生成函数

2018 年 8 月 29 日

组合数$\binom{n}{k}$在组合数学中有重要的作用，而关于它我们有各种各样的解释，其中一个是二项展开式的系数：

1 形式幂级数

讨论生成函数之前，我们需要建立关于形式幂级数的基本理论.一定程度上我们可以说生成函数就是形式幂级数，但两个术语有不同的关注点，前者重视元素之间的代数运算和代数性质，而后者则关注生成函数运算所代表的组合含义，以及所能解决的计数问题.

定义. 设R是一个交换环，那么R中元素组成的（无穷）序列可以按照如下方式组成一个交换环$R[[x]]$：

(i) $R[[x]]$由R的所有无穷序列组成，即

$$R[[x]] := \{\{a_0, a_1, a_2, \cdots\} | a_n \in R,\ n = 0, 1, \cdots\},$$

两个元素$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots\}$相等当且仅当对所有有意义的$n$，$a_n = b_n$；

(ii) 若$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}, \{b_0, b_1, b_2, \cdots\}$是$R[[x]]$中的不同元素，则有加法和乘法

$$\begin{aligned}\{a_0, a_1, a_2, \cdots\} + \{b_0, b_1, b_2, \cdots\} &:= \{a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, \cdots\} \\ \{a_0, a_1, a_2, \cdots\} \cdot \{b_0, b_1, b_2, \cdots\} &:= \{a_0b_0, a_0b_1 + a_1b_0, a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, \cdots\}\end{aligned}$$

这样的交换环$R[[x]]$称为R系数的形式幂级数环(*formal power series ring*).一般地，我们把元素$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$记为$f(x) = a_0 + a_1x +, a_2x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，于是形式幂级数

的运算法则可以写为（记$g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$对应$\{b_0,b_1,b_2,\cdots\}$）：

$$\begin{aligned} f(x)+g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n+\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n &:= \sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n \\ f(x)\cdot g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\cdot\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n &:= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n}a_ib_{n-i}\right)x^n, \end{aligned}$$

其中的x称为未定元(*indeterminant*).

表示形式幂级数的x只是个抽象的符号，不需要赋值，因而它的收敛性不在我们的研究范围内.容易看出，$R[[x]]$是一个交换环.此外，我们还有关于形式幂级数环的如下性质：

命题1.1. 若R是整环，则$R[[x]]$也是整环.

Proof. 设$f(x),g(x)\in R[[x]]$，且i,j是$f(x)$和$g(x)$系数非零的最小次数，对应系数分别为a_i,b_j，于是

$$f(x)g(x)=a_ib_jx^{i+j}+\text{高阶项}\neq 0.$$

□

形式幂级数环中的单位也有比较容易的判别法则：

定理1.2. $R[[x]]$中的元素$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$有乘法逆当且仅当$a_0$是$R$中的可逆元.此时，若$\tilde{f}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\tilde{a}_nx^n$是$f(x)$的乘法逆元，则

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 &= a_0^{-1} \\ \tilde{a}_k &= (-1)^k a_0^{-k-1}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{k-2} & a_{k-1} \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & a_{k-3} & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 \end{vmatrix} \quad (k>0). \end{aligned}$$

Proof. 设$\tilde{f}(x)$是$f(x)$的乘法逆元，则有

$$1 = f(x)\tilde{f}(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\tilde{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n\right).$$

比较两边系数，我们得到一个（无穷）线性方程组

$$\begin{cases} a_0\tilde{a}_0 = 1, \\ a_1\tilde{a}_0 + a_0\tilde{a}_1 = 0, \\ a_2\tilde{a}_0 + a_1\tilde{a}_1 + a_0\tilde{a}_2 = 0, \\ \cdots, \\ a_n\tilde{a}_0 + \cdots + a_{n-k}\tilde{a}_k + \cdots + a_0\tilde{a}_n = 0, \\ \cdots. \end{cases}$$

于是由第一个方程知，a_0是可逆元，且$\tilde{a}_0 = a_0^{-1}$.

反之，当a_0是可逆元的时候，对任意给定的自然数n，把$\tilde{a}_0, \tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_n$当作未知量解前$n+1$个方程组成的方程组，考虑到前$n+1$个方程的系数行列式是

$$\Delta := \begin{vmatrix} a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \end{vmatrix} = a_0^{n+1},$$

而 □

2 生成函数的基本性质

生成函数和数列之间是一一对应的，因此数列之间的关系也会体现在生成函数之间的关系中，反之亦然.这些性质的相互转化在之后我们对生成函数组合性质的讨论中起到了很关键的作用.

设数列$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$的生成函数是$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$，数列$\{b_0, b_1, b_2, \cdots\}$的生成函数是$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$，于是我们有

命题2.1. 设m是给定的自然数.

(i) 若

$$b_n = \begin{cases} 0 & (n < m) \\ a_{n-m} & (n \geq m) \end{cases}$$

则$g(x) = x^m f(x)$；

(ii) 若$b_n = a_{n+m}$，则

$$g(x) = x^n f(x).$$

Proof. 我们只证明第一个性质，第二个性质的证明是类似的.根据条件，有

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \\ &= a_0 x^m + a_1 x^{m+1} + \cdots + a_n x^{n+m} \\ &= x^m (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\ &= x^m f(x). \end{aligned}$$

□

命题2.2. 若$b_n = \sum_{i=0}^{n}$，则

$$g(x) = \frac{f(x)}{1-x}.$$

Proof. 根据假设条件，我们有

$$\begin{aligned} b_0 &= a_0, \\ b_1 x &= a_0 x + a_1 x, \\ b_2 x^2 &= a_0 x^2 + a_1 x^2 + a_2 x^2, \\ &\cdots, \\ b_n x^n &= a_0 x^n + a_1 x^n + \cdots + a_n x^n \\ &\cdots. \end{aligned}$$

□

3 组合问题的生成函数

一般而言，组合问题可以归结到一下的三种不同类型：

1. 求$\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$的$k$组合数；
2. 求$\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$的$k$组合数；
3. 求$\{4 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$的10组合数.

其中，问题1就是组合数的组合含义；问题2转化为不定方程$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k$的非负整数解的个数问题；问题3利用容斥原理在$M = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$中求不满足下列三个性质

P_1：10组合中a的个数大于等于4；
P_2：10组合中b的个数大于等于5；
P_3：10组合中c的个数大于等于6

的10组合数.它们的计算方法各不相同，但借用生成函数我们可以看到这些组合问题有统一的处理方法.

第一类问题是第三类问题的特殊情况，故我们忽略掉它.对于问题2，令

$$\{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$$

的k组合数为c_k.考虑n个幂级数的乘积

$$\underbrace{(1 + x + x^2 + \cdots + x^i + \cdots)(1 + x + x^2 + \cdots + x^i + \cdots) \cdots (1 + x + x^2 + \cdots + x^i + \cdots)}_{n\text{组}}, \tag{1}$$

它的展开式中，每个x^k均为

$$x^k = x^{m_1} x^{m_2} \cdots x^{m_n} \tag{2}$$

的形式，其中$k = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$.具体解释起来，表达式(1)中的每一个因子（第$i$项）代表对于集合中的元素$a_i$，我们有选$l = 0, 1, 2, \cdots$个的选择，每一个选择对应一项$x^l$；而相应地，表达式(2)表示这$k$个元素中有$m_i$个元素$a_i$，$i = 1, 2, \cdots, n$.于是序列$c_k$的生成函数为

$$(1 + x + x^2 + \cdots + x^i + \cdots)^n = \frac{1}{(1-x)^n},$$

于是$c_k = \binom{n-1+k}{k}$.

而对于问题3，生成函数的方法给出了相当漂亮简洁的解法.记$M = \{\infty \cdot a, \infty \cdot b, \infty \cdot c\}$的$k$组合数为$d_k$，于是$\{d_k\}$的生成函数为

$$(1 + x + x^2 + x^3)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4)(1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5).$$

上面的两个例子可以总结为“**组合问题中的分步计数对应生成函数的乘法，分类计数对应生成函数的加法**”.综上，我们总结如下：

定理3.1. 设从n元集合$S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中去k个元素，限定元素a_i出现的次数集合为$M_i(1\le i\le n)$，令b_k表示该k组合数，则该组合数序列的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}x^m\right).$$

例1. 求多重集合$M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$的每个$a_i$至少出现一次的$k$组合数$c_k$.

Proof. 根据条件，我们有$M_i=\{1,2,3,\cdots\}$，于是根据定理3.1

$$\begin{aligned} G\{c_k\} &= (x+x^2+x^3+\cdots) \\ &= x^n\frac{1}{(1-x)^n} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\binom{n-1+k}{k}x^{n+k} \\ &= \sum_{k=n}^{\infty}\binom{k-1}{n-1}, \end{aligned}$$

所以

$$c_k=\begin{cases} 0 & (k<n), \\ \binom{k-1}{n-1} & (k\ge n). \end{cases}$$

□

通常情况下我们接触到的组合问题要远比定理3.1复杂，但在其中的一步或者几步中，生成函数是相当好的解决工具，下面的定理就是一个例子：

推论3.1.1. 把k个相同的球放入n个不同的盒子$a_1,a_2,\cdots,a_n$中，限定盒子a_i的容量为集合$M_i\ (1\le i\le n)$，则其分配方案数的生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}x^m\right).$$

Proof. 一种符合要求的放法相当于$M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$的一个$k$-组合，前面关于盒子$a_i$的容量限制变成$k$-组合中$a_i$出现次数的限制（其中$1\le i\le n$）.由定理3.1知，其生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}x^m\right).$$

□

例2. 求不定方程

$$x_1+x_2+x_3+x_4=15$$

且满足

$$x_1\ge 3,x_2\ge 1,x_3\ge 0,x_4\ge 1$$

的整数解个数.

解. 问题相当于把15个球放入4个不同的盒子中，盒子的容量分别为

$$\begin{aligned}M_1&=\{3,4,\cdots\},\\M_2&=\{1,2,\cdots\},\\M_3&=\{0,1,2,\cdots\},\\M_4&=\{1,2,\cdots\}.\end{aligned}$$

于是对应的生成函数为

$$\begin{aligned}&(x^3+x^4+\cdots)(x+x^2+\cdots)(1+x+x^2+\cdots)(x+x^2+\cdots)\\=&\ x^5(1+x+x^2+\cdots)^4\\=&\ \frac{x^5}{(1-x)^4}\\=&\ x^5\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+3}{n}.\end{aligned}$$

于是，x^{15}的系数$\binom{13}{10}=286$就是满足条件的整数解的个数. □

4 排列问题的生成函数

之前的一节中我们给出了如何将生成函数用于解决组合数求解的问题，接下来我们尝试用生成函数解决排列数的求解问题.考虑n元集合的k排列的个数$\frac{n!}{k!}$，它构成的生成函数

$$\sum_{k=0}^{+\infty}n(n-1)\cdots(n-k+1)x^k$$

不能用一个简洁的表达式写出来.但如果把基函数x^k换成$\frac{x^k}{k!}$，则

$$\sum_{k=0}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{x^k}{k!} = (1+x)^n.$$

组合上我们可以解释为n元集合的k排列可以分成两步，第一步是n元集合的k组合，然后进行选出的k个元素的全排列.这启发我们引入如下的定义：数列$\{a_0, a_1, a_2, \cdots\}$对应的**指数型生成函数**为形式幂级数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k \frac{x^k}{k!}.$$

定理4.1. 多重集合$M = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \cdots, \infty \cdot a_n\}$的$k$排列中若限定元素$a_i$出现的次数集合为$M_i$，则排列数的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right).$$

Proof. 将形式幂级数乘积式展开，得

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{m\in M_i}\frac{x^m}{m!}\right) = \sum_{k\geq 0}\left(\sum_{\substack{k_1+\cdots+k_n=k\\(k_i\in M_i, i=1,2,\cdots,n)}}\frac{k!}{k_1!\cdots k_n!}\right)\frac{x^k}{k!},$$

这样只要证明展开式中$\frac{x^k}{k!}$的系数就是满足限定条件的k可重排列数即可.

首先，假设某个M的k可重排列中元素a_i出现k_i次，则$(k_1, \cdots, k_n)$就是方程

$$k_1 + \cdots + k_n = k \ \ (k_i \in M_i, i = 1, 2, \cdots, n) \tag{3}$$

的一个解.其次，方程(3)的每个解都对应一类k可重排列，这其中元素a_i出现k_i次($i = 1, 2, \cdots$).而这一类k排列的个数恰好是多重集合$\{k_1 \cdot a_1, k_2 \cdot a_2, \cdots, k_n \cdot a_n\}$的全排列的个数，即$\frac{k!}{k_1!k_2!\cdots k_n!}$.于是根据加法原理，定理得证. □

特别地，数列$\{1, 1, \cdots\}$得指数型生成函数$e(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$具有与指数函数相似得性质：

$$e(x)e(y) = e(x+y).$$

这由于

$$
\begin{aligned}
e(x)e(y) &= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{x^i}{i!}\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{y^j}{j!}\\
&= \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{i!}x^i\cdot\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{j!}\left(\frac{y}{x}\right)^j x^j\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{i+j=n,\\ i\geq 0, j\geq 0}}\frac{1}{i!j!}\left(\frac{y}{x}\right)^j\right)x^n\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\left(1+\frac{y}{x}\right)^n\frac{x^n}{n!}\\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x+y)^n}{n!}=e(x+y).
\end{aligned}
$$

例3. 多重集合$M=\{\infty\cdot a_1,\infty\cdot a_2,\cdots,\infty\cdot a_n\}$的$k$排列数序列$b_k$的指数型生成函数为

$$\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\right)=e^n(x)=e(nx)=\sum_{n=0}^{\infty}n^k\frac{x^k}{k!},$$

从而$b_k=n^k$.

例4. 由数字$1,2,3,4$组成的五位数中，1出现2次或3次，2最多出现1次，4出现偶数次的个数可以这样计算：首先我们有

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \{2,3\},\\
M_2 &= \{0,1\},\\
M_3 &= \{0,1,2,\cdots\},\\
M_4 &= \{0,2,4,\cdots\}.
\end{aligned}
$$

于是由定理(4.1)知，该排列数的指数型生成函数为