)存在提升$K : A \times I \dashrightarrow E$，这即是要找到同伦$K : f \Rightarrow g$. □

命题 2.6. 给定模型范畴$\mathcal{M}$中纤维对象X，那么$\mathcal{M}$中的复合诱导了映射

$$\begin{aligned} [A, B]_l \times [B, X]_l &\to [A, X]_l \\ ([f], [g]) &\mapsto [g \circ f]. \end{aligned}$$

证明. 我们这里并未假定B是余纤维的，因此$[B, X]_l$中的等价关系并不完全由左同伦给出.但是，只需要证明若$f \simeq_l h : A \to B$且$g \simeq_l k : B \to X$，那么$g \circ f$和$k \circ h$是同一等价类即可.由命题2.4，$g \circ h \simeq_l k \circ h$.另一方面，设$H : f \Rightarrow h$是给定的左同伦，那么$g \circ H : A \times I \to B \to X$给出了同伦$g \circ h \simeq_l g \circ f$. □

对偶地

定义. 设$\mathcal{M}$是模型范畴，B是$\mathcal{M}$中的对象.于是对角线$\Delta : B \to B \prod B$可以分解为

$$\begin{tikzcd} & B^I \arrow[d, two heads, "(p_0, p_1)"] \\ B \arrow[ur, hook, "\sim"] \arrow[r, "\Delta"] & B \prod B, \end{tikzcd}$$

其中$B \to B^I$是零调余纤维，$(p_0, p_1) : B^I \twoheadrightarrow B \prod B$是纤维，称$B^I$是对象$B$的路径对象(path object).给定两个态射$f, g : A \rightrightarrows B$，若存在$A$到$B$的路径对象的态射$H$满足图

$$\begin{tikzcd} & B^I \arrow[d, two heads, "(p_0,p_1)"] \\ A \arrow[ur, "H"] \arrow[r, "(f,g)"'] & B \prod B, \end{tikzcd}$$

交换，则称f右同伦于g，H是f, g的右同伦(right homotopy).

相应地路径对象也有对偶的性质，也有好的和非常好的右同伦，也可以定义$[A, X]_r$.我们这里不再罗列，它们的证明也与之前关于柱对象和左同伦的证明相同.然而，这里我们更愿意讨论左同伦和右同伦之间的关系：

命题 2.7. *给定模型范畴$\mathcal{M}$中的态射$f, g : A \to X$，那么*

1. *若A是余纤维对象且$f \simeq_l g$，那么$f \simeq_r g$，*
2. *若A是纤维对象且$f \simeq_r g$，那么$f \simeq_l g$.*

证明. 由于两个结论互为对偶，我们这里只证明1.设$H : A \times I \to X$是给定的左同伦，且$A \times I$是一个好的柱对象满足复合$A \coprod A \xrightarrow{i_0+i_1} A \times I \xrightarrow{j} A$是余对角态射$\nabla : A \coprod A \to A$.于是此时$i_0 : A \to A \times I$是零调余纤维.取定$X$的一个好的路径对象$X^I$，记$\Delta : X \to X \prod X$的分解为$X \xrightarrow{q} X^I \xrightarrow{(p_0,p_1)} X \prod X$，于是MC4)说明交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "q\circ f"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & X^I \arrow[d, two heads, "(p_0,p_1)"] \\ A \times I \arrow[ur, dashed, "K"] \arrow[r, "(f\circ j,H)"'] & X \prod X \end{tikzcd}$$

存在提升$K : A \times I \dashrightarrow X^I$，这样只要说明$K \circ i_1$是需要的右同伦即可.注意到

$$p_0 \circ (K \circ i_1) = (p_0 \circ K) \circ i_0 = f \circ j \circ i_1 = f$$

且

$$p_1 \circ (K \circ i_1) = (p_1 \circ K) \circ i_1 = H \circ i_1 = g,$$

这完成了验证. □

通常情况下，同一组态射的不同同伦可能由不同的柱对象给出，但命题2.7事实上说明

推论 2.7.1. *命题2.7中的结论等价于*

特别地，当模型范畴$\mathcal{M}$中的对象X, Y同时都是纤维对象和余纤维对象的时候，左右同伦都给出$\hom_{\mathcal{M}}(X, Y)$上的等价关系，且$f, g : X \to Y$的左同伦等价等价于右同伦等价.此时，记同伦等价为$f \simeq g$，$[X, Y] := \hom_{\mathcal{M}}(X, Y)/\simeq$.

例 2.4. 在范畴**Top**中，

下面的定理可以看作是抽象版本的Whitehead定理，在范畴**Top**中恰是经典的Whitehead定理：

> **定理 2.8.** 设$f:A\to B$是模型范畴$\mathcal{M}$中的态射，且A,B同时是纤维对象和余纤维对象，那么f是弱等价当且仅当f存在同伦逆，即存在$g:B\to A$满足$g\circ f\simeq \mathrm{id}_A, f\circ g\simeq \mathrm{id}_B$.

证明. 首先假设$f:A\to B$是弱等价.于是MC5)说明存在分解

$$A\xrightarrow{i}X\xrightarrow{p}B,$$

其中$i:A\to X$是零调余纤维，$p:X\to B$是纤维，那么MC2)说明p也是弱等价.由于A是纤维对象，交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, hook, "i"'] & A \arrow[d] \\ X \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "r"] & \{*\} \end{tikzcd}$$

存在提升$r:X\dashrightarrow A$满足$r\circ i=\mathrm{id}_A$.由引理2.9的对偶，i给出了双射

$$\begin{aligned} i^*:[X,X]_r&\to[A,X]_r\\ [g]&\mapsto[g\circ i], \end{aligned}$$

同时$i^*([i\circ r])=[i\circ r\circ i]=[i]$，于是双射说明$[i\circ r]=[\mathrm{id}]$.对偶地由于$B$是余纤维对象，

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[ur, dashed, "s"] & B, \end{tikzcd}$$

存在提升$s:B\dashrightarrow X$满足$p\circ s=\mathrm{id}_B$.由引理2.9，p给出了双射

$$\begin{aligned} p_*:[B,X]_l&\to[B,B]_l\\ [f]&\mapsto[p\circ f], \end{aligned}$$

同时$p_*([s\circ p])=[p\circ s\circ p]=[p]$，于是双射说明$[s\circ p]=[\mathrm{id}_X]$.这样，取$g:B\to A=r\circ s$，那么

$$g\circ f=(r\circ s)\circ(p\circ i)=r\circ(s\circ p)\circ i\simeq r\circ i=\mathrm{id}_A$$

且

$$f\circ g=(p\circ i)\circ(r\circ s)=p\circ(i\circ r)\circ s\simeq p\circ s=\mathrm{id}_B$$

于是g是f的同伦逆.

另一方面，假定$f:A\to B$存在同伦逆$g:B\to A$，$H:A\times I\to B$是（左）同伦$f\circ g\simeq_l \mathrm{id}_B$.再次由MC5)说明存在分解

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[d] \arrow[dr] & & \\ A \arrow[r, hook, "i"] & X \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[dr] & B \arrow[d] \\ & & \{*\}, \end{tikzcd}$$

其中$i : A \to X$是零调余纤维，$p : X \to B$是纤维，那么命题2.3说明X也同时是纤维对象和余纤维对象，并且根据MC2)只需要说明p是弱等价.根据MC4)交换图

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i\circ g"] \arrow[d, hook, "i_0"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B\times I \arrow[r, "H"] \arrow[ur, dashed, "K"] & B \end{tikzcd}$$

存在提升$K : B \times I \to X$.令$s := K \circ i_1 : B \to B \times I \to X$，那么$p \circ s = p \circ K \circ i_1 = H \circ i_1 = \mathrm{id}_B$.注意到$i : A \to X$是零调余纤维，前面的讨论说明它有同伦逆$r : X \to A$，因此

$$p = p \circ \mathrm{id}_X \simeq p \circ i \circ r = f \circ r,$$

同时$K : B \times I \to X$给出了同伦$i \circ g \simeq_l s$，合起来

$$s \circ p \simeq i \circ g \circ p \simeq i \circ g \circ f \circ r \simeq i \circ \mathrm{id}_A \circ r \simeq \mathrm{id}_X.$$

根据引理2.7之后的讨论，$s \circ p$是一个弱等价.进而交换图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "p"] & X \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "s\circ p"] & X \arrow[d, "p"] \\ B \arrow[r, "s"] & X \arrow[r, "p"] & B \end{tikzcd}$$

说明p是$s \circ p$的收缩，因此p也是弱等价. □

2.3.3 Quillen对

引理 2.10. 给定模型范畴$\mathcal{M}, \mathcal{N}$和伴随函子对

$$F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : G,$$

则如下条件等价：

1. 函子F将$\mathcal{M}$中的余纤维映为$\mathcal{N}$中的余纤维，将$\mathcal{M}$中的零调余纤维映为$\mathcal{N}$中的零调余纤维；
2. 函子G将$\mathcal{N}$中的纤维映为$\mathcal{M}$中的纤维，将$\mathcal{N}$中的零调纤维映为$\mathcal{M}$中的零调纤维；
3. 函子F将$\mathcal{M}$中的余纤维映为$\mathcal{N}$中的余纤维，G将$\mathcal{N}$中的纤维映为$\mathcal{M}$中的纤维.

证明. 我们只证明$1 \Longrightarrow 2$，其余的证明是类似的.

给定$\mathcal{N}$中的纤维$p : E \to B$，考虑$\mathcal{M}$中的交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f^\flat"] \arrow[d, hook, "i"'] & G(E) \arrow[d, "G(p)"] \\ X \arrow[r, "g^\flat"] & G(B), \end{tikzcd}$$

其中i是零调余纤维，由于F, G是伴随，这对应了$\mathcal{N}$中的交换图

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f^\sharp"] \arrow[d, hook, "F(i)"'] & E \arrow[d, "p"] \\ F(X) \arrow[r, "g^\sharp"] & B. \end{tikzcd}$$

根据假设，$F(i)$是$\mathcal{N}$中的零调余纤维，因此存在提升

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "f^\sharp"] \arrow[d, hook, "F(i)"'] & E \arrow[d, "p"] \\ F(X) \arrow[r, "g^\sharp"] \arrow[ur, dashed, "l^\sharp"] & B, \end{tikzcd}$$

再次根据伴随得到$\mathcal{M}$中的交换图

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f^\flat"] \arrow[d, hook, "i"'] & G(E) \arrow[d, "G(p)"] \\ X \arrow[r, "g^\flat"] \arrow[ur, dashed, "l^\flat"] & G(B), \end{tikzcd}$$

根据引理2.6，$G(p)$是纤维. □

定义. 设$\mathcal{M}, \mathcal{N}$是模型范畴，若伴随函子对

$$F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : G$$

满足引理2.10中的任意条件，则称(F, G)是Quillen对(Quillen pair).

引理 2.11. *给定Quillen对$F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : G$，那么若$f : A \to B$是$\mathcal{M}$中余纤维对象之间的弱等价，那么$F(f)$是$\mathcal{N}$中的弱等价，对偶地若$g : X \to Y$是$\mathcal{N}$中纤维对象之间的弱等价，那么$G(g)$是$\mathcal{M}$中的弱等价.*

证明. □

例 2.5. 考虑函子对

$$|-| : s\mathbf{Set} \rightleftarrows \mathbf{Top} : S$$

定义. 给定模型范畴$\mathcal{M}, \mathcal{N}$和伴随函子对

$$F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : G$$

是Quillen对，A是$\mathcal{M}$中的余纤维对象，X是$\mathcal{N}$中的纤维对象，且$\mathcal{M}$中的态射

$$f^{\#} : A \to G(X)$$

是弱等价当且仅当它的伴随

$$f^\flat : F(A) \to X$$

是弱等价，则称(F, G)是Quillen等价(Quillen equivalence).

2.4 链复形

任意给定一个Abel范畴$\mathcal{A}$，经典的同调代数给出了关于$\mathbf{Com}_{\geq 0}(\mathcal{A})$的结果，

定理 2.9. *在范畴$\mathbf{Com}_{\geq 0}(\mathcal{A})$上存在（投射）模型结构满足*

1. *弱等价定义为拟同构，*
2. *余纤维$\{i_n : X_n \to Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$定义为对任意的$n$，$f_n$是单同态且余核是投射对象，*
3. *纤维$\{p_n : X_n \to Y_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$定义为对任意的$n$，$f_n$是满同态.*

例 2.6. 我们考虑这个模型范畴的左同伦.

2.5 单纯集

定理 2.10 (Quillen)**.** *在范畴s**Set**上存在模型范畴结构满足*

1. *弱等价定义为Quillen弱等价，*
2. *Cof包含所有的单态射，即每层都是单态射，*
3. *Fib包含所有的Kan纤维化.*

注意到定理2.10所给的纤维对象恰好是Kan复形.

定理 2.11. *定理2.10所给的模型结构是余纤维生成的.*

定义.

定理 2.12 (Joyal). *在范畴***sSet***上存在模型范畴结构满足*

1. *弱等价定义为Joyal弱等价,*
2. Cof*包含所有的单态射，即每层都是单态射,*
3. Fib*包含所有的.*

注意到定理2.12所给的纤维对象恰好是拟范畴.

2.6 同伦范畴和导出函子

2.6.1 同伦范畴

引理 2.12. *模型范畴$\mathcal{M}$中态射$f: X \to Y$的余纤维提升$Qf: QX \to QY$左同伦下或者右同伦下只依赖于f，并且Qf是弱等价当且仅当f是弱等价.若Y还是纤维对象，则余纤维提升$Qf: QX \to QY$左同伦下或者右同伦下只依赖于f的***同伦等价类***.*

证明. 考虑Qf的定义图

$$\begin{tikzcd} \emptyset \arrow[rr] \arrow[d] & & QY \arrow[d, "p_Y"] \\ QX \arrow[r, "p_X"] \arrow[urr, dashed, "Qf"] & X \arrow[r, "f"] & Y, \end{tikzcd}$$

引理2.9说明$p_Y: QY \to Y$诱导了双射

$$\begin{aligned} (p_Y)_*: [QX, QY]_l &\to [QX, Y]_l \\ [Qf] &\mapsto [p_Y \circ Qf] = [f \circ p_X], \end{aligned}$$

这意味着$[Qf]$只依赖于f.由于QX是余纤维对象，再根据命题2.7，Qf的左同伦类是右同伦类，于是同伦类仅依赖于f.

弱等价这部分是MC2)的直接推论.最后根据命题2.6，当Y是纤维对象的时候，$(p_Y)_*([Qf]) = [f \circ p_X] = [f] \cdot [p_X]$，只取决于$[f]$. $\square$

对偶地，纤维替代所给出的纤维提升也是“同伦下唯一的”.

引理2.12说明id_X的提升$Q\mathrm{id}_X$左（右）同伦于id_{QX}，同样地考虑$f: X \to Y, g: Y \to Z$，那么有$Q(g \circ f): QX \to QZ$和$Qg \circ Qf: QX \to QY \to QZ$，引理同样说明了$Q(g \circ f) \simeq Qg \circ Qf$.

另一方面，当取到X的余纤维替代QX后，还可以进一步找到QX的纤维替代RQX，相应地有提升RQf.值得注意的是，不同的纤维替代和余纤维替代并不改变对应的提升：

引理 2.13. 给定模型范畴$\mathcal{M}$，设Q_1X和Q_2X是X的余纤维替代，Q_1Y和Q_2Y是Y的余纤维替代，Q_1Z和Q_2Z是Z的余纤维替代，那么存在$t_X : Q_1X \to Q_2X$，对任意$f : X \to Y, g : Y \to Z$，下图

$$\begin{tikzcd}
Q_2X \arrow[r, "Q_2f"] \arrow[d, "t_X"] & Q_2Y \arrow[r, "Q_2g"] \arrow[d, "t_Y"] & Q_2Z \arrow[d, "t_Z"] \\
Q_1X \arrow[r, "Q_1f"] \arrow[d] & Q_1Y \arrow[r, "Q_1g"] \arrow[d] & Q_1Z \arrow[d] \\
X \arrow[r, "f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z
\end{tikzcd}$$

交换，t_X与$Q_1X \to X$的复合恰好是$Q_2X \to X$，并且这诱导了双射

$$[Q_2X, Q_2Y]_l \to [Q_1X, Q_1Y]_l.$$

证明. 考虑交换图

$$\begin{tikzcd}
\emptyset \arrow[rr] \arrow[d] & & Q_2X \arrow[d, "p_2"] \\
Q_1X \arrow[r, "p_1"] \arrow[urr, dashed, "t_X"] & X \arrow[r, "\mathrm{id}_X"] & X,
\end{tikzcd}$$

于是MC4)说明存在提升$t_X : Q_1X \to Q_2X$，且t_X与$Q_1X \to X$的复合恰好是$Q_2X \to X$.由于p_1, p_2同时都是零调余纤维，根据MC2)，t_X是弱等价. □

引理2.13和它的对偶说明给定模型范畴中的对象X, Y，集合$[RQX, RQY]$不依赖于纤维替代和余纤维替代的选取，并且不同选取之间的同构与复合是相容的，因此余纤维替代和纤维替代的选择并不影响余纤维和纤维提升，不影响同伦等价类及其复合，因此当选定对象的余纤维和纤维提升后，提升在同伦等价类下有比较好的函子性.在之后的讨论中，给定对象A, X，我们用QA表示A的选定的余纤维提升，RX表示X的选定的纤维提升.若A是余纤维对象，取$QA = A$，对偶地若X是纤维对象取$RX = X$，并且$R\mathrm{id}_A = \mathrm{id}_{RA}, Q\mathrm{id}_X = \mathrm{id}_{QX}$.

定义. 给定模型范畴$\mathcal{M}$，它对应的同伦范畴(homotopy category)（或称为导出范畴(derived category)）$\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$满足

1. $\mathrm{ob}(\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}) = \mathrm{ob}\,\mathcal{M}$，
2. $\hom_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(X, Y) = [RQX, RQY]$，
3. 复合由$\mathcal{M}$中的复合诱导：

$$\begin{aligned}
[Y, Z] \times [X, Y] &\to [X, Z] \\
([g], [f]) &\mapsto [g \circ f].
\end{aligned}$$

引理2.13说明如此定义的$\hom_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(X,Y)$与余纤维替代和纤维替代的选取无关，命题2.6说明这是一个范畴.同伦范畴的构造事实上使我们可以非常方便地讨论原来模型范畴中的弱等价：

命题 2.13. 给定模型范畴$\mathcal{M}$，存在自然的函子$\gamma:\mathcal{M}\to\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$，满足任意态射$f:A\to B$是弱等价当且仅当$\gamma(f)$是$\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$中的同构.

证明. 如下定义

$$\begin{aligned}\gamma:\mathcal{M}&\to\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}\\ X&\mapsto X\\ (f:X\to Y)&\mapsto[RQf]\in[RQX,RQY],\end{aligned}$$

我们需要验证这是一个函子.按照前一段关于替代选取的讨论，$\gamma(\mathrm{id}_X)=\mathrm{id}_{\gamma(X)}$，

若$f:X\to Y$是$\mathcal{M}$中的弱等价，那么引理2.12说明$RQf:RQX\to RQY$也是弱等价，于是Whitehead定理（定理2.8）说明RQf存在同伦逆，这意味着$\gamma(f)=[RQf]$在$[RQX,RQY]$中的逆存在，因此是同构.反过来$\gamma(f)$可逆等价于RQf的同伦逆存在，如上相同使用Whitehead定理和引理2.12，f是一个弱等价. □

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & QX \arrow[d, "Qf"] & RQX \arrow[l] \arrow[d, "RQf"] \\ Y \arrow[r] & QY & RQY \arrow[l] \end{tikzcd}$$

引理 2.14. 给定模型范畴$\mathcal{M}$和函子$F:\mathcal{M}\to\mathcal{D}$，且$F$将$\mathcal{M}$中的弱等价映为$\mathcal{D}$中的同构，那么若$\mathcal{M}$中的态射$f,g:A\to B$满足$f\simeq_l g$或$f\simeq_r g$，则$F(f)=F(g)$.

证明. 我们这里只证明$f\simeq_l g$的情形，假定$H:A\times I\to X$是一个好的左同伦$H:f\Rightarrow g$，交换图

$$\begin{tikzcd} A\coprod A \arrow[d, hook, "i_0+i_1"'] \arrow[dr, "\nabla"] & \\ A\times I \arrow[r, "w", "\sim"'] & A \end{tikzcd}$$

给出$w\circ i_0=w\circ i_1=\mathrm{id}_A$，因此$F(w)\circ F(i_0)=F(w)\circ F(i_1)$.注意到$w$是弱等价，因此$F(w)$是同构因此$F(i_0)=F(i_1)$.于是

$$F(f)=F(H\circ i_0)=F(H)\circ F(i_0)=F(H)\circ F(i_1)=F(H\circ i_1)=F(g),$$

即是要证的. □

命题 2.14. 给定模型范畴$\mathcal{M}$，同伦范畴中的态射集$\hom_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(X,Y)$由$\gamma$的像和弱等价的像的形式逆生成.

特别地，给定余纤维对象A和纤维对象X，那么函子γ诱导了满射$\hom_{\mathcal{M}}(A,X)\to\hom_{\mathcal{M}}(A,X)$，并且这诱导了$[A,X]\cong\hom_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(A,X)$.

证明. 考虑

$$\begin{tikzcd} & & RQX \arrow[dr] & \\ \emptyset \arrow[r] & QX \arrow[ur, "i_{QX}"] \arrow[dr, "p_X"'] & & \{*\}, \\ & & X \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

由于i_{QX}, p_X都是弱等价，$\gamma(i_{QX}) \circ \gamma(p_X)^{-1}$给出了$\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$中的同构$X \xrightarrow{\cong} RQX$.于是，对于任意的对象$X, Y \in \mathrm{ob}\,\mathcal{M}$，函子$\gamma$诱导了满射

$$\hom_{\mathcal{M}}(X, Y) \to \hom_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(X, Y),$$

于是任意$\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$中的态射$f : X \to Y$，存在$g \in \hom_{\mathcal{M}}(X, Y)$使得

$$f = \gamma(p_Y)\gamma(i_{QY})^{-1}\gamma(g)\gamma(i_{QX})\gamma(p_X)^{-1},$$

这是第一部分.

根据命题2.13和引理2.14，函子γ诱导了映射$[A, X] \to \hom_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(A, X)$，且有交换图

$$\begin{tikzcd} {[RA, QX]} \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & {[A, X]} \arrow[d, "\gamma"] \\ \hom_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(RA, QX) \arrow[r] & \hom_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(A, X), \end{tikzcd}$$

其中水平的映射由(i_A, p_X)诱导.之前的证明说明了下层的映射是双射，根据引理2.9，上层的映射是双射，左侧的γ事实上是定义，因此右侧是双射. $\square$

推论 2.14.1. *设$F, G : \mathrm{Ho}\,\mathcal{M} \to \mathcal{D}$是两个给定的函子，$\eta : F \circ \gamma \Rightarrow G \circ \gamma$是自然变换，那么$\eta$也给出了自然变换$F \Rightarrow G$.*

证明. $\square$

下面的定理

定理 2.15. *给定模型范畴$\mathcal{M}$和函子$F : \mathcal{M} \to \mathcal{D}$，若$F$将$\mathcal{M}$中的弱等价映为$\mathcal{D}$中的同构，那么存在唯一的函子$\tilde{F} : \mathrm{Ho}\,\mathcal{M} \to \mathcal{D}$使得$F = \tilde{F} \circ \gamma$.*

证明. 首先证明唯一性.由于$\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$与$\mathcal{M}$有相同的对象，因此在对象层面上$\tilde{F}$与F相同.注意到命题2.14说明任意$f \in \hom_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(X, Y)$可以写成

$$f = \gamma(p_Y)\gamma(i_{QY})^{-1}\gamma(g)\gamma(i_{QX})\gamma(p_X)^{-1},$$

其中$g \in \hom_{\mathcal{M}}(X, Y)$满足$RQg = f$，那么

$$\begin{aligned} \tilde{F}(f) &= \tilde{F}(\gamma(p_Y)\gamma(i_{QY})^{-1}\gamma(g)\gamma(i_{QX})\gamma(p_X)^{-1}) \\ &= \tilde{F}(\gamma(p_Y))\tilde{F}(\gamma(i_{QY})^{-1})\tilde{F}(\gamma(g))\tilde{F}(\gamma(i_{QX}))\tilde{F}(\gamma(p_X)^{-1}) \\ &= F(p_Y)F(i_{QY})^{-1}F(g)F(i_{QX})F(p_X)^{-1}, \end{aligned}$$

因此$\tilde{F}$是唯一确定的.

再来证明存在性.如上唯一性的证明给出了一个构造，还需要证明这样是良定义的并且给出一个函子.注意到引理2.12及其对偶说明f仅取决于g的同伦等价类，并且引理2.14说明相同的等价类在F下给出相同的像，因此如上是良定义的.若$f = \mathrm{id}_A$，取$g = \mathrm{id}_A$，那么显然$\tilde{F}(f) = F(p_A)F(i_{QA})^{-1}F(g)F(i_{QA})F(p_A)^{-1} = \mathrm{id}_A$.给定$A \xrightarrow{f_1} B \xrightarrow{f_2} C$，引理2.13说明存在$A \xrightarrow{g_1} B \xrightarrow{g_2} C$使得$RQg_1 = f_1, RQg_2 = f_2$.于是

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(f_2 \circ f_1) &= F(p_C)F(i_{QC})^{-1}F(g_2 \circ g_1)F(i_{QA})F(p_A)^{-1} \\
&= F(p_C)F(i_{QC})^{-1}F(g_2)F(i_{QB})F(p_B)^{-1}F(p_B)F(i_{QB})^{-1}F(g_1)F(i_{QA})F(p_A)^{-1} \\
&= \tilde{F}(f_2) \circ \tilde{F}(f_1),
\end{aligned}$$

这样$\tilde{F}$是一个函子. □

2.6.2 导出函子

定义. 给定模型范畴$\mathcal{M}$和范畴间的函子$F : \mathcal{M} \to \mathcal{D}$，若存在函子$LF : \mathrm{Ho}\,\mathcal{M} \to \mathcal{N}$和自然态射$\eta : LF \circ \gamma_{\mathcal{M}} \Rightarrow F$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \arrow[rr, "F"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{M}}"'] & & \mathcal{D} \\
\mathrm{Ho}\,\mathcal{M} \arrow[urr, dashed, "LF"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\epsilon"] & &
\end{tikzcd}$$

满足对任意的函子$H : \mathrm{Ho}\,\mathcal{M} \to \mathcal{N}$和自然变换$\xi : H \circ \gamma_{\mathcal{M}} \Rightarrow F$，存在唯一的$\delta : H \Rightarrow LF$，使得下图

$$\begin{tikzcd}
H \circ \gamma_{\mathcal{M}} \arrow[rr, Rightarrow, "\xi"] \arrow[dr, Rightarrow, dashed, "\delta\circ\gamma_{\mathcal{M}}"'] & & F \\
& LF \circ \gamma_{\mathcal{M}} \arrow[ur, Rightarrow, "\epsilon"'] &
\end{tikzcd}$$

交换，则称LF是函子F的导出函子(derived functor).

引理 2.15. 给定模型范畴$\mathcal{M}$和函子$F : \mathcal{M} \to \mathcal{D}$，满足对任意$\mathcal{M}$中余纤维对象间的零调余纤维被映为同构，那么对任意$\mathcal{M}$中的余纤维对象$A, B$和态射$f, g : A \to B$，若$f \simeq_r g$，则$F(f) = F(g)$.

证明. 根据引理2.8的对偶，存在右同伦$H : A \to B^I$满足B^I是一个非常好的道路对象，使得$H : f \Rightarrow g$.于是$c : B \hookrightarrow B^I$是一个零调余纤维，由于$B$是余纤维对象，$B^I$也是余纤维对象.这样，以上的假设说明$F(c)$是一个同构.注意到$p_0 \circ c = p_1 \circ c = \mathrm{id}_B$，因此$F(p_0) \circ F(c) = F(p_1) \circ F(c)$，消去$F(c)$后$F(p_0) = F(p_1)$，于是$F(f) = F(p_0 \circ H) = F(p_0) \circ F(H)) = F(p_1) \circ F(H) = F(p_1 \circ H) = F(g)$. □

命题 2.16. 给定模型范畴$\mathcal{M}$和函子$F : \mathcal{M} \to \mathcal{D}$，使得$F$将余纤维对象间的弱等价映为同构，那么$F$的导出函子$(LF, \eta)$存在，且对任意$\mathcal{M}$中的余纤维对象$A$，$\eta_A : LF(A) \to F(A)$是同构.

证明. 首先我们构造相应的导出函子. □

定义. 给定模型范畴间的函子$F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$，若存在函子$\mathbf{L}F:\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}\to\mathrm{Ho}\,\mathcal{N}$和自然态射$\eta:\mathbf{L}F\circ\gamma_{\mathcal{M}}\Rightarrow\gamma_{\mathcal{N}}\circ F$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{N} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{N}}"] \\ \mathrm{Ho}\,\mathcal{M} \arrow[r, dashed, "\mathbf{L}F"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\epsilon"] & \mathrm{Ho}\,\mathcal{N}, \end{tikzcd}$$

满足对任意的函子$H:\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}\to\mathrm{Ho}\,\mathcal{N}$和自然变换$\xi:H\circ\gamma_{\mathcal{M}}\Rightarrow\gamma_{\mathcal{N}}\circ F$，存在唯一的$\delta:H\Rightarrow\mathbf{L}F$，使得下图

$$\begin{tikzcd} H\circ\gamma_{\mathcal{M}} \arrow[rr, Rightarrow, "\xi"] \arrow[dr, Rightarrow, dashed, "\delta\gamma_{\mathcal{M}}"'] & & \gamma_{\mathcal{N}}\circ F \\ & \mathbf{L}F\circ\gamma_{\mathcal{M}} \arrow[ur, Rightarrow, "\epsilon"'] & \end{tikzcd}$$

交换，则称$\mathbf{L}F$是函子F的全导出函子(total derived functor).

事实上，导出函子是Kan扩张.

定理 2.17 (Quillen)**.** 给定*Quillen*对$F:\mathcal{M}\leftrightarrows\mathcal{N}:G$，那么$F$的左导出函子$\mathbf{L}F$和$G$的右导出函子$\mathbf{R}G$都存在，且

$$\mathbf{L}F:\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}\leftrightarrows\mathrm{Ho}\,\mathcal{N}:\mathbf{R}G$$

是伴随函子对.其中，对任意$X\in\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$和$f\in\hom_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}}(X,Y)$，

$$\mathbf{L}F(X)=\gamma F(QX),\ \mathbf{L}F(f)=\gamma F(Qf),$$

其中QX是X的余纤维消解，Qf是f的余纤维提升.

引理 2.16 (Brown)**.** 若模型范畴间的函子$F:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$将$\mathcal{M}$中余纤维对象间的零调余纤维映为弱等价，则$F$将纤维对象间的弱等价映为弱等价，此时$F$的全左导出函子$\mathbf{L}F$存在，且与定理2.17中的定义一致.

证明. □

命题 2.18. 给定左正规的模型范畴$\mathcal{M}$，$f:A\hookrightarrow X$是余纤维，且A是$\mathcal{M}$中的余纤维对象，那么对任意$g:A\to Y$，g沿f的同伦推出与g沿f的推出在$\mathrm{Ho}\,\mathcal{M}$中同构.

例 2.7.

第三章　单纯代数

3.1　单纯模

3.1.1　单纯模范畴

如同先前的定义，给定一个交换环R，一个单纯环是函子

$$A_* : \mathbf{\Delta}^\circ \to R - \mathbf{Algebras},$$

具体来说，这个函子给定了一族R代数$A_n = A([n])$，且存在R代数同态

$$d_i^{[n]} : A_n \to A_{n-1}$$

和

$$s_j^{[n]} : A_n \to A_{n+1}$$

满足相应的单纯关系.

例 3.1. 任意给定一个交换环R，我们有自然存在的单纯R代数$s(R)_*$，其中对任意n，$s(R)_n := R$，$d_i^{[n]} = s_j^{[n]} = \mathrm{id}_R$.

定义. 给定单纯代数A_*，则一个A_*模(A_*-module)是一个单纯对象M_*，其中$M([n])$是一个A_n模，存在同态

$$d_i^{[n]} : M_n \to M_{n-1}$$

和

$$s_j^{[n]} : M_n \to M_{n+1}$$

满足相应的单纯关系，且与A_*的单纯结构相容，具体说来，对于任意$a \in A_n$和$v \in V_n$，$d_i^{M_{[n]}}(av) = d_i^{A_{[n]}}(a)d_i^{M_{[n]}}(M)$且$s_j^{M_{[n]}}(av) = s_j^{A_{[n]}}(a)s_j^{M_{[n]}}(v)$.

例 3.2. 类似于例3.1，任意给定一个R模M，都存在自然的单纯$s(R)_*$模$S(M)_*$，其中对任意n，$s(V)_n := V$，$d_i^{[n]} = s_j^{[n]} = \mathrm{id}_M$.

例 3.3. 假设R是交换环，A是R代数（可能非交换），M是任意A双模，定义单纯模

$$C_n(A, M) := M \otimes_R A^{\otimes n},$$

满足面映射是

$$
\begin{aligned}
d_i^{[n]} &: C_n(A,M) \to C_{n-1}(A,M) \\
d_0(m\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n) &:= ma_1\otimes\cdots\otimes a_n \\
d_i(m\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n) &:= m\otimes a_1\otimes\cdots a_ia_{i+1}\otimes\cdots\otimes a_n \\
d_n(m\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n) &:= a_nm\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_{n-1},
\end{aligned}
$$

退化映射是

$$
\begin{aligned}
s_j^{[n]} &: C_n(A,M) \to C_{n+1}(A,M) \\
m\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_n &\mapsto m\otimes a_1\otimes\cdots\otimes a_j\otimes 1\otimes a_{j+1}\otimes\cdots\otimes a_n.
\end{aligned}
$$

我们略去它是单纯对象的验证，事实上，它是更一般结论的特例.

在同调代数中，这个单纯模给出的复形恰好是Hochschild复形，因而计算的是Hochschild同调.

3.1.2 单纯模的同伦群

考虑给定一个单纯$s(R)_*$模M_*，我们有一个R模复形$N(M_*)_\bullet$

$$
N(M_*)_n := \begin{cases} 0 & n\le 0 \\ \bigcap_{i=0}^{n-1}\operatorname{Ker} d_i^{[n]} & n\ge 1 \end{cases},
$$

且边缘映射$\partial_n := (-1)^n d_n^{[n]}$.这个复形称为$V_*$的正规化(normalization).

除了正规化还存在其他的方法，对一个给定的单纯$s(R)_*$模M_*，还可以构造一个对应的R模复形$M_\bullet$，满足$M_n = M_n$，边缘映射

$$
\partial_n := \sum_{i=0}^{n}(-1)^i d_i^{[n]}.
$$

虽然两种方式给出的链并不相同，但这两个链是拟等价的——它们具有相同的同调.今后为做区别，$\partial_\bullet$仅表示Moore复形的边缘算子.

引理 3.1. 设R是交换环，给定一个单纯$s(R)_*$模M_*，那么$(N(M_*)_\bullet, (-1)^n d_n^{[\bullet]})$构成链复形.

证明. 我们需要证明$d_n^{[n]}(N(M_*)_n)\subseteq N(M_*)_{n-1}$并且，$d_{n-1}^{[n-1]}\circ d_n^{[n]} = 0$.

一方面，对任意的$m\in N(M_*)_n$，

$$
d_i^{[n-1]}\circ d_0^{[n]}(m)
$$

另一方面，任取$m\in N(M_*)_n$，根据单纯等式1.2，

$$
d_0^{[n-1]}\circ d_0^{[n]}(x) = d_0^{[n-1]}\circ d_1^{[n]}(x) = 0,
$$

得证. □

引理 3.2. $N(M_*)_\bullet$是$M_\bullet$的子复形.

证明. 这只需要证明自然的嵌入映射$i_\bullet : N(M_*)_\bullet \to M_\bullet$是复形同态，即有交换图

$$\begin{tikzcd} N(M_*)_n \arrow[r, "d_0^{[n]}"] \arrow[d, "i_n"'] & N(M_*)_{n-1} \arrow[d, "i_{n-1}"] \\ M_n \arrow[r, "\partial_n"] & M_{n-1}. \end{tikzcd}$$

对任意的$x \in N(M_*)_n$，按定义$d_i^{[n]}(x) = 0$对$i = 1, \cdots, n$都成立，于是$\partial \circ i(x) = d_0^{[n]}(x)$，故交换图成立. □

练习 3.1. 记$N^k(M_*)_n := \bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker} d_i^{[n]}$（$k = 1, \cdots, n$）.求证若$x \in N^{k-1}(M_*)_n$，则$x - s_k d_k(x) \in N^k(M_*)_n$（$1 < k \leq n$）.

证明. 对任意$1 \leq i < k$，$d_i(x - s_k d_k(x)) = d_i(x) - d_i s_k d_k(x)$，单纯关系$d_i^{[n+1]} s_k^{[n]} = s_{k-1}^{[n-1]} d_i^{[n]}$和$d_i^{[n]} d_k^{[n+1]} = d_{k-1}^{[n]} d_i^{[n+1]} (i < k)$说明$d_i(x) - d_i s_k d_k(x) = -s_{k-1} d_{k-1} d_i(x) = 0$；另一方面，根据单纯关系$d_k^{[n+1]} s_k^{[n]} = \mathrm{id}^{[n]}$，$d_k(x - s_k d_k(x)) = d_k(x) - d_k s_k d_k(x) = d_k(x) - d_k(x) = 0$. □

引理 3.3. 记$D^k M_n := \sum_{j=1}^k s_j(M_{n-1})$和$N^k(M_*)_n := \bigcap_{i=1}^k \operatorname{Ker} d_i^{[n]}$，求证

$$D^k M_n \oplus N^k(M_*)_n = M_n$$

对任意$1 \leq k \leq n$都成立.

证明. 单纯关系$d_1^{[n+1]} s_1^{[n]} = \mathrm{id}^{[n]}$说明

$$\operatorname{Ker} d_1^{[n+1]} \oplus \operatorname{Im} s_1^{[n]} = M_{n+1},$$

注意到$\operatorname{Ker} d_1^{[n]} = N^n(M_*)_n$且$\operatorname{Im} s_1^{[n-1]} = D^n M_n$这就完成了$k = 1$情形的证明.

假设我们已经证明了$D^{k-1} M_n \oplus N^{k-1}(M_*)_n = M_n$，我们希望证明$D^k M_n \oplus N^k(M_*)_n = M_n$.一方面，单纯关系$d_k^{[n]} s_k^{[n-1]} = \mathrm{id}^{[n-1]}$意味着$s_k^{[n-1]}$是单态射，单纯关系$s_k s_j = s_j s_{k-1}$（$j < k$）意味着$s_k : M_{n-1}/D^{k-1} M_{n-1} \to M_n/D^{k-1} M_n$是良定义的，于是

$$0 \to M_{n-1}/D^{k-1} M_{n-1} \xrightarrow{s_k} M_n/D^{k-1} M_n \to M_n/D^k M_n \to 0$$

是短正合列.另一方面，单纯关系$d_i^{[n+1]} s_k^{[n]} = s_{k-1}^{[n-1]} d_i^{[n]} (i < k)$说明$s_k : N^{k-1}(M_*)_{n-1} \to N^{k-1}(M_*)_n$是良定义的，根据习题**??**，我们希望证明

$$0 \to N^{k-1}(M_*)_{n-1} \xrightarrow{s_k} N^{k-1}(M_*)_n \xrightarrow{x \mapsto x - s_k d_k(x)} N^k(M_*)_n \to 0$$

是短正合的.明显地s_k是单射且$\operatorname{Im} s_k \subseteq \operatorname{Ker} \mathrm{id} - s_k d_k$；任取$y \in N^k(M_*)_n \subseteq N^{k-1}(M_*)_n$，$y - s_k d_k(y) = y$，因此$\mathrm{id} - s_k d_k$是满射；若$(\mathrm{id} - s_k d_k)(x) = 0$，则$x = s_k d_k(x) \in N^{k-1}(M_*)_n$，单纯关系$d_i^{[n]} d_k^{[n+1]} = d_{k-1}^{[n]} d_i^{[n+1]} (i < k)$说明$d_k(x) \in N^{k-1}(M_*)_{n-1}$，因此$\operatorname{Ker} \mathrm{id} - s_k d_k \subseteq \operatorname{Im} s_k$.

于是对于图

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & N^{k-1}(M_*)_{n-1} & \xrightarrow{s_k} & N^{k-1}(M_*)_n & \xrightarrow{\mathrm{id}-s_kd_k} & N^k(M_*)_n & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & M_{n-1}/D^{k-1}M_{n-1} & \xrightarrow{s_k} & M_n/D^{k-1}M_n & \longrightarrow & M_n/D^kM_n & \longrightarrow & 0,
\end{array}$$

其中纵向的映射都是子商，左侧方块交换是显然的，右侧方块交换是因为D^kM_n的定义.根据刚刚的讨论，横行都是短正合列，归纳假设说明左侧两个纵向映射都是同构，于是5引理说明$N^k(M_*)_n \to M_n/D^kM_n$是同构，这就完成了证明. □

定理 3.1. 设R是交换环，给定一个单纯$s(R)_*$模M_*，那么

$$H_n(M_\bullet) \cong H_n(N(M_*)_\bullet)$$

对所有n成立，我们称这个群为M_*的第n阶同伦群*(the n-th homotopy group)*，记为$\pi_n(M_*)$.

证明. 我们将证明存在分解

$$M_\bullet \cong N(M_*)_\bullet \oplus D_\bullet,$$

其中$D_\bullet$是一个零调复形，于是定理自然是该结论的推论.事实上，引理**??**表明$D_\bullet$恰好是退化部分.

定义

$$F^pM_n := \{x \in M_n \mid d_i^{[n]}(x) = 0, 0 < i \le \min(n,p)\},$$

（链边缘映射取$\partial_n|_{F^pM_n}$）于是自然的包含关系$F^{p+1}M_n \subseteq F^pM_n$给出了链复形的嵌入

$$i^{p+1} : F^{p+1}M_\bullet \hookrightarrow F^pM_\bullet.$$

注意到当$p \ge n$时$F^pM_n = N(M_*)_n$且$F^0M_n = M_n$，这意味着有链复形的滤子

$$M_\bullet = F^0M_\bullet \supseteq F^1M_\bullet \supseteq \cdots \supseteq N(M_*)_\bullet.$$

接下来证明每一个嵌入i^p都诱导了同调上的等价.

事实上，考虑

$$f_n^p : F^pM_n \to F^{p+1}M_n$$
$$x \mapsto \begin{cases} x & n \le p \\ x - s_{p+1}d_{p+1}(x) & n > p, \end{cases}$$

习题**??**说明映射是良定义的，那么

1. $f^p : F^pM_\bullet \hookrightarrow F^{p+1}M_\bullet$是链映射，即有交换图

$$\begin{array}{ccc}
F^pM_n & \xrightarrow{f^p} & F^{p+1}M_n \\
{\scriptstyle\partial_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\partial_n} \\
F^pM_{n-1} & \xrightarrow{f^p} & F^{p+1}M_{n-1}.
\end{array}$$

此时有两种情况：

(a) 若$n \le p$，则$F^pM_n = F^{p+1}M_n = N(M_*)_n$且$\partial_n^p = \partial_n^{p+1} = d_0$，交换性是显然的；

(b) 若$n > p$，$f^p = \mathrm{id} - s_pd_p$，于是任取$x \in F^pM_n$，

$$\begin{aligned} f^p\partial_n^p(x) &= f^p\left(d_0^{[n]}(x) + \sum_{i=p+1}^{n}(-1)^i d_i^{[n]}(x)\right) \\ &= d_0^{[n]}(x) - s_{p+1}d_{p+1}d_0^{[n]}(x) + \sum_{i=p+1}^{n}(-1)^i d_i^{[n]}(x) - \sum_{i=p+1}^{n}(-1)^i s_{p+1}d_{p+1}d_i^{[n]}(x) \end{aligned}$$

另一方面

$$\begin{aligned} \partial_n^{p+1}f^p(x) &= d_0^{[n]}f^p(x) + \sum_{i=p+2}^{n}(-1)^i d_i^{[n]}f^p(x) \\ &= d_0^{[n]}(x) - d_0^{[n]}s_{p+1}d_{p+1}(x) + \sum_{i=p+2}^{n}(-1)^i d_i^{[n]}(x) - \sum_{i=p+2}^{n}(-1)^i d_i^{[n]}s_{p+1}d_{p+1}(x) \end{aligned}$$

2. $f^p \circ i^p = \mathrm{id}$.

3. 定义

$$\begin{aligned} t_n^p : F^pM_n &\to F^pM_{n+1} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0 & n < p \\ (-1)^p s_p(x) & n \ge p, \end{cases} \end{aligned}$$

于是

(a) 若$n \le p$，则

我们有

$$\partial_{n+1}t^p + t^p\partial_n = \mathrm{id} - i^p \circ f^p,$$

即$t_\bullet$是

现在令$g : M_\bullet \to N(M_*)_\bullet$是链映射，满足$g_n := f^{n-1} \circ f^{n-2} \circ \cdots \circ f^0$，且$i_\bullet : N(M_*)_\bullet \to M_\bullet$是自然的嵌入，那么如上的结果说明$i$和$g$是互逆的拟同构，并且$g \circ i = \mathrm{id}|_{N(M_*)_\bullet}$，于是$M_\bullet \cong N(M_*)_\bullet \oplus \mathrm{Ker}\, g$.

令$D_n := \sum_{j=1}^{n} s_j(M_{n-1})$，于是按定义$\mathrm{Ker}\, f \subseteq D_*$.

反过来，给定k满足$0 \le k < n$，任取

$$x^{(k)} := \sum_{i=k}^{n`1} s_i(y_i^{(k)}),$$

其中对$k \le i \le n-1$，$y_i^{(k)} \in M_{n-1}$.于是，

$$f^k(x^{(k)}) = \sum_{i=k+1}^{n`1} s_i(y_i^{(k)} - s_k(d_k(y^{(k)}))),$$

这样定义$y_i^{(k+1)} := y_i^{(k)} - s_k(d_k(y^{(k)}))$和$x^{(k+1)} := \sum_{i=k+1}^{n`1} s_i(y_i^{(k+1)})$.取

$$x := \sum_{i=0}^{n-1} s_i(y_i) \in D_n,$$

其中$y_i \in M_{n-1}$，沿用上面的记号，我们有

$$g(x) := f^{n-1} \circ f^{n-2} \circ \cdots \circ f^0(x) = ... = 0,$$

即$D_* \subseteq \mathrm{Ker}\ f$，这样就完成了证明. □

此外，还有一种构造方式

$$N(M_*)_n := \begin{cases} 0 & n \leq 0 \\ \bigcap_{i=0}^{n-1} \mathrm{Ker}\ d_i^{[n]} & n \geq 1 \end{cases},$$

且边缘态射定义为$\partial_n := (-1)^n d_n^{[n]}$.基于如此定义，

1. 引理??是明显成立的；
2. 定义$D^k M_n := \sum_{j=0}^{k} s_j(M_{n-1})$和$N^k(M_*)_n := \bigcap_{i=0}^{k} \mathrm{Ker}\ d_i^{[n]}$（$k = 0, \cdots, n-1$），练习??中的相同的证明会有相同的结果，且引理??也是成立的；
3. 定义$F^p M_n := \{x \in M_n \mid d_i^{[n]}(x) = 0, 0 \leq i < \min(n,p)\}$，此时

$$f_n^p : F^p M_n \to F^{p+1} M_n$$
$$x \mapsto \begin{cases} x & n \leq p \\ x - s_p d_p(x) & n > p, \end{cases}$$

是嵌入的同伦逆，其中同伦定义为

$$t_n^p : F^p M_n \to F^p M_{n+1}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0 & n < p \\ (-1)^p s_p(x) & n \geq p. \end{cases}$$

练习 3.2. 设R是交换环，S是R代数，求证$N(s(S)) = S$.

练习 3.3. 给定交换环R和单纯R代数A_*，且设V_*是单纯A_*模.证明$N(V_*)_n, \mathrm{Ker}\ \partial_n, \mathrm{Im}\ \partial_{n+1}$都是$V_n$的$A_n$子模.

定义. 单纯R代数间的态射(morphism)$\varphi_* : A_* \to B_*$是一族态射$\varphi_n : A_n \to B_n$，满足

$$\begin{tikzcd} A_n \arrow[r, "d_i^{A_n}"] \arrow[d, "\varphi_n"'] & A_{n-1} \arrow[d, "\varphi_{n-1}"] \\ B_n \arrow[r, "d_i^{B_n}"] & B_{n-1}. \end{tikzcd}$$

和

$$\begin{array}{ccc} A_n & \xrightarrow{s_j^{A_n}} & A_{n+1} \\ {\scriptstyle\varphi_n}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_{n+1}} \\ B_n & \xrightarrow{s_j^{B_n}} & B_{n+1}. \end{array}$$

对于任意i, j都成立.

若$\varphi_* : A_* \to B_*$是单纯代数之间的态射，那么我们有自然的R模的态射

$$\pi_*(\varphi) : \pi_*(A) \to \pi_*(B),$$

或者更准确地说π是一个函子$s(R - \mathbf{Algebras}) \to R - \mathbf{Mod}$.

若$\varphi_* : A_* \to B_*$诱导的R模态射$\pi_*(\varphi)$都是同构，则称φ是弱等价(weak equivalence).

3.1.3 单纯模中的代数对象

定义. 给定交换环R和单纯R代数A_*，M_*, N_*是A_*模，定义A_*模$M_* \otimes_{A_*} N_*$满足

$$(M \otimes_A N)_n := M_n \otimes_{A_n} N_n$$

对任意$n \geq 0$都成立，且面映射和退化映射分别由M_*, N_*诱导.称$(M \otimes_A N)_*$为M_*与N_*的张量积(tensor product).

引理 3.4. 给定交换环R和单纯R代数A_*，M_*, N_*是A_*模，记它们对应的*Moore*复形是$M_\bullet, N_\bullet$，定义映射

$$AW : (M \otimes_A N)_* \to (M \otimes N)_\bullet$$
$$a \otimes b \in M_n \otimes_{A_n} N_n \mapsto \sum_{i=0}^{n} (d_n^{M[n]})^{n-i}(a) \otimes (d_0^{N[n]})^i(b),$$

其中$(d_n^{M[n]})^{n-i}$表示$d_n^{M[n]}$复合$n-i$次，那么AW诱导了链映射，称为*Alexander-Whitney*映射.

引理 3.5. 给定非负整数p, q，设μ, ν是集合$\{0, 1, \cdots, p+q-1\}$的划分，满足$\mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_p, \nu_1 < \nu_2 < \cdots < \nu_q$，记$\mathrm{sgn}(\mu, \nu) = \mathrm{sgn}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_q)$，其中$\mathrm{sgn}(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p, \nu_1, \nu_2, \cdots, \nu_q)$是$(\mu, \nu)$作为置换的符号.那么，映射

$$sh : (M \otimes N)_\bullet \to (M \otimes_A N)_*$$
$$a \otimes b \in M_p \otimes N_q \mapsto \sum_{(\mu,\nu)} \mathrm{sgn}(\mu, \nu)(s_{\nu_q} \circ \cdots \circ s_{\nu_1})(a) \otimes (s_{\mu_p} \circ \cdots \circ s_{\mu_1})(b)$$

诱导了自然的链映射，称该映射为洗牌映射*(shuffle map)*.

练习 3.4. 设$T_*:(M\otimes_A N)_*\to(N\otimes_A M)_*$和$T_\bullet:(M\otimes N)_\bullet\to(N\otimes M)_\bullet$是换序映射，求证$AW\circ T_*$和$T_\bullet\circ AW$（对应地，$sh\circ T_\bullet$和$T_*\circ sh$）是链同伦的.

3.2 Dold-Kan对应

定理 3.2 (Eilenberg-Zilber). *Alexander-Whitney*映射和洗牌映射都是拟同构，并且二者互为同调层面的逆.

证明. 一方面，在正规复形层面，$AW\circ sh=\mathrm{id}$. □

3.2.1 模型结构

3.3 单纯消解

定义. 设$X=\{X_n\}_{n\geq 0}$是一族未定元.若单纯R代数$R[X]_*$满足

1. $R[X]_n$是$R[X_n]$，即R上的以X_n为未定元的多项式环，
2. 对任意的j,n，$s_j^{R[X]_n}(X_n)\subseteq X_{n+1}$，即退化映射将生成元映为生成元，

则称$R[X]_*$是半自由单纯R代数(semi-free simplicial R-algebra).

定义. 给定交换环R和单纯R代数A_*，且$X=\{X_n\}_{n\geq 0}$是一族未定元.若单纯R代数$A[X]_*$满足

1. $A[X]_n$是$A_n[X_n]$，即A_n上的以X_n为未定元的多项式环，
2. 对任意的j,n，$s_j^{A[X]_n}(X_n)\subseteq X_{n+1}$，
3. 嵌入映射$A_*\hookrightarrow A[X]_*$是单纯$R$代数同态，

则称$A[X]_*$是A_*的自由单纯扩张(free simplicial extension).

引理 3.6. 若R是交换环，A_*是单纯R代数，P_*是A_*的自由单纯扩张，若$\varphi:A_*\to B_*$是单纯态射，则$B_*\otimes_{A_*}P_*$是B_*的自由单纯扩张.

命题 3.3. 单纯R代数间的态射$\varphi_*: A_* \to B_*$是余纤维当且仅当它是某个自由扩张的收缩.

定义. 设$\varphi: A_* \to B_*$是单纯R代数的态射，那么φ的一个单纯消解(simplicial resolution)是如下一个分解

$$A_* \hookrightarrow P_* \overset{\psi}{\twoheadrightarrow} B_*$$

满足复合是φ，$A_* \hookrightarrow P_*$是A_*的自由单纯扩张，ψ是单纯满态射，且是一个弱等价.通常，我们也称P_*是B_*在A_*上的单纯消解(simplicial resolution of B_* over A_*).

定理 3.4. 若R是交换环，A_*, B_*, C_*是单纯R代数，P_*是A_*的自由单纯扩张，若$\varphi: A_* \to B_*$是单纯态射，$\psi: B_* \to C_*$是满态射且是弱等价，那么存在提升$\kappa: P_* \to B_*$使得下图

$$\begin{tikzcd} A_* \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B_* \arrow[d, "\psi"] \\ P_* \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\kappa"] & C_* \end{tikzcd}$$

交换.

给定一个单纯消解$A_* \hookrightarrow P_*$，我们可以构造

$$A[X,X]_* := A[X]_* \otimes_{A_*} A[X]_*,$$

这个单纯R代数.它在如下意义是具有函子性的：给定单纯代数的态射

$$\varphi, \psi : A[X]_* \to B_*,$$

我们可以构造新的单纯态射

$$\begin{aligned} \varphi \otimes \psi : A[X,X]_* &\to B_* \\ x \otimes y &\mapsto \varphi(x)\psi(y). \end{aligned}$$

定义. 给定交换环R、单纯R代数A_*和单纯消解$A_* \hookrightarrow A[X]_*$，设$A[X,X,Y]_*$是$A[X]_*$在$A[X,X]_*$上的单纯消解，则称$A[X,X,Y]_*$是$A_*$代数$A[X]_*$的柱对象(cylinder object).若给定的态射$\varphi, \psi : A[X]_* \to B_*$可以构造交换图

$$\begin{tikzcd} A[X,X]_* \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\varphi\otimes\psi"'] & A[X,X,Y]_* \arrow[d] \\ & B_*, \end{tikzcd}$$

则称φ和ψ同伦(homotopic)，记为$\varphi \simeq \psi$.

这里同伦的定义完全同于拓扑中同伦的定义——R代数范畴中的余积就是张量积，因而这个图恰好对应于拓扑空间组成范畴的同伦的定义图.

定理 3.5 (提升的唯一性)**.**

推论 3.5.1 (消解的唯一性)**.**

练习 3.5. 这个习题证明对于任意单纯R代数A_*，存在它的自由扩张.

任取正自然数n，令$w \in A_{n-1}$满足它在$N(A_*)_{n-1}$是闭链，即$d_0^{[n-1]}(w) = 0$

我们来具体构造任意给定单纯R代数$f : A_* \to B_*$的单纯消解.具体的想法是这样的：

定义. 设R是环，对于集合S，记$R[S]$为S中元素生成的R多项式环.给定环同态$f : R \to S$，令$P_0 := R[S]$，且当$n \geq 1$时，

$$P_n := R[P_{n-1}].$$

定义s 称P_*为$f : R \to S$的标准消解(standard resolution).

例 3.4. 给定R代数$\varphi : R[x] \to R, x \mapsto 0$，将它自然地看为单纯代数的同态，那么如下构造的复形给出了f的单纯消解：令

$$P_n := R[x] \otimes_R \left(\bigotimes_{i=1}^{n} R[x] \right),$$

记P_n在$R[x]$的生成元为$x_{n,1} = 1 \otimes x \otimes \cdots \otimes 1, \cdots, x_{n,n} = 1 \otimes 1 \otimes \cdots \otimes x$.构造面映射和退化映射分别为

$$d_i^{[n]}(f(x) \otimes g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_n(x)) := \begin{cases} f(x)g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_n(x) & i = 0 \\ f(x) \otimes g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_i(x)g_{i+1}(x) \otimes \cdots \otimes g_n(x) & 1 \leq i \leq n-1 \\ f(x)\varphi(g_n(x)) \otimes g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_{n-1}(x) & i = n \end{cases}$$

和

$$s_i^{[n]}(f(x) \otimes g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_n(x)) := \begin{cases} f(x) \otimes 1 \otimes g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_n(x) & i = 0 \\ f(x) \otimes g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_i(x) \otimes 1 \otimes g_{i+1}(x) \otimes \cdots \otimes g_n(x) & 1 \leq i \leq n-1 \\ f(x) \otimes g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_n(x) \otimes 1 & i = n, \end{cases}$$

不难看出这是一个单纯R代数，是$R[x]$的单纯扩张.接下来验证这是一个单纯消解，即要验证$P_* \to R$是弱等价.

构造如下$R[x]$模复形$K(x)$：

$$R[x] \xleftarrow{x} R[x] \leftarrow 0,$$

我们要验证这个复形与P_*同伦.考虑

$$\begin{array}{ccccc} R[x] & \xleftarrow[x]{} & R[x] & \longleftarrow & 0 \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle x\otimes -} & & \downarrow \\ R[x] & \longleftarrow & P_1 & \longleftarrow & P_2, \end{array}$$

练习 3.6. 设R是交换环，$A \to B, C \to D$是R代数同态，且A, B作为R模是平坦的.求证若P_*, Q_*是$A \to B$和$C \to D$的单纯消解，那么$P_* \otimes_R Q_*$是$A \otimes_R C \to B \otimes_R D$的单纯消解.

例 3.5. 设r是交换环R的非零因子，$S := R/(r)$且$p : R \to S$是自然投射.考虑交换图

$$\begin{array}{ccc} R[x] & \xrightarrow{x\mapsto 0} & R \\ {\scriptstyle x\mapsto r}\downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & S = R\otimes_{R[x]} R, \end{array}$$

这是因为$\mathrm{Ker}(x \mapsto 0) = (x), \mathrm{Ker}(x \mapsto r) = (x - r)$，于是

$$R \otimes_{R[x]} R = R[x]/((x - r) + (x)) = R/(r) = S.$$

设P_*是$R[x] \xrightarrow{x\mapsto 0} R$的单纯消解，令

$$\begin{array}{ccc} R[x] & \longrightarrow & P_* \\ {\scriptstyle x\mapsto r}\downarrow & & \downarrow \\ R & \longrightarrow & Q_* := R\otimes_{R[x]} P_*, \end{array}$$

根据基变换Q_*是R的自由扩张.对

$$R[x] \to P_* \to R$$

做函子$R \otimes_{R[x]} -$，其中$R[x] \to R$定义为$x \mapsto r$，那么有态射

$$R \to Q_* \to S,$$

于是Q_*是$R \to S$的单纯消解.

我们具体将Q_*写出来.按照定义，

$$\begin{aligned} Q_n &:= R \otimes_{R[x]} P_n = R \otimes_{R[x]} R[x, x_1, \cdots, x_n] = R[x]/(x - r) \otimes_{R[x]} R[x, x_1, \cdots, x_n] \\ &= R[x, x_1, \cdots, x_n]/(x - r) = R[x_1, \cdots, x_n], \end{aligned}$$

并且

$$d_i^{[n]} : Q_n \to Q_{n-1} = \mathrm{id} \otimes d_i^{[n]}$$

将$t \otimes f(x) \otimes g(x_1, \cdots, x_n)$映到

$$\begin{cases} f(x)g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_n(x) & i = 0 \\ f(x) \otimes g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_i(x)g_{i+1}(x) \otimes \cdots \otimes g_n(x) & 1 \le i \le n - 1 \\ f(x)\varphi(g_n(x)) \otimes g_1(x) \otimes \cdots \otimes g_{n-1}(x) & i = n \end{cases}$$

由于P_*的正规化同伦于

$$0 \leftarrow R[x] \overset{x}{\leftarrow} R[x] \leftarrow 0,$$

故Q_*的正规化同伦于

$$0 \leftarrow R \stackrel{r}{\leftarrow} R \leftarrow 0,$$

于是$\pi_0(Q_*) = S$，$\pi_1(Q_*) = (0 : r) = 0$.

命题 3.6. 若R是交换环，S是R代数，M是R模，$R \hookrightarrow P_* \to S$是单纯消解，那么

$$\pi_n(P_* \otimes_R M) \cong \mathrm{Tor}_n^R(S, M).$$

第四章 同伦极限和同伦余极限

给定图$X : \mathcal{J} \to \mathbf{Top}_* \xrightarrow{U} \mathbf{Top}$，那么有对应的

$$\mathrm{hocolim}_{\mathcal{J}}^{\mathbf{Top}}(U \circ X) \to U(\mathrm{hocolim}_{\mathcal{J}}^{\mathbf{Top}_*}(X)),$$

一般情况下这不是一个弱等价.考虑余纤维序列

$$B\mathcal{J} \to \mathrm{hocolim}_{\mathcal{J}}^{\mathbf{Top}}(U \circ X) \to U(\mathrm{hocolim}_{\mathcal{J}}^{\mathbf{Top}_*}(X))$$

4.1 图的范畴

4.1.1 小对象论断

回顾定理2.2中讨论的小对象论断，

对象的紧性

设κ是一个正则基数(regular cardinal)，若集合S的基数小于κ，则称S是κ小的(κ-small).对于小范畴$\mathcal{C}$，若所有态射的全体组成的集合是κ小的，则称$\mathcal{C}$是κ小的.

但是，我们需要讨论到不是κ小的范畴，甚至不是小的范畴，逻辑上解决这个问题的工具叫做Grothendieck宇宙(Grothendieck universe)，但对它的讨论并不是必须的，我们始终假定存在一个强不可得的(strongly inaccessible)基数.

定义. 给定范畴$\mathcal{J}$，若对任意的有限范畴$\mathcal{J}_0$（只有有限多个态射）和图$D : \mathcal{J}_0 \to \mathcal{J}$，都存在图下的锥，则称$\mathcal{J}$是有限可滤的(finitely filtered).

如上定义可以解释为，任意$\mathcal{J}$中的有限图都有$\mathcal{J}$中的上界.或者用更范畴化的语言说，对任意有限图$D : \mathcal{J}_0 \to \mathcal{J}$，记$\mathcal{J}_0^+$是图$\mathcal{J}_0$自由加入终对象后得到的范畴，那么$\mathcal{J}$是有限可滤的意味着$D$可以延拓为图$\tilde{D} : \mathcal{J}_0^+ \to \mathcal{J}$.

自然地，可以推广如上定义中的有限性.注意到有限范畴意味着它是$\aleph_0$小的，因此这里可以用其他基数代替：

定义. 给定正则基数κ和范畴$\mathcal{J}$，若对于任意κ小的范畴$\mathcal{J}_0$图$D:\mathcal{J}_0\to\mathcal{J}$都存在图下的锥，则称$\mathcal{J}$是$\kappa$可滤的($\kappa$-filtered).

对偶地，给定正则基数κ，我们有κ余可滤的概念.

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$和图$D:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$，若$\mathcal{J}$是$\kappa$可滤的且余极限$\operatorname{colim}_{\mathcal{J}} D$存在，则称余极限$\operatorname{colim}_{\mathcal{J}} D$是可滤的余极限(filtered colimit).

换句话说，可滤余极限是可滤指标范畴给出图的余极限.

给定范畴$\mathcal{C}$，其中的所有小的余极限都存在，$\mathcal{J}$是一个κ可滤的范畴，A是$\mathcal{C}$中的对象.设$D:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$是图，那么存在诱导的映射

$$\varphi:\operatorname{colim}_{\mathcal{J}}\hom_{\mathcal{C}}(A,D(j))\to\hom_{\mathcal{C}}(A,\operatorname{colim}_{\mathcal{J}} D),$$

其中

定义. 若范畴$\mathcal{C}$中的对象A满足对任意的κ可滤的余极限交换，即对任意一个κ可滤的范畴$\mathcal{J}$和任意图$D:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$，诱导的映射

$$\varphi:\operatorname{colim}_{\mathcal{J}}\hom_{\mathcal{C}}(A,D(j))\to\hom_{\mathcal{C}}(A,\operatorname{colim}_{\mathcal{J}} D)$$

都是双射，则称对象A是κ紧的(κ-compact).若存在正则基数κ使得A是κ紧的，则称对象A是小的(small).

特别地，若对特定的κ可滤的范畴$\mathcal{J}$和图$D:\mathcal{J}\to\mathcal{C}$，诱导的映射

$$\varphi:\operatorname{colim}_{\mathcal{J}}\hom_{\mathcal{C}}(A,D(j))\to\hom_{\mathcal{C}}(A,\operatorname{colim}_{\mathcal{J}} D)$$

是双射，则称对象A相对于图D是κ紧的(κ-compact relative to D).给定$\mathcal{C}$的子范畴$\mathcal{D}$，若A相对于$\mathcal{D}$中的图D是κ紧的，即对任意诱导的映射

$$\varphi:\operatorname{colim}_{\mathcal{J}}\hom_{\mathcal{C}}(A,D(j))\to\hom_{\mathcal{C}}(A,\operatorname{colim}_{\mathcal{J}} D)$$

都是双射，对象A相对于$\mathcal{D}$是κ紧的(κ-compact relative to $\mathcal{D}$).

我们在这里给出了相当一般情况的定义，但很多时候具体情形的应用取$\kappa=\aleph_1$，于是基数小于$\aleph_1$的集合都是可数的，因而$\aleph_1$紧的对象

例 4.1. 给定环R，考虑R模链复形范畴$\mathbf{Com}_\bullet(R)$，那么复形$C_\bullet$是$\aleph_1$紧的当且仅当$C_\bullet$与一个双边有界且每一阶都是有限生成的投射模拟同构.

命题 4.1. *A κ-small colimit of κ -compact objects is again a κ-compact object.*

小对象论断

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$满足

1. $\mathcal{C}$中所有小的余极限都存在，
2. 存在$\mathcal{C}$中对象组成的集合S，使得$\mathcal{C}$中所有的对象都是S中对象的余极限，
3. $\mathcal{C}$中的对象都是小的，
4. 对任意对象$A, B \in \operatorname{ob} \mathcal{C}$，$\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$是小的，

则称范畴$\mathcal{C}$是可表的(presentable).

Quillen在研究代数拓扑时遇到了一类问题，它们统称为提升问题.给定范畴$\mathcal{C}$中的一族态射S，记${}^{\boxslash}S$为所有相对于S有左提升性质的$\mathcal{C}$中态射的全体，记$S^{\boxslash}$为所有相对于S有右提升性质的$\mathcal{C}$中态射的全体.显然$S \subseteq ({}^{\boxslash}S)^{\boxslash}$.有时，也称${}^{\boxslash}S$为$S$余纤维($S$-cofibration)，记为$S-\mathrm{Cof}$，对偶地称$S^{\boxslash}$为$S$纤维($S$-fibration)，记为$S-\mathrm{Fib}$.

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$使得$\mathcal{C}$中所有小的余极限都存在，S是$\mathcal{C}$中的一族态射，满足

1. S关于推出是封闭的，即给定$\mathcal{C}$中的态射$f: A \to B$和S中的态射$u: A \to X$，对于如下推出图
$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle u}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle v} \\ X & \longrightarrow & Z, \end{array}$$
$v: B \to Z$也是S中的态射，
2. S关于超限复合是封闭的，
3. S关于取收缩是封闭的，即在$\mathcal{C}$中的图
$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{p} & A \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \xrightarrow{j} & Y & \xrightarrow{q} & X \end{array}$$
中，若$p \circ i = \mathrm{id}_A, q \circ j = \mathrm{id}_X$，且$g$是$S$中的态射，则$f$是$S$中的态射，

则称S是弱饱和的(weakly saturated).

明显弱饱和的态射族的交也是弱饱和的.任意给定态射族$S \subseteq \operatorname{mor}\mathcal{C}$，若范畴$\mathcal{C}$使得所有的小的余极限都存在，那么包含$S$的最小的弱饱和态射族存在，称为$S$生成的弱饱和态射族.

练习 4.1. 证明若范畴$\mathcal{C}$使得所有的小的余极限都存在，那么包含S的最小的弱饱和态射族存在.

命题 4.2. 给定范畴$\mathcal{C}$使得$\mathcal{C}$中所有小的余极限都存在，S是$\mathcal{C}$中的一族态射，$({}^{\boxslash}S)^{\boxslash}$

定理 4.3 (Small object argument)**.** 给定可表的范畴$\mathcal{C}$和一族$\mathcal{C}$中的态射$A_0 = \{f_i : A_i \to B_i\}_{i \in I}$，对自然数$n$，记$N\mathcal{C}_n$是所有从线性范畴$\{0 \to 1 \to \cdots \to n-1 \to n\}$到$\mathcal{C}$的函子组成的范畴.那么存在函子

$$F : N\mathcal{C}_1 \to N\mathcal{C}_2,$$

满足

1. F将态射$h : X \to Z$映到图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & Z \\ & Y, \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

   其中f在A_0生成的弱饱和态射族中，g对A_0有右提升性质，

2. 若正则基数κ满足对任意$i \in I$，A_i, B_i都是κ紧的，那么F与κ可滤的余极限交换.

换句话说，函子F给出了一个分解

证明. □

4.1.2　余纤维生成的范畴

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$的一族态射I（也是一个子范畴），若任意I中态射$f : A \to B$的定义域A都相对于I是κ紧的，则称态射族I给出了κ小对象论断(permits a κ-small object argument).

例 4.2. 定理2.2中

定义. 给定模型范畴$\mathcal{M}$，若存在一族余纤维I满足

1. I给出了κ小对象论断，

2. $I^{\boxslash} = \mathrm{Fib} \cap \mathrm{WE}$，

和另一族零调余纤维J满足

1. J给出了κ小对象论断，

2. $J^{\boxslash} = \mathrm{Fib}$，

则称$\mathcal{M}$是余纤维生成的(cofibrantly generated).

例 4.3. 给定环R，考虑R模链复形范畴$\mathbf{Com}_\bullet(R)$，对任意的R模M，记$S^n(M) := M[-n]$是在第n阶项为M，其余项都为0的复形；记$D^n(M) := M[-n] \oplus M[-n+1]$是在第$n$阶和第$n-1$项为$M$，边缘映射为$M$上的单位映射，其余项都为0的复形.于是存在自然的嵌入$S^{n-1}(M) \hookrightarrow D^n(M)$.令

$$I := \{S^{n-1}(R) \hookrightarrow D^n(R)\}$$

和

$$I := \{0 \to D^n(R)\},$$

则$\mathbf{Com}_\bullet(R)$是余纤维生成的.

定理 4.4. 给定范畴$\mathcal{M}$和其中的一族态射WE，满足模型范畴的前三条公理，且存在态射族I, J满足

1. I, J都给出了κ小对象论断，

2. $I^{\boxslash} \subseteq J^{\boxslash} \cap \mathrm{WE}$，

3. ${}^{\boxslash}(J^{\boxslash}) \subseteq {}^{\boxslash}(I^{\boxslash}) \cap \mathrm{WE}$，

4. *2,3*中的任意包含是相等，

那么$(\mathcal{M}, \mathrm{WE}, I, J)$构成了余纤维生成的模型范畴.

定理 4.5 (模型提升). 给定余纤维生成的模型范畴$(\mathcal{M}, \mathrm{WE}_{\mathcal{M}}, I, J)$，

$$F : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{N} : G$$

是伴随函子对，且$\mathcal{N}$是完备和余完备的范畴.若

1. I, J都给出了κ小对象论断，

2. G将相对$F(J)$胞腔复形映到弱等价，

则$(\mathcal{N}, \mathrm{WE}_{\mathcal{N}}, F(I), F(J))$构成了余纤维生成的模型范畴，其中

$$\mathrm{WE}_{\mathcal{N}} := \{g \in \mathrm{mor}\ \mathcal{M} \mid G(g) \in \mathrm{WE}_{\mathcal{M}}\}.$$

此时，(F, G)是*Quillen*配对.

模型范畴之间的态射应当是Quillen对

定理 4.6 (Hir,11.6.17). 给定余纤维生成的模型范畴$(\mathcal{M}, \mathrm{WE}_{\mathcal{M}}, I, J)$，对任意小范畴$\mathcal{J}$，

$$(\mathrm{Funct}(\mathcal{J}, \mathcal{M}), \mathrm{Funct}_{\mathrm{WE}}(\mathcal{J}, \mathcal{M}), \mathrm{Funct}_I(\mathcal{J}, \mathcal{M}), \mathrm{Funct}_J(\mathcal{J}, \mathcal{M}))$$

给出了$\mathrm{Funct}(\mathcal{J}, \mathcal{M})$上的余纤维生成（点态）模型结构，其中给定态射族$S$，

$$\mathrm{Funct}_S(\mathcal{J}, \mathcal{M}) = \{\alpha \in \mathrm{mor}\ \mathrm{Funct}(\mathcal{J}, \mathcal{M}) \mid \alpha_A \in S, \forall A \in \mathrm{ob}\ \mathcal{J}\},$$

且纤维

$$\mathrm{Fib}(\mathrm{Funct}(\mathcal{J}, \mathcal{M})) = \mathrm{Funct}_{\mathrm{Fib}(\mathcal{M})}(\mathcal{J}, \mathcal{M}).$$

证明. 记$\mathcal{J}^\delta$是$\mathcal{J}$对应的离散范畴，那么

$$\mathrm{Funct}(\mathcal{J}^\delta, \mathcal{M}) \cong \prod_{A \in \mathrm{ob}\ \mathcal{J}} \mathcal{M},$$

根据定理4.4，$\mathrm{Funct}(\mathcal{J}^\delta, \mathcal{M})$是余纤维生成的模型范畴.

注意到存在自然的嵌入函子$i : \mathcal{J}^\delta \to \mathcal{J}$，它诱导了限制函子（实际上也是忘却函子）

$$\mathrm{Funct}(\mathcal{J}^\delta, \mathcal{M}) \leftarrow \mathrm{Funct}(\mathcal{J}, \mathcal{M}) : i^*,$$

它存在左伴随函子

$$\begin{aligned} F : \mathrm{Funct}(\mathcal{J}^\delta, \mathcal{M}) &\to \mathrm{Funct}(\mathcal{J}, \mathcal{M}) \\ X &\mapsto \left(B \mapsto \coprod_{A \in \mathrm{ob}\ \mathcal{J}} \coprod_{f \in \hom_{\mathcal{J}}(A, B)} X(B) \right), \end{aligned}$$

于是定理4.5完成了证明. □

4.2 万有模型范畴

回顾给定小范畴$\mathcal{C}$，记$\mathrm{Pre}(\mathcal{C}) = \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})$为$\mathcal{C}$上的预层范畴，其中的对象，即函子

$$X : \mathcal{C}^\circ \to \mathbf{Set}$$

被称为$\mathcal{C}$上的预层.

在1.2.2节（和习题1.10）中，我们事实上证明了如下结果：

定理 4.7. 给定小范畴$\mathcal{C}$，对任意余完备的范畴$\mathcal{D}$和函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，都存在函子

$$|-|:\mathrm{Pre}(\mathcal{C})\to\mathcal{D}$$

是F沿*Yoneda*嵌入函子的扩张，即图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "h"'] & \arrow[d, phantom, "\Downarrow_\eta"] & \mathcal{D} \\
& \mathrm{Pre}(\mathcal{C}) \arrow[ur, dashed, "|-|"'] &
\end{tikzcd}$$

在差一个自然同构的情形下交换，并且如此的函子$|-|$唯一，更准确地说若有两个函子$|-|_1,|-|_2:\mathrm{Pre}(\mathcal{C})\to\mathcal{D}$满足如上的交换性，那么存在唯一的自然同构$\zeta:|-|_1\Rightarrow|-|_2$.

此外，函子$|-|:\mathrm{Pre}(\mathcal{C})\to\mathcal{D}$有右伴随.

如上的定理说明，对任意小范畴$\mathcal{C}$，范畴$\mathrm{Pre}(\mathcal{C})$可以视为$\mathcal{C}$的万有余完备化，任何$\mathcal{C}$下的余完备范畴$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$都可以看成由$\mathrm{Pre}(\mathcal{C})$得到的范畴.这个关系非常类似于一个代数的展示(presentation)是一个自由代数的商，$\mathrm{Pre}(\mathcal{C})$扮演的角色就是自由代数，可以看作$\mathcal{C}$将所有余极限都加进来生成的最小的“自由范畴”.

但是当$\mathcal{C}$是模型范畴的时候，单纯地将余极限加进来会破坏原来范畴的模型结构，因此需要找到一个相对万有的包含余极限的范畴，使得$\mathcal{C}$下的余完备范畴都是由这个万有的模型范畴给出的.类似于定理4.7，此处具有如此特性的范畴是$s\mathrm{Pre}(\mathcal{C})$，即$\mathcal{C}$上所有单纯预层（习题1.7）给出的范畴.

定理4.7中唯一需要特殊对待的是函子的唯一性，为此需要引入如下概念：

定义. 给定小范畴$\mathcal{C}$和模型范畴$\mathcal{M},\mathcal{N}$，$F:\mathcal{C}\to\mathcal{M},G:\mathcal{C}\to\mathcal{N}$是函子，那么$G$沿$F$的分解(factorisation of G through F)是三元组(L,R,ϵ)，其中

$$L:\mathcal{M}\leftrightarrows\mathcal{N}:R$$

是Quillen对，$\epsilon:L\circ F\Rightarrow G$是自然弱等价（即对任意$A\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，$\epsilon_A:L(F(A))\to G(A)$都是弱等价），如图

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "G"] \arrow[dr, "F"'] & \arrow[d, phantom, "\Uparrow\epsilon"] & \mathcal{N} \arrow[dl, shift left, "R"] \\
& \mathcal{M}. \arrow[ur, shift left, "L"] &
\end{tikzcd}$$

分解$(L_1,R_1,\epsilon_1),(L_2,R_2,\epsilon_2)$之间的态射是自然变换$\alpha:L_1\Rightarrow L_2$，满足对任意$A\in\mathrm{ob}\,\mathcal{C}$，有交换图

$$\begin{tikzcd}
L_1(F(A)) \arrow[rr, "\alpha_A"] \arrow[dr, "(\epsilon_1)_A"'] & & L_2(F(A)) \arrow[dl, "(\epsilon_2)_A"] \\
& G(A). &
\end{tikzcd}$$

范畴$s\mathrm{Pre}(\mathcal{C})$上有自然的（投射）模型结构，满足：

1. 对于函子$F,G:\mathcal{C}^\circ\to s\mathbf{Set}$，$\alpha:F\Rightarrow G$是弱等价当且仅当$\alpha_A:F(A)\to G(A)$是$s\mathbf{Set}$中的弱等价，

2. 对于函子$F, G : \mathcal{C}^\circ \to s\mathbf{Set}$，$\alpha : F \Rightarrow G$是纤维当且仅当$\alpha_A : F(A) \to G(A)$是$s\mathbf{Set}$中的纤维.

定理 4.8 (Dugger[?Dugger01]). *给定小范畴$\mathcal{C}$，记函子r是复合*

$$\mathcal{C} \xrightarrow{h} \mathrm{Pre}(\mathcal{C}) \hookrightarrow s\mathrm{Pre}(\mathcal{C}),$$

则$(s\mathrm{Pre}(\mathcal{C}), r)$是如下意义的万有模型范畴：

1. 任意给定模型范畴$\mathcal{M}$和函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$，存在$F$沿$r$的分解

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "r"'] & & \mathcal{M} \arrow[dl, shift left, "\mathrm{Sing}"] \\
& s\mathrm{Pre}(\mathcal{C}). \arrow[ur, shift left, "|-|"] \arrow[u, phantom, "\epsilon\Uparrow"] &
\end{tikzcd}$$

2. 如此的分解是“唯一的”，更准确地讲，分解的范畴（这是一个群胚）是可缩的.

这与Bousfield-Kan的cosimplicial resolution in model cats (Hischorne)是等价的

4.3 同伦余极限

定义. 给定$F : \mathcal{J} \to \mathbf{Set} \hookrightarrow s\mathbf{Set}$，定义

$$\mathrm{hocolim}_{\mathcal{J}} F := N\left(\int_{\mathcal{J}} F\right)$$

其中$\int_{\mathcal{J}} F$是元素范畴.

4.4 测试范畴

在结束了之前的讨论之后，一个现实的问题是，我们为什么要关注范畴$\boldsymbol{\Delta}$？

给定小范畴$\mathcal{C}$，记$\mathrm{Pre}(\mathcal{C}) = \mathrm{Funct}(\mathcal{C}^\circ, \mathbf{Set})$为$\mathcal{C}$上的预层范畴(category of presheaves)，其中的对象，即函子

$$X : \mathcal{C}^\circ \to \mathbf{Set}$$

被称为$\mathcal{C}$上的预层(presheaf).

定义. 给定小范畴$\mathcal{T}$，则一个$\mathcal{T}$集X($\mathcal{T}$-set)是$\mathrm{Pre}(\mathcal{C})$中的对象，即一个函子

$$X : \mathcal{T}^\circ \to \mathbf{Set}.$$

所有$\mathcal{T}$集组成的范畴记为$\mathcal{T} - \mathbf{Set}$.

明显地，对任意$\mathcal{T}$中的对象B，函子

$$
\begin{aligned}
h_B : \mathcal{T}^{\circ} &\to \mathbf{Set} \\
A &\mapsto \hom_{\mathcal{T}}(A, B)
\end{aligned}
$$

是一个$\mathcal{T}$集.

引理 4.1. 给定小范畴$\mathcal{T}$和函子

$$
\begin{aligned}
i_{\mathcal{T}} : \mathcal{T} - \mathbf{Set} &\to \mathbf{Cat} \\
X &\mapsto
\end{aligned}
$$

第五章　单纯群

5.1　单纯集和单纯复形

定理 5.1.

5.2　泛

给定单纯群$G : \mathbf{\Delta}^{\circ} \to \mathbf{Gp}$，可以构造$EG$和$BG$如下

事实上，存在自然、典范的EG和BG选择，可以定义

$$WG_n := G_n \times G_{n-1} \times \cdots \times G_0,$$

并且

$$d_i(g_n, g_{n-1}, \cdots, g_0) = \begin{cases} (d_i g_n, d_{i-1} g_{n-1}, \cdots, (d_0 g_{n-1}) g_{n-i-1}, g_{n-i-2}, \cdots, g_0) & i < n \\ (d_n g_n, d_{n-1} g_{n-1}, \cdots, d_1 g_1) & i = n \end{cases}$$

$$s_i(g_n, g_{n-1}, \cdots, g_0) = (s_i g_n, s_{i-1} g_{n-1}, \cdots, s_0 g_{n-i}, e, g_{n-i-1}, \cdots, g_0)$$

$G \times WG \to WG$

$$(h, (g_n, g_{n-1}, \cdots, g_0)) \mapsto (hg_n, g_{n-1}, \cdots, g_0)$$

$\overline{W}G := WG/G.$

引理 5.1. 映射$q : WG \to \overline{W}G$是纤维.

命题 5.2. WG是可缩的.

5.3 回路群

定理 5.3. *There is a pair of adjunction*

$$\mathbb{G} : s\mathbf{Set}_0 \leftrightarrows s\mathbf{Gp} : \overline{W}$$

where $\mathbb{G}$ is called the Kan loop group construction and $\overline{W}G$ is the classfying simplicial complex.

Actually the functor $\mathbb{G}$ preserves weak equivalences and cofibrations, and the functor $\overline{W}$ preserves weak equivalences and fibrations. Thus this is a pair of Quillen equivalence, which gives an equivalence of homotopy categories

$$\mathrm{Ho}\ s\mathbf{Set}_0 \simeq \mathrm{Ho}\ s\mathbf{Gp}.$$

The detailed construction is as follows: Given a reduced simplicial set X, the set of n-simplicies is

$$\mathbb{G}X_n := \langle X_{n+1}\rangle / \langle s_0(x) = 1, \forall x \in X_n \rangle \cong \langle B_n \rangle,$$

where $B_n := X_{n+1} - s_0(X_n)$ and the isomorphism is induced by the inclusion $B_n \hookrightarrow X_n$. The degeneracy maps $s_j^{\mathbb{G}X} : \mathbb{G}X_n \to \mathbb{G}X_{n+1}$ are induced by $s_{j+1} : X_{n+1} \to X_{n+2}$, and the face maps $d_i^{\mathbb{G}X} : \mathbb{G}X_n \to \mathbb{G}X_{n-1}$ are given by

$$d_i^{\mathbb{G}X}(x) := \begin{cases} d_1(x) \cdot (d_)(x))^{-1} & i = 0 \\ d_{i+1}(x) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

命题 5.4. 对任意给定的约化单纯集X，$\mathbb{G}X$是半自由的，更准确地说，对任意$n > 0$，复合映射$X_n \to \langle X_n \rangle \twoheadrightarrow \mathbb{G}X_{n-1}$限制在$\overline{X}_n$上是单射，并且$\overline{X}_n$的像$\overline{B}_{n-1}$组成了

定理 5.5. 对任意给定的约化单纯集X，存在拓扑空间的弱等价

$$|\mathbb{G}X| \simeq \Omega|X|.$$

5.4 约化单纯集

$$\Sigma : \mathbf{sSet}_* \to \mathbf{sSet}_0$$
$$X \mapsto C_*(X)/X$$

$$C_*(X)_n := \{(x, m) \mid x \in X_{n-m}, 0 \le m \le n\}$$

$(*, m) \sim *$

$$\begin{aligned} d_i^{C_*[n]} &: C_*(X)_n \to C_*(X)_{n-1} \\ &(x,m) \mapsto \begin{cases} (x, m-1) & 0 \le i < m \\ (d_{i-m}^{X[n]}(x), m) & m \le i \le n \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_j^{C_*[n]} &: C_*(X)_n \to C_*(X)_{n+1} \\ &(x,m) \mapsto \begin{cases} (x, m+1) & 0 \le j < m \\ (s_{j-m}^{X[n]}(x), m) & m \le j \le n \end{cases} \end{aligned}$$

$d_1(x,1) = * \; x \in X_0$.

第六章　同伦范畴和局部化

定义. 一个同伦化范畴(homotopical category)是一个给定的范畴$\mathcal{C}$和其中称为弱等价(weak equivalence)的一族态射W，这族态射满足6选2公理(2-out-of-6)，即对任意给定的态射$\cdot \xrightarrow{f} \cdot \xrightarrow{g} \cdot \xrightarrow{h} \cdot$，

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "W \ni gf"'] & \cdot \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "hg \in W"] & \\ & \cdot \arrow[r, "h"'] & \cdot \end{tikzcd}$$

若$gf, hg \in W$，则$f, g, h, hgf \in W$.

例 6.1. 任意给定范畴$\mathcal{C}$，取W是$\mathcal{C}$中的所有同构，

例 6.2. 给定模型范畴$\mathcal{M}$，

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{M}}"'] & \mathcal{N} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{N}}"] \\ \operatorname{Ho}\mathcal{M} \arrow[r, dashed, "\mathbf{L}F"] \arrow[ur, Rightarrow, "\epsilon"] & \operatorname{Ho}\mathcal{N}, \end{tikzcd}$$

用近现代的观点来看，同伦理论实质上是对同伦化范畴的研究，或者更具体一点，给定所想要的等价关系，我们希望借此对这个范畴进行按此等价关系描述的分类.

定义. 给定同伦化范畴$(\mathcal{C}, U)$和$(\mathcal{D}, W)$，若函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$满足将弱等价映到弱等价，即$F(U) \subseteq W$，则称函子$F$是同伦化的(homotopical).

练习 6.1. 任意给定范畴$\mathcal{C}$中的一族态射W，若W满足3选2公理，则其满足6选2公理.

6.1　范畴的局部化

定理 6.1. 设$\mathcal{C}$是一个范畴，U是其中的一族态射，则存在同构下唯一的范畴$\mathcal{C}[U^{-1}]$和函子$Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[U^{-1}]$，使得$U$中所有的态射都被$Q$映到$\mathcal{C}[U^{-1}]$中的同构，且满足如下泛性质：对任意范畴$\mathcal{D}$和任意函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，若$F$将$U$中所有的态射映到$\mathcal{D}$中的同构，则有唯一的分解

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "Q"] \arrow[dr, "F"'] & \mathcal{C}[U^{-1}] \arrow[d, dashed, "\tilde{F}"] \\ & \mathcal{D}. \end{tikzcd}$$

我们称范畴$\mathcal{C}[U^{-1}]$为的$\mathcal{C}$局部化*(localization)*.

事实上，所有这样的分解组成一个可缩的群胚.这里需要注意，因为范畴中的一族态射U可以取得非常不理想，因此局部化之后的范畴可能并非再是局部小的.但这里我们忽略这样的问题，我们假定（虽然并不真实，但相较于主要问题，范畴本身的问题需要在其他的地方讨论）我们还是得到想要的范畴.另一个问题是U并不能控制在$\mathcal{C}[U^{-1}]$中可逆的态射：定义

$$\tilde{U} = \{f \in \operatorname{mor} \mathcal{C}[U^{-1}] \mid \},$$

如果$U = \tilde{U}$，我们称U是(saturated).

6.1.1

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$和其中的一族态射U，若对象X满足对任意U中的态射$f : A \to B$，诱导的映射

$$f^* : \hom_{\mathcal{C}}(B, X) \to \hom_{\mathcal{C}}(A, X)$$

都是同构则称对象X是U局部的(U-local).

换句话说，U局部的对象X给出的函子$\hom(-, X)$将U中的态射看作是同构.

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$和其中的一族态射U，若态射$g : A \to B$满足对任意U局部的对象X，诱导的映射

$$g^* : \hom_{\mathcal{C}}(B, X) \to \hom_{\mathcal{C}}(A, X)$$

都是同构则称态射$g : A \to B$是U等价(U-equivalence).

如前，$g : A \to B$是U等价意味着U局部的对象（通过Yoneda嵌入函子）将g视作同构.很明显地，U中的态射都是U等价.因此，记所有的U等价为$\hat{U}$，$U \subseteq \hat{U}$.

练习 6.2. 若$\mathcal{C}$中的对象X, Y都是U局部的，且$f : X \to Y \in \hat{U}$，求证f是同构.

定义. 给定范畴$\mathcal{C}$中的一族态射U和对象X，若存在U局部对象$L_U X$和U等价$\eta_X : X \to L_U X$，则称

$$\eta_X : X \to L_U X$$

是X的一个U局部化(U-localisation).

引理 6.1. 给定范畴$\mathcal{C}$中的一族态射U和对象X，$\eta_X : X \to L_U X$是X的局部化，则

1. 对任意态射$f : X \to Y$，若Y是U局部的，则存在唯一的分解

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\eta_X"'] & & Y \\ & L_U X, \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

2. 对任意$g : X \to Z \in U$，存在唯一的分解

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\eta_X"] \arrow[dr, "g"'] & & L_U X \\ & Z. \arrow[ur, dashed] & \end{tikzcd}$$

如上引理中U被$\hat{U}$代替后是否正确？

命题 6.2. 若$\eta_{1,X} : X \to L_{1,U}X$和$\eta_{2,X} : X \to L_{2,U}X$都是$U$的局部化，则存在$f : L_{1,U}X \to L_{2,U}X$是同构且

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\eta_{1,X}"'] \arrow[dr, "\eta_{2,X}"] & \\ L_{1,U}X \arrow[rr, "f"'] & & L_{2,U}X \end{tikzcd}$$

是交换图.

命题 6.3. U局部对象保余极限，U等价保极限.

命题 6.4. 设范畴$L_U(\mathcal{C})$是$\mathcal{C}$中所有U局部化组成的范畴，态射是交换图.那么忘却函子

$$\mathcal{C} \leftarrow L_U(\mathcal{C}) : U$$
$$X \leftarrow\!\shortmid (\eta_X : X \to L_U X)$$

是满忠实的函子.

定理 6.5. *给定范畴$\mathcal{C}$中的一族态射U，若$\mathcal{C}$中的每个对象都有U局部化，则*

$$\mathcal{C} \leftarrow L_U(\mathcal{C}) : U$$

存在左伴随，称为$\mathcal{C}$的Bousfield局部化$Q : \mathcal{C} \to L_U(\mathcal{C})$(Bousfield localisation).

定理 6.6. *Bousfield局部化是局部化.具体而言，*

练习 6.3. 证明局部化函子具有高阶泛性质.具体说来，定理6.1给出的是一阶泛性质，即函子$\mathcal{C}[U^{-1}] \to \mathcal{D}$和将$U$中态射映为同构的函子$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$之间的一一对应.求证局部化函子$Q : \mathcal{C} \to \mathcal{C}[U^{-1}]$同样给出了$\mathcal{C}[U^{-1}] \to \mathcal{D}$之间的自然变换和将$U$中态射映为同构的函子$\mathcal{C} \to \mathcal{D}$之间的自然变换的一一对应.

6.2 同伦范畴的导出函子

定义. 给定同伦化范畴$(\mathcal{C}, W)$，那么范畴$\mathcal{C}$关于W的局部化范畴$\mathcal{C}[W^{-1}]$被称为同伦化范畴$(\mathcal{C}, W)$的同伦范畴(homotopy category)，记为$\mathrm{Ho}\,\mathcal{C}$.

定义. 给定同伦化范畴$\mathcal{C}, \mathcal{D}$之间的函子$F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，$\gamma_\mathcal{D} \circ F$关于局部化函子$\gamma_\mathcal{C}$的右Kan扩张

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma_\mathcal{C}"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "\gamma_\mathcal{D}"] \\
\mathrm{Ho}\,\mathcal{C} \arrow[r, dashed, "\mathbf{L}F:=\mathcal{R}_{\gamma_\mathcal{C}}(F)"'] \arrow[ur, Rightarrow, "\epsilon"] & \mathrm{Ho}\,\mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

被称为F的全左导出函子(total left derived functor)，记为$\mathbf{L}F$.对偶地，$\gamma_\mathcal{D} \circ F$关于局部化函子$\gamma_\mathcal{C}$的左Kan扩张

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma_\mathcal{C}"'] & \mathcal{D} \arrow[d, "\gamma_\mathcal{D}"] \arrow[dl, Rightarrow, "\eta"] \\
\mathrm{Ho}\,\mathcal{C} \arrow[r, dashed, "\mathbf{R}F:=\mathcal{L}_{\gamma_\mathcal{C}}(F)"'] & \mathrm{Ho}\,\mathcal{D}
\end{tikzcd}$$

被称为F的全右导出函子(total right derived functor)，记为$\mathbf{R}F$.

注意到这里导出函子的左右与Kan扩张的左右是相反的.这样定义左右的原因一方面可以从图中看出来，$\mathbf{L}F$是从左侧逼近函子F的.

引理 6.2. $\mathbf{L}F$将弱等价映为同构.

定义. 给定同伦化范畴$\mathcal{C},\mathcal{D}$和函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，

1. F的点集左导出函子(point-set left derived functor)包含了同伦化的函子$\mathbb{L}F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$和自然变换$\epsilon:\mathbb{L}F\Rightarrow F$使得$\gamma_{\mathcal{D}}\circ\mathbb{L}F:\mathcal{C}\to\operatorname{Ho}\mathcal{D}$（根据定理6.1，这同于给出函子$\operatorname{Ho}\mathcal{C}\to\operatorname{Ho}\mathcal{D}$）和$\gamma_{\mathcal{D}}\epsilon:\gamma_{\mathcal{D}}\circ\mathbb{L}F\Rightarrow\gamma_{\mathcal{D}}\circ F$是全导出函子，如图

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "\mathbb{L}F"'] \arrow[r, phantom, "\epsilon\Uparrow"] & \mathcal{D} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{D}}"] & \operatorname{Ho}\mathcal{D}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Uparrow\gamma_{\mathcal{D}}\epsilon"] & \mathcal{D} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{D}}"] \\
\operatorname{Ho}\mathcal{C} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{D}}\circ\mathbb{L}F"'] & \operatorname{Ho}\mathcal{C}.
\end{tikzcd}
$$

2. 对偶地，F的点集右导出函子包含了同伦化的函子$\mathbb{R}F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$和自然变换$\eta:F\Rightarrow\mathbb{R}F$使得$\gamma_{\mathcal{D}}\circ\mathbb{R}F:\mathcal{C}\to\operatorname{Ho}\mathcal{D}$（根据定理6.1，这同于给出函子$\operatorname{Ho}\mathcal{C}\to\operatorname{Ho}\mathcal{D}$）和$\gamma_{\mathcal{D}}\eta:\gamma_{\mathcal{D}}\circ F\Rightarrow\gamma_{\mathcal{D}}\circ\mathbb{R}F$是全导出函子，如图

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, bend left, "F"] \arrow[r, bend right, "\mathbb{R}F"'] \arrow[r, phantom, "\Downarrow\eta"] & \mathcal{D} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{D}}"] & \operatorname{Ho}\mathcal{D}
\end{tikzcd}
\quad = \quad
\begin{tikzcd}
\mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, phantom, "\Downarrow\gamma_{\mathcal{D}}\eta"] & \mathcal{D} \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{D}}"] \\
\operatorname{Ho}\mathcal{C} \arrow[r, "\gamma_{\mathcal{D}}\circ\mathbb{R}F"'] & \operatorname{Ho}\mathcal{C}.
\end{tikzcd}
$$

事实上这个定义有些过强了.

定义.

1. 给定同伦化范畴$\mathcal{C}$，则$\mathcal{C}$上的左形变(left deformation)是函子$Q:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$和自然弱等价$q:Q\Rightarrow\mathrm{id}_{\mathcal{C}}$（即$q$是自然变换且对任意$\mathcal{C}$中的对象$A$，$q_A$都是弱等价）.
2. 给定同伦化范畴之间的函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$，则$F$的左形变是指$\mathcal{C}$的一个左形变$(Q,q)$，满足$F$保$Q$的像子满范畴的所有弱等价，即若$w$是$\operatorname{im}Q$中的弱等价则$f(w)$也是弱等价.

完全对偶地，有右形变的概念.这里，称函子Q的像子满范畴为$\mathcal{C}$的左形变收缩(left deformation retraction)，记为$\mathcal{C}_Q$.此时，函子的左形变就是给定了定义域上的一个左形变，使得该函子在形变收缩上是“同伦化”的.

例 6.3. 给定模型范畴$\mathcal{M}$，

命题 6.7. 若同伦化范畴之间的函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$有左形变$(Q, q: Q\Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}})$，那么

$$(F\circ Q, Fq)$$

是F的点集左导出函子.

证明. 首先考虑任意同伦化函子$G:\mathcal{C}\to \mathrm{Ho}\,\mathcal{D}$和自然变换$\alpha: G\Rightarrow \gamma_{\mathcal{D}}\circ F$，由于$G$是同伦化的，$Gq: GQ\Rightarrow G$是自然同构.对于图

$$\begin{tikzcd} GQ \arrow[r, Rightarrow, "\alpha Q"] \arrow[d, Rightarrow, "Gq"'] & \gamma_{\mathcal{D}}\circ F\circ Q \arrow[d, Rightarrow, "(\gamma_{\mathcal{D}}\circ F)q"] \\ G \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"'] & \gamma_{\mathcal{D}}\circ F, \end{tikzcd}$$

α的自然性说明

$$\begin{tikzcd} GQ(A) \arrow[r, "\alpha_{Q(A)}"] \arrow[d, "G(q_A)"'] & \gamma_{\mathcal{D}}\circ F\circ Q(A) \arrow[d, "(\gamma_{\mathcal{D}}\circ F)(q_A)"] \\ G(A) \arrow[r, "\alpha_A"'] & \gamma_{\mathcal{D}}\circ F(A) \end{tikzcd}$$

是交换图，因而之前的图是交换的.这意味着α有分解

$$\alpha: G \xRightarrow{(Gq)^{-1}} GQ \xRightarrow{\alpha Q} \gamma_{\mathcal{D}}\circ F\circ Q \xRightarrow{(\gamma_{\mathcal{D}}\circ F)q} \gamma_{\mathcal{D}}\circ F,$$

这恰好是所需要的分解.为证明分解的唯一性，假设有分解

$$\alpha: G \xRightarrow{\beta} \gamma_{\mathcal{D}}\circ F\circ Q \xRightarrow{(\gamma_{\mathcal{D}}\circ F)q} \gamma_{\mathcal{D}}\circ F,$$

同样地β的自然性给出了交换图

$$\begin{tikzcd} GQ \arrow[r, Rightarrow, "\beta Q"] \arrow[d, Rightarrow, "Gq"'] & \gamma_{\mathcal{D}}\circ F\circ Q^2 \arrow[d, Rightarrow, "(\gamma_{\mathcal{D}}\circ F\circ Q)q"] \\ G \arrow[r, Rightarrow, "\beta"'] & \gamma_{\mathcal{D}}\circ F\circ Q, \end{tikzcd}$$

根据左形变的定义竖直的两个自然变换都是自然同构，因而β完全由βQ来决定.但注意到分解给出

$$\alpha Q: GQ \xRightarrow{\beta Q} \gamma_{\mathcal{D}}\circ F\circ Q^2 \xRightarrow{(\gamma_{\mathcal{D}}\circ F\circ Q)q} \gamma_{\mathcal{D}}\circ F\circ Q,$$

并且$(\gamma_{\mathcal{D}}\circ F\circ Q)q$是同构，因而分解是唯一的.

考虑一般的情形，注意到 □

命题 6.8. 左形变存在的函子$F:\mathcal{C}\to\mathcal{D}$的全导出函子是绝对$Kan$扩张.

证明. 这里只需要验证对任意$H:\mathrm{Ho}\,\mathcal{D}\to\mathcal{E}$，$(H\circ\gamma_{\mathcal{D}}\circ F\circ Q,(H\circ\gamma_{\mathcal{D}}\circ F)q)$都定义了一个Kan扩张即可.由于函子$H$保同构，$(Q,q)$也是$H\circ\gamma_{\mathcal{D}}\circ F$的左形变，命题6.7就直接说明了$(H\circ\gamma_{\mathcal{D}}\circ F\circ Q,(H\circ\gamma_{\mathcal{D}}\circ F)q)$是Kan扩张. □

在通常的同调代数或同伦代数中，可形变的函子一般由伴随函子对给出，其中左伴随函子附带左形变，右伴随函子附带右形变.在此情况下，两个函子的全导出函子恰好是伴随对，但令人惊讶的是，这个结果依赖于命题6.8：

定理 6.9. *设$F:\mathcal{C}\leftrightarrows\mathcal{D}:G$是同伦化范畴之间的伴随函子对，且$F$有全导出函子$\mathbb{L}F$，$G$有全导出函子$\mathbb{R}G$，且两个全导出函子都是绝对Kan扩张，则*

$$\mathbb{L}F:\mathrm{Ho}\,\mathcal{C}\leftrightarrows\mathrm{Ho}\,\mathcal{D}:\mathbb{R}G$$

构成伴随函子对.

证明. □

定义.

练习 6.4. 求证同伦化范畴$\mathcal{C}$上的函子$Q:\mathcal{C}\to\mathcal{C}$若弱自然等价于单位函子，即存在自然弱等价$q:Q\Rightarrow\mathrm{id}$，则$Q$是同伦化函子.

6.3　模型范畴的Bousfield局部化

定义. 给定模型范畴$\mathcal{M}$，若存在函子

$$\mathrm{map}_{\mathcal{M}}:\mathcal{M}^{\circ}\times\mathcal{M}\to\mathbf{sSet}$$

满足

1. $\mathrm{map}_{\mathcal{M}}(X,Y)_0=\mathrm{hom}_{\mathcal{M}}(X,Y)$，
2. 存在复合

则称$\mathrm{map}_{\mathcal{M}}(X,Y)$是一个(homotopy function complex)

命题 6.10. *若模型范畴$\mathcal{M}$有具有函子性的余纤维替代，那么存在homotopy function complex.*

给定模型范畴$\mathcal{M}$和$\mathcal{M}$中的一族态射$U \subseteq \mathrm{mor}\ \mathcal{M}$，我们希望构造$\mathcal{M}$上的新的模型结构，使得弱等价包含了$U$中的态射

定义.

6.4 模型逼近

在定理6.9中，我们给出了导出函子是伴随函子对的情况，但实际当中条件过于理想，很难找到合适的能够应用的场景.本节利用之前讨论的模型范畴的理论，给出一种构造导出伴随函子对的方式

定义. 给定同伦化范畴$\mathcal{C}$，若存在模型范畴$\mathcal{M}$和伴随

$$l : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{C} : r$$

满足

1. r是同伦化的，即$r(W_{\mathcal{C}}) \subseteq W_{\mathcal{M}}$，
2. l对于$\mathcal{M}$中的余纤维对象是同伦化的，
3. 伴随对(l, r)接近于Quillen等价，准确地讲，若A是$\mathcal{M}$中的余纤维对象，X是$\mathcal{C}$中的任意对象，$f^{\flat} : A \to r(X)$是$\mathcal{M}$中的弱等价当且仅当它在伴随下的对应$f^{\sharp} : l(A) \to X$也是$\mathcal{C}$中的弱等价，

则称$\mathcal{M}$是$\mathcal{C}$的左模型逼近(left model approximation).

模型逼近定义的原则是对于一个同伦化范畴$\mathcal{C}$，它是模型范畴（例6.2）和它有模型逼近（在同伦代数的意义下）并没有本质的差别

例 6.4. 记$\mathbf{Mon}$是所有幺半群组成的范畴，那么存在伴随

$$L : \mathbf{Mon} \leftrightarrows \mathbf{Gp} : U,$$

其中函子L给出幺半群M的局部化，这个伴随可以自然地扩展为一个新的伴随

$$L : s\mathbf{Mon} \leftrightarrows s\mathbf{Gp} : U,$$

并且左右两边的模型结构都继承自$s\mathbf{Set}$（定理2.10），那么可以证明如上伴随使得$s\mathbf{Mon}$是$s\mathbf{Gp}$的模型逼近.

对于第三条，

定理 6.11. 给定同伦化范畴之间的伴随函子

$$F : \mathcal{C} \leftrightarrows \mathcal{D} : G,$$

并假定$l : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{C} : r$是$\mathcal{C}$的左模型逼近，使得存在伴随函子对

$$\hat{F} : \mathcal{M} \leftrightarrows \mathcal{C} : \hat{G},$$

满足

1. $\hat{F}$是左可形变的，$\hat{G}$是右可形变的，
2. ()是左形变对，且存在自然的弱等价$\hat{F} \circ r \Rightarrow F$，
3. $\operatorname{im} \mathbb{R}\hat{G} \subseteq \operatorname{im} \mathbb{R}r$，

则F, G有全导出函子

$$\mathbb{L}F = \mathbb{L}\hat{F} \circ \mathbb{R}r$$

和

$$\mathbb{R}G = \mathbb{L}l \circ \mathbb{R}\hat{G},$$

且

$$\mathbb{L}F : \operatorname{Ho} \mathcal{C} \leftrightarrows \operatorname{Ho} \mathcal{D} : \mathbb{R}G$$

是伴随.

第七章　无穷范畴

范畴论是非常强大的工具，借助它

任意给定拓扑空间X，拓扑空间应当与无穷群胚有相同的行为。

7.1　拟范畴

7.1.1　拟范畴的范畴行为

给定拟范畴$\mathcal{C}$，我们引入如下的概念：

1. $\mathcal{C}$中的对象是$\mathcal{C}_0$中的元素，
2. $\mathcal{C}$中的态射是$\mathcal{C}_1$中的元素，注意到我们有面映射$d_0, d_1 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1$，对于$\mathcal{C}$中的态射$f$，称$s(f) := d_1(f)$为$f$的定义域，$t(f) := d_0(f)$为$f$的余定义域，此时**Set**中的拉回图

$$\begin{tikzcd} \hom_{\mathcal{C}}(A,B) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{C}_1 \arrow[d, "{(s,t)}"] \\ * \arrow[r, "{(A,B)}"] & \mathcal{C}_0 \times \mathcal{C}_0 \end{tikzcd} \tag{7.1}$$

   定义了$\hom_{\mathcal{C}}(A,B)$.

3. 退化映射$s_0 : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_1$给出了对象的单位态射.
4. 给定态射$f : A \to B$和$g : B \to C$，这样就给定了$\mathcal{C}$中的一个内角$\Lambda_1^{[2]} \to \mathcal{C}$：

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "f"] & & C, \end{tikzcd}$$

   那么根据定义必然存在（可能不唯一的）提升$\mathbf{\Delta}_1^{[2]} \to \mathcal{C}$，称$d_0(\sigma)$为$f$与$g$的一个复合.

之后我们会证明，所有可能复合的全体是可缩的.

定义. 给定拟范畴$\mathcal{C}$中的态射$f, g : A \to B$，若存在2单形$\sigma : \mathbf{\Delta}^{[2]} \to \mathcal{C}$使得$\partial\sigma = (g, f, \mathrm{id}_A)$，即

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dr, "g"] & \\ A \arrow[ur, "\mathrm{id}_A"] \arrow[rr, "f"] & & B, \end{tikzcd}$$

则称f,g是同伦的，σ是f到g的同伦，记为$\sigma : f \simeq g$.

引理 7.1. 给定拟范畴$\mathcal{C}$和其中的对象$A, B \in \mathcal{C}_0$，那么同伦是$\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$上的等价关系.$f : A \to B$的等价类记为$[f]$.

证明. □

定理 7.1. 单纯集X是拟范畴当且仅当$i^* : \underline{\hom}_{s\mathbf{Set}}(\mathbf{\Delta}^2, X) \to \underline{\hom}_{s\mathbf{Set}}(\Lambda^2, X)$是零调$Kan$纤维.

我们把$\underline{\hom}_{s\mathbf{Set}}(\Lambda^2, X)$理解为“复合问题”全体形成的空间，类似地$\underline{\hom}(\mathbf{\Delta}^2, X)$应被理解为“复合问题的解”全体形成的空间，定理？说明，拟范畴的定义性质使得二者同伦意义上是相同的.

定义. 对任意拟范畴$\mathcal{C}$，如下范畴$\mathrm{Ho}\,\mathcal{C}$被称为$\mathcal{C}$的同伦范畴(hmotopy category)：

1. $\mathrm{ob}(\mathrm{Ho}\,\mathcal{C}) = \mathcal{C}_0$，
2. 对任意的对象A, B，$\hom_{\mathrm{Ho}\,\mathcal{C}}(A, B)/\simeq$，其中$\hom_{\mathcal{C}}(A, B)$如7.1定义，
3. $\mathrm{id}_A := [\mathrm{id}_A] = [s_0(A)]$，其中等式左边是$\mathrm{Ho}\,\mathcal{C}$中的对象，等式右边是$\mathcal{C}$中态射决定的等价类，
4. 复合定义为$[g] \circ [f] = [g \circ f]$，其中$g \circ f$是$\mathcal{C}$中任意可能的复合.

引理 7.2. 如上定义给出的同伦范畴是一个范畴，并且存在自然的同构$\mathrm{Ho}\,\mathcal{C} \cong \tau_1(\mathcal{C})$.

证明. □

定义. 给定拟范畴$\mathcal{C}$，态射$f : A \to B$若满足$[f]$是$\mathrm{Ho}\,\mathcal{C}$中的同构，则称f是等价(equivalence).

定义. 给定拟范畴$\mathcal{C}$，若它的同伦范畴$\mathrm{Ho}\,\mathcal{C}$是群胚，则称$\mathcal{C}$是无穷群胚(infinity groupoid).

推论 7.1.1. 拟范畴$\mathcal{C}$是Kan复形当且仅当它是无穷群胚.

索引

$S^{\boxslash}$, 75
U局部化, 88
U局部对象, 88
U等价, 88
$\boldsymbol{\Delta}$, 7
$\mathbf{sSet}_0$, 20
$\hat{U}$, 88
$\hat{\mathcal{C}}$, 18
${}^{\boxslash}S$, 75
$s\mathbf{Set}$, 8
$s\mathrm{Pre}(\mathcal{C})$, 12
6选2公理, 87

Bousfield局部化, 90

单纯对象, 8
单纯预层, 12
可滤范畴, 74
同伦化范畴, 87
  同伦化函子, 87
  同伦范畴, 90
同伦范畴, 98
导出函子, 90
  点集导出函子, 91
小对象, 74
左/右提升性质, 32
左形变, 91
循环范畴, 10

模型范畴, 31
  同伦范畴, 55
  导出范畴, 55
模型逼近, 94

紧对象, 74

预层, 80