Paolo Marcellini - Carlo Sbordone

SBORDY

Elementi di Calcolo

* NON CI SONO GLI SBARRI ... XKE?

XKE È 1 CATONE!!!

(CON IL NIBOS...)

Liguori Editore

Tutti i diritti sono riservati. Nessuna parte di questa pubblicazione può essere tradotta, riprodotta, copiata o trasmessa senza l'autorizzazione scritta dell'editore.
Fotocopie per uso personale del lettore possono essere effettuate nei limiti del 15% di ciascun volume/fascicolo di periodico dietro pagamento alla SIAE del compenso previsto dall'art. 68, comma 4, della legge 22 aprile 1941 n. 633 ovvero dall'accordo stipulato tra SIAE, AIE, SNS e CNA, CONFARTIGIANATO, CASA, CLAAI, CONFCOMMERCIO, CONFESERCENTI il 18 dicembre 2000. Le riproduzioni ad uso differente da quello personale potranno avvenire, per un numero di pagine non superiore al 15% del presente volume, solo a seguito di specifica autorizzazione rilasciata da AIDRO, via delle Erbe, n. 2, 20121 Milano, telefax 02 809506, e-mail aidro@.iol.it.

Prima edizione italiana Giugno 2004
Liguori Editore, Srl
Via Posillipo 394
I 80123 Napoli

http://www.liguori.it

Copyright © Liguori Editore, Srl, 2004

Marcellini, Paolo :
Elementi di Calcolo/Paolo Marcellini, Carlo Sbordone
Napoli : Liguori, 2004
ISBN 88 - 207 - 3665 - 9

1. Funzioni di una o più variabili reali 2. Integrali, equazioni differenziali I. Titolo.

Ristampe:

9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 2012 2011 2010 2009 2008 2007 2006 2005 2004

Questo volume è stampato in Italia dalle Officine Grafiche Liguori - Napoli su carta inalterabile, priva di acidi, a PH neutro, conforme alle norme Iso 9706 ∞.

INDICE

PREFAZIONE ..... pag. 1

Capitolo 1 — **I NUMERI E LE FUNZIONI REALI**

1. Premessa ..... " 3
2. Gli assiomi dei numeri reali ..... " 4
3. Alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali ..... " 5
4. Cenni di teoria degli insiemi ..... " 6
5. Numeri naturali, interi, razionali ..... " 8
6. Funzioni e rappresentazione cartesiana ..... " 10
7. Funzioni invertibili. Funzioni monotòne ..... " 11
8. Funzioni lineari. Funzione valore assoluto ..... " 13
9. Le funzioni potenza, esponenziale, logaritmo " 18
10. Le funzioni trigonometriche ..... " 21
11. Luoghi geometrici ..... " 24
12. Il principio di induzione ..... " 29
13. Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore ..... " 31
14. I numeri complessi ..... " 35
15. Crescita di una popolazione batterica. Decadimento di sostanze radioattive ..... " 38

Capitolo 2 — **MATRICI E DETERMINANTI**

16. Matrici ..... " 41
17. Operazioni con le matrici ..... " 42
18. Determinante di una matrice 2×2 ..... " 45
19. Determinante di una matrice 3×3 ..... " 47
20. Determinante di una matrice $n \times n$ ..... " 50
21. Matrici inverse ..... " 54
22. Caratteristica di una matrice ..... " 55

Capitolo 3 — **SISTEMI LINEARI**

23. Sistemi lineari di m equazioni in n incognite pag. 57
24. Il teorema di Cramer " 58
25. Introduzione al metodo di Gauss " 63
26. Il metodo di eliminazione di Gauss " 65
27. Il teorema di Rouché-Capelli " 71
28. Sistemi omogenei " 74
29. Autovalori di una matrice " 76
30. Esempi di utilizzo di sistemi lineari: leggi di Kirchhoff e flusso di traffico automobilistico " 78

Capitolo 4 — **ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA DEL PIANO**

31. Lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$ " 83
32. Prodotto scalare. Ortogonalità fra vettori. Il piano euclideo " 86
33. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare " 89
34. La retta " 92
35. Equazioni della retta " 95
36. Parallelismo e perpendicolarità tra rette del piano " 98
37. Cambiamenti di riferimento nel piano. Coordinate polari " 100
38. Circonferenza, ellisse, iperbole, parabola " 105
39. Equazione generale delle coniche " 113

Capitolo 5 — **LIMITI DI SUCCESSIONI**

40. Premessa " 115
41. Definizioni e prime proprietà " 117
42. Successioni limitate " 121
43. Operazioni con i limiti " 122
44. Forme indeterminate " 123
45. Teoremi di confronto " 124
46. Altre proprietà dei limiti di successioni " 126
47. Alcuni limiti notevoli " 128
48. Successioni monotòne. Il numero e " 132
49. Ancora sul numero e " 135

50. Utilizzo del numero e in matematica finanziaria pag. 138

Capitolo 6 — **LIMITI DI FUNZIONI. FUNZIONI CONTINUE**

51. Premessa " 141
52. Definizioni " 144
53. Esempi e proprietà dei limiti di funzioni " 147
54. Funzioni continue " 150
55. Discontinuità " 152
56. Alcuni teoremi sulle funzioni continue " 155

Capitolo 7 — **COMPLEMENTI AI LIMITI**

57. Punti di accumulazione " 161
58. Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni " 164
59. Metodo di bisezione per il calcolo delle radici di una equazione " 165
60. Il teorema sulle successioni monotòne " 168
61. Successioni estratte. Il teorema di Bolzano-Weierstrass " 169
62. Il teorema di Weierstrass " 171
63. Continuità delle funzioni monotòne e delle funzioni inverse " 172
64. Successioni di Cauchy " 174

Capitolo 8 — **CALCOLO DELLE PROBABILITÀ**

65. Calcolo combinatorio " 177
66. Il binomio di Newton " 179
67. Introduzione al concetto di probabilità " 182
68. Eventi e probabilità " 185
69. Distribuzione binomiale " 189
70. Probabilità condizionata e indipendenza " 191
71. Variabili aleatorie " 194
72. Distribuzione di probabilità e funzione di distribuzione " 195
73. Valor medio e varianza " 197
74. La legge dei grandi numeri " 200

Capitolo 9 — **DERIVATE**

75. Tasso di accrescimento. Significato meccanico della derivata ..... pag. 203
76. Definizione di derivata ..... " 204
77. Operazioni con le derivate ..... " 207
78. Derivate delle funzioni composte e delle funzioni inverse ..... " 209
79. Derivate delle funzioni elementari ..... " 211
80. Significato geometrico della derivata. Retta tangente ..... " 215
81. Le funzioni trigonometriche inverse ..... " 220

Capitolo 10 — **APPLICAZIONI DELLE DERIVATE. STUDIO DI FUNZIONI**

82. Massimi e minimi relativi. Teorema di Fermat " 225
83. I teoremi di Rolle e di Lagrange ..... " 227
84. Funzioni crescenti e decrescenti ..... " 229
85. Funzioni convesse e concave ..... " 232
86. Il teorema di L'Hôpital ..... " 236
87. Studio del grafico di una funzione ..... " 238
88. La formula di Taylor ..... " 242

Capitolo 11 — **FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI**

89. Funzioni di due variabili: dominio; rappresentazione cartesiana ..... " 249
90. Limiti e continuità ..... " 258
91. Derivate parziali. Gradiente ..... " 260
92. Derivate successive. Teorema di Schwarz ..... " 264
93. Massimi e minimi relativi ..... " 267
94. Funzioni di tre o più variabili reali ..... " 273

Capitolo 12 — **INTEGRALI DEFINITI**

95. Il metodo di esaustione ..... " 275
96. L'integrale definito: interpretazione geometrica ..... " 279
97. Prime proprietà. Il teorema della media ..... " 283
98. Definizioni e notazioni ..... " 285

99. Proprietà degli integrali definiti ..... pag. 290
100. Uniforme continuità. Teorema di Cantor ..... " 291
101. Integrabilità delle funzioni continue ..... " 293
102. I teoremi della media ..... " 294

Capitolo 13 — **INTEGRALI INDEFINITI**

103. Il teorema fondamentale del calcolo integrale " 297
104. Primitive. Formula fondamentale del calcolo integrale " 299
105. L'integrale indefinito ..... " 301
106. Integrazione per decomposizione in somma ... " 304
107. Integrazione delle funzioni razionali ..... " 305
108. Integrazione per parti ..... " 310
109. Integrazione per sostituzione ..... " 313
110. Calcolo di aree di figure piane ..... " 316
111. Calcolo di volumi ..... " 318
112. Integrali impropri ..... " 322
113. La funzione gaussiana ..... " 325

Capitolo 14 — **SERIE**

114. Serie numeriche ..... " 331
115. Serie a termini non negativi ..... " 333
116. La serie geometrica ..... " 333
117. La serie armonica ..... " 334
118. Criteri di convergenza ..... " 337
119. Serie alternate ..... " 341
120. Convergenza assoluta ..... " 342
121. Proprietà commutativa delle serie ..... " 343
122. Serie di Taylor ..... " 345
123. Cenni sulle serie di Fourier ..... " 348

Capitolo 15 — **EQUAZIONI DIFFERENZIALI**

124. Premessa. Crescita esponenziale ..... " 353
125. Equazioni lineari ..... " 355
126. Teorema di Cauchy per le equazioni lineari del primo ordine ..... " 357
127. Equazioni di Bernoulli ..... " 358

128. Equazioni a variabili separabili ..... pag. 361
129. Perdita di calore di un corpo ..... " 363
130. Il debito di ossigeno ..... " 364
131. Passaggio di una sostanza attraverso una membrana ..... " 367

Capitolo 16 — **MODELLI MATEMATICI IN DINAMICA DI POPOLAZIONI**

132. Crescita di una popolazione isolata ..... " 369
133. Integrazione grafica ..... " 372
134. Crescita di una popolazione non isolata 373
135. Diffusione di una infezione ..... " 377
136. Un modello di crescita della popolazione mondiale ..... " 378

Capitolo 17 — **ELABORAZIONE STATISTICA DI DATI SPERIMENTALI**

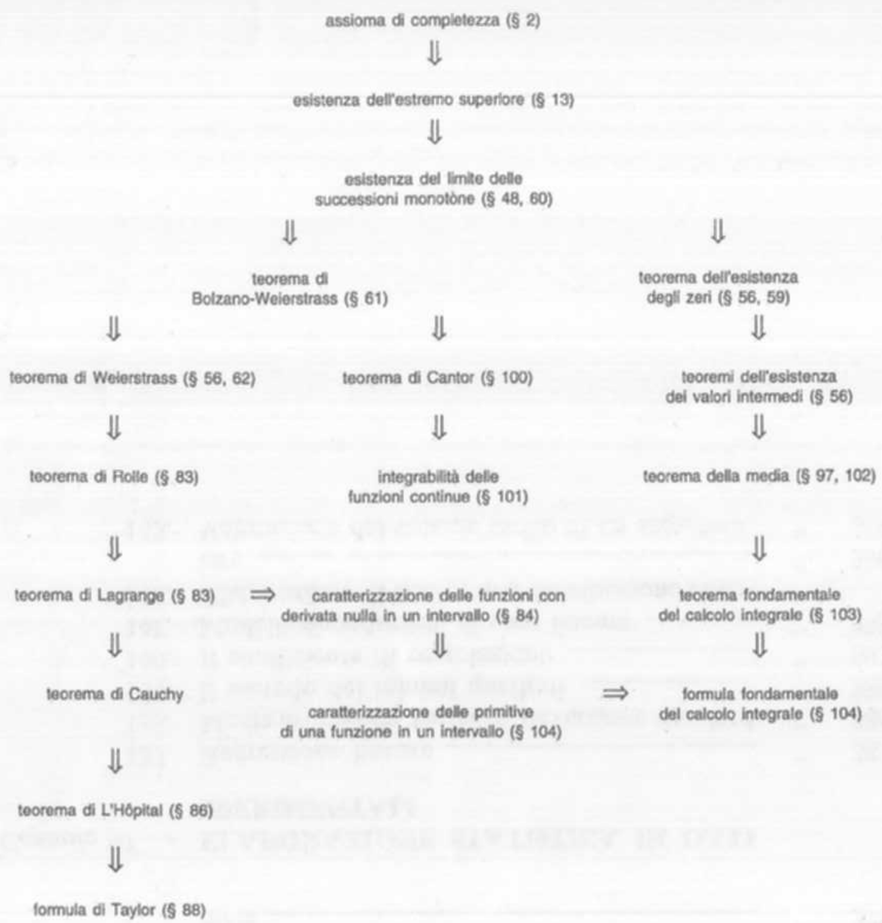
137. Regressione lineare ..... " 385
138. Media aritmetica, varianza, deviazione standard " 386
139. Il metodo dei minimi quadrati ..... " 388
140. Il coefficiente di correlazione ..... " 392
141. Modelli riconducibili al caso lineare ..... " 395
142. Elaborazione di dati di una distribuzione circolare ..... " 396
143. Valutazione del volume idrico di un acquifero " 399

PREFAZIONE

Questo libro trae origine da una precedente esperienza degli autori concretizzatasi in un volume di *Istituzioni di Matematica*. L'esperienza pluriennale di insegnamento sul testo di *Istituzioni* e su altri testi, nonché le segnalazioni ed i commenti pervenuti dai colleghi che in questi ultimi anni hanno sperimentato nei corsi da loro tenuti il volume di *Istituzioni*, hanno guidato il progetto del presente testo di *Elementi di Calcolo*.

È stata tenuta nella massima considerazione l'esigenza, sentita da molti, di un libro di testo rigoroso nei contenuti e, allo stesso tempo, snello e di facile lettura; ciò infatti dovrebbe facilitare lo studio della maggioranza di quegli studenti che si avvicinano ai corsi universitari di Matematica con il timore (o, forse, con il preconcetto) di non essere *a priori* in grado di comprendere a fondo l'argomento. Nel contempo, non è stato sottovalutato il desiderio di quegli studenti, e non sono pochi, che desiderano approfondire argomenti appresi a lezione e risultati particolarmente (e talvolta inaspettatamente) interessanti.

Di seguito è proposto uno schema di collegamento dei principali teoremi (in genere, *di esistenza*) trattati nel testo; tale schema dovrebbe contribuire a dare un'idea al lettore del contenuto culturale di un corso di Matematica, basato non su di un elenco di formule o affermazioni fini a sé stesse, ma su di una serie di argomentazioni logiche tra loro coerenti e conseguenti. Lo schema dovrebbe rivelarsi utile allo studente, anche per la preparazione dell'esame.



Oltre all'assioma di completezza, l'intero sistema di assiomi dei numeri reali è presupposto di tutta la teoria.

Altre implicazioni importanti, non contenute nello schema, sono quelle del teorema di Bolzano-Weierstrass (§ 61), che implica il criterio di convergenza di Cauchy (§ 64) e quella del teorema dell'esistenza dei valori intermedi (§ 56), che implica la continuità delle funzioni inverse (§ 63), che a sua volta implica la derivabilità delle funzioni inverse (§ 78). Inoltre l'esistenza del limite delle successioni monotòne (§ 60) è utilizzata per lo studio del carattere delle serie a termini non negativi (§ 115). Infine, il teorema di Lagrange (§ 83) ha altre importanti applicazioni, ad esempio nei criteri di monotonia (§ 84) e di convessità (§ 85), o nel teorema di Schwarz sull'inversione dell'ordine di derivazione (§ 92).

CAPITOLO 1

I NUMERI E LE FUNZIONI REALI

1 Premessa

Il metodo comunemente usato in Matematica consiste nel precisare senza ambiguità i presupposti, da non cambiare durante l'elaborazione dei dati o della teoria, e nel dedurre da tali presupposti, in modo logico e coerente, il maggior numero di informazioni possibili. In altre parole, i presupposti sono le regole del gioco, che potrebbero essere state anche diverse, ma che, una volta iniziato il gioco, non vengono più cambiate. In Matematica tali presupposti vengono chiamati *postulati* o *assiomi*. Da essi, mediante dimostrazioni, si deducono i risultati o *teoremi*. Sinonimo di teorema è *lemma*, parola più spesso usata per indicare un risultato intermedio, utile soprattutto per dimostrare un altro teorema; altri sinonimi sono *corollario* e *proposizione*.

Il nostro punto di partenza è quello di assumere, come postulato, che esista *il sistema dei numeri reali*. Cioè assumiamo che esista un insieme di numeri, che chiamiamo numeri reali e che indichiamo con **R**, su cui sia possibile, ad esempio, eseguire le quattro operazioni elementari (+, −, ·, /), oppure sia possibile stabilire qual è il maggiore tra due numeri.

Il sistema dei numeri reali è sicuramente già familiare alla maggioranza degli studenti che leggono queste pagine. Infatti stiamo assumendo come punto di partenza (come assioma) quell'insieme di regole per operare sui numeri che il lettore ha sempre usato in modo naturale fin da quando ha imparato a far di conto. Per esempio, è per tutti naturale che $2 + 3$ sia uguale a $3 + 2$, o che $2 \cdot 3 = 3 \cdot 2$. Esprimiamo ciò in modo generale per due numeri reali a, b, dicendo che valgono le proprietà commutative della somma e del prodotto:

$$a + b = b + a, \qquad a \cdot b = b \cdot a \tag{1.1}$$

Il lettore conosce sicuramente (provi a scriverle) anche la proprietà associativa, sia rispetto alla somma che al prodotto, e la proprietà distributiva. Nel paragrafo successivo è riportato un elenco completo delle proprietà che assumiamo valere per assioma. Dividiamo tali proprietà in tre gruppi: quelle relative alle operazioni, le proprietà relative all'ordinamento, e l'assioma di completezza.

2. Gli assiomi dei numeri reali

Assiomi relativi alle operazioni. Sono definite le operazioni di *addizione* (+) e *moltiplicazione* (·) tra coppie di numeri reali, con le seguenti proprietà (a b, c indicano numeri reali generici):

(2.1) *Proprietà associativa*:
$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$

(2.2) *Proprietà commutativa*: $a + b = b + a, \quad a \cdot b = b \cdot a.$

(2.3) *Proprietà distributiva*: $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c.$

(2.4) *Esistenza degli elementi neutri: esistono in* **R** *due numeri distinti* 0, 1, *tali che* $a + 0 = a, \quad a \cdot 1 = a.$

(2.5) *Esistenza degli opposti: per ogni numero reale* a *esiste un numero reale, indicato con* $-a$, *tale che* $a + (-a) = 0.$

(2.6) *Esistenza degli inversi: per ogni numero reale* $a \neq 0$ *esiste un numero, indicato con* a^{-1}, *tale che* $a \cdot (a^{-1}) = 1.$

Assiomi relativi all'ordinamento. È definita la relazione di *minore o uguale* (≤) tra coppie di numeri reali con le seguenti proprietà:

(2.7) *Dicotomia: per ogni coppia di numeri reali* a, b *si ha* $a \leq b$ *oppure* $b \leq a$.

(2.8) *Proprietà asimmetrica: se valgono contemporaneamente le relazioni* $a \leq b$, $b \leq a$, *allora* $a = b$.

(2.9) *Se* $a \leq b$ *allora vale anche* $a + c \leq b + c$.

(2.10) *Se* $0 \leq a$ e $0 \leq b$ *allora valgono anche* $0 \leq a + b$, $0 \leq a \cdot b$.

Assioma di completezza

(2.11) *Siano* A *e* B *due insiemi non vuoti di numeri reali con la proprietà che* $a \leq b$, *comunque si scelgano a elemento di* A *e* b *elemento di B. Allora esiste almeno un numero reale* c *tale che* $a \leq c \leq b$, *qualunque siano* a *in* A *e* b *in* B.

3. Alcune conseguenze degli assiomi dei numeri reali

Nel paragrafo precedente sono state elencate le proprietà dei numeri reali che vengono assunte come assiomi. Tutte le altre proprietà e teoremi esposti in questo libro discendono dagli assiomi. Sono conseguenze degli assiomi anche quelle proprietà elementari che in genere fanno parte del «bagaglio matematico» di ogni studente, come ad esempio il fatto che *un prodotto è nullo quando almeno uno dei due fattori è nullo*, oppure quella regola dei segni per il prodotto (che, dagli studenti delle scuole elementari talvolta è accettata come imposizione, perché incompresa) che schematicamente si enuncia: *meno per meno fa più*, oppure la norma di frequente applicazione nel risolvere disequazioni: *moltiplicando entrambi i membri per una quantità negativa, il verso della disequazione cambia.*

L'assioma di completezza (2.11) a prima vista può sembrare ovvio: «se tutti i numeri dell'insieme A sono minori od uguali a tutti i numeri dell'insieme B, allora esisterà certamente un numero c intermedio fra A e B, cioè tale che $a \leq c \leq b$ per ogni elemento a di A e per ogni elemento b di B; basterà infatti scegliere come numero c il più grande elemento di A, oppure il più piccolo elemento di B».

Ebbene, *la frase scritta precedentemente fra virgolette è sbagliata!* Infatti non tutti gli insiemi numerici hanno il più grande od il più piccolo elemento (rimandiamo al paragrafo 15 per un approfondimento di questo punto): ad esempio, l'insieme

$$B = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\right\},$$

che, rappresentato sulla retta dà luogo ad uno schema come quello in figura 1.1, ha il più grande elemento, che è uguale ad 1, ma non ha il più piccolo elemento; potremmo essere tentati di dire che lo zero è il più piccolo elemento di B, ma lo zero *non è* un elemento di B! Infatti lo zero è diverso da 1/n qualunque sia n (una frazione è nulla se e soltanto se il numeratore della frazione è nullo).

L'assioma di completezza è, in effetti, un assioma molto più profondo di quanto possa sembrare a prima vista. Come mostreremo nel paragrafo 5, soltanto tramite l'assioma di completezza è possibile distinguere l'insieme

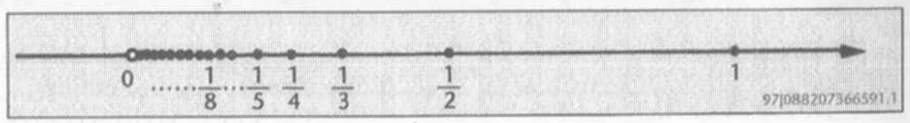


Figura 1.1

dei numeri rappresentabili sotto forma di frazione, insieme detto dei *numeri razionali*, dall'insieme dei numeri reali.

4. Cenni di teoria degli insiemi

Introduciamo alcune notazioni e definizioni tratte dalla teoria degli insiemi. Sia S un insieme di natura qualsiasi. Per indicare che x è un elemento di S scriveremo:

$$x \in S \qquad (x \textit{ appartiene a } S).$$

Per indicare, invece, che y non è un elemento di S, scriveremo:

$$y \notin S \qquad (y \textit{ non appartiene a } S).$$

Se A è un insieme i cui elementi sono anche elementi di S, diremo che A è un *sottoinsieme* o *parte* di S.

Tra i sottoinsiemi di S si suole considerare anche l'*insieme vuoto*, cioè l'insieme privo di elementi, che si indica con ϕ.

Se A e B sono due sottoinsiemi di S, l'*intersezione* $A \cap B$ di A e B è l'insieme degli elementi di S che sono comuni ad A e B (figura 1.2):

(4.1) $$A \cap B = \{x \in S : x \in A \quad e \quad x \in B\}.$$

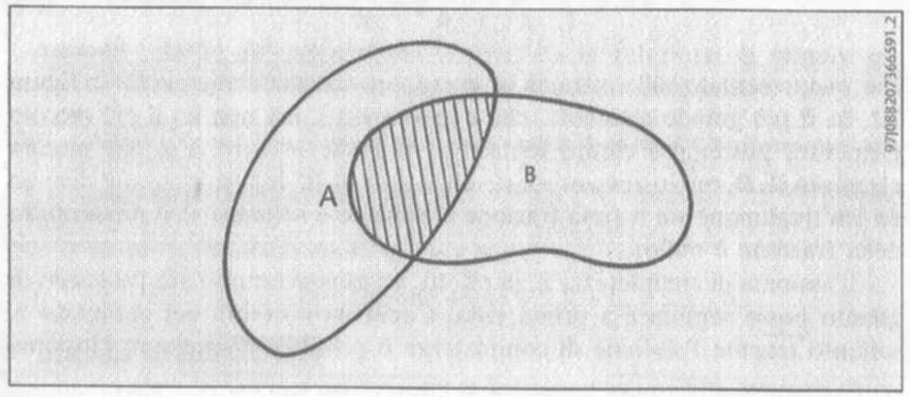


Figura 1.2

L'*unione* $A \cup B$ di A e B è l'insieme costituito dagli elementi di S che appartengono ad almeno uno dei due insiemi A e B (figura 1.3):

(4.2) $$A \cup B = \{x \in S : x \in A \textit{ oppure } x \in B\}.$$

Diremo che A è *contenuto* in B ($A \subseteq B$) se ogni elemento di A è anche elemento di B:

(4.3) $$(A \subseteq B) \iff (a \in A \Rightarrow a \in B)$$

Il simbolo $\iff$ si legge «*se e solo se*» ed il simbolo $\Rightarrow$ si legge «*implica*».

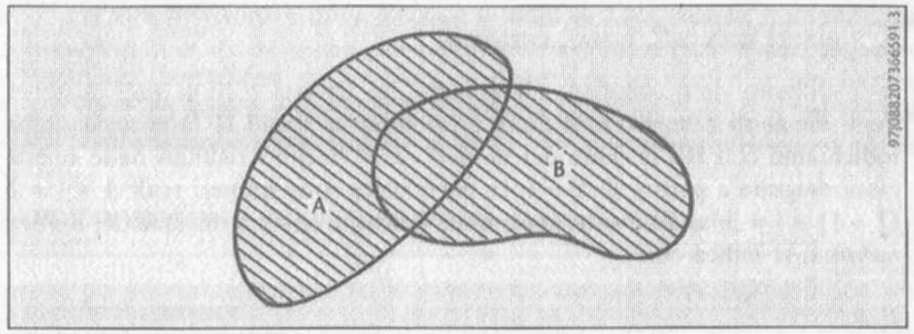


Figura 1.3

Se A e B sono due sottoinsiemi dell'insieme S, il *complemento* $A - B$ di B rispetto ad A è l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B (figura 1.4):

(4.4) $$A - B = \{x \in S : x \in A \; e \; x \notin B\}.$$

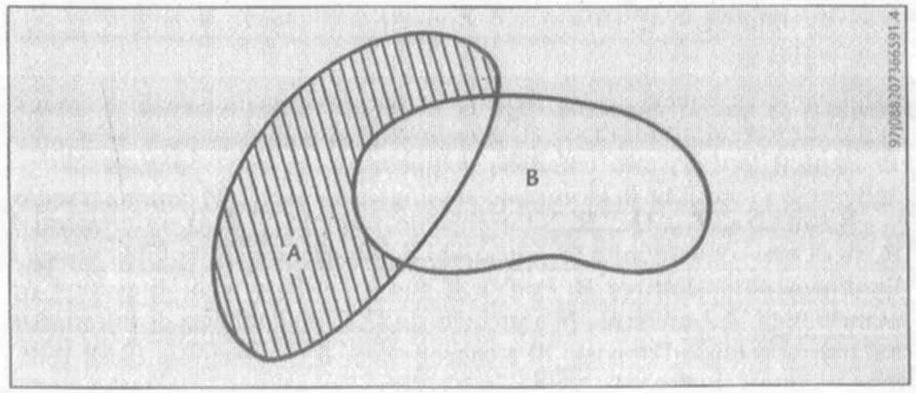


Figura 1.4

In particolare, per A = S, l'insieme S – B, complemento di B rispetto a S, si chiama anche *complementare* di B e si indica con B^c oppure con – B. Evidentemente si ha:

$$A \subseteq B \iff B^c \subseteq A^c . \tag{4.5}$$

L'insieme di tutti i sottoinsiemi di S si suole indicare con P(S) e si chiama *insieme delle parti di* S.

5. Numeri naturali, interi, razionali

Abbiamo visto come tra gli assiomi dei numeri reali ci sia l'esistenza degli elementi neutri 0 e 1. Quindi apparterranno ad **R** (come già detto, indichiamo con **R** l'insieme dei *numeri reali*) anche i risultati delle operazioni eseguite a partire da 0 e 1. In particolare sono numeri reali: 1 + 1 = 2, (1 + 1) + 1 = 3, ... Tale sottoinsieme di **R**, che si chiama insieme dei *numeri naturali*, si indica con

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, ..., n, ...\}. \tag{5.1}$$

Analogamente indichiamo con **Z** il sottoinsieme di **R** costituito dagli elementi di **N**, dai loro opposti, e dallo 0. Cioè l'insieme dei *numeri interi* (o *interi relativi*) si indica con

$$\mathbf{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2,...\} = \{0\} \cup \{\pm n : n \in \mathbf{N}\}. \tag{5.2}$$

I risultati della divisione m/n (che, con la terminologia introdotta dagli assiomi, significa $m \cdot n^{-1}$) con m, n ∈ **Z**, n ≠ 0, si chiamano *numeri razionali* e si indicano con

$$\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbf{Z}, n \neq 0\right\} . \tag{5.3}$$

Risulta $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R}$. Naturalmente, essendo **N, Z, Q** sottoinsiemi di **R**, su di essi sono definite le operazioni di addizione e di moltiplicazione e l'ordinamento indotti da **R**. Però essi non soddisfano tutti gli assiomi dei numeri reali. Ad esempio, **N** non soddisfa (2.5): nell'ambito di soli numeri naturali non esiste l'opposto di alcun numero. **Z** non soddisfa (2.6): tutti i numeri interi, escluso 1, hanno per inverso un numero reale che non è intero; in altre parole, non esiste l'inverso nell'ambito dei numeri interi.

Si può verificare che invece **Q** soddisfa tutte le proprietà algebriche relative alle operazioni e all'ordine. L'unico assioma non soddisfatto da **Q** è l'assioma di completezza (2.11). Mostriamo ciò con un esempio: consideriamo i due sottoinsiemi A e B di **Q**

$$A = \{a \in \mathbf{Q}: a^2 \leq 2\}, \qquad B = \{b \in \mathbf{Q}: b^2 \geq 2, b > 0\} . \tag{5.4}$$

Tutti i numeri di A sono minori di tutti i numeri di B.

In base all'assioma di completezza esiste un numero *reale* c con la proprietà che a ≤ c ≤ b, per ogni a ∈ A, b ∈ B. Tale numero, che si può dimostrare essere unico è tale che $c^2 = 2$ e si denota comunemente con $c = \sqrt{2}$.

Però c non è un numero *razionale*, come è dimostrato nella proposizione che segue.

PROPOSIZIONE. — *Il numero reale $\sqrt{2}$ non è razionale.*

Dimostrazione: continuando ad usare la notazione $c = \sqrt{2}$, ricordiamo che c è un numero reale positivo con la proprietà che $c^2 = 2$. Se, per assurdo, c fosse un numero razionale, in base alla definizione (5.3) esisterebbero m, n numeri interi per cui c = m/n. Se necessario possiamo «semplificare» la frazione m/n, ottenendo m, n *primi fra loro*, cioè privi di divisori comuni. Risulta $(m/n)^2 = c^2 = 2$, cioè $2n^2 = m^2$. Essendo il primo membro $2n^2$ un numero intero pari, anche m^2 deve essere pari; ma allora anche m deve essere pari (se m fosse dispari, anche m^2 sarebbe dispari); quindi m = 2k, con k intero. Ne segue che

$$2\,n^2 = m^2 = 4\,k^2 , \qquad \text{cioè} \qquad n^2 = 2\,k^2 . \tag{5.5}$$

Ripetendo il ragionamento, risulta che anche n deve essere un numero pari, ciò che contrasta con l'ipotesi che m ed n siano numeri interi primi fra loro.

Riassumendo con parole semplici, possiamo dire che nell'insieme dei numeri naturali **N** si possono eseguire le operazioni di addizione e di moltiplicazione, ma non è possibile in genere eseguire le operazioni inverse di sottrazione e di divisione. **Z** è un ampliamento di **N** che permette di calcolare anche le differenze, ma non i quozienti. **Q** è un ulteriore ampliamento; in **Q** è possibile eseguire le quattro operazioni fondamentali (tranne naturalmente la divisione per zero), ma non è possibile in generale eseguire altri calcoli altrettanto utili, come ad esempio l'estrazione di radice. Come vedremo, **R** è invece sufficientemente ricco per la maggior parte delle applicazioni.

6. Funzioni e rappresentazione cartesiana

Siano A e B due insiemi di numeri reali. Una *funzione* di A in B è una legge che ad ogni elemento di A fa corrispondere uno ed uno solo elemento di B. Se indichiamo con f tale funzione, scriveremo $f : A \to B$, oppure $y = f(x)$, intendendo che ad ogni elemento $x \in A$ corrisponde, tramite la funzione f, l'elemento $y = f(x) \in B$.

Si dice che A è il *dominio* o *insieme di definizione* di f. Il simbolo f( ) indica un complesso di operazioni che devono effettuarsi su x (*argomento* di f) per ottenere y (*valore* di f), come negli esempi seguenti:

(6.1) $f(x) = 2x + 1$ — occorre moltiplicare x per 2 e sommare 1;

(6.2) $f(x) = 1/x$ — occorre calcolare l'inverso di x;

(6.3) $f(x) = \sqrt{x}$ — si deve calcolare la radice di x;

(6.4) $f(x) = \begin{cases} 0 \ se \ x \in \mathbf{Z} \\ 1 \ altrimenti \end{cases}$ — occorre riconoscere se x è intero oppure no, e di conseguenza assegnare ad f(x) il valore 0 oppure 1.

La funzione (6.1) è definita per ogni x reale; in altre parole il suo dominio è tutto **R**. La funzione (6.2) è definita per $x \neq 0$, quindi il suo dominio è $A = \{x \in \mathbf{R}: x \neq 0\}$. Il dominio della (6.3) è $A = \{x \in \mathbf{R}: x \geq 0\}$, mentre la (6.4) è definita su tutto **R**.

Ricordiamo brevemente come effettuare la *rappresentazione cartesiana* di una funzione. Riferendoci alla figura 1.5, consideriamo due rette perpendicolari che si intersecano in un punto 0, origine degli assi. Fissiamo sulle due rette una direzione positiva ed una unità di misura. Chiamiamo asse

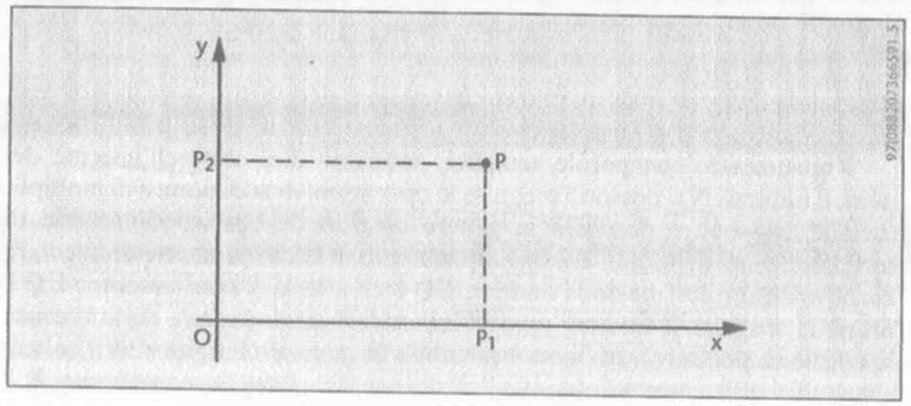


Figura 1.5

delle *ascisse*, o asse x, una delle due rette, asse delle *ordinate*, o asse y, l'altra retta.

Ad ogni numero reale x corrisponde in modo biunivoco un punto P_1 dell'asse delle x, scelto in modo che il segmento OP_1 abbia lunghezza uguale ad x. Analogamente ad ogni numero reale y corrisponde un punto P_2 dell'asse y, tale che il segmento OP_2 abbia lunghezza uguale a y. Tracciamo due rette parallele agli assi e passanti rispettivamente per P_1 e P_2. Il punto P di incontro delle due rette corrisponde in modo biunivoco alla coppia di numeri reali (x, y).

Se è assegnata una funzione f, in corrispondenza alle coppie di numeri reali (x, f(x)) abbiamo un insieme di punti del piano, ottenuti con la rappresentazione cartesiana sopraindicata, che costituisce il *grafico* della funzione.

In figura 1.6 abbiamo riportato i grafici delle quattro funzioni considerate fin dall'inizio del paragrafo; il lettore verifichi i disegni proposti per punti, cioè assegnando alla variabile indipendente x dei valori su cui calcolare semplicemente la funzione; ad esempio, nel caso (6.3), x = 0, 1, 4, 9,...

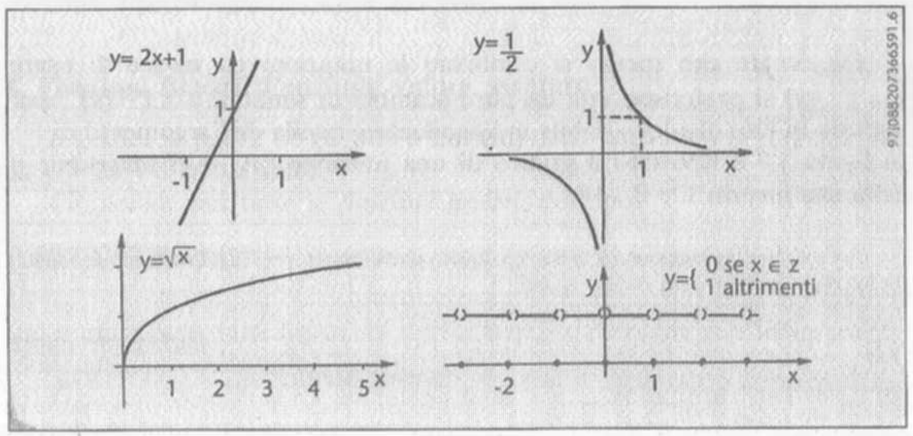


Figura 1.6

7. Funzioni invertibili. Funzioni monotòne

Supponiamo che la corrispondenza tramite la funzione f tra due insiemi A e B sia *biunivoca*. Cioè supponiamo che f non solo faccia corrispondere ad ogni $x \in A$ uno ed uno solo valore $y \in B$, ma anche che per ogni $y \in B$ esista un solo $x \in A$ tale che $f(x) = y$. In tali condizioni diciamo che f è *invertibile*. La funzione da B ad A che ad ogni $y \in B$ fa corrispondere l'unico $x \in A$ per cui

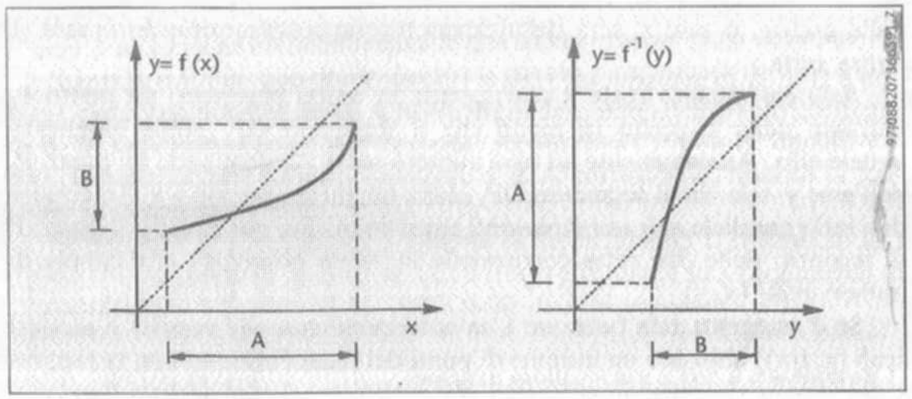


Figura 1.7

$f(x) = y$, si chiama *funzione inversa* e si indica con f^{-1}. Si ha (il simbolo $\forall$ si legge *per ogni*):

(7.1) $\quad f^{-1}(f(x)) = x, \quad \forall\, x \in A; \qquad f(f^{-1}(y)) = y, \quad \forall y \in B.$

Da notare che spesso si cambiano le notazioni ed invece di usare $x = f^{-1}(y)$ si preferisce, con un puro scambio di simboli, $y = f^{-1}(x)$, per mettere in luce che la variabile indipendente è quella dell'argomento di f^{-1}. In figura 1.7 è riportato il grafico di una funzione $f: A \to B$ invertibile e della sua inversa $f^{-1}: B \to A$.

Ad esempio, la funzione (6.1) è invertibile; infatti, fissato $y = f(x)$, risulta $x = (y - 1)/2$. La funzione inversa della (6.1) è quindi

(7.2) $$f^{-1}(x) = \frac{x-1}{2}.$$

Anche la funzione (6.2) è invertibile e risulta $f^{-1}(x) = 1/x$ (è solo un caso che f ed f^{-1} coincidano!). La funzione (6.3) è anche invertibile e $f^{-1}(x) = x^2$, per $x \geq 0$. Mentre la (6.4) non è invertibile, perché non stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme $A = \mathbf{R}$ e l'insieme B costituito dai soli due valori 0,1.

Diremo che una funzione f è *monotòna* in un insieme A, se verifica una delle condizioni seguenti ($\forall\, x_1, x_2 \in A$):

(7.3) f *strettamente crescente*: $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,

(7.4) f *crescente*: $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$,

(7.5) f *strettamente decrescente*: $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$,

(7.6) f *decrescente*: $\quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

Una funzione che verifica la (7.3), oppure la (7.5), si dice *strettamente monotòna*.

Ad esempio, la funzione (6.1) è strettamente crescente su $\mathbf{R}$; la funzione (6.2) è strettamente decrescente, separatamente negli insiemi $\{x > 0\}$ e $\{x < 0\}$. La funzione (6.3) è strettamente crescente. La funzione (6.4) non è monotòna su $\mathbf{R}$.

Ci sarà utile nel seguito un *criterio* per riconoscere se una data funzione è invertibile. Rimandando al criterio di invertibilità del paragrafo 56 per una visione più completa dell'argomento, supponiamo che la corrispondenza tramite una funzione f tra due insiemi A e B sia tale che ad ogni $y \in B$ corrisponde *almeno* un $x \in A$. *Se* f *è strettamente monotòna allora è anche invertibile*. Infatti, ad ogni $y \in B$ corrisponde *un solo* $x \in A$ per cui $f(x) = y$; perché, se ne esistessero due distinti $x_1 \neq x_2$, i corrispondenti valori $f(x_1)$, $f(x_2)$ dovrebbero essere diversi fra loro a causa della stretta monotonia.

8. Funzioni lineari. Funzione valore assoluto

Il grafico in figura 1.6 (in alto a sinistra) della funzione $y = y(x)$ definita da $y = 2x + 1$ è una retta.

Ciò accade per tutte le *funzioni lineari*, del tipo:

(8.1) $$y = mx + q,$$

con m, q numeri reali fissati. In particolare il parametro m è detto *coefficiente angolare* della retta.

Ogni funzione lineare è monotòna su $\mathbf{R}$, anzi, strettamente monotòna se $m \neq 0$. Infatti, basta considerare $x_1 < x_2$ e $f(x) = mx + q$, da cui

$$f(x_1) = m\,x_1 + q, \qquad f(x_2) = m\,x_2 + q;$$

se il coefficiente angolare m è positivo, allora, essendo $x_1 < x_2$ risulta anche $m\,x_1 < m\,x_2$ e quindi $f(x_1) < f(x_2)$; in questo caso f(x) risulta strettamente crescente su $\mathbf{R}$. Se invece m è negativo, allora da $x_1 < x_2$ segue $m\,x_1 > m\,x_2$ e quindi $f(x_1) > f(x_2)$; perciò, se $m < 0$, la funzione lineare f(x) è strettamente decrescente. Infine, se $m = 0$, allora risulta $f(x) = q =$ costante; essendo $f(x_1) = f(x_2)$ per ogni coppia di valori x_1, x_2, la funzione f(x) è

contemporaneamente crescente e decrescente su **R**; si dice brevemente che *la funzione è costante* su **R**. Il grafico di f(x) in questo caso è una retta parallela all'asse x, costituita dai punti (x, y) con ascissa arbitraria e ordinata costante uguale a q.

Ricordiamo il criterio esposto alla fine del paragrafo precedente, criterio in base al quale una funzione strettamente monotòna su un insieme è anche invertibile su tale insieme. Nel caso in considerazione la funzione $f(x) = mx + q$ è strettamente monotòna su **R** se $m \neq 0$ e quindi è anche invertibile se $m \neq 0$. Tale fatto è di semplice verifica diretta: infatti, se $m \neq 0$, vale l'equivalenza:

$$y = mx + q \iff x = \frac{y - q}{m}$$

che, con i simboli introdotti nel paragrafo precedente, significa che la funzione inversa $f^{-1}(y)$ della funzione lineare $f(x) = mx + q$ è data da

$$f^{-1}(y) = \frac{y - q}{m}. \tag{8.2}$$

Al contrario, se $m = 0$, la funzione costante $f(x) = q$ non stabilisce una corrispondenza biunivoca tra l'insieme **R** e l'insieme $B = \{q\}$ costituito dal solo valore $y = q$; perciò la funzione costante $f : \mathbf{R} \to \{q\}$ non è invertibile.

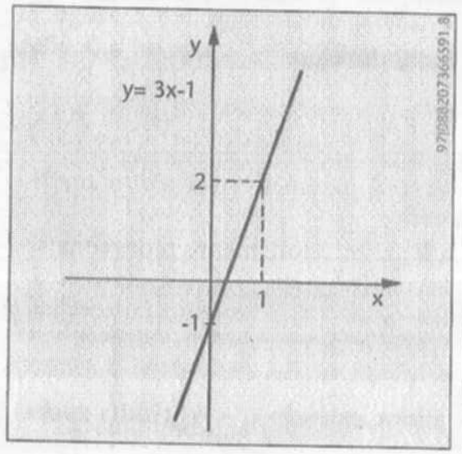


Figura 1.8

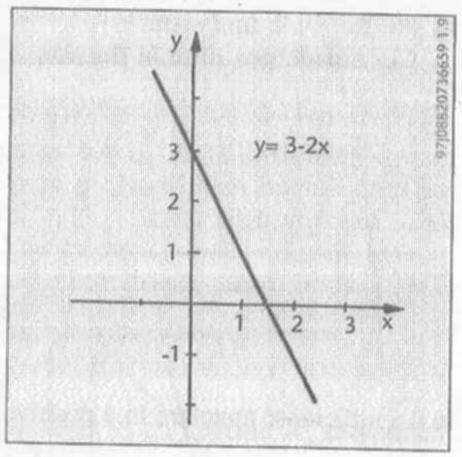


Figura 1.9

Dato che per due punti distinti del piano passa una ed una sola retta, per disegnare il grafico di una funzione lineare è sufficiente calcolare l'ordinata y in (8.1) in corrispondenza a due valori distinti della variabile x.

Ad esempio, nel caso della funzione lineare $y = 3x - 1$, ad $x = 0$ corrisponde $y = -1$ e ad $x = 1$ corrisponde $y = 2$; pertanto il grafico è come quello in figura 1.8, ottenuto disegnando la retta passante per i punti di coordinate $(0, -1)$ e $(1, 2)$. Il lettore ritrovi da solo il grafico in figura 1.9 relativo alla funzione lineare $y = 3 - 2x$.

Il *valore assoluto* (o *modulo*) di x è definito da

$$|x| = \begin{cases} x & se \quad x \geq 0 \\ -x & se \quad x < 0 . \end{cases} \tag{8.3}$$

Il grafico della *funzione valore assoluto* $f(x) = |x|$ è composto da due semirette per l'origine, di equazione rispettivamente $y = x$ e $y = -x$, come nella figura 1.10.

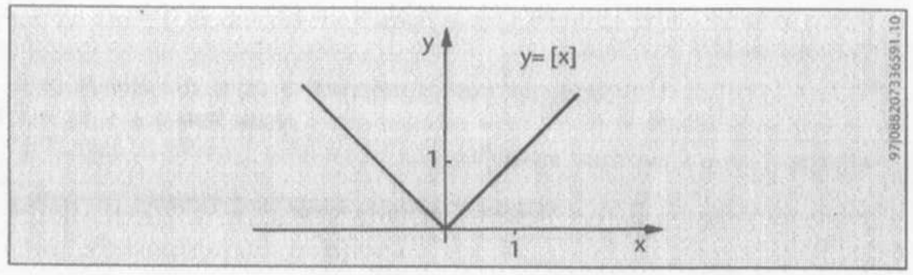


Figura 1.10

Più precisamente, il grafico in figura 1.10, della funzione valore assoluto, è unione della semiretta di equazione lineare $y = x$, con $x \geq 0$, e della semiretta $y = -x$, con $x < 0$.

Le seguenti proprietà sono diretta conseguenza della definizione (8.3):

$$|x| \geq 0, \quad \forall\, x \in \mathbf{R}; \tag{8.4}$$

$$|x| = 0 \iff x = 0; \tag{8.5}$$

(8.6) $\quad |-x| = |x|, \qquad \forall\, x \in \mathbf{R};$

(8.7) $\quad |x_1 \cdot x_2| = |x_1| \cdot |x_2|, \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{R};$

(8.8) $\quad |x_1 / x_2| = |x_1| / |x_2|, \qquad \forall\, x_1, x_2 \in \mathbf{R},\ x_2 \neq 0.$

Dimostriamo ad esempio la (8.4): se $x \geq 0$ allora $|x| = x$ e quindi in questo caso $|x| \geq 0$; se invece $x < 0$, allora $|x| = -x$ e quindi, essendo $-x > 0$, risulta $|x| > 0$; in definitiva $|x| \geq 0$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

La (8.5) è immediata; le (8.7), (8.8) sono diretta conseguenza della «regola dei segni». Proviamo la (8.6): se $x > 0$ allora $|x| = x$ e $|-x| = -(-x) = x$, dato che $-x < 0$; perciò $|x| = |-x|$ se $x > 0$. Analogamente se $x < 0$ risulta $|x| = -x$ e $|-x| = -x$, essendo $-x > 0$; anche in questo caso $|x| = |-x|$. Infine, se $x = 0$, si ha $-0 = 0$ e pertanto $|-0| = |0|$.

Esaminiamo ora le seguenti proprietà (8.9) e (8.10), la cui interpretazione geometrica è schematizzata in figura 1.11.

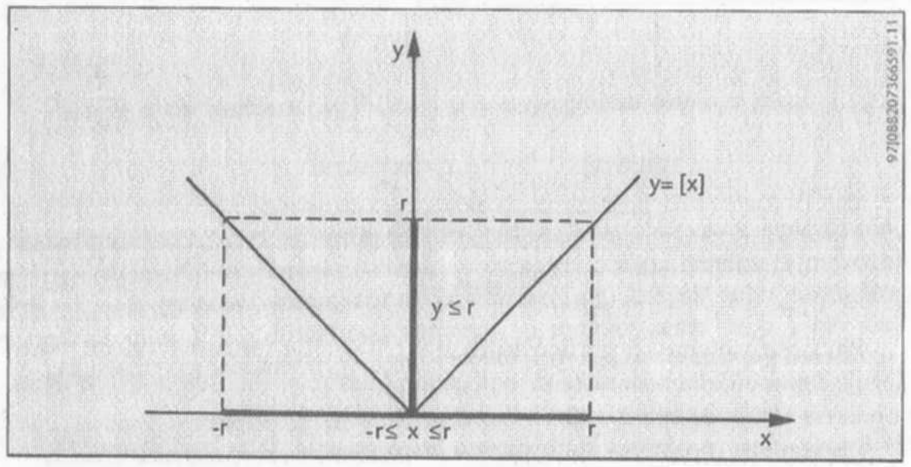


Figura 1.11

PROPOSIZIONE. — *Per ogni numero reale $r \geq 0$ valgono le equivalenze:*

(8.9) $\quad |x| \leq r \iff -r \leq x \leq r;$

(8.10) $\quad |x| < r \iff -r < x < r.$

Dimostrazione: la verifica delle due equivalenze può procedere allo stesso modo; perciò ci limitiamo a dimostrare la (8.9). In base alla definizione (8.3) del valore assoluto, la relazione $|x| \leq r$ equivale ai due casi:

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x \leq r \end{cases}, \qquad \begin{cases} x < 0 \\ -x \leq r \end{cases};$$

il primo sistema si riscrive nella forma $0 \leq x \leq r$, mentre il secondo equivale a $-r \leq x < 0$. Unendo i due risultati si trova infine $-r \leq x \leq r$.

La seguente proprietà (8.11) del valore assoluto, detta *disuguaglianza triangolare*, è di grande importanza. La spiegazione intuitiva della disuguaglianza è semplice: a secondo membro della (8.11) compare la somma di due numeri *positivi o nulli* (i moduli dei due numeri x_1 e x_2), mentre a primo membro compare il modulo della *somma algebrica* di x_1 e x_2; se i segni di x_1 e x_2 sono discordi, il primo membro della (8.11) è minore del secondo membro, mentre se i segni di x_1 e x_2 sono concordi, allora i due membri sono tra loro uguali.

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE. — *Per ogni coppia di numeri reali x_1, x_2 vale la disuguaglianza*

(8.11) $\quad |x_1 + x_2| \leq |x_1| + |x_2|.$

Dimostrazione: per ogni numero reale x la relazione $|x| \leq |x|$ è ovvia (anzi, vale con il segno =); indicando con r il secondo membro di tale ovvia relazione, per l'equivalenza (8.9) abbiamo anche $-|x| \leq x \leq |x|$; in particolare, per $x = x_1$ e $x = x_2$:

(8.12) $\quad -|x_1| \leq x_1 \leq |x_1|, \qquad -|x_2| \leq x_2 \leq |x_2|,$

e, sommando membro a membro:

(8.13) $\quad -(|x_1| + |x_2|) \leq x_1 + x_2 \leq (|x_1| + |x_2|).$

La conclusione segue da una nuova applicazione dell'equivalenza (8.9) con $r = |x_1| + |x_2|$.

9. Le funzioni potenza, esponenziale, logaritmo

Consideriamo la funzione *potenza con esponente* $n \in \mathbf{N}$:

(9.1) $$f(x) = x^n ,$$

che è definita, per ogni $x \in \mathbf{R}$, moltiplicando il numero x per se stesso n volte. La funzione f è strettamente crescente per $x \geq 0$, cioè:

(9.2) $$0 \leq x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1^n < x_2^n .$$

Infatti, se $n = 2$ e se $0 \leq x_1 < x_2$, allora moltiplicando prima per x_1, poi per x_2, si ottiene $x_1^2 \leq x_1 x_2$, $x_1 x_2 < x_2^2$; cioè $x_1^2 < x_2^2$.

Se $n = 3$, partendo da $x_1^2 < x_2^2$ si ottiene $x_1^3 = x_1 x_1^2 \leq x_1 x_2^2 < x_2 x_2^2 = x_2^3$, e così via se $n > 3$ (si veda anche il paragrafo 12 sul principio di induzione).

Per mezzo del teorema dell'esistenza degli zeri, dimostreremo nel paragrafo 56 che ad ogni $y \geq 0$ corrisponde almeno un numero reale $x \geq 0$ per cui $f(x) = x^n = y$. La condizione di stretta monotonia (9.2) implica, come osservato alla fine del paragrafo 7, che la funzione è invertibile. Perciò è definita la funzione inversa di $f(x) = x^n$ $(x \geq 0)$, che si chiama funzione *radice n-sima*, e si indica con

(9.3) $$f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x} = x^{1/n} , \qquad (x \geq 0).$$

I grafici delle funzioni (9.1), per $x \geq 0$, e (9.3) sono come in figura 1.12.

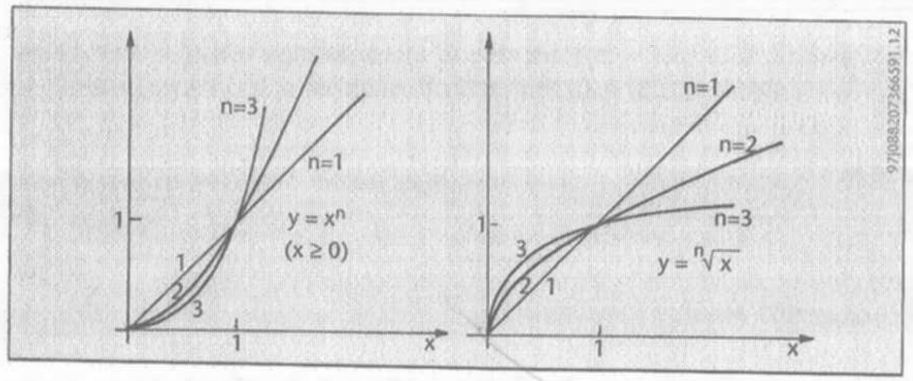


Figura 1.12

Per mezzo delle funzioni (9.1), (9.3) si può definire l'elevazione ad esponente razionale ($m, n \in \mathbf{N}$, $x \in \mathbf{R}$, $x > 0$) :

(9.4) $$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} , \qquad x^{-m/n} = 1/\sqrt[n]{x^m} , \qquad x^0 = 1.$$

A questo punto è stato definito il significato di a^b, con a numero reale positivo e b numero razionale. Utilizzando l'assioma di completezza è possibile estendere la definizione di a^b anche se l'esponente b è un numero reale non razionale.

Elenchiamo alcune proprietà:

(9.5) $$a^b \cdot a^c = a^{b+c} ; \quad (a^b)^c = a^{b \cdot c} .$$

(9.6) $$a^b > 0.$$

(9.7) $$a < b, \quad c > 0 \quad \Rightarrow \quad a^c < b^c .$$

(9.8) $$a < b, \quad c < 0 \quad \Rightarrow \quad a^c > b^c .$$

(9.9) $$a > 1, \quad b < c \quad \Rightarrow \quad a^b < a^c .$$

(9.10) $$a < 1, \quad b < c \quad \Rightarrow \quad a^b > a^c .$$

Dall'espressione a^b derivano due diversi tipi di funzione, a seconda che si faccia variare la base a o l'esponente b. Nel primo caso consideriamo la *funzione potenza* $f(x) = x^b$, con $b \in \mathbf{R}$ fissato. Nel secondo caso abbiamo la *funzione esponenziale* $f(x) = a^x$, con a numero reale positivo fissato.

Casi particolari della *funzione potenza* $f(x) = x^b$ sono quelli con $b = n \in \mathbf{N}$, oppure $b = 1/n$, già esaminati in precedenza. La funzione potenza, per $x > 0$, in base alla (9.6), è positiva. Inoltre x^b *è una funzione strettamente crescente se* $b > 0$ *e strettamente decrescente se* $b < 0$, in base alla (9.7), (9.8). Esempi di grafici nei vari casi sono riportati in figura 1.13.

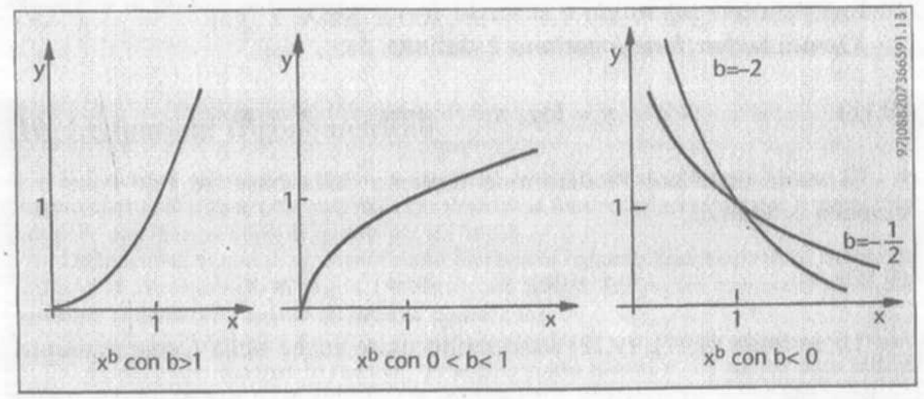


Figura 1.13

La *funzione esponenziale* $f(x) = a^x$, con a numero reale positivo, è una funzione positiva, *è strettamente crescente se* $a > 1$ e *strettamente decrescente se* $a < 1$, in base alle (9.6), (9.9), (9.10).

Esempi di grafici sono riportati in figura 1.14.

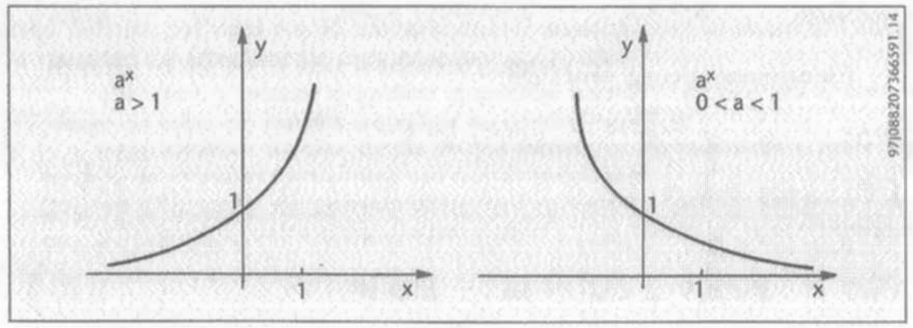


Figura 1.14

Un caso notevolmente importante, e ciò diventerà chiaro nel paragrafo 79, nello studio delle derivate, si ha quando la base è uguale al *numero di Nepero* e = 2.7... (definito nel paragrafo 48). In tal caso ovviamente si indica la funzione esponenziale con $f(x) = e^x$; dato che $e > 1$, la funzione e^x è crescente.

Se $a = 1$, la funzione a^x è identicamente uguale a 1. Si dice in tal caso che la funzione è *costante*. Naturalmente una funzione costante non è invertibile. Se invece $a \neq 1$, allora la funzione esponenziale a^x è invertibile. La funzione inversa è definita sui numeri reali positivi (dato che l'immagine della funzione $y = a^x$ è appunto costituita dai numeri reali positivi); si chiama *funzione logaritmo* e si scrive $f(x) = \log_a x$.

Quindi la *funzione logaritmo* è definita da:

$$y = \log_a x \iff a^y = x. \tag{9.11}$$

Si suole omettere l'indicazione esplicita della base, se tale base è il numero e. Quindi:

$$y = \log x \iff e^y = x. \tag{9.12}$$

Le formule (9.11), (9.12) sono molto usate anche nella forma seguente:

$$a^{\log_a x} = x\,; \qquad e^{\log x} = x. \tag{9.13}$$

Se la base è maggiore di 1, come nel caso (9.12), *il logaritmo è una funzione strettamente crescente.*

Infatti, siano $x_1 < x_2$ e $y_1 = \log x_1$, $y_2 = \log x_2$. Se fosse $y_2 < y_1$ per la (9.9) avremmo $x_2 = e^{y_2} < e^{y_1} = x_1$, contrariamente alle ipotesi. Analogamente è assurdo che $y_1 = y_2$, perché avremmo $x_1 = x_2$. Quindi deve risultare $y_1 < y_2$. Con dimostrazione analoga si verifica che *il logaritmo è una funzione strettamente decrescente se la base è minore di* 1. Esempi di grafici sono riportati in figura 1.15.

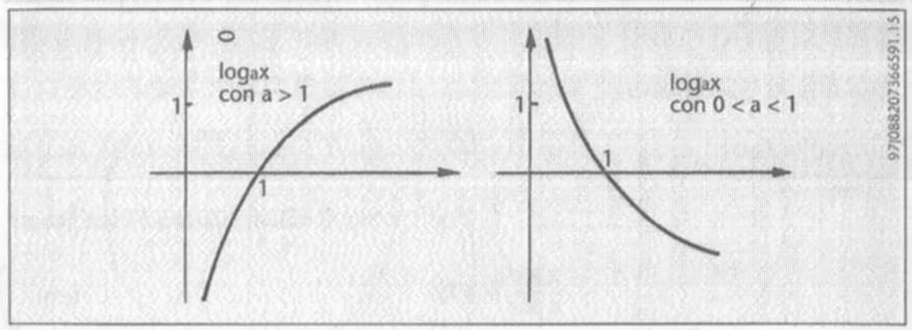


Figura 1.15

Elenchiamo alcune proprietà dei logaritmi:

$$\log_a (x_1 x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2\,, \qquad \forall\, x_1, x_2 > 0; \tag{9.14}$$

$$\log_a (x_1 / x_2) = \log_a x_1 - \log_a x_2\,, \qquad \forall\, x_1, x_2 > 0; \tag{9.15}$$

$$\log_a x^b = b \log_a x\,, \qquad \forall\, x > 0; \tag{9.16}$$

$$\log_b x = \log_a x / \log_a b, \qquad \forall\, x > 0. \tag{9.17}$$

10. Le funzioni trigonometriche

Il lettore sa misurare gli angoli in gradi; ad esempio un angolo retto misura 90°, un angolo piatto 180°, un angolo giro 360°. Per studiare le funzioni trigonometriche è opportuno adottare una diversa unità di misura per gli angoli.

Definiamo la *misura di un angolo* piano espressa in *radianti*. Essa è data dalla *lunghezza dell'arco di circonferenza di raggio* 1 e centro nel vertice dell'angolo *intercettato dalle due semirette individuanti l'angolo* (si veda la figura 1.16).

Si conviene di denotare con π (*pi greco*) la lunghezza di una semicirconferenza di raggio 1. Ciò significa che, espresso in radianti, un angolo piatto misura π, un angolo retto misura $\pi/2$, mentre un angolo giro misura 2π (la lunghezza di una circonferenza di raggio 1 è 2π). Come tutti sanno, un valore numerico approssimato di π è $\pi = 3.14...$

Analogamente a quanto si fa per l'ascissa su di una retta, si definisce un'origine ed un verso di rotazione positivo (si suole scegliere il verso antiorario a partire dall'asse delle x) e si considerano in modo naturale anche angoli maggiori di 2π radianti, o angoli minori di zero. Così l'angolo x geometricamente corrisponde all'angolo $x + 2\pi$ ed anche all'angolo $x + 4\pi$, oppure all'angolo $x - 2\pi$, o in generale all'angolo $x + 2k\pi$, per ogni $k \in \mathbf{Z}$.

Le funzioni sen x, cos x si definiscono rispettivamente come *l'ordinata* e *l'ascissa* del punto che si trova sulla circonferenza di centro l'origine e raggio 1 e che sottende un angolo orientato di lunghezza x, a partire dall'asse delle ascisse (figura 1.16).

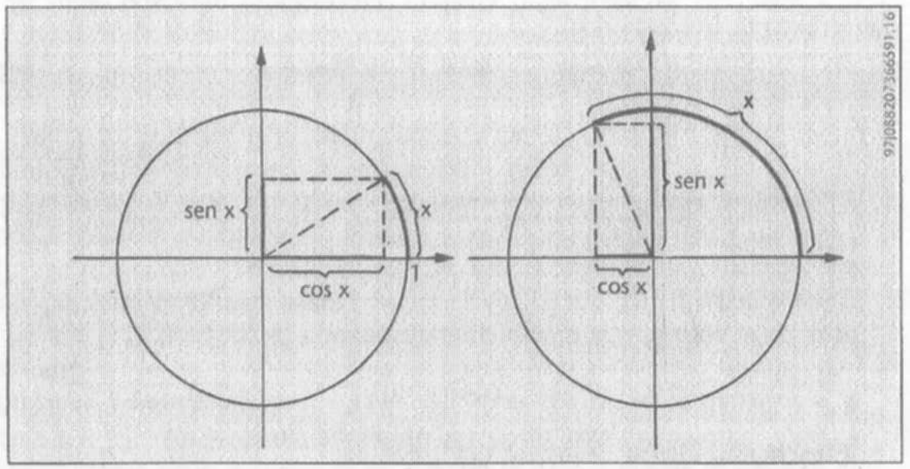


Figura 1.16

Le funzioni sen x, cos x sono definite per ogni $x \in \mathbf{R}$, mentre l'immagine delle due funzioni è compresa tra -1 ed 1, cioè:

(10.1) $$-1 \le \text{sen } x \le 1, \quad -1 \le \cos x \le 1, \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

Il grafico delle due funzioni è riportato in figura 1.17. Nel paragrafo 85 sarà indicato come ottenere il grafico; per ora il lettore controlli sul grafico il segno delle due funzioni in base alla definizione. Le funzioni sen x e cos x non sono monotòne su $\mathbf{R}$.

Delle numerose relazioni tra queste due funzioni, la più importante è senza dubbio quella che segue dal teorema di Pitagora sui triangoli rettangoli.

Applicando il teorema di Pitagora al triangolo rettangolo di cateti |sen x| e |cos x| e ipotenusa uguale a 1, si trova la relazione fondamentale

(10.2) $$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \forall\, x \in \mathbf{R}.$$

Sono anche importanti le formule di addizione:

(10.3) $$\text{sen}(x_1 \pm x_2) = \text{sen } x_1 \cos x_2 \pm \text{sen } x_2 \cos x_1 .$$

(10.4) $$\cos (x_1 \pm x_2) = \cos x_1 \cos x_2 \mp \text{sen } x_1 \text{ sen } x_2 .$$

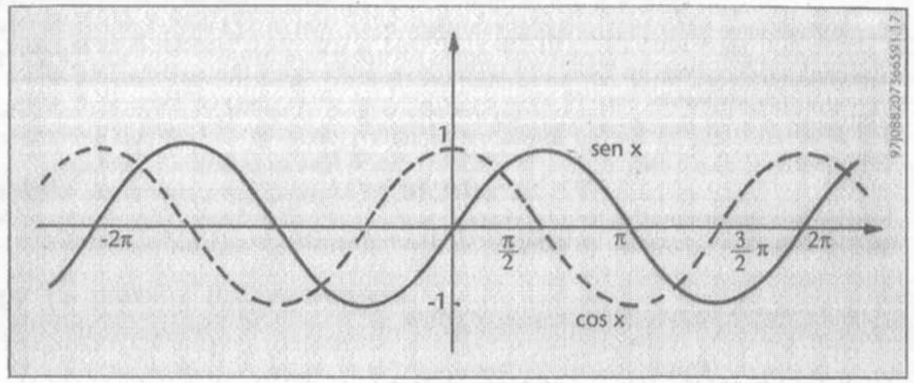


Figura 1.17

Se nelle identità sopra scritte scegliamo il segno + e poniamo $x_1 = x_2 = x$, otteniamo le formule di duplicazione:

(10.5) $$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cos x .$$

(10.5) $$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x.$$

A partire dalle funzioni sen x e cos x si definisce la *funzione tangente*

(10.7) $$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

il cui grafico è rappresentato in figura 1.18.

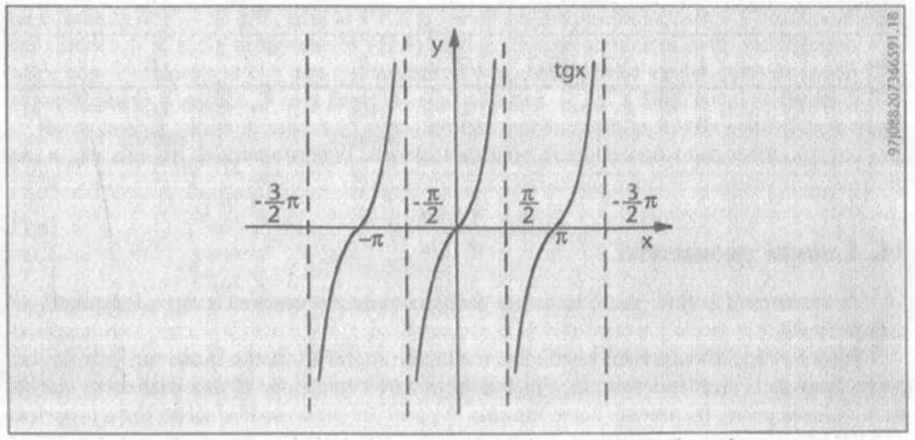


Figura 1.18

La funzione tangente è definita se $\cos x \neq 0$, cioè se $x \neq \pi/2 + k\pi$, con $k \in \mathbf{Z}$. Usando le proprietà dei triangoli simili (BT = BT/OB = AP/OA), si vede che la tangente di un angolo x si può rappresentare come in figura 1.19. Dalla figura risulta chiaro che, se $0 < x < \pi/2$ allora valgono le disuguaglianze

(10.8) $$0 < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x.$$

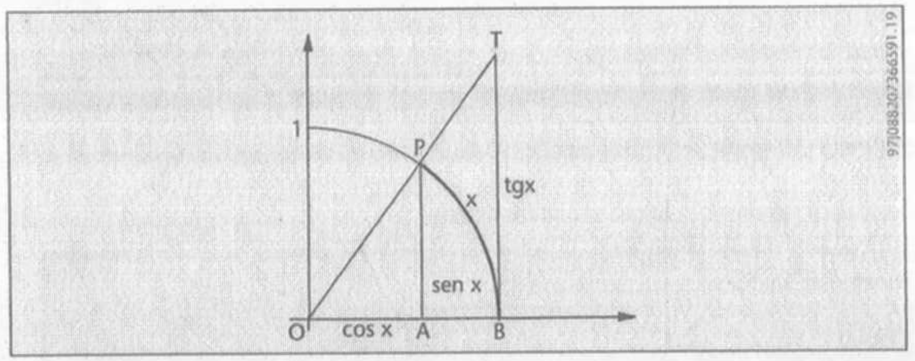


Figura 1.19

Riportiamo una tabella con i valori delle funzioni trigonometriche per alcuni angoli di uso frequente.

x *radianti*	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$(3/2)\pi$	2π
x *gradi*	0	30	45	60	90	180	270	360
sen x	0	1/2	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	− 1	0
cos x	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	1/2	0	− 1	0	1
tg x	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	*non definita*	0	*non definita*	0

11. Luoghi geometrici

Avvertiamo il lettore che il tema qui trattato viene ripreso, con maggiori dettagli, nel paragrafo 38.

Anziché rappresentare in coordinate cartesiane il grafico di una funzione, talvolta occorre risolvere il problema inverso, e cioè determinare l'equazione di una data curva che sia stata definita geometricamente come insieme di punti del piano soddisfacenti certe proprietà geometriche. La circonferenza, l'ellisse, l'iperbole, la parabola sono luoghi geometrici in genere già noti al lettore. Qui ne ricordiamo le equazioni in coordinate cartesiane, e indichiamo anche quando e come tali luoghi geometrici possono essere identificati con grafici di funzioni.

La *circonferenza* è il luogo dei punti di un piano equidistanti da un punto fisso detto *centro*. Se le coordinate del centro sono (x_0, y_0), e se (x, y) sono le coordinate di un punto generico, e se infine r (= *raggio*) è la distanza tra i due punti, per il teorema di Pitagora si ha:

(11.1) $$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 .$$

La (11.1) è l'*equazione della circonferenza*. Sviluppando i quadrati, l'equazione diventa del tipo

(11.2) $$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$

Scrivendo esplicitamente il legame tra i coefficienti delle due equazioni, si trova che le coordinate del *centro* ed il *raggio* sono dati da

(11.3) $$x_0 = -\frac{a}{2}; \quad y_0 = -\frac{b}{2}; \quad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c};$$

quindi affinché la (11.2) rappresenti effettivamente l'equazione di una circonferenza, occorre che $a^2 + b^2 - 4c > 0$.

In particolare, se il centro della circonferenza è nell'origine delle coordinate, allora $x_0 = y_0 = a = b = 0$, e l'equazione diventa:

(11.4) $$x^2 + y^2 = r^2 .$$

La (11.4) non equivale ad una funzione. Infatti se la risolviamo rispetto ad y troviamo

(11.5) $$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2},$$

che è definita se $r^2 - x^2 \geq 0$, cioè se $-r \leq x \leq r$. Però, per esempio, ad $x = 0$ corrispondono due valori $y = \pm r$. Se separiamo la (11.5) in due diverse equazioni, una con il segno + e l'altra con il −, troviamo che una circonferenza può essere divisa in due parti in modo che entrambe siano il grafico di una funzione (definita per $-r \leq x \leq r$), come in figura 1.20.

Se si cambia l'unità di misura in modo diverso nei due assi, cioè se si sostituisce x/r con x/a e y/r con y/b, la circonferenza diventa un'*ellisse* di equazione (a, b > 0):

(11.6) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Se si pone y = 0, si trovano le intersezioni dell'ellisse con l'asse delle x, che sono $x = \pm a$. Analogamente per $x = 0$ risulta $y = \pm b$. Come per la circonferenza, l'ellisse può essere divisa in due parti in modo che entrambe siano il grafico delle due funzioni definite per $-a \leq x \leq a$ da:

(11.7) $$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}; \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

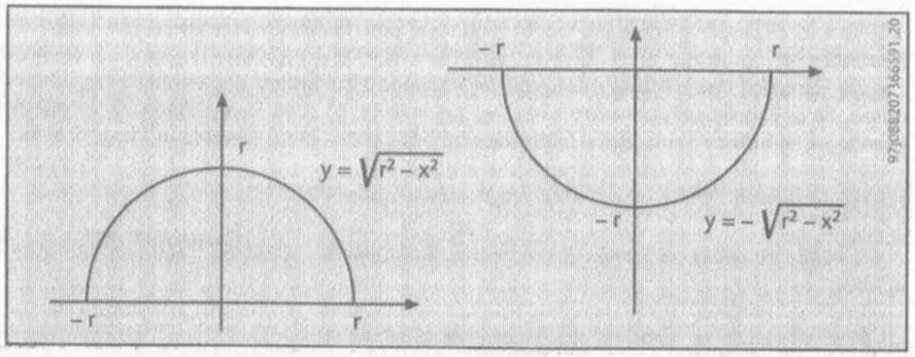


Figura 1.20

Consideriamo un'ellisse di equazione (11.6) con $a \geq b$, come in figura 1.21. La quantità e, definita da

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \tag{11.8}$$

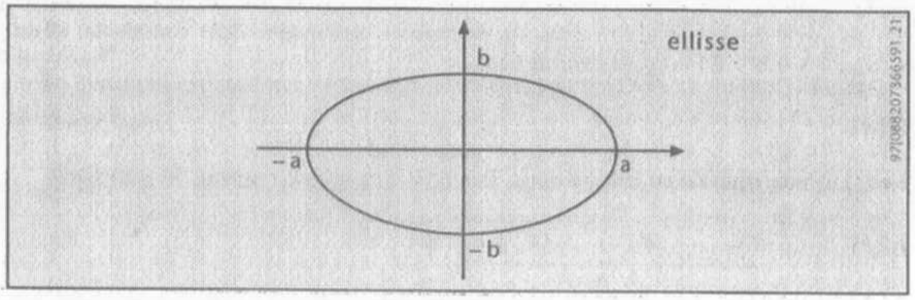


Figura 1.21

si dice *eccentricità* dell'ellisse, ed è un numero compreso tra 0 e 1. Quanto più diminuisce il rapporto b/a, tanto più l'eccentricità cresce verso 1, e l'ellisse si presenta più allungata. Invece quando il rapporto b/a è uguale a 1, cioè $a = b$, allora l'eccentricità è uguale a zero: $e = 0$. In tal caso l'ellisse si riduce ad una circonferenza.

L'*iperbole* ha equazione

$$(x - x_0)(y - y_0) = k, \tag{11.9}$$

con $y_0, y_0, k \in \mathbf{R}$, $k \neq 0$.

Nella figura 1.22 è disegnata una iperbole per un valore positivo del parametro k.

Per $x \neq x_0$ si può ricavare il valore di y in funzione di x, cioè si può scrivere la funzione

$$y = y_0 + \frac{k}{x - x_0}, \tag{11.10}$$

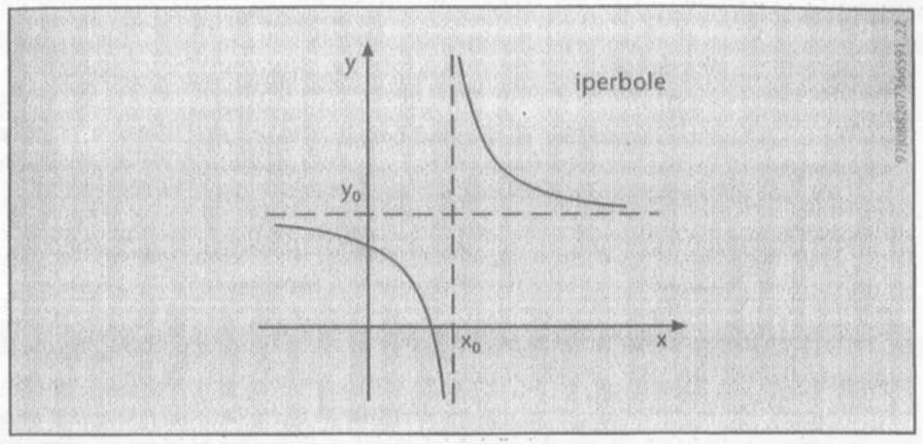


Figura 1.22

che, come già detto, è definita per $x \neq x_0$. La funzione (6.2), di cui abbiamo già disegnato il grafico, è una particolare iperbole, corrispondente al caso $x_0 = y_0 = 0$, $k = 1$. Si dice che la retta di equazione $y = y_0$ (funzione costante) è un *asintoto orizzontale*; mentre la retta $x = x_0$ è un *asintoto verticale*.

La *parabola* ha equazione

$$y = a x^2 + bx + c, \tag{11.11}$$

con $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$. La (11.11) è una funzione definita per ogni $x \in \mathbf{R}$. Ricordiamo che la parabola incontra l'asse delle x nei punti con ordinata $y = 0$ e ascissa soluzione dell'equazione di secondo grado:

$$a x^2 + bx + c = 0, \quad \text{cioè} \quad \left.\begin{matrix} x_2 \\ x_1 \end{matrix}\right\} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \tag{11.12}$$

Se $b^2 - 4ac < 0$, x_1 e x_2 non sono definiti come numeri reali e quindi la parabola non incontra l'asse delle x. Perciò la parabola è sempre al di sopra dell'asse delle x, oppure sempre al di sotto. Nel primo caso la funzione (11.11) è positiva per ogni x, nel secondo è negativa. Si confronti con la figura 1.23.

Dato che la funzione (11.11) ha segno costante (nel caso che stiamo considerando $b^2 - 4ac < 0$), e dato che $f(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$, si riconosce che la funzione è positiva dal segno di c, che è lo stesso del segno di a, perché $ac > (1/4)\, b^2 \geq 0$.

Se invece $b^2 - 4ac > 0$, l'equazione $a x^2 + bx + c = 0$ ha le due so-luzioni x_1, x_2 indicate in (11.12). Le due soluzioni x_1, x_2 coincidono se $b^2 - 4ac = 0$. In entrambi i casi risulta (il lettore faccia esplicitamente la verifica):

$$y = a x^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2). \tag{11.13}$$

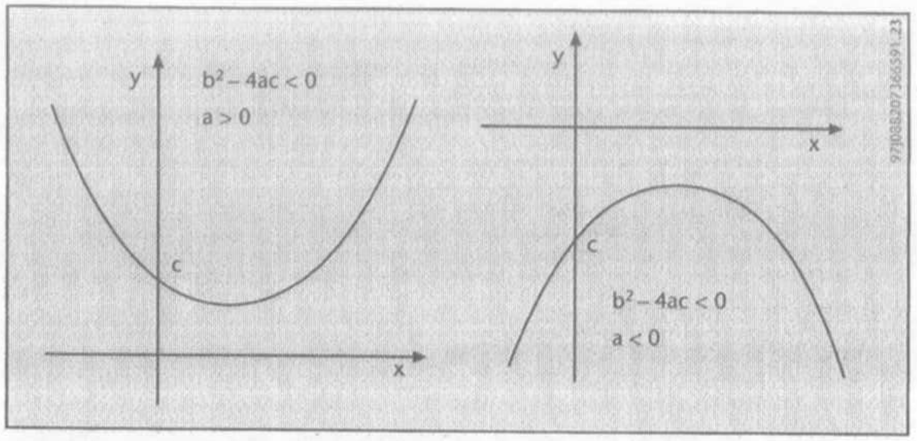


Figura 1.23

Usando questa relazione si riconosce che, se $a > 0$, la y è positiva al di fuori dell'intervallo con estremi x_1, x_2, ed è negativa all'interno dell'intervallo. Naturalmente si ha la situ azione opposta se a è negativo (figura 1.24).

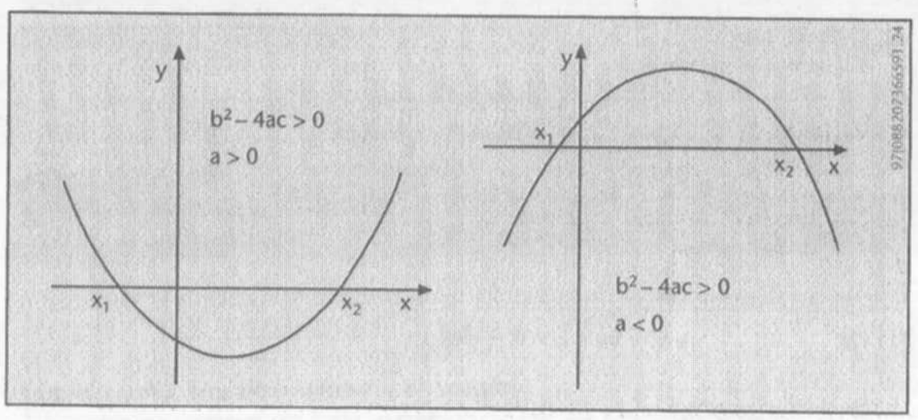


Figura 1.24

Vale la pena di riassumere in una tabella quali sono le soluzioni della disequazione di secondo grado

(11.14) $$a x^2 + bx + c > 0$$

	$b^2 - 4ac > 0$	$b^2 - 4ac < 0$	$b^2 - 4ac = 0$
$a > 0$	$x < x_1$, $x > x_2$	$\forall x \in \mathbf{R}$	$x \neq x_1$ $(= x_2)$
$a < 0$	$x_1 < x < x_2$	*nessun* x	*nessun* x

12. Il principio di induzione

Abbiamo utilizzato nel paragrafo 9 la seguente affermazione sulla crescenza della funzione potenza x^n:

(12.1) $$0 \le x_1 < x_2 \quad \Rightarrow \quad x_1^n < x_2^n , \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Vogliamo dimostrare questa proposizione per mezzo del principio di induzione. Supponiamo preliminarmente che essa valga per un certo indice n (ciò che dobbiamo provare è che la (12.1) sia vera per tutti gli n; qui stiamo supponendo che la (12.1) sia vera per qualche n; ad esempio, per $n = 1$ la (12.1) è banalmente vera!). Perciò supponiamo che valgano le disuguaglianze $0 \le x_1 < x_2$, $x_1^n < x_2^n$. Otteniamo:

(12.2) $$x_1^{n+1} = x_1\, x_1^n \le x_2\, x_1^n < x_2\, x_2^n = x_2^{n+1} .$$

Cioè abbiamo provato che, se vale la (12.1) per un certo indice n, allora essa vale anche per l'indice successivo $n + 1$. Ma allora la (12.1) vale sempre, perché: sappiamo che la proposizione vale per $n = 1$ (lo verifichiamo banalmente); per quanto sopra detto essa vale anche per l'indice successivo, cioè $n = 2$; ancora, sempre per lo stesso motivo la (12.1) vale per il successivo $n = 3$, e così via... Possiamo raggiungere con questo argomento qualsiasi naturale n.

Formuliamo in generale il

PRINCIPIO DI INDUZIONE. — *Supponiamo che una proposizione dipendente da un indice* $n \in \mathbf{N}$ *sia vera per* $n = 1$ *e che inoltre, supposta vera per* n, *sia vera anche per il successivo* $n + 1$. *Allora la proposizione è vera per ogni* $n \in \mathbf{N}$.

Per chiarire meglio il principio consideriamo altri esempi. Dimostriamo per induzione la formula che esprime la somma dei primi n numeri naturali (questa formula era nota a Gauss dall'età di nove anni!):

(12.3) $$1 + 2 + 3 + \ldots + (n - 1) + n = \frac{n(n + 1)}{2} .$$

La formula è vera per $n = 1$; infatti si ha l'identità $1 = (1 \cdot 2)/2$. Supponiamo vera la (12.3) e dimostriamo la formula analoga con l'indice $n + 1$ al posto n. Per ottenere ciò, è naturale sommare ad entrambi i membri il numero $n + 1$:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n + (n + 1) = \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) = \tag{12.4}$$
$$= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} = \frac{(n + 1)(n + 2)}{2}.$$

Abbiamo ottenuto ciò che volevamo; quindi la (12.3) risulta vera per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Un'altra applicazione del principio di induzione è la seguente:

DISEGUAGLIANZA DI BERNOULLI. — *Per ogni numero reale* $x \geq -1$, *e per ogni naturale* n, *risulta*

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx. \tag{12.5}$$

Dimostrazione: per $n = 1$ la proposizione è vera (con il segno $=$). Supponiamo vera la (12.5) per un numero naturale n; moltiplichiamo entrambi i membri per $1 + x$, che è una quantità maggiore o uguale a zero:

$$(1 + x)^{n+1} \geq (1 + nx)(1 + x) = \tag{12.6}$$
$$= 1 + x + nx + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

Abbiamo ottenuto la proposizione con $n + 1$ al posto di n. Perciò, in base al principio di induzione, la (12.5) è provata.

Utilizzando il principio di induzione, dimostriamo la formula che esprime la *somma di una progressione geometrica* di ragione $x \neq 1$:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}, \quad \forall\, x \neq 1. \tag{12.7}$$

Per $n = 1$, a secondo membro abbiamo

$$\frac{1 - x^2}{1 - x} = \frac{(1 - x)(1 + x)}{1 - x} = 1 + x; \tag{12.8}$$

quindi la (12.7) è vera per $n = 1$. Supponendo verificata la (12.7), sommiamo ad entrambi i membri il termine x^{n+1}:

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + x^{n+1} = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} + x^{n+1} = \tag{12.9}$$
$$= \frac{1 - x^{n+1} + x^{n+1} - x^{n+2}}{1 - x} = \frac{1 - x^{n+2}}{1 - x}.$$

Abbiamo ottenuto la proposizione con $n + 1$ al posto di n. Quindi, in base al principio di induzione, la formula (12.7) è dimostrata.

13. Massimo, minimo, estremo superiore, estremo inferiore

Sia A un insieme di numeri reali. Il *massimo* di A, se esiste, è un numero M dell'insieme A che è maggiore od uguale ad ogni altro elemento dell'insieme. In simboli:

$$\begin{matrix} \text{M massimo di A} \\ (M = \max A) \end{matrix} \iff \begin{cases} M \geq a, \ \forall\, a \in A; \\ M \in A. \end{cases} \tag{13.1}$$

Analogamente, il *minimo* di un insieme di numeri reali A, se esiste, è un numero m dell'insieme A che è minore od uguale ad ogni altro elemento di A. In simboli:

$$\begin{matrix} \text{m minimo di A} \\ (m = \min A) \end{matrix} \iff \begin{cases} m \leq a, \ \forall\, a \in A; \\ m \in A. \end{cases} \tag{13.2}$$

Non tutti gli insiemi di numeri reali hanno il massimo ed il minimo. Ad esempio, se A è costituito da tutti i numeri reali positivi, A non ha né massimo, né minimo (non esiste il più piccolo numero reale positivo; ad esempio, lo zero non è il minimo, perché non appartiene ad A).

Si verifica facilmente che quando esistono, *il massimo o il minimo sono unici*. Infatti, se M_1 e M_2 sono due massimi di un insieme A, allora per definizione

$$M_1 \geq a, \qquad M_2 \geq a, \qquad \forall\, a \in A;$$

ma dato che M_1 ed M_2 sono elementi di A, posto a rispettivamente uguale ad M_2 ed a M_1 nelle relazioni precedenti, si ottiene $M_1 \geq M_2$ e $M_2 \geq M_1$, cioè $M_1 = M_2$.

Un numero reale L si dice un *maggiorante* per un insieme A, se $L \geq a$ per ogni $a \in A$. Analogamente un numero reale ℓ è un *minorante* di A, se $\ell \leq a$ per ogni $a \in A$.

È bene notare esplicitamente che un insieme A non sempre ammette maggioranti o minoranti. Se A è di nuovo l'insieme dei numeri reali positivi, A non ammette alcun maggiorante, mentre lo zero (ed anche qualsiasi numero reale negativo) è un minorante di A.

Diciamo che A è *limitato superiormente* se ammette un maggiorante. A è *limitato inferiormente* se ammette un minorante. Infine si dice *limitato* un insieme che è limitato sia superiormente che inferiormente. In simboli ($\exists$ si legge esistono):

$$\text{(13.3)} \qquad A \textit{ limitato} \iff \exists\, \ell, L \in \mathbf{R}: \ell \leq a \leq L, \quad \forall\, a \in A.$$

Tenendo presente la definizione (8.3) della funzione valore assoluto, si riconosce facilmente che:

PROPOSIZIONE. — *Un insieme* A *è limitato se e soltanto se esiste un numero positivo* M *tale che*

$$\text{(13.4)} \qquad |a| \leq M, \qquad \forall\, a \in A.$$

Dimostrazione: se per ipotesi vale la (15.4), allora, dalla proprietà (8.9) relativa al valore assoluto si ottiene

$$\text{(13.5)} \qquad -M \leq a \leq M, \qquad \forall\, a \in A,$$

e quindi vale la (13.3) con $\ell = -M$ e $L = M$. Viceversa, se vale la (13.3), allora vale anche la (13.4) (o equivalentemente la (13.5)) con $M = \max\{|\ell|, |L|\}$, perché:

$$\text{(13.6)} \qquad -M \leq -|\ell| \leq \ell \leq a \leq L \leq |L| \leq M, \qquad \forall\, a \in A.$$

Il risultato che segue, alla base della definizione di estremo superiore, è conseguenza dell'*assioma di completezza* (2.11) per i numeri reali.

TEOREMA DI ESISTENZA DELL'ESTREMO SUPERIORE. — *Supponiamo che* A *sia un insieme non vuoto di numeri reali limitato superiormente. Allora esiste il minimo dell'insieme dei maggioranti di* A.

Infatti, indichiamo con B l'insieme costituito dai maggioranti di A. B è non vuoto, perché A è limitato superiormente. Applichiamo l'assioma di completezza (2.11) ai due insiemi A, B. Esiste un numero reale M tale che

$$\text{(13.7)} \qquad a \leq M \leq b, \qquad \forall\, a \in A, \forall\, b \in B.$$

Dato che M è maggiore od uguale a tutti gli elementi di A, M è un maggiorante di A; cioè $M \in B$. Inoltre M è minore od uguale a tutti gli elementi di B. Quindi, in base alla definizione (13.2), M è il minimo di B.

In base al teorema precedente, poniamo la seguente

DEFINIZIONE DI ESTREMO SUPERIORE. — *Sia* A *un insieme di numeri reali non vuoto e limitato superiormente. Diciamo che* $M \in \mathbf{R}$ *è l'estremo superiore di* A *se* M *è il minimo dei maggioranti di* A.

Ciò equivale a dire che M è un maggiorante, e che ogni numero più piccolo di M, diciamo $M - \varepsilon$ con ε positivo, non è un maggiorante; cioè $M - \varepsilon$ è minore di qualche elemento dell'insieme A. In simboli ($\exists$ si legge esiste):

$$\text{(13.8)} \qquad \begin{array}{l} M \textit{ estremo superiore di } A \\ (M = \sup A) \end{array} \iff \begin{cases} M \geq a, \ \forall\, a \in A; \\ \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, a \in A: \ M - \varepsilon < a. \end{cases}$$

Analogamente, si verifica che se A è un insieme non vuoto di numeri reali limitato inferiormente, allora l'insieme dei minoranti di A ha massimo. In tali condizioni, si dice che un numero m è l'*estremo inferiore* di A se m è il *massimo dei minoranti* di A. Ciò equivale a:

$$\text{(13.9)} \qquad \begin{array}{l} m \textit{ estremo inferiore di } A \\ (m = \inf A) \end{array} \iff \begin{cases} m \leq a, \ \forall\, a \in A; \\ \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, a \in A: \ m + \varepsilon > a. \end{cases}$$

Quindi, *se un insieme è limitato superiormente esiste l'estremo superiore ed è un numero reale. Se un insieme è limitato inferiormente esiste l'estremo inferiore ed è un numero reale.*

È utile introdurre i simboli $+\infty$, $-\infty$ per descrivere gli insiemi *non* limitati. Precisamente, sia A un insieme non vuoto. L'estremo superiore di A è $+\infty$ se A non è limitato superiormente; l'estremo inferiore di A è $-\infty$ se A non è limitato inferiormente. In simboli:

(13.10) $\sup A = +\infty \iff \forall L, \exists\, a \in A: a > L.$

(13.11) $\inf A = -\infty \iff \forall\, \ell, \exists\, a \in A: a < \ell.$

Nelle relazioni sopra scritte ci si può limitare a considerare $L > 0$ e $\ell < 0$.

Facendo uso dei simboli $+\infty$ e $-\infty$ si può quindi affermare che *ogni insieme non vuoto di numeri reali ammette sia estremo superiore che estremo inferiore*. Se l'insieme è limitato superiormente allora l'estremo superiore è finito; se l'insieme è limitato inferiormente allora l'estremo inferiore è finito.

Concludiamo con alcuni esempi; se $A = \{x \in \mathbf{R}: x > 0\}$, allora

(13.12) $\sup A = +\infty, \quad \inf A = 0$

ed il massimo e minimo di A non esistono. Se $B = \{(n-1)/n : n \in \mathbf{N}\}$ (l'insieme B è schematizzato in figura 1.25), risulta

(13.13) $\sup B = 1, \quad \inf B = \min B = 0.$

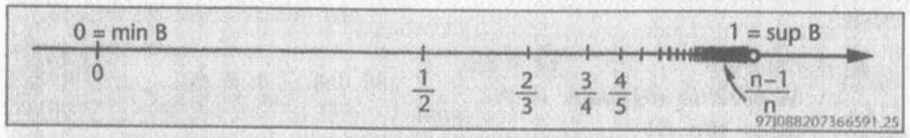


Figura 1.25

Se infine $C = \{(n+1)/n : n \in \mathbf{N}\}$ (si veda la figura 1.26), si trova

(13.14) $\sup C = \max C = 2, \quad \inf C = 1.$

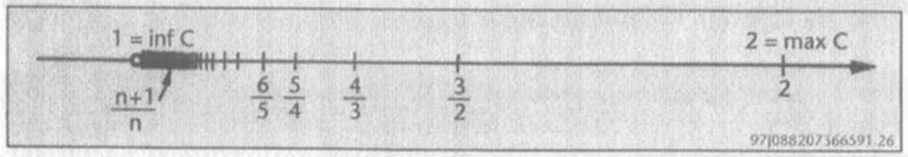


Figura 1.26

Introduciamo le seguenti notazioni, per indicare un intervallo di estremi $a, b \in \mathbf{R}$

(13.5)
$$(a, b) = \{x \in \mathbf{R}: a < x < b\}; \quad (a, b] = \{x \in \mathbf{R}: a < x \le b\};$$
$$[a, b) = \{x \in \mathbf{R}: a \le x < b\}; \quad [a, b] = \{x \in \mathbf{R}: a \le x \le b\}.$$

14. I numeri complessi

Consideriamo una generica equazione di secondo grado nell'incognita z:

(14.1) $a z^2 + bz + c = 0,$

che ha come soluzioni (reali, se $b^2 - 4ac \ge 0$):

(14.2)
$$\left.\begin{matrix} z_2 \\ z_1 \end{matrix}\right\} = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

I coefficienti a, b, c; sono legati alle soluzioni z_1, z_2 anche dalle semplici relazioni, che si verificano immediatamente:

(14.3)
$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a}; \qquad z_1 \cdot z_2 = \frac{c}{a}.$$

Proviamo a scrivere tali relazioni nel caso dell'equazione:

(14.4) $z^2 + 1 = 0;$

in tal caso le (14.3) diventano

(14.5) $z_1 + z_2 = 0; \qquad z_1 \cdot z_2 = 1.$

Le relazioni (14.5), anche se formalmente ben definite, non hanno alcun senso nell'ambito dei numeri reali, perché non esistono z_1, z_2 soluzioni *reali* della equazione (14.4). Questo esempio mostra come tavolta sia utile pensare che qualsiasi equazione di secondo grado ammetta soluzione. Dato che ciò non vale nell'ambito dei numeri reali **R**, si estende **R** introducendo il campo **C** dei *numeri complessi*.

Consideriamo ancora l'esempio (14.4). Formalmente l'equazione (14.4) ha soluzioni

(14.6) $z = \pm\sqrt{-1}.$

Definiamo il numero complesso $i = \sqrt{-1}$. Si dice che i è *l'unità immaginaria*. Risulta per definizione:

(14.7) $i^2 = -1.$

L'insieme dei numeri complessi si rappresenta in *forma algebrica*

(14.8) $\mathbf{C} = \{z = x + iy: \quad x, y \in \mathbf{R}\}.$

Si dice che x è la *parte reale* ed y è il coefficiente della *parte immaginaria* del numero complesso z.

Le operazioni sui numeri complessi si eseguono con le stesse regole dei numeri reali, tenendo anche conto della (14.7). Quindi:

(14.9) $$(x + iy) + (x' + iy') = (x + x') + i(y + y') ;$$

(14.10) $$(x + iy) \cdot (x' + iy') = xx' + ixy' + ix' y + i^2 yy' =$$

$$= (xx' - yy') + i(xy' + x'y).$$

Il numero complesso $\bar{z} = x - iy$ si chiama *complesso coniugato* del numero $\bar{z} = x + iy$. Dato che risulta

(14.11) $$z \cdot \bar{z} = (x + iy)\,(x - iy) = x^2 + y^2 ,$$

il coniugato è particolarmente utile nel calcolo del quoziente di due numeri complessi; infatti:

(14.12) $$\frac{x' + iy'}{x + iy} = \frac{(x' + iy')(x - iy)}{(x + iy)(x - iy)} = \frac{(x' + iy')(x - iy)}{x^2 + y^2} =$$

$$= \frac{xx' + yy'}{x^2 + y^2} - i\,\frac{x'y - xy'}{x^2 + y^2} .$$

Come si vede dal conto precedente, la divisione tra due numeri complessi è possibile purché il denominatore $z = y + iy$ sia diverso da zero, cioè purché non risulti contemporaneamente $x = 0$, $y = 0$.

È utile la rappresentazione cartesiana dei numeri complessi, che si ottiene facendo corrispondere ad ogni numero complesso $z = x + iy$ il punto P di coordinate (x, y), come in figura 1.27.

Un punto P del piano può essere individuato anche dalla distanza ϱ dal centro 0 degli assi, e dall'angolo ϑ che il segmento OP forma con l'asse delle x, come in figura 1.27. Dal teorema di Pitagora si deduce che

(14.13) $$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2} ;$$

l'angolo ϑ è legato alla parte reale x ed al coefficiente dell'immaginario y, dalle formule

(14.14) $$\cos \vartheta = \frac{x}{\varrho} \quad ; \quad \operatorname{sen} \vartheta = \frac{y}{\varrho} \quad .$$

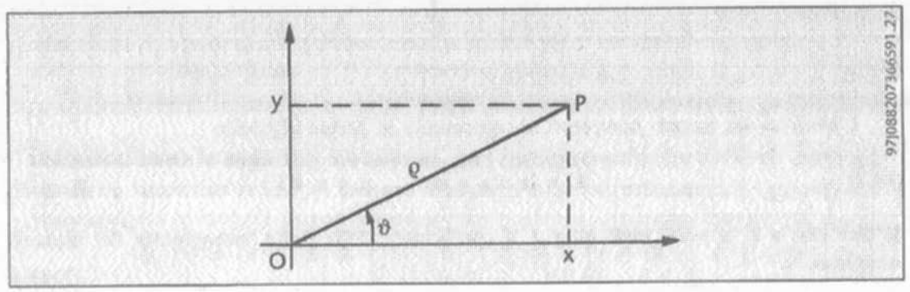


Figura 1.27

Si dice che ϱ è il *modulo* del numero complesso $z = x + iy$, mentre ϑ, misurato in radianti, è l'*argomento*. Naturalmente ϑ è definito a meno di multipli di 2π. Tenendo conto delle relazioni tra ϱ, ϑ e x, y, possiamo scrivere il numero complesso $z = x + iy$ in *forma trigonometrica*

(14.15) $$z = \varrho\,(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta).$$

È particolarmente semplice scrivere il prodotto ed il quoziente di due numeri complessi espressi in forma trigonometrica. A tale scopo, consideriamo due numeri complessi z, z' nella forma:

(14.16) $$z = \varrho\,(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta); \quad z' = \varrho'\,(\cos \vartheta' + i \operatorname{sen} \vartheta').$$

Tenendo conto delle formule di addizione (10.4), (10.5) si ottiene:

(14.17) $$z \cdot z' = \varrho(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta) \cdot \varrho'\,(\cos \vartheta' + i \operatorname{sen} \vartheta') =$$

$$= \varrho\varrho'\,\{(\cos \vartheta \cos \vartheta' - \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \vartheta') + i(\operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta' + \operatorname{sen} \vartheta' \cos \vartheta)\} =$$

$$= \varrho\varrho'\,\{\cos(\vartheta + \vartheta') + i \operatorname{sen}(\vartheta + \vartheta')\}.$$

Cioè il prodotto tra due numeri complessi ha per modulo il prodotto dei moduli, e per argomento la somma degli argomenti.

Per il quoziente si ottiene la formula analoga:

(14.18) $$z/z' = \varrho(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)/[\varrho'\,(\cos \vartheta' + i \operatorname{sen} \vartheta')] =$$

$$= \frac{\varrho}{\varrho'}\,\frac{(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)(\cos \vartheta' - i \operatorname{sen} \vartheta')}{(\cos \vartheta' + i \operatorname{sen} \vartheta')(\cos \vartheta' - i \operatorname{sen} \vartheta')} =$$

$$= \frac{\varrho}{\varrho'}\,\frac{(\cos \vartheta \cos \vartheta' + \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \vartheta') + i(\operatorname{sen} \vartheta \cos \vartheta' - \operatorname{sen} \vartheta' \cos \vartheta)}{\cos^2 \vartheta - i^2 \operatorname{sen}^2 \vartheta} =$$

$$= \frac{\varrho}{\varrho'}\,\{\cos (\vartheta - \vartheta') + i \operatorname{sen} (\vartheta - \vartheta')\}.$$

Dalla formula (14.17) per il prodotto, si deduce la forma trigonometrica della potenza z^n con esponente $n \in \mathbf{N}$

(14.19) $$z^n = [\varrho(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta)]^n = \varrho^n\,(\cos n\,\vartheta + i \operatorname{sen} n\,\vartheta).$$

Un numero complesso z' è la radice n-sima di z se risulta $(z')^n = z$. Quindi se z, z' sono rappresentati in forma trigonometrica dalla (14.16) come in precedenza, deve risultare

$$(z')^n = (\varrho')^n\,\{\cos(n\vartheta') + i \operatorname{sen}(n\vartheta')\} =$$

(14.20) $$= z = \varrho(\cos \vartheta + i \operatorname{sen} \vartheta) =$$

$$= \varrho\,\{\cos(\vartheta + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\vartheta + 2k\pi)\},$$

qualunque sia $k \in \mathbf{Z}$. Otteniamo quindi:

(14.21) $$\varrho' = \sqrt[n]{\varrho}\ ; \quad \vartheta' = (\vartheta + 2k\pi)/n, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

In particolare il modulo di una radice n-sima è uguale alla radice n-sima del modulo. Si riconosce anche che la (14.21) fornisce n valori distinti dell'argomento ϑ'. Quindi se $z \neq 0$, esistono n radici n-esime distinte del numero complesso z.

Ad esempio, calcoliamo le radici quadrate del numero complesso $z = i$. In forma trigonometrica i ha modulo uguale ad 1, ed argomento uguale a $\pi/2$. Quindi in base alla (14.21), le due radici quadrate di $z = i$ hanno modulo uguale ad 1, ed argomento uguale a

(14.22) $$\vartheta'_1 = \frac{\pi/2}{2} = \frac{\pi}{4}\ ; \qquad \vartheta'_2 = \frac{\pi/2 + 2\pi}{2} = \frac{5}{4}\pi.$$

In corrispondenza si ottiene:

(14.23) $$z'_1 = 1\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right); \qquad z'_2 = 1\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right).$$

Quindi le due radici quadrate di i sono:

(23.24) $$\sqrt{i} = \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i).$$

15. Crescita di una popolazione batterica. Decadimento di sostanze radioattive

In questo paragrafo esponiamo due applicazioni delle funzioni esponenziale e logaritmo. Cominciamo con la descrizione della crescita di una popolazione, ad esempio di batteri.

Supponiamo che una popolazione batterica sia costituita, in un certo istante, di N_0 batteri. In un certo intervallo di tempo, ciascun membro della popolazione si divide in due, cosicché la popolazione diviene di $2\,N_0$ batteri. In un secondo intervallo di tempo, uguale al precedente, la popolazione diviene di $4\,N_0$ batteri. Dopo k intervalli di tempo, essa diviene di $2^k\,N_0$ batteri.

Indichiamo con N(t) il numero di batteri della popolazione all'istante di tempo t, e supponiamo che T sia il tempo di riproduzione. In precedenza abbiamo calcolato la funzione N(t) per t uguale ad un multiplo di T; infatti, per $t = kT$ con $k \in \mathbf{N}$, abbiamo trovato che $N(t) = 2^k N_0$. Cioè in questo caso N(t) è una funzione del rapporto $k = t/T$.

Anche in generale il numero N(t) di batteri di una popolazione all'istante t dipende dal rapporto t/T. Esso è dato sperimentalmente (in condizioni ideali ed entro certi limiti) dalla legge

(15.1) $$N(t) = N_0\, 2^{t/T}.$$

Poniamo $e^A = 2^{1/T}$, cioè $A = (1/T)\log 2$. Otteniamo la legge di crescita:

(15.2) $$N(t) = N_0\, e^{At}.$$

Questa formula permette di valutare il numero di batteri di una popolazione, noti i numeri N_0 ed A; cioè noti il numero iniziale di batteri, ed il tempo di riproduzione T.

La funzione (24.2) permette anche di stabilire il tempo di riproduzione T, una volta che siano noti il numero di batteri a due istanti di tempo distinti t_1, t_2. Risulta:

(15.3) $$N(t_1) = N_0\, e^{A t_1}, \qquad N(t_2) = N_0\, e^{A t_2}.$$

Per ricavare A si considera il rapporto $N(t_2)/N(t_1)$ e si calcola il logaritmo in base e di entrambi i membri:

(15.4) $$\log\frac{N(t_2)}{N(t_1)} = \log e^{A(t_2 - t_1)} = A(t_2 - t_1).$$

Ricordando il legame tra A e T si ottiene:

(15.5) $$T = \frac{1}{A}\log 2 = \frac{(t_2 - t_1)\log 2}{\log[N(t_2)/N(t_1)]}.$$

La formula precedente si applica in particolare per $t_1 = 0$, in cui risulta $N(t_1) = N(0) = N_0$.

Come seconda applicazione consideriamo una sostanza contenente atomi radioattivi, cioè atomi che vanno incontro ad una perdita spontanea di particelle dal nucleo. Tale perdita è denominata *decadimento radioattivo*, perché essa implica una diminuzione della massa dell'atomo e trasforma successivamente un atomo di un elemento nell'atomo di un altro elemento, fino a raggiungere un atomo stabile.

Sia N_0 la quantità di atomi radioattivi, presente nella sostanza all'istante iniziale $t = 0$, ed N(t) quella presente all'istante t. Le esperienze dimostrano che il decadimento radioattivo segue la legge esponenziale:

(15.6) $$N(t) = N_0\, e^{-Bt},$$

dove B è una costante che dipende dalla natura della sostanza radioattiva e prende il nome di *costante di decadimento*.

Si dice *semi-vita* di una sostanza la lunghezza dell'intervallo di tempo T in cui la metà degli atomi radioattivi decadono: questo intervallo di tempo è sempre lo stesso per un dato materiale, indipendentemente dalla massa presente all'istante iniziale, dalla pressione e dalla temperatura esterna.

È interessante collegare T con B. Consideriamo, due istanti di tempo t e (t + T). I numeri di atomi radioattivi presenti ai due istanti sono rispettivamente

(15.7) $$N(t) = N_0\, e^{-Bt}, \qquad N(t + T) = N_0\, e^{-B(t+T)}.$$

Dividendo membro a membro, si ottiene

(15.8) $$\frac{N(t+T)}{N(t)} = e^{-BT}.$$

Poiché la metà degli atomi radiattivi decadono nell'intervallo di tempo T, abbiamo $N(t + T)/N(t) = 1/2$. Sostituendo tale valore nella relazione precedente, ed usando la funzione logaritmo in base e, si trova che $-BT = \log(1/2)$, cioè:

(15.9) $$B = \frac{\log 2}{T} \cong \frac{0.693147}{T}.$$

Si può riscrivere l'espressione della funzione N(t) in (24.6) facendo comparire la semivita T, invece che la costante di decadimento B. Dalla relazione precedente otteniamo

(15.10) $$N(t) = N_0\, e^{-t\log 2/T} = N_0\, e^{\log 2^{-t/T}} = N_0\, 2^{-t/T}.$$

Si noti l'analogia di questa formula per il decadimento radiattivo, con la funzione (15.1) che esprime la crescita di una popolazione batterica.

CAPITOLO 2

MATRICI E DETERMINANTI

16. Matrici

Si chiama *matrice* di m righe ed n colonne (o *matrice* $m \times n$) una figura costituita da $m \cdot n$ numeri, disposti in m righe orizzontali ed in n colonne verticali, racchiusi tra due parentesi tonde:

(16.1) $$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

I numeri sono indicati mediante una lettera con due indici, il primo dei quali indica la riga, il secondo la colonna a cui il numero appartiene.

Nella matrice (16.1) si distinguono le m *righe*

(16.2) $$\begin{matrix} (a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}), \\ (a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}), \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}), \end{matrix}$$

e le n *colonne*

(16.3) $$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Il numero a_{ij} prende il nome di *elemento di posto* i, j della matrice e si

trova all'incrocio della riga i-sima con la colonna j-sima. Ad esempio, l'elemento a_{12} si trova all'incrocio della prima riga con la seconda colonna:

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \\ \uparrow 2^a \textit{ colonna} \end{array} \quad \leftarrow 1^a \textit{ riga} \tag{16.4}$$

Nel caso particolare che sia m = n, la matrice si dice *quadrata, di ordine* m = n. Ad esempio, la matrice

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -7 \\ 1 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \tag{16.5}$$

è una matrice quadrata di ordine 3.

Una matrice $1 \times n$ ha la forma

$$A = (a_{11}\ a_{12} \dots a_{1n}) \tag{16.6}$$

e prende il nome di *vettore riga*. Una matrice $m \times 1$ ha la forma

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{m1} \end{pmatrix} \tag{16.7}$$

e prende il nome di *vettore colonna*.

Nel seguito indicheremo brevemente con (a_{ij}) la matrice (16.1), il cui elemento di posto i, j è a_{ij}.

17. Operazioni con le matrici

Se $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ sono due matrici $m \times n$, si chiama *somma* di A e B e si indica con $C = A + B$, la matrice $m \times n$ il cui elemento c_{ij}, di posto i, j, è dato da $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Se $A = (a_{ij})$ è una matrice $m \times n$, e $\lambda \in R$, il *prodotto* di λ per A, indicato con λ A, è la matrice $m \times n$, il cui elemento di posto i, j è $\lambda \cdot a_{ij}$.

Un'altra operazione importante che si introduce tra matrici è il *prodotto righe per colonne*.

A tale scopo, premettiamo che il prodotto $A \cdot B$ di un vettore riga A, come in (16.6), per un vettore colonna B, come in (16.7), è definito da

$$(a_1, \dots, a_n) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n . \tag{17.1}$$

Ad esempio risulta

$$(1, 0, 3) \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 4 + 3 \cdot (-7) = 2 - 21 = -19. \tag{17.2}$$

Per definire il prodotto righe per colonne, cominciamo con il caso particolare di due matrici 2×2

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}. \tag{17.3}$$

Il loro prodotto righe per colonne AB è la matrice 2×2

$$AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}, \tag{17.4}$$

ove, per i, j = 1,2, c_{ij} è il prodotto del vettore riga (a_{i1}, a_{i2}) per il vettore colonna $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \end{pmatrix}$, cioè

$$c_{ij} = (a_{i1}, a_{i2}) \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \end{pmatrix} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} . \tag{17.5}$$

Il seguente schema è un'utile rappresentazione del prodotto righe per colonne di due matrici 2×2:

(17.6)
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

In generale siano:

(17.7)
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rn} \end{pmatrix},$$

due matrici, di cui la prima $m \times r$ e la seconda $r \times n$. Ossia *il numero delle colonne della prima è uguale al numero di righe della seconda.*

Formiamo il prodotto di ognuna delle m righe di A per ognuna delle n colonne di B. Ad esempio il prodotto della prima riga di A per la prima colonna di B è la matrice

(17.8)
$$(c_{11}) = (a_{11}, \dots, a_{1r}) \cdot \begin{pmatrix} b_{11} \\ \vdots \\ b_{r1} \end{pmatrix} = (a_{11}\, b_{11} + \dots + a_{1r}\, b_{r1})$$

quello della i-sima riga di A per la j-sima colonna di B è:

(17.9)
$$(c_{ij}) = (a_{i1}, \dots, a_{ir}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ \vdots \\ b_{rj} \end{pmatrix} = (a_{i1}\, b_{1j} + \dots + a_{ir}\, b_{rj})$$

e l'indice i varia tra 1 ed m, mentre l'indice j varia tra 1 ed n.

La matrice $m \times n$ il cui elemento di posto (i,j) è c_{ij}, prende il nome di *prodotto di* A *per* B *righe per colonne.*

Si osservi che: *per poter moltiplicare (righe per colonne) la matrice A per la matrice B, occorre che il numero di colonne della matrice A coincida con il numero di righe della matrice* B. Il risultato è una matrice C che ha lo stesso numero di righe della prima e lo stesso numero di colonne della seconda.

Potremo perciò scrivere

(17.10) (*matrice* $m \times r$) (*matrice* $r \times n$) = *matrice* $m \times n$

Si verifica facilmente che il prodotto righe per colonne gode della *proprietà associativa*, cioè

(17.11)
$$A(BC) = (AB)C\,,$$

ma non gode della *proprietà commutativa*; cioè, in generale, risulta

(17.12)
$$AB \neq BA,$$

per A, B matrici quadrate di ordine n.

Ad esempio, siano

(17.13)
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

allora si ha

(17.14)
$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

18. Determinante di una matrice 2×2

Considerata la matrice quadrata 2×2

(18.1)
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

si chiama *determinante* di A il numero

(18.2)
$$\det A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}\,.$$

Il determinate della matrice (18.1) si indica anche con il simbolo

(18.3) $$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Ad esempio, si ha

(28.4) $$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 40 - 12 = 28.$$

L'uso dei determinanti è frequente nella risoluzione di sistemi di due equazioni lineari in due incognite x, y del tipo

(18.5) $$\begin{cases} a_{11}\, x + a_{12}\, y = b_1 \\ a_{21}\, x + a_{22}\, y = b_2 \end{cases}.$$

Per soluzione di tale sistema si intende una coppia ordinata (x, y) di numeri reali che verifica simultaneamente le due equazioni in (18.5).

Volendo risolvere tale sistema, moltiplichiamo la prima equazione per a_{22} e la seconda per $-a_{12}$. In tal modo otteniamo le equazioni

(18.6) $$\begin{cases} a_{11}\, a_{22}\, x + a_{12}\, a_{22}\, y = b_1\, a_{22} \\ -a_{12}\, a_{21}\, x - a_{12}\, a_{22}\, y = -b_2\, a_{12} \end{cases}.$$

Addizionando membro a membro tali relazioni, si ha

(18.7) $$(a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21})\, x = b_1\, a_{22} - b_2\, a_{12}\,.$$

Indicando con A la *matrice dei coefficienti* del sistema (18.5), cioè ponendo

(18.8) $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

e supposto $\det A = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21} \neq 0$, da (18.7) otteniamo la formula risolutiva per x:

(18.9) $$x = \frac{b_1\, a_{22} - b_2\, a_{12}}{\det A}.$$

Con analoghi passaggi, si ottiene poi la formula risolutiva per y:

(18.10) $$y = \frac{a_{11}\, b_2 - a_{21}\, b_1}{\det A}.$$

Pertanto, la nozione di determinante si rivela utile per ottenere l'espressione della risoluzione (x, y) del sistema (18.5). Con simboli ancora più compatti, per mezzo delle matrici B_1, B_2 definite da

(18.11) $$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{pmatrix},$$

le formule risolutive (18.9), (18.10) si scrivono equivalentemente nella forma

(18.12) $$x = \frac{\det B_1}{\det A}, \quad y = \frac{\det B_2}{\det A}.$$

Una generalizzazione di queste formule verrà data, con il teorema di Cramer, nel paragrafo 24.

19. Determinante di una matrice 3 × 3

Data la matrice 3 × 3

(19.1) $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

e fissati due indici $i,j \in \{1, 2, 3\}$, indichiamo con A_{ij} la matrice ottenuta da A eliminando la riga i-sima e la colonna j-sima.

Ad esempio, considerata la matrice 3 × 3

(19.2) $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

si ha

(19.3) $$A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

(19.4) $$A_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il *determinante* della matrice A in (19.1) è definito dalla posizione

(19.5) $$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Nel caso della matrice A definita dalla (19.2) si ha

(19.6) $$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (2 - 1) - 2(-6 - 0) = 1 + 12 = 13 .$$

Se i, j sono due indici compresi fra 1 e 3, il determinante $\det A_{ij}$ prende il nome di *minore complementare* dell'elemento a_{ij} della matrice A, mentre il numero $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ è il *complemento algebrico* di a_{ij}.

Dalla definizione (19.5) di det A segue perciò che *il determinante di A è la somma dei prodotti degli elementi della prima riga* a_{11}, a_{12}, a_{13} di A per i rispettivi complementi algebrici $\det A_{11}$, $-\det A_{12}$, $\det A_{22}$.

Si dimostra che, anche partendo da un'altra riga, eseguendo la somma dei prodotti dei suoi elementi per i rispettivi complementi algebrici, si ottiene come risultato ancora il determinante di A. Ad esempio, calcoliamo

(19.7) $$b = a_{21} (-\det A_{21}) + a_{22} (\det A_{22}) + a_{23} (-\det A_{23}) =$$

$$= -a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= -a_{21} (a_{12} a_{33} - a_{13} a_{32}) + a_{22} (a_{11} a_{33} - a_{13} a_{31}) - a_{23} (a_{11} a_{32} - a_{12} a_{31}).$$

Mettendo in evidenza a_{11}, a_{12} e a_{13}, abbiamo

(19.8) $$\begin{aligned} b = {} & a_{11} (a_{22} a_{33} - a_{23} a_{32}) + \\ & + a_{12} (-a_{21} a_{33} + a_{23} a_{31}) + \\ & + a_{13} (a_{21} a_{32} - a_{22} a_{31}) \end{aligned}$$

e quindi, per la (19.5)

(19.9) $$b = \det A.$$

In generale si può dimostrare che:

Il det A è uguale alla somma dei prodotti degli elementi di una riga (o di una colonna) per i rispettivi complementi algebrici.

In ogni caso il determinante della matrice 3 × 3 in (19.1) è dato, in forma esplicita, da

(19.10) $$\begin{aligned} \det A = {} & a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} \\ & - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{11} a_{23} a_{32} . \end{aligned}$$

Per ricordare la formula (19.10) è utile lo schema in figura 2.1, dove la linea continua sta a significare che il prodotto dei tre termini va preso con il segno +, mentre la linea tratteggiata significa ch e il prodotto dei tre termini va preso con il segno –.

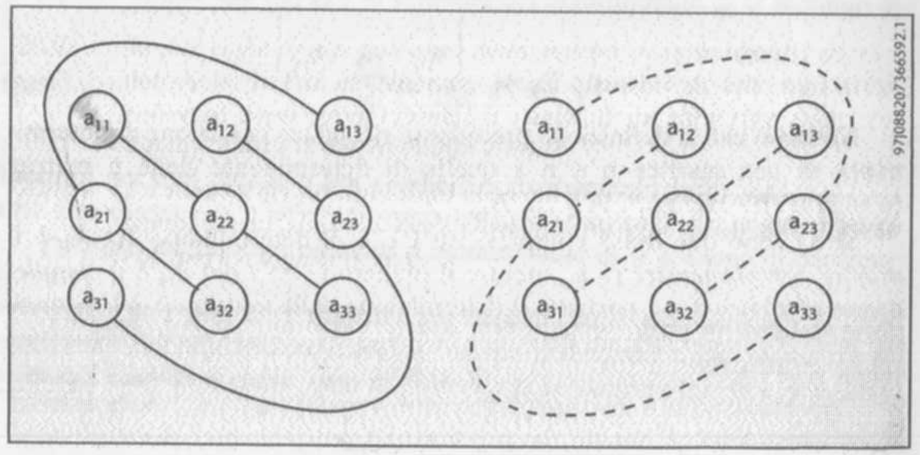


Figura 2.1

20. Determinante di una matrice n × n

Se A è una matrice n × n, con n ≥ 2, data da

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{20.1}$$

il *determinante* di A, denotato con il simbolo det A, è definito dalla posizione

$$\det A = (-1)^{1+1} a_{11} \det A_{11} + (-1)^{1+2} a_{12} \det A_{12} + \dots + (-1)^{1+n} \det A_{1n} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}, \tag{20.2}$$

ove con A_{1j} indichiamo la matrice (n − 1) × (n − 1) ottenuta da A eliminando la prima riga e la colonna j-esima (si veda il paragrafo 88 per maggiori dettagli sul simbolo Σ di *sommatoria*).

Si suole anche indicare il determinante con la seguente notazione:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{20.3}$$

Notiamo che la definizione precedente riconduce la nozione di determinante di una matrice n × n a quella di determinante delle n matrici (n − 1) × (n − 1): $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{1n}$.

Se i,j sono due indici compresi fra 1 e n, il determinante det A_{ij} è il *minore complementare* di a_{ij}, mentre il numero $(-1)^{i+j}$ det A_{ij} è il *complemento algebrico* di a_{ij}; pertanto il determinante della matrice A è la somma dei prodotti degli elementi della riga $(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$ per i rispettivi complementi algebrici.

Consideriamo ora una qualunque altra riga $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ della matrice A ed eseguiamo la somma dei prodotti dei suoi elementi per i rispettivi complementi algebrici:

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}; \tag{20.4}$$

in modo analogo a come visto nel paragrafo precedente per n = 3, si può dimostrare che tale numero coincide con det A qualunque sia l'indice i, e si suol dire che (20.4) è lo *sviluppo* del determinante di A secondo la riga i-esima.

Un altro metodo per ottenere il determinante di A è quello di considerare una colonna $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ della matrice A ed eseguire la somma dei prodotti dei suoi elementi per i rispettivi complementi algebrici:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}; \tag{20.5}$$

in tal caso si dice che (20.5) è lo *sviluppo* del determinante di A secondo la colonna j-esima.

Le principali proprietà dei determinanti sono le seguenti:

(20.6) *Se la matrice* A′ *si ottiene da* A *scambiando le righe con le colonne, allora* det A = det A′.

(20.7) *Se la matrice* A′ *si ottiene da* A *scambiando fra loro due righe o due colonne, allora* det A = − det A′.

(20.8) *Se la matrice* A′ *si ottiene da* A *moltiplicando tutti gli elementi di una riga (o di una colonna) per una costante* λ ∈ **R**, *allora* det A′ = λ det A.

(20.9) *Se due righe (o due colonne) della matrice* A *sono uguali, allora è* det A = 0. *Più in generale, se gli elementi di una riga (risp. colonna) sono proporzionali a quelli di un'altra riga (risp. colonna), allora il determinante è nullo.*

(20.10) *La somma dei prodotti degli elementi di una riga (o colonna) per i complementi algebrici degli elementi analoghi di un'altra riga (o colonna) è uguale a zero.*

La proprietà (20.6) è di facile verifica. Per dimostrare la proprietà (20.7) possiamo procedere per induzione. Si vede subito che essa vale nel caso n = 2; supponendo che essa sussista per matrici di ordine n − 1, verifichiamo che essa sussiste per matrici di ordine n.

Sviluppiamo det A e det A′ secondo una riga (o colonna) diversa da quelle scambiate fra loro:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A_{ik} , \tag{20.11}$$

$$\det A' = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} \det A'_{ik} . \tag{20.12}$$

Poiché A_{ik} e A'_{ik} hanno ordine $n - 1$ e due righe (o colonne) scambiate fra loro, per l'ipotesi di induzione dovrà essere $\det A_{ik} = - \det A'_{ik}$, da cui l'asserto.

La (20.8) è di semplice verifica.

La proprietà (20.9) segue dalla (20.7) in quanto, se scambiamo fra loro due righe (o colonne) uguali, riotteniamo la matrice iniziale A; dunque, dovendo essere per la (20.7) $\det A = - \det A$, ne segue che $\det A = 0$.

Se poi gli elementi di una riga sono proporzionali a quelli di un'altra riga, basterà mettere a fattor comune il coefficiente di proporzionalità (come indicato in (20.8)), riconducendoci ad una matrice con due righe uguali.

Infine, per dimostrare la proprietà (20.10), osserviamo che una somma del tipo

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{ik} \det A_{jk} \qquad (i \neq j) \tag{20.13}$$

è lo sviluppo del determinante della matrice A′ che si ottiene da A sostituendo al posto degli elementi della riga j-esima quelli della riga i-esima. Pertanto A′ ha due righe uguali e dunque $\det A' = 0$.

Osserviamo inoltre che, se una matrice di ordine n ha una riga (o una colonna) ad elementi tutti nulli, allora il suo determinante è zero. Infatti basta sviluppare il determinante secondo tale riga (o colonna).

Se A è una matrice *diagonale*, cioè se risulta

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{20.14}$$

allora è $\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$.

Infatti, sviluppando secondo la prima riga, si ha, per la definizione (20.2):

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11} \det A_{11} - 0 \cdot \det A_{12} + \dots + \\ &+ (-1)^{n+1} \det A_{1n} = a_{11} \det A_{11} . \end{aligned} \tag{20.15}$$

D'altra parte anche A_{11} è diagonale:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \tag{20.16}$$

ed allora il suo determinante si ottiene sviluppando secondo la prima riga, il cui primo elemento a_{22} è l'unico non nullo, per cui

$$\det A_{11} = a_{22} \cdot \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{20.17}$$

Iterando il ragionamento, si ha l'asserto.

Diamo un esempio di applicazione delle precedenti proprietà al calcolo di determinanti.

Calcoliamo il determinante del quarto ordine

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 0 & -3 & -3 & -8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} . \tag{20.18}$$

Addizioniamo alla terza riga la somma delle prime due. Si ha

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} \tag{20.19}$$

e, sviluppando secondo la terza riga, si ha

$$\begin{aligned} D = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} &= 1 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + \\ &+ 1 \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -7. \end{aligned} \tag{20.20}$$

21. Matrici inverse

Sia A una matrice quadrata di ordine n. Diremo che A è *invertibile* se esiste una matrice A^{-1} di ordine n tale che

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I, \tag{21.1}$$

ove I è la *matrice identica*, cioè

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \tag{21.2}$$

In tal caso la matrice A^{-1} si chiama *inversa* di A. Si può verificare che, se esiste, l'inversa di una matrice è unica.

Ad esempio, la matrice inversa di

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \tag{21.3}$$

è la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \tag{21.4}$$

in quanto risulta

$$AB = BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \tag{21.5}$$

in simboli risulta quindi $B = A^{-1}$.

Sussiste il seguente

TEOREMA. — Se $A = (a_{ij})$ *è una matrice di ordine* n *con* $\det A \neq 0$, *allora* A *è invertibile e gli elementi* b_{ij} *della matrice inversa* A^{-1} *sono dati da*

$$b_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A}, \tag{21.6}$$

ove $\det A_{ji}$ *è il minore complementare di* a_{ji} *(si veda il paragrafo 20).*

Dimostrazione: indichiamo con $C = (c_{ij})$ la matrice prodotto $(a_{ij}) \cdot (b_{ij})$ e dimostriamo che risulta $c_{ij} = 1$ per $i = j$, $c_{ij} = 0$ per $i \neq j$. Dalla formula (17.9) per il prodotto di matrici segue

$$\begin{aligned} c_{ij} &= \sum_{h=1}^{n} a_{ih}\, b_{hj} = \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{ih} \frac{\det A_{jh}}{\det A} = \\ &= (\det A)^{-1} \sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{ih} \det A_{jh}\,. \end{aligned} \tag{21.7}$$

La conclusione segue dal fatto che

$$\sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{ih} \det A_{jh} = 0 \tag{21.8}$$

se $i \neq j$, a causa della proprietà (20.10), mentre per $i = j$:

$$\sum_{h=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{ih} \det A_{ih} = \det A. \tag{21.9}$$

22. Caratteristica di una matrice

Nei paragrafi precedenti ci siamo sostanzialmente dedicati allo studio di matrici quadrate; il motivo è che non si definisce il determinante di una matrice $m \times n$ quando $m \neq n$. Comunque, da una matrice rettangolare

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{22.1}$$

si possono estrarre delle matrici quadrate i cui determinanti si dicono *minori estratti* dalla matrice A. Il numero di righe (o colonne) della matrice estratta si chiama *ordine* del minore.

Si chiama *caratteristica* (o *rango*) della matrice A l'ordine massimo dei minori non tutti nulli che si possono estrarre da A.

In altre parole, l'intero positivo $k \leq \min\{m, n\}$ è la caratteristica di A se:

i) dalla matrice A si può estrarre almeno un minore non nullo di ordine k

ii) tutti i minori di ordine maggiore di k, che si possono estrarre da A, sono nulli.

Ad esempio, la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \tag{22.2}$$

può avere al massimo caratteristica 3, in quanto tale è l'ordine massimo delle matrici quadrate in essa contenute.

Si verifica facilmente che i minori di ordine 3 sono tutti nulli e perciò la caratteristica sarà minore di 3. Poiché tra i minori del secondo ordine ve ne sono alcuni non nulli, quale ad esempio

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \quad , \tag{22.3}$$

ne segue che la caratteristica della matrice è uguale a 2.

CAPITOLO 3

SISTEMI LINEARI

23. Sistemi lineari di m equazioni in n incognite

Un *sistema lineare* di tipo generale è della forma

coefficienti

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \dots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \dots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \dots + a_{mn}\, x_n = b_m \end{cases} \tag{23.1}$$

← Termini noti

Il sistema lineare (23.1) è costituito da m *equazioni* nelle n *incognite* x_1, x_2, ..., x_n. Il sistema si dice *lineare* perché le incognite sono legate fra loro da equazioni algebriche di primo grado.

I numeri reali a_{11} a_{12}, ..., che compaiono in (23.1), indicati brevemente con a_{ij}, prendono il nome di *coefficienti* del sistema; invece i numeri reali b_1, b_2, ..., b_m prendono il nome di *termini noti*. Se, in particolare, i termini noti sono tutti nulli, il sistema lineare si dice *omogeneo*.

Il sistema (23.1) si può esprimere in forma compatta utilizzando la *matrice dei coefficienti*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{23.2}$$

detta anche *matrice del sistema*, ed i *vettori colonna* dei termini noti e delle incognite

(23.3) $$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix};$$

(cioè della PARTE della matrice)

con tali notazioni il sistema lineare (23.1) prende la *forma matriciale*

(23.4) $$A \cdot X = B,$$

dove $A \cdot X$ è il *prodotto righe per colonne* della matrice A per la matrice X (si veda il paragrafo 17). Si osservi che, in accordo con la (17.10), si tratta del prodotto di una matrice $m \times n$ per una matrice $n \times 1$, che dà per risultato una matrice $m \times 1$.

Il problema che affrontiamo nei paragrafi seguenti è quello di stabilire delle condizioni sui coefficienti e sui termini noti affinché esistano dei valori reali delle incognite $x_1, x_2, ..., x_n$ (in tal caso X è detta una *soluzione*) per i quali tutte le equazioni del sistema risultino simultaneamente soddisfatte. In breve, affrontiamo il problema della *risoluzione* del sistema (23.1). Nel paragrafo che segue cominciamo con il caso $m = n$.

24. Il teorema di Cramer

In questo paragrafo proponiamo un metodo di risoluzione del sistema lineare di n equazioni in n incognite:

(24.1) $$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + ... + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + ... + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\, x_1 + a_{n2}\, x_2 + ... + a_{nn}\, x_n = b_n \end{cases}.$$

In modo analogo a quanto fatto nel paragrafo precedente, indichiamo con A, B, X le matrici:

(24.2) $$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Indichiamo inoltre con B_i, per $i = 1, 2, ..., n$, la matrice quadrata ottenuta sostituendo la colonna i-esima della matrice dei coefficienti A con la colonna B dei termini noti; cioè:

(24.3) $$B_1 = \begin{pmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}, ..., B_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & b_n \end{pmatrix}.$$

Traendo spunto dal caso particolare $n = 2$, già studiato nel paragrafo 18 (si veda in particolare la (18.12)), la soluzione X del sistema si può rappresentare utilizzando le matrici sopra introdotte, nella forma:

(24.4) $$x_1 = \frac{\det B_1}{\det A}, \quad x_2 = \frac{\det B_2}{\det A}, \quad ..., \quad x_n = \frac{\det B_n}{\det A},$$

purché il determinante di A non sia nullo. Precisamente vale il seguente

> TEOREMA DI CRAMER. — *Se* $\det A \neq 0$, *il sistema lineare* (24.1) *ammette una ed una sola soluzione, data dalla* (24.4).

Proponiamo due dimostrazioni, sostanzialmente equivalenti, la seconda delle quali utilizza la forma matriciale (23.4) del sistema.

Dimostrazione del teorema di Cramer (*primo metodo*): nell'ipotesi $\det A \neq 0$, proviamo preliminarmente che la soluzione è unica. A tale scopo supponiamo che la n-pla $(x_1, x_2, ..., x_n)$ sia una soluzione del sistema (24.1). Fissato un indice $j \in \{1,...,n\}$ moltiplichiamo ambo i membri della prima equazione per il complemento algebrico $(-1)^{1+j} \det A_{1j}$ di a_{1j}, della seconda equazione per $(-1)^{2+j} \det A_{2j}$, e così via; sommando poi membro a membro le n uguaglianze abbiamo

(24.5) $$\begin{aligned} &(-1)^{1+j}\,(a_{11}\, x_1 + ... + a_{1n}\, x_n) \det A_{1j} + ... + \\ &+ (-1)^{n+j}\,(a_{n1}\, x_1 + ... + a_{nn}\, x_n) \det A_{nj} = \\ &= (-1)^{1+j}\, b_1 \det A_{1j} + ... + (-1)^{n+j}\, b_n \det A_{nj}, \end{aligned}$$

da cui, mettendo in evidenza a primo membro i fattori $x_1, x_2, ..., x_n$, otteniamo

(24.6) $$\begin{aligned} &(a_{11}\,(-1)^{1+j} \det A_{1j} + ... + a_{n1}\,(-1)^{n+j} \det A_{nj})\, x_1 + ... + \\ &+ (a_{1n}\,(-1)^{1+j} \det A_{1j} + ... + a_{nn}\,(-1)^{n+j} \det A_{nj})\, x_n = \\ &= (-1)^{1+j}\, b_1 \det A_{1j} + ... + (-1)^{n+j}\, b_n \det A_{nj}. \end{aligned}$$

Notiamo che il coefficiente di x_i, se $i \neq j$, è nullo, in base alla proprietà (20.10), che afferma che è nulla la somma dei prodotti degli elementi $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}$ della colonna i-sima per i complementi algebrici degli elementi di un'altra colonna. Invece il coefficiente di x_j è lo sviluppo del determinante della matrice A (si veda la (20.5)) ed è perciò uguale a det A. Infine il secondo membro della (24.6) è lo sviluppo, secondo gli elementi della colonna j-sima, del determinante della matrice B_j in (24.3).

Pertanto da (24.6) si ottiene

$$\det A \cdot x_j = \det B_j \; ; \tag{24.7}$$

utilizzando l'ipotesi det $A \neq 0$, si ricava

$$x_j = \det B_j / \det A, \quad \forall j = 1, 2, \ldots, n; \tag{24.8}$$

perciò la soluzione $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ deve essere necessariamente rappresentata come in (24.4); ciò prova l'unicità della soluzione.

Per quanto riguarda l'esistenza, dimostreremo che la n-pla $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ data in (24.4) soddisfa contemporaneamente tutte le equazioni del sistema lineare (24.1). A tale scopo, sostituendo i valori (24.4) nell'i-esima equazione, dimostreremo che

$$a_{i1} \frac{\det B_1}{\det A} + \ldots + a_{in} \frac{\det B_n}{\det A} = b_i \, . \tag{24.9}$$

Eseguiamo i calcoli a primo membro, sviluppando per ogni j il determinante della matrice B_j secondo la colonna j-sima:

$$\begin{aligned}
& a_{i1} \frac{\det B_1}{\det A} + \ldots + a_{in} \frac{\det B_n}{\det A} = \\
& = \frac{a_{i1}}{\det A} (b_1 \det A_{11} + \ldots + b_n (-1)^{n+1} \det A_{n1}) + \ldots + \\
& + \frac{a_{in}}{\det A} (b_1 (-1)^{n+1} \det A_{1n} + \ldots + b_n (-1)^{n+n} \det A_{nn}) = \\
& = \frac{b_1}{\det A} (a_{i1} \det A_{11} + \ldots + (-1)^{n+1} \det A_{1n}) + \ldots + \\
& + \frac{b_n}{\det A} (a_{i1} (-1)^{n+1} \det A_{n1} + \ldots + a_{in} (-1)^{n+n} \det A_{nn}) = \\
& = \frac{1}{\det A} (b_1 \cdot 0 + \ldots + b_i \cdot \det A + \ldots + b_n \cdot 0) = b_i \, ;
\end{aligned} \tag{24.10}$$

nell'ultimo passaggio si è utilizzata la proprietà dei determinanti (20.10), per cui il coefficiente di b_j, se $j \neq i$, è nullo, mentre è uguale a det A se $j = i$.

Dimostrazione del teorema di Cramer (*secondo metodo*): scriviamo il sistema (24.1) in forma matriciale (come in (23.4)):

$$A \cdot X = B, \tag{24.11}$$

dove $A \cdot X$ è il prodotto righe per colonne (paragrafo 17) delle matrici A e X. Allo scopo di provarne l'unicità, supponiamo che il sistema lineare (24.11) abbia una soluzione X; dato che, per ipotesi, det $A \neq 0$, per il teorema del paragrafo 21 la matrice A è invertibile. Indichiamo con A^{-1} la matrice inversa di A e moltiplichiamo (a sinistra) entrambi i membri della (24.11); sviluppando il secondo membro otteniamo

$$\begin{aligned}
& A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B, \\
& (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B, \\
& I \cdot X = A^{-1} \cdot B, \\
& X = A^{-1} \cdot B;
\end{aligned} \tag{24.12}$$

ciò significa che la soluzione X, dovendo necessariamente essere uguale alla matrice colonna $A^{-1} \cdot B$, è unica.

Proviamo ora l'esistenza facendo vedere che effettivamente $X = A^{-1} \cdot B$ è soluzione; risulta infatti:

$$A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = I \cdot B = B. \tag{24.13}$$

perciò $A \cdot X = B$ e X è soluzione. Rimane da provare che l'identità matriciale $X = A^{-1} \cdot B$ in forma esplicita equivale alla (24.4); a tale scopo ricordiamo che gli elementi della matrice A^{-1} sono espressi dalla (21.6) nella forma

$$(-1)^{i+j} \frac{\det A_{ji}}{\det A} \, . \tag{24.14}$$

Risulta quindi

$$\begin{aligned}
X = A^{-1} \cdot B &= \frac{1}{\det A} ((-1)^{i+j} \det A_{ji}) \cdot (b_j) = \\
&= \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} (-1)^{1+1} \det A_{11}\, b_1 + \ldots + (-1)^{1+n} \det A_{n1}\, b_n \\ (-1)^{2+1} \det A_{12}\, b_1 + \ldots + (-1)^{2+n} \det A_{n2}\, b_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (-1)^{n+1} \det A_{1n}\, b_1 + \ldots + (-1)^{n+n} \det A_{nn}\, b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} \det B_1 \\ \det B_2 \\ \ldots \\ \det B_n \end{pmatrix} .
\end{aligned} \tag{24.15}$$

Nell'ultimo passaggio il det B_1 è stato ottenuto sviluppando il determinante della matrice B_1 in (24.3) secondo gli elementi della prima colonna; analogamente per det B_2, ..., det B_n. Ciò prova la (24.4) e completa la dimostrazione.

A titolo di esempio risolviamo con la formula di Cramer (24.4) il seguente sistema

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \end{cases} \tag{24.16}$$

La matrice del sistema è:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 4 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{24.17}$$

e si verifica che

$$\det A = 24; \tag{24.18}$$

dato che $\det A \neq 0$, in base al teorema di Cramer, il sistema lineare (24.16) ammette una ed una sola soluzione. Inoltre si ha

$$\det B_1 = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -27; \tag{24.19}$$

$$\det B_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 21;$$

$$\det B_3 = \begin{vmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -12.$$

La soluzione (x_1, x_2, x_3) è quindi fornita dalla regola di Cramer (24.4):

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\det B_1}{\det A} = -\dfrac{27}{24} = -\dfrac{9}{8} \\ x_2 = \dfrac{\det B_2}{\det A} = \dfrac{21}{24} = \dfrac{7}{8} \\ x_3 = \dfrac{\det B_3}{\det A} = -\dfrac{12}{24} = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{24.20}$$

25. Introduzione al metodo di Gauss

Il metodo di Cramer per la risoluzione di un sistema lineare in n equazioni ed n incognite, esposto nel paragrafo precedente, è significativo dal punto di vista teorico perché fornisce un criterio ($\det A \neq 0$) sufficiente per la risoluzione del sistema; si rivela però poco utile nella pratica se il numero n delle equazioni e delle incognite è abbastanza grande, a causa del gran numero di operazioni elementari (addizioni e moltiplicazioni) che esso comporta per il calcolo dei determinanti.

Ad esempio un sistema di 15 equazioni in 25 incognite richiede più di 26! moltiplicazioni. Questo numero è dell'ordine di 10^{26} e così un computer che possa eseguire 1000 moltiplicazioni al secondo impiegherebbe 10^{16} anni per completarle.

Un altro metodo di frequente uso per sistemi di grandi dimensioni è il *metodo di eliminazione di Gauss*, che consiste nel trasformare un dato sistema lineare in un altro, di forma *triangolare* ad esso equivalente, cioè avente le sue stesse soluzioni. Il sistema triangolare può essere poi facilmente risolto con un metodo di risoluzione «all'indietro».

Descriviamo il metodo di Gauss su di un semplice esempio; consideriamo il sistema:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 & (1) \\ x + 2y + z = 3 & (2) \\ 2x - 3y + z = 2 & (3) \end{cases} \tag{25.1}$$

e trasformiamolo in un sistema in forma triangolare.

Primo passo: eliminiamo x dalle equazioni (2) e (3) utilizzando l'equazione (1):

$$\begin{cases} x + y - z = 1 & (1)' \\ 0 + y + 2z = 2 & (2)' \ (\textit{equaz } (2) - \textit{equaz } (1)) \\ 0 - y + 3z = 0 & (3)' \ (\textit{equaz } (2) - 2\ \textit{equaz } (1)). \end{cases} \tag{25.2}$$

Secondo passo: eliminiamo *y* dall'equazione (3)′, utilizzando (2)′ :

$$\begin{cases} x + y - z = 1 & (1)'' \\ y + 2z = 2 & (2)'' \\ 0 + 5z = 2 & (3)'' \ (\textit{equaz } (3)' + \textit{equaz } (2)'\ ) ; \end{cases} \tag{25.3}$$

abbiamo così ottenuto il sistema in forma triangolare:

$$(25.4)\qquad \begin{cases} x + y - z = 1 \\ \quad y + 2z = 2 \\ \qquad 5z = 2 \end{cases}$$

la cui matrice dei coefficienti è di tipo *triangolare superiore*

$$(25.5)\qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Dopo aver trasformato il sistema dato in forma triangolare esso può essere risolto ricavando:

$$(25.6)\qquad z \textit{ dalla terza equazione}: \quad z = \frac{2}{5};$$

$$y \textit{ dalla seconda equazione}: \quad y = 2 - 2\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{6}{5};$$

$$x \textit{ dalla prima equazione}: \quad x = 1 - y + z = \frac{1}{5}.$$

Dunque la soluzione del sistema è: (1/5, 6/5, 2/5).

Nel trasformare un sistema in forma triangolare si eseguono ad ogni passo le seguenti operazioni:

a) *moltiplicazione di un'equazione per una costante;*
b) *addizione ad un'equazione di qualche altra equazione;*
c) *scambio di due equazioni.*

Si verifica che, eseguendo tali operazioni su un dato sistema di equazioni, si perviene ad un sistema equivalente, cioè avente le stesse soluzioni del primo.

Una misura dell'efficienza di un metodo risolutivo, quale quello della eliminazione di Gauss, è il numero di operazioni richieste per pervenire alla soluzione.

Si può dimostrare che nel metodo di Gauss, per risolvere un sistema di

n equazioni in n incognite, sono necessarie $n(n-1)/2$ divisioni, $n(n^2-1)/3$ moltiplicazioni e $n(n^2-1)/3$ addizioni, escluso le sostituzioni.

Per eseguire tutte le sostituzioni occorrono poi $n(n-1)/2$ moltiplicazioni, n divisioni e $n(n-1)/2$ addizioni.

26. Il metodo di eliminazione di Gauss

Formalizziamo l'esempio proposto nel precedente paragrafo.

Consideriamo di nuovo un sistema lineare di tipo generale, costituito da m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$(26.1)\qquad \begin{cases} a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 + \ldots + a_{1n}\, x_n = b_1 \\ a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 + \ldots + a_{2n}\, x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\, x_1 + a_{m2}\, x_2 + \ldots + a_{mn}\, x_n = b_m \end{cases}.$$

Come in precedenza consideriamo la *matrice dei coefficienti* ed i *vettori colonna* dei termini noti e delle incognite

$$(26.2)\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$$

Con tali notazioni, il sistema lineare (26.1), prende la forma matriciale $AX = B$ (si veda il paragrafo 23).

La matrice A dei coefficienti viene anche detta *matrice incompleta*, per distinguerla dalla matrice completa C del sistema (26.1), che è la matrice $m \times (n + 1)$ definita da

$$(26.3)\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

Prendiamo in considerazione le seguenti *matrici elementari* di ordine $n \times n$ (per semplicità di notazioni non indichiamo esplicitamente la dipendenza dagli indici i, j):

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & a_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & 0 & 1 & \dots \\ & & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26.4}$$

$$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & \\ & & \dots & \dots & \dots & \\ & & & 0 & c & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Moltiplicando a sinistra una qualunque matrice per ciascuna delle *matrici elementari* sopra elencate, si ottengono operazioni molto significative sulle righe di tale matrice.

Supponiamo, ad esempio, di voler operare sulle righe di un vettore colonna

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix} \tag{26.5}$$

Se moltiplichiamo Y per la *matrice elementare* E_1, otteniamo una matrice che ha le stesse righe di Y, escluso l'i-sima riga che vale $x_i + a_{ij}x_j$ (vedi paragrafo 17 per la moltiplicazione fra matrici).

Esempio (nel caso in cui E_1 abbia ordine 3×3 e $a_{ij} = 5$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 + 5y_3 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \tag{26.6}$$

Osserviamo inoltre che la *matrice elementare* E_2 opera sulle righe di Y scambiando l'i-sima riga con la j-sima riga; E_2 viene pertanto detta anche *matrice di scambio*. Infine la *matrice elementare* E_3 opera sulle righe di Y moltiplicando l'i-sima riga per c.

Ci sarà utile il seguente:

LEMMA. – *le matrici elementari sono invertibili e le loro inverse sono ancora matrici elementari.*

DIMOSTRAZIONE: la matrice inversa di E_1 è data da

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & -a_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26.7}$$

che è ancora una *matrice elementare*.

Vale infatti, eseguendo le moltiplicazioni fra le matrici

$$E_1 E_1^{-1} = E_1^{-1} E_1 = I \tag{26.8}$$

Analogamente si può dimostrare che le inverse delle matrici E_2, E_3, sono date rispettivamente da

$$E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \dots & 0 & 1 & \dots \\ & & \dots & 1 & 0 & \dots \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26.9}$$

$$E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \\ \dots & 0 & 1 & 0 & \dots \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & 0 & c^{-1} & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

che sono ancora *matrici elementari*.

Osserviamo che la matrice inversa di E_2, coincide con E_2 stessa.

Siano ora A, B, C le matrici associate al sistema lineare (26.1), vale la seguente

PROPOSIZIONE. – *Siano* A′, B′, C′ *le matrici ottenute rispettivamente da* A, B, C *mediante una successione di moltiplicazioni a sinistra per le matrici elementari.*
Allora le soluzioni del sistema $A'X = B'$ *sono le stesse del sistema* $AX = B$.

DIMOSTRAZIONE: Per ipotesi risulta

$$\begin{aligned} A' &= E_n \cdot E_{n-1} \dots E_2 \cdot E_1 \cdot A \\ B' &= E_n \cdot E_{n-1} \dots E_2 \cdot E_1 \cdot B \\ C' &= E_n \cdot E_{n-1} \dots E_2 \cdot E_1 \cdot C \end{aligned} \tag{26.10}$$

dove E_i sono *matrici elementari*, scelte in modo opportuno fra le matrici elementari in (26.4).

Indichiamo con P la matrice prodotto delle *matrici elementari*, che risulta invertibile, in quanto il prodotto di matrici invertibili è invertibile. (Vedi lemma precedente)

Sia quindi $P = E_1E_2 \dots E_{n-1}E_n$.

Se X è soluzione di $AX = B$, moltiplicando entrambi i membri per la matrice P, otteniamo che X è soluzione anche di $PAX = PB$, cioè di $A'X = B'$.

Viceversa se X è soluzione di $A'X = B'$, cioè di $PAX = PB$, moltiplicando entrambi i membri per P^{-1}, cioè per la matrice inversa di P, otteniamo $P^{-1}PAX = P^{-1}PB$; poiché $P \cdot P^{-1} = I$, risulta che X è soluzione anche di $AX = B$.

Definiamo come *operazioni elementari* su una generica matrice (ad esempio sul *vettore colonna* Y di (26.5)), le seguenti operazioni

(a) addizione all'i-sima riga della j-sima riga.

(b) scambio dell'i-sima riga con la j-sima riga.

(c) moltiplicazione dell'i-sima riga per una costante c, $c \neq 0$.

Osserviamo che tali operazioni sono le stesse che si ottengono moltiplicando a sinistra Y per ciascuna delle *matrici elementari* elencate in (26.4).

Pertanto possiamo tradurre la precedente proposizione, affermando che, eseguendo operazioni elementari su un sistema lineare, è possibile trovare un altro sistema lineare, ad esso equivalente, cioè avente le stesse soluzioni.

DEFINIZIONE. – *Una matrice* $m \times n$ *si dice triangolare quando valgono:*

(i) *il primo coefficiente diverso da zero di ogni riga vale uno, e viene detto pivot;*

(ii) *il pivot della* $(i + 1)$*-esima riga è a destra del pivot dell'-i-sima;*

(iii) *ogni pivot ha tutti elementi nulli sopra di esso, cioè nella sua colonna.*

Vediamo un esempio di matrice *triangolare* di ordine 6×9:

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & 0 & a_{14} & 0 & 0 & 0 & a_{18} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_{24} & 0 & 0 & 0 & a_{28} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & a_{38} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & a_{48} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & a_{58} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{26.11}$$

Dimostriamo ora che è sempre possibile trasformare una qualunque matrice M di ordine $m \times n$, in forma *triangolare*; vale infatti il seguente

TEOREMA DI GAUSS. – *Data una matrice M di ordine $m \times n$, mediante una opportuna successione di operazioni elementari sulle righe, è possibile ridurre M in forma triangolare. Il procedimento è costruttivo e si chiama algoritmo di Gauss.*

Dimostrazione per induzione sulle righe m della matrice M: cominciamo con l'osservare che nel caso in cui $m = 1$, la matrice M può essere banalmente resa di forma *triangolare*. Secondo l'ipotesi di induzione supponiamo che il teorema valga per una matrice con $m - 1$ righe e dimostriamone la validità per una matrice M con m righe.

Consideriamo la prima colonna non nulla di M. Se tutte le colonne sono nulle, allora $M = 0$ ed è quindi di forma *triangolare*. Mediante una *operazione elementare* di tipo (b), portiamo l'elemento $a_{ij} \neq 0$ nella prima riga; facciamo diventare 1 tale elemento, situato ora nella prima riga e non nullo, tramite una *operazione elementare* di tipo (c) (ossia moltiplicandolo per l'inverso di a_{ij}) e chiamiamolo *pivot*; successivamente rendiamo nulli tutti gli elementi sotto il pivot mediante *operazioni elementari* di tipo (a) (ossia sommando in modo opportuno gli elementi di ciascuna riga). Consideriamo adesso la matrice D, ottenuta da M togliendo la prima riga: D ha $m - 1$ righe e per l'ipotesi induttiva può essere ridotta in forma *triangolare* tramite una opportuna successione di *operazioni elementari* sulle $m - 1$ righe. L'ultimo passo consiste nell'annullare tutti gli elementi non nulli nella prima riga di M, sopra i *pivot* di D, tramite *operazioni elementari* di tipo (a). Rimane quindi una matrice di forma *triangolare*.

Dato pertanto il sistema lineare (26.1), è sempre possibile renderlo in forma *triangolare* tramite una opportuna successione di operazioni *elementari*; questo "nuovo" sistema inoltre, per quanto abbiamo visto, ha le stesse soluzioni del sistema (26.1).

Vediamo adesso un criterio, di cui omettiamo la dimostrazione, che ci permette di stabilire se il sistema (26.1) ammette o meno soluzioni.

CRITERIO DI COMPATIBILITÀ DI UN SISTEMA LINEARE IN FORMA TRIANGOLARE. – *Sia C la matrice completa, associata al sistema lineare $AX = B$, di forma triangolare. Allora tale sistema ammette soluzioni se e solo se il vettore colonna dei termini noti B non contiene pivot. In questo caso è possibile attribuire valori arbitrari all'incognita x_b quando l'i-sima colonna non contiene pivot.*

Soffermiamoci ora, sul caso di un sistema lineare di n equazioni in n incognite, che è sicuramente il caso più interessante. Abbiamo visto, che se la matrice A dei coefficienti, che è quadrata, ammette determinante diverso da zero, allora tale sistema, in base al teorema di Cramer ammette soluzione (vedi paragrafo 24); con i nuovi elementi introdotti, è possibile determinare tale soluzione tramite il metodo di eliminazione di Gauss, ossia, come abbiamo visto, trasformando il sistema dato in un altro sistema equivalente $A'X = B'$ di forma *triangolare*. La matrice A' è ottenuta dalla matrice A mediante una successione di *operazioni elementari* che non ne modificano il determinante. Quindi

$$\det A = \det A' . \tag{26.12}$$

Dato che A' è una *matrice triangolare superiore*, $\det A'$ non è altro che il prodotto degli elementi della diagonale principale; tali elementi sono inoltre diversi da zero, dato che per ipotesi $\det A = \det A' \neq 0$.

Questa è la condizione che permette di risolvere il nuovo sistema $A'x = B'$ con il metodo di risoluzione "all'indietro" che abbiamo trattato nell'esempio del paragrafo precedente.

27. Il teorema di Rouché-Capelli

Consideriamo di nuovo un sistema lineare di tipo generale, costituito da m equazioni nelle n incognite $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \ldots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \ldots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \ldots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases} . \tag{27.1}$$

Come in precedenza consideriamo la *matrice dei coefficienti*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} ; \tag{27.2}$$

$D_2 = 0$

matrice incompleta

A viene anche detta *matrice incompleta*, per distinguerla dalla *matrice completa* C del sistema (27.1), che è la matrice $m \times (n + 1)$ definita da

matrice completa

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{27.3}$$

Il seguente teorema, di cui omettiamo la dimostrazione, fornisce un criterio per stabilire se il sistema (27.1) ammette o meno soluzioni.

TEOREMA DI ROUCHÉ-CAPELLI. — *Condizione necessaria e sufficiente affinché il sistema* (27.1) *abbia soluzioni è che le matrici completa ed incompleta del sistema abbiano la stessa caratteristica.*

Se il sistema ha soluzioni, detta k la caratteristica delle due matrici, per risolvere il sistema stesso si procede nel modo seguente:

a) *si scelgono* k *delle* m *equazioni, in modo tale che la matrice dei coefficienti di queste abbia caratteristica uguale a* k;

b) *nel nuovo sistema ottenuto, avente* k *equazioni in* n *incognite, si scelgono* k *incognite, in modo tale che il determinante dei loro coefficienti sia non nullo ed alle rimanenti* $n - k$ *incognite si attribuiscono valori arbitrari*;

c) *si risolve questo sistema di* k *equazioni in* k *incognite, con determinante non nullo, mediante le regole note*;

d) *gli* n *numeri così trovati, costituiscono una soluzione del sistema* (27.1).

Nel caso $k < n$, si suole dire che il sistema ammette ∞^{n-k} soluzioni. Nel caso $k = n$, il sistema ha una sola soluzione, in base al teorema di Cramer.

Ad esempio, sia $k < n$ la caratteristica di A e di C e supponiamo che abbia caratteristica k la matrice $\underline{A}$ costituita dalle prime k righe e dalle prime k colonne. Cioè, posto

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kk} \end{pmatrix}, \tag{27.4}$$

risulti in particolare $\det \underline{A} \neq 0$. Trascurando le eventuali altre $m - k$ righe, consideriamo il sistema nelle incognite $x_1, \dots, x_k$

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + \dots + a_{1k} x_k = b_1 - a_{1k+1} x_{k+1} - \dots - a_{1n} x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{k1} x_1 + \dots + a_{kk} x_k = b_k - a_{kk+1} x_{k+1} - \dots - a_{kn} x_n \end{cases}, \tag{27.5}$$

Poiché $\det \underline{A} \neq 0$, qualunque siano i valori attribuiti alle $x_{k+1}, \dots, x_n$, per il teorema di Cramer, il sistema (27.5) ammette una ed una sola soluzione. In definitiva il sistema (27.1) ammette infinite soluzioni, ciascuna delle quali si ottiene fissando arbitrariamente $x_{k+1}, \dots, x_n$ e ricavando, con la regola di Cramer, i valori di $x_1, \dots, x_k$.

Consideriamo ad esempio il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 - x_3 = -4 \end{cases}. \tag{27.6}$$

La matrice incompleta A e quella completa C sono

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \tag{27.7}$$

ed hanno caratteristica 2. La matrice

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{27.7}$$

ha anch'essa caratteristica 2, in quanto $\det \underline{A} = 1$. Si considera allora il sistema

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2 = -4 + x_3 \end{cases}. \tag{27.9}$$

Per ogni $x_3 \in \mathbf{R}$ tale sistema ammette la soluzione $x_1 = -2 + x_3$, $x_2 = -4 + x_3$. Perciò il sistema (27.6) ammette le infinite soluzioni $(-2 + x_3, -4 + x_3, x_3)$ al variare di x_3 in $\mathbf{R}$.

Come ulteriore esempio consideriamo i due sistemi lineari

$$\begin{cases} 3x - 3y = 1 \\ 2x - 2y = 2/3 \end{cases}, \quad \begin{cases} 3x - 3y = 1 \\ 2x - 2y = 2 \end{cases}. \tag{27.10}$$

La matrice dei coefficienti

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \tag{27.11}$$

ha determinante nullo; pertanto il teorema di Cramer non è applicabile. La matrice A ha caratteristica 1.

Le matrici complete dei due sistemi sono date rispettivamente da

$$C_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2/3 \end{pmatrix}; \qquad C_2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}; \tag{27.12}$$

la matrice C_1 ha caratteristica 1, mentre la matrice C_2 ha caratteristica 2 (il lettore verifichi tali affermazioni). In base al teorema di Rouché-Capelli il primo sistema in (27.10) ammette soluzioni, mentre il secondo sistema non ha soluzioni. Osserviamo come sia semplice verificare direttamente che il secondo sistema non ha soluzioni, dato che equivale alle due equazioni in contraddizione fra loro: $x - y = 1/3$ (ottenuta dividendo entrambi i membri della prima equazione per 3) e $x - y = 1$ (dalla seconda equazione, dividendo entrambi i membri per 2).

28. Sistemi omogenei

Un sistema lineare con secondo membro nullo, cioè del tipo

$$\begin{cases} a_{11}\, x_1 + \dots + a_{1n}\, x_n = 0 \\ a_{21}\, x_1 + \dots + a_{2n}\, x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\, x_1 + \dots + a_{mn}\, x_n = 0 \end{cases} \tag{28.1}$$

prende il nome di *sistema omogeneo*. Tale sistema ha sempre la *soluzione banale* $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$. Diremo che $(x_1, x_2, \dots, x)$ è una *soluzione non banale*, detta anche *soluzione propria*, se almeno uno dei numeri reali $x_1, x_2, \dots, x_n$ non è nullo.

Se il sistema (28.1) ammette una soluzione propria $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, allora ammette anche infinite soluzioni, della forma

$$(a\, x_1,\ a\, x_2,\ \dots,\ a\, x_n) \tag{28.2}$$

qualunque sia $a \in \mathbf{R}$. Basta infatti sostituire (28.2) nel sistema (28.1) e poi mettere in evidenza il fattore a.

Con l'intento di stabilire delle condizioni affinché il sistema lineare omogeneo (28.1) ammetta soluzioni proprie, ci limitiamo a considerare il caso $m = n$.

TEOREMA. — *Sia* A *la matrice quadrata dei coefficienti del sistema lineare omogeneo* (28.1), *con* $m = n$. *Il sistema ammette una soluzione non banale (e perciò infinite, per quanto già detto) se e soltanto se risulta* $\det A = 0$.

imostrazione: se $\det A \neq 0$, per il teorema di Cramer il sistema ammette *una sola* soluzione; dato che il sistema ha la soluzione banale $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (0, 0, \dots, 0)$, non esistono pertanto soluzioni non banali.

Supponiamo ora che $\det A = 0$. Dato che la matrice completa

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 \end{pmatrix} \tag{28.3}$$

si ottiene dalla matrice incompleta A aggiungendo una colonna di zeri, le due matrici A e C hanno la stessa caratteristica, che è un numero k inferiore ad n, dato che $\det A = 0$. Per il teorema di Rouché-Capelli il sistema (28.1) ammette ∞^{n-k} soluzioni.

COROLLARIO. — Dati n *vettori di* $\mathbf{R}^n$, *essi risultano linearmente dipendenti, se e solo se la matrice di ordine* n *che li ammette come vettori colonna ha determinante uguale a zero.*

Limitiamoci, per semplicità di notazioni, a dare la dimostrazione nel caso $n = 3$. Siano u, v, w tre vettori di R^3 linearmente dipendenti, cioè esistano $a, b, c \in \mathbf{R}$ non tutti nulli, tali che

$$au + bv + cw = 0; \tag{28.4}$$

cioè, se è $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3)$, $w = (z_1, z_2, z_3)$, risulti:

$$\begin{cases} x_1\, a + y_1\, b + z_1\, c = 0 \\ x_2\, a + y_2\, b + z_2\, c = 0 \\ x_3\, a + y_3\, b + z_3\, c = 0 \end{cases} \tag{28.5}$$

Ciò significa che (a, b, c) è una soluzione del sistema omogeneo i cui coefficienti sono gli elementi della matrice

$$A = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \tag{28.6}$$

le cui colonne sono costituite dai vettori u, v, w.

Il sistema avrà una soluzione $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ se e solo se $\det A = 0$, grazie al teorema precedente. E ciò completa la dimostrazione del corollario, nel caso particolare $n = 3$. La dimostrazione per n generico è analoga.

29. Autovalori di una matrice

Sia $A = (a_{ij})$ una matrice quadrata $n \times n$. Si chiama *autovalore* di A ogni soluzione λ dell'equazione

$$\det (A - \lambda I) = 0, \tag{29.1}$$

ove I è la matrice identica di ordine n. L'equazione (29.1) può essere scritta esplicitamente sotto la forma

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{29.2}$$

Ad esempio, per $n = 2$ si ha l'equazione

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{29.3}$$

ovvero

$$\begin{aligned} &\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + a_{11}\,a_{22} - a_{12}\,a_{21} = \\ &= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\,\lambda + \det A = 0, \end{aligned} \tag{29.4}$$

che è un'equazione di secondo grado in λ.

In generale il determinante a primo membro della (29.2) è un polinomio di grado n in λ, detto *polinomio caratteristico* della matrice A; si può dimostrare che ha la forma:

$$\lambda^n - (a_{11} + \dots + a_{nn})\,\lambda^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A = 0. \tag{29.5}$$

Tale polinomio *ammette radici reali nel caso che la matrice* A *sia simmetrica*, cioè risulti $a_{ij} = a_{ji}$.

Verifichiamo tale affermazione nel caso particolare $n = 2$. Il discriminante dell'equazione (29.4) è, in tal caso

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2) = \\ &= a_{11}^2 + a_{22}^2 + 2\,a_{11}\,a_{22} - 4\,a_{11}\,a_{12} + 4\,a_{12}^2 = \\ &= (a_{11} - a_{22})^2 + 4\,a_{12}^2 \geq 0. \end{aligned} \tag{29.6}$$

Pertanto l'equazione (29.4) ammette radici reali.

Se l'ipotesi $a_{12} = a_{21}$ non è soddisfatta, la matrice può essere effettivamente priva di autovalori (reali). Ad esempio, nel caso della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{29.7}$$

la (29.3) diviene

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0, \tag{29.8}$$

cioè $\lambda^2 + 1 = 0$, che non ha radici reali.

Osserviamo che, se $\lambda \in \mathbf{R}$ è un autovalore della matrice $A = (a_{ij})$, il sistema omogeneo

$$(A - \lambda I)\,u = 0, \tag{29.9}$$

con $u = (x_1, \dots, x_n)$ e I matrice identica, ha almeno una soluzione $u \neq 0$, in base al teorema del paragrafo precedente. Una tale soluzione u prende il nome di *autovettore* di A corrispondente all'autovalore λ.

Si verifica immediatamente che se u è un autovettore allora anche $a \cdot u$ lo è qualunque sia $a \in R - \{0\}$; infatti

$$(A - \lambda I)\,au = a(A - \lambda I)\,u = a \cdot 0 = 0. \tag{29.10}$$

Prima di descrivere alcune notevoli proprietà degli auotovettori di una matrice, diamo la definizione di *prodotto scalare* di due vettori u, v di $\mathbf{R}^n$.

Siano $u = (x_1, \dots, x_n)$ e $v = (y_1, \dots, y_n)$ due vettori di $\mathbf{R}^n$. Si chiama *prodotto scalare* di u e v e si indica con (u, v) il numero reale

$$(u, v) = x_1\,y_1 + \dots + x_n\,y_n\,, \tag{29.11}$$

ovvero, utilizzando il simbolo di sommatoria,

$$(u, v) = \sum_{i=1}^{n} x_i\,y_i\,. \tag{29.12}$$

Il prodotto scalare in $\mathbf{R}^n$ gode delle seguenti proprietà di semplice verifica:

$$(u, v) = (v, u), \tag{29.13}$$

$$(u + v, w) = (u, w) + (v, w), \tag{29.14}$$

$$(au, v) = a(u, v), \qquad a \in \mathbf{R}, \tag{29.15}$$

$$(u, u) \geq 0. \tag{29.16}$$

Due vettori u, v di $\mathbf{R}^n$ si dicono *perpendicolari* fra loro (o anche *ortogonali*) se risulta $(u, v) = 0$, cioè se il loro prodotto scalare è nullo.

Siamo ora in grado di dimostrare il seguente

TEOREMA. — *Se* A *è una matrice simmetrica,* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ *sono due autovalori di* A *e* u_1, u_2 *due corrispondenti autovettori, allora*

(29.17) $$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \Rightarrow \quad (u_1 , u_2) = 0.$$

Cioè, due autovettori corrispondenti ad autovalori diversi sono fra loro ortogonali.

Dimostrazione: per ipotesi risulta

(29.18) $$A\, u_1 = \lambda_1\, u_1 \,;$$

(29.19) $$A\, u_2 = \lambda_2\, u_2 \,.$$

Eseguiamo il prodotto scalare della (29.18) per u_2 e quello della (29.19) per u_1; si ha

(29.20) $$(A\, u_1 , u_2) = \lambda_1 (u_1 , u_2);$$

(29.21) $$(A\, u_2 , u_1) = \lambda_2 (u_2 , u_1) = \lambda_2 (u_1 , u_2) \,.$$

Inoltre, dalla simmetria di $A = (a_{ij})$ si deduce facilmente

(29.22) $$(A\, u_1 , u_2) = (A\, u_2 , u_1)$$

e perciò si ha $\lambda_1 (u_1 , u_2) = \lambda_2 (u_1 , u_2)$, cioè

(29.23) $$(\lambda_1 - \lambda_2) (u_1 , u_2) = 0.$$

Essendo $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ne segue $(u_1, u_2) = 0$, come volevasi dimostrare.

30. Esempi di utilizzo di sistemi lineari: leggi di Kirchhoff e flusso di traffico automobilistico

In questo paragrafo presentiamo due esempi di sistemi lineari che costituiscono dei modelli matematici in questioni applicative.

Consideriamo preliminarmente il problema di determinare l'intensità della corrente elettrica in ciascuna maglia di un circuito costituito di resistenze e generatori di tensione (si veda la figura 3.1).

Utilizziamo le due *leggi di Kirchhoff:*

(30.1) se più conduttori convergono in un punto, la somma algebrica delle intensità I_k delle correnti che concorrono in esso è nulla;

(30.2) in una maglia di conduttori, la somma algebrica delle forze elettromotrici attive lungo i successivi rami è uguale alla somma dei prodotti delle intensità per le resistenze rispettive dei singoli rami della maglia.

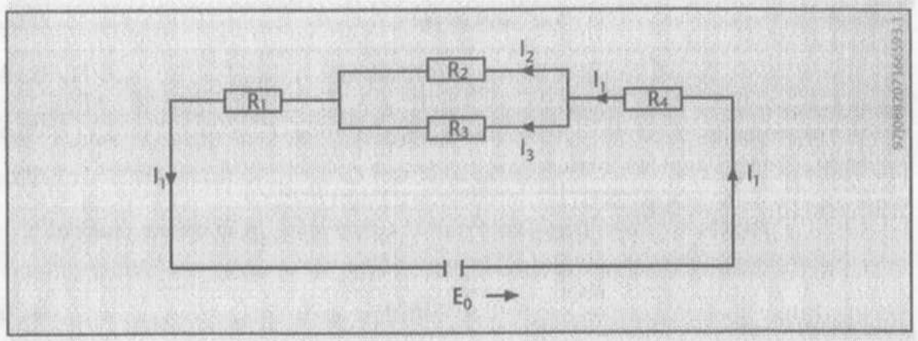


Figura 3.1

Se ne deduce che le equazioni per le correnti incognite I_1, I_2 e I_3 nella figura 3.1 sono

(30.3) $$\begin{cases} I_1 - I_2 - I_3 = 0 \\ R_2\, I_2 - R_3\, I_3 = 0 \\ (\, R_1 + R_4 \,)\, I_1 + R_2\, I_2 = E \end{cases}$$

e cioè si perviene ad un sistema di tre equazioni nelle tre incognite I_1, I_2, I_3. La matrice dei coefficienti è data da

(30.4) $$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & R_2 & R_3 \\ R_1+R_4 & R_2 & 0 \end{pmatrix}$$

ed il suo determinante vale

(30.5) $$\det A = (R_1 + R_4)(R_2 + R_3) + R_2\, R_3$$

ed è positivo perché R_1, R_2, R_3 sono numeri reali positivi. Il teorema di Cramer è quindi applicabile e la soluzione è fornita dalla formula (24.4).

Come secondo esempio consideriamo un tratto di rete stradale costituita da quattro strade a senso unico come in figura 3.2.

I numeri in figura 3.2, posti alle due estremità di ciascuna delle strade, indicano rispettivamente il numero di automobili che accedono ad essa e che fuoriescono da essa in un'ora.

Proponiamoci di determinare il *flusso di traffico* (cioè il numero di auto che circolano in un'ora) attraverso ciascuno dei quattro tratti intermedi, indicato con i valori x_1 , x_2 , x_3 , x_4 .

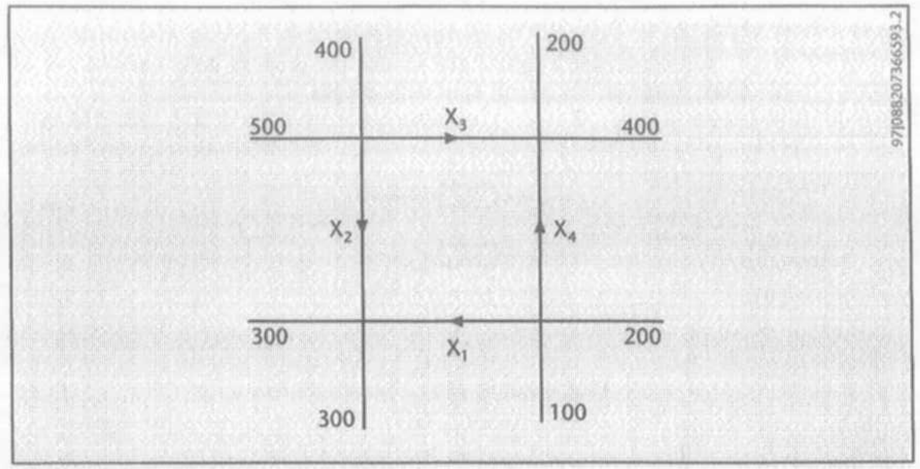


Figura 3.2 — Flusso di traffico automobilistico

Per risolvere tale problema applichiamo l'analoga della prima legge di Kirchhoff sui circuiti elettrici; si hanno le relazioni:

$$(30.6)\qquad \begin{cases} x_3 + x_4 = 200 + 400 = 600 \\ x_2 + x_3 = 400 + 500 = 900 \\ x_4 + x_1 = 200 + 100 = 300 \\ x_1 + x_2 = 300 + 300 = 600 \end{cases}$$

che costituiscono un sistema di quattro equazioni lineari nelle incognite x_1, x_2, x_3, x_4. La matrice dei coefficienti è data da

$$(30.7)\qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

sviluppando il determinante di A secondo gli elementi della prima riga otteniamo

$$(30.8)\qquad \det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0.$$

Dato che $\det A = 0$, il teorema di Cramer non è applicabile al sistema (30.6). Si verifica però che la matrice incompleta A e la matrice completa del sistema (30.6) hanno la stessa caratteristica, uguale a 3.

In base al teorema di Rouché-Capelli il sistema (30.6) ammette $\infty^{4-3} = \infty^1$ soluzioni; data la forma analitica molto semplice del sistema (30.6) è possibile risolverlo esplicitamente,

anche per sostituzione, ottenendo le soluzioni

$$(30.9)\qquad \begin{cases} x_2 = 600 - x_1 \\ x_3 = 300 + x_1 \\ x_4 = 300 - x_1 \end{cases}.$$

In (30.9) x_1 ha la funzione di parametro; quindi, in accordo con quanto detto precedentemente, il sistema (30.6) ammette ∞^1 soluzioni. Inoltre, data la natura delle quantità x_1, x_2, x_3, x_4, occorre tener presente che il parametro x_1 deve variare rispettando le limitazioni $0 \le x_1 \le 300$, in modo che x_i risulti non negativo per ogni $i = 1, 2, 3, 4$.

- spazi vettoriali
- prodotto di 1 scalare x 1 vettore
- somma
- prodotto
- differenza . $V^1 // V^2$
- prodotto scalare
- [Piano euclideo
- Retta

- CIRCONFERENZA
- PARABOLA
- ELLISSE
- IPERBOLE

CAPITOLO 4

ELEMENTI DI GEOMETRIA ANALITICA DEL PIANO

31. Lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$

Indichiamo con $\mathbf{R}^2$ l'insieme delle *coppie ordinate* $v = (x, y)$ di numeri reali, munito della struttura vettoriale derivante dalle seguenti operazioni:

(a) se $v_1 = (x_1 , y_1)$ e $v_2 = (x_2 , y_2)$ sono due elementi di R^2, la *somma* di v_1 e v_2, indicata con $v_1 + v_2$, è la coppia ordinata di numeri reali definita da

$$v_1 + v_2 = (x_1 + x_2 , y_1 + y_2). \tag{31.1}$$

(b) se $\lambda \in \mathbf{R}$ e $v = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, si definisce *prodotto* (detto anche *prodotto esterno*, perché è prodotto tra un elemento di $\mathbf{R}^2$ ed un numero reale λ, esterno ad $\mathbf{R}^2$) di λ per v, indicato con λv, la coppia ordinata di numeri reali

$$\lambda v = (\lambda x, \lambda y). \tag{31.2}$$

L'insieme $\mathbf{R}^2$, munito delle operazioni di somma e di prodotto (esterno) sopra definito è uno *spazio vettoriale*. Gli elementi di $\mathbf{R}^2$ si dicono *vettori*. Se $v = (x, y) \in \mathbf{R}^2$, i numeri reali x, y si dicono *componenti* del vettore v; x è detta *prima componente*, mentre y è la *seconda componente*. Talvolta gli elementi di $\mathbf{R}^2$ si chiamano anche *punti* di $\mathbf{R}^2$ e x, y si dicono anche *coordinate* di $v = (x, y)$; in particolare x è la *prima coordinata*, o *ascissa* di v, mentre y è la seconda coordinata, o semplicemente *ordinata* di v.

Le definizioni introdotte hanno una interpretazione geometrica: in un riferimento cartesiano di origine 0 e assi x, y, si rappresenta un vettore $v = (x, y)$, applicato ad esempio all'origine 0, con il *segmento orientato* OP, di primo estremo 0 e di secondo estremo nel punto P di coordinate (x, y), come in figura 4.1.

In tale rappresentazione il vettore somma $v_1 + v_2$ di due vettori $v_1 = (x_1 , y_1)$ e $v_2 = (x_2 , y_2)$, corrispondenti rispettivamente ai segmenti

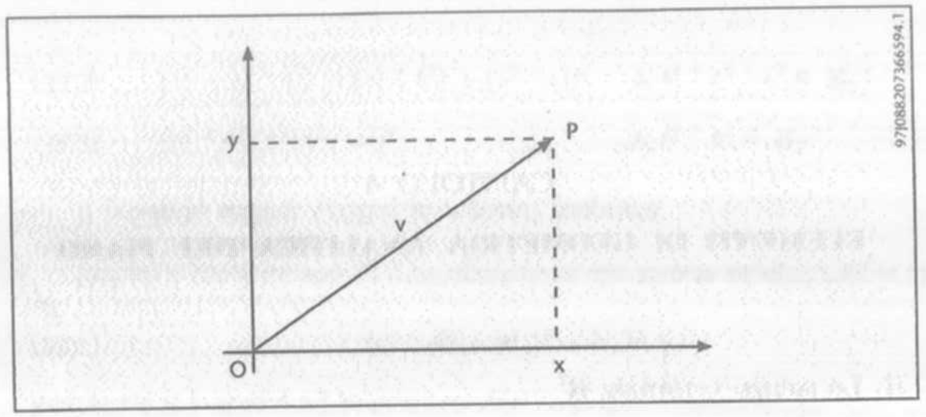


Figura 4.1

orientati OP_1 e OP_2 in figura 4.2, è il vertice corrispondente al segmento orientato OQ, di primo estremo l'origine 0 e con secondo estremo nel vertice Q del parallelogramma di lati OP_1 e OP_2 (regola del parallelogramma).

Per $\lambda \neq 0$ il vettore λ v, rappresentato nelle figure 4.3 e 4.4, ha la *stessa direzione* del vertice v; il verso di λv è lo stesso verso di v se $\lambda > 0$ (figura 4.3), mentre è il verso opposto se $\lambda < 0$ (figura 4.4). Se infine $\lambda = 0$ allora il vettore λ v = (0, 0) è il *vettore nullo*, che geometricamente corrisponde al segmento degenere con sia primo che secondo estremo nell'origine 0.

In particolare se $\lambda = -1$ il vettore λv = (– 1)v è detto l'*opposto* di v ed è indicato più semplicemente con la notazione – v. Nelle figure 4.5 e 4.6 sono

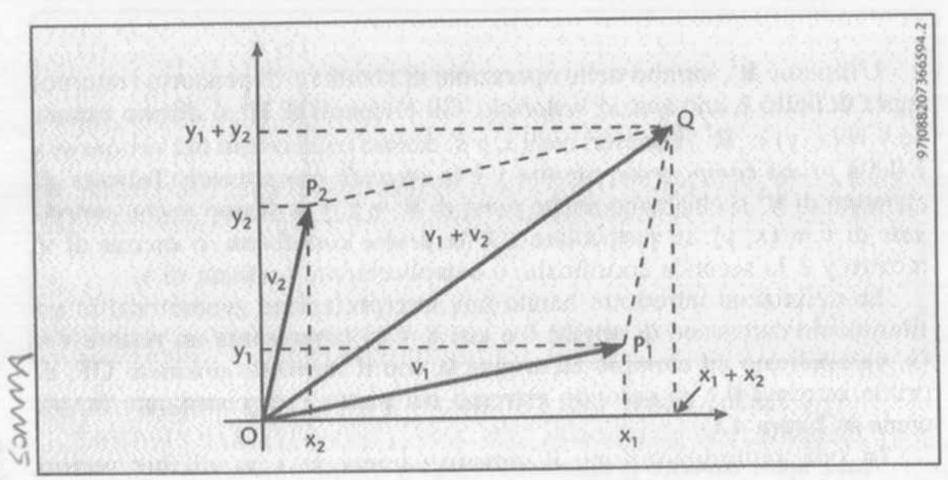


Figura 4.2

rappresentati rispettivamente il vettore *opposto* – v del vettore v ed il vettore *differenza* $v_1 - v_2$ (uguale, per definizione, alla somma di v_1 e dell'opposto di v_2: $v_1 - v_2 = v_1 + (-v_2)$) di due vettori v_1 e v_2.

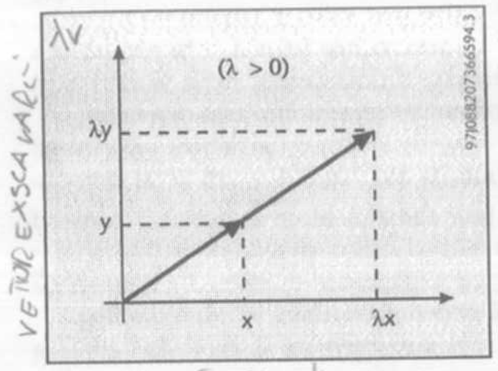


Figura 4.3

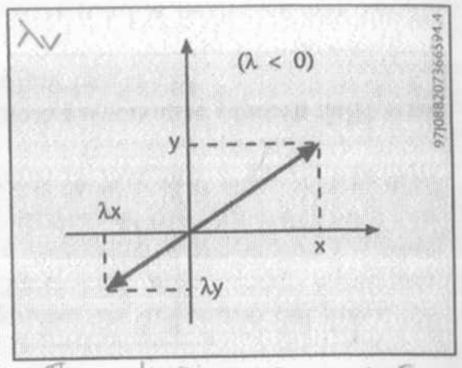


Figura 4.4

Se v è un vettore non nullo e se λ è un numero reale non nullo, allora il vettore λv, avente la stessa direzione di v, è detto *parallelo* a v. Più precisamente, diremo che due vettori non nulli $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ sono tra loro *paralleli* se esiste $\lambda \in \mathbf{R} - \{0\}$ tale che

(31.3) $$v_2 = \lambda\, v_1 ,$$

cioè, equivalentemente, in termini di coordinate

(31.4) $$x_2 = \lambda\, x_1 , \qquad y_2 = \lambda\, y_1 .$$

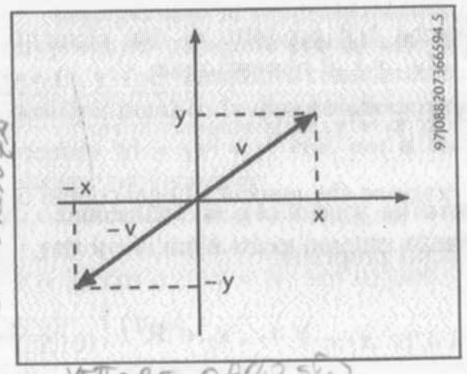


Figura 4.5

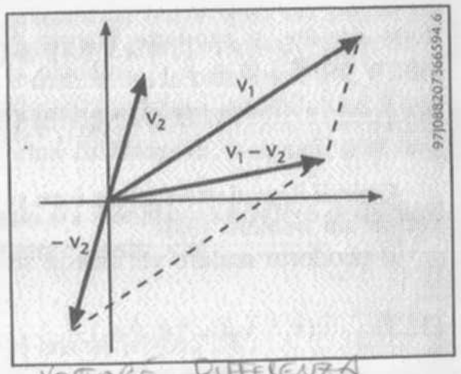


Figura 4.6

VERSORI

Come già detto il vettore (0, 0) è detto *vettore nullo*; esso si indica con il simbolo 0 (zero), prestando attenzione a non confondere tale simbolo di vettore con lo stesso simbolo 0 che rappresenta il numero reale zero.

I vettori $i = (1, 0)$ e $j = (0, 1)$ sono detti *versori* degli assi coordinati; i è il versore dell'asse delle x, j è il versore dell'asse delle y (figura 4.7).

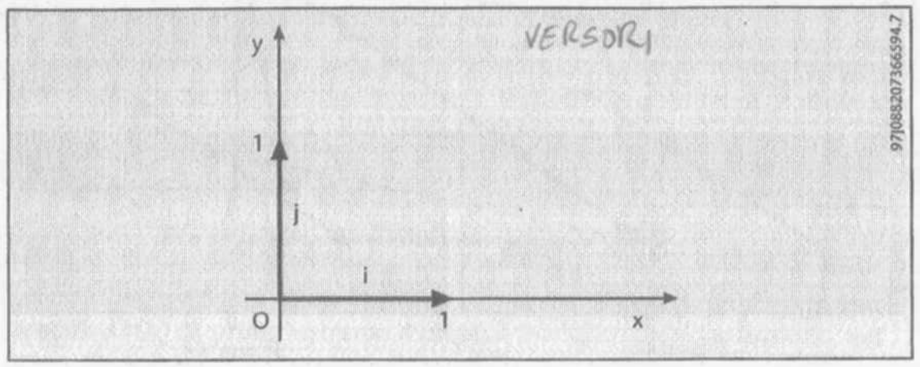


Figura 4.7

Tenendo conto delle operazioni di somma e di prodotto esterno introdotte precedentemente si vede subito che ogni vettore $v = (x, y) \in R^2$ si esprime in uno ed in un solo modo come *combinazione lineare* di i e j secondo la formula

(31.5) $$v = xi + yj.$$

32. Prodotto scalare. Ortogonalità fra vettori. Il piano euclideo

Siano $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$ due vettori di $\mathbf{R}^2$. Si definisce il *prodotto scalare*, o *prodotto interno* (perché è il prodotto di due elementi interni ad $\mathbf{R}^2$) di v_1 e v_2, indicato con (v_1, v_2), il numero reale

(32.1) $$(v_1 , v_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 .$$

Quindi il prodotto scalare è un'operazione che associa ad ogni coppia di vettori un numero reale.

Il prodotto scalare verifica le seguenti proprietà:

(32.2) $$(v_1 , v_2) = (v_2 , v_1), \qquad \forall\, v_1 , v_2 \in \mathbf{R}^2 ;$$

(32.3) $$(v_1 + v_2 , v_3) = (v_1 , v_3) + (v_2 , v_3), \qquad \forall\, v_1 , v_2 , v_3 \in \mathbf{R}^2 ;$$

(32.4) $$(\lambda\, v_1 , v_2) = \lambda(v_1 , v_2), \qquad \forall\, v_1 , v_2 \in R^2 , \forall \lambda \in \mathbf{R};$$

(32.5) $$(v, v) \geq 0, \qquad \forall\, v \in \mathbf{R}^2 ;$$

(32.6) $$(v, v) > 0, \qquad \forall\, v \in \mathbf{R}^2 : v \neq 0.$$

Tali proprietà sono di verifica immediata in base alla definizione (32.1). Ad esempio, per verificare la (32.4), si pone $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$, da cui $\lambda v_1 = (\lambda x_1, \lambda x_2)$ e quindi

(32.7) $$\begin{aligned}(\lambda\, v_1 , v_2) &= (\lambda\, x_1)\, x_2 + (\lambda\, y_1)\, y_2 = \\ &= \lambda(x_1\, x_2 + y_1\, y_2) = \lambda(v_1 , v_2).\end{aligned}$$

La (43.5) segue dal fatto che

(32.8) $$(v, v) = x^2 + y^2 \geq 0, \qquad \forall\, v = (x, y) \in \mathbf{R}^2;$$

inoltre il prodotto scalare (v, v) in (32.8) è nullo se e solo se $x = y = 0$, cioè se e solo se $v = (x, y) = (0, 0)$, in accordo con la (32.6). Lasciamo la verifica delle proprietà (32.2) e (32.3) al lettore.

Il *modulo*, o *norma*, di un vettore $v = (x, y)$, indicato con $|v|$, è il numero reale

(32.9) $$|v| = (v, v)^{1/2} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Notiamo che si adotta lo stesso simbolo $|\cdot|$ per il modulo di un vettore e per il valore assoluto di un numero reale.

Riprendiamo la rappresentazione geometrica dei vettori del piano già proposta nel paragrafo precedente. In figura 4.8 è rappresentato un vettore $v = (x, y)$ (per semplicità consideriamo il caso in cui le componenti x, y sono positive; peraltro la dimostrazione non cambia nel caso generale) ed il suo *modulo* $|v| = \sqrt{x^2 + y^2}$ che, per il teorema di Pitagora, *è uguale alla lunghezza del vettore* v.

Indicando con α la misura dell'angolo tra il semiasse positivo delle x ed il vettore v, dalla trigonometria elementare risulta che
$x = |v| \cos \alpha$, $y = |v| \operatorname{sen} \alpha$, cioè

(32.10) $$v = (x, y) = (|v| \cos \alpha, |v| \operatorname{sen} \alpha) .$$

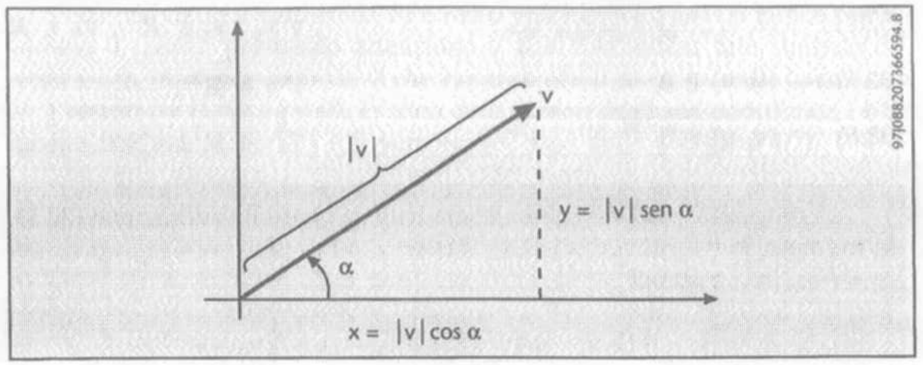


Figura 4.8

NO

Si può dedurre da (32.10) la nuova rappresentazione enunciata nel seguente:

TEOREMA DI RAPPRESENTAZIONE DEL PRODOTTO SCALARE. — *Il prodotto scalare tra due vettori non nulli è uguale al prodotto dei moduli dei due vettori per il coseno dell'angolo compreso.*

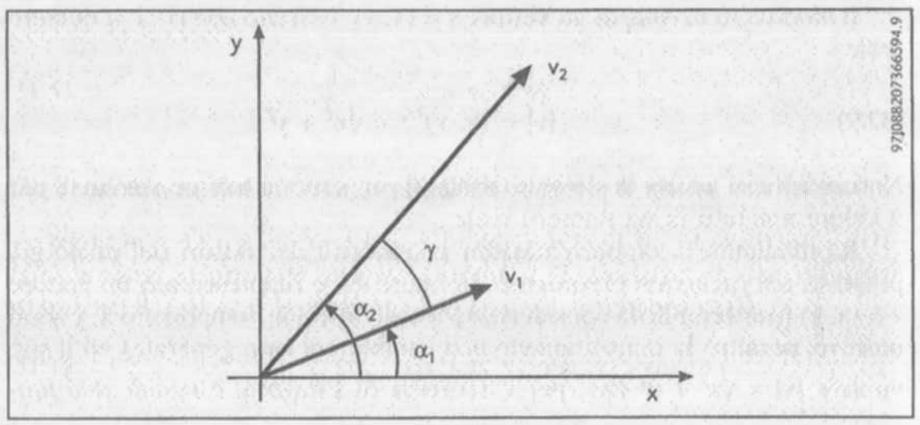


Figura 4.9

Dimostrazione: con riferimento alla figura 4.9 ed alla formula (32.10), consideriamo due vettori v_1, v_2 espressi da

$$v_1 = (|v_1| \cos \alpha_1 \, , \, |v_1| \operatorname{sen} \alpha_1);$$
$$v_2 = (|v_2| \cos \alpha_2 \, , \, |v_2| \operatorname{sen} \alpha_2). \tag{32.11}$$

In base alla definizione (32.1), il prodotto scalare tra v_1 e v_2 vale

$$\begin{aligned}(v_1 \, , \, v_2) &= |v_1||v_2|(\cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \operatorname{sen} \alpha_1 \operatorname{sen} \alpha_2) = \\ &= |v_1||v_2| \cos(\alpha_2 - \alpha_1)\end{aligned} \tag{32.12}$$

(abbiamo utilizzato la ben nota formula (10.4) di sottrazione per il coseno). L'angolo $\alpha_2 - \alpha_1$ è indicato con γ in figura 4.9 (è indifferente considerare γ, oppure $-\gamma$, dato che poi si calcola il coseno di tale angolo) ed è l'angolo compreso tra i due vettori. Ciò completa la dimostrazione del teorema di rappresentazione.

La proprietà espressa dal teorema precedente ha un'importante applicazione al caso in cui i due vettori non nulli sono fra loro *ortogonali* (o *perpendicolari*). In tal caso e solo in tal caso il coseno dell'angolo fra essi compreso è nullo e quindi il prodotto scalare tra v_1 e v_2 è nullo. Pertanto si ottiene il seguente

SI

CRITERIO DI ORTOGONALITÀ. — *Due vettori non nulli* v_1 e v_2 *sono fra loro ortogonali se e soltanto se il prodotto scalare* (v_1, v_2) *è nullo. In termini di coordinate i vettori non nulli* $v_1 = (x_1 \, , \, y_1)$ *e* $v_2 = (x_2 \, , \, y_2)$ *sono fra loro ortogonali se e solo se*

$$(v_1 \, , \, v_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0. \tag{32.13}$$

Lo spazio vettoriale $\mathbf{R}^2$ (cioè l'insieme $\mathbf{R}^2$ con le operazioni di somma e di prodotto esterno) munito del prodotto scalare definito in (32.1) è chiamato *piano euclideo*.

33. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Disuguaglianza triangolare

Nelle applicazioni risulta utile la seguente

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ. — *Per ogni coppia* v_1, v_2 *di vettori di* $\mathbf{R}^2$ *vale la formula*

$$|(v_1 \, , \, v_2)| \leq |v_1| \cdot |v_2|. \tag{33.1}$$

Prima di passare alla dimostrazione (in realtà nel seguito proponiamo tre diverse dimostrazioni della disuguaglianza (33.1)), osserviamo che a primo membro della (33.1) compare il *valore assoluto* del prodotto scalare

(v_1, v_2), che è un numero reale; invece a secondo membro compare il *modulo* dei vettori v_1, v_2.

Dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (*primo metodo*): per ogni numero reale t consideriamo il quadrato della norma del vettore $t\,v_1 + v_2$, con $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$:

$$
\begin{aligned}
|t\,v_1 + v_2|^2 &= (t\,x_1 + x_2)^2 + (t\,y_1 + y_2)^2 = \\
&= t^2 x_1^2 + 2t\,x_1 x_2 + x_2^2 + t^2 y_1^2 + 2t\,y_1 y_2 + y_2^2 = \\
&= t^2 (x_1^2 + y_1^2) + 2t(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (x_2^2 + y_2^2) = \\
&= |v_1|^2 t^2 + 2(v_1 \,.\, v_2)\,t + |v_2|^2
\end{aligned}
\tag{33.2}
$$

(nell'ultimo passaggio sono state utilizzate le definizioni di norma — ad esempio $|v_1| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ — e di prodotto scalare $(v_1 \,.\, v_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$). La funzione f(t), definita da:

$$f(t) = \alpha\, t^2 + 2\beta t + \gamma, \tag{33.3}$$

$$\textit{con} \quad \alpha = |v_1|^2, \quad \beta = (v_1 \,.\, v_2), \quad \gamma = |v_2|^2,$$

è un polinomio, di secondo grado in t, non negativo per ogni $t \in \mathbf{R}$, essendo uguale al quadrato $|t\,v_1 + v_2|^2$. Perciò l'equazione di secondo grado $f(t) = 0$ non ha due radici reali distinte (altrimenti il polinomio sarebbe negativo all'interno dell'intervallo delle radici); ciò comporta che il discriminante dell'equazione $f(t) = 0$ è minore od uguale a zero, cioè

$$\frac{\Delta}{4} = \beta^2 - \alpha\gamma \le 0. \tag{33.4}$$

Ricordando il significato dei simboli α, β, γ in (33.3) si ha

$$|(v_1 \,.\, v_2)|^2 \le |v_1|^2 \cdot |v_2|^2; \tag{33.5}$$

estraendo la radice quadrata di entrambi i membri e ricordando che $\sqrt{x^2} = |x|$ (con il valore assoluto!) si ottiene la tesi.

Dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (*secondo metodo*): posto $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$, valgono le equivalenze

$$
\begin{aligned}
&|(v_1 \,.\, v_2)| \le |v_1| \cdot |v_2| \\
&\iff |x_1 x_2 + y_1 y_2| \le \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2} \\
&\iff (x_1 x_2 + y_1 y_2)^2 \le (x_1^2 + y_1^2) \cdot (x_2^2 + y_2^2) \\
&\iff x_1^2 x_2^2 + 2\,x_1 x_2 y_1 y_2 + y_1^2 y_2^2 \le \\
&\qquad \le x_1^2 x_2^2 + x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 + y_1^2 y_2^2 \\
&\iff x_1^2 y_2^2 + y_1^2 x_2^2 - 2\,x_1 x_2 y_1 y_2 \ge 0 \\
&\iff (x_1 y_2 - y_1 x_2)^2 \ge 0.
\end{aligned}
\tag{33.6}
$$

Dato che l'ultima relazione è soddisfatta essendo un quadrato sempre maggiore od uguale a zero, anche la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è soddisfatta da ogni coppia di vettori $v_1 = (x_1, y_1)$ e $v_2 = (x_2, y_2)$.

Dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (*terzo metodo*): è sufficiente considerare il caso in cui i due vettori v_1 e v_2 sono non nulli, altrimenti la (33.1) è ovvia e vale con il segno di uguale. Indicando con γ l'angolo compreso tra v_1 e v_2, per il teorema di rappresentazione del prodotto scalare (si veda il paragrafo precedente) risulta $(v_1 \,.\, v_2) = |v_1| \cdot |v_2| \cdot \cos\gamma$; da cui, essendo $|\cos\gamma| \le 1$, la tesi:

$$|(v_1 \,.\, v_2)| = |v_1| \cdot |v_2| \cdot |\cos\gamma| \le |v_1| \cdot |v_2|. \tag{33.7}$$

Notiamo che, una volta acquisito il teorema di rappresentazione del prodotto scalare, il terzo metodo di dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è probabilmente più semplice del primo; così pure il secondo metodo di dimostrazione, basato su calcoli diretti, è più semplice del primo. Al contrario del secondo e terzo metodo, però il primo metodo di dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ha il pregio di poter essere immediatamente esteso al caso di vettori di $\mathbf{R}^n$, con $n \ge 2$ generico.

Diretta conseguenza della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è la seguente disuguaglianza triangolare, che estende al caso di vettori di $\mathbf{R}^2$ la disuguaglianza analoga ben nota tra numeri reali (si confronti con la (8.11)).

DISUGUAGLIANZA TRIANGOLARE. — *Per ogni coppia* v_1, v_2 *di vettori di* $\mathbf{R}^2$ *si ha*

$$|v_1 + v_2| \le |v_1| + |v_2|. \tag{33.8}$$

Dimostrazione: utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz (33.1) nella forma

$$(v_1 \cdot v_2) \le |(v_1 \cdot v_2)| \le |v_1| \cdot |v_2|, \tag{33.9}$$

si ottiene

$$\begin{aligned} |v_1 + v_2|^2 &= (v_1 + v_2 \cdot v_1 + v_2) = \\ &= (v_1 \cdot v_1) + (v_1 \cdot v_2) + (v_2 \cdot v_1) + (v_2 \cdot v_2) = \\ &= (v_1 \cdot v_1) + 2(v_1 \cdot v_2) + (v_2 \cdot v_2) \le \\ &\le |v_1|^2 + 2|v_1| \cdot |v_2| + |v_2|^2 = (|v_1| + |v_2|)^2 \end{aligned} \tag{33.10}$$

da cui la tesi, estraendo la radice quadrata di entrambi i membri.

34. La retta

Consideriamo un vettore non nullo v di coordinate (α, β); dato che v è non nullo, almeno uno tra i due numeri reali α, β è diverso da zero. Il vettore $v = (\alpha, \beta)$ è rappresentato in figura 4.10 insieme ad un punto P_0 di coordinate (x_0, y_0).

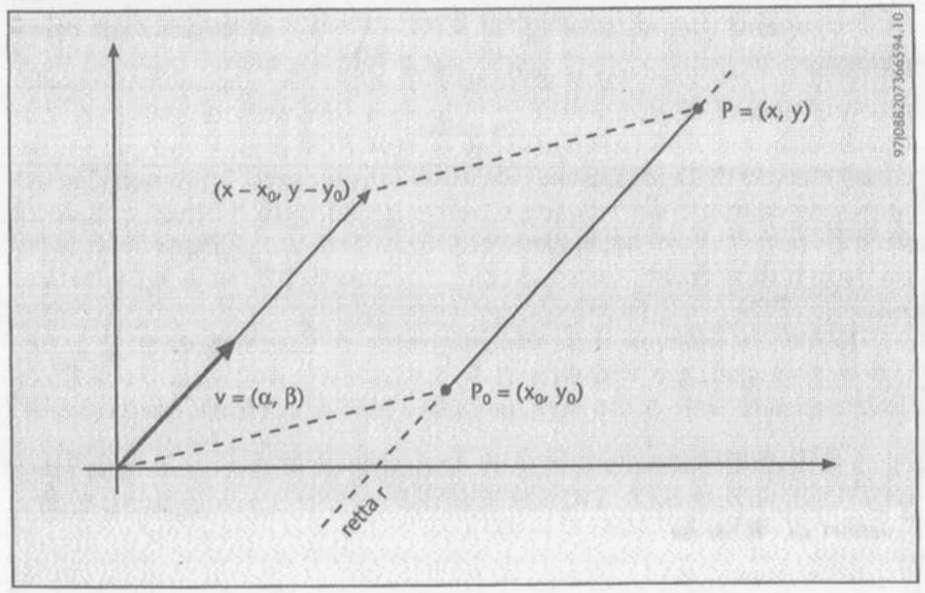


Figura 4.10

La retta r passante per il punto P_0 *e avente la direzione del vettore* v è, per definizione, l'insieme dei punti P di coordinate (x, y) tali che il vettore di componenti $(x - x_0, y - y_0)$, quando non risulti nullo, sia *parallelo* al vettore v; ricordando la (31.3), la condizione è che il vettore $(x - x_0, y - y_0)$ sia uguale a tv per qualche valore del parametro reale t.

In formule, la retta r passante per il punto (x_0, y_0) e avente la direzione del vettore non nullo (α, β) è data da

$$r = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : x = x_0 + \alpha t,\ y = y_0 + \beta t,\ t \in \mathbf{R}\}. \tag{34.1}$$

In coordinate ciò si esprime anche direttamente nella forma:

$$r: \begin{cases} x = x_0 + \alpha t \\ y = y_0 + \beta t \end{cases}, \qquad t \in \mathbf{R}; \tag{34.2}$$

le (34.2) sono dette *equazioni parametriche* della retta r; t è il *parametro* (reale); α, β si chiamano i *numeri direttori* della retta.

Proponiamoci ora di eliminare il parametro t dalle equazioni (34.2). Nel far ciò, essendo α, β non contemporaneamente nulli, possiamo supporre che, ad esempio, sia $\alpha \neq 0$ (altrimenti potremmo ripetere il discorso scambiando il ruolo di α e β). Se $\alpha \neq 0$, dalla prima equazione in (34.2) si ricava

$$t = \frac{x - x_0}{\alpha} \tag{34.3}$$

che, sostituito nella seconda e quazione, dà luogo a

$$y - y_0 = \frac{\beta}{\alpha}(x - x_0), \tag{34.4}$$

da cui

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0. \tag{34.5}$$

Ricordando il criterio di ortogonalità del paragrafo 32, la (34.5) si interpreta dicendo che il vettore di componenti $(x - x_0, y - y_0)$ è *ortogonale* al vettore di componenti $(\beta, -\alpha)$. Con riferimento alla figura 4.11, si osservi che, a sua volta, il vettore $(\beta, -\alpha)$ è ortogonale al vettore (α, β) (perché il

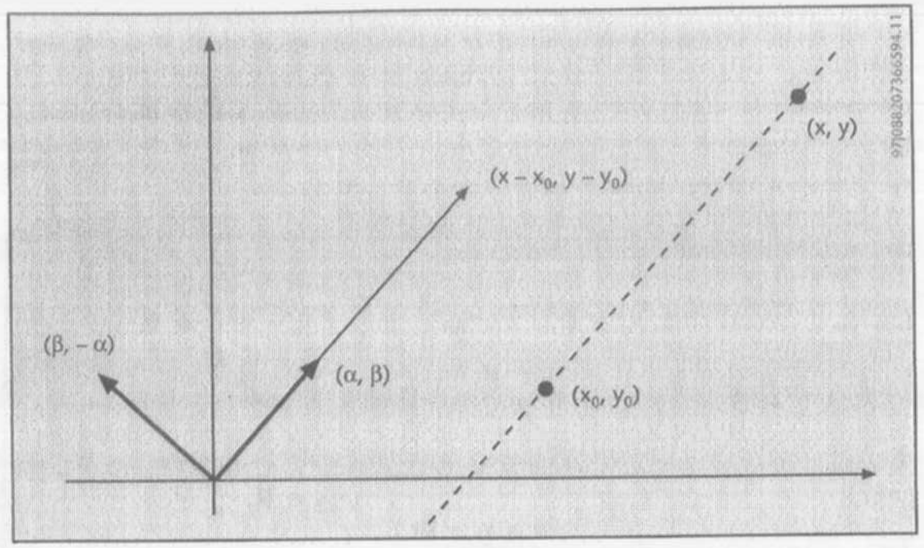


Figura 4.11

loro prodotto scalare è nullo) e che quindi (34.5) esprime in definitiva il fatto che i vettori $(x - x_0\ ,\ y - y_0)$ e (α, β) sono fra loro *paralleli*.

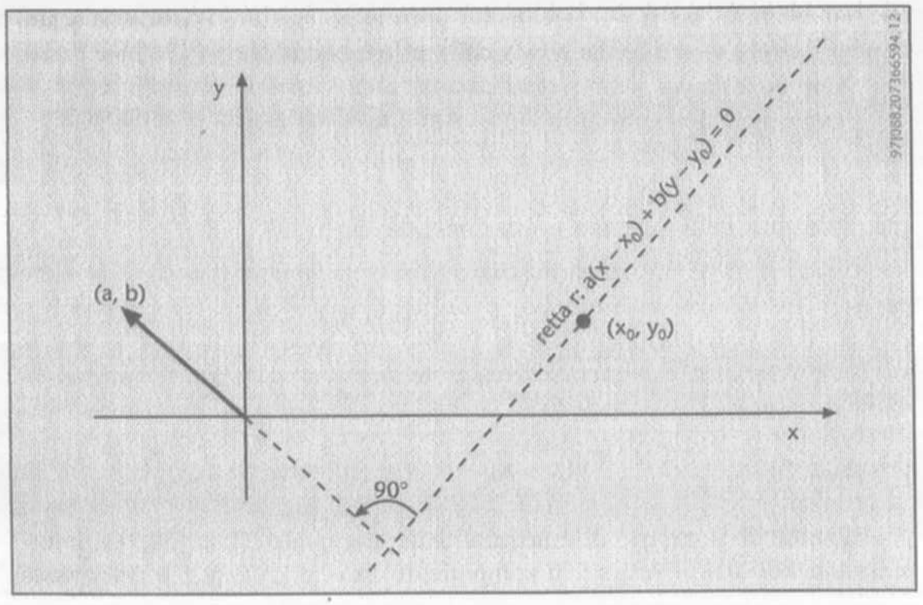


Figura 4.12

È utile per ciò che segue cambiare le notazioni, ponendo $(\beta, -\alpha) = = (a, b)$. Con tale posizione l'equazione (34.5) diviene

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0; \tag{34.6}$$

il vettore di componenti (a, b) è ortogonale al vettore $(x - x_0\ ,\ y - y_0)$ e per tale motivo si dice che (a, b) è *ortogonale* (o *normale*) alla retta r; in analogia con la figura 4.11, in figura 4.12 sono rappresentati la retta r ed il vettore di componenti (a, b), normale ad r.

35. Equazioni della retta

Abbiamo introdotto nel paragrafo precedente le equazioni parametriche (34.2) di una retta r. Eliminando il parametro t si è giunti all'equazione (34.6) che, con la notazione $c = -\ a\ x_0 - b\ y_0$, si può anche scrivere nella forma

$$ax + by + c = 0, \tag{35.1}$$

dove – ricordiamo – a, b sono numeri reali non contemporaneamente nulli. La (35.1) è detta *equazione cartesiana*, o *equazione implicita*, della retta.

Se in (35.1) risulta $a = 0$ e $b \neq 0$, allora l'equazione diviene $by + c = 0$, cioè

$$y = -\ c/b, \tag{35.2}$$

e rappresenta il luogo dei punti del piano x, y di ordinata costante $y = -\ c/b$; si tratta di una retta parallela all'asse x, come in figura 4.13.

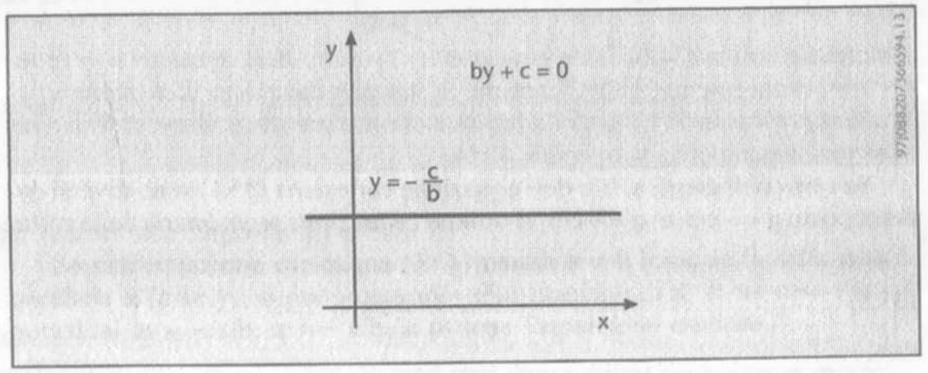


Figura 4.13

Se invece in (35.1) risulta $a \neq 0$ e $b = 0$, allora l'equazione $ax + c = 0$ è il luogo dei punti del piano x, y di ascissa costante, uguale a

(35.3) $$x = -c/a,$$

che corrisponde alla retta parallela all'asse y tracciata in figura 4.14.

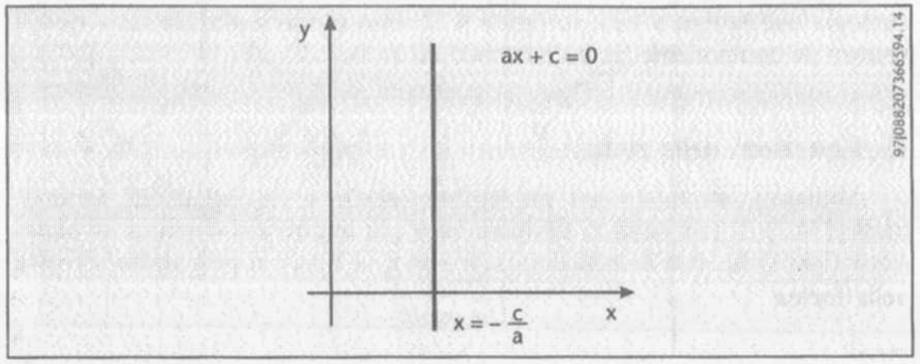


Figura 4.14

Qualunque siano i valori dei parametri a, b (non contemporaneamente nulli), se risulta $c = 0$ l'equazione $ax + by = 0$ rappresenta una retta passante per l'origine degli assi, perché il punto $(x, y) = (0, 0)$ soddisfa l'equazione.

Un punto di coordinate (x_0, y_0) appartiene alla retta di equazione cartesiana (35.1) se e solo se risulta $a\,x_0 + b\,y_0 + c = 0$; in tal caso si ricava $c = -a\,x_0 - b\,y_0$ che, sostituito nella (35.1), dà luogo all'equazione

(35.4) $$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0\ ;$$

si riottiene così la (34.6). Tale equazione, al variare dei parametri a, b (non contemporaneamente nulli), esprime la *totalità delle rette del piano* x, y *passanti per il punto* (x_0, y_0); tale insieme di rette prende il nome di *fascio di rette* per il punto (x_0, y_0) (figura 4.15).

Se i tre coefficienti a, b, c dell'equazione cartesiana (35.1) sono diversi da zero, posto $p = -c/a$ e $q = -c/b$, si ottiene l'*equazione segmentaria* della retta

(35.5) $$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1\ ;$$

i coefficienti p, q hanno un chiaro significato geometrico: sono rispettivamente l'ascissa e l'ordinata dei punti P, Q di intersezione della retta con gli assi coordinati (si veda la figura 4.16).

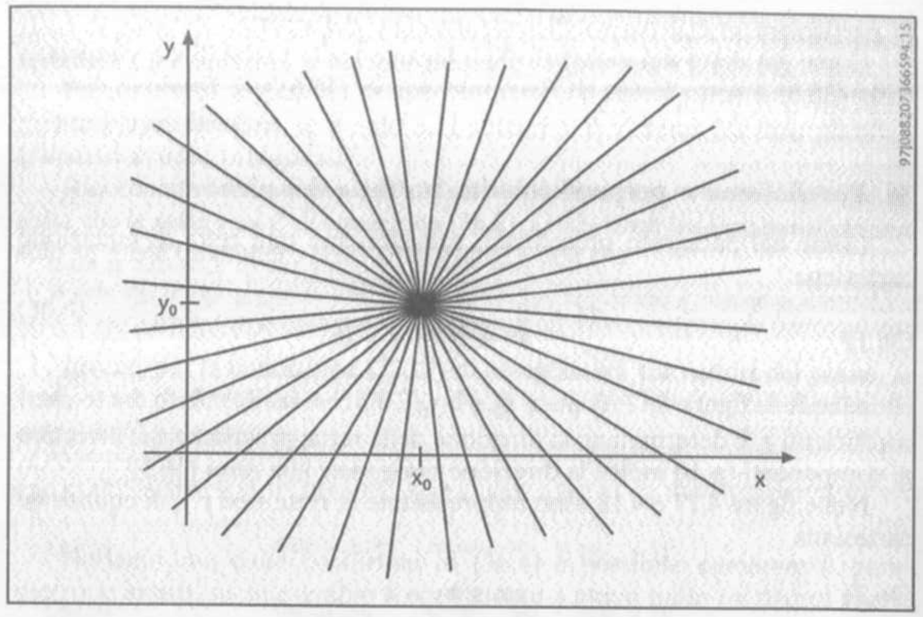


Figura 4.15

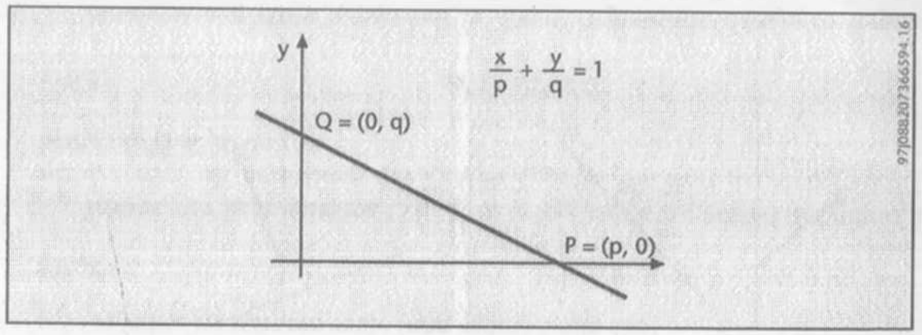


Figura 4.16

Se nell'equazione cartesiana (35.1) risulta $b \neq 0$ (cioè se la retta non è parallela all'asse y), si può «ricavare» y in funzione di x; in tal caso con le notazioni $m = -a/b$, $q = -c/b$, si ottiene l'*equazione esplicita*

(35.6) $$y = mx + q;$$

in particolare m è detto *coefficiente angolare* della retta.

Come già detto nel paragrafo 8, il legame tra le variabili x e y espresso dalla (35.6) è sotto forma di *funzione*; cioè in (35.6) y è funzione di x.

36. Parallelismo e perpendicolarità tra rette del piano

Come nel paragrafo precedente, consideriamo una retta di equazione cartesiana

(36.1) $$ax + by + c = 0;$$

ricordando la figura 4.12 (con $-a\,x_0 - b\,y_0 = c$) ci si rende subito conto che i coefficienti a, b determinano la direzione della retta; precisamente, il vettore di componenti (a, b) indica la direzione *ortogonale* alla retta (36.1).

Nelle figure 4.17 e 4.18 sono rappresentate le rette r ed r′ , di equazione cartesiana

(36.2) $$r: \quad ax + by + c = 0,$$

(36.3) $$r': \quad a'\,x + b'\,y + c' = 0,$$

ed i corrispondenti vettori ortogonali v e v′ di componenti rispettivamente (a, b) e (a′, b′).

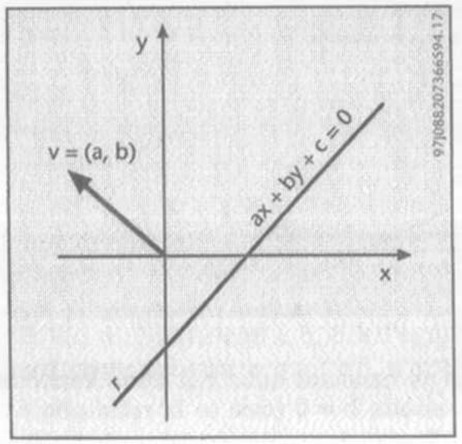


Figura 4.17

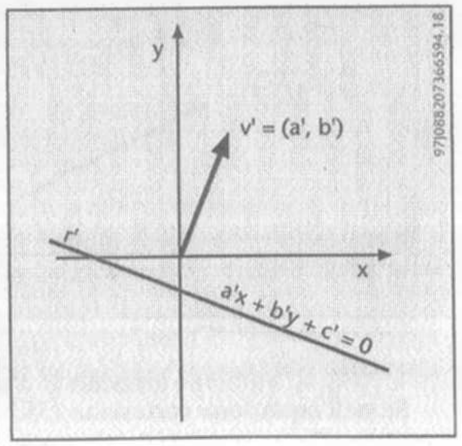


Figura 4.18

Con riferimento ai simboli delle figure 4.17 e 4.18, risulta che le condizioni di parallelismo e di perpendicolarità delle rette r ed r′ si esprimono in termini di parallelismo e ortogonalità dei vettori v e v′.

Precisamente, si dice che le rette r e r′ sono fra loro *parallele* (rispettivamente *perpendicolari*) se e solo se i vettori v e v′ sono fra loro paralleli (rispettivamente ortogonali).

Ricordando la condizione (31.4) di parallelismo tra vettori del piano, risulta che le rette r ed r′ di equazione (36.2), (36.3) sono fra loro *parallele* se e solo se esiste un numero reale (non nullo) λ tale che

(36.4) $$a' = \lambda a, \quad b' = \lambda b.$$

Invece, per la condizione (32.13) di ortogonalità tra vettori del piano, le rette r ed r′ di equazione (36.2), (36.3) sono fra loro *perpendicolari* (o *ortogonali*) se e solo se

(36.5) $$aa' + bb' = 0.$$

Notiamo che dalle condizioni in (36.4) è possibile eliminare il parametro λ; infatti, se ad esempio il coefficiente a è non nullo (si ricordi che a, b non sono contemporaneamente nulli) allora risulta $\lambda = a'/a$, da cui $b' = (a'b)/a$, cioè $ab' - a'b = 0$.

Riassumendo, due rette r, r′ di equazione cartesiana (36.2), (36.3) sono:

(36.6) $$\textit{parallele} \iff ab' - a'b = 0;$$

(36.7) $$\textit{ortogonali} \iff aa' + bb' = 0.$$

La condizione di parallelismo (36.6) ha una interessante interpretazione nella risoluzione del sistema lineare (in due equazioni e due incognite)

(36.8) $$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ a'\,x + b'\,y + c' = 0\,; \end{cases}$$

in base alla regola di Cramer (paragrafo 24), oppure utilizzando il metodo di sostituzione, si trova la coppia (x, y), soluzione del sistema, espressa da

(36.9) $$x = \frac{bc' - b'\,c}{ab' - a'\,b}, \quad y = \frac{ca' - c'\,a}{ab' - a'\,b},$$

purché il denominatore

(36.10) $$\begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'\,b$$

sia diverso da zero. L'interpretazione geometrica è che le due rette r, r′ di equazione (36.2), (36.3) si incontrano in un punto (ed uno solo) di coordinate (x, y) espresse in (36.9), come soluzione del sistema (36.8), purché r ed r′ non siano fra loro parallele.

È interessante osservare come si esprimono le condizioni (36.6), (36.7) di parallelismo e di perpendicolarità, quando le rette r ed r′ sono date dalle equazioni in forma esplicita:

(36.11) $$r: \quad y = mx + q,$$

(36.12) $$r': \quad y = m'x + q'.$$

I coefficienti angolari m, m′ delle due rette, in termini dei coefficienti nelle corrispondenti equazioni cartesiane (36.2), (36.3), valgono

(36.13) $$m = -\frac{a}{b}, \qquad m' = -\frac{a'}{b'}$$

(si noti che, essendo r ed r′ esprimibili in forma esplicita, i coefficienti b e b′ non sono nulli). La condizione di parallelismo (36.6) equivale a $a/b = a'/b'$, cioè $m = m'$. Invece la condizione di ortogonalità (36.7) si scrive equivalentemente $(aa')/(bb') = -1$, cioè $m \cdot m' = -1$.

Riassumendo, le rette r ed r′ di equazione esplicita (36.11), (36.12) risultano:

(36.14) $$\textit{parallele} \iff m = m',$$

(36.15) $$\textit{ortogonali} \iff m \cdot m' = -1.$$

NO 37. Cambiamenti di riferimento nel piano. Coordinate polari

Fissato su di un piano un *riferimento cartesiano ortogonale*, ogni punto P del piano è individuato da una coppia di numeri reali (x, y), con il ben noto significato dell'*ascissa* x e dell'*ordinata* y, come schematizzato in figura 4.19.

Talvolta è opportuno rappresentare un generico punto P in un diverso sistema di riferimento; diverso perché si tratta ad esempio di un altro riferimento cartesiano ortogonale (con altra origine ed altri assi), oppure perché si tratta di un diverso sistema di coordinate. Un esempio di quest'ultimo caso è costituito dal sistema di *coordinate polari*, che descriviamo di seguito.

Con riferimento alla figura 4.20, un punto P del piano Oxy può essere individuato da una coppia di numeri reali (ϱ, ϑ), dove $\varrho \geq 0$ è la distanza del punto P dell'origine 0 e dove ϑ è l'angolo formato dal semiasse positivo delle x con il vettore OP, misurato nel verso antiorario.

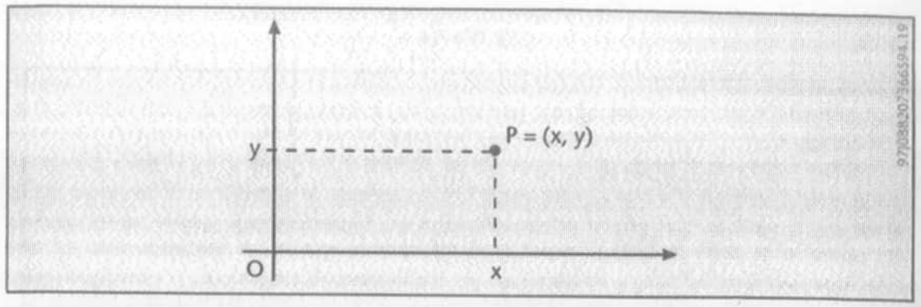


Figura 4.19

Si dice che il punto P è rappresentato in *coordinate polari* dalla coppia (ϱ, ϑ); ϱ è detto il *raggio vettore* (o *modulo*, o *distanza dal centro*) e ϑ l'*anomalia* (o *argomento*) del punto P.

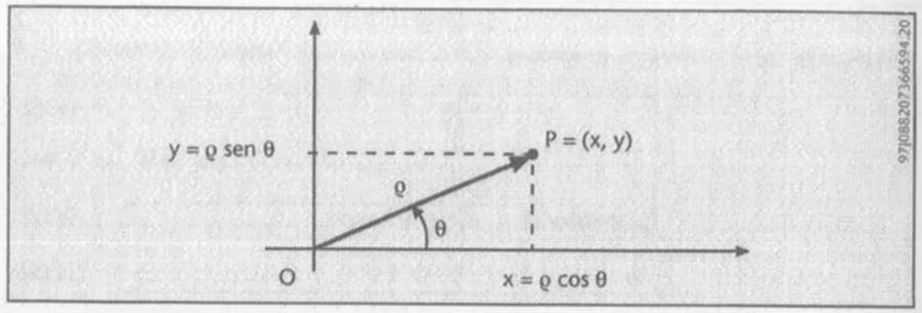


Figura 4.20

Dalla trigonometria elementare si deduce immediatamente l'espressione delle coordinate cartesiane (x, y) di un punto P, in funzione delle coordinate polari; risulta infatti

(37.1) $$x = \varrho \cos \vartheta, \quad y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta.$$

Viceversa, si ricavano ϱ, ϑ in funzione di x, y (per la precisione, ϑ é determinato a meno di multipli interi di 2π ed è indeterminato quando $x = y = 0$) tenendo presente che ϱ è la distanza del punto P dall'origine 0 e che quindi, per il teorema di Pitagora, vale

(37.2) $$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

mentre ϑ si ricava dalle relazioni

(37.3) $$\cos \vartheta = \frac{x}{\varrho} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \qquad \operatorname{sen} \vartheta = \frac{y}{\varrho} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}};$$

se, ad esempio, è $y \neq 0$ allora risulta

(37.4) $$\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\operatorname{sen} \vartheta}{\cos \vartheta} = \frac{y}{x}$$

e, utilizzando la funzione arcotangente (paragrafo 81) si ricava, a meno di multipli interi di π, $\vartheta = \operatorname{arctg}(y/x)$.

Esaminiamo ora il modo di esprimere le coordinate di un punto in un sistema cartesiano ortogonale di origine O e assi x, y (in breve Oxy), mediante le coordinate dello stesso punto in un diverso sistema cartesiano ortogonale O′ x′ y′. Considereremo quelle trasformazioni del piano in sé dette *movimenti rigidi*, cioè ottenute *componendo una traslazione ed una rotazione*. Dividiamo l'analisi in tre passi: (a) traslazione; (b) rotazione; (c) caso generale.

(a) *Traslazione*: con riferimento alla figura 4.21, gli assi x′, y′ sono paralleli ed equiversi rispettivamente agli assi x, y.

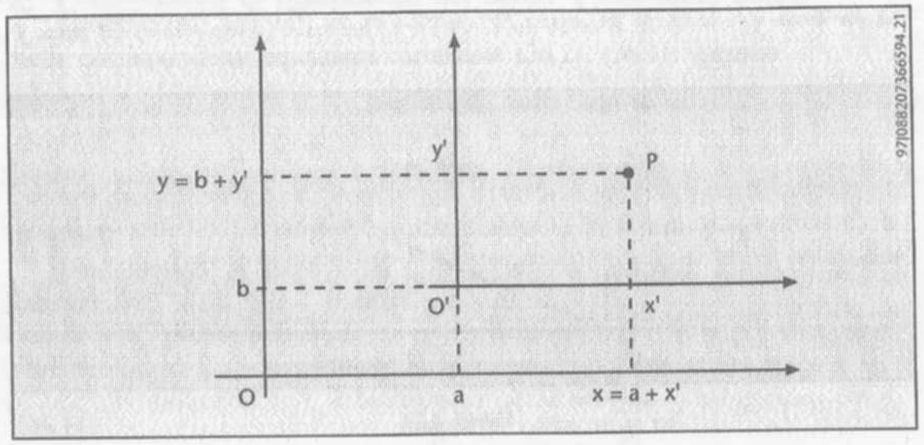


Figura 4.21

Dette (a, b) le coordinate nel sistema Oxy dell'origine O′ del nuovo sistema di coordinate, risulta

(37.5) $$\begin{cases} x = a + x' \\ y = b + y' \end{cases}$$

oppure equivalentemente

(37.6) $$\begin{cases} x' = x - a \\ y' = y - b \end{cases}$$

(b) *Rotazione*: con riferimento alla figura 4.22, l'origine O′ del riferimento O′ x′ y′ coincide con l'origine O nel riferimento Oxy, mentre gli assi x′, y′ formano un angolo α con gli assi x, y.

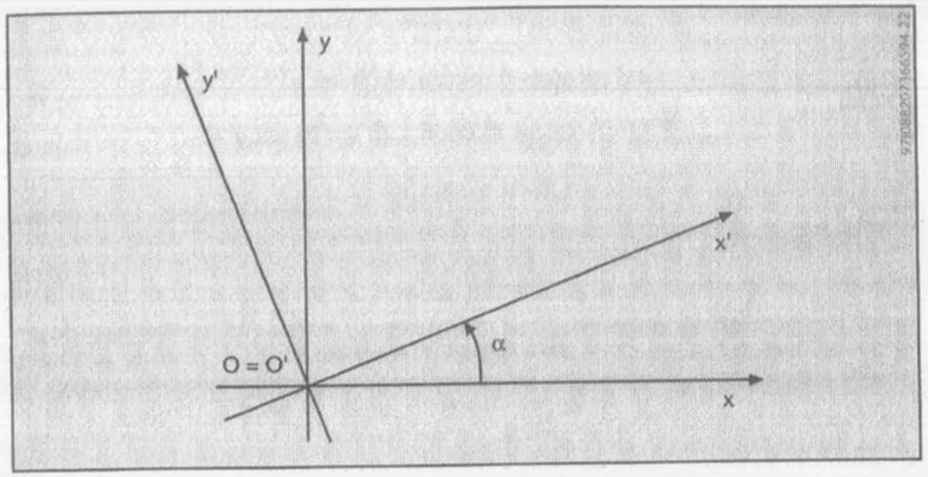


Figura 4.22

Ricorriamo alle coordinate polari per esprimere il legame tra (x, y) e (x′, y′). Con riferimento alla figura 4.23, risulta

(37.7) $$x = \varrho \cos \vartheta, \qquad y = \varrho \operatorname{sen} \vartheta,$$

(37.8) $$x' = \varrho \cos \vartheta', \qquad y' = \varrho \operatorname{sen} \vartheta',$$

con ϑ, ϑ' legati dalla relazione

(37.9) $$\vartheta' = \vartheta - \alpha.$$

Esprimendo il coseno di $\vartheta - \alpha$ mediante la formula di addizione (10.5), otteniamo

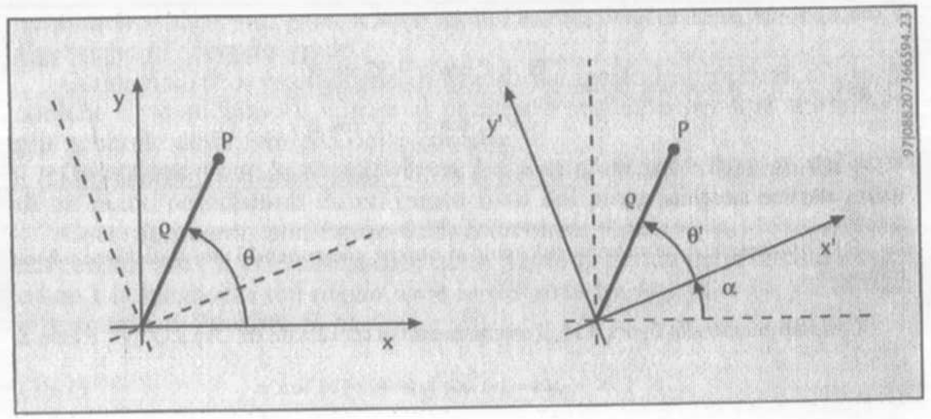


Figura 4.23

$$
\begin{aligned}
x' &= \varrho \cos \vartheta' = \varrho \cos(\vartheta - \alpha) = \\
&= \varrho(\cos \vartheta \cos \alpha + \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \alpha) = \\
&= (\varrho \cos \vartheta) \cos \alpha + (\varrho \operatorname{sen} \vartheta) \operatorname{sen} \alpha = \\
&= x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha.
\end{aligned} \tag{37.10}
$$

Analogamente

$$
\begin{aligned}
y' &= \varrho \operatorname{sen} \vartheta' = \varrho \operatorname{sen} (\vartheta - \alpha) = \\
&= \varrho(\operatorname{sen} \vartheta \cos \alpha - \operatorname{sen} \alpha \cos \vartheta) = \\
&= (\varrho \operatorname{sen} \vartheta) \cos \alpha - (\varrho \cos \vartheta) \operatorname{sen} \alpha = \\
&= y \cos \alpha - x \operatorname{sen} \alpha.
\end{aligned} \tag{37.11}
$$

In definitiva, le formule di cambiamento di coordinate cartesiane da Oxy a Ox′ y′, mediante una rotazione di angolo α, sono

$$
\begin{cases} x' = x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha \\ y' = - x \operatorname{sen} \alpha + y \cos \alpha \end{cases} . \tag{37.12}
$$

Notiamo in particolare che la matrice A, che esprime il cambiamento di coordinate

$$
A = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha \\ - \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \tag{37.13}
$$

ha determinante uguale ad 1; la matrice A è detta *matrice ortogonale.*

Per esprimere la trasformazione inversa della (37.12), cioè per esprimere x, y in funzione di x′, y′, basta considerare la rotazione di angolo – α, cioè è sufficiente scambiare in (37.12) x, y con x′, y′ e α con – α. Dato che cos (– α) = cos α e sen (– α) = – sen α, si ottiene

$$
\begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \operatorname{sen} \alpha \\ y = x' \operatorname{sen} \alpha + y' \cos \alpha \end{cases} . \tag{37.14}
$$

Evidentemente è possibile arrivare alla (37.14) anche risolvendo il sistema (37.12) rispetto alle due incognite x, y.

(c) *Caso generale*: un movimento rigido si ottiene componendo una traslazione ed una rotazione.

Con riferimento alla figura 4.24, il cambiamento di coordinate da Oxy a O′x′y′ è dato da

$$
\begin{cases} x' = (x - a) \cos \alpha + (y - b) \operatorname{sen} \alpha \\ y' = - (x - a) \operatorname{sen} \alpha + (y - b) \cos \alpha \end{cases} , \tag{37.15}
$$

mentre il cambiamento di coordinate da O′ x′ y′ a Oxy è espresso da

$$
\begin{cases} x = (x' + a) \cos \alpha - (y' + b) \operatorname{sen} \alpha \\ y = (x' + a) \operatorname{sen} \alpha + (y' + b) \cos \alpha \end{cases} . \tag{37.16}
$$

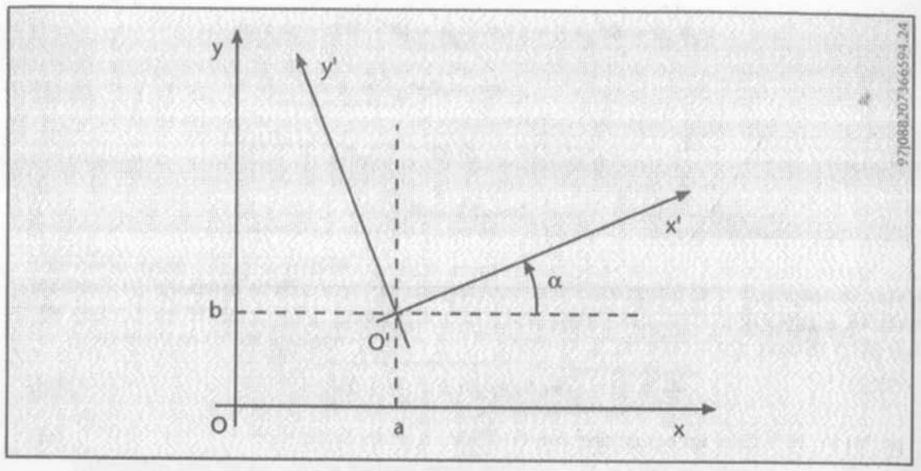


Figura 4.24

38. Circonferenza, ellisse, iperbole, parabola

Esaminiamo in questo paragrafo alcune curve del piano definite come *luogo geometrico*, cioè come insieme di punti del piano soddisfacenti determinate proprietà geometriche. Prendiamo in considerazione, in particolare, alcuni luoghi geometrici che rientrano nella famiglia delle *coniche*, cioè delle curve di $\mathbf{R}^2$ rappresentabili in un sistema cartesiano da equazioni algebriche di secondo grado.

Come già detto, esaminiamo in questo paragrafo le proprietà di alcune coniche e rimandiamo il lettore al paragrafo seguente per una trattazione più generale della famiglia delle coniche.

Cominciamo con la *circonferenza*. La circonferenza è il luogo dei punti di un piano equidistanti da un punto fisso del piano, detto *centro*.

Con riferimento alla figura 4.25, indichiamo con (x_0, y_0) le coordinate del centro, con (x, y) le coordinate di un punto generico della circonferenza, e con r la lunghezza del *raggio*, cioè la distanza tra (x_0, y_0) e (x, y). In base al teorema di Pitagora si ha

$$
(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2 , \tag{38.1}
$$

che è l'*equazione della circonferenza* di centro (x_0, y_0) e raggio r.

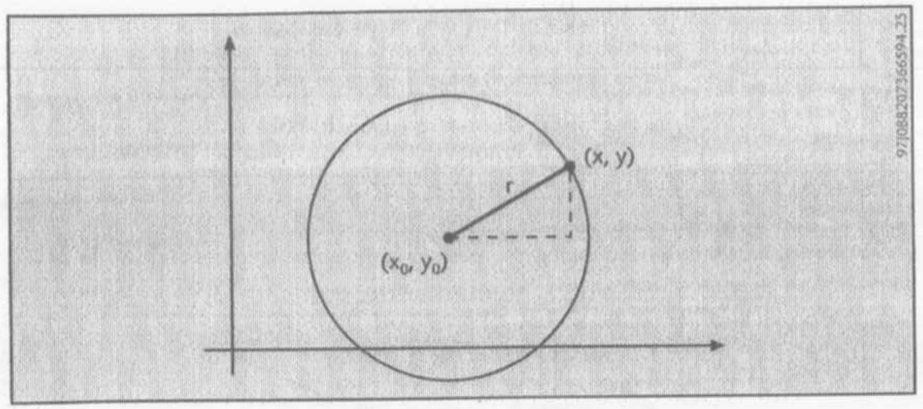


Figura 4.25

Sviluppando i quadrati, la (38.1) si riscrive nella forma

(38.2) $$x^2 + y^2 - 2\,x_0\,x - 2\,y_0\,y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0;$$

pertanto, se è data un'equazione con coefficienti generici del tipo

(38.3) $$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0,$$

per riconoscere se si tratta dell'equazione di una circonferenza (e per calcolare il raggio e le coordinate del centro), si impongono le condizioni

(38.4) $$-2\,x_0 = a, \quad -2\,y_0 = b, \quad x_0^2 + y_0^2 - r^2 = c,$$

da cui

(38.5) $$x_0 = -\frac{a}{2}, \quad y_0 = -\frac{b}{2}, \quad r = \left(\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c\right)^{1/2}.$$

Evidentemente r in (38.5) è ben definito ed è un numero reale non nullo se e soltanto se

(38.6) $$\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c > 0;$$

la (38.6) è quindi condizione necessaria e sufficiente affinché l'equazione (38.3) rappresenti una circonferenza.

Si noti che, se in (38.6) vale il segno di uguale, cioè se $c = a^2/4 + b^2/4$, allora la (38.3) è l'equazione del luogo dei punti distanti $r = 0$ da $(x_0, y_0) = (-a/2, -b/2)$. Cioè, in tal caso, la (38.3) è «l'equazione» del punto di coordinate $(-a/2, -b/2)$; si dice anche che si tratta della *circonferenza degenere* di centro $(-a/2, -b/2)$ e raggio nullo.

L'*ellisse* è il luogo dei punti del piano per cui è costante la somma delle distanze da due punti fissi, detti *fuochi*.

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy tale che i fuochi F_1 ed F_2 si trovino sull'asse x, con coordinate $(\pm c, 0)$, con $c > 0$, come in figura 4.26.

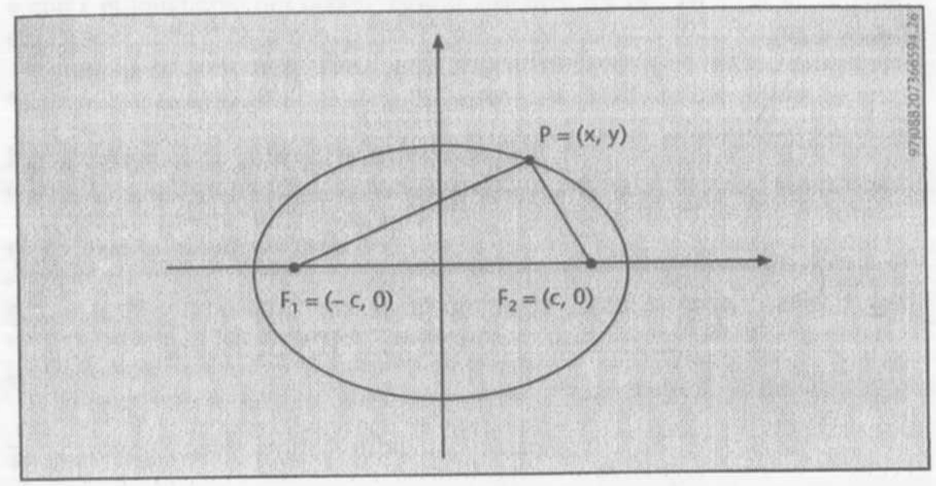


Figura 4.26

Indicando con 2a ($a > 0$) la somma delle distanze $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$, abbiamo $\overline{F_1P} + \overline{F_2P} = 2a$, cioè

(38.7) $$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a.$$

Notiamo che 2c, uguale alla distanza F_1F_2, è minore di 2a, uguale alla somma degli altri due lati del triangolo $F_1\,F_2P$. Perciò è $c < a$. Trasferendo una delle due radici a secondo membro ed elevando al quadrato (si verifica che, così facendo, non si introducono nuove soluzioni), dalla (38.7) si ottiene

$$(x+c)^2 + y^2 = 4\,a^2 + (x-c)^2 + y^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$2cx = 4\,a^2 - 2cx - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,;$$

(38.8) $$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx;$$

$$a^2\,(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2\,a^2\,cx + c^2\,x^2\,;$$

$$(a^2 - c^2)\,x^2 + a^2\,y^2 = a^2\,(a^2 - c^2).$$

Posto $b^2 = a^2 - c^2$ (si ricordi che $a > c$), dividendo entrambi i membri per $a^2\,b^2 = a^2\,(a^2 - c^2)$ otteniamo infine

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{38.9}$$

che è detta *equazione canonica dell'ellisse.*

Si riconosce immediatamente, ponendo $y = 0$ oppure $x = 0$, che l'ellisse incontra gli assi x, y rispettivamente nei punti di coordinate $(\pm a, 0)$, $(0, \pm b)$ (figura 4.27).

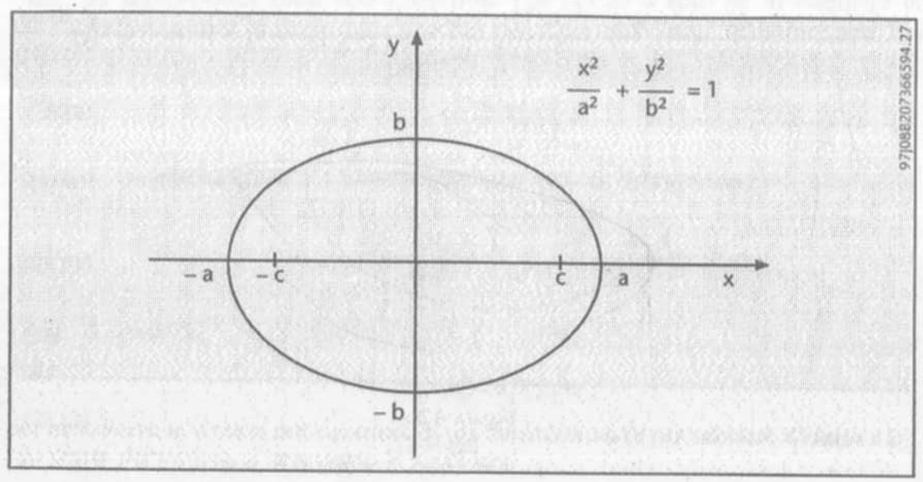


Figura 4.27

I numeri positivi a, b si dicono *semiassi* dell'ellisse. Se risulta $a = b$, l'ellisse si riduce alla circonferenza di centro l'origine e raggio $a(= b)$; perciò la circonferenza è una particolare ellisse, avente gli assi uguali fra loro.

L'*iperbole* è il luogo dei punti del piano per cui è costante la differenza, in valore assoluto, delle distanze da due punti fissi, detti *fuochi.*

Come per l'ellisse, consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, tali che i fuochi F_1 ed F_2 siano sull'asse x, con coordinate $(\pm c, 0)$, con $c > 0$, come in figura 4.28.

Indicando con $2a$ $(a > 0)$ il valore assoluto della differenza delle distanze $\overline{F_1P}$ e $\overline{F_2P}$, abbiamo $|\overline{F_1P} - \overline{F_2P}| = 2a$, cioè

$$\left|\sqrt{(x + c)^2 + y^2} - \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\right| = 2a. \tag{38.10}$$

Contrariamente a quanto accade per l'ellisse, in questo caso risulta $c > a$; infatti $2c$, pari alla lunghezza del segmento $\overline{F_1F_2}$, è maggiore della differenza degli altri due lati del triangolo F_1F_2P, che è uguale a $2a$.

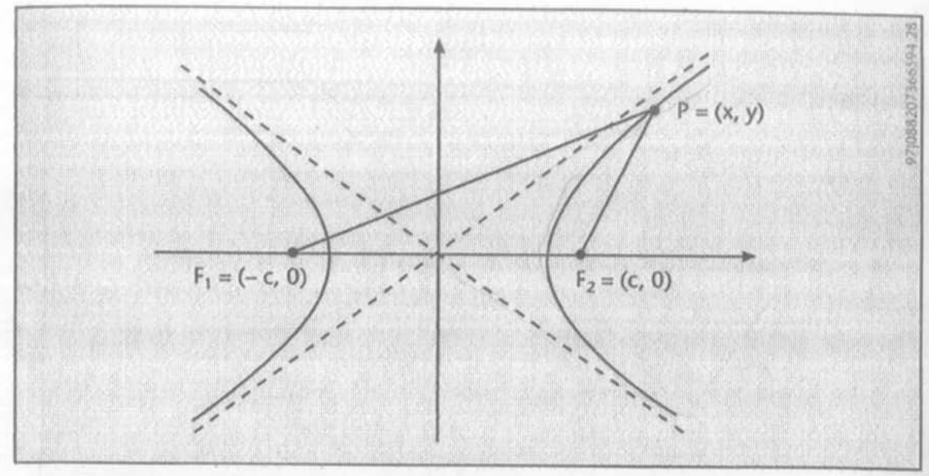


Figura 4.28

Con calcoli simili a quelli fatti per l'ellisse si ottiene

$$\begin{aligned}
&\sqrt{(x + c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x - c)^2 + y^2}\,; \\
&(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 + (x - c)^2 + y^2 \pm 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2}\,; \\
&\pm a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} = cx - a^2\,; \\
&a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4\,; \\
&(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).
\end{aligned} \tag{38.11}$$

Si noti che l'equazione ottenuta per l'iperbole in (38.11) è (apparentemente) uguale all'equazione dell'ellisse in (38.8); occorre però ricordare che, a differenza dell'ellisse, risulta in questo caso $c > a$.

Pertanto possiamo porre $b^2 = c^2 - a^2$ (e non avremmo potuto porre $b^2 = a^2 - c^2$ come per l'ellisse, perché risulta $a^2 - c^2 < 0$); dividendo entrambi i membri per $a^2b^2 = -a^2(a^2 - c^2)$, otteniamo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{38.12}$$

che è detta *equazione canonica dell'iperbole.*

Ponendo $y = 0$ si determinano le intersezioni con l'asse x nei punti $(\pm a, 0)$, come in figura 4.29. L'iperbole non ha intersezioni con l'asse y, dato che l'equazione $-y^2/b^2 = 1$ non ammette soluzioni reali.

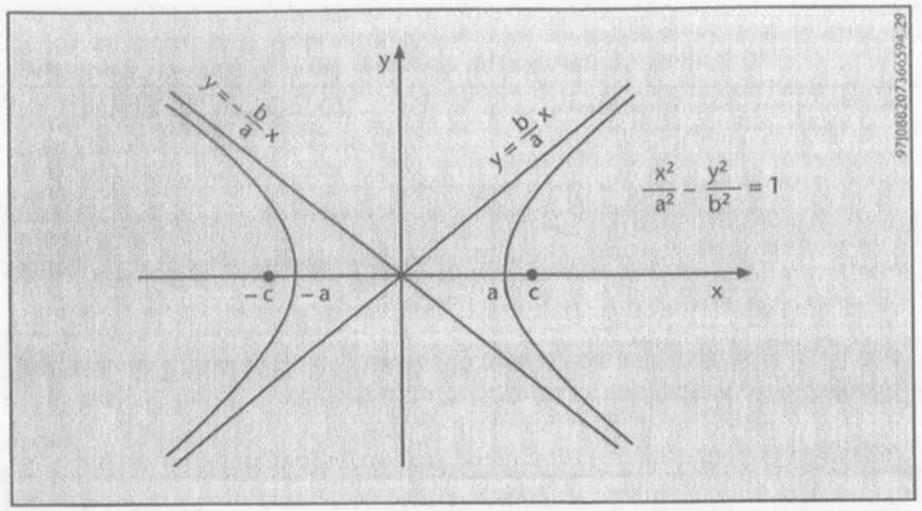


Figura 4.29

Consideriamo una retta generica di equazione y = mx, con m parametro reale. Tale retta ha intersezioni con l'iperbole (38.12) nei punti di coordinate (x, y) che risolvono il sistema

$$\text{(38.13)} \qquad \begin{cases} y = mx \\ x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1 \end{cases},$$

cioè $y = mx$ e $x^2 (1/ a^2 - m^2 / b^2) = 1$, da cui

$$\text{(38.14)} \qquad x = \frac{\pm ab}{\sqrt{b^2 - m^2 a^2}}, \quad y = \frac{\pm mab}{\sqrt{b^2 - m^2 a^2}},$$

dovendo risultare, affinché x, y siano numeri reali, $b^2 - m^2 a^2 > 0$, cioè

$$\text{(38.15)} \qquad -\frac{b}{a} < m < \frac{b}{a}.$$

Riassumendo, la retta generica per l'origine degli assi, di equazione y = mx, ha intersezioni reali con l'iperbole (38.12) se e solo se m soddisfa le limitazioni (38.15). I casi limite, corrispondenti ad m = ± b/a, danno luogo agli asintoti dell'iperbole. Precisamente, le rette di equazione

$$\text{(38.16)} \qquad y = \pm \frac{b}{a} x$$

si dicono *asintoti* dell'iperbole (si veda la figura 4.29).

L'iperbole (38.12) si dice *equilatera* quando a = b; in tal caso l'equazione diviene

$$\text{(38.17)} \qquad x^2 - y^2 = a^2 .$$

È interessante osservare come si trasforma l'equazione di un'iperbole equilatera eseguendo un cambiamento di riferimento ortogonale, in particolare una rotazione degli assi di -45° ($-\pi/4$ radianti), che corrisponde ad assumere come assi x', y' gli asintoti dell'iperbole equilatera. Ricordando le formule (37.14), che esprimono la rotazione di un angolo α, per $\alpha = -\pi/4$ abbiamo:

$$\text{(38.18)} \qquad \begin{cases} x = x' \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - y' \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x' + y') \\ y = x' \operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{4}\right) + y' \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x' + y') \end{cases}$$

La (38.17) si trasforma in

$$\text{(38.19)} \qquad a^2 = x^2 - y^2 = \frac{1}{2}(x' + y')^2 - \frac{1}{2}(-x' + y')^2 = 2x'\,y',$$

cioè

$$\text{(38.20)} \qquad x'\,y' = \frac{a^2}{2} = k = \textit{costante}.$$

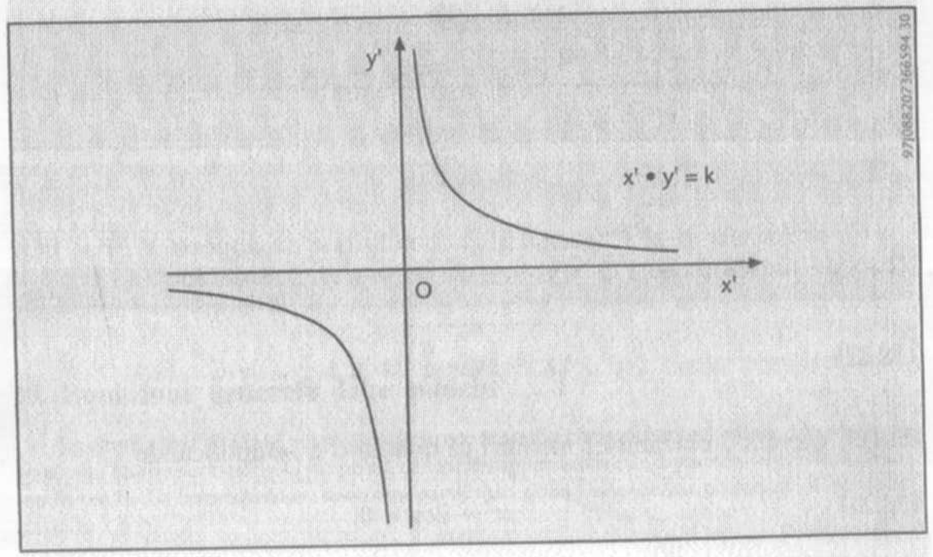


Figura 4.30

L'iperbole equilatera è rappresentata in figura 4.30 nel riferimento Ox′ y′. Si noti che, rispetto a tale riferimento l'iperbole è il grafico di una *funzione* definita, per ogni $x' \neq 0$, mediante la formula $y' = k/x'$. Se poi si esegue un nuovo cambiamento di coordinate, questa volta una traslazione di equazioni $x'' = x' e + x_0$, $y'' = y' + y_0$, si ritrova l'equazione dell'iperbole già proposta nel paragrafo 11 (si veda in particolare la (11.9)) nelle nuove variabili x″, y″:

(38.21) $$(x'' - x_0) \cdot (y'' - y_0) = k.$$

La *parabola* è il luogo dei punti del piano equidistanti da un punto prefissato, detto *fuoco* e da una retta prefissata, della *direttrice*.

Consideriamo un sistema di assi cartesiani ortogonali Oxy, tali che il fuoco F si trovi sul semiasse positivo delle y, con coordinate (0, c/2), con $c > 0$, e la direttrice, parallela all'asse x, abbia equazione $y = -c/2$.

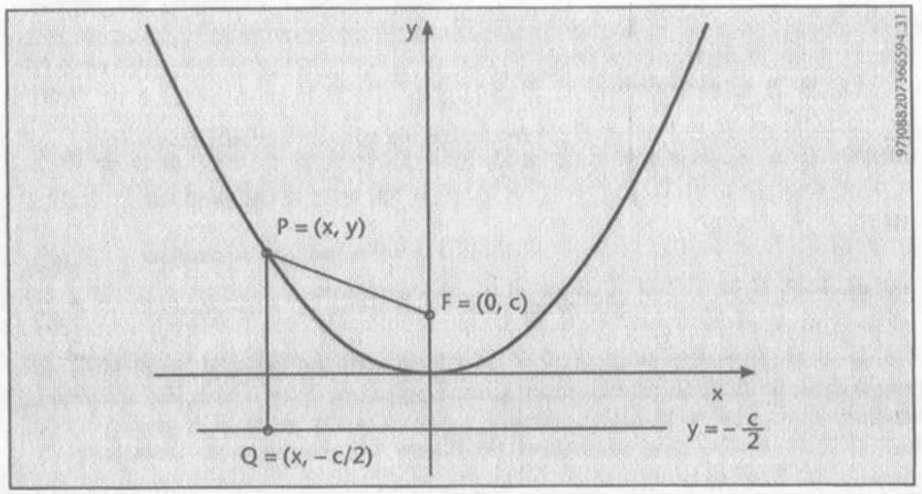


Figura 4.31

Con riferimento alla figura 4.31, la condizione da imporre è $\overline{FP} = \overline{PQ}$. Tenendo presente che $\overline{PQ} = y - (-c/2) = y + c/2$, si ottiene

(38.22) $$\sqrt{x^2 + \left(y - \frac{c}{2}\right)^2} = y + \frac{c}{2},$$

da cui, elevando entrambi i membri al quadrato e semplificando

(38.23) $$x^2 - 2cy = 0,$$

che è l'*equazione canonica della parabola.*

Spesso si usa la notazione $c = 1/(2a)$, esprimendo y *in funzione di* x, nella forma

(38.24) $$y = a\,x^2 .$$

Sia con le notazioni dell'equazione (38.24), che con le notazioni (38.23), la parabola è simmetrica rispetto all'asse y, che viene detto *asse della parabola*. Il punto (0, 0) è il *vertice della parabola.*

Talvolta si considera la parabola (38.24) in un riferimento cartesiano ortogonale O′ x′ y′ ottenuto da Oxy con una traslazione degli assi, che sposta l'origine nel punto (x_0, y_0), mediante le relazioni

(38.25) $$x' = x + x_0 , \quad y' = y + y_0 .$$

L'equazione (38.24) si trasforma in

(38.26) $$y' - y_0 = a(x'^2 - 2\,x_0\,x' + x_0^2),$$

che, con le notazioni

(38.27) $$-2a\,x_0 = b, \quad a\,x_0^2 + y_0 = c,$$

equivale a

(38.28) $$y' = a\,x'^2 + bx' + c.$$

Dato che con la traslazione (38.25) l'origine del sistema Oxy viene trasformata nel punto $(x', y') = (x_0, y_0)$ del sistema O′ x′ y′, (x_0, y_0) è il vertice della parabola nel nuovo sistema di riferimento. In termini dei coefficienti a, b, c in (38.27), (38.28), le coordinate del vertice valgono

(38.29) $$x_0 = -\frac{b}{2a}, \qquad y_0 = c - a\,x_0^2 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Altre proprietà della parabola, con equazione nella forma (38.28), sono state date nel paragrafo 11.

39. Equazione generale delle coniche

Le curve piane studiate nel paragrafo precedente (la circonferenza, l'ellisse, l'iperbole, la parabola) hanno in comune la proprietà di essere rappresentate da equazioni algebriche di secondo grado. Le loro equazioni sono casi particolari della più generale equazione di secondo grado in x e y:

(39.1) $$a_{11}\,x^2 + 2\,a_{12}\,xy + a_{22}\,y^2 + 2\,a_{13}\,x + 2\,a_{23}\,y + a_{33} = 0.$$

Le curve piane, rappresentabili da equazioni di secondo grado in x, y del tipo di (39.1), sono dette *coniche*.

Alla conica (39.1) è associata la matrice quadrata (simmetrica)

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}; \tag{39.2}$$

la conica è detta *singolare* se il *determinante* della matrice M è nullo; altrimenti la conica è detta *non singolare*.

È possibile eseguire la *classificazione metrica delle coniche* non singolari utilizzando anche la matrice M_{33} (ottenuta dalla matrice M cancellando la terza riga e la terza colonna, in accordo con le notazioni del paragrafo 19):

$$M_{33} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}. \tag{39.3}$$

Si dimostra che vale il seguente schema di classificazione delle coniche non degeneri in ellissi, iperboli o parabole, nel senso che è possibile determinare un sistema cartesiano ortogonale rispetto al quale la curva (39.1) assuma una forma canonica (come quelle indicate nel paragrafo precedente) del tipo di:

(39.4) *un'ellisse, se* $\det M_{33} > 0$ *e* $a_{11} \det M \leq 0$;

(39.5) *un'iperbole, se* $\det M_{33} < 0$;

(39.6) *una parabola, se* $\det M_{33} = 0$.

Dallo schema precedente resta *escluso* il caso

$$\det M_{33} > 0 \quad \text{e} \quad a_{11} \cdot \det M > 0, \tag{39.7}$$

per cui la corrispondente equazione (39.1) rappresenta l'*insieme vuoto*; ciò accade ad esempio per l'equazione di secondo grado

$$x^2 + y^2 + 1 = 0, \tag{39.8}$$

che, essendo $x^2 + y^2 + 1 > 0$, non è soddisfatta da alcuna coppia $(x, y) \in \mathbf{R}^2$; cioè corrisponde all'insieme vuoto. Questo è un caso in cui vale la (39.7); infatti:

$$\det M_{33} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0,$$

$$a_{33} \cdot \det M = 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 > 0. \tag{39.9}$$

CAPITOLO 5

LIMITI DI SUCCESSIONI

40. Premessa

Uno dei problemi che affronteremo nel capitolo sugli integrali sarà il calcolo delle aree di figure piane. Tale calcolo fa uso in modo essenziale del concetto di limite. Per mostrare ciò, consideriamo un metodo per il calcolo dell'area di un cerchio, simile al metodo che Archimede usò nel III secolo a.C.

Si tratta di «approssimare» un cerchio di raggio 1 (potremmo scegliere anche un diverso valore per il raggio) con figure che «differiscono di poco» dal cerchio, e di cui sia possibile calcolare l'area. Nel capitolo sugli integrali vedremo che è comodo considerare, come figure approssimanti, unioni di rettangoli. Qui, per ogni $n \geq 3$ consideriamo P_n, un poligono regolare di n lati inscritto al cerchio di raggio 1. Cioè, per $n = 3$ consideriamo un triangolo equilatero ($= P_3$) inscritto al cerchio, per $n = 4$ un quadrato ($= P_4$), e così via (figura 5.1).

Agli n lati del poligono P_n corrispondono n angoli al centro uguali fra loro, che sono l'n-sima parte dell'angolo giro e che quindi misurano $2\pi/n$ radianti. Quindi l'angolo α indicato in figura vale $\alpha = \pi/n$ radianti. Dato che i cateti del triangolo rettangolo in figura misurano sen α e cos α, la sua area vale (sen α cos α)/2. Per ottenere l'area del poligono P_n occorre moltiplicare l'ultimo risultato per il numero dei triangoli rettangoli in cui è scomposto P_n. Tale numero è 2n. Quindi l'area di P_n, che indichiamo con a_n, vale:

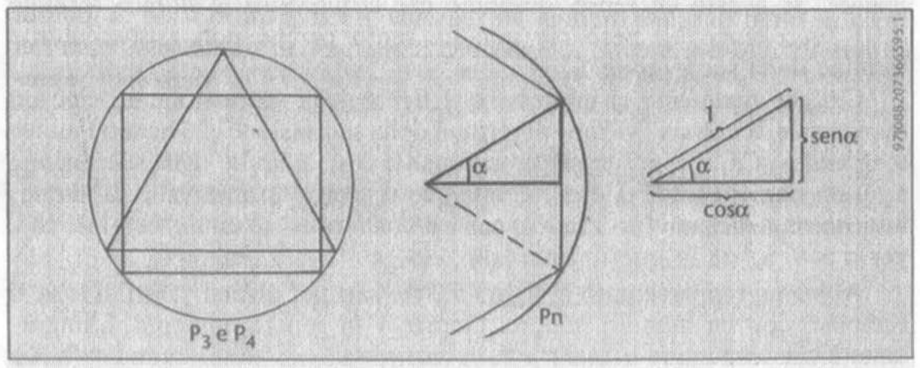


Figura 5.1

(40.1) $$a_n = \text{area}\,(P_n) = 2n \cdot \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\alpha\,\cos\alpha.$$

Usando le formule di duplicazione (10.6) e ricordando il valore di α otteniamo

(40.2) $$a_n = \frac{n}{2}\,\text{sen}\,\frac{2\pi}{n}.$$

Riportiamo a_n per alcuni valori di n; il lettore controlli i primi valori, fino ad n = 12, usando la tabella del paragrafo 10.

n	3	4	6	8	12	20	50	100	200
a_n	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	2	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	$2\sqrt{2}$	3	3.09	3.133	3.139	3.1410

Come ci aspettiamo, per n grande i valori di a_n si avvicinano a π = 3.14159265... Archimede, partendo dall'esagono e raddoppiando per 4 volte il numero dei lati, considerò un poligono regolare con 96 lati e riuscì a calcolare le prime due cifre decimali di π.

Alla fine del paragrafo 47 dimostreremo, tramite la (40.2), che l'area di un cerchio di raggio 1 vale π. Però la (40.2) non è utile per il calcolo numerico di π, perché π entra nella definizione stessa di a_n. Qui desideriamo sottolineare lo schema del procedimento: abbiamo introdotto una *successione* di numeri reali

(40.3) $$a_3\,,\ a_4\,,\ a_5\,,\ a_6\,,\ \ldots,\ a_n\,,\ldots$$

Di tale successione ci interessa il comportamento per n grande. Infatti il numero a_n rappresenta l'area del poligono regolare di n lati inscritto al cerchio, ed è tanto più vicino all'obiettivo area del cerchio, quanto più n è grande. Se avesse un senso, diremmo che ci interessa «l'ultimo» termine della successione a_n; però ciò non ha senso perché non esiste l'ultimo termine della successione.

Ciò che realmente ci interessa è il *limite* della successione a_n, cioè un numero $a \in \mathbf{R}$ che sia «vicino» ai termini della successione che hanno l'indice n «grande». Ciò si esprime più precisamente così: a, limite della successione a_n, è un numero reale tale che comunque si scelga un intervallo di numeri intorno ad a, diciamo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$, allora esiste un indice ν tale che, per $n > \nu$, a_n sta in questo intervallo, cioè $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

Abbiamo rappresentato in figura 5.2 tre casi per diversi valori di ε; se si cambia ε con un numero minore, l'indice ν in genere aumenta. L'importante è che comunque si fissi $\varepsilon > 0$, in corrispondenza esiste un indice ν con le proprietà suddette.

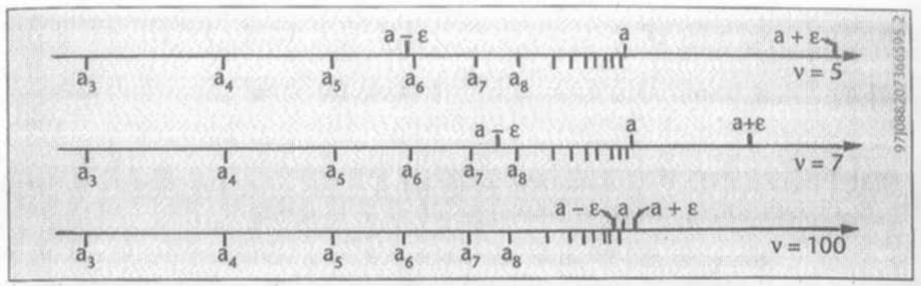


Figura 5.2

L'intervallo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ considerato in precedenza e definito, in formula, da

(40.4) $$(a - \varepsilon, a + \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}\colon a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\},$$

è detto *intorno* del numero a, di raggio ε.

Nel paragrafo seguente diamo la definizione di limite di successione e consideriamo alcuni esempi.

41. Definizioni e prime proprietà

Una *successione* è una legge che ad ogni numero naturale n fa corrispondere uno ed un solo numero reale a_n. Ricordando la definizione di funzione (paragrafo 6) si può dire che *una successione è una funzione da* **N** in **R**. Indichiamo una successione con a_n, o per esteso con

(41.1) $$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ a_4\,,\ \ldots,\ a_n\,,\ldots$$

Parleremo allo stesso modo di successione anche se non sono definiti i termini a_n per i primi indici n, cioè per un numero finito di indici n, come nel caso considerato nel paragrafo precedente, dove era $n \geq 3$. Esempi di successioni sono:

(41.2) $$a_n = \frac{1}{n} \qquad 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$$

(41.3) $$a_n = \frac{n-1}{n} \qquad 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n-1}{n}, \ldots$$

(41.4) $$a_n = \frac{(-1)^n}{n} \qquad -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{(-1)^n}{n}, \ldots$$

(41.5) $a_n = (-1)^n$ $\qquad -1, 1, -1, 1, \ldots, (-1)^n, \ldots$

(41.6) $a_n = n^2$ $\qquad 1, 4, 9, 16, \ldots, n^2, \ldots$

DEFINIZIONE. — *Un numero reale* a *è il limite della successione* a_n *(si dice anche che* a_n *tende o converge ad* a*), e si scrive*

(41.7) $$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \qquad (\textit{oppure} \quad a_n \to a),$$

se, qualunque sia $\varepsilon>0$, *esiste un numero* ν *tale che* $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ *per ogni* $n>\nu$.

La relazione $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ si può anche scrivere $-\varepsilon < a_n - a < \varepsilon$, e ciò equivale a (proprietà (8.10)):

(41.8) $$|a_n - a| < \varepsilon.$$

Quindi possiamo ripetere la definizione precedente in simboli ($\exists$ si legge esiste):

(41.9) $$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \iff \forall\varepsilon>0, \exists\nu: |a_n - a| < \varepsilon \quad \forall n>\nu.$$

Osserviamo, perché ci sarà utile nel seguito, che la (41.9) è equivalente a

(41.10) $$\lim_{n\to+\infty} a_n = a \iff \exists c > 0: \forall\varepsilon > 0, \exists\nu: |a_n - a| < c\varepsilon, \forall n > \nu;$$

infatti dalla (41.10) si riottiene la (41.9) cambiando ε con ε/c.

Usando la definizione, verifichiamo che

(41.11) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Risulta $|a_n - a| = |1/n| = 1/n$. Dato che $1/n < \varepsilon$ equivale a $n > 1/\varepsilon$, basta scegliere $\nu = 1/\varepsilon$. Cioè abbiamo verificato che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\nu = 1/\varepsilon$ per cui $|a_n - a| = 1/n < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$.

Verifichiamo ora che

(41.12) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

Risulta

(41.13) $$|a_n - a| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n};$$

in questo esempio si vede l'importanza di considerare il valore assoluto di $a_n - a$; si trova $|a_n - a| = 1/n$ e poi si procede come nel caso precedente.

Naturalmente non abbiamo scelto a caso i valori, $a = 0$ e $a = 1$ nei due esempi precedenti. Proviamo a vedere che succede se invece tentassimo di dimostrare che

(41.14) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 1\ !$$

Avremmo $|a_n - a| = \left|\frac{1}{n} - 1\right| = 1 - \frac{1}{n} < \varepsilon$, cioè $\frac{1}{n} > 1 - \varepsilon$.

Questa relazione non crea problemi se ε è grande, ad esempio se $\varepsilon = 1$ è verificata da ogni $n \in \mathbb{N}$. Ma se ε è più piccolo, ad esempio se $\varepsilon = 1/2$, allora $1/n > 1/2$ è verificata solo se $n < 2$. Cioè solo a_1 verifica la relazione data, e non a_n con $n > \nu$. Ciò prova che $a = 1$ *non è* il limite della successione $1/n$.

Con un argomento simile verifichiamo la

UNICITÀ DEL LIMITE. — *Una successione convergente non può avere due limiti distinti.*

Dimostrazione: supponiamo per assurdo che esistano due limiti distinti, cioè supponiamo che $a_n \to a$, $a_n \to b$, con $a \neq b$. Poniamo $\varepsilon = |a - b|/2$ (> 0). Si ha

(41.15) $$\exists\, \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon, \forall n > \nu_1; \quad \exists\, \nu_2 : |a_n - b| < \varepsilon, \forall n > \nu_2.$$

Ponendo $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, le relazioni sopra scritte valgono contemporaneamente e si ha (si usa la disuguaglianza triangolare $|x_1 + x_2| \le |x_1| + |x_2|$ del paragrafo 8):

(41.16) $$\begin{aligned} |a - b| &= |(a - a_n) + (a_n - b)| \le \\ &\le |a - a_n| + |a_n - b| = \\ &= |a_n - a| + |a_n - b| < \varepsilon + \varepsilon = |a - b|. \end{aligned}$$

Abbiamo così trovato che $|a - b| < |a - b|$, che è assurdo.

Esaminiamo ora le successioni (41.4), (41.5). Si ha che

(41.17) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0\ ;$$

infatti $|a_n - a| = |(-1)^n/n| = 1/n$; poi si procede come fatto per il limite (41.11).

Invece il limite

(41.18) $$\lim_{n\to+\infty} (-1)^n \textit{ non esiste.}$$

Infatti, supponiamo per assurdo che esista $a = \lim_{n\to+\infty} (-1)^n$ Se $a \geq 0$, consideriamo $|a_n - a|$ con n dispari. Allora $a_n = -1$ e quindi $|a_n - a| = |-1 - a| = 1 + a \geq 1$. Perciò, se $\varepsilon < 1$, non risulta mai $|a_n - a| < \varepsilon$ per n dispari. Si procede in modo analogo per il caso $a \leq 0$ prendendo i termini con indice n pari.

Infine la successione (41.6) tende a $+\infty$ secondo la definizione seguente.

DEFINIZIONE. — *Una successione* a_n *ha limite uguale a* $+\infty$ *(si dice anche che* a_n *tende o diverge a* $+\infty$*) e si scrive*

(41.19) $$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \ (\textit{oppure } a_n \to +\infty)\ .$$

se, qualunque sia $M > 0$, *esiste un numero* ν *tale che* $a_n > M$, *per ogni* $n > \nu$.

Si dà una definizione analoga nel caso di limite uguale a $-\infty$. Ad esempio, la successione $a_n = -n^2$ tende a $-\infty$. In simboli scriveremo le due definizioni nel modo seguente:

(41.20) $$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty \iff \forall\, M>0,\ \exists\nu\colon a_n > M,\ \forall\, n > \nu;$$

(41.21) $$\lim_{n\to+\infty} a_n = -\infty \iff \forall\, M>0,\ \exists\nu\colon a_n < -M,\ \forall\, n > \nu.$$

Come già detto, una successione si dice *convergente* se ammette limite finito, mentre si dice *divergente* se ammette limite uguale a $+\infty$ oppure a $-\infty$. Le successioni convergenti o divergenti si dicono *regolari*, mentre le successioni che non ammettono limite si dicono *non regolari*.

Infine, una successione che converge a zero si dice *infinitesima*, mentre una successione divergente si dice anche *infinita*.

42. Successioni limitate

Abbiamo detto nel paragrafo precedente che una successione si dice *regolare* se ammette limite (finito o infinito). Invece una successione a_n si dice *limitata* se esiste un numero reale M tale che

(42.1) $$|a_n| \leq M, \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

o (equivalentemente, in base alla proposizione (8.9)):

(42.2) $$-M \leq a_n \leq M, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Si noti il legame con la definizione (13.3) di insieme limitato (si veda anche la (13.4).

Il lettore provi a verificare per esercizio che le successioni (41.2), (41.3), (41.4), (41.5) sono limitate, mentre la successione (41.6) non lo è; ad esempio, la successione (41.4) è limitata dalla costante $M = 1$, infatti:

(42.3) $$|a_n| = \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \leq 1, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Esistono successioni limitate non regolari, cioè successioni limitate che non ammettono limite; un esempio è fornito dalla successione (41.5) definita da

(42.4) $$a_n = (-1)^n\ ,$$

che è limitata (perché $|a_n| = 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$) ma che, come dimostrato in (41.18), non ammette limite.

Viceversa, ogni successione che ammette limite finito è limitata, come mostrato dal seguente:

TEOREMA. — *Ogni successione convergente è limitata.*

Dimostrazione: supponiamo che a_n converga ad a e scegliamo $\varepsilon = 1$. In base alla definizione di limite (si veda la (41.9)) esiste un indice ν per cui $|a_n - a| < 1$ per ogni $n > \nu$. Quindi

(42.5) $$|a_n| = |(a_n - a) + a| \leq |a_n - a| + |a| < 1 + |a|,\ \forall n > \nu.$$

Ma allora, per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ha:

(42.6) $$|a_n| \leq M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_\nu|, 1 + |a|\}.$$

43. Operazioni con i limiti

Valgono le seguenti regole di calcolo:

OPERAZIONI CON I LIMITI. — *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$ *e* $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, *con* $a, b \in \mathbf{R}$, *si ha*

(43.1) $$\lim_{n\to+\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b.$$

(43.2) $$\lim_{n\to+\infty} a_n \cdot b_n = ab.$$

(43.3) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b} \quad (se\ b_n\ ,\ b \neq 0).$$

Dimostriamo la (43.1) con il segno +: per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$,

(43.4) $$\exists\, \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon,\ \forall n > \nu_1\ ; \qquad \exists\, \nu_2 : |b_n - b| < \varepsilon,\ \forall n > \nu_2\ .$$

Ponendo $\nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, per ogni $n > \nu$ si ha

(43.5) $$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (a + b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \leq \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b| < 2\varepsilon. \end{aligned}$$

La prova è completa. Si noti che abbiamo usato la definizione di limite nella forma (41.10). Il lettore dimostri la (43.1) con il segno −.

Dimostrazione della (43.2): per il teorema del paragrafo precedente la successione a_n è limitata, cioè esiste un numero reale M (> 0) tale che

(43.6) $$|a_n| \leq M, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Dall'ipotesi (43.4), per ogni $n > \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$ si ottiene

(43.7) $$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| = \\ &= |a_n (b_n - b) + b(a_n - a)| \leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| < \\ &< M\varepsilon + |b|\varepsilon = (M + |b|)\varepsilon. \end{aligned}$$

La prova che il limite di un quoziente è uguale al quoziente dei limiti è simile alla prova della relazione per il limite di un prodotto.

Esaminiamo due esempi di applicazione delle operazioni con i limiti. Avendo già verificato che la successione 1/n converge a zero per $n \to +\infty$, dal limite del prodotto (43.2) con $a_n = b_n = 1/n$ si deduce che

(43.8) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

e, iterando il procedimento,

(43.9) $$\lim_{n\to+\infty} n^{-b} = 0, \qquad \forall\, b \in \mathbf{N}.$$

Mediante le operazioni con i limiti si calcola, ad esempio, il seguente limite, dividendo numeratore e denominatore per n^2:

(43.10) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2 + 5n - 4}{3n^2 + 1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1 + 5/n - 4/n^2}{3 + 1/n^2} = \frac{1}{3}\ .$$

44. Forme indeterminate

Si prova che valgono le operazioni con limiti infiniti nei casi seguenti, ove a è un numero reale:

(44.1) $a_n \to a\ ,\quad b_n \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad a_n + b_n \to \pm\infty$

(44.2) $a_n \to \pm\infty\ ,\quad b_n \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad a_n + b_n \to \pm\infty$

(44.3) $a_n \to a \neq 0\ ,\quad b_n \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad |a_n b_n| \to +\infty$

(44.4) $a_n \to \pm\infty\ ,\quad b_n \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad |a_n b_n| \to +\infty$

(44.5) $a_n \to a\ ,\quad b_n \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad a_n / b_n \to 0$

(44.6) $a_n \to a\ ,\quad b_n \to \pm\infty \quad \Rightarrow \quad |b_n / a_n| \to +\infty$

(44.7) $a_n \to a \neq 0\ ,\quad b_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad |a_n / b_n| \to +\infty$

Risultano esclusi dalla tabella alcuni casi che schematizziamo nelle forme seguenti, dette *forme indeterminate*:

(44.8) $$\infty - \infty, \qquad 0 \cdot \infty, \qquad \infty/\infty, \qquad 0/0.$$

Altre forme indeterminate sono date nella (48.15). Dire che un limite è una forma indeterminata non significa dire che il limite non esiste, ma significa semplicemente che occorre preliminarmente eseguire trasformazioni, o semplificazioni, per togliere, se possibile, l'indeterminazione.

Ad esempio, le successioni seguenti esprimono forme indeterminate:

$$(44.9) \qquad (n+1)^2 - (n-1)^2\,; \qquad \frac{1}{n^2}\cdot(n+1); \qquad \frac{n-1}{n}\,; \qquad \frac{1/n^2}{1/n}\,.$$

La prima di tali successioni è una forma $+\infty - \infty$. Però svolgendo i quadrati si trova che la successione vale $4n$ e quindi tende a $+\infty$. La seconda successione è una forma $0 \cdot \infty$, ma si può anche scrivere $1/n + 1/n^2$, che tende a zero. La terza successione è una forma ∞/∞, ma già sappiamo che tende a 1. La quarta successione è del tipo 0/0, ma semplificando si trova $1/n \to 0$.

45. Teoremi di confronto

Studiamo in questo paragrafo alcune relazioni tra limiti e ordinamento.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. — *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a > 0$, *esiste un numero* ν *tale che* $a_n > 0$ *per ogni* $n > \nu$.

Prima di proporre la dimostrazione del teorema della permanenza del segno sottolineamo che, se una successione a_n converge ad un numero reale positivo a, *non* si può affermare in generale che *tutti* i termini della successione a_n sono positivi.

Ad esempio, in analogia con la (41.3), la successione $a_n = (n-7)/n$ converge al numero 1 per $n \to +\infty$, però i primi termini della successione (a_1, a_2, ..., fino ad a_6) sono negativi; il numero ν, nella tesi del teorema della permanenza del segno, in questo caso è uguale a 7.

Dimostrazione: dato che $a > 0$, possiamo scegliere $\varepsilon = a/2$. Esiste quindi un numero ν per cui $|a_n - a| < a/2$ per ogni $n > \nu$. Ciò equivale a $-a/2 < a_n - a < a/2$. In particolare abbiamo

$$(45.1) \qquad a_n > a - \frac{a}{2} = \frac{a}{2} > 0, \qquad \forall n > \nu.$$

COROLLARIO. — *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, *e se* $a_n \geq 0$ *per ogni* n, *allora anche* $a \geq 0$.

Dimostrazione: se per assurdo fosse $a < 0$, il teorema della permanenza del segno, applicato alla successione $-a_n$, comporterebbe che $a_n < 0$ per n grande.

COROLLARIO. — *Se* $\lim_{n\to+\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to+\infty} b_n = b$, *e se* $a_n \geq b_n$ *per ogni* n, *allora* $a \geq b$.

Per ottenere la dimostrazione di quest'ultimo corollario, basta applicare il corollario precedente alla successione $a_n - b_n$.

Possiamo schematizzare i risultati ottenuti nel modo seguente (si noti la differenza tra i segni $>$ e $\geq$):

$$(45.2) \qquad a_n \to a, \quad a > 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \nu\colon a_n > 0,\ \forall n > \nu;$$

$$(45.3) \qquad a_n \to a, \quad a_n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad a \geq 0;$$

$$(45.4) \qquad a_n \to a, \quad b_n \to b,\ a_n \geq b_n \quad \forall\, n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad a \geq b.$$

TEOREMA DEI CARABINIERI. — *Siano* a_n, b_n, c_n *tre successioni tali che*

$$(45.5) \qquad a_n \leq c_n \leq b_n\,, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Se $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} b_n = a$, *allora anche la successione* c_n *è convergente e* $\lim_{n\to+\infty} c_n = a$.

Dimostrazione: per ipotesi, per ogni $\varepsilon > 0$

$$(45.6) \qquad \exists\, \nu_1 : |a_n - a| < \varepsilon,\ \forall n > \nu_1\,; \quad \exists\, \nu_2 : |b_n - a| < \varepsilon,\ \forall n > \nu_2\,.$$

Ricordiamo che le disuguaglianze con il valore assoluto si possono anche scrivere

$$(45.7) \qquad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon; \quad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon.$$

Quindi, se $n > \nu = \max\{\nu_1, \nu_2\}$, risulta

(45.8) $$a - \varepsilon < a_n \le c_n \le b_n < a + \varepsilon.$$

Perciò $|c_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > \nu$, come volevasi dimostrare.

Valgono analoghi teoremi di confronto anche per i limiti infiniti:

(45.9) $$a_n \le b_n \ \forall n \in \mathbf{N}, \quad a_n \to +\infty \quad \Rightarrow b_n \to +\infty$$

(45.10) $$a_n \le b_n \ \forall n \in \mathbf{N}, \quad b_n \to -\infty \ \Rightarrow \ a_n \to -\infty\,.$$

Dimostriamo la (45.9) (la prova della (45.10) è analoga): per ipotesi $a_n \to +\infty$ che, per la definizione di limite (41.20), significa:

(45.11) $$\forall M > 0, \exists\, \nu\colon\ a_n > M, \qquad \forall n > \nu.$$

Dato che $b_n \ge a_n$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ottiene la tesi

(45.12) $$b_n \ge a_n > M, \qquad \forall n > \nu.$$

46. Altre proprietà dei limiti di successioni

Riportiamo in questo paragrafo due ulteriori proprietà dei limiti di successioni; in particolare la seconda, enunciata sotto forma di teorema, è importante per le applicazioni.

PROPOSIZIONE. — a_n *converge a zero se e soltanto se* $|a_n|$ *converge a zero.*

Dimostrazione: posto $b_n = |a_n|$, in base alla definizione (41.9) b_n converge a zero se e solo se

(46.1) $$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \nu\colon |b_n| < \varepsilon, \qquad \forall n > \nu.$$

Dato che

(46.2) $$|\,b_n| = ||\,a_n|| = |\,a_n|, \quad \forall n \in \mathbf{N},$$

la (46.1) è equivalente alla convergenza a zero della successione a_n.

Si noti che, nella proposizione precedente, è importante considerare non solo successioni convergenti, ma più in particolare successioni *convergenti a zero*. Ad esempio, se $a_n = (-1)^n$, allora a_n non è convergente, mentre $b_n = |a_n|$ è la successione costante $b_n = 1$, $\forall n \in \mathbf{N}$, che ovviamente converge ad 1.

Ricordiamo che una successione a_n è *limitata* se esiste un numero $M > 0$ tale che

(46.3) $$|a_n| \le M, \qquad \forall\, n \in \mathbf{N}.$$

Ricordiamo inoltre che una successione che converge a zero si dice *infinitesima*.

TEOREMA DEL LIMITE DEL PRODOTTO DI UNA SUCCESSIONE LIMITATA PER UNA INFINITESIMA. — *Se* a_n *è una successione limitata e* b_n *è una successione che converge a zero, allora la successione prodotto* $a_n \cdot b_n$ *converge a zero.*

Dimostrazione (*primo metodo*): per l'ipotesi (46.3) si ha

(46.4) $$|a_n\, b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \le M \cdot |b_n|, \qquad \forall n \in \mathbf{N},$$

che, per la proprietà (8.9) del valore assoluto, equivale a

(46.5) $$-M \cdot |b_n| \le a_n \cdot b_n \le M \cdot |b_n|, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Dato che per ipotesi $b_n \to 0$, per la proposizione precedente anche la successione $|b_n|$ converge a zero. Per il teorema dei carabinieri, dalla (46.5) si deduce infine che $a_n \cdot b_n \to 0$.

Dimostrazione (*secondo metodo*): per la definizione di limite si ha:

(46.6) $$\forall \varepsilon > 0, \exists \nu\colon |b_n| < \varepsilon, \qquad \forall n > \nu.$$

Dall'ipotesi di limitatezza (46.3) si ottiene poi

(46.7) $$|a_n\, b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \le M \cdot |b_n| < M\varepsilon, \qquad \forall n > \nu,$$

che equivale (si veda la (41.10)) al fatto che la successione prodotto $a_n \cdot b_n$ converge a zero.

A titolo di esempio verifichiamo che

(46.8) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n (n+5)}{3n^2+1} = 0;$$

infatti si tratta del limite del prodotto della successione limitata $a_n = (-1)^n$ per la successione infinitesima

(46.9) $$b_n = \frac{n+5}{3n^2+1} = \frac{1/n + 5/n^2}{3 + 1/n^2}.$$

Come ulteriore esempio verifichiamo che

(46.10) $$\lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} n}{n} = 0$$

(il lettore non confonda questo limite con quello proposto in (47.17), uguale a 1; nel limite in (47.17) la successione a_n converge a zero, mentre la successione in considerazione in (46.10) è $\operatorname{sen} a_n/a_n$, con $a_n = n \to +\infty$).

Il limite in (46.10) è zero perché limite del prodotto della successione limitata $a_n = \operatorname{sen} n$ ($|a_n| = |\operatorname{sen} n| \le 1$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$) per la successione infinitesima $b_n = 1/n$.

47. Alcuni limiti notevoli

In questo paragrafo esaminiamo alcuni esempi di limiti particolarmente importanti. Cominciamo con ($a \in \mathbf{R}$ fissato):

(47.1) $$\lim_{n\to+\infty} a^n = \begin{cases} +\infty & se \quad a > 1 \\ 1 & se \quad a = 1 \\ 0 & se \quad -1 < a < 1 \\ \textit{non esiste} & se \quad a \le -1 \end{cases}$$

Se $a > 1$ è possibile utilizzare la disuguaglianza di Bernoulli (12.5):

(47.2) $$a^n \ge 1 + n(a-1).$$

Dato che $a > 1$, il secondo membro tende a $+\infty$ se $n \to +\infty$; per il teorema di confronto (45.9) anche $a^n \to +\infty$. I casi $a = 1$ e $a = 0$ sono ovvi. Se a è diverso da zero e compreso tra -1, 1 ($0 < |a| < 1$), risulta $1/|a| > 1$, e quindi dal caso già trattato otteniamo:

(47.3) $$\lim_{n\to+\infty} |a^n| = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1/|a|)^n} = 0.$$

Se $a = -1$ si riottiene il limite (41.18). Se infine $a < -1$, si vede che la successione con

esponenti pari $a^{2k} \to +\infty$, mentre la successione con esponenti dispari $a^{2k+1} \to -\infty$ per $k \to +\infty$. Perciò non esiste il limite per $n \to +\infty$ di a^n. Si noti che invece esiste, ed è uguale a $+\infty$, il limite di $|a^n|$, se $a < -1$; infatti si ottiene la successione $|a^n|$, che ha per base $|a| > 1$.

Proviamo ora che, se a è un numero reale positivo, risulta

(47.4) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to+\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$$

Notiamo preliminarmente come sia facile ricordare il limite (47.4) per mezzo dei passaggi: $\sqrt[n]{a} = a^{1/n} \to a^0 = 1$.

Dimostrazione della (47.4): nel caso $a \ge 1$ si ha $\sqrt[n]{a} \ge 1$. Poniamo $b_n = \sqrt[n]{a} - 1$; risulta $b_n \ge 0$ e inoltre, sempre per la disuguaglianza di Bernoulli:

(47.5) $$a = (1 + b_n)^n \ge 1 + n\, b_n .$$

Perciò

(47.6) $$0 \le b_n \le (a-1)/n.$$

Dal teorema dei carabinieri segue che $b_n \to 0$, cioè che $\sqrt[n]{a} \to 1$. Se $0 < a < 1$, allora $1/a > 1$ e quindi, per quanto già dimostrato,

(47.7) $$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{1/a}} \to 1.$$

Dimostriamo ora che, se $b \in \mathbf{R}$, risulta

(47.8) $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n^b} = 1.$$

Esaminiamo preliminarmente il caso $b = 1/2$. Procedendo come fatto in precedenza, poniamo $b_n = \sqrt[n]{n^{1/2}} - 1 \ge 0$. Utilizzando ancora la disuguaglianza di Bernoulli, otteniamo

(47.9) $$\sqrt{n} = (1 + b_n)^n \ge 1 + n\, b_n .$$

Perciò

(47.10) $$0 \le b_n \le \frac{\sqrt{n} - 1}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} \to 0.$$

Quindi $b_n \to 0$, cioè $\sqrt[n]{n^{1/2}} = n^{1/(2n)} \to 1$.

Alcuni quesiti per il lettore: perché si è scelto il valore b = 1/2 ? La dimostrazione proposta non funziona se si sceglie b = 1; perché? Quali altri valori di b, oltre b = 1/2, possono essere scelti in modo che la dimostrazione funzioni?

Consideriamo ora il caso in cui l'esponente $b \in \mathbf{Z}$. In tal caso $\sqrt[n]{n^b} = (\sqrt[n]{n^{1/2}})^{2b} \to 1^{2b} = 1$. Per trattare il caso generale $b \in \mathbf{R}$, introduciamo la funzione *parte intera* di x:

(47.11) $[x]$ = *il più grande intero minore od uguale ad* x.

Se $b \in \mathbf{R}$, abbiamo $[b] \le b < [b] + 1$, e quindi

(47.12) $$\sqrt[n]{n^{[b]}} \le \sqrt[n]{n^b} \le \sqrt[n]{n^{[b]+1}}.$$

Ancora, per il teorema dei carabinieri, si ottiene la tesi (47.8).

Esaminiamo ora tre limiti relativi alle funzioni trigonometriche. I primi due sono:

(47.13) $$a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \text{sen } a_n \to 0;$$

(47.14) $$a_n \to 0 \quad \Rightarrow \quad \cos a_n \to 1.$$

Ad esempio sen (1/n) → 0, cos (1/n) → 1, perché 1/n → 0.

Dimostrazione della (47.13): dato che a_n converge a zero, per la definizione di limite esiste un indice ν per cui $|a_n|<\pi/2$ per ogni n>ν. Per tali valori di n, utilizzando la disuguaglianza (10.8), otteniamo

(47.15) $$0 \le |\text{sen } a_n| = \text{sen } |a_n| \le |a_n|.$$

Per la proposizione del paragrafo precedente $|a_n|\to 0$; per il teorema dei carabinieri, $|\text{sen } a_n| \to 0$. Infine, ancora per la proposizione del paragrafo precedente sen $a_n \to 0$.

Dimostrazione della (47.14): si perviene al risultato dalla (47.13), utilizzando la relazione $\cos x = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$. Allo scopo di stabilire il segno nella relazione precedente, indichiamo con ν l'indice tale che risulti $-\pi/2 \le a_n \le \pi/2$ per ogni n > ν (ν esiste per la definizione di limite, dato che $a_n \to 0$). Per tali valori di n risulta $\cos a_n \ge 0$ e quindi

(47.16) $$\cos a_n = \sqrt{1 - \text{sen}^2 a_n}, \qquad \forall n > \nu.$$

Avendo già provato che sen $a_n \to 0$, ne segue che $b_n = 1 - \text{sen}^2 a_n \to 1$; la tesi è infine conseguenza del fatto che $\sqrt{b_n} \to \sqrt{1} = 1$.

Il terzo limite di funzione trigonometrica che prendiamo in considerazione è:

(47.17) $$a_n \to 0,\ a_n \ne 0\ \forall n \quad \Rightarrow \quad \frac{\text{sen } a_n}{a_n} \to 1.$$

Notiamo che, dato che $a_n \to 0$, $(\text{sen } a_n)/a_n$ è una forma indeterminata.
Cominciamo col dimostrare che

(47.18) $$0<|x|<\frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1.$$

Infatti, se x è positivo, dalla (10.8) si ottiene

$$\text{sen } x < x < \text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x}$$

da cui, dividendo per sen x (che è positivo) e prendendo gli inversi, si ha

(47.19) $$\cos x < \frac{\text{sen } x}{x} < 1.$$

Se invece x è negativo, applicando a − x la (47.19) si ottiene

$$\cos x = \cos(-x) < \frac{\text{sen } (-x)}{-x} = \frac{\text{sen } x}{x} < 1;$$

dunque la (47.19) vale anche se x è negativo e la (47.18) è dimostrata.

Data che $a_n \to 0$, per la definizione di limite esiste un indice ν tale che $|a_n|<\pi/2$ per ogni n>ν. Dalla (47.18) si ottiene

$$\cos a_n < \frac{\text{sen } a_n}{a_n} < 1, \qquad \forall n > \nu.$$

Per $n \to +\infty$, $\cos a_n \to 1$. La tesi (47.17) discende quindi dal teorema dei carabinieri.

Applichiamo il risultato appena dimostrato per concludere l'argomento del paragrafo 40, cioè per provare che l'area del cerchio di raggio 1 è uguale a π. Ricordiamo che, dato un cerchio di raggio 1, per definizione π è la lunghezza della semicirconferenza, mentre l'area del cerchio è il limite, per $n \to +\infty$, delle aree dei poligoni regolari di n lati inscritti. In base alla (40.2) si ottiene

(47.20) $$\text{area del cerchio di raggio } 1 = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2}\ \text{sen}\ \frac{2\pi}{n}.$$

Dato che, per $n \to +\infty$, la successione $2\pi/n$ tende a zero, siamo nella situazione del limite notevole (47.17) e quindi

(47.21) $$\text{area del cerchio di raggio } 1 = \lim_{n\to+\infty} \pi\ \frac{\text{sen } (2\pi/n)}{2\pi/n} = \pi.$$

48. Successioni monotòne. Il numero e

Abbiamo già dato nel paragrafo 7 la definizione di funzioni (strettamente) crescenti o decrescenti. Allo stesso modo per le successioni diciamo che

(48.1) a_n *strettamente crescente:* $a_n < a_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$;

(48.2) a_n *crescente:* $a_n \leq a_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$;

(48.3) a_n *strettamente decrescente:* $a_n > a_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$;

(48.4) a_n *decrescente:* $a_n \geq a_{n+1}$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$.

Una successione a_n è *monotòna* se verifica una delle quattro condizioni sopra scritte. Una successione è *strettamente monotòna* se verifica la (48.1) oppure la (48.3).

Se $a_n = a$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, con a numero reale fissato, si dice che a_n è una successione *costante*. Le successioni costanti sono allo stesso tempo crescenti e decrescenti.

In una prima lettura le dimostrazioni degli enunciati di questo paragrafo possono essere omesse; per questo motivo le prove sono raggruppate nei paragrafi 49 e 60.

TEOREMA SULLE SUCCESSIONI MONOTÒNE. — *Ogni successione monotòna ammette limite. In particolare, ogni successione monotòna e limitata è convergente, cioè ammette limite finito.*

Ad esempio le successioni (41.2) e (41.3) sono strettamente monotòne; la (41.2) $a_n = 1/n$ è strettamente decrescente, mentre la (41.3) $a_n = (n-1)/n$ è strettamente crescente; infatti, se $a_n = 1/n$, allora

(48.5) $$a_n > a_{n+1} \iff \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \iff n+1 > n$$

e l'ultima disuguaglianza è verificata per ogni $n \in \mathbf{N}$. Invece se

(48.6) $$a_n = \frac{n-1}{n},$$

allora

$$a_n < a_{n+1} \iff \frac{n-1}{n} < \frac{n}{n+1} \iff n^2 - 1 < n^2$$

e anche questa volta l'ultima disuguaglianza è verificata per ogni $n \in \mathbf{N}$.

La successione (41.4) $a_n = (-1)^n/n$ non è monotòna; infatti i termini di posto pari sono positivi, mentre quelli di posto dispari sono negativi: i termini della successione oscillano intorno allo zero. La successione $a_n = (-1)^n/n$ è quindi un *esempio di successione convergente, pur non essendo monotòna* (osserviamo che ciò non contraddice il teorema; infatti nel teorema non si afferma che ogni successione convergente è monotòna!).

La successione non regolare (41.5) $a_n = (-1)^n$ non è monotòna; ciò è in accordo con il teorema sulle successioni monotòne, perché se la successione (41.5) fosse monotòna dovrebbe avere limite.

Il teorema sulle successioni monotòne è utile per definire il *numero di Nepero* e, come limite di una particolare successione monotòna e limitata. Introduciamo tale numero studiando un modello di crescita di una popolazione (popolazione è un termine generico; può significare una popolazione di insetti o di batteri, un insieme di cellule,...).

Un modello non lontano dalla realtà (ulteriori raffinamenti saranno esaminati nel capitolo 16) è il seguente: si suppone che, in un piccolo intervallo di tempo, l'aumento del numero degli individui sia proporzionale al tempo trascorso ed al numero stesso degli individui. Se indichiamo con $p(t)$ la popolazione (numero degli individui) al tempo t, e se poniamo per semplicità uguale a 1 la costante di proporzionalità, abbiamo per due tempi t_1, t_2 distinti

(48.7) $$p(t_2) - p(t_1) = (t_2 - t_1)\, p(t_1).$$

Nella relazione precedente $p(t_2) - p(t_1)$ è *l'incremento della popolazione*, mentre $(t_2 - t_1)$ è *l'intervallo di tempo* trascorso.

Supposta nota la popolazione $p(t_1)$ al tempo $t = t_1$ è quindi possibile, tramite la (48.7) ricavare la popolazione $p(t_2)$ al tempo $t = t_2$. Assumendo convenzionalmente $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$, dalla (48.7) è possibile determinare $p(1)$ in funzione di $p(0)$. Si ottengono però dei risultati più aderenti alle misure sperimentali applicando la legge (48.7) a intervallo di tempo di «piccola lunghezza»; per ottenere ciò si divide l'intervallo di tempo [0, 1] in n parti uguali di ampiezza 1/n, come in figura 5.3 (e poi si passa al limite per $n \to +\infty$).

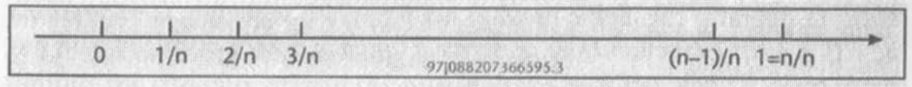


Figura 5.3

Dalla (48.7) si ottiene:

se $t_1 = 0$, $t_2 = \frac{1}{n}$ $\Rightarrow$ $p\left(\frac{1}{n}\right) - p(0) = \frac{1}{n}\, p(0)$,

se $t_1 = \frac{1}{n}$, $t_2 = \frac{2}{n}$ $\Rightarrow$ $p\left(\frac{2}{n}\right) - p\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\, p\left(\frac{1}{n}\right)$,

se $t_1 = \frac{2}{n}$, $t_2 = \frac{3}{n}$ $\Rightarrow$ $p\left(\frac{3}{n}\right) - p\left(\frac{2}{n}\right) = \frac{1}{n}\, p\left(\frac{2}{n}\right)$,

... .

e, ricavando p(1/n), p(2/n),...,

$$p\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) p(0),$$

$$p\left(\frac{2}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) p\left(\frac{1}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 p(0),$$

(48.8)

$$p\left(\frac{3}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) p\left(\frac{2}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 p(0),$$

.....

e dopo n passi

(48.9) $$p(1) = p\left(\frac{n}{n}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n p(0).$$

Al limite per $n \to +\infty$ otteniamo $p(1) = p(0) \cdot e$, dove si è posto

(48.10) $$e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

A causa della sua importanza, riscriviamo la relazione di limite (48.10):

(48.11) $$e = \lim_{n \to +\infty} a_n \quad \textit{con} \quad a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

La (48.11) è la definizione del *numero di Nepero* e. Tale definizione è giustificata dal fatto che, come provato nel paragrafo seguente, *la successione* $a_n = (1 + 1/n)^n$ *è (strettamente) crescente e limitata*; quindi esiste, ed è un numero reale, il limite per $n \to +\infty$ di a_n.

Un'espressione decimale approssimata del numero e, è la seguente:

(48.12) $$e = 2.71828182845904523536...;$$

qui riportiamo alcuni valori numerici approssimati di a_n che, essendo a_n una successione strettamente crescente, sono approssimazioni per difetto del numero e:

n	1	10	50	100	500	1000	10^5
$(1 + 1/n)^n$	2	2.5937	2.6915	2.7048	2.7155	2.7169	2.7182

Nelle applicazioni sono utili anche i limiti seguenti, generalizzazioni della definizione (48.10), (48.11):

(48.13) $$a_n \to +\infty \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e;$$

(48.14) $$a_n \to -\infty \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{a_n}\right)^{a_n} \to e.$$

La successione in (48.11), utilizzata per definire il numero e, combina fra loro due tendenze opposte: la tendenza della base ad un limite uguale ad 1, e la tendenza dell'esponente ad un limite infinito. Il risultato è appunto e, un numero intermedio tra 1 e $+\infty$. La forma 1^∞ è una nuova forma indeterminata, come pure sono indeterminate le forme ∞^0, 0^0. Quindi all'elenco del paragrafo 44 vanno aggiunte le *forme indeterminate:*

(48.15) $$1^{(+\infty)}, \; 1^{(-\infty)}, \; (+\infty)^0, \; 0^0 .$$

49. Ancora sul numero e

Nel paragrafo precedente è stato definito il numero e come limite, per $n \to +\infty$, della successione

(49.1) $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

Come già detto, la definizione è giustificata (in base al teorema sulle successioni monotòne) dalle seguenti proprietà:

(49.2) *la successione* a_n *è monotòna crescente;*

(49.3) *la successione* a_n *è limitata.*

Dimostrazione della (49.2): la tesi è

(49.4) $$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq a_{n-1} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1}, \; \forall n \geq 2.$$

Eseguendo la somma delle frazioni, si può scrivere in modo equivalente:

(49.5) $$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right);$$

cioè ancora

(49.6) $$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}.$$

È conveniente isolare come addendo 1, nel modo seguente:

(49.7) $$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}.$$

La (49.7) è equivalente alla tesi da provare.

Ciò premesso, ricordiamo la disuguaglianza di Bernoulli (12.5), che vale per $n \in \mathbf{N}$ e per $x \geq -1$:

(49.8) $$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

La conclusione (49.7) si ottiene ponendo nella disuguaglianza di Bernoulli $x = -1/n^2$.

Osservando che la disuguaglianza di Bernoulli (49.8) vale con il segno stretto di maggiore se $x \neq 0$ e $n \neq 1$ (il lettore provi tale affermazione per induzione, con $n = 2, 3, \ldots$), la dimostrazione sopra proposta mostra più precisamente che $a_n > a_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$; cioè la successione a_n risulta strettamente crescente.

Dimostrazione della (49.3): introduciamo la successione

(49.9) $$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

(49.10) $$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n.$$

Proveremo che b_n è una successione strettamente decrescente; dato che a_n è (strettamente) crescente, ne segue che

(49.11) $$a_1 \leq a_n < b_n < b_1,$$

e quindi, essendo $a_1 = 2$, $b_1 = 4$,

(49.12) $$2 \leq a_n < 4. \qquad \forall n \in \mathbf{N};$$

perciò la successione a_n risulta limitata, come si voleva dimostrare. Rimane da verificare che

b_n è una successione strettamente decrescente; a tale scopo procediamo come nella dimostrazione della (49.2): la tesi è

(49.13) $$b_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad \forall n \geq 2,$$

cioè, equivalentemente

(49.14) $$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right); \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{n+1}{n}.$$

Come nella dimostrazione precedente isoliamo 1 come addendo:

(49.15) $$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}.$$

La disuguaglianza di Bernoulli (12.5), con $x = 1/(n^2-1)$, dà la conclusione

(49.16) $$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}, \qquad \forall n \geq 2$$

(nell'ultimo passaggio si è utilizzata la disuguaglianza $n/(n^2-1) > 1/n$, che è vera perché equivale a $n^2 > n^2-1$).

Un'osservazione a proposito della stima (49.12): desiderando una stima più precisa si può utilizzare la relazione

(49.17) $$a_n < b_m, \qquad \forall n, m \in \mathbf{N},$$

che vale perché, posto $k = \max\{n, m\}$, risulta

(49.18) $$a_n \leq a_k < b_k \leq b_m.$$

Per $m = 1$ si ottiene la limitazione $a_n < b_1 = 4$; aumentando il valore numerico di m si ottengono stime più precise; ad esempio, per $m = 5$ si ha

(49.19) $$a_n < b_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 = 2.98\ldots, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

In particolare si può affermare che $2 \leq a_n < 3$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

(49.5) $$\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \geq \left(\frac{n}{n-1}\right)^n \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right);$$

cioè ancora

(49.6) $$\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^n \geq \frac{n-1}{n}.$$

È conveniente isolare come addendo 1, nel modo seguente:

(49.7) $$\left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \geq 1-\frac{1}{n}.$$

La (49.7) è equivalente alla tesi da provare.

Ciò premesso, ricordiamo la disuguaglianza di Bernoulli (12.5), che vale per $n \in \mathbf{N}$ e per $x \geq -1$:

(49.8) $$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

La conclusione (49.7) si ottiene ponendo nella disuguaglianza di Bernoulli $x = -1/n^2$.

Osservando che la disuguaglianza di Bernoulli (49.8) vale con il segno stretto di maggiore se $x \neq 0$ e $n \neq 1$ (il lettore provi tale affermazione per induzione, con $n = 2, 3, \ldots$), la dimostrazione sopra proposta mostra più precisamente che $a_n > a_{n-1}$ per ogni $n \geq 2$; cioè la successione a_n risulta strettamente crescente.

Dimostrazione della (49.3): introduciamo la successione

(49.9) $$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Per ogni $n \in \mathbf{N}$ si ha

(49.10) $$b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) = a_n \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) > a_n.$$

Proveremo che b_n è una successione strettamente decrescente; dato che a_n è (strettamente) crescente, ne segue che

(49.11) $$a_1 \leq a_n < b_n < b_1,$$

e quindi, essendo $a_1 = 2$, $b_1 = 4$,

(49.12) $$2 \leq a_n < 4, \qquad \forall n \in \mathbf{N};$$

perciò la successione a_n risulta limitata, come si voleva dimostrare. Rimane da verificare che

b_n è una successione strettamente decrescente; a tale scopo procediamo come nella dimostrazione della (49.2): la tesi è

(49.13) $$b_{n-1} = \left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n > b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad \forall n \geq 2,$$

cioè, equivalentemente

(49.14) $$\left(\frac{n}{n-1}\right)^n > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right); \left(\frac{n^2}{n^2-1}\right)^n > \frac{n+1}{n}.$$

Come nella dimostrazione precedente isoliamo 1 come addendo:

(49.15) $$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n > 1+\frac{1}{n}.$$

La disuguaglianza di Bernoulli (12.5), con $x = 1/(n^2-1)$, dà la conclusione

(49.16) $$\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n \geq 1+\frac{n}{n^2-1} > 1+\frac{1}{n}, \qquad \forall n \geq 2$$

(nell'ultimo passaggio si è utilizzata la disuguaglianza $n/(n^2-1) > 1/n$, che è vera perché equivale a $n^2 > n^2-1$).

Un'osservazione a proposito della stima (49.12): desiderando una stima più precisa si può utilizzare la relazione

(49.17) $$a_n < b_m, \qquad \forall n, m \in \mathbf{N},$$

che vale perché, posto $k = \max\{n, m\}$, risulta

(49.18) $$a_n \leq a_k < b_k \leq b_m.$$

Per $m = 1$ si ottiene la limitazione $a_n < b_1 = 4$; aumentando il valore numerico di m si ottengono stime più precise; ad esempio, per $m = 5$ si ha

(49.19) $$a_n < b_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 = 2.98\ldots, \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

In particolare si può affermare che $2 \leq a_n < 3$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

50. Utilizzo del numero e in matematica finanziaria

In un'operazione finanziaria indichiamo con P il capitale iniziale e con M il capitale finale alla scadenza di un anno. Il rapporto

$$i = \frac{M - P}{P} \tag{50.1}$$

prende il nome di tasso annuo di interesse prodotto da una lira.

Dopo n anni, l'interesse totale sarà

$$I = nPi \tag{50.2}$$

ed il capitale finale (o montante) sarà

$$M = P + n\,Pi = P\,(1 + ni). \tag{50.3}$$

In tal caso si parla di capitalizzazione semplice.

Tuttavia vi è un'altra forma di operazione, detta capitalizzazione composta, nella quale gli interessi vengono aggiunti periodicamente al capitale per essere reinvestiti e produrre, a loro volta, interessi.

Ad esempio, se una somma di un milione di euro viene investita al tasso i del 10% e capitalizzata una volta l'anno, allora:

— essa produce 100.000 euro a fine del primo anno e tale cifra viene aggiunta al capitale;

— il capitale, all'inizio del secondo anno, è di 1.100.000 euro e produce, a fine del secondo anno, 110.000 euro e tale cifra viene aggiunta al capitale;

— il capitale, all'inizio del terzo anno, diviene di 1.210.000 euro e produce, a fine del terzo anno 121.000 euro e così via.

Si noti la differenza con il regime di capitalizzazione semplice al 10% di P = 1 milione di euro per due anni. Applicando la (50.3), si ha, con n = 2:

$$M = P\left(1 + 2 \cdot \frac{10}{100}\right) = P \cdot \frac{12}{10} = 1.200.000 \tag{50.4}$$

invece di 1.210.000.

Volendo esprimere in formule la capitalizzazione composta, consideriamo dapprima il caso in cui la capitalizzazione si verifica una volta l'anno. Ci chiediamo a quale valore ammonta un capitale P impiegato ad interesse composto durante n anni, al tasso annuo pari a i per euro.

Alla fine del primo anno, il capitale P produce P · i euro di interesse, divenendo

$$P + P \cdot i = P(1 + i); \tag{50.5}$$

durante il primo anno, il capitale impiegato è P(1 + i) e a fine anno diviene

$$P(1 + i) + P(1 + i) \cdot i = P(1 + i)(1 + i) = P(1 + i)^2\,; \tag{50.6}$$

alla fine dell'n-simo anno, il capitale ammonta a euro

$$P(1 + i)^n\,. \tag{50.7}$$

Consideriamo ora il caso in cui la frequenza delle operazioni di capitalizzazione viene aumentata.

Ad esempio, supponiamo di investire P = 1 milione di euro, al tasso annuo del 10%. Se la capitalizzazione fosse annuale si avrebbe dopo n anni un montante dato dalla (50.7) pari a

$$1.000.000\left(1 + \frac{1}{10}\right)^n. \tag{50.8}$$

Se la capitalizzazione è, invece, semestrale, cioè se le operazioni si effettuano due volte l'anno, con tasso annuo del 10%, si dovrà aggiungere un 5% ogni semestre. In altre parole, alla fine di un semestre, il capitale avrà prodotto 50.000 euro che, essendo a loro volta reinvestiti, produrranno interesse nel corso dei successivi semestri.

Pertanto, il capitale ammonta:

— alla fine del primo semestre, a

$$P\left(1 + \frac{5}{100}\right) = P\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{100}\right)^{2 \times \frac{1}{2}}; \tag{50.9}$$

— alla fine del primo anno, a

$$P\left(1 + \frac{5}{100}\right)^2 = P\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{100}\right)^{2 \times 1}; \tag{50.10}$$

— alla fine del terzo semestre, a

$$P\left(1 + \frac{5}{100}\right)^3 = P\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{100}\right)^{2 \times \frac{3}{2}}; \tag{50.11}$$

— alla fine del secondo anno a

$$P\left(1 + \frac{5}{100}\right)^4 = P\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{100}\right)^{2 \times 2}; \tag{50.12}$$

e così, via; alla fine dell'm-simo anno il capitale ammonta a

$$P\left(1 + \frac{5}{100}\right)^m = P\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{100}\right)^{2m} = P\left(1 + \frac{i}{2}\right)^{2m}, \tag{50.13}$$

essendo i = 10/100 = 10%.

In altre parole, se il numero delle capitalizzazioni effettuate ogni anno è n, dopo m periodi si ha il montante

(50.14) $$M = P\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n \cdot m}.$$

Si può dimostrare che, se si aumenta la frequenza delle operazioni di capitalizzazione, fino ad avere una «capitalizzazione continua», la crescita del capitale rivela un andamento di tipo esponenziale con base e. Infatti, la formula (50.14) può esser riscritta nel modo seguente

(50.15) $$M = P\left[\left(1 + \frac{i}{n}\right)^{n/i}\right]^{im}$$

e, posto $\frac{n}{i} = k$, si ha

(50.16) $$M = P\left[\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k}\right]^{im}.$$

Passando al limite per $k \to \infty$, cioè facendo tendere all'infinito la frequenza n delle capitalizzazioni annue, ricordando che $e = \lim_{k \to +\infty} (1 + 1/k)^k$, si ha la formula

(50.17) $$M = P\, e^{im},$$

che esprime il fatto che gli interessi capitalizzano istante per istante.

Naturalmente, nella realtà non si può avere la capitalizzazione continua, ma la formula (50.17) fornisce tuttavia un'approssimazione assai utile, allorché la frequenza della capitalizzazione è abbastanza alta.

Dalla (50.17) segue in particolare che un euro, impiegato per m = 1 anni, al tasso i, in regime di capitalizzazione continua, produce un montante pari a $M = e^{i}$.

CAPITOLO 6

LIMITI DI FUNZIONI. FUNZIONI CONTINUE

51. Premessa

Consideriamo la funzione

(51.1) $$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

che è definita per ogni $x \in \mathbf{R} - \{0\}$. Allo scopo di disegnarne il grafico, osserviamo preliminarmente che $-1 \le \operatorname{sen} x \le 1$ per ogni $x \in \mathbf{R}$; dividendo tutti i membri per x otteniamo

(51.2) $$-\frac{1}{x} \le f(x) \le \frac{1}{x}, \qquad \forall\, x > 0.$$

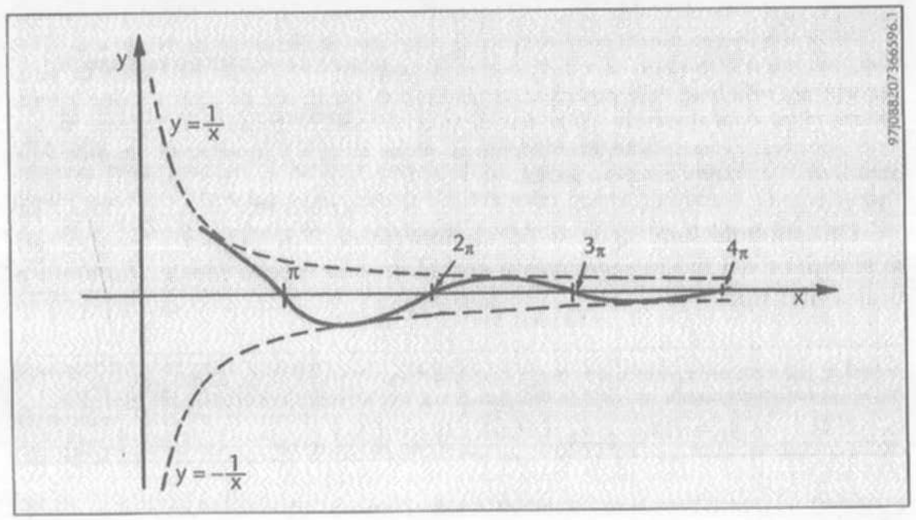


Figura 6.1

Se $x < 0$ si ottiene la situazione analoga $1/x \le f(x) \le -1/x$; comunque, essendo $f(x)$ una funzione pari (cioè $f(-x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbf{R} - \{0\}$), è sufficiente studiarne le proprietà per $x > 0$, riportando poi il disegno anche per $x < 0$, per simmetria rispetto all'asse y.

Le funzioni $y = -1/x$ e $y = 1/x$, che appaiono nella stima (51.2), hanno per grafico dei rami di iperbole, come in figura 6.1.

Tenendo conto del segno di $f(x)$, che per $x > 0$ è lo stesso segno di sen x, si ottiene per $f(x)$ un grafico come quello disegnato con tratto continuo in figura 6.1. Il disegno è significativo per x sufficientemente grande; è invece indeterminato per x "vicino" a zero.

Ricordiamo che la funzione $f(x)$ in (51.1) non è definita per $x_0 = 0$, cioè non è calcolabile $f(0)$. Invece è possibile calcolare valori di $f(x)$ per x "vicino" a zero; ad esempio vale la tabella

x	$\pi/2$	$\pi/3$	$\pi/4$	$\pi/6$
f(x)	$\frac{2}{\pi} = 0.63..$	$\frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = 0.82..$	$\frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0.90..$	$\frac{3}{\pi} = 0.95..$

e, con l'uso di una calcolatrice, si ottiene (ad esempio) l'ulteriore tavola di valori

x	0.1	0.01	0.001	0.0001
f(x)	0.9983341..	0.9999833..	0.9999998..	0.9999999..

Nella tabella precedente sono stati scelti valori di x sufficientemente vicini a $x_0 = 0$? Uno, due, tre o otto valori di x non sono — in assoluto — né vicini né lontani da zero. Certamente, sulla base delle precedenti tabelle si può intuire che $f(x)$, per x vicino a zero, assuma valori vicini al numero 1 ($f(x)$ assume valori del tipo $1 - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ "piccolo"). Non è però possibile escludere che, per x ancora più vicino a $x_0 = 0$ rispetto agli otto valori già considerati, $f(x)$ cambi comportamento.

Una formulazione rigorosa del comportamento di $f(x)$ per x "vicino" ad x_0 si ottiene nel modo seguente: si considera una tabella ideale, illimitata a destra, del tipo

x	x_1	x_2	x_3	...	...
f(x)	$y_1 = f(x_1)$	$y_2 = f(x_2)$	$y_3 = f(x_3)$	...	...

Cioè, si considera una generica successione x_n che converge ad x_0 (x_n è "vicino" ad x_0 se n è "grande") e la corrispondente successione y_n, costituita dai valori assunti dalla funzione $f(x)$ ($y_n = f(x_n)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$). Se y_n converge ad un numero ℓ (e se il numero ℓ non cambia qualunque sia la successione x_n che converge ad x_0) allora si dice che la funzione $f(x)$ ammette limite, uguale ad ℓ, per $x \to x_0$.

Torniamo all'esempio della funzione $f(x)$ in (51.1); si è già verificato (si veda il limite (47.17)) che

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x_n}{x_n} = 1, \tag{51.3}$$

qualunque sia la successione x_n che converge a $x_0 = 0$ (con $x_n \neq 0$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$). In accordo con quanto detto sopra, in termini di limiti di funzioni la (51.3) equivale a dire che $f(x)$ ha limite $\ell = 1$ per $x \to 0$; in simboli

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1. \tag{51.4}$$

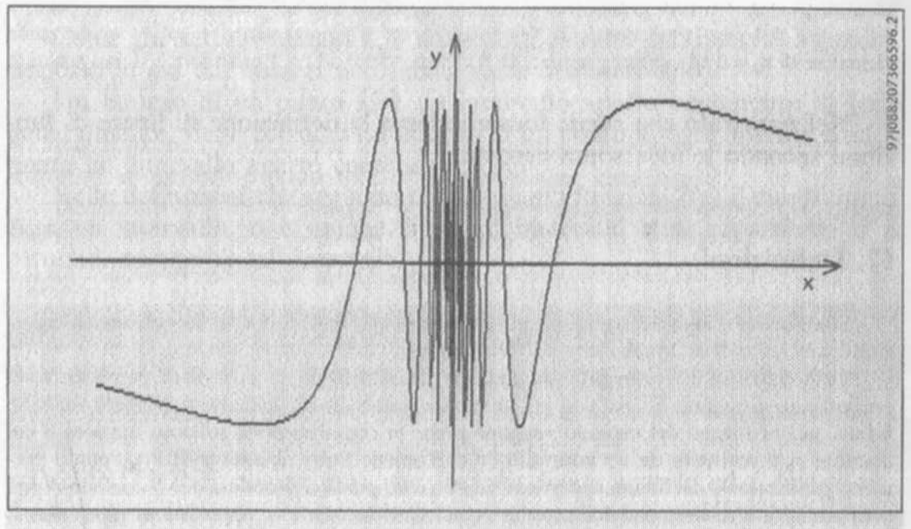


Figura 6.2 — y = sen (1/x)

Viceversa, anche se la struttura analitica può sembrare a prima vista simile, il limite:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad \text{non esiste} \tag{51.5}$$

(si veda la (53.5)). In figura 6.2 è riportato il grafico, eseguito al computer, della funzione sen(1/x). Si noti in particolare il comportamento caotico della funzione nelle vicinanze di $x_0 = 0$.

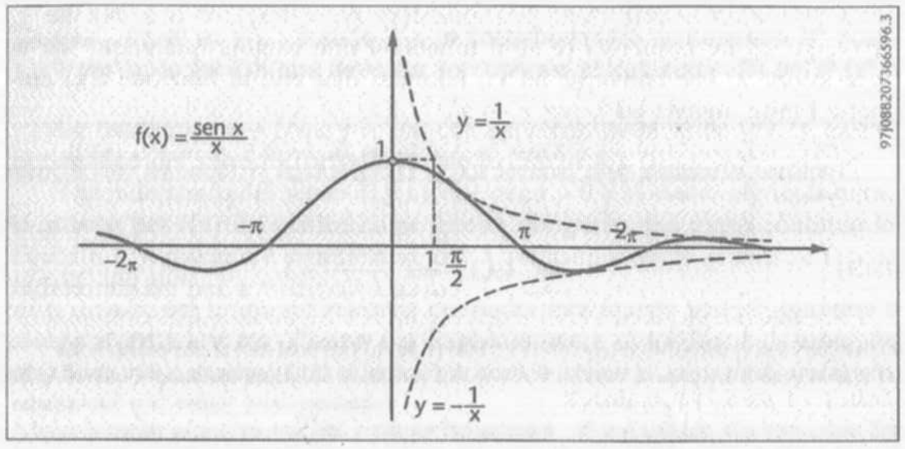


Figura 6.3

Invece in figura 6.3 è riportato il grafico della funzione (sen x)/x; la funzione non è definita per $x_0 = 0$ (nel grafico ciò è stato evidenziato con un "tondino" vuoto); però, a differenza del caso precedente, la funzione ha un comportamento regolare anche nelle vicinanze di $x_0 = 0$ ed i valori y assunti da f(x) sono vicini ad $\ell = 1$ quando x è vicino a $x_0 = 0$.

Nel paragrafo che segue formalizziamo la definizione di limite di funzione secondo le idee sopra esposte.

52. Definizioni

Si definisce il limite di una funzione f(x), per x che tende ad $x_0 \in \mathbf{R}$, nel caso in cui x_0 risulti un punto di accumulazione per il dominio di f(x).

La definizione e le proprietà dei punti di accumulazione di un insieme numerico sono proposte nel paragrafo 57. Ad una prima lettura l'esame di tali concetti può essere rinviato. Infatti, nel prosieguo del capitolo vengono prese in considerazione soltanto funzioni il cui dominio A è costituito da un intervallo (o dall'unione finita di intervalli) e x_0, punto prescelto per il calcolo del limite, appartiene ad A o è un punto di frontiera per il dominio A (ad esempio x_0 è un estremo dell'intervallo A nel caso in cui A è, appunto, un intervallo di numeri reali); in entrambi i casi x_0 risulta punto di accumulazione per l'insieme A.

Se a, b sono due numeri reali (con a < b), per indicare un intervallo di estremi a, b si usano le notazioni:

(52.1) $$[a, b] = \{x \in \mathbf{R}: a \le x \le b\};$$

(52.2) $$(a, b) = \{x \in \mathbf{R}: a < x < b\};$$

(52.3) $$[a, b) = \{x \in \mathbf{R}: a \le x < b\};$$

(52.4) $$(a, b] = \{x \in \mathbf{R}: a < x \le b\}.$$

L'intervallo [a, b] si dice chiuso, mentre (a, b) è detto aperto. Inoltre [a, b) è detto chiuso a sinistra e aperto a destra (analogamente per (a, b]); gli intervalli sopra scritti si dicono limitati. Si considerano anche gli intervalli illimitati:

(52.5) $$[a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: x \ge a\};$$

(52.6) $$(a, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: x > a\};$$

(52.7) $$(-\infty, b] = \{x \in \mathbf{R}: x \le b\};$$

(52.8) $$(-\infty, b) = \{x \in \mathbf{R}: x < b\};$$

(52.9) $$(-\infty, +\infty) = \mathbf{R}.$$

Come già detto, i numeri a, b sono detti estremi dell'intervallo (anche nel caso in cui tali numeri non fanno parte dell'intervallo).

Un intorno di un punto x_0 è un intervallo aperto contenente x_0 (più generalmente, viene considerato intorno di un punto x_0 ogni insieme contenente un intervallo aperto contenente x_0).

Nelle definizioni che seguono consideriamo funzioni f(x) il cui dominio A è un intervallo, o è unione finita di intervalli, e x_0 appartiene, o è estremo, ad uno di tali intervalli.

Ad esempio, se f(x) è definita nell'insieme $A = \mathbf{R} - \{0\}$, allora risulta $A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; in tal caso x_0, punto prescelto per il calcolo del limite, può appartenere ad uno dei due intervalli $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ oppure può essere uguale all'estremo 0. In definitiva, in questo esempio, x_0 può essere un qualunque numero reale.

DEFINIZIONE. — *Si dice che* f(x) *ha limite uguale ad* ℓ *(tende o converge ad* ℓ*) per x che tende ad* x_0 *se, qualunque sia la successione* $x_n \to x_0$, con $x_n \in A$ e $x_n \ne x_0$ *per ogni* n, *risulta* $f(x_n) \to \ell$.

Secondo questa definizione la relazione (47.17), come già detto nel paragrafo precedente, diventa:

(52.10) $$\lim_{x \to 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1.$$

Così pure le relazioni (47.13), (47.14) diventano:

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0; \qquad \lim_{x\to 0} \cos x = 1. \tag{52.11}$$

Possiamo formulare la definizione di limite direttamente per mezzo di disuguaglianze, come già fatto per le successioni, usando i simboli ε, ν. I simboli usati classicamente per i limiti di funzioni sono ε, δ (delta) nel modo seguente:

> TEOREMA. — Si ha $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ *se e soltanto se, qualunque sia* $\varepsilon > 0$, *esiste un numero* $\delta > 0$ *in modo che* $\ell - \varepsilon < f(x) < \ell + \varepsilon$, *per ogni* $x \in A - \{x_0\}$, *tale che* $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$.

Il teorema, che può essere enunciato in simboli

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \forall\varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0\colon\ |f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad \forall x \in A\colon 0 \neq |x - x_0| < \delta, \tag{52.12}$$

è dimostrato nel paragrafo 58 che segue.

Valgono analoghe definizioni per i limiti infiniti. Così ad esempio:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall\, x_n \to x_0,\ x_n \in A-\{x_0\}\ \forall\, n\in N \Rightarrow f(x_n) \to +\infty; \tag{52.13}$$

$$\iff \forall M > 0, \exists\delta > 0\colon f(x) > M, \quad \forall x \in A\colon 0 \neq |x - x_0| < \delta.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall\, x_n \to +\infty,\ x_n \in A,\ \forall\, n \in N \Rightarrow f(x_n) \to \ell; \tag{52.14}$$

$$\iff \forall\varepsilon > 0, \exists\, k\colon |f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in A\colon x > k.$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, x_n \to +\infty,\ x_n \in A\ \forall n \in N \Rightarrow f(x_n) \to +\infty; \tag{52.15}$$

$$\iff \forall M > 0, \exists k\colon f(x) > M, \quad \forall x \in A\colon x > k.$$

Il lettore, tenendo conto della definizione (41.21) relativa alle successioni che tendono a $-\infty$, formuli i casi corrispondenti con $-\infty$ al posto di $+\infty$.

È utile considerare anche i cosiddetti limite destro ($x \to x_0^+$) e limite sinistro ($x \to x_0^-$), quando ci si avvicina al punto x_0 per valori di $x \in A$ rispettivamente solo maggiori di x_0, o solo minori.

Consideriamo per brevità solo i casi di limite ℓ finito (il lettore formuli i casi con limite infinito):

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \ell \iff \forall\, x_n \to x_0,\ x_n \in A \text{ e } x_n > x_0\ \forall\, n \in N \Rightarrow f(x_n) \to \ell; \tag{52.16}$$

$$\iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\colon |f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad \forall\, x \in A\colon x_0 < x < x_0 + \delta.$$

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \ell \iff \forall\, x_n \to x_0,\ x_n \in A \text{ e } x_n < x_0,\ \forall n \in N \Rightarrow f(x_n) \to \ell; \tag{52.17}$$

$$\iff \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0\colon |f(x) - \ell| < \varepsilon, \quad \forall x \in A\colon x_0 - \delta < x < x_0.$$

Ad esempio, è facile verificare che

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1; \qquad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1; \tag{52.18}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \quad \text{non esiste.} \tag{52.19}$$

53. Esempi e proprietà dei limiti di funzioni

Esempi di limiti molto importanti, e che quindi occorre sapere bene, sono i limiti della funzione esponenziale che derivano dal limite di successione (47.1):

$$\lim_{x\to +\infty} a^x = \begin{cases} +\infty & \text{se} \quad a > 1 \\ 0 & \text{se} \quad 0 < a < 1. \end{cases} \tag{53.1}$$

In particolare per la base e, dato che $e^{-x} = 1/e^x$, si ha:

(53.2) $$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty; \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Il lettore controlli graficamente i limiti per $x \to \pm\infty$ della funzione esponenziale dai grafici riportati nel paragrafo 9; controlli graficamente anche i seguenti importanti limiti della funzione log x (in base e):

(53.3) $$\lim_{x\to+\infty} \log x = +\infty; \qquad \lim_{x\to0^+} \log x = -\infty.$$

Verifichiamo che invece i limiti

(53.4) $$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen} x, \qquad \lim_{x\to+\infty} \cos x, \qquad \text{non esistono.}$$

Limitiamoci al primo dei due. Se esistesse il limite $= \ell$, dovremmo avere che sen x_n tende sempre allo stesso valore ℓ qualunque sia la successione $x_n \to +\infty$.

Mostriamo che esistono due successioni, x_n x'_n, divergenti a $+\infty$, con la proprietà che sen x_n e sen x'_n tendono a limiti diversi. Infatti, ponendo $x_n = 2\pi n$, $x'_n = 2\pi n + \pi/2$, risulta sen $x_n = 0 \to 0$, mentre sen $x'_n = 1 \to 1$.

Analogamente

(53.5) $$\lim_{x\to0} \operatorname{sen} \frac{1}{x} \qquad \text{non esiste.}$$

La successione $x_n = 1/(n\pi)$ converge a zero per $n \to +\infty$; in corrispondenza la funzione $f(x) = \operatorname{sen}(1/x)$ assume i valori

(53.6) $$f(x_n) = \operatorname{sen} \frac{1}{x_n} = \operatorname{sen}(n\pi) = 0.$$

Perciò $f(x_n)$ è la successione costante, uguale a zero, e converge a zero.

Analogamente, posto $x'_n = 1/(\pi/2 + 2n\pi)$, risulta

(53.7) $$f(x'_n) = \operatorname{sen} \frac{1}{x'_n} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1;$$

quindi $x'_n \to 0$, ma $f(x'_n) \to 1$ (in contrasto con il fatto che $f(x_n) \to 0$). Ne segue che f(x) non ammette limite per $x \to 0$ (si veda il grafico di f(x) in figura 6.2).

Altri limiti notevoli, conseguenza della definizione di limite di funzione e dei limiti di successione (48.13), (48.14), sono

(53.8) $$\lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e; \qquad \lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Dato che i limiti di funzioni sono definiti a partire dai limiti di successioni, anche per essi valgono le proprietà già dimostrate per i limiti di successioni. Dal paragrafo 43 deduciamo le:

OPERAZIONI CON I LIMITI DI FUNZIONI. — *Il limite della somma, differenza, prodotto, quoziente di due funzioni è rispettivamente uguale alla somma, differenza, prodotto, quoziente (se il denominatore è diverso da zero) dei due limiti, purché non sia una delle forme indeterminate* $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, ∞/∞, $0/0$.

Ad esempio dimostriamo che il limite di un prodotto è uguale al prodotto dei limiti. Supponiamo che per $x \to x_0$ risulti $f(x) \to \ell_1$, $g(x) \to \ell_2$. Ciò significa che qualunque sia la successione x_n che tende ad x_0, con $x_n \in A$ e $x_n \neq x_0$ $\forall\, n \in \mathbf{N}$, risulta $f(x_n) \to \ell_1$, $g(x_n) \to \ell_2$. Per la (43.2), che esprime il modo di calcolare il limite del prodotto di due successioni, risulta $f(x_n) \cdot g(x_n) \to \ell_1 \cdot \ell_2$ e ciò completa la prova.

Come applicazione calcoliamo il limite, per $x \to 0$, del rapporto $(1 - \cos x)/x^2$. È una forma indeterminata 0/0. Moltiplicando numeratore e denominatore per $(1 + \cos x)$ otteniamo

(53.9) $$\lim_{x\to0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2\,(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2\,(1 + \cos x)} = \lim_{x\to0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 \cdot$$

$$\cdot \lim_{x\to0} \frac{1}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}.$$

Il lettore verifichi che, con lo stesso metodo, si ottiene

(53.10) $$\lim_{x\to0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0.$$

Una ulteriore proprietà utile per le applicazioni è la seguente.

LIMITI DI FUNZIONI COMPOSTE — Siano $g: X \to Y$ e $f: Y \to \mathbf{R}$ due funzioni tali che

(53.11) $$\lim_{x \to x_0} g(x) = y_0 , \qquad \lim_{y \to y_0} f(y) = \ell,$$

ed esista $\delta > 0$ tale che risulti $g(x) \neq y_0$ per ogni $x \neq x_0$ dell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Allora è anche

(53.12) $$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = \ell.$$

Dimostrazione: consideriamo una generica successione x_n convergente ad x_0, con $x_n \in X$ e $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$. Per la definizione di limite di successione esiste ν tale che $|x_n - x_0| < \delta$, per ogni $n > \nu$. Perciò, per ogni $n > \nu$ risulta anche $g(x_n) \neq y_0$. Dato che $y_n = g(x_n)$ è una successione contenuta in Y che converge a y_0 ed è tale che $y_n \neq y_0$ per $n > \nu$, allora $f(y_n) \to \ell$. Cioè $f(g(x_n)) \to \ell$, come si voleva dimostrare.

54. Funzioni continue

Come nel paragrafo precedente, consideriamo funzioni f(x) definite in un dominio A costituito da un intervallo, o dall'unione finita di intervalli, con x_0 punto di A o punto estremo ad uno degli intervalli costituenti A.

Abbiamo introdotto i limiti di funzioni per descrivere il comportamento di funzioni nelle vicinanze di loro punti singolari. Naturalmene possiamo calcolare il limite, per $x \to x_0$, anche se la funzione non presenta alcuna singolarità in x_0. Ad esempio abbiamo già calcolato in (52.11) i limiti

(54.1) $$\lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x = 0 = \operatorname{sen} 0; \qquad \lim_{x \to 0} \cos x = 1 = \cos 0;$$

il valore limite, per $x \to 0$, è uguale al valore che si ottiene calcolando la funzione per $x = 0$. Si dice che le funzioni sen x, cos x sono continue per $x = 0$ (ed in realtà sono continue per ogni $x_0 \in \mathbf{R}$) in accordo con la:

DEFINIZIONE. — *Una funzione f(x) è continua in un punto* x_0 *se*

(54.2) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) ;$$

una funzione è continua in un intervallo [a, b] *se è continua in ogni punto* $x_0 \in [a, b]$ *(se* $x_0 = a$ *si considera in (54.2) il solo limite destro* $x \to a^+$, *mentre se* $x_0 = b$ *si considera il limite sinistro* $x \to b^-$*).*

continua in tutti i punti

Dato che il limite di somma, differenza, prodotto è uguale rispettivamente alla somma, differenza, prodotto dei limiti, risulta che la somma, la differenza, il prodotto di funzioni continue è una funzione continua. Anche il quoziente di funzioni continue è una funzione continua, ma come al solito occorre fare attenzione ai punti dove il denominatore si annulla.

Utilizzando la proprietà relativa ai limiti di funzioni composte (si veda il paragrafo precedente) si verifica che la funzione composta mediante funzioni continue è continua.

L'importanza delle funzioni continue è anche nel fatto che molte funzioni elementari sono continue nel loro insieme di definizione: potenze $y = x^b$, esponenziali $y = a^x$, logaritmi $y = \log_a x$, funzioni trigonometriche y = sen x, y = cos x, y = tg x, valore assoluto $y = |x|$.

La continuità della funzione f(x) = sen x nel punto $x_0 \in \mathbf{R}$ si esprime con la relazione di limite

(54.3) $$\lim_{x \to x_0} \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x_0 ,$$

o, equivalentemente, con la relazione di limite

(54.4) $$\lim_{h \to 0} \operatorname{sen} (x_0 + h) = \operatorname{sen} x_0 ,$$

che è conseguenza della formula di addizione per il seno e dei limiti in (54.1); infatti:

(54.5) $$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \operatorname{sen}(x_0 + h) &= \lim_{h \to 0} [\operatorname{sen} x_0 \cos h + \cos x_0 \operatorname{sen} h] = \\ &= \operatorname{sen} x_0 \cdot \lim_{h \to 0} \cos h + \cos x_0 \cdot \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} h = \operatorname{sen} x_0 . \end{aligned}$$

?
0

Il lettore provi in modo analogo che, qualunque sia $x_0 \in \mathbf{R}$, cos x converge a $\cos x_0$ per $x \to x_0$. La continuità della funzione f(x) = tg x = sen x/cos x, per $x \neq \pi/2 + k\pi$ ($k \in \mathbf{Z}$), discende dalla continuità delle funzioni sen x, cos x e dalla formula per il limite del quoziente.

La continuità della funzione $f(x) = |x|$ su $\mathbf{R}$ segue dalla disuguaglianza:

(54.6) $$||x| - |x_0|| \leq |x - x_0|, \qquad \forall\, x, x_0 \in \mathbf{R};$$

basta infatti porre $\delta = \varepsilon$ nella relazione di limite (52.12): se $|x - x_0| < \varepsilon$ allora anche $|f(x) - f(x_0)| = ||x| - |x_0|| < \varepsilon$.

Mostriamo con due esempi l'importanza del concetto di continuità per eseguire calcoli di limiti.

Usiamo la continuità della funzione potenza x^b per calcolare, a partire dalla (53.8), il seguente limite notevole (poniamo $y = (bx)^{-1}$ e consideriamo il caso $b > 0$; se invece $b < 0$ occorre cambiare il segno $\pm$ con il segno $\mp$; infine se $b = 0$ il risultato è ovvio):

$$\lim_{x\to 0^{\pm}} (1 + bx)^{1/x} = \lim_{y\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{by} = \left[\lim_{y\to\pm\infty}\left(1 + \frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{b} = e^b . \tag{54.7}$$

Utilizziamo ora la continuità della funzione $\log x$ per $x = 1$, per ottenere, a partire dalla (47.8), il limite notevole:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n} = \lim_{n\to+\infty} \log \sqrt[n]{n} = \log 1 = 0. \tag{54.8}$$

Per comprendere la prima uguaglianza, si riveda la proprietà (9.16) dei logaritmi. Analogamente al limite precedente, dato che $\log n = (1/b) \log n^b$, si ottiene

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\log n}{n^b} = 0, \qquad \forall\, b > 0. \tag{54.9}$$

55. Discontinuità

La funzione

$$f(x) = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & \text{se} \quad x > 0 \\ -1 & \text{se} \quad x < 0 \end{cases}, \tag{55.1}$$

è continua per $x \neq 0$, ma non è continua se $x = 0$. Il grafico di questa funzione presenta per $x = 0$ un salto, appunto una discontinuità (figura 6.4).

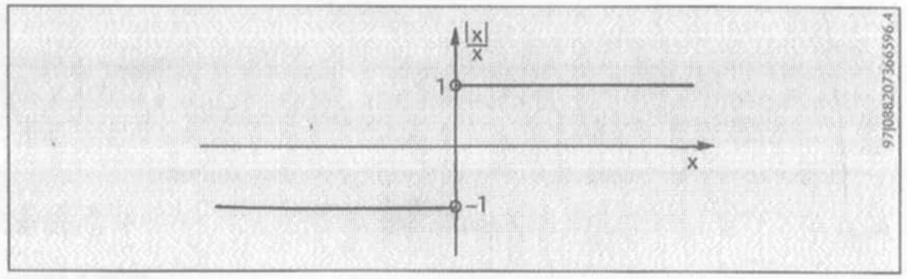


Figura 6.4

In particolare la funzione $f(x)$ in (55.1) non è continua nel punto $x_0 = 0$ perché non è definita in tal punto, cioè perché non esiste il valore $f(x_0) = f(0)$.

Estendiamo $f(x)$ anche a $x_0 = 0$ con un valore $\ell \in \mathbf{R}$; consideriamo cioè la nuova funzione $\bar{f}(x)$ definita da

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{|x|}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ \ell & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}. \tag{55.2}$$

La funzione $\bar{f}(x)$ è definita anche nel punto $x_0 = 0$, ma non è continua in tale punto perché non esiste il limite per $x \to x_0$ di $\bar{f}(x)$; precisamente (si vedano le (52.18), (52.19)) il limite destro è diverso dal limite sinistro.

Tutto ciò accade qualunque sia il valore ℓ scelto in (55.2) per la definizione di $\bar{f}(x)$, che risulta una estensione non continua (o prolungamento non continuo) della funzione $f(x)$; inoltre la discontinuità di $f(x)$ nel punto $x_0 = 0$ si dice non eliminabile.

Viceversa, la funzione studiata nel paragrafo 51:

$$f(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} \tag{55.3}$$

non è continua in $x_0 = 0$ (perché non è definita), ma è possibile prolungare per continuità $f(x)$ mediante la funzione:

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}. \tag{55.4}$$

A causa del limite notevole (51.4), $\bar{f}(x)$ è continua anche nel punto $x_0 = 0$. Il grafico di $\bar{f}(x)$ si ottiene "completando" il disegno in figura 6.3 con l'ulteriore punto di coordinate (0, 1).

Sia $f(x)$ una funzione definita in A e x_0 un punto di A. Le discontinuità di $f(x)$ si classificano nel modo seguente:

(a) la funzione presenta in x_0 una *discontinuità eliminabile* se esiste il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ e risulta

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0). \tag{55.5}$$

In tal caso, posto $\ell = \lim_{x\to x_0} f(x)$, la funzione

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se} \quad x \in A - \{x_0\} \\ \ell & \text{se} \quad x = x_0 \end{cases} \tag{55.6}$$

risulta continua nel punto x_0.

(b) la funzione $f(x)$ presenta in x_0 una *discontinuità di prima specie* se esistono finiti i limiti destro e sinistro di $f(x)$ in x_0 e si ha

(55.7) $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Ad esempio la funzione parte intera di x, definita in (47.11) e rappresentata in figura 6.5, presenta discontinuità di prima specie in corrispondenza ad ogni valore $x \in \mathbf{Z}$, mentre è continua per ogni $x \in \mathbf{R} - \mathbf{Z}$.

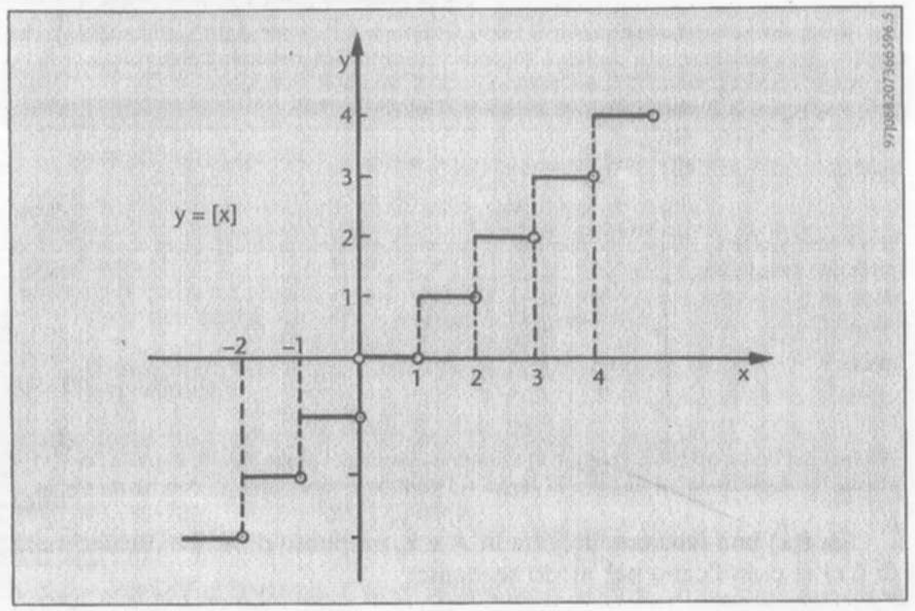


Figura 6.5

(c) La funzione f(x) presenta in x_0 una *discontinuità di seconda specie* se uno almeno dei due limiti

(55.8) $$\lim_{x \to x_0^-} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

non esiste oppure è infinito.

Sia A un intervallo (o unione finita di intervalli), $x_0 \in A$, e f(x) una funzione definita in $A - \{x_0\}$; se esiste il limite

(55.9) $$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,$$

allora la funzione $\bar{f}(x)$, definita in A da

(55.10) $$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in A - \{x_0\} \\ \ell & \text{se } x = x_0 \end{cases},$$

è detta prolungamento per continuità di f(x) in x_0; $\bar{f}(x)$ risulta continua in x_0. Se poi f(x) è continua in $A - \{x_0\}$, allora $\bar{f}(x)$, continua su tutto l'insieme A, è detta prolungamento per continuità di f(x) su A.

56. Alcuni teoremi sulle funzioni continue

Il teorema seguente è analogo al teorema della permanenza del segno (paragrafo 45) per le successioni.

TEOREMA DELLA PERMANENZA DEL SEGNO. — *Sia* f(x) *una funzione definita in un intorno di* x_0 *e sia continua in* x_0. *Se* $f(x_0) > 0$, *esiste un numero* $\delta > 0$ *con la proprietà che* $f(x) > 0$ *per ogni* $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

La dimostrazione si fa come nel paragrafo 45: dato che $f(x_0) > 0$, possiamo scegliere $\varepsilon = f(x_0)/2$; esiste quindi un numero $\delta > 0$ per cui $|f(x) - f(x_0)| < f(x_0)/2$ per ogni x nell'intervallo $|x - x_0| < \delta$. Ciò equivale a $-f(x_0)/2 < f(x) - f(x_0) < f(x_0)/2$; in particolare

(56.1) $$f(x) > f(x_0) - \frac{f(x_0)}{2} = \frac{f(x_0)}{2} > 0.$$

Molto importanti sono i tre teoremi che seguono: il teorema dell'esistenza degli zeri, il teorema dell'esistenza dei valori intermedi ed il teorema di Weierstrass sull'esistenza del massimo e del mimino.

TEOREMA DELL'ESISTENZA DEGLI ZERI. — *Sia* f(x) *una funzione continua in un intervallo* [a, b]. *Se* $f(a) < 0$, $f(b) > 0$, *allora esiste* $x_0 \in (a, b)$ *tale che* $f(x_0) = 0$.

Naturalmente la tesi vale anche se $f(a) > 0$ e $f(b) < 0$; cioè il teorema dell'esistenza degli zeri vale supponendo che i valori f(a), f(b) siano di segno discorde. La dimostrazione del teorema è riportata nel paragrafo 59.

Per mostrare la portata del teorema, consideriamo come esempio le seguenti due equazioni nella incognita x

(56.2) $$x^3 + x - 1 = 0,$$

(56.3) $$e^x + x = 0,$$

che non rientrano tra le equazioni algebriche di primo e secondo grado di cui è facile ricordare la formula risolutiva. La prima delle due equazioni è una equazione algebrica di terzo grado, mentre la seconda è un'equazione trascendente. Procediamo per tentativi, assegnando ad x alcuni valori:

x	− 2	− 1	0	1	2
$f(x) = x^3 + x - 1$	− 11	− 3	− 1	1	9
$f(x) = e^x + x$	$e^{-2} - 2$	$e^{-1} - 1$	1	e + 1	$e^2 + 2$

Nel caso $f(x) = x^3 + x - 1$, abbiamo $f(0) < 0$, $f(1) > 0$. In base al teorema dell'esistenza degli zeri, esiste un numero x_0 nell'intervallo (0, 1) tale che $f(x_0) = 0$; cioè x_0 è una soluzione dell'equazione (56.2). Nel paragrafo 59 vedremo come calcolare numericamente tale radice, e troveremo che $x_0 = 0.682327...$

Nel secondo caso $f(x) = e^x + x$, risulta $f(-1) = 1/e - 1 < 0$, $f(0) = 1 > 0$. Quindi esiste nell'intervallo (− 1, 0) una radice x_0 dell'equazione (56.3). Nel paragrafo 59 troveremo che $x_0 = -0.567143...$

Notiamo che esiste una formula risolutiva per le equazioni di terzo grado, che dà come soluzione reale dell'equazione (56.2) il numero

(56.4) $$x_0 = \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{31}{108}\right)^{1/2}\right]^{1/3} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{31}{108}\right)^{1/2}\right]^{1/3} = 0.682327...$$

Viceversa, non è nota alcuna formula risolutiva per l'equazione (56.3).

Applichiamo ancora una volta il teorema dell'esistenza degli zeri per dimostrare una proprietà utilizzata nel paragrafo 9: per ogni $y_0 \geq 0$ esiste un numero reale $x_0 \geq 0$ soluzione dell'equazione

(56.5) $$x^n = y_0 .$$

Ricordiamo che, essendo la funzione $f(x) = x^n$ strettamente crescente per $x > 0$, un tal numero x_0 è unico, e lo abbiamo chiamato radice n-esima di y_0. Dimostriamo che l'equazione (56.5) ha soluzione: se $y_0 = 0$ naturalmente è $x_0 = 0$. Se $y_0 > 0$ poniamo $f(x) = x^n - y_0$; risulta $f(0) = -y_0 < 0$; rimane da trovare un punto dove la funzione f è positiva. Se $y_0 < 1$, allora $f(1) = 1 - y_0 > 0$ e quindi esiste una radice x_0 nell'intervallo (0, 1). Se invece $y_0 > 1$, allora $f(y_0) = y_0^n - y_0 = y_0(y_0^{n-1} - 1) > 0$; quindi in questo caso esiste una radice nell'intervallo $(0, y_0)$. Infine se $y_0 = 1$ basta prendere $x_0 = 1$.

(PRIMO) TEOREMA DELL'ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI. — *Una funzione continua in un intervallo* [a, b] *assume tutti i valori compresi tra* f(a) e f(b).

Dimostrazione: per semplificare le notazioni consideriamo il caso in cui $f(a) \leq f(b)$. La tesi consiste nel provare che, qualunque sia $y_0 \in [f(a), f(b)]$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Se $y_0 = f(a)$ si può porre $x_0 = a$; analogamente se $y_0 = f(b)$, allora basta prendere $x_0 = b$. Per trattare il caso $y_0 \in (f(a), f(b))$ consideriamo la funzione

(56.6) $$g(x) = f(x) - y_0 \qquad \forall\, x \in [a, b];$$

essendo $f(a) < y_0 < f(b)$, risulta

(56.7) $$g(a) = f(a) - y_0 < 0, \qquad g(b) = f(b) - y_0 > 0.$$

Per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste un numero $x_0 \in (a, b)$ tale che $g(x_0) = 0$, cioè $f(x_0) = y_0$.

TEOREMA DI WEIERSTRASS. — *Sia* f(x) *una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato* [a, b]. *Allora* f(x) *assume massimo e minimo in* [a, b], *cioè esistono in* [a, b] x_1, x_2 *tali che*

(56.8) $$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall\, x \in [a, b].$$

I numeri x_1, x_2 sono detti rispettivamente *punti di minimo e di massimo* per f(x) nell'intervallo [a,b]; i corrispondenti valori $m = f(x_1)$ e $M = f(x_2)$ sono detti *minimo* e *massimo* di f(x) in [a, b] (si veda la figura 6.6).

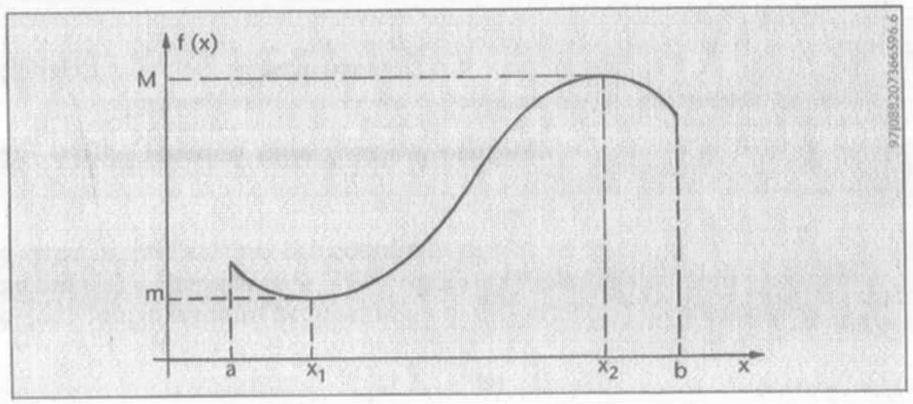


Figura 6.6

Il teorema di Weierstrass è dimostrato nel paragrafo 62; in questa sede ci limitiamo a mettere in luce con degli esempi l'importanza delle ipotesi (funzione *continua* definita in un intervallo *chiuso* e *limitato*) che garantiscono l'esistenza del massimo e del minimo.

Consideriamo per $x > 0$ la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x}; \tag{56.9}$$

$f(x)$ *non assume massimo* nell'intervallo aperto a sinistra $(0, 1]$; infatti non è limitata superiormente in tale intervallo: $\forall\, M > 0$ risulta $f(x) > M$ se $x \in (0, 1/M)$ (si veda la figura 6.7). La funzione *non assume minimo* nell'intervallo illimitato $[1, +\infty)$; la funzione è limitata in tale intervallo perché risulta (si veda anche la figura 6.8):

$$0 < \frac{1}{x} \leq 1, \qquad \forall\, x \geq 1; \tag{56.10}$$

però 0 non è il minimo di $f(x)$ in $[1, +\infty)$ perché non esiste alcun valore $x_1 \geq 1$ per cui $f(x_1) = 1/x_1 = 0$ (una frazione è nulla se e soltanto se il numeratore è nullo!) e inoltre nessun numero reale positivo m è minimo per $f(x)$ in $[1, +\infty)$ perché risulta $f(x) < m$ per ogni $x > 1/m$.

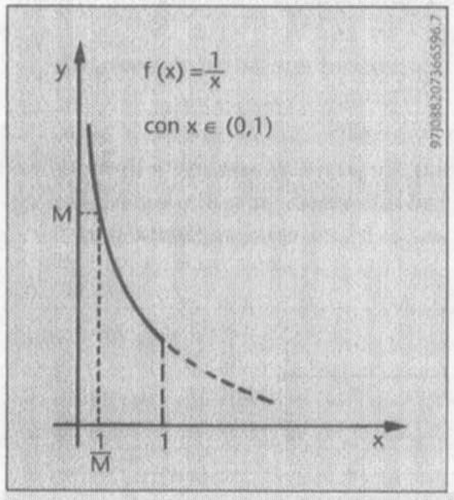


Figura 6.7

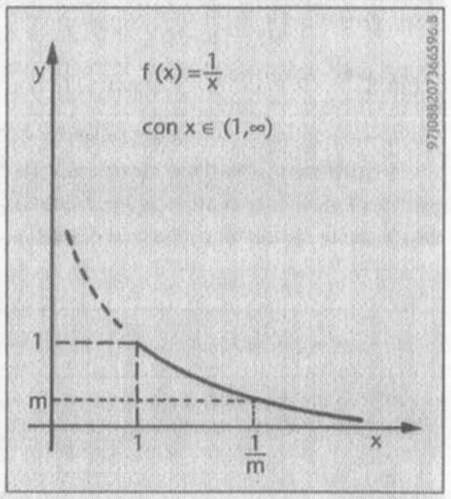


Figura 6.8

La funzione $f(x) = x^2$ assume massimo e minimo in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, in particolare nell'intervallo $[-1, 1]$. Invece la funzione $g(x)$, rappresentata in figura 6.9 e definita da

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in [-1, 1] - \{0\} \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}, \tag{66.11}$$

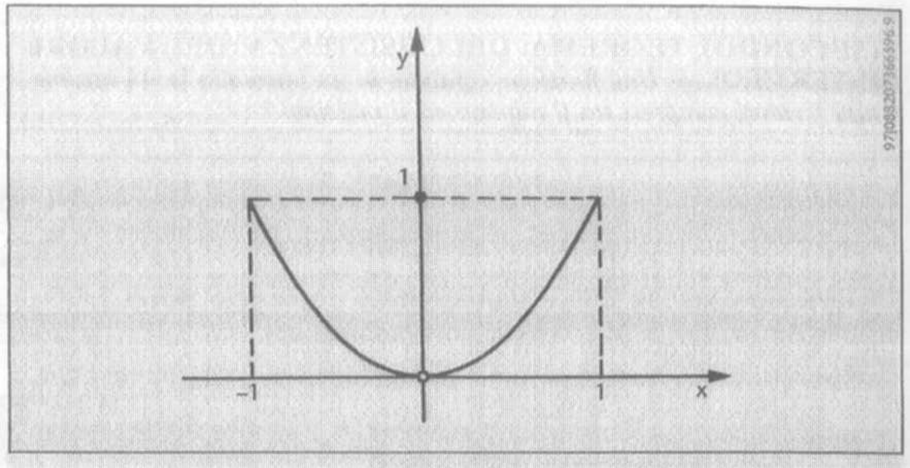


Figura 6.9

non assume minimo nell'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$ perché assume valori positivi arbitrariamente vicini allo zero ($g(x) \to 0$ per $x \to 0$) ma non è uguale a zero per alcun valore di $x \in [-1, 1]$. In questo caso la mancanza del minimo è causata dalla discontinuità di $g(x)$ nel punto $x_0 = 0$.

Per la sua discontinuità in corrispondenza ai numeri $x \in \mathbf{Z}$, la funzione parte frazionaria, rappresentata in figura 6.10 e definita da

$$f(x) = x - [x], \qquad x \in \mathbf{R}, \tag{56.12}$$

($[x]$ è la *parte intera* di x, rappresentata in figura 6.5), *non ha massimo* in un qualunque intervallo che contenga almeno un numero intero.

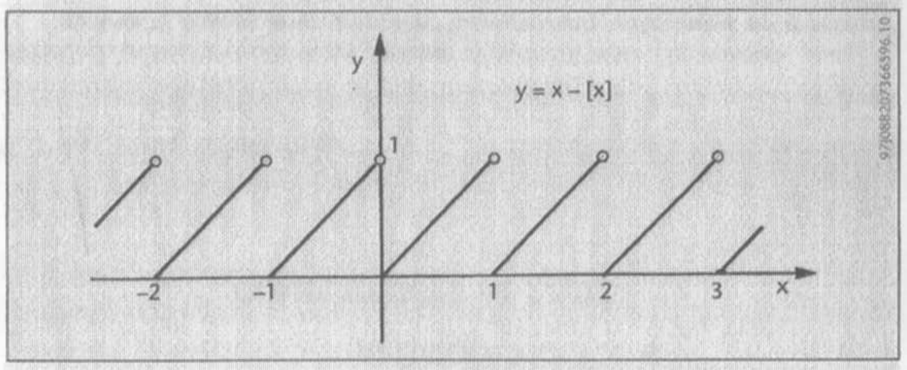


Figura 6.10

Siamo ora in grado di provare una nuova formulazione del teorema di esistenza dei valori intermedi.

Il teorema di Weierstrass è dimostrato nel paragrafo 62; in questa sede ci limitiamo a mettere in luce con degli esempi l'importanza delle ipotesi (funzione *continua* definita in un intervallo *chiuso* e *limitato*) che garantiscono l'esistenza del massimo e del minimo.

Consideriamo per $x > 0$ la funzione

(56.9) $$f(x) = \frac{1}{x};$$

$f(x)$ *non assume massimo* nell'intervallo aperto a sinistra $(0, 1]$; infatti non è limitata superiormente in tale intervallo: $\forall M > 0$ risulta $f(x) > M$ se $x \in (0, 1/M)$ (si veda la figura 6.7). La funzione *non assume minimo* nell'intervallo illimitato $[1, +\infty)$; la funzione è limitata in tale intervallo perché risulta (si veda anche la figura 6.8):

(56.10) $$0 < \frac{1}{x} \leq 1, \qquad \forall x \geq 1;$$

però 0 non è il minimo di $f(x)$ in $[1, +\infty)$ perché non esiste alcun valore $x_1 \geq 1$ per cui $f(x_1) = 1/x_1 = 0$ (una frazione è nulla se e soltanto se il numeratore è nullo!) e inoltre nessun numero reale positivo m è minimo per $f(x)$ in $[1, +\infty)$ perché risulta $f(x) < m$ per ogni $x > 1/m$.

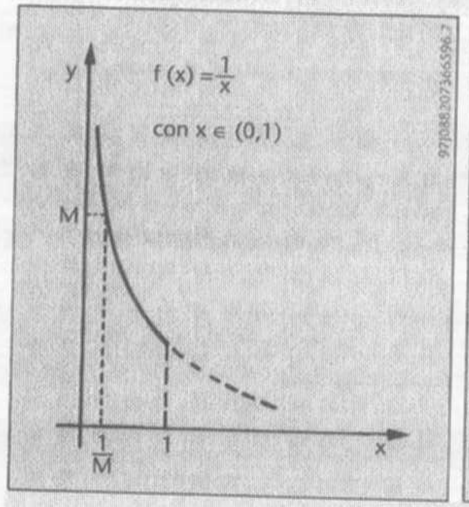


Figura 6.7

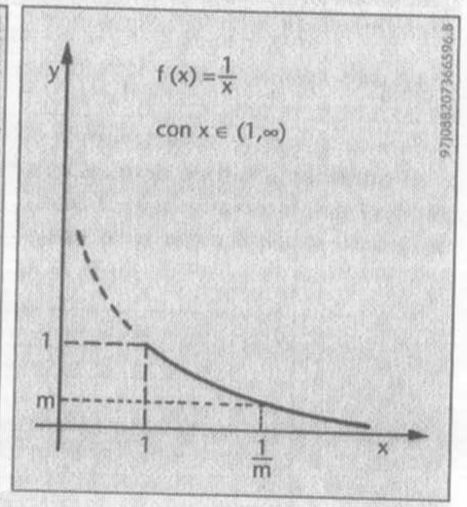


Figura 6.8

La funzione $f(x) = x^2$ assume massimo e minimo in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b]$, in particolare nell'intervallo $[-1, 1]$. Invece la funzione $g(x)$, rappresentata in figura 6.9 e definita da

(66.11) $$g(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se} \quad x \in [-1, 1] - \{0\} \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases},$$

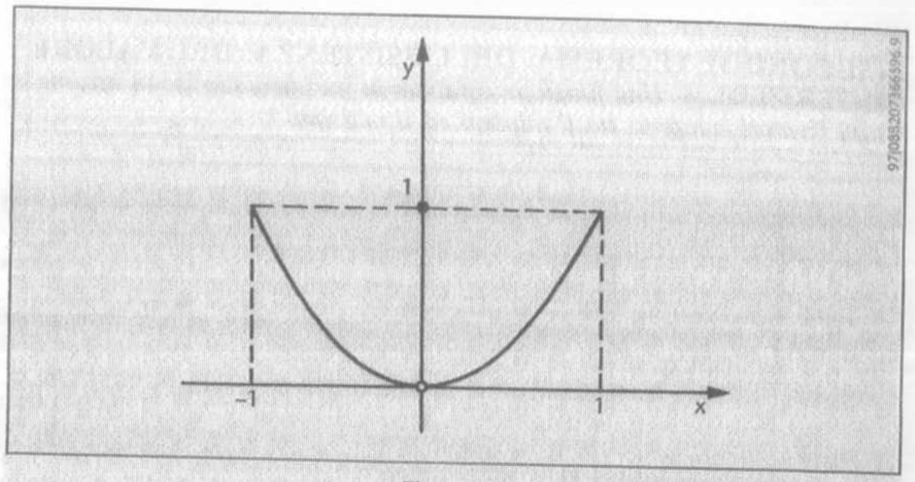


Figura 6.9

non assume minimo nell'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$ perché assume valori positivi arbitrariamente vicini allo zero ($g(x) \to 0$ per $x \to 0$) ma non è uguale a zero per alcun valore di $x \in [-1, 1]$. In questo caso la mancanza del minimo è causata dalla discontinuità di $g(x)$ nel punto $x_0 = 0$.

Per la sua discontinuità in corrispondenza ai numeri $x \in \mathbf{Z}$, la funzione parte frazionaria, rappresentata in figura 6.10 e definita da

(56.12) $$f(x) = x - [x], \qquad x \in \mathbf{R},$$

($[x]$ è la *parte intera* di x, rappresentata in figura 6.5), *non ha massimo* in un qualunque intervallo che contenga almeno un numero intero.

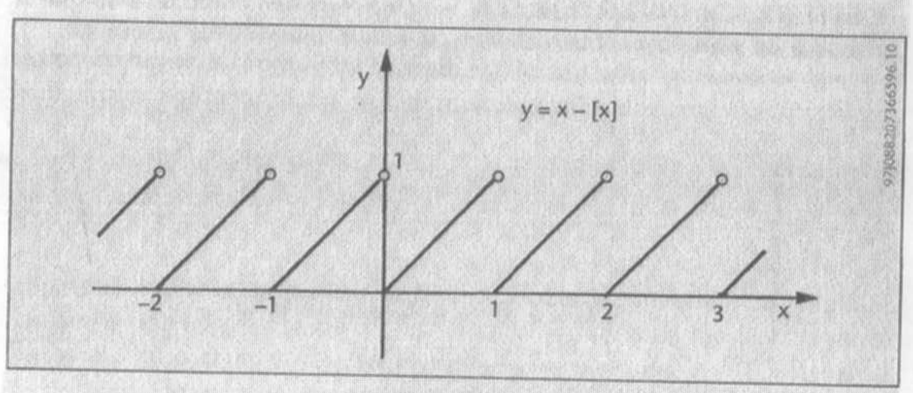


Figura 6.10

Siamo ora in grado di provare una nuova formulazione del teorema di esistenza dei valori intermedi.

(SECONDO) TEOREMA DELL'ESISTENZA DEI VALORI INTERMEDI. — *Una funzione continua in un intervallo* [a, b] *assume tutti i valori compresi tra il minimo ed il massimo.*

Dimostrazione: i valori di massimo M e di minimo m sono assunti in base al teorema di Weierstrass; rimane da provare che, qualunque sia $y_0 \in (m, M)$, esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y_0$.

Indichiamo con x_1, x_2 i punti di minimo e di massimo di f(x), cioè tali che $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ e consideriamo la funzione

$$g(x) = f(x) - y_0 , \qquad \forall\, x \in [a, b]. \tag{56.13}$$

Essendo $f(x_1) = m < y_0 < M = f(x_2)$, risulta

$$g(x_1) = f(x_1) - y_0 < 0, \qquad g(x_2) = f(x_2) - y_0 > 0; \tag{56.14}$$

per il teorema dell'esistenza degli zeri esiste un numero x_0, appartenente all'intervallo aperto di estremi x_1, x_2, tale che $g(x_0) = 0$, cioè tale che $f(x_0) = y_0$.

Chiudiamo il paragrafo precisando un criterio, introdotto alla fine del paragrafo 7, per riconoscere se una data funzione è invertibile.

CRITERIO DI INVERTIBILITÀ. — *Una funzione continua e strettamente monotóna in un intervallo* [a, b] *è invertibile in tale intervallo.*

Proponiamo la dimostrazione nel caso in cui la funzione f sia strettamente crescente in [a, b]: risulta

$$f(a) < f(x) < f(b), \qquad \forall\, x \in (a, b); \tag{56.15}$$

quindi f(a) è il minimo della f in [a, b], mentre f(b) è il massimo. Inoltre si verifica come nel teorema precedente che f assume tutti i valori compresi tra f(a) ed f(b). Cioè, per ogni $y \in [f(a), f(b)]$, esiste almeno un $x \in [a, b]$ per cui $f(x) = y$. Tale x è unico; infatti, se esistessero due valori x_1, x_2 distinti tra loro, diciamo $x_1 < x_2$, per cui $y = f(x_1) = f(x_2)$, allora dovrebbe risultare anche $f(x_1) < f(x_2)$, dato che f è strettamente crescente. Quindi $f:[a, b] \to [f(a), f(b)]$ è invertibile.

CAPITOLO 7

COMPLEMENTI AI LIMITI

57. Punti di accumulazione

DEFINIZIONE. — *Sia* A *un insieme di numeri reali. Un numero reale* x_0 *è un punto di accumulazione per l'insieme* A *se, qualunque sia* $\varepsilon > 0$, *esiste almeno un numero reale* $x \in A$ *tale che* $0 \neq |x - x_0| < \varepsilon$.

In altre parole, $x_0 \in \mathbf{R}$ è di accumulazione per l'insieme A, se in ogni intorno di x_0 del tipo ($\varepsilon > 0$):

$$(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}: x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon\} \tag{57.1}$$

cade almeno un punto di A distinto da x_0.

Ad esempio, se A è l'intervallo chiuso [a, b] (con a < b), ogni punto $x_0 \in [a, b]$ è di accumulazione per l'insieme [a, b]. Se invece A è l'intervallo aperto (a, b), non solo i punti di (a, b), ma anche gli estremi $x_0 = a$, oppure $x_0 = b$, sono di accumulazione per l'insieme A = (a, b); cioè, l'insieme dei punti di accumulazione dell'intervallo aperto (a, b) è l'intervallo chiuso [a, b].

Se $a \in \mathbf{R}$ e se l'insieme A è costituito dal solo numero a, cioè A = {a}, allora A non ha punti di accumulazione; in particolare $x_0 = a$ non è punto di accumulazione per A = {a}, perché in ogni intorno di a del tipo $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ non cadono elementi di A distinti da $x_0 = a$.

Se $A = \{x \in \mathbf{R}: \exists\, n \in \mathbf{N}: x = 1/n\} = \{1, 1/2, 1/3, \ldots\}$, allora $x_0 = 0$ è l'unico punto di accumulazione per A.

Se A = **Q** è l'insieme dei numeri razionali, allora ogni numero reale è di accumulazione per A. Invece l'insieme A = **N** dei numeri naturali non ha punti di accumulazione (al finito).

PROPOSIZIONE. — *Un numero* $x_0 \in \mathbf{R}$ *è di accumulazione per un insieme* $A \subseteq \mathbf{R}$ *se e solo se in ogni intorno di* x_0 *cadono infiniti punti di* A *distinti da* x_0.

Dimostrazione: proviamo che se in ogni intorno di x_0 cade almeno un punto di A distinto da x_0 allora in ogni intorno di x_0 cadono anche infiniti punti di A distinti da x_0 (l'implicazione opposta è ovvia). Infatti, supponiamo per assurdo che esista un intorno $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ di x_0 con la proprietà che solo un numero finito di punti di A siano in tale intorno.

Indicando, come in figura 7.1, con x_i, per $i = 1, 2, \ldots, k$, i punti di A distinti da x_0 che fanno parte dell'intorno $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ e posto

$$\varepsilon_1 = \min \{|x_i - x_0|: i = 1, 2, \ldots, k\}, \tag{57.2}$$

nell'intorno $(x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_1)$ non cade alcun punto di A distinto da x_0, contrariamente all'ipotesi.

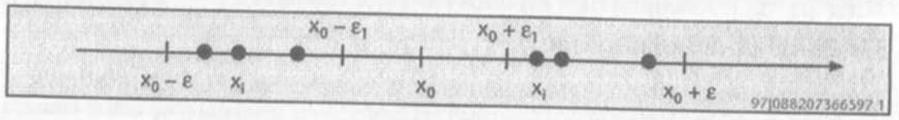


Figura 7.1

Utile nella definizione di limite di funzione è il seguente

TEOREMA. — *Se x_0 è un punto di accumulazione per un insieme $A \subseteq \mathbf{R}$, esiste una successione x_n di punti di A, con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$, convergente ad x_0.*

Dimostrazione: essendo x_0 di accumulazione per A, qualunque sia $n \in \mathbf{N}$, l'intorno di x_0

$$\left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) \tag{57.3}$$

contiene punti di A distinti da x_0; precisamente un numero infinito di punti di A sono nell'insieme (57.3). Perciò, per ogni $n \in \mathbf{N}$, è possibile scegliere x_n con le proprietà:

$$x_n \in A, \qquad x_n \neq x_0, \qquad x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}. \tag{57.4}$$

Per $n \to +\infty$ la successione x_n converge ad x_0 per il teorema dei carabinieri.

Siamo ora in grado di generalizzare la definizione di limite di funzione, proposta nel paragrafo 52 per funzioni definite in intervalli o in unioni finite di intervalli, al caso di funzioni definite in insiemi di natura più generale.

DEFINIZIONE. — *Consideriamo una funzione f(x) definita in un insieme $A \subseteq \mathbf{R}$ e sia x_0 un punto di accumulazione per A; f(x) ha limite uguale ad ℓ per x che tende ad x_0 se, qualunque sia la successione x_n di punti di $A - \{x_0\}$, convergente ad x_0, la corrispondente successione $f(x_n)$ converge ad ℓ.*

È importante osservare che, per il teorema precedentemente dimostrato, esistono successioni x_n di punti di $A - \{x_0\}$ convergenti ad x_0.

In formula, la definizione di limite (con l'utilizzo delle successioni) si scrive:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \begin{array}{l} \forall\, x_n \to x_0, \quad x_n \in A - \{x_0\} \ \forall\, n \in \mathbf{N}, \\ \Rightarrow f(x_n) \to \ell. \end{array} \tag{57.5}$$

La definizione si può formulare equivalentemente (l'equivalenza è provata nel paragrafo che segue) in termini di disuguaglianze:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \begin{array}{l} \forall\, \varepsilon > 0, \exists \delta: \ |f(x) - \ell| < \varepsilon, \\ \forall\, x \in A - \{x_0\}: |x - x_0| < \delta. \end{array} \tag{57.6}$$

Per trattare il caso di limiti per $x \to +\infty$, oppure per $x \to -\infty$, o limiti infiniti, si introducono i concetti di intorno di $+\infty$ e intorno di $-\infty$. Precisamente, un intorno di $+\infty$ è un intervallo del tipo $(M > 0)$

$$(M, +\infty) = \{x \in \mathbf{R}: x > M\}, \tag{57.7}$$

mentre un intorno di $-\infty$ è un intervallo del tipo

$$(-\infty, -M) = \{x \in \mathbf{R}: x < -M\}. \tag{57.8}$$

Si dice che $+\infty$ (rispettivamente $-\infty$) è di accumulazione per un insieme $A \subseteq \mathbf{R}$ se in ogni intorno di $+\infty$ (rispettivamente $-\infty$) cade almeno un punto di A.

È diretta conseguenza delle definizioni (si vedano le (13.10), (13.11)) che $+\infty$ è di accumulazione per A se e soltanto se l'estremo superiore di A vale $+\infty$, e che $-\infty$ è di accumulazione per A se e soltanto se l'estremo inferiore di A è uguale a $-\infty$.

Con tali notazioni vale la seguente definizione generale di limite:

DEFINIZIONE. — *Sia* $f(x)$ *una funzione definita in un insieme* $A \subseteq \mathbf{R}$ *e sia* $x_0 \in \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *un punto di accumulazione per* A; $f(x)$ *ha limite uguale ad* $\ell \in \mathbf{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ *per* x *che tende ad* x_0 *se, per ogni intorno* U *di* ℓ, *esiste un intorno* V *di* x_0 *tale che*

$$x \in A \cap V - \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in U. \tag{57.9}$$

Osserviamo che anche i limiti di successione rientrano nella definizione generale sopra proposta; infatti una successione a_n è una funzione da $\mathbf{N}$ in $\mathbf{R}$, cioè può essere rappresentata nella forma $a_n = f(n)$, $\forall\, n \in \mathbf{N}$; in tal caso $f: \mathbf{N} \to \mathbf{R}$ è una funzione definita sull'insieme $\mathbf{N}$ dei numeri naturali, con valori reali. Secondo le definizioni poste, l'unico punto di accumulazione di $\mathbf{N}$ è $+\infty$; per tale motivo si calcola il limite di una successione soltanto per $n \to +\infty$.

58. Legame tra limiti di funzioni e limiti di successioni

Le seguenti relazioni (58.1), (58.2), di cui proviamo l'equivalenza, sono state adottate nel paragrafo 52 come definizione di limite (finito) di una funzione. Come nel paragrafo 52, $f(x)$ è definita in un insieme A costituito da un intervallo o da una unione finita di intervalli e x_0 è un estremo di uno degli intervalli; la situazione più generale presa in considerazione nel paragrafo precedente, in cui x_0 è punto di accumulazione per il dominio di $f(x)$, non presenta differenze.

TEOREMA. — Le seguenti relazioni sono fra loro equivalenti ($x_0, \ell \in \mathbf{R}$):

$$\forall\, x_n \to x_0, \quad x_n \in A - \{x_0\}\ \forall n \in \mathbf{N} \quad \Rightarrow \quad f(x_n) \to \ell; \tag{58.1}$$

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0:\ x \in A,\quad 0 \neq |x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon. \tag{58.2}$$

Proviamo preliminarmente che (58.2) implica (58.1): per ogni $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ il numero reale per cui vale l'ipotesi (58.2); consideriamo poi una generica successione x_n di punti di A, convergente ad x_0, con $x_n \neq x_0$ per ogni $n \in \mathbf{N}$.

Per la definizione di limite di successione, esiste un indice ν per cui $|x_n - x_0| < \delta$ per ogni $n > \nu$; inoltre, essendo $x_n \neq x_0$, in definitiva si ha

$$x_n \in A, \quad 0 \neq |x_n - x_0| < \delta, \qquad \forall n > \nu. \tag{58.3}$$

Per l'ipotesi (58.2) segue allora

$$|f(x_n) - \ell| < \varepsilon, \qquad \forall n > \nu, \tag{58.4}$$

che, in base alla definizione di limite di successione, significa che $f(x_n) \to \ell$ per $n \to +\infty$.

Proviamo ora, per assurdo, che (58.1) implica (58.2): contraddire la (58.2) equivale ad affermare che:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0:\ \forall \delta > 0,\ \exists x \in A:\ 0 \neq |x - x_0| < \delta,\ |f(x) - \ell| \geq \varepsilon_0\,. \tag{58.5}$$

Poniamo $\delta = 1/n$, con $n \in \mathbf{N}$ e indichiamo con $x = x_n$ il valore di x che compare in (58.5) in dipendenza da $\delta = 1/n$:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0:\ \forall n \in \mathbf{N},\ \exists\, x_n \in A:\ 0 \neq |x_n - x_0| < \frac{1}{n},\ |f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0\,. \tag{58.6}$$

Risulta in particolare

$$x_n \neq x_0\,, \qquad x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0 + \frac{1}{n}\,, \qquad \forall n \in \mathbf{N}; \tag{58.7}$$

perciò $x_n \in A - \{x_0\}$ $\forall n \in \mathbf{N}$ e $x_n \to x_0$ (per il teorema dei carabinieri); però $f(x_n)$ non converge ad ℓ perché la disuguaglianza $|f(x_n) - \ell| \geq \varepsilon_0$, $\forall n \in \mathbf{N}$, contrasta con la definizione di limite di successione.

Il lettore, per esercizio, riformuli le relazioni (58.1), (58.2) con x_0 e/o ℓ infiniti (come nel paragrafo 52) e ne provi l'equivalenza.

59. Metodo di bisezione per il calcolo delle radici di una equazione

In questo paragrafo dimostriamo il teorema dell'esistenza degli zeri enunciato nel paragrafo 56. Utilizziamo nella dimostrazione il *metodo di bisezione*; si tratta di un procedimento costruttivo che, oltre a dimostrare l'esistenza di una soluzione di una equazione data, fornisce anche un metodo per calcolarla.

Prendiamo in considerazione *equazioni* del tipo

$$f(x) = 0, \tag{59.1}$$

con $f(x)$ funzione definita in un intervallo $[a, b]$. Risolvere l'equazione significa determinare tutti i numeri reali $x_0 \in [a, b]$ per cui $f(x_0) = 0$; tali

numeri si dicono *soluzioni* dell'equazione (59.1), od anche *zeri* della funzione f(x).

Se la funzione f(x) è un polinomio, si dice che (59.1) è un'*equazione algebrica*. Se f(x) è una funzione trascendente (ad esempio composta tramite le funzioni e^x, log x, sen x, cos x) allora la (59.1) prende il nome di *equazione trascendente*.

Una soluzione di un'equazione algebrica si dice anche *radice* dell'equazione. Per estensione, si usa il termine di radici anche per le soluzioni di equazioni trascendenti.

Ricordiamo le ipotesi del teorema dell'esistenza degli zeri: f(x) è una funzione continua in [a, b] e

$$f(a) < 0, \quad f(b) > 0. \tag{59.2}$$

Consideriamo il numero c, punto di mezzo dell'intervallo [a, b], cioè $c = (a + b)/2$. Se $f(c) = 0$ abbiamo trovato una radice. Altrimenti consideriamo i due casi $f(c) > 0$, $f(c) < 0$. Se $f(c) > 0$, la funzione f assume valori di segno discorde agli estremi dell'intervallo [a, c], mentre se $f(c) < 0$, [c, b] è l'intervallo dove f cambia segno. Indichiamo con $[a_1, b_1]$ l'intervallo da considerare, cioè definiamo:

$$\begin{cases} se \quad f(c) > 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = a,\ b_1 = c \\ se \quad f(c) < 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = c,\ b_1 = b \end{cases} \tag{59.3}$$

Abbiamo così trovato un intervallo $[a_1, b_1]$, di ampiezza metà del precedente [a, b], per cui risulta $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$. Definiamo $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ e ripetiamo il ragionamento. Otteniamo tre successioni a_n, b_n, c_n che per $n \geq 1$ sono definite, analogamente alla (59.3), da

$$\begin{cases} se \quad f(c_n) > 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = a_n,\ b_{n+1} = c_n \\ se \quad f(c_n) < 0 \quad \Rightarrow \quad a_{n+1} = c_n,\ b_{n+1} = b_n \end{cases}, \quad c_{n+1} = \frac{a_{n+1} + b_{n+1}}{2}. \tag{59.4}$$

Se per qualche n risulta $f(c_n) = 0$, ci si ferma perché si è trovata una radice; altrimenti, per costruzione, risulta

$$f(a_n) < 0, \quad f(b_n) > 0, \qquad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{59.5}$$

È semplice scrivere la relazione che lega a_n con b_n (oppure con c_n); infatti,

ad ogni iterazione, la lunghezza dell'intervallo $[a_n, b_n]$ si dimezza. Quindi $b_1 - a_1 = (b - a)/2$, $b_2 - a_2 = (b - a)/2^2$, e dopo n passi

$$b_n - a_n = \frac{b - a}{2^n}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{59.6}$$

Per costruzione, la successione a_n è crescente ($a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \ldots$) ed è limitata, perché contenuta nell'intervallo [a, b]. Per il teorema sulle successioni monotòne a_n ammette limite finito, e sia x_0 tale limite; anche la successione b_n, espressa mediante la (59.6) da

$$b_n = a_n + \frac{b - a}{2^n}, \tag{59.7}$$

converge ad x_0 per $n \to +\infty$.

Quindi, ricordando la (59.5), dalla continuità di f si ottiene

$$f(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f(a_n) \leq 0; \quad f(x_0) = \lim_{n \to +\infty} f(b_n) \geq 0. \tag{59.8}$$

Perciò $f(x_0) = 0$ ed il teorema dell'esistenza degli zeri è provato.

Dalla dimostrazione proposta risulta chiaro come calcolare numericamente la soluzione x_0. Infatti le tre successioni a_n, b_n, c_n convergono ad x_0. I termini di una qualunque delle tre successioni sono valori approssimati di x_0; in particolare, i valori di a_n sono approssimazioni per difetto, quelli di b_n sono approssimazioni per eccesso, cioè

$$a_n \leq x_0 \leq b_n, \qquad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{59.9}$$

Dalle (59.6), (59.9) si deduce che l'errore di approssimazione che si commette sostituendo x_0 con a_n (oppure con b_n) è inferiore a $(b - a)/2^n$. Dato che c_n è il punto di mezzo dell'intervallo $[a_n, b_n]$, l'errore che si commette nell'appossimare x_0 con c_n è minore di $(b - a)/2^{n+1}$.

Riprendiamo in considerazione le equazioni (56.2), (56.3). Ci proponiamo il calcolo delle rispettive radici con un errore inferiore a 10^{-3}. In entrambi i casi abbiamo un intervallo di ampiezza $b - a = 1$; infatti nel primo caso $[a, b] = [0, 1]$, nel secondo $[a, b] = [-1, 0]$. L'errore di approssimazione che si commette sostituendo la soluzione x_0 con c_n è minore di $1/2^{n+1}$; in particolare, per $n = 9$, risulta

$$|c_9 - x_0| \leq 1/2^{10} = 1/1024 < 10^{-3}. \tag{59.10}$$

Si ottiene la tabella di valori:

	c	c_1	...	c_6	c_7	c_8	c_9
$x^3 + x - 1 = 0$	0.5	0.75	...	0.6796	0.6835	0.6816	0.6826
$e^x + x = 0$	− 0.5	− 0.75	...	− 0.5703	− 0.5664	− 0.5683	− 0.5673

Quindi la radice dell'equazione $x^3 + x - 1 = 0$ è $x_0 = 0.682$ ($\pm$ 0.001); la radice dell'equazione $e^x + x = 0$ è $x_0 = -0.567(\pm 0.001)$. Il numero $\pm$ 0.001 è una stima dell'errore; cioè ad esempio nel primo caso risulta $0.681 < x_0 < 0.683$.

Chiudiamo il paragrafo con un'osservazione sull'assioma di completezza (2.11). Abbiamo utilizzato tale assioma nella dimostrazione del teorema dell'esistenza degli zeri, in particolare nell'affermazione che la successione a_n, essendo monotòna e limitata, risulta convergente.

Ciò è essenziale; infatti, nell'ambito dei numeri razionali **Q**, dove non è verificato l'assioma di completezza, non vale nemmeno il teorema dell'esistenza degli zeri. Ad esempio, l'equazione $f(x) = x^2 - 2 = 0$ non ha soluzioni nell'intervallo di razionali $\{x \in \mathbf{Q}: 0 \le x \le 2\}$, nonostante che $f(0) < 0$, $f(2) > 0$. Infatti si è già verificato nel paragrafo 5 che $\sqrt{2}$ non è razionale. L'assioma di completezza è essenziale anche in altri teoremi di esistenza; ad esempio nel teorema di Weierstrass, o, come già detto, nel teorema sull'esistenza del limite per le successioni monotòne.

60. Il teorema sulle successioni monotòne

Nel presente paragrafo dimostriamo il seguente teorema, enunciato nel paragrafo 48:

TEOREMA SULLE SUCCESSIONI MONOTÒNE. — *Ogni successione monotòna ammette limite. In particolare ogni successione monotòna e limitata è convergente.*

Dimostrazione: consideriamo il caso di una successione a_n crescente e limitata. Posto $\ell = \sup_n a_n$, fissato $\varepsilon > 0$, per le proprietà dell'estremo superiore (paragrafo 15) esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

(60.1) $$\ell - \varepsilon < a_\nu .$$

Per $n > \nu$ risulta $a_\nu \le a_n$ e dunque

(60.2) $$\ell - \varepsilon < a_\nu \le a_n \le \ell < \ell + \varepsilon,$$

da cui $\lim_{n \to +\infty} a_n = \ell$.

Consideriamo ora il caso di una successione a_n crescente e non limitata (superiormente). Fissato $M > 0$ esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $a_\nu > M$. Dato che a_n è crescente, per ogni $n > \nu$ risulta

(60.3) $$a_n \ge a_\nu > M$$

da cui $\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$.

In modo analogo si trattano i casi relativi a successioni decrescenti.

Ricordando che una successione si dice *regolare* se essa ammette limite (finito o infinito), il precedente teorema afferma che *ogni successione monotòna è regolare.*

61. Successioni estratte. Il teorema di Bolzano-Weierstrass

Sia a_n una successione di numeri reali e sia n_k una successione strettamente crescente di numeri naturali. La successione a_{n_k} definita da

(61.1) $$k \in \mathbf{N} \to a_{n_k}$$

prende il nome di *successione estratta* da a_n, di indici n_k.

Ad esempio, se $n_k = 2k$, la successione estratta da a_n di indici 2k, cioè di indici pari, è

(61.2) $$a_2, a_4, \ldots, a_{2k}, \ldots$$

Se invece $n_k = 2k - 1$, si ottiene l'estratta da a_n di indici dispari:

(61.3) $$a_1, a_3, \ldots, a_{2k-1}, \ldots$$

È facile verificare che, per ogni successione n_k strettamente crescente di numeri naturali, si ha

(61.4) $$n_k \ge k, \qquad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Infatti, per $k = 1$, si ha ovviamente $n_1 \ge 1$. Inoltre, supponendo valida la (61.4), proviamo che risulta $n_{k+1} \ge k + 1$, da cui, per il principio di induzione, la (61.4) risulterà vera per ogni k. Per ipotesi è $n_{k+1} > n_k \ge k$, ovvero $n_{k+1} > k$ e perciò $n_{k+1} \ge k + 1$.

Dalla (61.4) si ricava facilmente la seguente

PROPOSIZIONE. — *Se* a_n *converge verso* a, *allora ogni estratta* a_{n_k} *converge verso* a.

Dimostrazione: fissato $\varepsilon > 0$ esiste k_0 tale che $|a_n - a| < \varepsilon$ per ogni $n > k_0$. Se $k > k_0$, essendo $n_k \ge k$, si ha anche $n_k > k_0$ e perciò $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$.

Nel paragrafo 42 abbiamo dimostrato che ogni successione a_n convergente è limitata, cioè esiste $M > 0$ tale che $|a_n| \le M$, per ogni $n \in \mathbf{N}$. Il viceversa non sussiste, perché, ad esempio, la successione $a_n = (-1)^n$ è limitata, ma non convergente.

Tuttavia sussiste il seguente notevole

TEOREMA DI BOLZANO-WEIERSTRASS. — *Sia* a_n *una successione limitata. Allora esiste almeno una sua estratta convergente.*

Dimostrazione: sia I l'insieme degli elementi della successione a_n. Distinguiamo due casi:

1) se I è finito, vi è almeno un elemento $a \in I$ che si ripete infinite volte, cioè tale che esistono infiniti indici n_k $(n_k < n_{k+1})$ tali che $a_{n_k} = a$, $\forall\, k \in \mathbf{N}$. Ne segue $\lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = a$;

2) I è infinito: in tale ipotesi cominciamo con l'osservare che, essendo a_n limitata, esiste un intervallo $[c, d]$ contenente I. Dividiamo $[c, d]$ in due intervalli di ampiezza uguale, mediante il punto $(c + d)/2$. Evidentemente uno di essi, indichiamolo, con $[c_1, d_1]$, deve contenere infiniti elementi di I. Dividiamo $[c_1, d_1]$ in due intervalli di uguale ampiezza, mediante il punto $(c_1 + d_1)/2$; uno di essi, indichiamolo con $[c_2, d_2]$, conterrà infiniti elementi di I.

Così procedendo veniamo a costruire una successione di intervalli $I_n = [c_n, d_n]$ con le seguenti proprietà

(61.5) $$I_1 \supset I_2 \supset \ldots \supset I_n \supset \ldots;$$

(61.6) $$d_n - c_n = (d - c)/\,2^n\,;$$

(61.7) $$I \cap I_n \quad \textit{è infinito};$$

in particolare la (61.6) vale perché, ad ogni iterazione, la lunghezza dell'intervallo $I_n = [c_n, d_n]$ si dimezza; perciò:

(61.8) $$d_1 - c_1 = \frac{d - c}{2}, \qquad d_2 - c_2 = \frac{d_1 - c_1}{2} = \frac{d - c}{2^2}, \ldots$$

La successione c_n è limitata, perché contenuta nell'intervallo $[c, d]$, ed è crescente per costruzione. Per il teorema sulle successioni monotòne c_n ammette limite finito; indichiamo con ℓ il valore di tale limite.

Sia a_{n_1} il primo termine della successione che appartiene a $[c_1, d_1]$. Sia poi a_{n_2} il primo termine con $n_2 > n_1$ che appartiene a $[c_2, d_2]$; in generale, sia a_{n_k} il primo termine con $n_k > n_{k-1}$ che appartiene a $[c_k, d_k]$. Allora la successione a_{n_k} è estratta da a_n e, per la (61.6), risulta

(61.9) $$c_k \le a_{n_k} \le d_k = c_k + \frac{d - c}{2^k}, \qquad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Passando al limite per $k \to +\infty$, per il teorema dei carabinieri si ottiene

(61.10) $$\lim_{k \to +\infty} a_{n_k} = \ell.$$

62. Il teorema di Weierstrass

Dimostriamo il seguente teorema, enunciato nel paragrafo 56.

TEOREMA DI WEIERSTRASS. — *Sia* $f(x)$ *una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$. *Allora* $f(x)$ *assume minimo e massimo in* $[a, b]$, *cioè esistono* x_1, x_2 *in* $[a, b]$ *tali che*

(62.1) $$f(x_1) \le f(x) \le f(x_2), \qquad \forall\, x \in [a, b]\,.$$

Dimostrazione: posto $M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$, verifichiamo che esiste una successione x_n di punti di $[a, b]$ tale che

(62.2) $$\lim_{n \to +\infty} f(x_n) = M.$$

Infatti, se $M = +\infty$, per le proprietà dell'estremo superiore, per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste $x_n \in [a, b]$ tale che $f(x_n) > n$ e perciò $f(x_n) \to M = +\infty$.

Se invece risulta $M < +\infty$, per ogni $n \in \mathbf{N}$ esiste x_n in $[a, b]$ tale che

(62.3) $$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \le M$$

e perciò $f(x_n) \to M$.

Per il teorema di Bolzano-Weierstrass (paragrafo precedente) esiste un'estratta x_{n_k} da x_n ed un punto $x_0 \in [a, b]$, tale che

(62.4) $$x_{n_k} \to x_0.$$

Poiché $f(x)$ è continua, ne segue

(62.5) $$f(x_{n_k}) \to f(x_0)$$

e allora, per la (62.2),

(62.6) $$M = \lim_{n \to +\infty} f(x_n) = \lim_{k \to +\infty} f(x_{n_k}) = f(x_0)\,.$$

Abbiamo così dimostrato che

(62.7) $$f(x_0) = M = \sup\,[f(x) : x \in [a, b]];$$

ciò implica allo stesso tempo che $M < +\infty$ e che l'estremo superiore è, in effetti, un massimo.

Analogamente si ragiona per determinare un punto di minimo, partendo dall'estremo inferiore di $f(x)$ in $[a, b]$.

63. Continuità delle funzioni monotòne e delle funzioni inverse

Con lo stesso metodo utilizzato per la dimostrazione del teorema sulle successioni monotòne si prova il seguente:

TEOREMA SUL LIMITE DELLE FUNZIONI MONOTÒNE. — *Sia* $f(x)$ *monotóna in* $[a, b]$; *esistono finiti i limiti*

(63.1) $$\lim_{x \to a^+} f(x), \qquad \lim_{x \to b^-} f(x);$$

$$\forall\, x_0 \in (a, b).$$

(63.2) $$\lim_{x \to x_0^+} f(x), \qquad \lim_{x \to x_0^-} f(x),$$

Dimostrazione: consideriamo il caso di una funzione $f(x)$ crescente in $[a, b]$; osserviamo subito che $f(x)$ è limitata in $[a, b]$:

(63.3) $$f(a) \le f(x) \le f(b), \ \forall x \in [a, b];$$

cioè $f(a)$ è il minimo di $f(x)$ nell'intervallo $[a, b]$, mentre $f(b)$ è il massimo.

Fissato $x_0 \in (a, b]$, poniamo

(63.4) $$\ell = \sup\,[f(x) : x \in [a, x_0)].$$

Per la (63.3) l'estremo superiore ℓ è finito.

Per le proprietà dell'estremo superiore (paragrafo 13), per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $x_1 \in [a, x_0)$ tale che

(63.5) $$\ell - \varepsilon < f(x_1).$$

Per $x > x_1$ risulta $f(x) \ge f(x_1)$ e dunque

(63.6) $$\ell - \varepsilon < f(x_1) \le f(x) \le \ell < \ell + \varepsilon,$$

da cui

(63.7) $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell.$$

Si procede in modo analogo per il limite per $x \to x_0^+$, con $x_0 \in [a, b)$.

Osserviamo che, se $f(x)$ è crescente in $[a, b]$, i limiti (63.1), (63.2) si possono ordinare nel modo seguente:

(63.8) $$f(a) \le \lim_{x \to a^+} f(x) \le \lim_{x \to x_0^-} f(x) \le$$
$$\le \lim_{x \to x_0^+} f(x) \le \lim_{x \to b^-} f(x) \le f(b), \qquad \forall\, x_0 \in (a, b).$$

CRITERIO DI CONTINUITÀ PER LE FUNZIONI MONOTÒNE. — *Sia* $f(x)$ *una funzione monotóna nell'intervallo chiuso e limitato* $[a, b]$. *Allora* $f(x)$ *è continua in* $[a, b]$ *se e solo se l'immagine di* $f(x)$ *è tutto l'intervallo di estremi* $f(a)$, $f(b)$.

Dimostrazione: se $f(x)$ è continua in $[a, b]$ allora, indipendentemente dalla monotonia, assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$ (si veda il teorema dell'esistenza dei valori intermedi del paragrafo 56).

Viceversa, se $f(x)$ è crescente in $[a, b]$ ma non è continua in $x_0 \in (a, b)$, per il teorema precedente ammette in x_0 una discontinuità di prima specie e si ha

(63.9) $$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 < \ell_2 = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

ed $f(x)$ non assume alcun valore nell'intervallo (ℓ_1, ℓ_2). Si procede in modo analogo se $x = a$, oppure se $x = b$: ad esempio, se $x = a$ e se $f(x)$ è crescente e non è continua per $x = a$, allora $f(x)$ non assume alcun valore nell'intervallo $(f(a), \ell)$, essendo:

(63.10) $$f(a) < \ell = \lim_{x \to a^+} f(x).$$

TEOREMA DI CONTINUITÀ DELLE FUNZIONI INVERSE. — *Sia* $f(x)$ *una funzione strettamente monotóna in* $[a, b]$. *Se* $f(x)$ *è continua, anche la funzione inversa* f^{-1} *è continua.*

Dimostrazione: osserviamo che la stretta monotònia di $f(x)$ su $[a, b]$ implica la sua invertibilità (si veda il criterio di invertibilità, alla fine del paragrafo 56).

Supponiamo, per fissare le notazioni, che $f(x)$ sia strettamente crescente in $[a, b]$; allora:

(63.11) $$f : [a, b] \to [f(a), f(b)]; \qquad f^{-1} : [f(a), f(b)] \to [a, b].$$

In particolare f^{-1} assume tutti i valori dell'intervallo $[a, b]$; per il criterio precedente (di continuità delle funzioni monotòne), f^{-1} è continua.

64. Successioni di Cauchy

Sia a_n una successione di numeri reali. Si dice che a_n è una *successione di Cauchy* se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste un indice ν tale che per $p, q > \nu$ risulti

$$|a_p - a_q| < \varepsilon. \tag{64.1}$$

Dimostriamo in primo luogo la seguente

PROPOSIZIONE. — *Ogni successione convergente è di Cauchy.*

Dimostrazione: se a_n converge verso a allora, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste ν tale che

$$|a_n - a| < \varepsilon/2, \qquad \forall n > \nu. \tag{64.2}$$

Dalla disuguaglianza triangolare segue allora, per $p, q > \nu$:

$$|a_p - a_q| \le |a_p - a| + |a - a_q| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{64.3}$$

Per dimostrare che, viceversa, ogni successione di Cauchy è convergente, premettiamo alcuni lemmi.

LEMMA 1. — *Una successione di Cauchy è limitata.*

Dimostrazione: sia $\varepsilon = 1$; per ipotesi esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_p - a_q| < 1, \qquad \forall\, p, q > \nu. \tag{64.4}$$

Fissiamo un indice $p_0 > \nu$. Allora, dalla (64.4), per le proprietà del valore assoluto, segue

$$a_{p_0} - 1 < a_q < a_{p_0} + 1, \qquad \forall\, q > \nu. \tag{64.5}$$

Posto

$$h = \min\{a_1, \dots, a_\nu, a_{p_0} - 1\}, \qquad k = \max\{a_1, \dots, a_\nu, a_{p_0} + 1\},$$

evidentemente risulta

$$h \le a_q \le k, \qquad \forall\, q \in \mathbf{N}, \tag{64.6}$$

e perciò la successione è limitata.

LEMMA 2. — *Se una successione di Cauchy a_n contiene un'estratta a_{n_k} convergente verso ℓ, allora anche a_n converge verso ℓ.*

Dimostrazione: fissato $\varepsilon > 0$ sia $\nu \in \mathbf{N}$ tale che

$$|a_p - a_q| < \varepsilon/2, \qquad \forall\, p, q > \nu. \tag{64.7}$$

Sia inoltre $k_0 > \nu$ tale che

$$|a_{n_k} - \ell| < \varepsilon/2, \qquad \forall\, k \ge k_0. \tag{64.8}$$

Poiché si ha: $n_{k_0} \ge k_0 > \nu$ (vedi la (61.4)), per ogni $n > \nu$ risulta

$$|a_n - \ell| \le |a_n - a_{n_{k_0}}| + |a_{n_{k_0}} - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \tag{64.9}$$

Combinando i risultati precedenti si dimostra il seguente

CRITERIO DI CONVERGENZA DI CAUCHY. — *Una successione a_n è convergente se e solo se è di Cauchy.*

Dimostrazione: con la proposizione all'inizio del paragrafo abbiamo già provato che le successioni convergenti sono di Cauchy. Viceversa, se a_n è di Cauchy, per il lemma 1 è anche limitata. In base al teorema di Bolzano-Weierstrass (paragrafo 61), a_n ammette una successione estratta a_{n_k} convergente. Per il lemma 2, a_n è convergente.

CAPITOLO 8

CALCOLO DELLE PROBABILITÀ

65. Calcolo combinatorio

Sia A un insieme costituito da n elementi:

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} . \tag{65.1}$$

Sia k un numero naturale minore od uguale ad n. Una *disposizione* di k elmenti tra gli n dati è un sottoinsieme ordinato di A che ha k elementi; consideriamo distinte due disposizioni se differiscono o per gli elementi, oppure solo per l'ordine di tali elementi.

PROPOSIZIONE. — *Il numero delle disposizioni di* k *elementi tra gli* n *dati è*

$$n(n-1)(n-2)...(n-k+1); \tag{65.2}$$

cioè è il prodotto di k *numeri interi decrescenti a partire da* n.

Così ad esempio il numero delle disposizioni di 2 elementi su 3 dati è $3 \cdot 2 = 6$. Infatti, se consideriamo l'insieme $\{a_1, a_2, a_3\}$, tutte le disposizioni possibili con 2 elementi sono:

$$\{a_1, a_2\}; \{a_2, a_1\}; \{a_1, a_3\}; \tag{65.3}$$
$$\{a_3, a_1\}; \{a_2, a_3\}; \{a_3, a_2\}.$$

Per dimostrare la proposizione precedente, esaminiamo un possibile modo di formare una disposizione di k elementi dall'insieme (65.1). Possiamo scegliere il primo elemento da n dati. Invece è possisibile scegliere il

secondo elemento solo tra gli $(n - 1)$ elementi rimasti dopo fatta la prima scelta. Quindi, se $k = 2$, il numero delle disposizioni è $n(n - 1)$. Se $k > 2$, si procede allo stesso modo, cioè si sceglie il terzo elemento tra gli $(n - 2)$ rimasti. Quindi, se $k = 3$, il numero delle disposizioni è $n(n - 1)(n - 2)$. E così via, se $k > 3$.

Una disposizione di n elementi tra gli n dati ($k = n$) si chiama *permutazione* degli n elmenti. Ponendo $k = n$ nella proposizione precedente, si ottiene che il numero delle permutazioni di n elementi è:

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \ldots 2 \cdot 1 \; ; \tag{65.4}$$

il simbolo n!, che indica il prodotto dei primi n numeri naturali, si legge «n *fattoriale*».

Tenendo conto del simbolo di fattoriale sopra introdotto, si riconosce che il numero di disposizioni di k elementi tra n dati si può anche scrivere:

$$n(n - 1) \ldots (n - k + 1) = \frac{n!}{(n - k)!} \; . \tag{65.5}$$

Una *combinazione* di k ($\leq n$) elementi tra n dati è un sottoinsieme (non ordinato) di k elementi; consideriamo uguali due combinazioni che hanno gli stessi elementi, indipendentemente dall'ordine.

PROPOSIZIONE. — *Il numero delle combinazioni di* k *elementi tra* n *dati è*

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)!\; k!} \; . \tag{65.6}$$

Prima di passare alla dimostrazione osserviamo che il simbolo a primo membro della (65.6) si legge «n *su* k», ed è chiamato *coefficiente binomiale*. È utile dare un significato a tali espressioni anche per $k = 0$ e $k = n$ nel modo seguente:

$$0! = 1, \qquad \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!\; 0!} = 1. \tag{65.7}$$

Direttamente delle definizioni (65.6), (65.7) segue l'identità

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n - k}, \qquad \forall\, n \in \mathbf{N},\ \forall\, k \in \{0, 1, \ldots, n\} \; . \tag{65.8}$$

Ritornando all'esempio di un insieme con 3 elementi $\{a_1, a_2, a_3\}$, si hanno $3!/(1!\; 2!) = 3$ combinazioni con due elementi, che sono:

$$\{a_1, a_2\};\ \{a_1, a_3\};\ \{a_2, a_3\}. \tag{65.9}$$

La proposizione precedente si dimostra osservando che il numero delle combinazioni è inferiore (se $k > 1$) al numero delle disposizioni, e che ad ogni combinazione con k elementi corrispondono tutte le disposizioni che si ottengono permutando tra loro i k elementi. Quindi ad ogni combinazione corrispondono k! disposizioni. Il numero totale delle combinazioni è ottenuto dal numero (65.2), oppure da (65.5), che esprime il numero di disposizioni di k elementi tra n dati, diviso per k!.

66. Il binomio di Newton

Una importante applicazione (che peraltro è anche conseguenza del principio di induzione, come mostrato nella seconda parte del paragrafo) dei risultati del paragrafo precedente è costituita dalla

FORMULA DEL BINOMIO (DI NEWTON). — *Per ogni coppia di numeri reali* a, b *vale l'identità*

$$\begin{aligned}(a + b)^n &= \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots \\ &\ldots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n \; .\end{aligned} \tag{66.1}$$

Infatti, immaginiamo di eseguire il seguente prodotto di n fattori:

$$(a + b)^n = (a + b) \cdot (a + b) \cdot \ldots \cdot (a + b) \; ; \tag{66.2}$$

il risultato del prodotto si scrive come somma algebrica di molti addendi. Fissiamo la nostra attenzione sull'addendo del tipo $a^{n-k}b^k$. Eseguendo la moltiplicazione indicata, si ottiene tale addendo tante volte quante è possibile scegliere k fattori uguali a b dagli n dati. Cioè n su k.

La formula del binomio (66.1) in particolare fornisce dei risultati di facile verifica per $n = 2$ e $n = 3$: infatti, per tali valori di n si ottengono le ben note relazioni:

(66.3) $$\binom{2}{0} = 1, \binom{2}{1} = 2, \binom{2}{2} = 1,$$

da cui $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

(66.4) $$\binom{3}{0} = \binom{3}{3} = 1, \quad \binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3 ,$$

da cui $(a + b)^3 = a^3 + 3\, a^2\, b + 3a\, b^2 + b^3$.

Le considerazioni che seguono sono utili per sviluppare esplicitamente il secondo membro della formula del binomio (66.1) per valori di n più grandi di 3:

LEMMA. — *Per ogni coppia di numeri naturali* n, k *vale la formula*

(66.5) $$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}.$$

Infatti, dalla definizione (65.6) otteniamo:

(66.6) $$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!\,(n-k-1)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!}\left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k}\right) =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{k(n-k)} =$$

$$= \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

La proprietà (66.5) del lemma precedente permette di scrivere il seguente *triangolo di Tartaglia* (noto anche come *triangolo di Pascal*), dove *ogni coefficiente è uguale alla somma dei coefficienti più vicini della riga precedente:*

$$\binom{0}{0} = 1$$

$$\binom{1}{0} = 1 \qquad \binom{1}{1} = 1$$

$$\binom{2}{0} = 1 \qquad \binom{2}{1} = 2 \qquad \binom{2}{2} = 1$$

$$\binom{3}{0} = 1 \qquad \binom{3}{1} = 3 \qquad \binom{3}{2} = 3 \qquad \binom{3}{3} = 1$$

$$\binom{4}{0} = 1 \qquad \binom{4}{1} = 4 \qquad \binom{4}{2} = 6 \qquad \binom{4}{3} = 4 \qquad \binom{4}{4} = 1$$

$$\binom{5}{0} = 1 \qquad \binom{5}{1} = 5 \qquad \binom{5}{2} = 10 \qquad \binom{5}{3} = 10 \qquad \binom{5}{4} = 5 \qquad \binom{5}{5} = 1$$

Quindi ad esempio risulta

(66.7) $$(a + b)^5 = a^5 + 5\, a^4\, b + 10\, a^3\, b^2 + 10\, a^2\, b^3 + 5a\, b^4 + b^5 .$$

Di seguito esponiamo un'ulteriore dimostrazione della formula del binomio con il metodo di induzione.

Dimostrazione per induzione della (66.1): cominciamo con l'osservare che la formula del binomio (66.1) è verificata per n = 1; infatti:

$$(a + b)^1 = \binom{1}{0} a + \binom{1}{1} b = a + b.$$

Secondo l'ipotesi di induzione supponiamo vera la (66.1) per un indice $n \in \mathbf{N}$ e dimostriamo la validità della formula analoga con n + 1 al posto di n; a tal fine moltiplichiamo entrambi i membri della (66.1) per (a + b), ottenendo

$$(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n\, b + \ldots + \binom{n}{k} a^{n-k+1}\, b^k + \ldots + ab^n +$$

$$+ a^n\, b + \ldots + \binom{n}{k-1} a^{n-k+1}\, b^k + \ldots + \binom{n}{n-1} a\, b^n + b^{n+1} =$$

(66.8) $$= a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + 1\right] a^n\, b + \ldots + \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n-k+1}\, b^k + \ldots$$

$$\ldots + \left[1 + \binom{n}{n-1}\right] a\, b^n + b^{n+1} = a^{n+1} + \left[\binom{n}{1} + \binom{n}{0}\right] a^n\, b + \ldots$$

$$\ldots + \left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right] a^{n-k+1}\, b^k + \ldots + \left[\binom{n}{n} + \binom{n}{n-1}\right] a\, b^n + b^{n+1};$$

tenendo conto che, per la (66.5), risulta

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}, \qquad \forall\, k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

si ottiene infine la conclusione

$$(a+b)^{n+1} = \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \binom{n+1}{1} a^n b + \ldots$$

(66.9)

$$\ldots + \binom{n+1}{k} a^{n-k+1} b^k + \ldots + \binom{n+1}{n} a\, b^n + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}.$$

67. Introduzione al concetto di probabilità

Il *calcolo delle probabilità* ha avuto origine dai giochi d'azzardo, per stabilire la giusta ripartizione delle puntate da parte dei giocatori. Attualmente il calcolo delle probabilità è uno strumento matematico utile in molti casi, ad esempio per analizzare i risultati e per fare delle statistiche su esperimenti che vengono ripetuti un numero grande di volte.

Consideriamo, come ipotetico esempio, le rilevazioni fatte dal reparto maternità di un grande ospedale nel corso di un anno. Sono stati registrati tra l'altro: il numero totale dei bambini nati, e, per ogni bambino nato, il sesso ed il numero e il sesso dei suoi fratelli. Si è trovato che il numero dei maschi è circa la metà del totale. Si sono poi separati i dati relativi ad ogni famiglia in base al numero dei figli; è risultato che le famiglie con 2 figli maschi e 2 figlie femmine sono circa il 37% di tutte le famiglie con 4 figli (si noti il 37% e non il 50%).

Sulla base di questo esempio introduciamo alcuni elementi di probabilità, e mostriamo che i risultati dell'esperimento sopra indicato sono in accordo con i valori teorici che si possono prevedere con il calcolo delle probabilità.

La nozione elementare di *probabilità* è il *rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero dei casi possibili* (supponendo che i casi possibili siano equivalenti tra loro). Nell'esempio precedente, i casi possibili sono rappresentati dalle famiglie con 4 figli prese in considerazione, mentre i casi favorevoli sono rappresentati dalle famiglie con 2 figli maschi e 2 figlie femmine.

Da un punto di vista statistico, nel registrare i risultati di un esperimento ripetuto molte volte, è utile considerare la *frequenza relativa*, cioè il rapporto tra il numero dei casi favorevoli ed il numero totale dei casi osservati. Anticipando il linguaggio dei limiti, ci si aspetta che la probabilità di un evento sia

uguale al limite a cui tende la frequenza relativa, al tendere all'infinito del numero delle prove.

È utile considerare preliminarmente uno degli esempi più semplici possibili; ritorneremo poi al caso di una famiglia con 4 figli. Consideriamo il lancio di una moneta, che può dare i due soli risultati: testa o croce. Possiamo scegliere come caso favorevole uno dei due, ad esempio testa. Facendo un solo lancio della moneta otteniamo che la probabilità di avere testa è 1/2, che è uguale al rapporto tra un caso favorevole ed i due casi possibili.

Supponiamo ora di effettuare n lanci della moneta. Se k è un numero naturale minore od uguale ad n, quant'è la probabilità di avere k volte testa?

Stabiliamo il numero dei casi possibili. Al primo lancio ci sono solo due casi possibili; al secondo lancio ci sono quattro casi possibili:

(67.1) {testa, testa} ; {testa, croce} ;

{croce, testa} ; {croce, croce}.

Ad ogni nuovo lancio il numero dei casi possibili viene moltiplicato per 2. Quindi dopo n lanci sono possibili 2^n casi.

Il numero dei casi favorevoli è dato dal numero di modi con cui possiamo scegliere k elementi su n dati. Quindi, con il linguaggio del paragrafo precedente, è uguale alle combinazioni di k elmenti su n. Cioè n su k. La probabilità, che indichiamo con P(n, k), è data da:

(67.2) $$P(n, k) = \binom{n}{k} / 2^n = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Invece di questo caso, con due eventi di pari probabilità, possiamo avere due eventi, di cui quello favorevole con probabilità $p(0 < p < 1)$. Ad esempio, nel caso di lancio di un dado, la probabilità di avere un prefissato risultato è $p = 1/6$. Si verifica che la probabilità che l'evento favorevole si verifichi k volte su n prove è:

(67.3) $$P(n, k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Se $p = 1/2$, dato che anche $1 - p = 1/2$, si ritrova la precedente formula (67.2).

Si notino le seguenti proprietà della probabilità P(n, k):

(67.4) $$0 < P(n, k) < 1 ;$$

(67.5) $$P(n, 0) + P(n, 1) + ... + P(n, k) + ... + P(n, n) = 1.$$

Infatti, la (67.5) segue dalla formula (66.1) del binomio di Newton, ponendo $a = 1 - p$, $b = p$. Il secondo membro della (67.5) risulta uguale a $[(1 - p) + p]^n = 1^n = 1$. Inoltre, dato che $P(n, k) > 0$ per ogni k, ogni addendo della somma in (67.5) deve essere minore di 1; quindi vale anche la (67.4).

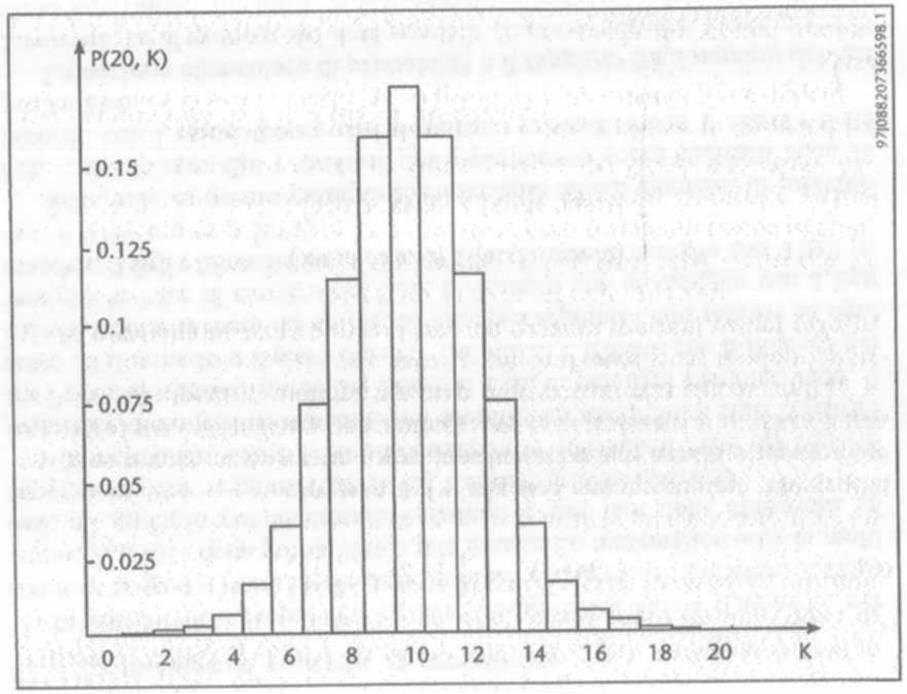


Figura 8.1

Per ogni n fissato, P(n, k) è una corrispondenza che ad ogni naturale $k \leq n$ associa un numero reale compreso tra 0 e 1. Quindi P(n, k) è una funzione di k. Tale funzione prende il nome di *distribuzione di probabilità*. Più precisamente si chiama *distribuzione binomiale*, per distinguerla da altre distribuzioni (come le distribuzioni continue) altrettanto importanti, ma che non esaminiamo in questa sede. Riportiamo nella figura 8.1 il grafico della distribuzione binomiale (67.2), (67.3), per $p = 1/2$ e $n = 20$. Si ottiene un tipico grafico cosiddetto *«a campana»*.

Troviamo ora la probabilità che in una famiglia con 4 figli ci siano $k(\leq 4)$ figli maschi. In base alla formula (67.2) con $n = 4$ abbiamo

(67.6) $$P(4, k) = \binom{4}{k} 2^{-4} = \binom{4}{k} \frac{1}{16}.$$

k	0	1	2	3	4
P(4, k)	0.0625	0.25	0.375	0.25	0.0625

Quindi in particolare $P(4, 2) = 0.375$. Cioè la probabilità è del 37,5%.

Perché non abbiamo trovato una probabilità del 50%? Il motivo è nel fatto che la proprietà di avere esattamente due figli maschi su quattro, non corrisponde alla metà dei casi possibili, ma è soltanto un caso su cinque. Comunque, tra i cinque casi possibili, è il più probabile.

68. Eventi e probabilità

Cerchiamo adesso di formalizzare quanto abbiamo esposto nel precedente paragrafo.

Supponiamo di considerare un esperimento i cui possibili risultati siano un numero finito di esiti $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$. Gli elementi $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_N$ rappresentano tutti i *casi possibili* e definiamo

(68.1) $$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ... \omega_N\}$$

l'insieme dei casi possibili (un insieme con N elementi).

Se l'esperimento consiste nel lanciare una volta una moneta, l'*insieme dei casi possibili* è costituito da due soli possibili risultati: testa oppure croce. Pertanto

(68.2) $$\Omega = \{\text{testa; croce}]$$

Se l'esperimento consiste nel lanciare n volte una moneta, l'*insieme dei casi possibili* è costituito da tutti i possibili risultati che, come abbiamo visto nel precedente paragrafo, sono 2^N.

Si definisce *evento* un qualunque sottoinsieme A di Ω; pertanto affermare che un risultato ω è elemento di A, cioè $\omega \in A$, equivale a dire che A è l'*evento* scelto, cioè l'insieme dei risultati da prendere in considerazione e che ω è un risultato di tale *evento*.

Ad esempio, se supponiamo di lanciare una moneta tre volte, l'insieme

(68.3) $$A = \{TTC, CTT, TCT, TTT\}$$

dove si intende T = {testa} e C = {croce} è un sottoinsieme dell'*insieme dei casi possibili*, costituito da 2^3 elementi, che indica l'*evento* che escono almeno due teste nei tre lanci.

Ricordiamo che se $A \subseteq \Omega$ è un insieme, si indica con il simbolo A^c l'insieme complementare di A, cioè il sottoinsieme di Ω, definito da: $A^c = \{\omega \in \Omega: \omega \notin A\}$; ricordiamo inoltre che con il simbolo ϕ si indica l'insieme vuoto.

Chiamiamo $\mathcal{A}$ la famiglia degli *eventi*, ossia la famiglia dei sottoinsiemi di Ω che soddisfano le seguenti proprietà.

(68.4) Tutto l'insieme Ω è un *evento*, detto *evento certo* ($\Omega \in \mathcal{A}$).

(68.5) Se A è un evento, anche l'insieme complementare A^c (che consiste nella non realizzazione di A) è un evento (se $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$).

(68.6) Se A e B sono eventi, anche $A \cup B$ (che rappresenta l'evento che si realizzi l'evento A o l'evento B) è un evento (se $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$).

Come conseguenza, otteniamo la seguente proposizione:

PROPOSIZIONE. – *Valgono le seguenti proprietà:*

(68.7) *ϕ è un evento, detto evento impossibile ($\phi \in \mathcal{A}$).*

(68.8) *Se A e B sono eventi, anche $A \cap B$ (che è l'evento che consiste nella contemporanea realizzazione di A e B) è un evento (se $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A}$).*

Dimostrazione di (68.7): poiché $\phi = \Omega^c$, ϕ è il complementare di un evento per la (68.4); il complementare di un evento è un evento per la (68.5) e quindi ϕ è un evento.

Dimostrazione di (68.8): poiché A e B sono eventi, anche A^c e B^c sono eventi per la (68.5). Utilizzando la (68.6) possiamo dire che $A^c \cup B^c$ è un evento, e quindi in virtù ancora della (68.5) anche $(A^c \cup B^c)^c$ è un evento.

Si può verificare tramite proprietà di insiemistica che $(A^c \cup B^c)^c$ è proprio $A \cap B$ (è una delle leggi, dette *di De Morgan*).

Torniamo adesso sull'*insieme dei casi possibili* Ω e definiamo su esso una *probabilità*, cerchiamo cioè di dare un "peso" a ciascun elemento $\omega_i \in \Omega$, i = 1, 2, ..., N.

Scegliamo una funzione $p(\omega)$ definita per $\omega \in \Omega$, a valori nell'intervallo [0, 1]. In simboli:

(68.9) $$p: \Omega \to [0, 1] \quad \text{tale che } p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_N) = 1$$

Data poi p su ciascun ω_i, definiamo la *probabilità* p(A) per ogni evento $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\}$ come segue

(68.10) $$p(A) = p(\omega_1) + p(\omega_2) + \ldots + p(\omega_K)$$

Dalla definizione di p segue che:

(68.11) $$p(\phi) = 0$$

(68.12) $$p(\Omega) = 1$$

(68.13) $$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

(68.14) $$\text{Se } A \cap B = \phi \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

(68.15) $$p(A^c) = 1 - p(A)$$

(68.11) e (68.12) seguono direttamente dalla definizione di p.

Dimostrazione di (68.13): la probabilità $p(A \cup B)$ dell'evento $A \cup B$ è, per la definizione (68.10), data dalla somma delle probabilità di tutti gli elementi di $A \cup B$.

Pertanto la somma delle probabilità degli elementi dell'evento A e delle probabilità degli elementi dell'evento B, cioè la somma di p(A) e p(B), conta due volte gli elementi in comune, cioè gli elementi dell'evento $A \cap B$ (che è un insieme finito). Pertanto $p(A \cup B)$ è uguale alla somma di p(A) e p(B), meno $p(A \cap B)$.

Dalla (68.11) e (68.13) segue subito la (68.14), dato che $A \cap B = \phi$.

Dimostrazione di (68.15): Essendo $\Omega = (\Omega \setminus A) \cup A$, dalla (68.14) segue che $p(\Omega) = p((\Omega \setminus A) \cup A) = p(\Omega \setminus A) + p(A)$. Da cui, dato che $A^c = \Omega \setminus A$ segue che $p(A^c) = p(\Omega \setminus A) = p(\Omega) - p(A) = 1 - p(A)$.

Un caso importante di *probabilità* è quello della *probabilità uniforme*. Supponiamo di descrivere un esperimento di cui ciascun esito è ugualmente probabile. Dato che la probabilità totale della somma di N elementi vale uno, ogni *evento* deve avere *probabilità* 1/N. Allora se $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_N\}$ poniamo

(28.16) $$p(\omega_i) = 1/N \qquad i = 1, 2, ..., N.$$

In questo modo $p(\omega_1) + p(\omega_2) + ... + p(\omega_N) = N \cdot 1/N = 1$. Indichiamo ora con N(A) il numero di elementi dell'insieme A. N(A) è detta *cardinalità* dell'insieme A. Risulta quindi, per ogni evento $A \in \mathcal{A}$:

(68.17) $$p(A) = \frac{N(A)}{N}.$$

Pertanto il calcolo della *probabilità* dell'insieme A è ricondotto al calcolo della *cordinalità* dell'insieme A.

Come esempio di *probabilità uniforme*, il lettore potrà immaginare di avere un'urna contenente N palline, ciascuna contraddistinta da un numero da 1 a N.

Supponiamo poi di estrarre dall'urna n palline e che ciascuna pallina estratta venga rimpiazzata nell'urna. In questo caso i possibili esiti dell'esperimento sono le *n-ple* $(a_1, a_2, ..., a_n)$, (cioè un insieme di n elementi), dove a_i indica quale pallina è stata estratta all'i-sima estrazione. Consideriamo distinte *n-ple* che contengono gli stessi elementi, ma in ordine diverso; si parla quindi di *n-ple ordinate* e l'*insieme dei casi possibili* è dato da

(68.18) $$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, a_2, ..., a_n),\ a_i = 1, 2, ..., N\}.$$

Possiamo verificare che $N(\Omega) = N^n$.

In particolare ci proponiamo di calcolare quale sia la *probabilità* che tutte le palline estratte abbiano numeri diversi fra loro. Formalmente calcoliamo la *probabilità* dell'*evento*

(68.19) $$A = \{\omega \in \Omega: \omega = (a_1, a_2, ..., a_n) \text{ tale che } a_i \neq a_j \text{ se } i \neq j\}.$$

sotto l'ipotesi che ciascuna estrazione ω sia equiprobabile (ipotesi di *probabilità uniforme*).

Avremo quindi, in base alla (68.17), che:

(68.20) $$p(A) = N(A)/N(\Omega)$$

Osserviamo che $N(A) = N(N-1) ... (N - n + 1)$ ovvero N(A) è il numero di *disposizioni* di n elementi tra gli N dati (vedi paragrafo 66), che indicheremo con il simbolo D(N, n).

Segue che:

(68.21) $$p(A) = N(A)/N(\Omega) = \frac{(N-1) ... (N-n+1)}{N^n} = \left(1 - \frac{1}{N}\right) ... \left(1 - \frac{n-1}{N}\right).$$

Possiamo ora applicare questo conto ad una semplice situazione. Sia data una classe di n ragazzi e supponiamo che tutti i giorni dell'anno siano ugualmente probabili per essere il compleanno di ciascun ragazzo. Ci chiediamo quale sia la probabilità, p_n, che nella classe ci siano almeno due ragazzi con il compleanno nello stesso giorno.

Se consideriamo l'*evento*

(68.22) A = {tutti i ragazzi sono nati in giorni differenti}

Sotto le ipotesi di probabilità uniforme richieste, la *probabilità* dell'*evento* A è data da:

(68.23) $$p(A) = N(A)/N(\Omega) = D(365, n)/365^n$$

dove, come già detto, D (365, n) indica il numero di disposizioni di n elementi tra i 365 dati.

Ma noi vogliamo clacolare la probabilità che nella classe ci siano almeno due ragazzi con il compleanno nello stesso giorno, cioè $p(A^c)$.

Segue che:

(68.24) $$p_n = p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - \frac{D(365, n)}{365^n}$$

Soprendentemente scopriamo che in una classe di 23 alunni, la *probabilità* che ci siano almeno due ragazzi con il compleanno nello stesso giorno è di circa 1/2.

Infatti:

(68.25) $$p_{23} = 1 - \frac{D(365, 23)}{365^{23}} = \left(1 - \frac{1}{365}\right)\left(1 - \frac{2}{365}\right) ... \left(1 - \frac{23-1}{365}\right)$$

ed il secondo membro vale circa 1/2.

69. Distribuzione binomiale

Supponiamo di lanciare n-volte una moneta. Abbiamo visto che l'*insieme dei casi possibili* è costituito da 2^n elementi. Più precisamente i possibili esiti dell'esperimento sono dati da *n-ple ordinate* $(a_1, a_2, ..., a_n)$, dove $a_i = 1$ se è uscita testa e $a_i = 0$ e se è uscita croce.

Pertanto l'*insieme dei casi possibili* risulta:

(69.1) $$\Omega = \{\omega: \omega = (a_1, a_2, ..., a_n) \text{ tale che } a_i = 0, 1\}.$$

Assegnamo ora una *probabilità* su ciascun caso possibile $\omega = (a_1, a_2, ..., a_n)$ nel seguente modo:

(69.2) $$p(\omega) = p^{(a_1+a_2+...a_n)} \cdot q^{n-(a_1+a_2+...+a_n)}$$

dove $p, q \geqslant 0$ e $p + q = 1$.

Dobbiamo verificare che $p(\omega)$, così definita, sia effettivamente una *probabilità*, cioè che risultino

(69.3) $$0 \leqslant p(\omega) \leqslant 1 \text{ per ogni } \omega \in \Omega$$

(60.4) $$p(\omega_1) + p(\omega_2) + ... + p(\omega_n) = 1$$

Dalla definizione di $p(\omega)$ risulta $p(\omega) > 0$ e, dato che $p, q < 1$, risulta $p(\omega) < 1$ per ogni $\omega \in \Omega$; quindi la (69.3) è subito verificata. Soffermiamoci ora sulla (69.4).

Consideriamo il *caso possibile* $\omega \in \Omega$ in cui, nel lanciare n-volte la moneta, siano uscite esattamente k teste, ossia formalmente consideriamo $\omega = (a_1, a_2, ..., a_n)$ tale che $a_1 + a_2 + ... + a_n = k$.

Ci chiediamo quante siano le possibili *n-ple ordinate* $(a_1, a_2, ..., a_n)$ in cui ci siano k teste; scopriamo che sono tante quanti sono i possibili modi di mettere k-volte il simbolo 1 in n cassettine differenti, ossia sono tante quante le combinazioni di k elementi tra gli n dati: il *coefficiente binomiale* $\binom{n}{k}$ (si veda a tal proposito il paragrafo 65).

Quindi la *probabilità* del *caso possibile* $\omega \in \Omega$, in cui siano uscite k teste, $p(\omega_k)$ è data da:

(69.5) $$p(\omega_k) = \binom{n}{k} p^{(a_1+a_2+...+a_n)} \cdot q^{n-(a_1+a_2+...+a_n)} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

Ora, poiché k è un numero che può andare da 0 a n, segue che

(69.6) $$p(\omega_1) + p(\omega_2) + ... + p(\omega_n) = \binom{n}{0} q^n + ... + \binom{n}{k} p^k q^{n-k} + \binom{n}{n} p^n = (p + q)^n = 1^n = 1.$$

(Si veda il binomio di Newton, paragrafo 66).

Questo dimostra che $p(\omega)$ è effettivamente una *probabilità*.

Riassumiamo ora quanto detto, con i simboli di insiemi e diamo la

definizione di *distribuzione binomiale*. Consideriamo l'insieme

(69.7) $$A_k = \{\omega \in \Omega: \omega = (a_1, a_2, ..., a_n) \text{ tale che } a_1 + a_2 + ... + a_n = k\}$$

A_k rappresenta l'*evento* che, nel lanciare n-volte la moneta, siano uscite k teste.

Abbiamo visto che:

(69.8) $$p(A_k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$$

e $p(A_0) + p(A_1) + ... + p(A_n) = 1$ (poiché k va da 0 ad n).

Se definiamo $p_n(k) = p(A_k)$ e consideriamo l'*insieme dei casi possibili* $\Omega = \{0, 1, ..., n\}$, $p_n(k)$ rappresenta una *probabilità* su Ω che è detta *distribuzione binomiale*.

70. Probabilità condizionata e indipendenza

DEFINIZIONE. – *Dati due eventi* A *e* B *con* $p(B) > 0$, *la probabilità con cui avviene* A *sapendo che* B *si è verificato si dice probabilità condizionata di* A *dato* B; *essa viene indicata con* $p(A\backslash B)$ *e si calcola nel seguente modo*

(70.1) $$p(A\backslash B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$$

Il fatto che $p(B) > 0$ è fondamentale nella definizione di *probabilità condizionata*; se così non fosse avremmo uno zero al denominatore e anche il numeratore sarebbe nullo (poiché $A \cap B \subseteq B$ implica $p(A \cap B) \leq p(B) = 0$; in tal caso si tratterebbe di dover determinare "la probabilità con cui accade un evento impossibile sapendo che ne è accaduto un altro impossibile (analiticamente la (70.1) sarebbe una forma indeterminata).

$p(\cdot\backslash B)$ è effettivamente una probabilità; infatti, analogamente a come fatto in precedenza, si dimostra che valgono le seguenti proprietà:

(70.2) $$p(A\backslash A) = 1$$

(70.3) $$p(\phi\backslash B) = 0$$

(70.4) $$p(A\backslash B) = 1 \text{ se } A \supseteq B \text{ (in particolare } p(\Omega\backslash A) = 1)$$

(70.5) $$p(A_1 \cup A_2\backslash B) = p(A_1\backslash B) + p(A_2\backslash B) \text{ se } A_1 \text{ e } A_2 \text{ sono disgiunti}$$

(70.6) $$p(A^c \backslash B) = 1 - p(A \backslash B)$$

Vediamo brevemente solo la dimostrazione di (70.5):

$$p(A_1 \cup A_2 \backslash B) = \frac{p((A_1 \cup A_2) \cap B)}{p(B)} = \frac{p((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B))}{p(B)} =$$

$$= \frac{p(A_1 \cap B) + p(A_2 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(A_1 \cap B)}{p(B)} + \frac{p(A_2 \cap B)}{p(B)} = p(A_1 \backslash B) + p(A_2 \backslash B)$$

Nel caso in cui p sia la *probabilità uniforme*, poiché $p(A) = N(A)/N(\Omega)$ $\forall A \in \mathcal{A}$ (vedi la (68.17)), risulta

(70.7) $$p(A \backslash B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} \cdot \frac{N(\Omega)}{N(A)} = \frac{N(A \cap B)}{N(A)}.$$

ESEMPIO. – Supponiamo di avere una famiglia con due figli. Ci proponiamo di calcolare la *probabilità* che entrambi i figli siano maschi, sapendo che almeno uno dei figli è maschio.

L'*insieme dei casi possibili* risulta costituito da quattro elementi, ovvero:

(70.8) $$\Omega = \{MM, MF, FM, FF\}$$

dove M = {maschio}; F = {femmina}.

Supponiamo che ciascun caso possibile sia equiprobabile, cioè $p(\omega) = \frac{1}{4}$ $\forall \omega \in \Omega$.

Sia A l'evento che il figlio più grande sia maschio e sia B l'evento che il figlio più piccolo sia maschio.

Di conseguenza $A \cup B$ sarà l'evento che almeno uno dei figli sia maschio e $A \cap B$ sarà l'evento che entrambi i figli siano maschi. In simboli abbiamo

(70.9) $$A = \{FM, MM\};\ B = \{MF, MM\};$$
$$A \cup B = \{MM, MF, FM\};\ A \cap B = \{MM\}.$$

La probabilità che entrambi i figli siano maschi sapendo che almeno uno di essi è maschio sarà quindi data dalla *probabilità condizionata* dell'evento $A \cap B$ dato l'evento $A \cup B$.

Ora, sotto le ipotesi di equiprobabilità richiesta, risulta

(70.10) $$p(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ e } p(A \cup B) = \frac{3}{4}.$$

segue che:

(70.11) $$p(A \cap B \backslash A \cup B) = \frac{((A \cap B) \cap (A \cup B))}{p(A \cup B)} = \frac{p(A \cap B)}{p(A \cup B)} = \frac{1/4}{3/4} = \frac{1}{3}$$

Si può inoltre verificare che la probabilità che entrambi i figli siano maschi sapendo che il più grande è maschio vale $\frac{1}{2}$. Essa infatti è data da

(70.12) $$p(A \cap B \backslash A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

Introduciamo adesso il concetto di *indipendenza* fra eventi.

Siano A e B due eventi. A livello intuitivo A e B sono indipendenti fra loro se il verificarsi dell'evento B non ha effetti sulla probabilità che si verifichi l'evento A, cioè $p(A \backslash B) = p(A)$ (supponendo $p(A) > 0$).

Per cui, dalla definizione di probabilità condizionata

(70.13) $$p(A \backslash B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = p(A) \text{ da cui } p(A \cap B) = p(A)\, p(B)$$

Analogamente, il verificarsi dell'evento A non ha effetti sulla probabilità che si verifichi l'evento B, cioè:

(70.14) $$p(B \backslash A) = \frac{p(B \cap A)}{p(A)} = p(B) \text{ da cui: } p(A \cap B) = p(A)\, p(B)$$

Dalle (70.13) e (70.14) segue

DEFINIZIONE. – *Due eventi* A *e* B *si dicono indipendenti se:*

(70.15) $$p(A \cap B) = p(A)\, p(B)$$

Per quanto riguarda l'indipendenza di famiglie di eventi, vale la:

DEFINIZIONE. – *Siano* $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ *due famiglie di eventi.*
Esse sono indipendenti se

(70.16) $$p(A_1 \cap A_2) = p(A_1)\, p(A_2) \qquad \forall\, A_1 \in \mathcal{A}_1 \text{ e } A_2 \in \mathcal{A}_2.$$

Il concetto di indipendenza tra due eventi e tra due famiglie di eventi si può estendere ad un qualunque numero finito di eventi e famiglie.

DEFINIZIONE. – *Siano* $A_1, A_2, ..., A_n$ *eventi. Essi si dicono indipendenti se*

(70.17) $$p(A_{i1} \cap A_{i2} \cap .... \cap A_{ik}) = p(A_{i1})\, p(A_{i2}) ... p(A_{ik})$$

$$\forall\, k = 1, 2, .., n \text{ e } 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$$

DEFINIZIONE. – *Siano* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n$ *famiglie di eventi.*
Esse si dicono indipendenti se gli eventi $A_1, A_2, ..., A_n$ *sono indipendenti per ogni* $A_i \in \mathcal{A}_i$.

71. Variabili aleatorie

Fino ad ora abbiamo introdotto alcune nozioni che ci hanno permesso di definire la funzione *probabilità* e di studiarne alcune sue proprietà; abbiamo infatti defiito l'*insieme dei casi possibili* Ω e la famiglia degli *eventi* $\mathcal{A}$. Chiameremo la *terna* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *spazio di probabilità* e da ora in poi lavoreremo su di esso. (Considereremo solo *spazi di probabilità* finita, cioè spazi su insiemi Ω di cardinalità finita).

DEFINIZIONE. – Dato uno *spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, la funzione

(71.1) $$\xi: \Omega \to \mathbf{R} \text{ tale che}$$

$$\text{l'insieme } \{\omega \in \Omega \text{ tale che } \xi(\omega) \leq x\} \in A \text{ per ogni } x \in \mathbf{R}$$

si chiama *variabile aleatoria.*

Se ad esempio A è l'insieme delle parti di Ω, allora ogni funzione definita su Ω a valori reali è una *variabile aleatoria.*

Osserviamo che una variabile aleatoria è definita in modo tale che l'insieme $\{\omega \in$ tale che $\xi(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \in (-\infty, x]\}$ sia un evento, per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Quindi dire che ξ è una variabile aleatoria significa che è possibile calcolare $p(\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x)$, cioè la probabilità di un evento.

Nel caso dell'esperimento che consiste nel lanciare due volte una moneta, dove l'*insieme dei casi possibili* è dato da

(71.2) $$\Omega = \{TT, TC, CT, CC\} \quad \text{dove } T = \{\text{testa}\};\ C = \{\text{croce}\}$$

la funzione

(71.3) $$\xi(\omega) = \begin{cases} 2 \text{ se } \omega = TT \\ 1 \text{ se } \omega = TC, CT \\ 0 \text{ se } \omega = CC \end{cases}$$

che rappresenta il numero di teste nei due lanci, è una *variabile aleatoria.*

Un altro possibile esempio di *variabile aleatoria* è dato dalla *funzione indicatrice* (o *caratteristica*) di un insieme, definita da:

(71.4) $$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \notin A \end{cases} \qquad \text{con A insieme.}$$

Una distinzione importante si ha tra *variabili aleatorie* discrete e continue; noi ci occuperemo solo di quelle discrete, cioè di *variabili aleatorie* che ammettono un numero finito di valori (o più generalmente un insieme numerabile di valori).

72. Distribuzione di probabilità e funzione di distribuzione

Sia ξ una *variabile aleatoria* discreta; consideriamo l'insieme X costituito da tutti i possibili valori assunti dalla *variabile aleatoria* ξ, ossia formalmente

(72.1) $$X = \{x \in \mathbf{R} \text{ tale } \exists \omega \in \Omega \text{ tale che } \xi(\omega) = x\} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

Risulta $X \subset \mathbf{R}$; consideriamo inoltre $H = P(X)$ (dove $P(X)$ indica l'insieme delle parti di X) e definiamo una probabilità p_ξ sull'insieme X (in particolare definiamo p_ξ su $(X, \mathcal{H})$ in modo tale che la *terna* $(X, \mathcal{H}, p_\xi)$ risulti uno *spazio di probabilità*).

La *probabilità* p_ξ è definita sui singoli valori $x_1, x_2, ..., x_n$ che può assumere la *variabile aleatoria* ξ, ossia:

(72.2) $$p_\xi(x_i) = p(\omega \in \Omega \text{ tale che } \xi(\omega) = x_i);\ x_i \in \mathbf{R}$$

$p_\xi(x_i)$ è cioè la *probabilità* che ξ assuma il valore x_i.

Diremo che è assegnata la *distribuzione di probabilità* (o *legge*) della *variabile aleatoria* ξ, se è assegnato l'insieme X dei possibili valori assunti

DEFINIZIONE. – *Siano* $A_1, A_2, ..., A_n$ *eventi. Essi si dicono indipendenti se*

$$p(A_{i1} \cap A_{i2} \cap .... \cap A_{ik}) = p(A_{i1})\, p(A_{i2}) ... p(A_{ik}) \qquad (70.17)$$

$$\forall\, k = 1, 2, .., n \text{ e } 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_k \leq n$$

DEFINIZIONE. – *Siano* $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, ..., \mathcal{A}_n$ *famiglie di eventi.*
Esse si dicono indipendenti se gli eventi $A_1, A_2, ..., A_n$ *sono indipendenti per ogni* $A_i \in \mathcal{A}_i$.

71. Variabili aleatorie

Fino ad ora abbiamo introdotto alcune nozioni che ci hanno permesso di definire la funzione *probabilità* e di studiarne alcune sue proprietà; abbiamo infatti defiito l'*insieme dei casi possibili* Ω e la famiglia degli *eventi* $\mathcal{A}$. Chiameremo la *terna* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$ *spazio di probabilità* e da ora in poi lavoreremo su di esso. (Considereremo solo *spazi di probabilità* finita, cioè spazi su insiemi Ω di cardinalità finita).

DEFINIZIONE. – Dato uno *spazio di probabilità* $(\Omega, \mathcal{A}, p)$, la funzione

$$\xi: \Omega \to \mathbf{R} \text{ tale che} \qquad (71.1)$$

$$\text{l'insieme } \{\omega \in \Omega \text{ tale che } \xi(\omega) \leq x\} \in A \text{ per ogni } x \in \mathbf{R}$$

si chiama *variabile aleatoria.*

Se ad esempio A è l'insieme delle parti di Ω, allora ogni funzione definita su Ω a valori reali è una *variabile aleatoria.*

Osserviamo che una variabile aleatoria è definita in modo tale che l'insieme $\{\omega \in$ tale che $\xi(\omega) \leq x\} = \{\omega \in \Omega: \xi(\omega) \in (-\infty, x]\}$ sia un evento, per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Quindi dire che ξ è una variabile aleatoria significa che è possibile calcolare $p(\omega \in \Omega: \xi(\omega) \leq x)$, cioè la probabilità di un evento.

Nel caso dell'esperimento che consiste nel lanciare due volte una moneta, dove l'*insieme dei casi possibili* è dato da

$$\Omega = \{TT, TC, CT, CC\} \quad \text{dove } T = \{\text{testa}\};\ C = \{\text{croce}\} \qquad (71.2)$$

la funzione

$$\xi(\omega) = \begin{cases} 2 \text{ se } \omega = TT \\ 1 \text{ se } \omega = TC, CT \\ 0 \text{ se } \omega = CC \end{cases} \qquad (71.3)$$

che rappresenta il numero di teste nei due lanci, è una *variabile aleatoria.*

Un altro possibile esempio di *variabile aleatoria* è dato dalla *funzione indicatrice* (o *caratteristica*) di un insieme, definita da:

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{se } \omega \in A \\ 0 & \text{se } \omega \notin A \end{cases} \quad \text{con A insieme.} \qquad (71.4)$$

Una distinzione importante si ha tra *variabili aleatorie* discrete e continue; noi ci occuperemo solo di quelle discrete, cioè di *variabili aleatorie* che ammettono un numero finito di valori (o più generalmente un insieme numerabile di valori).

72. Distribuzione di probabilità e funzione di distribuzione

Sia ξ una *variabile aleatoria* discreta; consideriamo l'insieme X costituito da tutti i possibili valori assunti dalla *variabile aleatoria* ξ, ossia formalmente

$$X = \{x \in \mathbf{R} \text{ tale } \exists \omega \in \Omega \text{ tale che } \xi(\omega) = x\} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}. \qquad (72.1)$$

Risulta $X \subset \mathbf{R}$; consideriamo inoltre $H = P(X)$ (dove $P(X)$ indica l'insieme delle parti di X) e definiamo una probabilità p_ξ sull'insieme X (in particolare definiamo p_ξ su $(X, \mathcal{H})$ in modo tale che la *terna* $(X, \mathcal{H}, p_\xi)$ risulti uno *spazio di probabilità*).

La *probabilità* p_ξ è definita sui singoli valori $x_1, x_2, ..., x_n$ che può assumere la *variabile aleatoria* ξ, ossia:

$$p_\xi(x_i) = p(\omega \in \Omega \text{ tale che } \xi(\omega) = x_i);\ x_i \in \mathbf{R} \qquad (72.2)$$

$p_\xi(x_i)$ è cioè la *probabilità* che ξ assuma il valore x_i.

Diremo che è assegnata la *distribuzione di probabilità* (o *legge*) della *variabile aleatoria* ξ, se è assegnato l'insieme X dei possibili valori assunti

da ξ e la *probabilità* con cui ξ assume ciascun valore; essa è data dall'insieme:

(72.3) $$(p_\xi(x_1), p_\xi(x_2), ..., p_\xi(x_n)).$$

Sia, ad esempio ξ una *variabile aleatoria* che assume due soli valori: 0, 1 la sua *distribuzione di probabilità* è data da

(72.4) $$p_\xi(x) = p^x(1-p)^{1-x} \qquad \text{con } x = 0,1$$

Da cui risulta $p_\xi(1) = p$ e $p_\xi(0) = 1 - p$. p_ξ, così definita è nota come *variabile aleatoria di Bernoulli.*

Più generalmente è detta *variabile aleatoria binomiale*, una *variabile aleatoria* ξ che assume valori nell'insieme $X = \{0, 1, ..., n\}$ con *distribuzione di probabilità*

(72.5) $$p_\xi(x) = \binom{n}{x} p^x(1-p)^{n-x} \qquad \text{con } x = 0, 1, ..., n$$

Nella figura 8.1 del paragrafo 67 è rappresentata la distribuzione di probabilità (dove $p_\xi(x) = p(n, k)$ e $n = 20$).

È possibile inoltre definire la *funzione di distribuzione* associata alla *variabile aleatoria* ξ, vale infatti la seguente:

DEFINIZIONE. – *Sia* $x \in \mathbf{R}$; *la funzione:*

(72.6) $$F_\xi(x) = p(\omega \in \Omega \text{ tale che } \xi(\omega) \leq x)$$

è detta funzione di distribuzione della variabile aleatoria ξ.

Tale funzione risulta strettamente legata alla *distribuzione di probabilità*, data infatti $(p_\xi(x_2), p_\xi(x_2), ..., p_\xi(x_n))$ *distribuzione di probabilità*, risulta:

(72.7) $$F_\xi(x) = p_\xi(x_1) + p_\xi(x_2) + ... + p_\xi(x_k) \text{ con } x_i \leq x \text{ per } i = 1, 2, ..., k$$

La *funzione di distribuzione* è una funzione definita in $\mathbf{R}$, a valori nell'intervallo $[0, 1] \subset \mathbf{R}$, e si può dimostrare che:

(72.8) $$\lim_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0$$

(72.9) $$\lim_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1$$

è inoltre una funzione monotona crescente.

Con questi nuovi elementi, possiamo introdurre il concetto di indipendenza, anche per le variabili aleatorie.

DEFINIZIONE. – *Siano* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ *variabili aleatorie; esse sono indipendenti se:*

(72.10) $$p(\xi_1 = x_1, \xi_2 = x_2, ..., \xi_n = x_n) = \\ = p(\xi_1 = x_1)p(\xi_2 = x_2) ... p(\xi_n = x_n) \text{ con } x_i \in \mathbf{R},\ i = 1, 2, ..., n$$

73. Valor medio e varianza

DEFINIZIONE. – Il *valor medio (detto anche valor atteso* o *speranza) di una variabile aleatoria* ξ, *a valori nell'insieme* $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, si *indica con* $E(\xi)$ *ed è il numero dato da:*

(73.1) $$E(\xi) = x_1 p_\xi(x_1) + x_2 p_\xi(x_2) + ... + x_k p_\xi(x_k)$$

dove $(p_\xi(x_1), p_\xi(x_2), ..., p_\xi(x_k))$ è la *distribuzione di probabilità della variabile aleatoria* ξ.

Anticipando i concetti del capitolo 12 sugli *integrali*, il lettore può notare che il *valor medio* $E(\xi)$ non è altro che l'*integrale* (improprio) su $\mathbf{R}$ della funzione $\xi(\omega)$.

PROPOSIZIONE. – *Sia* ξ *variabile aleatoria e* c *numero reale. Valgono le seguenti:*

(73.2) $$E(c) = c$$

(73.3) $$E(\xi + c) = E\xi + c$$

(73.4) $$E(c\xi) = cE(\xi)$$

Dimostrazione di (73.2): $E(c) = c\,(p_\xi(x_1) + p_\xi(x_2) + \ldots + p_\xi(x_k)) = c$ *dato che* $p_\xi(x_1) + p_\xi(x_2) + \ldots + p_\xi(x_k) = 1$, *essendo una distribuzione di probabilità*

$$E(\xi + c) = (x_1 + c)\,p_\xi(x_1) + (x_2 + c)\,p_\xi(x_2) + \ldots + (x_k + c)\,p_\xi(x_k) =$$

(73.3) $$= x_1\,p_\xi(x_1) + cp_\xi(x_1) + x_2p_\xi(x_2) + cp_\xi(x_2) + \ldots + x_kp_\xi(x_k) + cp_\xi(x_k) =$$

$$= x_1p_\xi(x_1) + x_2p_\xi(x_2) + \ldots + x_kp_\xi(x_k) + c(p_\xi(x_1) + p_\xi(x_2) + \ldots + p_\xi(x_k)) = E(\xi).$$

(73.4) $$E(c\xi) = cx_1p_\xi(x_1) + cx_2p_\xi(x_2) + \ldots + cx_kp_\xi(x_k) = c(x_1p_\xi(x_1) + x_2p_\xi(x_2) + \ldots + x_kp_\xi(x_k)) = cE(\xi).$$

Abbiamo definito il *valor medio* di una *variabile aleatoria* ξ, a valori nell'insieme $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$. Sia ora φ: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ una fnzione a valori reali, allora $\varphi\circ\xi$: $\Omega \to \mathbf{R}$ rimane una *variabile aleatoria* ed è quindi possibile calcolare il *valor medio* che, in base alla (73.1) è dato da:

$$E(\varphi\circ\xi) = \varphi(x_1)\,p_\xi(x_1) + \varphi(x_2)\,p_\xi(x_2) + \ldots + \varphi(x_k)p_\xi(x_k)$$

Consideriamo la funzione $\varphi(x) = (x - E(x))^2$. Il *valor medio* di tale funzione composta con la *variabile aleatoria* ξ si dice *varianza* della *variabile aleatoria* ξ, più precisamente:

DEFINIZIONE. – La *varianza di una variabile aleatoria* ξ *si indica con* $\mathrm{var}(\xi)$ *ed è data dal numero:*

(73.6) $$\mathrm{var}(\xi) = E((\xi - E(\xi))^2)$$

Osserviamo che $E((\xi - E(\xi))^2) = E(\xi^2 - 2\,\xi E(\xi) + (E(\xi))^2) = E(\xi^2) - 2.\,(E(\xi))^2 + (E(\xi))^2 = E(\xi^2) - (E(\xi))^2$, *quindi la (73.6) si può anche scrivere:*

(73.7) $$\mathrm{var}(\xi) = E(\xi^2) - (E(\xi))^2$$

PROPOSIZIONE. – *Sia* ξ *una variabile aleatoria e* c *un numero reale, valgono le seguenti relazioni:*

(73.8) $$\mathrm{var}(c) = 0$$

(73.9) $$\mathrm{var}(\xi + c) = \mathrm{var}(\xi)$$

(73.10) $$\mathrm{var}(c\xi) = c^2\,\mathrm{var}(\xi)$$

Dimostrazione. – (73.8) usando la (73.7) $\mathrm{var}(c) = E(c^2) - (E(c))^2 = c^2 - c^2 = 0$ (grazie alla (73.2)).

(73.9) $$\begin{aligned} \mathrm{var}(\xi + c) &= E((\xi + c)^2) - (E(\xi) + c)^2 = \\ &= (E(\xi^2) + 2cE(\xi) + c^2) - ((E(\xi))^2 + 2cE\,(\xi) - c^2) = \\ &= E(\xi^2) - (E(\xi))^2 = \mathrm{var}(\xi) \text{ sempre grazie alla (30.7)} \end{aligned}$$

(73.10) $$\begin{aligned} \mathrm{var}(c\xi) &= E((c\xi)^2) - (E(c\xi))^2 = E(c^2\xi^2) - (cE(\xi))^2 = \\ &= c^2E(\xi^2) - c^2(E(\xi))^2 = c^2(E(\xi^2) - E(\xi)^2) = c^2\,\mathrm{var}(\xi). \end{aligned}$$

La *varianza* di una *variabile aleatoria* indica quanto dista ξ dal suo *valor medio*.

Se $\mathrm{var}(\xi) = 0$, ne segue che la *variabile aleatoria* ξ è costante, infatti per la (73.6) $\mathrm{var}(\xi)$ risulta essere una somma di termini non negativi, ossia:

(73.11) $$\begin{aligned} \mathrm{var}(\xi) &= E((\xi - E(\xi))^2) = \\ &= (x_1 - E(\xi))^2\,p_\xi(x_1) + \ldots + (x_k - E(\xi))^2\,p_\xi(x_k) \end{aligned}$$

Quindi $\mathrm{var}(\xi) = 0$ se e solo se $(x_i - E(\xi))^2 = 0$ per ogni $i = 1, 2, \ldots, k$, da cui $x_i = E(\xi)$ $\forall i = 1, 2, \ldots, k$, che significa che ξ è costante.

DEFINIZIONE. – Siano ξ ed η due *variabili aleatorie. La covarianza di* ξ *ed* η *si indica con* $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$ *ed è data dal numero:*

(73.12) $$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = E((\xi - E(\xi))\,(\eta - E(\eta))).$$

Osserviamo che $E((\xi - E(\xi))\,(\eta - E(\eta))) = E(\xi\eta) - 2E(\xi)\,E(\eta) + E(\xi)\,E(\eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)\,E(\eta)$, quindi la (73.12) si può anche scrivere:

(73.13) $$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)\,E(\eta)$$

PROPOSIZIONE. – *Siano* ξ *ed* η *due variabili aleatorie indipendenti, valgono le seguenti:*

(73.14) $$E(\xi\eta) = E(\xi)\,E(\eta)$$

(73.15) $$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = 0$$

Dimostrazione. – (73.14) Supponiamo che ξ ed η siano *variabili aleatorie* a valori rispettivamente negli insiemi $X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$ ed $Y = \{y_1, y_2, ..., y_h\}$; pertanto dalla definizione di valor medio (73.1) segue che:

$$E(\xi\eta) = x_1y_1\, p(\xi = x_1, \eta = y_1) + x_2y_2\, p(\xi = x_2, \eta = y_2)$$

$$+ ... + x_ky_h p(\xi = x_k, \eta = y_h)$$

Ora, dalla definizione (72.10) di *variabili aleatorie* indipendenti, data nel precedente paragrafo, otteniamo subito la tesi; infatti diciamo che ξ ed η sono indipendenti se $p(\xi = x_i, \eta = y_j) = p(\xi = x_i)\, p(\eta = y_j)$ con $i = 1, 2, ..., k$ e $j = 1, 2, ..., h$; pertanto:

$$E(\xi\eta) = x_1y_1\, p(\xi = x_1)\, p(\eta = y_1) + ... + x_ky_h\, p(\xi = x_k)\, p(\eta = y_h) =$$

$$= x_1\, p_\xi(x_1)\, y_1p_\xi(y_1) + ... + x_kp_\xi(x_k)\, y_hp_\eta(y_h) = E(\xi)\, E(\eta)$$

A questo punto la (73.15) segue direttamente dato che per la (73.13) $cov(\xi, \eta) = E(\xi\eta) - E(\xi)\, E(\eta)$.

Vediamo ora alcune relazioni sulla *varianza della somma di variabili aleatorie*; siano ξ, η variabili aleatorie, allora:

(73.16) $$var(\xi + \eta) = var(\xi) + var(\eta) + 2cov(\xi, \eta)$$

Infatti $var(\xi + \eta) = E((\xi - E(\xi)) + (\eta - E(\eta)))^2 = var(\xi) + var(\eta) + 2E((\xi - E(\xi))\, (\eta - E(\eta))) = var(\xi) + var(\eta) + 2cov\, (\xi, \eta)$.

Notiamo che se ξ ed η sono indipendenti, per la (73.15) $cov(\xi, \eta) = 0$, da cui:

(73.17) $var(\xi + \eta) = var(\xi) + var(\eta)$ ξ, η *variabili aleatorie indipendenti.*

74. La legge dei grandi numeri

Introduciamo in ambito probabilistico una differente nozione di convergenza di una successione, che abbiamo già visto nel capitolo 5.

DEFINIZIONE. – *Diciamo che una successione di variabili aleatorie* $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ *converge in probabilità* alla *variabile aleatoria* ξ *per* $n \to +\infty$ *se e solo se:*

(74.1) $$\forall\varepsilon>0 \quad \lim_{n\to+\infty} p(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) = 0$$

La *convergenza in probabilità* ci è utile per poter enunciare un risultato di notevole importanza.

TEOREMA (LEGGE DEI GRANDI NUMERI) – *Sia* ξ_n *una successione di variabili aleatorie indipendenti tutte con valor medio* μ e *varianza* σ^2. *Sia* $s_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$, allora $\frac{s_n}{n}$ *converge in probabilità a* μ; *ossia*

(74.2) $$\forall\varepsilon>0 \quad \lim_{n\to+\infty} p\left(\left|\frac{s_n}{n} - \mu\right| > \varepsilon\right) = 0$$

Ci è utile, per la dimostrazione di questo teorema la seguente:

PROPOSIZIONE (DISUGUAGLIANZA DI CHEBYSHEV). – *Sia* $(\Omega, \mathcal{A}, q)$ *uno spazio di probabilità e sia* ξ *una variabile aleatoria non negativa, allora:*

(74.3) $$p(\xi \geq \varepsilon) \leq \frac{E(\xi)}{\varepsilon} \quad \forall\varepsilon>0$$

Dimostrazione. – Sia $\xi = \xi I_A + \xi I_{A'}$ (ricordiamo che I_A è la funzione indicatrice dell'insieme A definita in (71.4)) prendiamo $A = \{\omega\in\Omega$ tale che $\xi(\omega) \geq \varepsilon\}$ $\forall\varepsilon>0$ (per brevità scriveremo $A = \{\xi \geq \varepsilon\}$; pertanto, dato che $\xi \geq \varepsilon$ nell'insieme $\{\xi \geq \varepsilon\}$ e $\xi I_{\{\xi < \varepsilon\}} \geq 0$ risulta:

(74.4) $$\xi = \xi I_{\{\xi \geq \varepsilon\}} + \xi I_{\{\xi < \varepsilon\}} \geq \varepsilon I_{\{\xi \geq \varepsilon\}}$$

entrambi i membri della (74.4) sono variabili aleatorie; possiamo quindi calcolarne il *valor medio*:

(74.5) $$E(\xi) \geq E(\varepsilon I_{\{\xi \geq \varepsilon\}})$$

Ricordando ora che per la (73.4) $E(c\xi) = cE(\xi)$, segue che $E(cI_{\{\xi \geq \varepsilon\}}) = \varepsilon\, p(\xi \geq \varepsilon)$ e quindi la tesi:

COROLLARIO. – *Sia ξ una variabile aleatoria, valgono le seguenti proprietà:*

(74.6) $$p(|\xi| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} E(|\xi|) \qquad \forall \varepsilon > 0 ,$$

(74.7) $$p(|\xi| \geq \varepsilon) = p(\xi^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} E(\xi^2) \qquad \forall \varepsilon > 0 ,$$

(74.8) $$p(|\xi - E(\xi)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathrm{var}(\xi)}{\varepsilon^2} \qquad \forall \varepsilon > 0 .$$

Dimostrazione della legge dei grandi numeri: applichiamo la (74.8) alla *variabile aleatoria* $\frac{s_n}{n}$:

(74.9) $$p\left(\left|\frac{s_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\mathrm{var}\left(\frac{s_n}{n}\right)}{\varepsilon^2} .$$

Osserviamo che $E\left(\frac{s_n}{n}\right) = \mu$ e questo discende da una proprietà di linearità del *valor medio* che non discutiamo in dettaglio in questa sede.

Ora, per la (73.10) $\mathrm{var}\left(\frac{s_n}{n}\right) = \frac{1}{n^2} \mathrm{var}\,(s_n)$; poiché s_n è una successione di *variabili aleatorie* indipendenti, segue che $\mathrm{var}(s_n) = \mathrm{var}(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = n\sigma^2$; pertanto $\mathrm{var}\left(\frac{s_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}$ e:

(74.10) $$p\left(\left|\frac{s_n}{n} - \mu\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \to_{n \to +\infty} 0.$$

CAPITOLO 9

DERIVATE

75. Tasso di accrescimento. Significato meccanico della derivata

Consideriamo un semplice processo di crescita di un corpo, supponendo che il peso p del corpo vari al crescere del tempo; cioè supponiamo che il peso sia una funzione del tempo $p = p(t)$.

Prendiamo in considerazione variazioni di peso a partire da un certo istante t. Al tempo t il peso è $p(t)$, mentre all'istante $t + h$, dopo che è trascorso un tempo uguale ad h, il peso è $p(t + h)$. Quindi, nell'intervallo di tempo h, il cambio di peso è $p(t + h) - p(t)$. Il rapporto

(75.1) $$\frac{p(t + h) - p(t)}{h} .$$

dà una indicazione di quanto sia cambiato il peso per unità di tempo. Più precisamente il rapporto (75.1) esprime la variazione *media* per unità di tempo del peso nell'intervallo $[t, t + h]$. Si chiama anche *tasso medio di accrescimento*, o tasso medio di variazione, o *velocità media di accrescimento*.

Invece della variazione *media* nell'intervallo $[t, t + h]$, spesso è più utile la variazione *istantanea* al tempo t. Intuitivamente si considera l'espressione (75.1) per alcuni valori di h sempre più vicini a zero. Con il linguaggio più preciso introdotto nei capitoli precedenti, si calcola il limite, per $h \to 0$, del rapporto (75.1):

(75.2) $$\textit{Tasso di accrescimento} = \lim_{h \to 0} \frac{p(t + h) - p(t)}{h} .$$

Si noti come sia indispensabile usare il limite per $h \to 0$, dato che, se nella (75.1) si pone direttamente $h = 0$, si ottiene una espressione senza significato. Invece, col linguaggio dei limiti, il limite in (75.2) è una forma indeterminata 0/0 (se $p(t)$ è una funzione continua).

Per mostrare come il tasso di accrescimento possa essere effettivamente calcolato, consideriamo a titolo di esercizio il caso in cui il peso dipenda dal tempo in modo quadratico

(75.3) $$p(t) = t^2 ;$$

per ogni $h \neq 0$, risulta

(75.4) $$\frac{p(t + h) - p(t)}{h} = \frac{(t + h)^2 - t^2}{h} = \frac{t^2 + 2ht + h^2 - t^2}{h} = 2t + h.$$

L'ultimo membro della (75.4) tende a 2t per $h \to 0$. Quindi il tasso di accrescimento vale 2t. Ciò significa che, al crescere del tempo t (> 0), non soltanto il peso cresce come t^2, ma anche il *cambiamento* di peso per unità di tempo aumenta (nel caso in considerazione, in modo proporzionale al tempo).

Proponiamo un esempio numerico: secondo la legge $p(t) = t^2$, al tempo t = 10 il peso risulta essere uguale a p(10) = 100. Il tasso di accrescimento, uguale a 2t, al tempo t = 10 vale 20. Ciò significa che, dopo una unità di tempo, il peso del corpo aumenta di circa 20 unità; quindi p(11) vale all'incirca 120. Si noti che effettivamente il valore trovato 120 non differisce di molto da $p(11) = 11^2 = 121$; approfondiremo questo aspetto nel paragrafo 80.

Abbiamo già detto che "velocità di accrescimento" è sinonimo di "tasso di accrescimento"; ciò deriva dal fatto che una velocità si definisce in modo analogo a quanto fatto sopra. Consideriamo ad esempio un'automobile che percorre una strada, ed indichiamo con s(t) lo spazio percorso in funzione del tempo t. La *velocità media* dell'automobile nell'intervallo di tempo [t, t + h] è uguale al rapporto tra lo spazio percorso s(t + h) − s(t) ed il tempo h impiegato a fare il percorso. La *velocità istantanea* (quella indicata dal tachimetro sul cruscotto dell'auto, se s(t) è espresso in chilometri e t in ore), è il limite, per $h \to 0$, della velocità media; quindi

$$\text{(75.5)} \qquad \textit{Velocità istantanea} = \lim_{h \to 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

È chiaro che nei due esempi precedenti lo schema matematico è identico. In entrambi gli esempi occorre calcolare *il limite di un rapporto incrementale*, così chiamato perché a denominatore c'è l'incremento h della variabile indipendente, mentre a numeratore c'è l'incremento della variabile dipendente.

Occorre calcolare il limite del rapporto incrementale anche in molte altre situazioni, analoghe a quelle dei due esempi esposti. Ad esempio, se si considera la densità di un fluido o di una popolazione, o l'accelerazione di un corpo che si muove di moto rettilineo. Un altro esempio, di tipo geometrico, è studiato nel paragrafo 80.

Introdurremo nel prossimo paragrafo la *derivata* come limite del rapporto incrementale, quando l'incremento tende a zero.

76. Definizione di derivata

Sia f(x) definita nell'intervallo aperto (a, b) e sia x un punto di (a, b); si dice che la funzione f è *derivabile* nel punto x se *esiste finito il limite del rapporto incrementale*

$$\text{(76.1)} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Tale limite è la *derivata* di f, e si indica con una delle seguenti notazioni, fra loro equivalenti:

$$\text{(76.2)} \qquad f'(x), \qquad \frac{df}{dx}, \qquad Df(x), \qquad y', \qquad \frac{dy}{dx}, \qquad Dy.$$

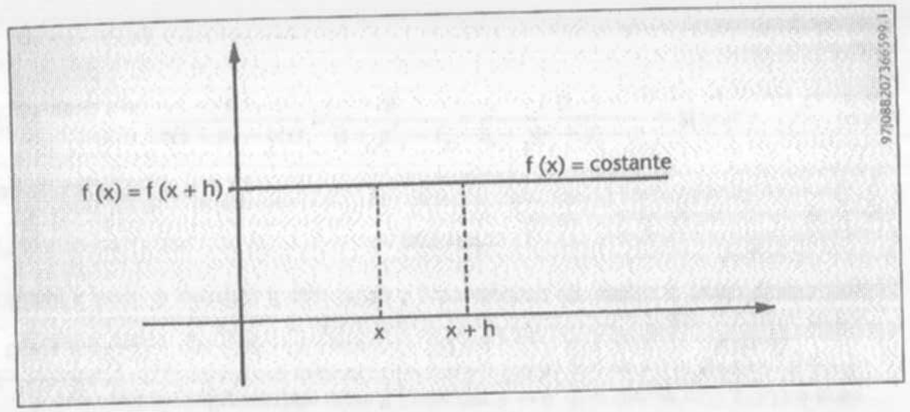


Figura 9.1

Si dice che f è *derivabile nell'intervallo aperto* (a, b) se è derivabile in ogni punto $x \in (a, b)$.

In alcuni casi è utile considerare al posto della definizione (76.1), invece del limite completo per $h \to 0$, soltanto il limite destro per $h \to 0^+$, oppure il limite per $h \to 0^-$. Nel primo caso si parla di *derivata destra*, nel secondo caso si parla di *derivata sinistra*.

Se f(x) è definita in [a, b], si dice che f è *derivabile nell'intervallo chiuso* [a, b] se è derivabile in ogni punto $x \in (a, b)$ e inoltre se f ammette derivata destra nel punto x = a e derivata sinistra nel punto x = b.

Consideriamo alcuni esempi. Iniziamo dalla funzione costante f(x) = q, per ogni $x \in \mathbf{R}$, e proviamo che tale funzione è derivabile su tutto **R** e che la derivata è identicamente nulla; infatti il rapporto incrementale vale costantemente zero, qualunque sia l'incremento $h \neq 0$ (si veda la figura 9.1):

$$\text{(76.3)} \qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{q - q}{h} = \frac{0}{h} = 0$$

e quindi anche il limite del rapporto incrementale, per $h \to 0$, vale zero (il lettore non cada nell'errore di considerare il limite per $h \to 0$ di (76.3) una forma indeterminata 0/0).

Più generalmente verifichiamo che la derivata della funzione f(x) = mx + q, con m e q costanti (il cui grafico è una retta), è identicamente uguale ad m; infatti il rapporto incrementale vale costantemente m, qualunque sia $h \neq 0$:

$$\text{(76.4)} \qquad \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{[m(x+h) + q] - [mx + q]}{h} = m.$$

Abbiamo già calcolato nel paragrafo precedente la derivata della funzione $f(x) = x^2$, trovando $f'(x) = 2x$.

Verifichiamo invece che la funzione $f(x) = |x|$ non è derivabile per $x = 0$. Infatti se $h \neq 0$ si ha

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|0+h| - |0|}{h} = \frac{|h|}{h}. \tag{76.5}$$

Abbiamo già incontrato questa funzione nella (55.1). Il limite per $h \to 0$ del rapporto incrementale non esiste, perché risulta:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{|h|}{h} = 1; \qquad \lim_{h \to 0^-} \frac{|h|}{h} = -1. \tag{76.6}$$

Quindi $f(x) = |x|$ non è derivabile per $x = 0$; mentre esistono le derivate destra e sinistra, uguali rispettivamente a $+1$ e -1.

Confrontiamo la nozione di derivabilità con quella di continuità. Ricordiamo che una funzione f è continua in un punto x se (riprendiamo la definizione (54.2) cambiando x_0 con x, e x con $x + h$):

$$\lim_{h \to 0} f(x+h) = f(x). \tag{76.7}$$

L'esempio precedente, con $f(x) = |x|$, mostra che una funzione continua può non essere derivabile. Invece, *ogni funzione derivabile in* x *è continua in* x; infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} f(x+h) &= f(x) + \lim_{h \to 0} [f(x+h) - f(x)] = \\ &= f(x) + \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \lim_{h \to 0} h = \\ &= f(x) + f'(x) \cdot 0 = f(x). \end{aligned} \tag{76.8}$$

Se una funzione è derivabile in tutti i punti di un intervallo (a, b), allora la sua derivata $f'(x)$ è una funzione definita su (a, b). Se questa funzione è a sua volta derivabile, diremo che la sua derivata $(f')'$ è la *derivata seconda* della funzione f, ed indicheremo tale derivata con uno dei simboli:

$$f'', \quad \frac{d^2 f}{dx^2}, \quad D^2 f, \quad y'', \quad \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad D^2 y. \tag{76.9}$$

Se a sua volta la derivata seconda è derivabile parleremo di derivata

terza f''' è così via. Useremo, il simbolo $f^{(n)}$ per la derivata n-sima. Può accadere che una funzione ammetta derivate fino ad un ordine $n \in \mathbf{N}$; oppure che sia derivabile infinite volte, cioè che ammetta derivate di qualsiasi ordine n.

Ad esempio, la funzione $f(x) = x^2$ ammette derivate di ogni ordine; infatti abbiamo verificato nel paragrafo precedente che $f'(x) = 2x$; poi dalla (76.4) segue che $f''(x) = 2$ e dalla (76.3) che $f'''(x) = 0$; dato che f''' è costante, si ottiene $f^{(4)} = 0$ e, analogamente, $f^{(n)}(x) = 0$ per ogni $n \geq 3$.

Invece, la funzione $f(x) = x \cdot |x|$ ammette per $x = 0$ derivata prima, ma non derivata seconda; infatti, essendo

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & se \quad x \geq 0 \\ -x^2 & se \quad x < 0 \end{cases}, \tag{76.10}$$

f(x) è derivabile e, per $x \neq 0$, si ha

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & se \quad x > 0 \\ -2x & se \quad x < 0 \end{cases}, \tag{76.11}$$

mentre, se $x = 0$, si ha

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h|h| - 0}{h} = \lim_{h \to 0} |h| = 0; \tag{76.12}$$

pertanto $f'(0) = 0$. In definitiva f(x) è derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ e la derivata vale

$$f'(x) = 2|x|, \qquad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{76.13}$$

Però $f'(x)$ non è derivabile per $x = 0$; quindi non esiste la derivata seconda di f(x) nel punto $x = 0$.

77. Operazioni con le derivate

Per le derivate valgono le seguenti regole di calcolo:

OPERAZIONI CON LE DERIVATE. — *Se* f *e* g *sono due funzioni derivabili in un punto* x, *allora sono derivabili in* x *anche la somma, la differenza, il prodotto, il quoziente (purché il denominatore sia diverso da zero), e si ha:*

(77.1) $$(f \pm g)' = f' \pm g' ;$$

(77.2) $$(fg)' = f'\, g + fg' ;$$

(77.3) $$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\, g - fg'}{g^2}, \quad (se\ g \neq 0).$$

Dimostriamo la (77.1) con il segno + : per ogni $h \neq 0$, scriviamo il rapporto incrementale relativo alla funzione somma f + g:

(77.4) $$\frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Dato che il limite di una somma è uguale alla somma dei limiti, per $h \to 0$ si ottiene la (77.1).

Dimostriamo ora la regola di derivazione del prodotto. A tal fine scriviamo il rapporto incrementale relativo alla funzione prodotto fg:

(77.5) $$\frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x)\, g(x)}{h} = \frac{f(x+h)\, g(x+h) - f(x)\, g(x+h) + f(x)\, g(x+h) - f(x)\, g(x)}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, g(x+h) + f(x)\, \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

La funzione g, essendo per ipotesi derivabile in x, è anche continua. Quindi al limite per $h \to 0$ risulta $g(x+h) \to g(x)$. Dalla relazione sopra scritta si ottiene la tesi, passando al limite per $h \to 0$.

Per dimostrare la formula (77.3) relativa al quoziente, supponiamo $g(x) \neq 0$. Per il teorema della permanenza del segno (paragrafo 56), esiste un numero $\delta > 0$ per cui, se $|h| < \delta$, allora $g(x+h) \neq 0$. Scriviamo il rapporto incrementale di f/g:

(77.6) $$\left(\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}\right)\frac{1}{h} = \frac{f(x+h)\, g(x) - f(x)\, g(x+h)}{g(x+h)\, g(x)\, h} = \frac{f(x+h)\, g(x) - f(x)\, g(x) + f(x)\, g(x) - f(x)\, g(x+h)}{g(x+h)\, g(x)\, h} = \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\, g(x) - f(x)\, \frac{g(x+h) - g(x)}{h}\right)\frac{1}{g(x+h)\, g(x)}.$$

Al limite per $h \to 0$ si ottiene la tesi, ricordando che, come nel caso del prodotto, la funzione g è continua in x e quindi $g(x+h)$ tende a $g(x)$.

Notiamo che un caso particolarmente importante di derivazione di un prodotto si ha quando una delle due funzioni è costante. Dato che la derivata di una costante vale zero, dalla regola (77.2) si ottiene

(77.7) $$(cf)' = cf' \qquad (c = \textit{costante}).$$

78. Derivate delle funzioni composte e delle funzioni inverse

Una delle più importanti regole di derivazione è quella relativa alle funzioni composte. Se y è funzione di z ($y = f(z)$) e z a sua volta è funzione di x ($z = g(x)$), $y = f(g(x))$ è la *funzione composta* risultante. Si usa anche il simbolo $f(g(x)) = f \circ g(x)$.

Sono funzioni composte, ad esempio, $y = \text{sen}\, x^2$ ($y = \text{sen}\, z$, $z = x^2$), oppure $y = \text{sen}^2 x$ ($y = z^2$, $z = \text{sen}\, x$).

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI COMPOSTE. — *Se* g *è una funzione derivabile in* x, *e se* f *è una funzione derivabile nel punto* g(x), *allora la funzione composta* f(g(x)) *è derivabile in* x, *e si ha*

(78.1) $$D\, f(g(x)) = f'(g(x))\, g'(x).$$

Per semplificare la dimostrazione, consideriamo in questo paragrafo soltanto il caso in cui risulti $g(x+h) \neq g(x)$ per ogni $h \neq 0$. Il rapporto incrementale della funzione composta, nel punto x, vale

(78.2) $$\frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} \cdot \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Nel primo dei due quozienti a secondo membro compare il rapporto incrementale della funzione f nel punto g(x), con incremento $k = g(x+h) -$

g(x). Tale incremento k tende a zero per $h \to 0$, dato che g è continua in x. Quindi

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{g(x+h) - g(x)} = \tag{78.3}$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{f(g(x)+k) - f(g(x))}{k} = f'(g(x)),$$

che corrisponde alla tesi (78.1).

Così, ad esempio, in base alla regola di derivazione delle funzioni composte, la derivata della funzione $y = \text{sen}\, x^2$ vale $y' = \cos(x^2) \cdot 2x$, mentre la derivata della funzione $y = \text{sen}^2\, x = (\text{sen}\, x)^2$ vale $y' = 2\, \text{sen}\, x \cdot \cos x$.

Esaminiamo ora la regola di derivazione delle funzioni inverse. Ricordiamo quanto già detto circa le funzioni strettamente monotòne: una funzione f(x) è *strettamente crescente* nell'intervallo [a, b] se

$$a \le x_1 < x_2 \le b \quad \Rightarrow \quad f(x_1) < f(x_2). \tag{78.4}$$

Se f è continua e strettamente crescente in [a, b] allora è anche *invertibile*, cioè ad ogni $y \in [f(a), f(b)]$ corrisponde un solo $x \in [a, b]$ per cui $f(x) = y$, e si indica $x = f^{-1}(y)$; la stessa proprietà vale per le funzioni strettamente decrescenti (si veda il criterio di invertibilità alla fine del paragrafo 56).

TEOREMA DI DERIVAZIONE DELLE FUNZIONI INVERSE. — *Sia* f(x) *una funzione continua e strettamente crescente (oppure strettamente decrescente) in un intervallo* [a, b]. *Se* f *è derivabile in un punto* $x \in (a, b)$ *e se* $f'(x) \neq 0$, *allora anche* f^{-1} *è derivabile nel punto* $y = f(x)$ *e la derivata vale*

$$Df^{-1}(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}. \tag{78.5}$$

Prima di dare la dimostrazione, applichiamo il teorema ad un esempio concreto: la funzione $y = f(x) = x^2$ è continua e strettamente crescente per $x > 0$. La funzione inversa f^{-1} è $x = f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Abbiamo già visto che la funzione $y = x^2$ è derivabile e che la derivata vale $y' = 2x$. In base al teorema di derivazione delle funzioni inverse, anche $x = \sqrt{y}$ è derivabile per $y > 0$ e la derivata vale

$$D\sqrt{y} = \frac{1}{D(x^2)} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{2\sqrt{y}}. \tag{78.6}$$

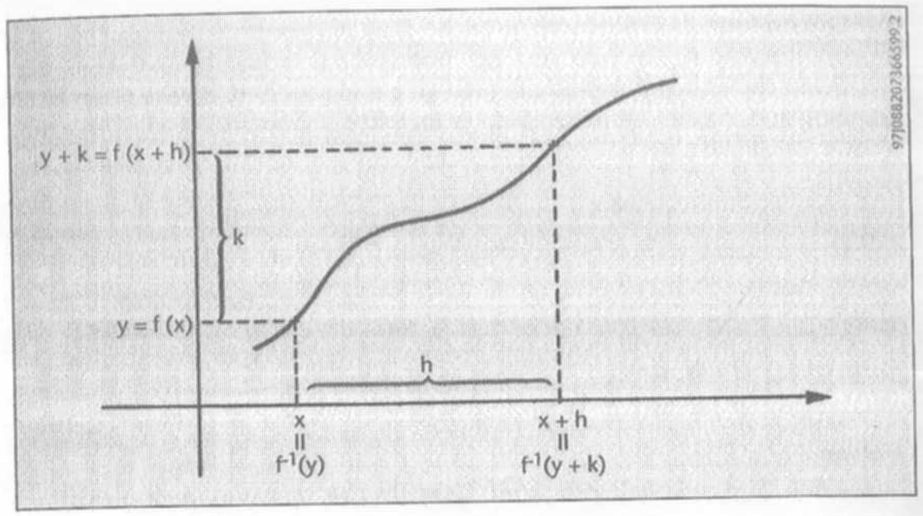


Figura 9.2

Passiamo alla dimostrazione del teorema: con riferimento alla figura 9.2, ad x corrisponde $y = f(x)$; ad $x + h$ corrisponde $y + k = f(x + h)$, dove si è posto $k = f(x + h) - f(x)$. In termini di f^{-1} risulta quindi $x = f^{-1}(y)$ e $x + h = f^{-1}(y + k)$. Scriviamo il rapporto incrementale relativo ad f^{-1}

$$\frac{f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y)}{k} = \frac{h}{f(x+h) - f(x)}. \tag{78.7}$$

Dato che f è strettamente monotòna, risulta $h \neq 0$ se e solo se $k \neq 0$. Si può anche verificare che se k tende a zero allora anche h tende a zero; infatti $h = f^{-1}(y+k) - f^{-1}(y) \to 0$ per $k \to 0$ perché f^{-1} è una funzione continua (si veda il paragrafo 63). Dato che a secondo membro compare il reciproco del rapporto incrementale della f, passando al limite nella (78.7) per $k \to 0$, si ottiene la tesi.

79. Derivate delle funzioni elementari

In questo paragrafo calcoliamo le derivate di alcune funzioni elementari. Cominciamo con la potenza ad esponente naturale n:

$$D\, x^n = n\, x^{n-1}. \tag{79.1}$$

Questa formula (che si ottiene anche dalla più generale formula (79.10)) si può dimostrare facendo uso del principio di induzione: abbiamo già verificato che $D\,x = 1$ (si veda la (76.4)); quindi la (79.1) è vera per $n = 1$. Supponiamo, secondo lo schema del principio di induzione, che la (79.1) sia vera e calcoliamo per mezzo della regola di derivazione del prodotto:

$$\begin{aligned} Dx^{n+1} &= D(x^n \cdot x) = D(x^n)\,x + x^n\,Dx = \\ &= n\,x^{n-1}\,x + x^n \cdot 1 = (n+1)\,x^n\,. \end{aligned} \tag{79.2}$$

Abbiamo quindi verificato che la (79.1) vale anche per l'indice $n + 1$. Perciò la (79.1) è provata.

Notiamo che il risultato ottenuto ci permette di calcolare la derivata di un *polinomio* qualsiasi:

$$\begin{aligned} y &= a_n\,x^n + a_{n-1}\,x^{n-1} + \ldots + a_1\,x + a_0\,; \\ y' &= n a_n\,x^{n-1} + (n-1)\,a_{n-1}\,x^{n-2} + \ldots + a_1\,. \end{aligned} \tag{79.3}$$

In particolare, la derivata di un polinomio di grado n è un polinomio di grado $n - 1$ ($n \in \mathbf{N}$).

Proviamo che la derivata del logaritmo in base a ($a > 0$, $a \neq 1$) di x vale:

$$D \log_a x = \frac{1}{x} \log_a e, \qquad \forall\, x > 0. \tag{79.4}$$

Utilizziamo le proprietà del logaritmo (tra cui la sua continuità) ed il limite notevole (54.7) (nel limite (54.7) cambiamo $x \to 0$ con $h \to 0$, e b con $1/x$):

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{\log_a (x+h) - \log_a x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \log_a \frac{x+h}{x} = \\ &= \lim_{h\to 0} \log_a \left(\frac{x+h}{x}\right)^{1/h} = \log_a \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{1/h} = \\ &= \log_a e^{1/x} = \frac{1}{x} \log_a e. \end{aligned} \tag{79.5}$$

Risulta ora chiaro l'interesse nel considerare logaritmi in base e: dato che $\log_e e = 1$, la derivata del logaritmo in base e di x è semplicemente

$$D \log x = \frac{1}{x}\,, \qquad \forall\, x > 0. \tag{79.6}$$

La funzione $y = \log x$ è invertibile e la sua inversa è $x = e^y$. Dal teorema di derivazione delle funzioni inverse otteniamo

$$D\,e^y = \frac{1}{D \log x} = \frac{1}{1/x} = x = e^y\,. \tag{79.7}$$

Usando, come si è soliti fare, il simbolo x per denotare la variabile indipendente, possiamo riscrivere la formula precedente:

$$D\,e^x = e^x\,. \tag{79.8}$$

Ricordiamo la proprietà (9.13): $e^{\log x} = x$, che è sempre utile quando si vuole calcolare la derivata di un esponenziale o di una potenza che non rientrano nei casi precedenti. Ad esempio, si può calcolare la derivata delle funzioni esponenziali con base $a > 0$, $a \neq 1$, facendo uso del teorema di derivazione delle funzioni composte:

$$\begin{aligned} D\,a^x &= D\,e^{\log a^x} = D\,e^{x \log a} = \\ &= e^{x \log a}\,D(x \log a) = a^x \log a. \end{aligned} \tag{79.9}$$

Analogamente si calcola la derivata della funzione potenza x^b, con esponente b *reale*

$$\begin{aligned} D\,x^b &= D\,e^{\log x^b} = D\,e^{b \log x} = \\ &= e^{b \log x}\,D(b \log x) = x^b \cdot \frac{b}{x} = b\,x^{b-1}\,. \end{aligned} \tag{79.10}$$

La formula precedente è molto utile. È utilizzata ad esempio nei casi $b = 1/2$ (in questo caso si riottiene (78.6)) e $b = -1$:

$$D\sqrt{x} = D\,x^{1/2} = \frac{1}{2}\,x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,; \tag{79.11}$$

$$D\left(\frac{1}{x}\right) = D\,x^{-1} = (-1)\,x^{-2} = -\frac{1}{x^2}\,. \tag{79.12}$$

Calcoliamo ora le derivate delle funzioni trigonometriche sen x, cos x, tg x. Cominciamo con

(79.13) $$D \operatorname{sen} x = \cos x; \qquad D \cos x = -\operatorname{sen} x.$$

Dimostriamo la prima delle due: facciamo uso delle formule di addizione (10.4) e dei limiti notevoli (52.10), (53.10):

$$\lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h} =$$

(79.14) $$= \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h} =$$

$$= \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = \cos x.$$

Allo stesso modo si calcola la derivata di cos x:

$$\lim_{h\to 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} =$$

(79.15) $$= \lim_{h\to 0} \frac{\cos x \cos h - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} h - \cos x}{h} =$$

$$= \cos x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h} = -\operatorname{sen} x.$$

La derivata della funzione tg x si calcola con la regola di derivazione del rapporto:

(79.16) $$D \operatorname{tg} x = D\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right) = \frac{D(\operatorname{sen} x)\cos x - \operatorname{sen} x\, D(\cos x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Riassumiamo in una tabella le principali formule di derivazione trovate in questo paragrafo:

f(x)	f′ (x)
x^b	$b\, x^{b-1}$
log x	1/x
e^x	e^x
sen x	cos x
cos x	− sen x
tg x	$1/\cos^2 x$

80. Significato geometrico della derivata. Retta tangente

Sia f(x) una funzione definita in un intorno di un punto x_0 e si consideri nel piano x, y il grafico della funzione, come in figura 9.3. Ci proponiamo di determinare l'equazione della retta r passante per il punto P_0 di coordinate $(x_0, f(x_0))$ e *tangente* al grafico della funzione f.

Ciò che preliminarmente è più opportuno fare, è determinare l'equazione di una retta r′ *secante* il grafico della funzione f nei punti $P_0 \equiv (x_0, f(x_0))$ e $P \equiv (x_0 + h, f(x_0 + h))$. L'equazione di una generica retta non verticale è $y = mx + q$; determiniamo i parametri m, q imponendo che la retta passi per i punti dati:

(80.1) $$\begin{cases} f(x_0) = m\, x_0 + q & (\textit{passaggio per } P_0) \\ f(x_0 + h) = m(x_0 + h) + q & (\textit{passaggio per } P) \end{cases}$$

Abbiamo un sistema in due equazioni nelle due incognite m, q, che si può risolvere per sostituzione, oppure sottraendo la prima equazione dalla seconda. Si ottiene $m = [f(x_0 + h) - f(x_0)]/h$ e poi si ricava q dalla prima equazione. L'equazione della retta secante risulta essere:

(80.2) $$y = f(x_0) + \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}(x - x_0).$$

L'equazione della retta tangente, quando esiste, è il limite per $h \to 0$ dell'equazione della retta secante. Si può passare al limite nella (80.2) se e solo se f è derivabile in x_0. Quindi, se f è derivabile in x_0, si ottiene *l'equazione della retta tangente in* $(x_0, f(x_0))$ *al grafico della funzione* f:

(80.3) $$y = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0).$$

Quanto stabilito fornisce il significato geometrico della derivata. Dato che nell'equazione della retta tangente il coefficiente della x è uguale a $m = f'(x_0)$, si dice che la derivata di una funzione f in un punto x_0 è il *coefficiente angolare* della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x_0, f(x_0))$. La derivata è quindi una misura della *pendenza* del grafico della funzione.

Diamo un esempio numerico di utilizzazione dell'equazione della retta tangente, esaminando un problema di calcolo approssimato dei valori di una funzione. Normalmente non è immediato il calcolo del valore numerico di una funzione in un punto. Ad esempio, è facile calcolare a mente i valori numerici delle funzioni $\sqrt{x}$, oppure sen x, solo per particolari valori della x. Al contrario, è sempre elementare calcolare i valori numerici delle funzioni $y = mx + q$, che hanno per grafico una retta. L'idea è quella di "sostituire" una funzione data con l'equazione della sua retta tangente in un punto di ascissa x_0, con x_0 vicino al punto x in cui si vuole calcolare la funzione. Dalla figura 9.4 è intuitivamente chiaro che l'errore che si commette è tanto più piccolo, quanto più x è vicino all'ascissa del punto di tangenza x_0.

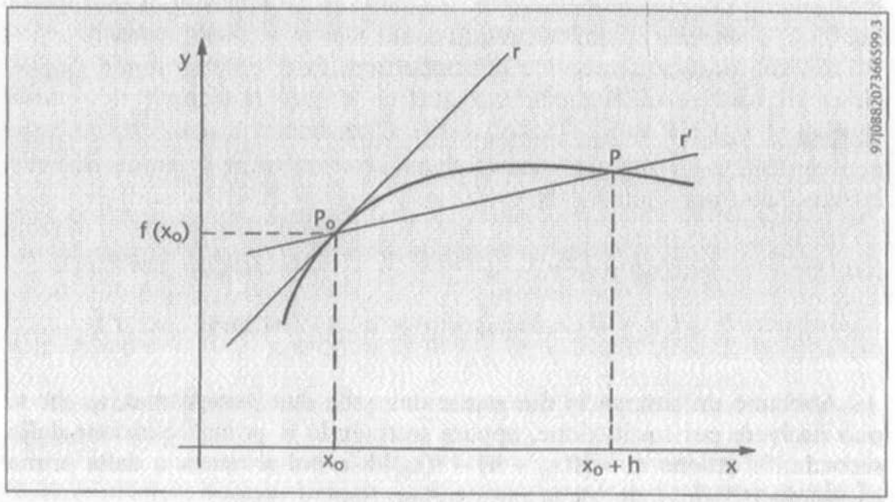


Figura 9.3

Cioè la quantità $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ rappresenta una approssimazione di f(x), tanto migliore quanto più x è vicino ad x_0; scriveremo:

(80.4) $$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \qquad (\textit{se x è vicino ad } x_0).$$

Il punto x_0 va scelto in modo che sia semplice calcolare $f(x_0)$ e $f'(x_0)$.

Si può dare un significato rigoroso alla scrittura (80.4) usando i limiti. La (80.4) significa che, non solo la differenza tra primo e secondo membro tende a zero quando $x \to x_0$, ma anche che tende a zero più rapidamente della quantità $x - x_0$, cioè che:

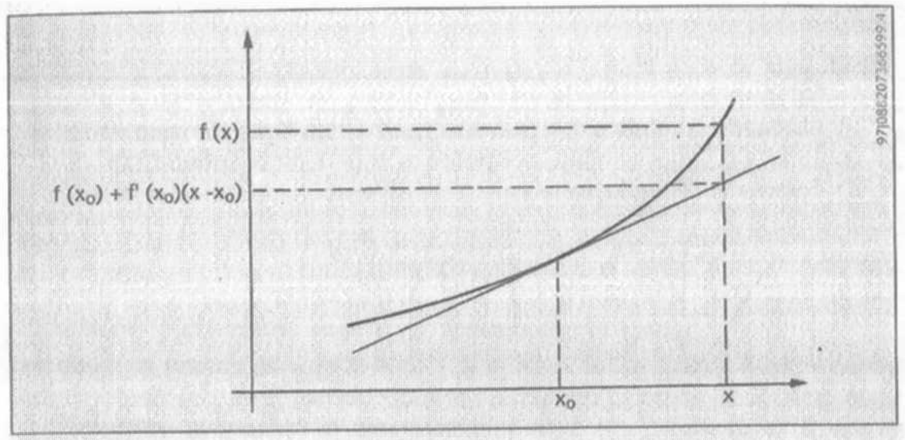


Figura 9.4

(80.5) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)]}{x - x_0} = 0.$$

La verifica della relazione sopra scritta è immediata; infatti, dato che f è derivabile in x_0, possiamo riscrivere il limite precedente nella forma:

(80.6) $$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Ad esempio, se $f(x) = \sqrt{x}$, la (80.4) diventa

(80.7) $$\sqrt{x} \cong \sqrt{x_0} + \frac{1}{2\sqrt{x_0}}\,(x - x_0) \qquad (\text{se } x \to x_0).$$

Volendo esprimere in forma decimale $\sqrt{80}$, scegliendo $x_0 = 81$ otteniamo

(80.8) $$\sqrt{80} \cong 9 + \frac{1}{2 \cdot 9}\,(-1) = 9 - \frac{1}{18} = 8.9444...$$

(il valore esatto è $\sqrt{80} = 8.9442...$). Qualcuno forse avrà pensato che il conto è stato possibile soltanto perché 80 è vicino al quadrato perfetto 81. Proviamo con $\sqrt{2}$: si può calcolare $\sqrt{200}$, e poi dividere il risultato per 10. Il quadrato più vicino a 200 è $196 = 14^2$; si ha quindi:

(80.9) $$\sqrt{200} \cong 14 + \frac{1}{2 \cdot 14} \cdot 4 = 14 + \frac{1}{7} = 14.1428...$$

Perciò $\sqrt{2} \cong 1.41428$ (il valore esatto di $\sqrt{2}$ è 1.41421...).

I conti fatti dovrebbero aver dato un'idea dell'utilità delle derivate nella tabulazione delle funzioni elementari.

Utilizzando fra l'altro il significato geometrico della derivata, studiamo la continuità e la derivabilità, nel punto $x_0 = 0$, della funzione $f_n(x)$ $(n = 0, 1, 2)$ definita su **R** dalla formula

$$f_n(0) = 0, \qquad f_n(x) = x^n \operatorname{sen} \frac{1}{x} \quad se \quad x \neq 0. \tag{80.10}$$

Per $n = 1, 2$, $f_n(x)$ è definita rispettivamente da

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & se\ x = 0 \\ x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & se\ x \neq 0 \end{cases}, \qquad f_2(x) = \begin{cases} 0 & se\ x = 0 \\ x^2 \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & se\ x \neq 0 \end{cases} \tag{80.11}$$

mentre per $n = 0$ si ottiene la funzione

$$f_0(x) = \begin{cases} 0 & se\ \ x = 0 \\ \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} & se\ \ x \neq 0 \end{cases}, \tag{80.12}$$

che non è continua nel punto $x_0 = 0$, ma presenta una discontinuità di seconda specie (infatti come risulta dalla (53.5), non esiste il limite per $x \to 0$ di $f_0(x)$); inoltre f_0, non essendo continua in $x_0 = 0$, non è neanche derivabile in tale punto.

La funzione $f_1(x)$, prodotto del fattore infinitesimo x per il fattore limitato $\operatorname{sen}(1/x)$, converge a zero per $x \to 0$; essendo $f_1(0) = 0$, la funzione è continua (anche) in $x_0 = 0$; però non risulta derivabile in tale punto perché non esiste il limite (si veda la (53.5)) del rapporto incrementale:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f_1(h) - f_1(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \operatorname{sen} \frac{1}{h}. \tag{80.13}$$

La funzione $f_2(x)$ è derivabile (e quindi anche continua) anche per $x_0 = 0$ e la derivata vale $f'_2(0) = 0$; infatti:

$$f'_2(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_2(h) - f_2(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \operatorname{sen} \frac{1}{h} = 0. \tag{80.14}$$

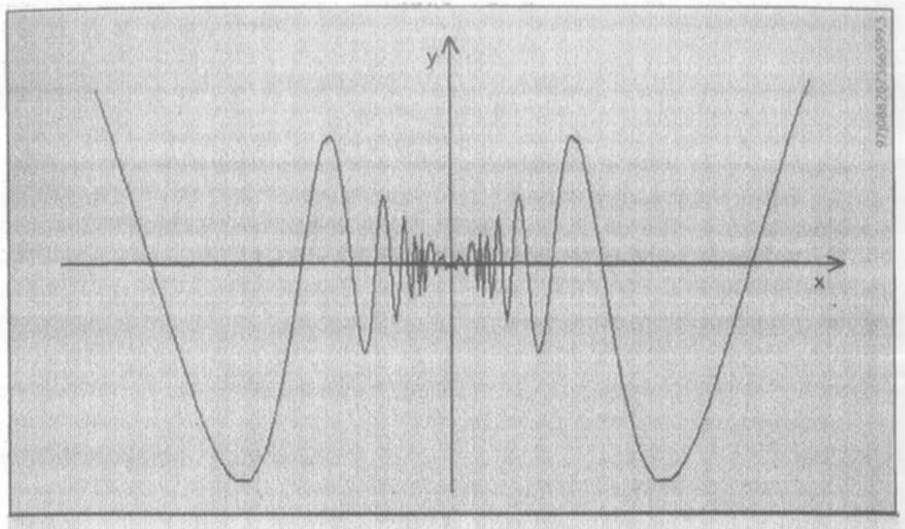


Figura 9.5 — $y = f_1(x)$

I risultati trovati sono riassunti nella seguente tabella:

funzione	continua in $x_0 = 0$	derivabile in $x_0 = 0$
$f_0(x)$	no	no
$f_1(x)$	sì	no
$f_2(x)$	sì	sì

Nelle figure 9.5, 9.6, sono rappresentati i grafici delle funzioni f_1 e f_2 eseguiti al computer; la continuità di f_1, f_2 nel punto $x_0 = 0$ corrisponde a grafici "vicini" all'origine delle coordinate quando l'ascissa x è "vicina" ad $x_0 = 0$ (si noti che tale proprietà non è verificata per il grafico della funzione f_0 in figura 6.2). Invece la derivabilità di f_2 e la non derivabilità di f_1 corrispondono al fatto che il grafico di f_2 in figura 9.6 ammette retta tangente anche nel punto $x_0 = 0$ (dato che $f_2(0) = f'_2(0) = 0$, l'equazione (80.3) della retta tangente è: $y = 0$) mentre il grafico di f_1 in figura 9.5 non ha retta tangente nell'origine degli assi (le rette $y = x$, $y = -x$, con coefficienti angolari $+1$ e -1, danno un'idea dell'oscillazione della retta tangente in un generico punto $(x, f_2(x))$, con x che "si avvicina" a $x_0 = 0$). Tali proprietà sono evidenziate in figura 9.7, dove sono rappresentati in un intorno di $x_0 = 0$ i grafici delle funzioni f_1, f_2, con particolare enfasi alle limitazioni:

$$-|x| \leq f_1(x) \leq |x|, \quad \forall x \in \mathbf{R}; \tag{80.15}$$

$$-x^2 \leq f_2(x) \leq x^2, \quad \forall x \in \mathbf{R}. \tag{80.16}$$

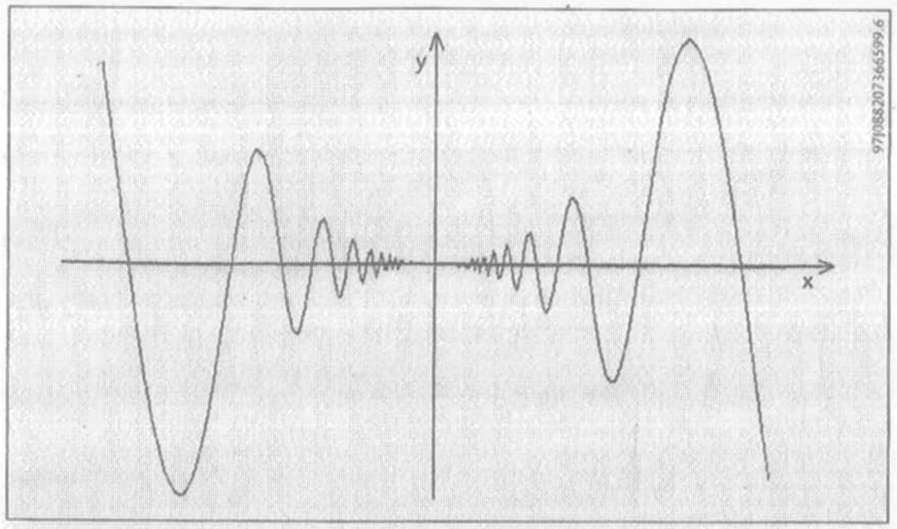


Figura 9.6 — $y = f_2(x)$

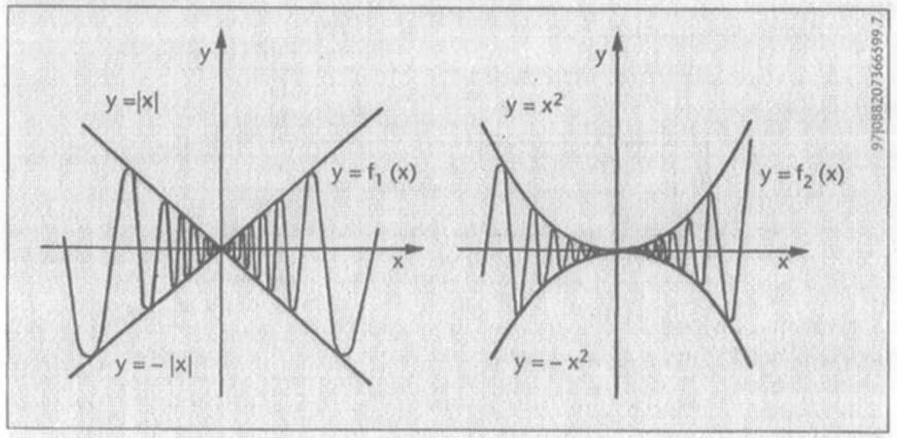


Figura 9.7

81. Le funzioni trigonometriche inverse

Le funzioni trigonometriche sen x, cos x, tg x, non sono monotòne su tutto **R** e non esistono le loro funzioni inverse su **R**. Però possiamo restringere ad un intervallo limitato l'insieme in cui prendere in considerazione tali funzioni, in modo che risultino monotòne nell'insieme considerato.

Cominciamo con la funzione sen x. È una funzione strettamente crescente nell'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$. Consideriamo quindi $f(x) = \text{sen } x$, con $f: [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$. La funzione f è

continua e quindi assume tutti i valori compresi tra il suo minimo $(= -1)$ ed il massimo $(= 1)$. Essendo strettamente monotòna, è anche invertibile. Pertanto esiste la funzione inversa f^{-1}: $[-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$, che viene indicata con $f^{-1}(x) = \text{arcsen } x$ (*arcoseno di* x). Il nome deriva dal fatto che, se $y = \text{arcsen } x$, vuol dire che y è uguale alla misura dell'arco, o angolo, il cui seno è x (sen y = x). Il grafico dell'arcoseno si ottiene immediatamente dal grafico della funzione seno, come nella figura 9.8.

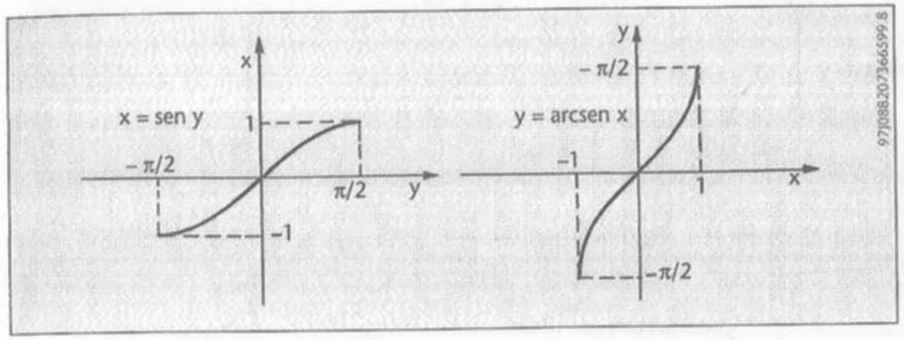


Figura 9.8

La funzione arcoseno è quindi definita nell'intervallo *chiuso* $[-1, 1]$. Dal teorema di derivazione delle funzioni inverse si ottiene che la funzione arcsen x è derivabile nell'intervallo *aperto* $(-1, 1)$, e la derivata vale:

$$\text{D arcsen } x = \frac{1}{\text{D sen } y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 y}} = \tag{81.1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 (\text{arcsen } x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}};$$

sono state utilizzate le relazioni

$$\cos y = \sqrt{1 - \text{sen}^2 y}, \qquad \text{sen}(\text{arcsen } x) = x, \tag{81.2}$$

la prima delle quali vale perché $\cos y > 0$ per ogni $y \in (-\pi/2, \pi/2)$.

La funzione arcsen x non è derivabile per $x = \pm 1$, dato che $\cos y = \text{D sen } y$ si annulla per i corrispondenti valori $y = \text{arcsen } (\pm 1) = \pm\pi/2$. Graficamente, ciò corrisponde al fatto che la funzione arcsen x ha retta tangente verticale se $x = \pm 1$.

Passiamo alla funzione $f(x) = \cos x$. Risulta che $f:[0, \pi] \to [-1, 1]$ è continua e strettamente decrescente; quindi è invertibile in tale intervallo. La funzione inversa f^{-1}: $[-1, 1] \to [0, \pi]$ viene indicata con $f^{-1}(x) = \text{arcos } x$ (*arcocoseno di* x). Il grafico si ottiene dal grafico della funzione coseno, come in figura 9.9.

La funzione $y = \text{arcos } x$ è definita nell'intervallo chiuso $[-1, 1]$. È derivabile nell'intervallo aperto $(-1, 1)$ e la derivata vale:

$$\text{D arcos } x = \frac{1}{\text{D cos } y} = \frac{1}{-\text{ sen } y} = \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 y}} = \tag{81.3}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2(\text{arcos } x)}} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

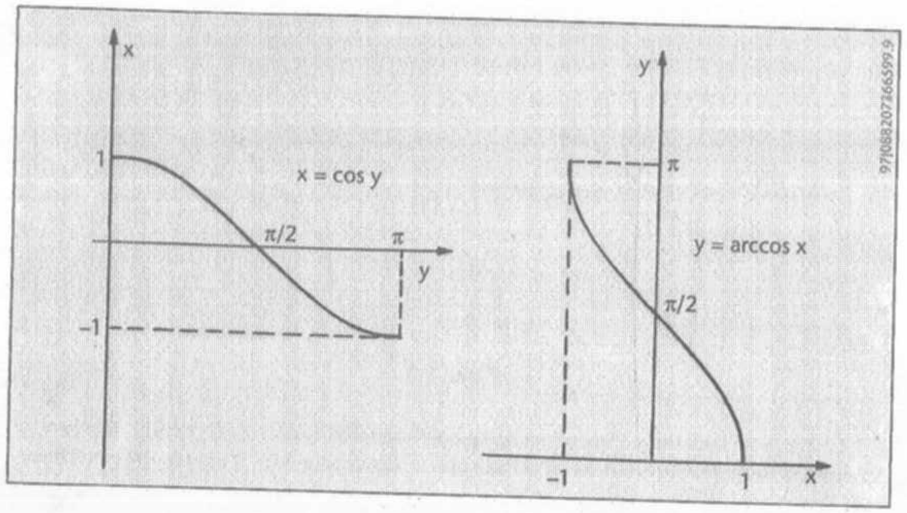


Figura 9.9

La più usata funzione trigonometrica inversa è quella relativa alla tangente. La funzione $f(x) = \text{tg } x$ è continua e strettamente crescente nell'intervallo aperto $(-\pi/2, \pi/2)$. È quindi invertibile in tale intervallo. La funzione inversa $f^{-1}: \mathbf{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ viene indicata con $f^{-1}(x) = \text{arctg } x$ (*arcotangente di* x) ed ha il grafico come in figura 9.10.

La funzione $y = \text{arctg } x$ è definita per ogni x reale. Per i limiti all'infinito si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \text{arctg } x = \frac{\pi}{2}\,; \qquad \lim_{x\to-\infty} \text{arctg } x = -\frac{\pi}{2}\,. \tag{81.4}$$

È una funzione derivabile per ogni $x \in \mathbf{R}$ e la derivata vale:

$$\text{D arctg } x = \frac{1}{\text{D tg } y} = \frac{1}{1/\cos^2 y} =$$

$$= \frac{1}{(\cos^2 y + \text{sen}^2 y)/\cos^2 y} = \frac{1}{1+\text{tg}^2 y} = \tag{81.5}$$

$$= \frac{1}{1+\text{tg}^2(\text{arctg } x)} = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

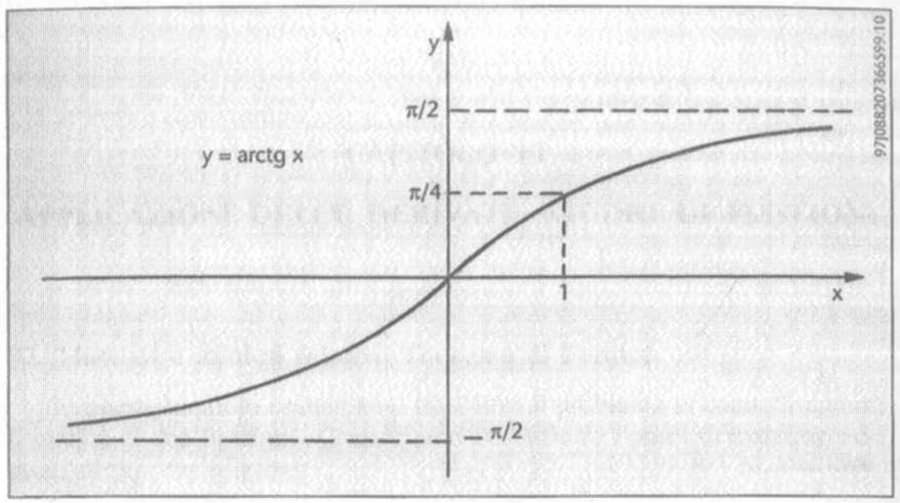


Figura 9.10

Riassumiamo nella tabella seguente i valori trovati per le derivate:

f(x)	f′ (x)
arcsen x	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
arcos x	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
arctg x	$\frac{1}{1+x^2}$

CAPITOLO 10

APPLICAZIONI DELLE DERIVATE. STUDIO DI FUNZIONI

82. Massimi e minimi relativi. Teorema di Fermat

In questo capitolo esaminiamo tra l'altro il problema di come disegnare il grafico di una funzione. Cominciamo col definire i punti di massimo ed i punti di minimo relativo.

Sia f(x) una funzione definita in un intervallo [a, b]. Diremo che un punto $x_0 \in [a, b]$ è di *massimo (relativo)* per f, nell'intervallo [a, b], se il valore $f(x_0)$ è più grande dei valori f(x), con $x \in [a, b]$ vicino ad x_0; più precisamente, se esiste un numero $\delta > 0$ tale che

$$f(x_0) \geq f(x), \quad \forall x \in [a, b]: \quad |x - x_0| < \delta. \tag{82.1}$$

Si noti che non si richiede che la (82.1) valga per ogni $x \in [a, b]$, ma solo per x vicino ad x_0. Nella figura 10.1, x_2 e x_4 sono punti di massimo; anche il punto x = a è un punto di massimo relativo.

Il più grande dei valori f(x) per $x \in [a, b]$, si chiama *massimo assoluto* di f nell'intervallo [a, b]. In figura 10.1 il massimo assoluto è assunto per $x = x_2$ e vale $f(x_2)$.

Analogamente, x_0 è un punto di *minimo (relativo)* per la funzione f, nell'intervallo [a, b], se esiste $\delta > 0$ per cui

$$f(x_0) \leq f(x), \quad \forall x \in [a, b]: \quad |x - x_0| < \delta. \tag{82.2}$$

Nella figura 10.1, x_1, x_3, b sono punti di minimo.

Dalla figura 10.1 notiamo anche il fatto seguente: se si disegna la retta tangente al grafico della funzione in ciascuno dei punti x_1, x_2, x_3, x_4, punti di massimo o di minimo *interni* all'intervallo [a, b] (un punto $x_0 \in [a, b]$ è interno all'intervallo se $x_0 \in (a, b)$, cioè se $x_0 \in [a, b]$ e $x_0 \neq a$, $x_0 \neq b$), tale retta risulta orizzontale. Questa proprietà vale in tutti i punti di massimo e di minimo interni all'intervallo di definizione. Non vale però (necessariamente) nei punti agli estremi dell'intervallo, dove il grafico della funzione può avere la retta tangente non orizzontale.

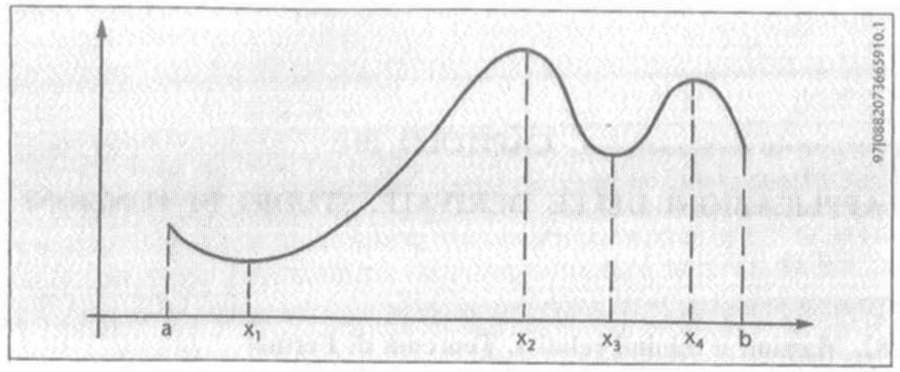


Figura 10.1

Una retta è orizzontale se e solo se ha equazione y = costante. Si ricordi l'equazione (80.3) della retta tangente al grafico di una funzione f(x) per $x = x_0$; tale retta tangente è orizzontale se e solo se $f'(x_0) = 0$. Dimostriamo nel teorema seguente la proprietà in generale.

TEOREMA DI FERMAT. — *Sia* f *una funzione definita in* [a, b] *e sia* x_0 *un punto di massimo o di minimo relativo interno ad* [a, b]. *Se* f *è derivabile in* x_0, *risulta* $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione: consideriamo il caso in cui x_0 sia un punto di massimo (relativo); significa che esiste $\delta > 0$ per cui

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h), \qquad \forall\, h: |h| < \delta. \tag{82.3}$$

Studiamo separatamente i casi $h > 0$ e $h < 0$; dalla (82.3) si ottiene:

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \begin{cases} \leq 0 & se \quad 0 < h < \delta \\ \geq 0 & se \quad -\delta < h < 0 \end{cases} \tag{82.4}$$

e, al limite per $h \to 0^{\pm}$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \to 0^+} [f(x_0 + h) - f(x_0)]/h \leq 0\,; \\ f'(x_0) &= \lim_{h \to 0^-} [f(x_0 + h) - f(x_0)]/h \geq 0\,. \end{aligned} \tag{82.5}$$

Ne segue che $f'(x_0) = 0$.

83. I teoremi di Rolle e di Lagrange

TEOREMA DI ROLLE. — *Sia* f(x) *una funzione continua in* [a, b] *e derivabile in* (a, b). *Se* f(a) = f(b), *esiste un punto* $x_0 \in (a, b)$ *per cui* $f'(x_0) = 0$.

Dimostrazione: indichiamo con x_1 e x_2 due punti, rispettivamente di minimo e di massimo assoluto per f nell'intervallo [a, b]; cioè

$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2), \qquad \forall\, x \in [a, b]. \tag{83.1}$$

Tali punti di massimo e di minimo assoluto per f esistono, in base al teorema di Weierstrass (paragrafi 56 e 62).

Se almeno uno dei due punti x_1, x_2 è *interno* all'intervallo [a, b], in corrispondenza la derivata si annulla (per il teorema di Fermat).

Rimane da esaminare il caso in cui entrambi i punti x_1, x_2 non sono interni; diciamo $x_1 = a$, $x_2 = b$. La (83.1) diventa $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$, per ogni x nell'intervallo [a, b]. Dato che per ipotesi f(a) = f(b), risulta f(x) = f(a) per ogni x $\in$ [a, b]; quindi f è costante e la sua derivata è ovunque zero. Il teorema è dimostrato anche in questo caso.

Geometricamente il teorema di Rolle afferma che, per una funzione f(x) continua in [a, b], derivabile in (a, b), con f(a) = f(b), esiste in (a, b) un punto x_0 in cui la retta tangente è orizzontale (figura 10.2).

Nel teorema seguente (di Lagrange) si considera una situazione più generale, in cui non necessariamente f(a) = f(b). Il teorema di Lagrange geometricamente afferma che, per una funzione f(x) continua in [a, b] e derivabile in (a, b), esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ in cui la retta tangente è parallela alla corda congiungente gli estremi del grafico (figura 10.3). Si tenga presente che il coefficiente angolare della retta tangente in x_0 è $f'(x_0)$, mentre il coefficiente angolare della corda è $[f(b) - f(a)]/(b - a)$.

TEOREMA DI LAGRANGE. — *Sia* f(x) *una funzione continua in* [a, b] *e derivabile in* (a, b). *Esiste un punto* $x_0 \in (a, b)$ *per cui*

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}\,. \tag{83.2}$$

Dimostrazione: ci si riconduce al teorema precedente per mezzo della funzione

$$g(x) = f(x) - \left[f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (x - a) \right]. \tag{83.3}$$

Si noti che g(x) è ottenuta sottraendo da f(x) l'espressione della retta congiungente gli estremi del grafico. Ponendo successivamente x = a, x = b, si verifica che g(a) = g(b) = 0. Inoltre g è derivabile in (a, b) e risulta

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \qquad \forall\, x \in (a, b). \tag{83.4}$$

Per il teorema di Rolle, esiste quindi $x_0 \in (a, b)$ per cui $g'(x_0) = 0$. Ponendo nella relazione precedente $g'(x_0) = 0$, si ottiene la tesi (83.2).

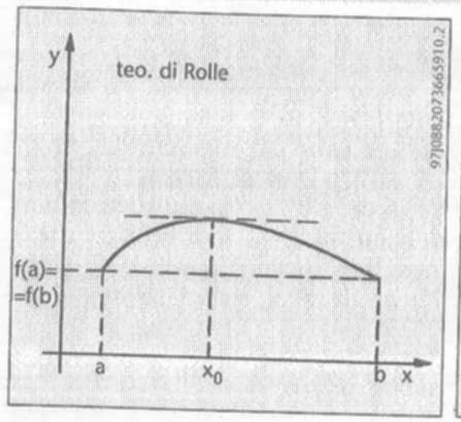


Figura 10.2

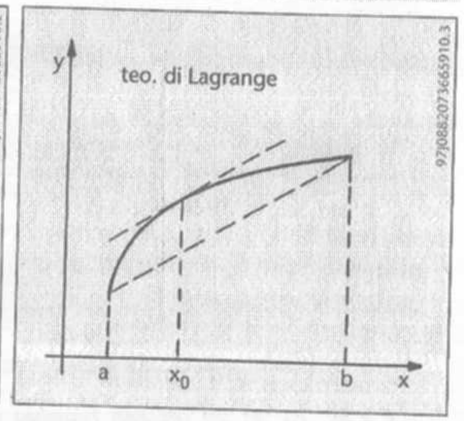


Figura 10.3

Le ipotesi sulla funzione f(x) (continua in [a, b] e derivabile in (a, b)), comuni ai teoremi di Rolle e di Lagrange, certamente sussistono se supponiamo direttamente che f(x) sia derivabile in tutto l'intervallo [a, b], estremi inclusi; infatti in tal caso f(x) sarebbe automaticamente continua in [a, b] e ovviamente, derivabile in (a, b).

La continuità di f(x) agli estremi dell'intervallo è comunque un'ipotesi indispensabile; ad esempio, la funzione (il cui grafico è rappresentato in figura 6.10)

$$f(x) = \begin{cases} x & se \quad x \in [0, 1) \\ 0 & se \quad x = 1 \end{cases} \tag{83.5}$$

è derivabile in (a, b) = (0, 1), è continua (a destra) per x = 0 (ma non è continua per x = 1), soddisfa l'ipotesi del teorema di Rolle f(0) = f(1), ma non soddisfa la tesi del teorema di Rolle, perché la derivata è costantemente uguale ad 1 in (0, 1).

84. Funzioni crescenti e decrescenti

Una conseguenza del teorema di Lagrange è il seguente criterio di monotonia, fondamentale per disegnare il grafico di una funzione. Ricordiamo che la definizione di funzione monotòna (ad esempio crescente) è stata data nel paragrafo 7.

CRITERIO DI MONOTONIA. — *Sia* f *una funzione continua in* [a, b] *e derivabile in* (a, b). *Allora.*

$$f'(x) \geq 0, \quad \forall\, x \in (a, b) \iff f \text{ è crescente in } [a, b]; \tag{84.1}$$

$$f'(x) \leq 0, \quad \forall\, x \in (a, b) \iff f \text{ è decrescente in } [a, b]. \tag{84.2}$$

Dimostrazione: proviamo la (84.1); la (84.2) si ottiene in modo analogo.

Nell'implicazione ⇒, supponendo $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, occorre dimostrare che, se $a \leq x_1 < x_2 \leq b$, allora $f(x_1) \leq f(x_2)$. Scriviamo la tesi del teorema di Lagrange nell'intervallo $[x_1, x_2]$: esiste $x_0 \in (x_1, x_2)$ per cui

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(x_0)(x_2 - x_1); \tag{84.3}$$

dato che $f'(x_0) \geq 0$ e dato che $x_2 > x_1$, risulta anche $f(x_2) \geq f(x_1)$.

Viceversa, se la funzione f è crescente in [a, b], per ogni $x \in (a, b)$ e $h > 0$ tale che $x + h \in (a, b)$ risulta $f(x + h) \geq f(x)$ e quindi

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0 \tag{84.4}$$

(il lettore noti che la (84.4) vale anche per $h < 0$); al limite per $h \to 0^+$ si trova la tesi $f'(x) \geq 0$.

Consideriamo alcuni esempi di applicazione del criterio precedente. La funzione e^x è (strettamente) crescente su tutto **R**, perché la derivata $D\,e^x = e^x$ è positiva. La funzione log x è crescente per x > 0, perché la sua derivata D log x = 1/x è positiva. Così pure la funzione arctg x è crescente su tutto **R**, perché $D(\text{arctg } x) = 1/(1 + x^2) > 0$.

La funzione x^2 ha derivata uguale a 2x, che è positiva per x > 0, negativa per x < 0; quindi la funzione x^2 è decrescente per x < 0 e crescente per x > 0; x = 0 è perciò un punto di minimo.

La funzione $f(x) = x^3 - 3x$ ha come derivata $f' = 3(x^2 - 1)$, che si annulla per $x = \pm 1$, è positiva all'esterno dell'intervallo [– 1, 1], ed è negativa all'interno. Quindi la funzione f è crescente per x > 1 e x < – 1, ed è decrescente per – 1 < x < 1. Il punto x = – 1 è di massimo relativo, mentre il punto x = 1 è di minimo. Queste sole considerazioni, unitamente ad alcuni valori della funzione (per x = 0, $x = \pm 1$, $x = \pm\sqrt{3}$) facilmente calcolabili, permettono di disegnare il grafico della funzione $f(x) = x^3 - 3x$ come in figura 10.4.

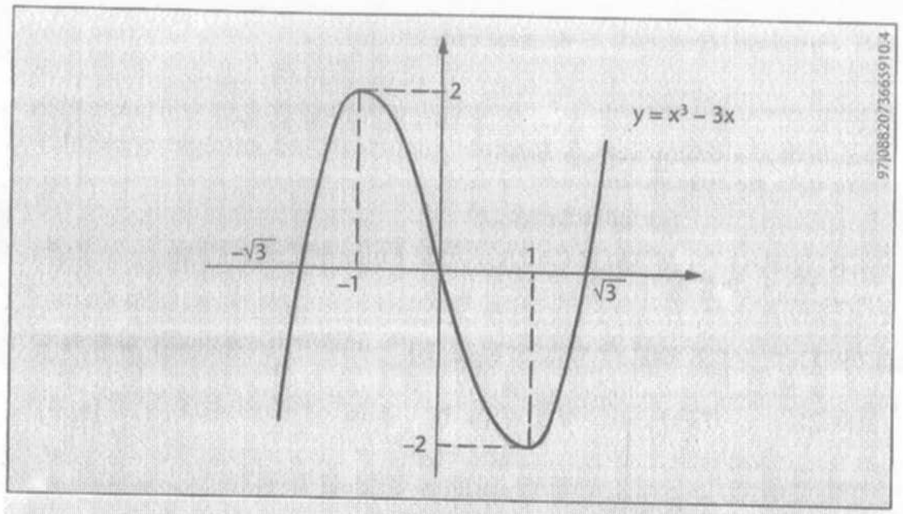


Figura 10.4

In generale, si tenga conto che il segno della derivata prima costituisce una delle principali informazioni per disegnare il grafico di una funzione.

Conseguenza del criterio di monotonia è la

CARATTERIZZAZIONE DELLE FUNZIONI COSTANTI IN UN INTERVALLO. — *Una funzione è costante in un intervallo* [a, b] *se e solo se è derivabile in* [a, b] *e la derivata è ovunque nulla.*

Dimostrazione: come in (76.3) si prova che la derivata di una funzione costante in [a, b] è nulla per ogni $x \in [a, b]$.

Viceversa, se f(x) è derivabile in [a, b] e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [a, b]$, per i criteri di monotonia (84.1), (84.2), f(x) è contemporaneamente crescente e decrescente in [a, b]; perciò, per ogni $x \in (a, b]$ (essendo $x > a$) risulta allo stesso tempo $f(x) \geq f(a)$ e $f(x) \leq f(a)$; cioè f(x) è identicamente uguale ad f(a).

Combinando il criterio di monotonia e il teorema di caratterizzazione delle funzioni costanti in un intervallo si giunge facilmente al seguente:

CRITERIO DI STRETTA MONOTONIA. — *Sia* f *una funzione continua in* [a, b] *e derivabile in* (a, b). *Allora*

(84.5) $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$; *f' non si annulla identicamente in alcun intervallo contenuto in* (a,b) $\Longleftrightarrow$ f *è strettamente crescente in* [a, b];

(84.6) $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b)$; *f' non si annulla identicamente in alcun intervallo contenuto in* (a,b) $\Longleftrightarrow$ f *è strettamente decrescente in* [a, b].

Dimostrazione: proviamo l'implicazione $\Rightarrow$ in (84.5); essendo $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$, per il criterio di monotonia (84.1) f(x) è crescente in [a, b]. Se non fosse strettamente crescente, esisterebbero $x_1, x_2 \in (a, b)$ con $x_1 < x_2$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$; ma allora, dato che $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ se $x_1 < x < x_2$, f(x) sarebbe costante nell'intervallo $[x_1, x_2]$ e $f'(x) = 0$ per ogni $x \in [x_1, x_2]$, contrariamente all'ipotesi.

Proviamo ora l'implicazione $\Leftarrow$ in (84.5); dato che f è (strettamente) crescente in [a, b], per il criterio di monotonia (84.1) $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$; inoltre f'(x) non può annullarsi identicamente in un intervallo $[x_1, x_2] \subseteq (a, b)$ perché altrimenti in tale intervallo f(x) sarebbe costante, contrariamente all'ipotesi di stretta monotonia.

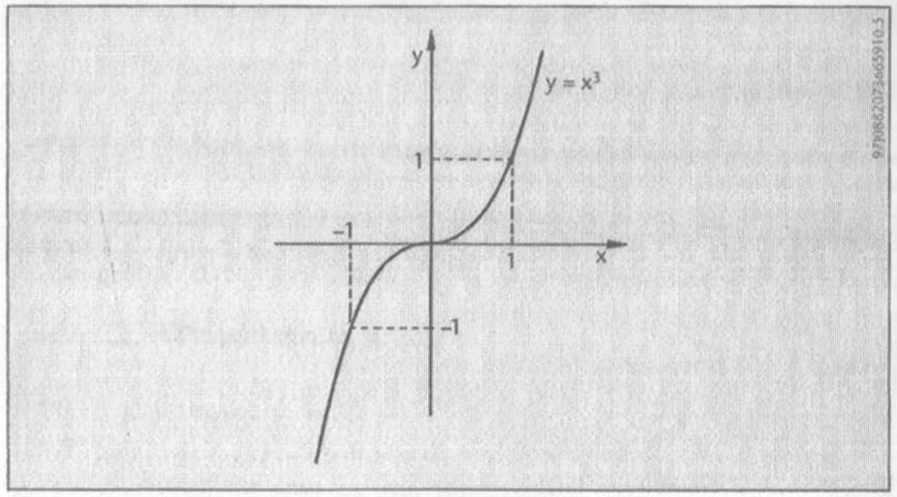


Figura 10.5

Osserviamo che una funzione strettamente crescente e derivabile in un intervallo può avere derivata nulla in *qualche* punto (il criterio (84.5) esclude che la derivata si annulli *identicamente* in un intervallo). Ad esempio, la funzione $f(x) = x^3$, rappresentata in figura 10.5, è strettamente crescente su $\mathbf{R}$, perché:

$$f(x_1) < f(x_2) \iff x_1^3 < x_2^3 \iff x_1 < x_2 ; \tag{84.7}$$

la derivata $f'(x) = 3x^2$ è positiva su $\mathbf{R} - \{0\}$, ma si annulla per $x = 0$.

85. Funzioni convesse e concave

Introduciamo una nuova definizione, utile per disegnare il grafico di una funzione. Diciamo che una funzione è *convessa* in un intervallo [a, b], se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ il grafico della funzione in [a, b] è *al di sopra* della retta tangente al grafico della funzione nel punto di coordinate $(x_0, f(x_0))$. Analogamente, diciamo che una funzione è *concava* in [a, b], se per ogni punto $x_0 \in [a, b]$ il grafico della funzione è, nell'intervallo [a, b], *al di sotto* della retta tangente in $(x_0, f(x_0))$. Ad esempio, nella figura 10.6 la funzione f(x) è convessa in [a, b], ed è concava in [b, c]. Il punto b è un punto di *flesso*, cioè un punto in cui cambia la concavità.

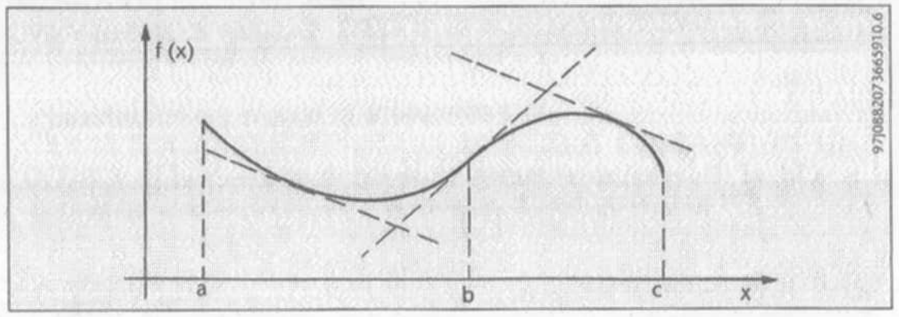


Figura 10.6

Possiamo ripetere le definizioni in modo più preciso utilizzando l'espressione analitica dell'equazione della retta tangente. Supponiamo che f sia una funzione derivabile nell'intervallo [a, b]; diamo le seguenti definizioni:

$$f \textit{ convessa in } [a, b] \iff \begin{cases} f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0), \\ \forall\, x, x_0 \in [a, b]; \end{cases} \tag{85.1}$$

$$f \textit{ concava in } [a, b] \iff \begin{cases} f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0), \\ \forall\, x, x_0 \in [a, b]. \end{cases} \tag{85.2}$$

CRITERIO DI CONVESSITÀ. — *Supponiamo che* f(x) *sia una funzione derivabile in* [a, b] *e che ammetta derivata seconda in* (a, b); *le seguenti condizioni sono fra loro equivalenti*

(a) f(x) *è convessa in* [a, b];

(b) f′ (x) *è crescente in* [a, b];

(c) $f''(x) \geq 0$ *per ogni* $x \in (a, b)$.

Osserviamo subito che un analogo criterio vale per le funzioni concave; in particolare una funzione f(x) derivabile due volte è concava in [a, b] se e soltanto se $f''(x) \leq 0$ per ogni $x \in (a, b)$.

Il criterio di monotonia (84.1) applicato alla derivata prima f′ (x) stabilisce che $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in (a, b)$ se e solo se f′ (x) è crescente in [a, b]; pertanto le condizioni (b) e (c) sono fra loro equivalenti. La dimostrazione del criterio di convessità sarà completa provando che (a) è equivalente a (b).

Dimostrazione che (a) ⇒ (b): allo scopo di provare che f′ (x) è crescente in [a, b], consideriamo $x_1, x_2 \in [a, b]$, con $x_1 < x_2$; ponendo consecutivamente x_0 uguale a x_1, oppure a x_2, nella definizione di convessità (85.1), si ha

$$f(x) \geq f(x_1) + f'(x_1)\,(x - x_1), \qquad \forall\, x \in [a, b]; \tag{85.3}$$

$$f(x) \geq f(x_2) + f'(x_2)\,(x - x_2), \qquad \forall\, x \in [a, b]. \tag{85.4}$$

In (85.3), (85.4) x è un punto generico di [a, b]; scegliendo $x = x_2$ in (85.3) e $x = x_1$ in (85.4), sommando membro a membro e semplificando si ottiene

$$0 \geq f'(x_1)\,(x_2 - x_1) + f'(x_2)\,(x_1 - x_2), \tag{85.5}$$

cioè

$$[f'(x_2) - f'(x_1)] \cdot (x_2 - x_1) \geq 0. \tag{85.6}$$

Essendo $x_2 > x_1$ ne segue che $f'(x_2) \geq f'(x_1)$.

Dimostrazione che (b) ⇒ (a): fissati $x, x_0 \in [a, b]$, con $x \neq x_0$, per il teorema di Lagrange esiste x_1 nell'intervallo di estremi x_0, x, per cui

(85.7) $$f(x) - f(x_0) = f'(x_1) \cdot (x - x_0).$$

Distinguiamo i casi $x > x_0$ e $x < x_0$. Se $x > x_0$, essendo $x_1 \in (x_0, x)$ (cioè, in particolare, $x_1 > x_0$), per la monotonia di $f'(x)$ risulta $f'(x_1) \geq f'(x_0)$, che, insieme alla (85.7), dà luogo alla conclusione:

(85.8) $$f(x) - f(x_0) \geq f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Se $x < x_0$ si procede in modo analogo, osservando che $x_1 \in (x, x_0)$ è minore di x_0 e quindi $f'(x_1) \leq f'(x_0)$; anche in questo caso si ottiene la conclusione (85.8) perché, di nuovo, $f'(x_1)(x - x_0) \geq f'(x_0)(x - x_0)$, dato che $(x - x_0) < 0$.

Riprendiamo gli esempi introdotti nel paragrafo precedente. La funzione e^x è convessa su tutto **R**, dato che la sua derivata seconda ($= e^x$) è positiva. La funzione log x è concava per $x > 0$, perché la sua derivata seconda ($= -1/x^2$) è negativa. Il lettore può verificare che la funzione arctg x è convessa per $x < 0$, ed è concava per $x > 0$; il punto $x = 0$ è di flesso per la funzione arctg x. La funzione x^2 è convessa su tutto **R**.

La funzione $f(x) = x^3 - 3x$, considerata in precedenza, ha come derivate successive: $f' = 3x^2 - 3$, $f'' = 6x$. Quindi f(x) è convessa per $x > 0$ ed è concava per $x < 0$. Si confronti con il grafico in figura 10.4.

Le proprietà stabilite in questi ultimi due paragrafi ci consentono di motivare il grafico delle funzioni trigonometriche sen x, cos x. Consideriamo ad esempio la funzione f(x) = sen x, limitatamente all'intervallo $[0, 2\pi]$. Calcoliamo il segno delle derivate $f' = \cos x$, $f'' = -\text{sen } x$:

f(x) = sen x \ x	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$
segno di f	+	+	−	−
segno di f′	+	−	−	+
segno di f″	−	−	+	+

In corrispondenza abbiamo le informazioni di monotonia e di concavità per f:

f(x) = sen x \ x	$0 < x < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} < x < \pi$	$\pi < x < \frac{3}{2}\pi$	$\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$
segno di f	positivo		negativo	
monotonia di f	crescente	decrescente		crescente
concavità di f	concava		convessa	

Queste informazioni, insieme ad alcuni valori facilmente calcolabili di sen x, indicano come disegnare il grafico ben noto della figura 10.7.

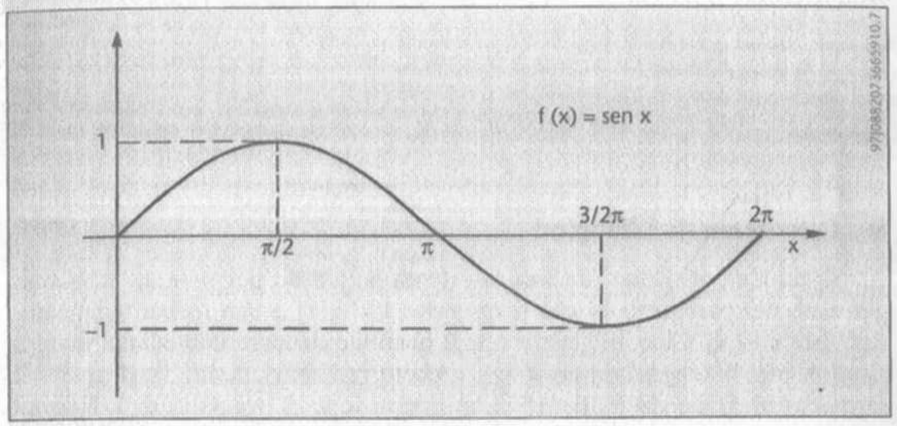


Figura 10.7

In particolare il punto $x = \pi/2$ è di massimo, il punto $x = \pi$ è di flesso, il punto $x = (3/2)\pi$ è di minimo. In modo analogo, il lettore può studiare il grafico della funzione cos x per $x \in [0,2\pi]$.

Chiudiamo il paragrafo anticipando un criterio basato sul segno della derivata seconda e studiato in condizioni più generali alla fine del paragrafo 88, per stabilire se un punto x_0 è di massimo o di minimo relativo per una funzione f(x) derivabile due volte in un intorno di x_0.

Consideriamo il caso in cui

(85.9) $$f'(x_0) = 0, \qquad f''(x_0) > 0,$$

supponendo che la derivata seconda sia continua in x_0. Per il teorema della permanenza del segno (paragrafo 56), $f''(x)$ è positiva in un intorno di x_0 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, con $\delta > 0$; quindi f è convessa in tale intorno. Tenendo presente che $f'(x_0) = 0$, risulta

(85.10) $$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(x_0), \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta];$$

perciò x_0 è un punto di minimo relativo per f.

Il caso $f''(x_0) < 0$ si tratta in modo analogo. Riassumendo, abbiamo dimostrato il seguente criterio, valido per una funzione che ammette derivata seconda (continua):

(85.11) $\quad f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0 \quad \Rightarrow x_0$ *punto di minimo relativo*;

(85.12) $\quad f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0 \quad \Rightarrow x_0$ *punto di massimo relativo.*

86. Il teorema di L'Hôpital

Siano f(x), g(x) due funzioni che tendono a zero per $x \to x_0$. Abbiamo già visto nel paragrafo 44 che il rapporto f(x)/g(x) è una forma indeterminata per $x \to x_0$. Cioè, in genere non è possibile dedurre immediatamente il risultato del limite del rapporto ma occorre preliminarmente trasformare il rapporto in modo da togliere l'indeterminazione. Il teorema di L'Hôpital serve a questo scopo.

TEOREMA DI L'HÔPITAL. — *Siano* f, g *funzioni derivabili in un intorno di* x_0 *(con la eventuale eccezione di* x_0*) tali che*

(86.1)

Se in un intorno di x_0 *risulta* $g(x), g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \neq x_0$, *allora si ha*

(86.2) $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

purché esista il secondo limite.

Il teorema di L'Hôpital vale anche per forme indeterminate del tipo ∞/∞, cioè supponendo, al posto della (86.1), che f, g tendano all'infinito per $x \to x_0$ (anzi, basta che la sola g tenda all'infinito). Inoltre il teorema vale per limiti destri e sinistri $(x \to x_0^{\pm})$ e vale anche per $x \to +\infty$, oppure $x \to -\infty$.

In questa sede ci limitiamo a provare il teorema nel caso particolare, ma significativo, in cui f, g sono derivabili in x_0, con derivata continua, e $g'(x_0) \neq 0$.

In tal caso, dato che f, g sono derivabili in x_0, esse sono anche continue in x_0 e quindi, per la (86.1), risulta $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Si ottiene

(86.3) $$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Consideriamo alcuni esempi. Calcoliamo il limite

(86.4) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} 2x}.$$

Si tratta di una forma indeterminata 0/0, che verifica le ipotesi del teorema di L'Hôpital (ed anzi verifica le ipotesi che abbiamo assunto nel fare la dimostrazione). Si ha quindi:

(86.5) $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen} 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}.$$

Un'altra situazione in cui sono verificate le ipotesi assunte nella dimostrazione è la seguente

(86.6) $$\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - 1}{\log x} = \lim_{x\to 1} \frac{2x}{1/x} = 2.$$

Consideriamo ora due limiti notevoli, che si calcolano facilmente per mezzo del teorema di L'Hôpital. Indichiamo con b un parametro positivo; per calcolare il limite (86.8) deriviamo successivamente n volte il numeratore x^b, fino ad ottenere una potenza x^{b-n} con esponente b − n negativo o nullo (cioè poniamo n = b, se b è intero, n = [b] + 1 altrimenti):

(86.7) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log x}{x^b} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1/x}{bx^{b-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{bx^b} = 0;$$

(86.8) $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^b}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{b\,x^{b-1}}{e^x} = \ldots$$
$$\ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{b(b-1)\ldots(b-n+1)\,x^{b-n}}{e^x} = 0.$$

Il teorema di L'Hôpital è utile anche per il calcolo del limite di una differenza f(x) − g(x) che si presenta sotto la forma indeterminata $\infty - \infty$, oppure per il calcolo del limite di un prodotto che si presenta sotto la forma indeterminata $0\cdot\infty$. Per il prodotto si pone fg = f/(1/g), oppure fg = g/(1/f), per ricondursi rispettivamente ad una forma 0/0 oppure ∞/∞. Ad esempio, se b è un parametro positivo, si ha:

$$\lim_{x\to 0^+} x^b \log x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{x^{-b}} \tag{86.9}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-b\, x^{-b-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^b}{-b} = 0.$$

Per mezzo del teorema di L'Hôpital si calcolano anche alcuni limiti che si presentano sotto le forme indeterminate 0^0, 1^∞, ∞^0, come negli esempi seguenti:

$$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\log x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x \log x} = \tag{86.10}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0^+} x \log x} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\log x}{1/x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{1/x}{-1/x^2}} = e^0 = 1.$$

$$\lim_{x\to 0} (1 + \operatorname{sen} x)^{1/x} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\log(1+\operatorname{sen} x)} = \tag{86.11}$$

$$= e^{\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+\operatorname{sen} x)}{x}} = e^{\lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}} = e^1 = e.$$

87. Studio del grafico di una funzione

I risultati ottenuti in questo capitolo ci permettono di studiare l'andamento di una funzione f(x) e di disegnarne il grafico. Si può procedere secondo lo schema seguente:

A. — Si determina il *dominio* (o *insieme di definizione*) della funzione f(x).

B. — Si esamina se la funzione gode di qualche simmetria; ad esempio se f è una funzione *pari*: $f(-x) = f(x)$, $\forall x$, oppure *dispari*: $f(-x) = -f(x)$, $\forall x$, oppure *periodica* di periodo T: $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in \mathbf{R}$.

Quando è semplice farlo, si calcolano le intersezioni con gli assi ed il segno della funzione.

C. — Si determinano gli eventuali asintoti orizzontali o verticali. Ricordiamo che gli *asintoti orizzontali* si trovano calcolando i limiti per $x \to \pm\infty$, se tali limiti esistono e sono finiti. Cioè:

$$y = \ell \textit{ asintoto orizzontale} \iff \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbf{R}. \tag{87.1}$$

Nel caso della definizione (87.1), si parla di asintoto orizzontale per $x \to +\infty$; si può avere in modo analogo un asintoto orizzontale per $x \to -\infty$.

Gli *asintoti verticali* si trovano calcolando il limite per $x \to x_0$ (eventualmente $x \to x_0^+$, oppure $x \to x_0^-$) quando il risultato del limite è infinito:

$$x = x_0 \textit{ asintoto verticale} \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty. \tag{87.2}$$

D. — Si determinano gli *intervalli dove la funzione è crescente o decrescente*, ed *i punti di massimo o minimo relativo*, studiando il segno della derivata prima.

Si calcolano i valori di f nei punti di massimo o minimo relativo.

E. — Si determinano gli *intervalli dove la funzione è convessa o concava*, e gli eventuali *punti di flesso*, studiando il segno della derivata seconda.

Si calcolano i valori di f nei punti di flesso.

F. — Si determinano gli eventuali asintoti obliqui. Un *asintoto obliquo* per $x \to +\infty$ è una retta di equazione $y = mx + q$ con la proprietà:

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) - (mx + q)] = 0. \tag{87.3}$$

Ciò significa che, per $x \to +\infty$, il grafico della funzione è vicino al grafico della retta $y = mx + q$.

Supponiamo che esista un asintoto obliquo, cioè supponiamo che valga la relazione (87.3), e ricaviamo i valori di m, q. Se $f(x) - mx - q$ tende a zero per $x \to +\infty$, a maggiore ragione dividendo l'espressione per x otteniamo una quantità che tende a zero. Quindi

$$0 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - (mx + q)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} - m. \tag{87.4}$$

Il valore di q si ricava direttamente dalla (87.3). Riassumendo, i valori di m, q sono dati da:

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}; \qquad q = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - mx]. \tag{87.5}$$

Naturalmente considerazioni analoghe valgono per $x \to -\infty$. Notiamo anche che, se esiste un asintoto orizzontale $y = \ell$ per $x \to +\infty$, allora è inutile ricercare un asintoto obliquo per $x \to +\infty$. Infatti, se $f(x) \to \ell$ per $x \to +\infty$, allora $f(x)/x \to 0$, e quindi $m = 0$, $q = \ell$. Cioè si ritrova l'asintoto di equazione $y = \ell$.

Secondo lo schema proposto, studiamo la seguente funzione:

(87.6) $$f(x) = x\, e^{1/x}\,.$$

A. — La funzione è definita per ogni $x \neq 0$. Quindi il dominio di f è $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

B. — La funzione non è definita per $x = 0$ e non si annulla per alcun valore di $x \in \mathbf{R} - \{0\}$; perciò il grafico di f(x) non interseca gli assi cartesiani; f(x) risulta positiva per $x > 0$ e negativa per $x < 0$ (dato che il fattore $e^{1/x}$ è positivo per ogni $x \in \mathbf{R} - \{0\}$).

C. — Per determinare gli asintoti orizzontali e verticali si calcolano i limiti agli estremi del dominio. Nel nostro caso si calcolano i limiti di f(x) per $x \to -\infty$, $x \to 0^-$, $x \to 0^+$, $x \to +\infty$. Per $x \to \pm\infty$, $e^{1/x} \to e^0 = 1$; quindi

(87.7) $$\lim_{x \to \pm\infty} x\, e^{1/x} = \pm\infty;$$

perciò non ci sono asintoti orizzontali. Per $x \to 0^-$ abbiamo un altro limite immediato; infatti in tal caso $1/x \to -\infty$, e quindi $e^{1/x} \to 0$. Ne segue

(87.8) $$\lim_{x \to 0^-} x\, e^{1/x} = 0;$$

ciò significa che per $x \to 0^-$ non c'è un asintoto verticale. Per calcolare il limite per $x \to 0^+$ usiamo il teorema di L'Hôpital:

(87.9) $$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} x\, e^{1/x} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x}}{1/x} = \\ &= \lim_{x \to 0^+} \frac{e^{1/x}\,(-1/x^2)}{-1/x^2} = \lim_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty; \end{aligned}$$

quindi la retta verticale di equazione $x = 0$ è un asintoto per $x \to 0^+$.

D. — La derivata prima vale

(87.10) $$f'(x) = e^{1/x} + x\, e^{1/x}\left(-\frac{1}{x^2}\right) = e^{1/x}\left(1 - \frac{1}{x}\right).$$

Per ogni x risulta $e^{1/x} > 0$. Quindi la derivata prima è positiva se $(1 - 1/x) > 0$, cioè se $x > 1$ oppure $x < 0$. La derivata prima è negativa se $0 < x < 1$. Ne segue che la funzione è crescente nei due intervalli $(-\infty, 0)$ e $(1, +\infty)$, ed è decrescente nell'intervallo $(0, 1)$. Il punto $x = 1$ è di minimo relativo; in corrispondenza la funzione assume il valore $f(1) = e$.

E. — La derivata seconda vale

(87.11) $$\begin{aligned} f''(x) &= e^{1/x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{x}\right) + e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} = \\ &= e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^2} \cdot \left(-1 + \frac{1}{x} + 1\right) = e^{1/x} \cdot \frac{1}{x^3}\,. \end{aligned}$$

La derivata seconda è positiva per $x > 0$, ed è negativa per $x < 0$. Quindi la funzione è convessa per $x > 0$, ed è concava per $x < 0$. Dato che f(x) non è definita per $x = 0$, non ci sono punti di flesso.

F. — Poiché il limite (87.7) per $x \to \pm\infty$ vale infinito, occorre esaminare se esistono asintoti obliqui. Calcoliamo, come in (87.5), i limiti

(87.12) $$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} e^{1/x} = e^0 = 1;$$

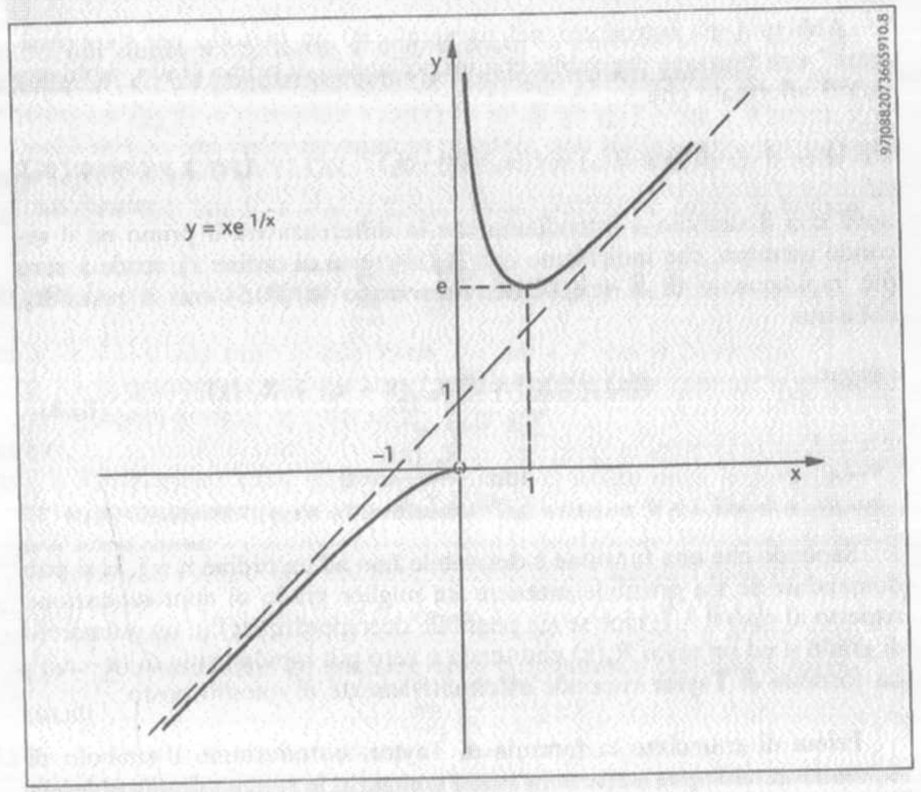


Figura 10.8

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} (x\, e^{1/x} - x) = \lim_{x\to\pm\infty} x(\, e^{1/x} - 1) =$$

(87.13) $$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x} - 1}{1/x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{1/x}\,(-\,1/\,x^2\,)}{-\,1/\,x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} e^{1/x} = 1;$$

per calcolare q si è usato il teorema di L'Hôpital. Si è trovato che la retta di equazione $y = x + 1$ è un asintoto obliquo per $x \to \pm\infty$ per la funzione f(x).

Con gli elementi trovati (dominio della funzione, segno, asintoto verticale per $x \to 0^+$, limite notevole (87.8) per $x \to 0^-$, intervalli di monotonia e di convessità, punto di minimo relativo in $x = 1$, asintoto obliquo) si e segue il disegno del grafico di f come in figura 10.8.

88. La formula di Taylor

Abbiamo già introdotto nel paragrafo 80 un metodo per "approssimare" una funzione derivabile con un polinomio di primo grado. Abbiamo infatti affermato che

(88.1) $$f(x) \cong f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) \qquad (\textit{per } x \textit{ vicino ad } x_0),$$

dove con il simbolo $\cong$ intendiamo che la differenza tra il primo ed il secondo membro, che indichiamo con $R_1(x)$ (resto di ordine 1), tende a zero più rapidamente di $x - x_0$. Cioè, riscrivendo la (80.5) con il resto R_1, abbiamo:

(88.2) $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + R_1\,(x),$$

(88.3) $$\lim_{x\to x_0} \frac{R_1\,(x)}{x - x_0} = 0\,.$$

Sapendo che una funzione è derivabile fino ad un ordine $n > 1$, ci si può domandare se sia possibile ottenere un miglior grado di approssimazione rispetto al caso $n = 1$, cioè se sia possibile decomporre f(x) in un polinomio di grado n ed un resto $R_n(x)$ che tenda a zero più rapidamente di $(x - x_0)^n$. La formula di Taylor risponde affermativamente al quesito posto.

Prima di enunciare la formula di Taylor, introduciamo il simbolo di *sommatoria*, utile per scrivere in modo compatto la somma di più addendi. Diamo alcuni esempi; in particolare, il simbolo a primo membro della (88.4)

significa che si considera la somma di n addendi, con il termine generico uguale ad a_k, con l'indice k che assume tutti i valori compresi tra $k = 1$ e $k = n$:

(88.4) $$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n\,,$$

(88.5) $$\sum_{k=0}^{n} (2k + 1) = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n + 1),$$

(88.6) $$\sum_{k=2}^{4} k! = 2! + 3! + 4! =$$

$$= 1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 32\,.$$

Nell'ultima sommatoria abbiamo usato il simbolo k! che si legge k *fattoriale*, ed è uguale al prodotto dei primi k numeri naturali.

FORMULA DI TAYLOR. — *Sia* f(x) *una funzione derivabile* n *volte in* x_0. *Risulta*

(88.7) $$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}\,(x_0)}{k!}\,(x - x_0)^k + R_n\,(x),$$

(88.8) $$\lim_{x\to x_0} \frac{R_n\,(x)}{(x - x_0)^n} = 0.$$

Nella formula (88.7), per $k = 0$, si intende $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$, e $0! = 1$. Quindi ad esempio, se $n = 2$, si ottiene:

(88.9) $$f(x) = f(x_0) + f'\,(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + R_2\,(x),$$

(88.10) $$\lim_{x\to x_0} \frac{R_2\,(x)}{(x - x_0)^2} = 0;$$

per $n = 1$ si riottengono le (88.2), (88.3). Il lettore scriva esplicitamente la sommatoria per altri valori di n.

Dimostriamo ora la formula di Taylor supponendo che la derivata $f^{(n)}(x)$ sia continua in x_0. Inoltre, avendo difficoltà a considerare n generico, si consiglia di rileggere il metodo proposto con $n = 2$.

Ricavando $R_n(x)$ dalla (88.7), occorre dimostrare che:

(88.11)
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - [f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n / n!]}{(x - x_0)^n} = 0$$

Il limite si presenta sotto forma indeterminata 0/0. Utilizziamo il teorema di L'Hôpital. Notiamo esplicitamente che occorre derivare numeratore e denominatore rispetto ad x; quindi ad esempio la derivata di $f(x_0)$ vale zero, mentre la derivata di $f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n/n!$ è uguale a

(88.12)
$$\frac{f^{(n)}(x_0) \cdot n(x - x_0)^{n-1}}{n!} = \frac{f^{(n)}(x_0) \cdot (x - x_0)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Quindi il limite nella (88.11) è lo stesso di

(88.13)
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x) - [f'(x_0) + \ldots + f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^{n-1} / (n-1)!]}{n(x - x_0)^{n-1}}$$

purchè il secondo limite esista. Se $n > 1$, abbiamo ottenuto una nuova forma 0/0. Dopo aver applicato in totale n volte il teorema di L'Hôpital, abbiamo:

(88.14)
$$\lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{n!}.$$

Quest'ultimo limite è zero, perché $f^{(n)}(x)$ è continua in x_0. Perciò la tesi (88.11) è dimostrata.

Sviluppiamo secondo la formula di Taylor alcune funzioni elementari. Se $f(x) = e^x$, risulta $f^{(n)}(x) = e^x$ per ogni n. Quindi, ponendo $x_0 = 0$, si ha $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$ per ogni n. Perciò otteniamo

(88.15)
$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x).$$

Analogamente, scegliendo $x_0 = 0$, si ottiene

(88.16)
$$\log(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + R_n(x);$$

(88.17)
$$\text{sen } x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x);$$

(88.18)
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x).$$

Allo scopo di verificare graficamente i risultati ottenuti, abbiamo riportato nella figura 10.9 i grafici dei polinomi di grado: primo, terzo, quinto,..., che si ricavano dallo sviluppo in formula di Taylor per la funzione sen x. Tenendo conto della (88.17), abbiamo posto:

(88.19)
$$f_1(x) = x; \qquad f_3(x) = x - \frac{x^3}{6}; \qquad f_5(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}, \ldots$$

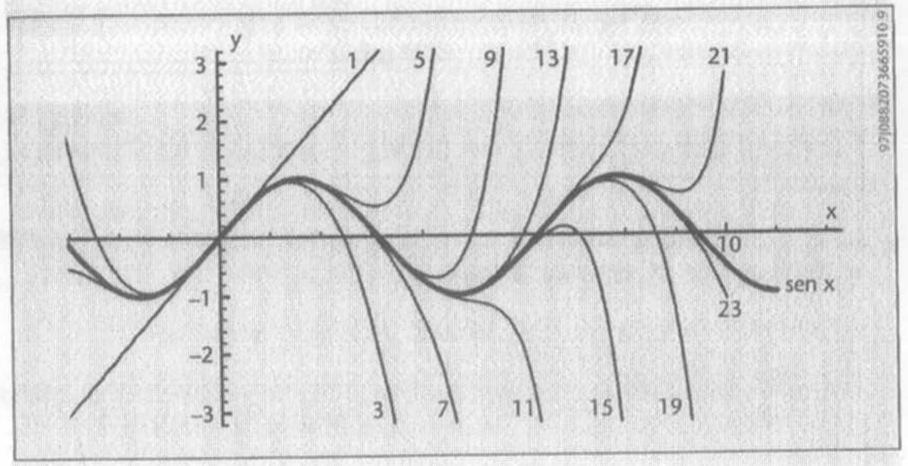


Figura 10.9

Il disegno della figura 10.9 è stato eseguito con l'ausilio di un computer. Si nota chiaramente che i polinomi $f_{2k+1}(k = 0, 1, 2, \ldots)$ di Taylor hanno un grafico per x vicino a zero, tanto più simile al grafico della funzione sen x, quanto più k è grande.

Per mezzo della formula di Taylor è possibile generalizzare il criterio (85.11), (85.12) nel modo seguente:

CRITERIO PER I PUNTI DI MASSIMO O DI MINIMO. — *Se esistono le derivate sottoindicate della funzione* $f(x)$ *nel punto* x_0, *vale il seguente schema:*

$$
f'(x_0) = 0: \begin{cases} f''(x_0) > 0 & \textit{minimo relativo in } x_0 \\ f''(x_0) < 0 & \textit{massimo relativo in } x_0 \\ f''(x_0) = 0: & \begin{cases} f^{(3)}(x_0) \neq 0 & \textit{né massimo, né minimo in } x_0 \\ f^{(3)}(x_0) = 0: & \begin{cases} f^{(4)}(x_0) > 0 & \textit{minimo relativo in } x_0 \\ f^{(4)}(x_0) < 0 & \textit{massimo relativo in } x_0 \\ f^{(4)}(x_0) = 0: & \begin{cases} \ldots \\ \ldots \\ \ldots \end{cases} \end{cases} \end{cases} \end{cases}
$$

Dimostrazione: una situazione generica nello schema sopra proposto è quella in cui $f(x)$ è derivabile n volte in x_0 per qualche $n \geq 2$, e risulta

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0; \qquad f^{(n)}(x_0) \neq 0. \tag{88.20}$$

Consideriamo il caso in cui $f^{(n)}(x_0) > 0$ (la trattazione del caso $f^{(n)}(x_0) < 0$ è analoga). Per l'annullarsi delle derivate, la formula di Taylor (88.7) diviene

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \tag{88.21}$$

e, per la (88.8):

$$\begin{aligned} &\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} = \\ &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} \right] = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} > 0. \end{aligned} \tag{88.22}$$

Per il teorema della permanenza del segno, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^n} > 0\,, \qquad \forall\, x: 0 \neq |x - x_0| < \delta. \tag{88.23}$$

Se n è pari il denominatore $(x - x_0)^n$ è positivo per ogni $x \neq x_0$; perciò risulta $f(x) > f(x_0)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$ e quindi x_0 è un punto di minimo relativo per $f(x)$.

Se invece n è dispari, dato che il denominatore della frazione (88.23) cambia segno per x maggiore o minore di x_0, risulta che $f(x) > f(x_0)$, oppure $f(x) < f(x_0)$, rispettivamente per $x > x_0$, oppure $x < x_0$. Perciò la funzione $f(x)$ non ha né massimo né minimo in x_0.

A titolo di esempio osserviamo che per la funzione $f(x) = x^4$ risulta

$$f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = 0, \qquad f^{(4)}(0) = 4! = 24 \tag{88.24}$$

e pertanto, in base al criterio precedente, $f(x)$ ammette minimo nel punto $x_0 = 0$; la verifica diretta di tale proprietà è immediata: infatti $f(x) = x^4 \geq 0 = f(0)$ per ogni $x \in \mathbf{R}$.

Invece, per la funzione $g(x) = x^3$ si ha:

$$g'(0) = g''(0) = 0, \quad g^{(3)}(0) = 3!, \tag{88.25}$$

per cui, in $x_0 = 0$, $g(x)$ non assume massimo né minimo. In realtà la funzione $g(x)$, rappresentata in figura 11.5, ha un flesso in $x_0 = 0$. Osserviamo che tale proprietà vale in generale: *se in un punto la prima derivata non nulla è di ordine dispari (maggiore od uguale a 3) allora la funzione presenta un flesso nel punto.*

CAPITOLO 11

FUNZIONI DI PIÙ VARIABILI

89. Funzioni di due variabili: dominio; rappresentazione cartesiana

Indichiamo con $\mathbf{R}^2$ l'insieme delle coppie ordinate di numeri reali:

$$\mathbf{R}^2 = \{(x, y): x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}; \tag{89.1}$$

ricordiamo (si veda il paragrafo 31) che tale insieme può essere munito di una struttura di *spazio vettoriale.*

Sia D un sottoinsieme di $\mathbf{R}^2$. Un'applicazione f che ad ogni elemento di D fa corrispondere uno ed un solo elemento di $\mathbf{R}$ è detta una *funzione di due variabili*; come nel paragrafo 6, è denotata con il simbolo $f{:}D \to \mathbf{R}$, oppure, per mettere in evidenza il fatto che $D \subseteq \mathbf{R}^2$, con il simbolo

$$z = f(x, y), \qquad (x, y) \in D, \tag{89.2}$$

oppure semplicemente con il simbolo f(x, y).

L'insieme D si dice il dominio della funzione f, od anche l'*insieme di definizione* di f.

Per rappresentare graficamente una funzione di due variabili $z = f(x, y)$, spesso si utilizza un riferimento cartesiano ortogonale, di assi x, y, z; si considera un generico punto $(x, y) \in D$ nel piano di base x, y (figura 11.1) ed il corrispondente punto (x, y, z) a quota z, con $z = f(x, y)$ (figura 11.2).

Si ottiene così, nello spazio tridimensionale di coordinate (x, y, z), una superficie, che è detta *grafico* della funzione f(x, y).

Consideriamo alcuni esempi.

Cominciamo con la funzione

$$f(x, y) = x^2 - y^2, \tag{89.3}$$

che è definita per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$. Si comprende il comportamento della funzione fissando una delle due variabili indipendenti x, y. Per y fissato si ottengono delle parabole convesse

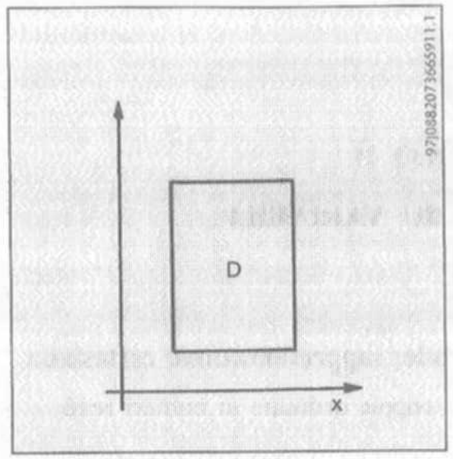


Figura 11.1

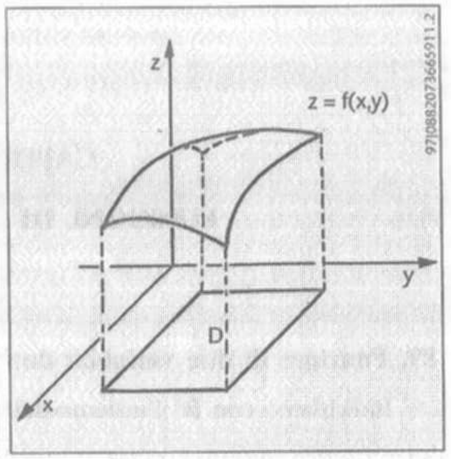


Figura 11.2

di equazione $z = x^2$ – costante (figura 11.3), mentre per x fissato si hanno delle parabole *concave* di equazione z = costante $- y^2$ (figura 11.4).

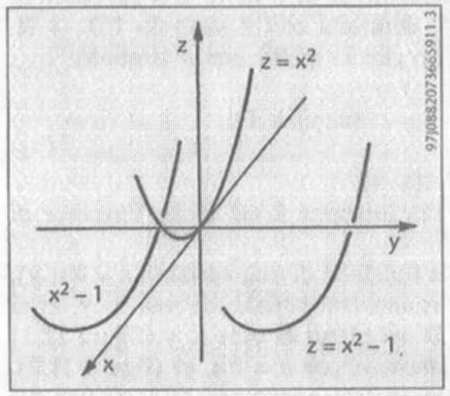


Figura 11.3

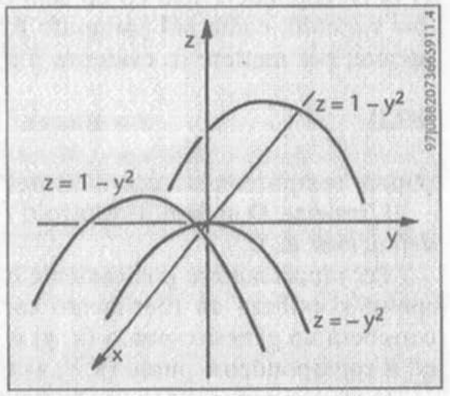


Figura 11.4

Il grafico della funzione (89.3), eseguito al computer è rappresentato in figura 11.5 limitatamente ai punti (x, y) del dominio a forma quadrata:

(89.4) $$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \quad -1 \le x \le 1, \quad -1 \le y \le 1\};$$

ricordiamo che si tratta di un *paraboloide iperbolico*.

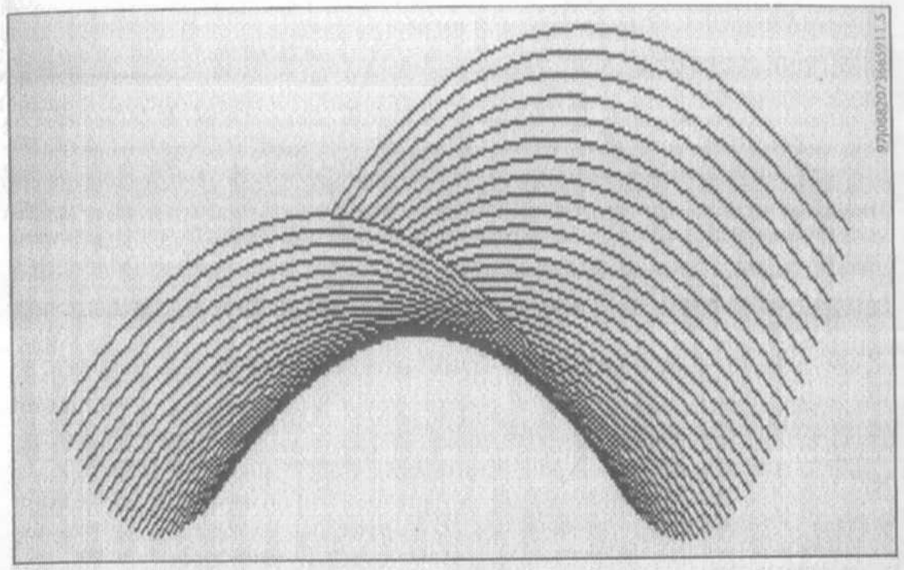


Figura 11.5 — $f(x, y) = x^2 - y^2$

Analogamente, scambiando il ruolo delle variabili x, y, si ottiene il grafico della funzione

(89.5) $$f(x, y) = y^2 - x^2$$

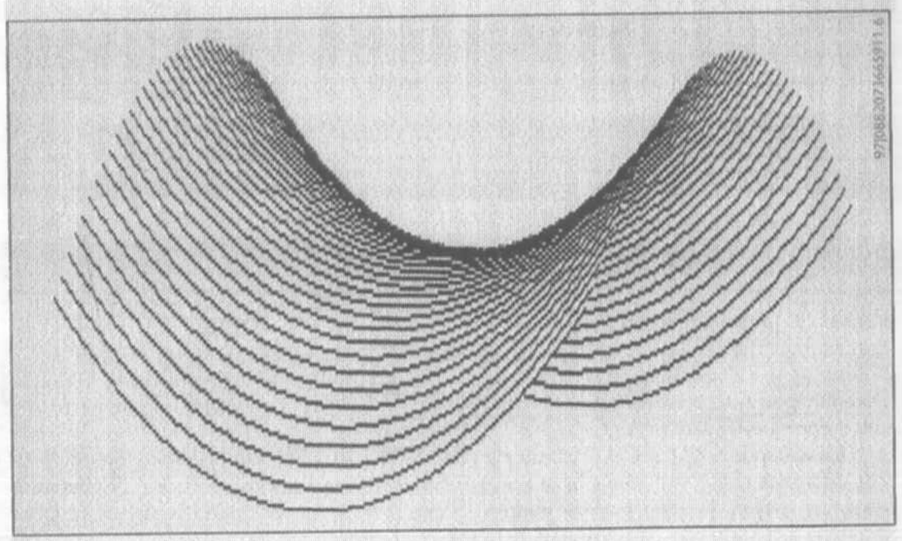


Figura 11.6 — $f(x, y) = y^2 - x^2$

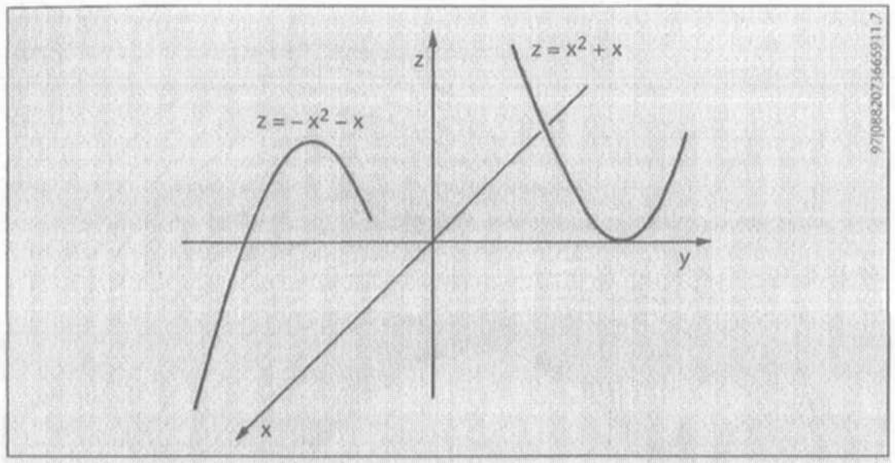


Figura 11.7

in figura 11.6, descritto da parabole concave di equazione z = costante $- x^2$ se y è fissato, e da parabole convesse di equazione $z = y^2$ – costante, se x è fissato.

La funzione

(89.6) $$f(x, y) = y(x^2 + x)$$

ha, per $y > 0$ fissato, il comportamento di una parabola convessa del tipo $z = x^2 + x$, mentre se y è un numero negativo fissato, il comportamento è quello di una parabola concava del tipo $z = -x^2 - x$ (si veda la figura 11.7).

Invece per x fissato la funzione (89.6) ha un comportamento lineare: si tratta di una retta di equazione z = costante · y. Pertanto il grafico della funzione f(x, y), rappresentato in figura 11.8, è unione di una famiglia di rette; per tale motivo si dice che il grafico è una *superficie rigata*.

La funzione

(89.7) $$f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$$

è definita per ogni $(x, y) \in \mathbf{R}^2$; per comprenderne il grafico è opportuno pensare f(x, y) funzione composta nel modo seguente:

(89.8) $$f(x, y) = \cos t^2, \qquad t^2 = x^2 + y^2 \quad (t \geq 0).$$

Nel piano x, y l'equazione $x^2 + y^2 = t^2$, con $t > 0$, rappresenta una circonferenza di centro l'origine e raggio t, come in figura 11.9; in figura 11.10 è invece rappresentata la funzione $t \to \cos t^2$, per $t \geq 0$.

La funzione f(x, y) in (89.7) è costante (cioè assume lo stesso valore) in tutti i punti della circonferenza $x^2 + y^2 = t^2$, con t fissato, ed il valore è appunto uguale a $z = \cos t^2$. Il grafico di f(x, y) si ottiene facendo ruotare intorno all'asse z il profilo disegnato in figura 11.10; si perviene alla superficie rappresentata in figura 11.11. Si dice che f(x, y) in (89.7) è *invariante per rotazioni*.

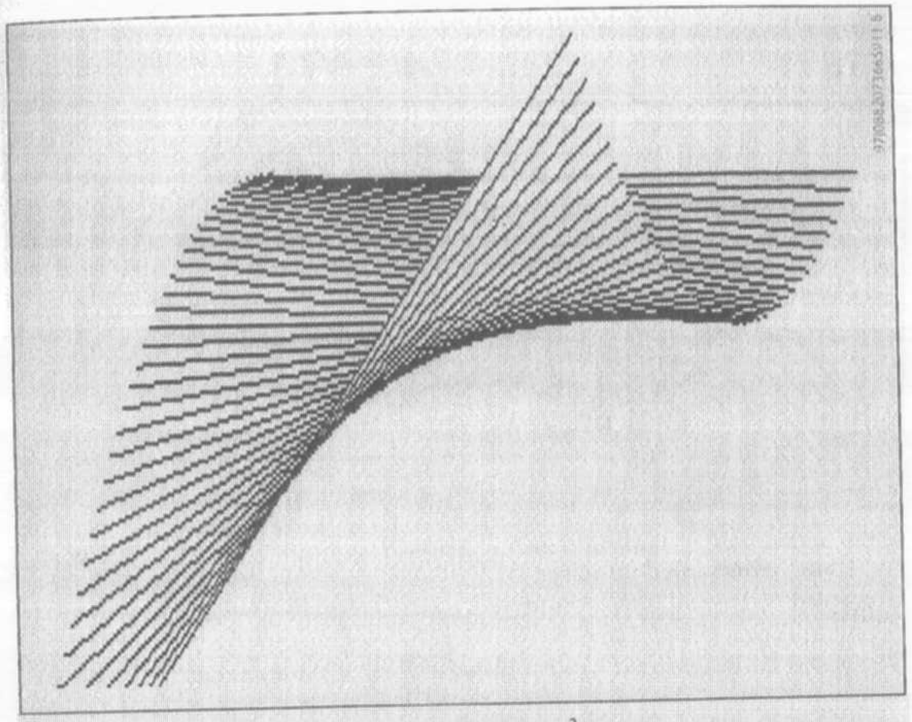


Figura 11.8 — $f(x, y) = y(x^2 + x)$

Invece in figura 11.12 è rappresentato il grafico della funzione di due variabili

(89.9) $$f(x, y) = \text{sen } xy,$$

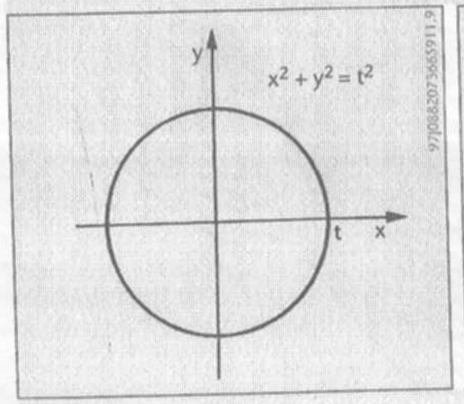


Figura 11.9

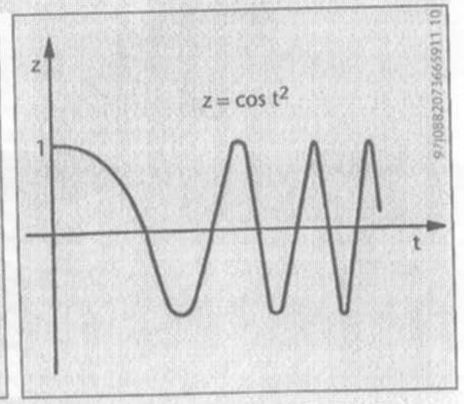


Figura 11.10

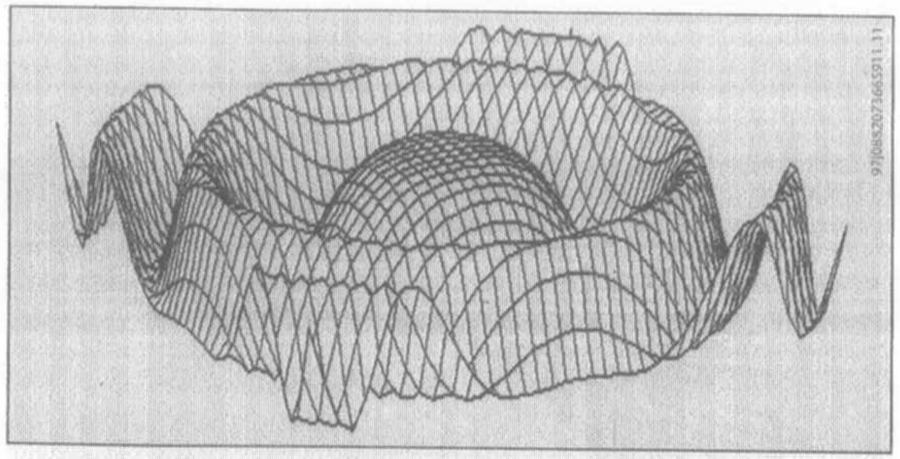


Figura 11.11 — $f(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$

che è costante sulle iperboli del piano x, y di equazione $x \cdot y = t$, con t fissato in $\mathbf{R}$.

Come la funzione (89.7), anche

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \tag{89.10}$$

è invariante per rotazioni; non è però definita per $x^2 + y^2 = 0$, cioè nel punto (0, 0). Il grafico si ottiene facendo ruotare intorno all'asse z il profilo della funzione $z = \log t^2 = 2 \log t$, con $t > 0$, come in figura 11.13.

Sono invarianti per rotazioni anche le seguenti funzioni

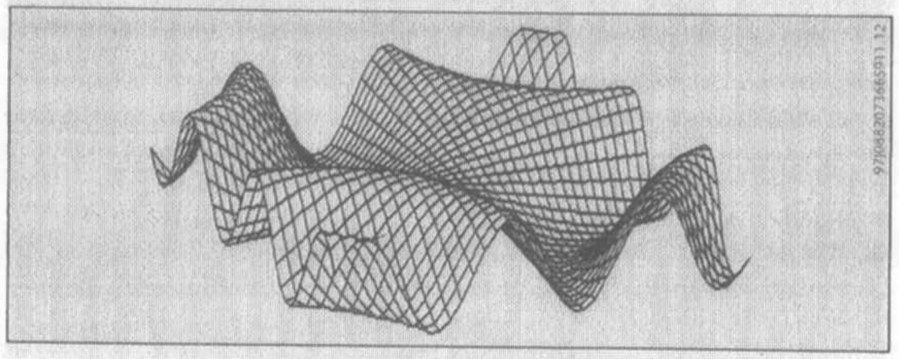


Figura 11.12 — f(x, y) = sen xy

$$f_0(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{89.11}$$

$$f_1(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}, \tag{89.12}$$

$$f_2(x, y) = 1 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2}, \tag{89.13}$$

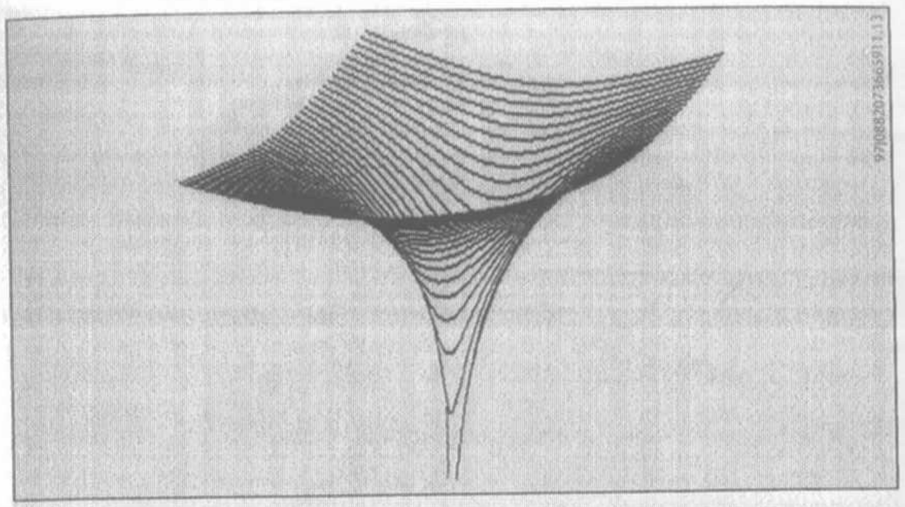


Figura 11.13 — $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$

i cui grafici sono rappresentati rispettivamente nelle figure 11.14, 11.15, 11.16. La funzione f_0, definita su tutto $\mathbf{R}^2$, ha per $y = 0$ un profilo descritto dall'equazione

$$z = 1 - \sqrt{x^2} = 1 - |x|; \tag{89.14}$$

analogamente, per $x = 0$ risulta $f_0(0, y) = 1 - |y|$; si noti il punto angoloso, dovuto al valore assoluto, in figura 11.14 in corrispondenza al punto (x, y) = (0, 0).

La funzione f_1 è definita se $x^2 + y^2 \geq 1$, che corrisponde all'esterno del cerchio del piano x, y di centro l'origine e raggio 1. Analogamente, la funzione f_2 è definita all'esterno del cerchio di centro l'origine e raggio $\sqrt{2}$.

Come le funzioni in (89.12), (89.13), anche

$$z = 1 - \sqrt{(1 - x^2) \cdot (1 - y^2)} \tag{89.15}$$

$$z = \sqrt{(x^2 + y^2 - x) \cdot (2x - x^2 - y^2)} \tag{89.16}$$

non sono definite su tutto $\mathbf{R}^2$. La (89.15) è definita quando

$$(1 - x^2) \cdot (1 - y^2) \geq 0, \tag{89.17}$$

cioè quando i fattori $1 - x^2$ e $1 - y^2$ hanno lo stesso segno, e ciò accade nell'insieme tratteggiato in figura 11.17.

La (89.16) è definita quando l'argomento della radice quadrata è maggiore od uguale a zero. Ricordiamo (si veda il paragrafo 11, oppure il paragrafo 38) che l'equazione

$$x^2 + y^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0 \tag{89.18}$$

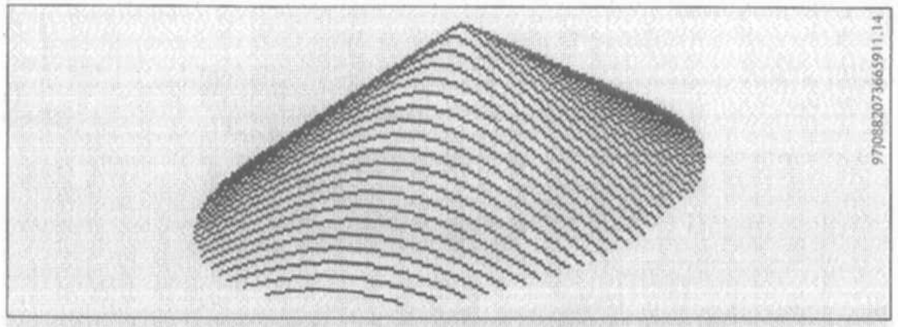


Figura 11.14 — $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2}$

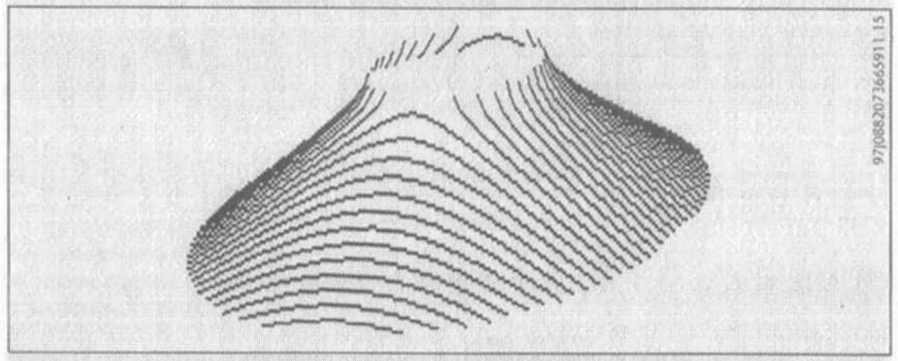


Figura 11.15 — $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$

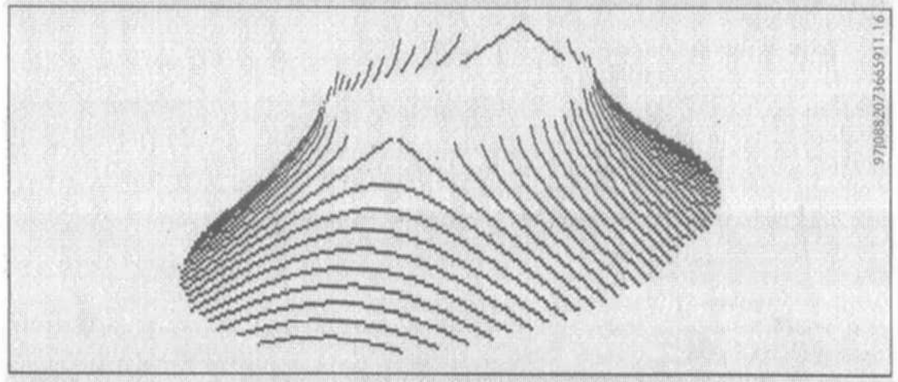


Figura 11.16 — $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2 - 2}$

SCA MALI...

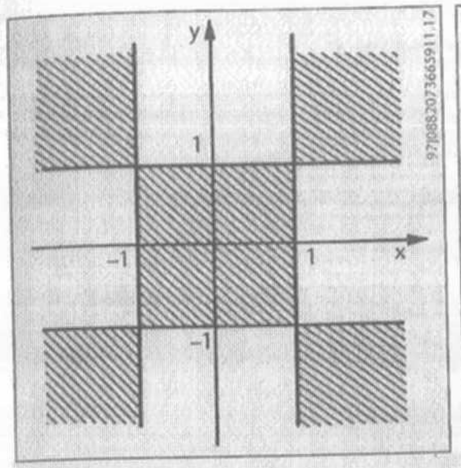


Figura 11.17

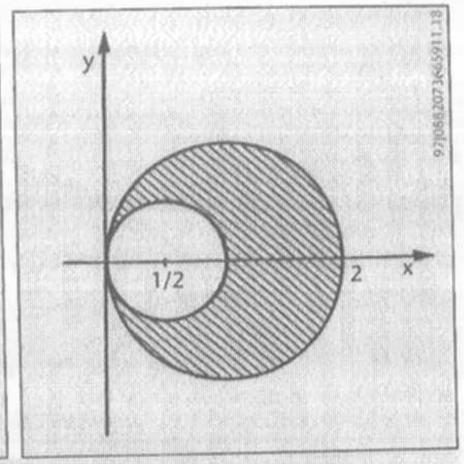


Figura 11.18

rappresenta una circonferenza del piano x, y di centro nel punto di coordinate (1/2, 0) e raggio 1/2; analogamente l'equazione

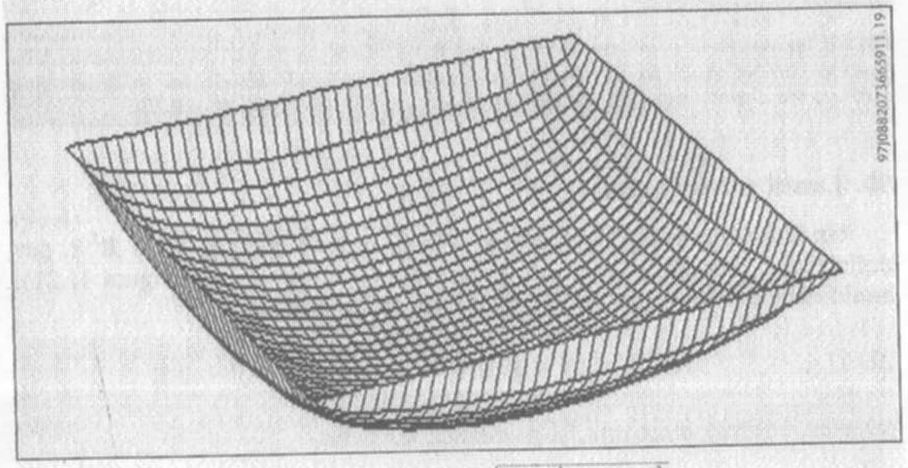


Figura 11.19 — $z = 1 - \sqrt{(1 - x^2) \cdot (1 - y^2)}$

(89.19) $$x^2 + y^2 - 2x = (x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0$$

rappresenta una circonferenza di centro (1, 0) e raggio 1. Si vede allora che la funzione (89.16) è definita all'*interno* della circonferenza (89.19) e all'*esterno* della circonferenza (89.18), quando risulta:

(89.20) $$x^2 + y^2 - x \geq 0, \quad x^2 + y^2 - 2x \leq 0$$

(il lettore verifichi che non esistono coppie (x, y) tali che $x^2 + y^2 - x < 0$ e $x^2 + y^2 - \ - 2x > 0$); si ottiene il dominio tratteggiato in figura 11.18.

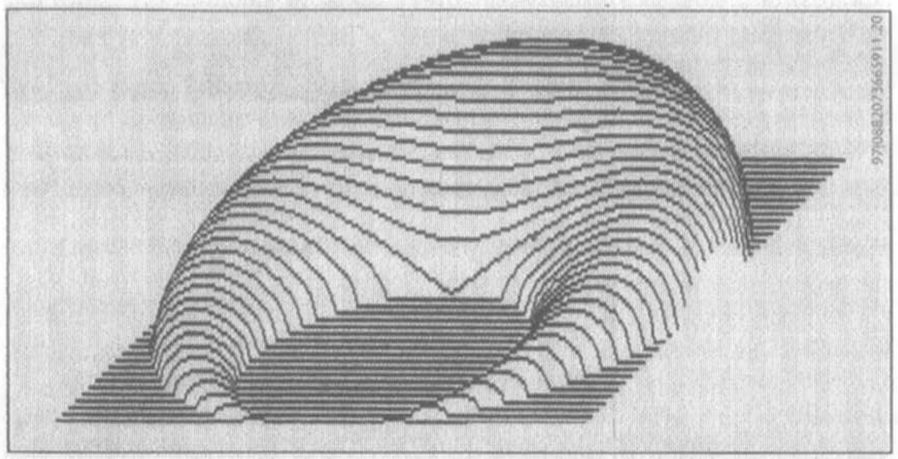


Figura 11.20 — $z = \sqrt{-(x^2 + y^2 + x) \cdot (x^2 + y^2 + 2x)}$

Nelle figure 11.19 e 11.20 sono rappresentati rispettivamente il grafico della funzione (89.15), limitatamente al quadrato $D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq \ \leq 1\}$, ed il grafico della funzione (89.16) «vista da dietro», cioè cambiando il verso all'asse x (che, analiticamente, corrisponde a cambiare x con $-x$).

90. Limiti e continuità

Un *intorno circolare* I_δ di raggio δ (> 0) di un punto $(x_0, y_0) \in \mathbf{R}^2$ è, per definizione, il cerchio aperto di centro (x_0, y_0) e raggio δ (in figura 11.21); analiticamente l'intorno I_δ è individuato dalla condizione:

(90.1) $$I_\delta = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 < \delta^2\};$$

talvolta, equivalentemente, si preferisce scrivere:

(90.2) $$(x, y) \in I_\delta \iff \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta.$$

Sia f(x, y) una funzione definita in un insieme $D \subseteq \mathbf{R}^2$ e sia (x_0, y_0) un punto di $\mathbf{R}^2$ con la proprietà che in ogni intorno circolare di (x_0, y_0) cada almeno un punto del dominio D distinto da (x_0, y_0) (come in figura 11.22); in analogia con la definizione introdotta nel paragrafo 57 per le funzioni di una

variabile, si dice che (x_0, y_0) è un *punto di accumulazione* per il dominio D di definizione della funzione f(x, y).

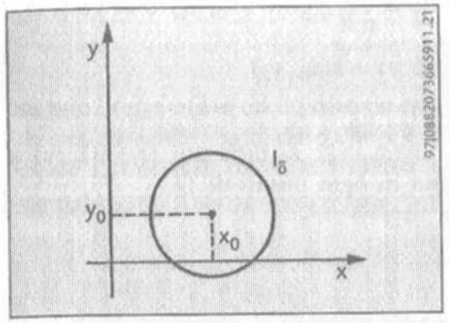


Figura 11.21

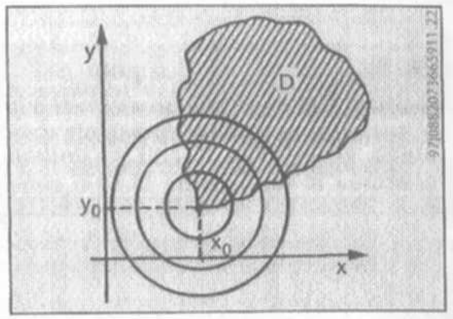


Figura 11.22

Nelle condizioni anzidette si dice che f(x, y) converge ad un numero reale ℓ, per (x, y) che tende ad (x_0, y_0), e si scrive

(90.3) $$\lim_{(x, y) \to (x_0, y_0)} f(x, y) = \ell,$$

se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che $|f(x, y) - \ell| < \varepsilon$ per ogni $(x, y) \in \ I_\delta \cap D - \{(x_0, y_0)\}$. In simboli la (90.3) si può anche scrivere:

(90.4) $$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0: \quad \forall (x, y) \in D - \{(x_0, y_0)\},$$
$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x, y) - \ell| < \varepsilon.$$

Ad esempio risulta

(90.5) $$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} = 0;$$

infatti, essendo $x^4 + y^4 \leq x^4 + y^4 + 2\,x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2$, si ha

(90.6) $$\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} \leq \frac{(x^2 + y^2)^2}{x^2 + y^2} = x^2 + y^2;$$

perciò, se per ogni $\varepsilon > 0$ si pone $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, si ottiene

(90.7) $$(x, y) \neq (0, 0), \quad \sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Se la funzione f(x, y) è definita anche nel punto (x_0, y_0) e se risulta

(90.8) $$\lim_{(x,y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0),$$

allora si dice che f(x, y) è *continua* in (x_0, y_0); si dice poi che f(x, y) è continua in un insieme D se è continua in ogni punto di D.

Verifichiamo ad esempio che la funzione

(90.9) $$f(x, y) = x \cdot y$$

è continua nel punto $(x_0, y_0) = (0, 0)$; essendo $f(0, 0) = 0$, occorre mostrare che

(90.10) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot y = 0$$

A tale scopo mostriamo preliminarmente che

(90.11) $$|x \cdot y| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2), \qquad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2;$$

infatti, se $x \cdot y \geq 0$, la (90.11) diviene $2xy \leq x^2 + y^2$, cioè ancora $x^2 + y^2 - 2xy \geq 0$, che è verificata perché equivale a $(x - y)^2 \geq 0$; analogamente, se $x \cdot y < 0$, la (90.11) diviene $-2xy \leq x^2 + y^2$, che equivale a $(x + y)^2 \geq 0$.

In base alla (90.11), risulta $|xy| < \varepsilon$ ogniqualvolta $x^2 + y^2 < 2\varepsilon$. Pertanto, posto $\delta = \sqrt{2\varepsilon}$, si ha

(90.12) $$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \quad \Rightarrow \quad |x \cdot y - 0| < \varepsilon,$$

che prova la tesi (90.10).

Come accade per le funzioni di una variabile, anche le funzioni di due variabili, ottenute componendo potenze, esponenziali, logaritmi e funzioni trigonometriche, sono continue nel loro insieme di definizione.

91. Derivate parziali. Gradiente

Sia f una funzione di due variabili definita in un intorno circolare I_δ di un punto (x, y), come in figura 11.23.

In particolare f è definita, oltre che in (x, y), anche in (x + h, y), qualunque sia h tale che $|h| < \delta$.

La *derivata parziale di* f *rispetto ad* x nel punto (x, y) è, per definizione, il limite

(91.1) $$\lim_{h\to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h},$$

se tale limite esiste ed è finito (si noti che si tratta del limite di una funzione di *una variabile* reale, dato che y è fissato e gioca il ruolo di parametro); se esiste la derivata parziale rispetto ad x si denota con uno dei simboli

(91.2) $$f_x; \qquad f_x(x, y); \qquad \frac{\partial f}{\partial x}; \qquad D_x f.$$

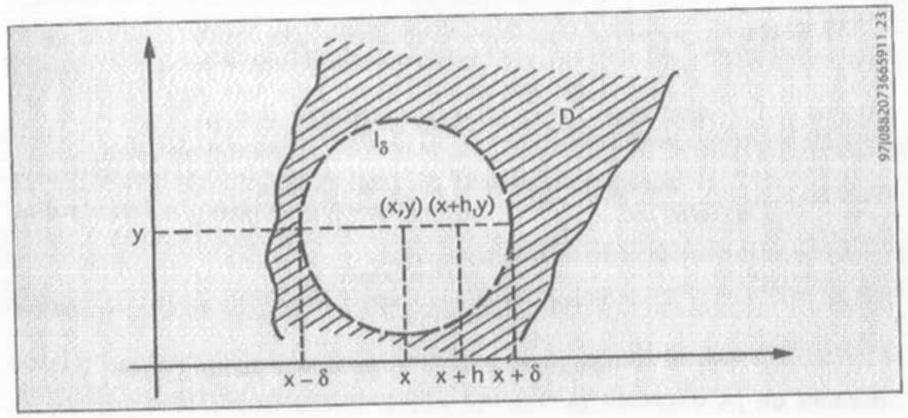


Figura 11.23

Analogamente, la *derivata parziale di* f *rispetto ad* y nel punto (x, y) è, per definizione, il limite

(91.3) $$\lim_{k\to 0} \frac{f(x, y + k) - f(x, y)}{k},$$

purché tale limite esista e sia finito, e si denota con uno dei simboli

(91.4) $$f_y; \qquad f_y(x, y); \qquad \frac{\partial f}{\partial y}; \qquad D_y f.$$

A seguito della definizione, le derivate parziali di una funzione di due

variabili si calcolano con le stesse regole di derivazione per le funzioni di una variabile, considerando l'altra variabile costante, con il ruolo di parametro.

Come primo esempio, calcoliamo le derivate parziali della funzione

(91.5) $$f(x, y) = x^2 + x\,y^2\,, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2\,.$$

Nel derivare rispetto ad x si considera y costante (come se fosse, ad esempio $y^2 = 9$ e si dovesse derivare la funzione $x \to x^2 + 9x$); si ottiene la derivata parziale rispetto ad x:

(91.6) $$f_x\,(x, y) = 2x + y^2$$

e, analogamente, la derivata rispetto ad y:

(91.7) $$f_y\,(x, y) = 2xy.$$

La funzione

(91.8) $$f(x, y) = \operatorname{sen} xy, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

il cui grafico è rappresentato in figura 11.12, ammette le seguenti derivate parziali:

(91.9) $$f_x = y \cos xy, \qquad f_y = x \cos xy, \qquad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2\,.$$

Come ultimo esempio consideriamo la funzione

(91.10) $$f(x, y) = e^x\,;$$

si tratta di una funzione costante rispetto ad y e le sue derivate parziali valgono:

(91.11) $$f_x = e^x\,, \qquad f_y = 0, \qquad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2\,.$$

Se la funzione f ammette derivate parziali f_x, f_y in un punto (x, y), in tale punto si definisce il *gradiente di* f, indicato con grad f, oppure con Df, come il *vettore* di $\mathbf{R}^2$ (si veda il paragrafo 31) avente per componenti le derivate parziali di f; in simboli:

(91.12) $$\operatorname{grad} f = Df = (f_x, f_y).$$

Si dimostra che, se non è nullo, il vettore gradiente indica la direzione di massima pendenza del grafico della funzione.

Ad esempio, la funzione

(91.13) $$f(x, y) = x + 2y, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

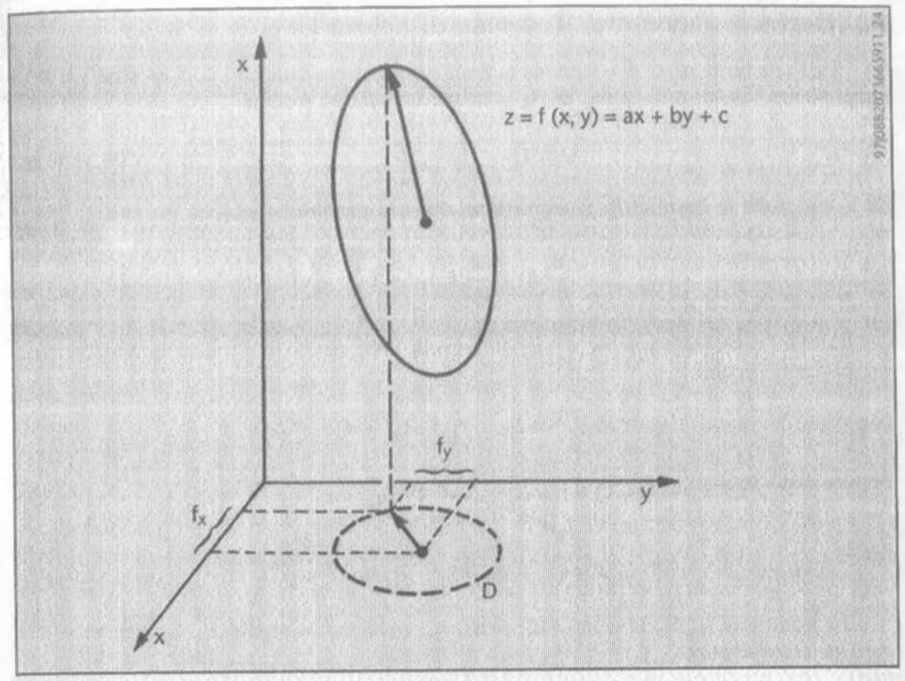


Figura 11.24

ammette derivate parziali $f_x = 1$, $f_y = 2$ costanti su $\mathbf{R}^2$. Il gradiente di f per definizione è il vettore di $\mathbf{R}^2$

(91.14) $$\operatorname{grad} f = (1, 2)$$

ed esprime la direzione ed il verso nel piano di base x, y in cui conviene muoversi per ottenere il massimo incremento della funzione f (a parità di percorso nel piano x, y).

Generalizzando l'esempio (91.13), in figura 11.24 è stato rappresentato il grafico di una generica *funzione lineare* di due variabili, di equazione

(91.15) $$z = f(x, y) = ax + by + c,$$

con $(x, y) \in D$, dove come dominio D è stato scelto un cerchio del piano x, y. Il grafico di f(x, y), con $(x, y) \in D$, è una porzione di un piano dello spazio tridimensionale di assi x, y, z. Il gradiente di f(x, y):

(91.16) $$\operatorname{grad} f = (f_x, f_y) = (a, b)$$

è rappresentato in figura 11.24 da un vettore giacente (nel piano x, y) nel cerchio D; nella direzione del gradiente, in corrispondenza, la funzione f(x, y) ha la massima pendenza.

variabili si calcolano con le stesse regole di derivazione per le funzioni di una variabile, considerando l'altra variabile costante, con il ruolo di parametro.

Come primo esempio, calcoliamo le derivate parziali della funzione

(91.5) $$f(x, y) = x^2 + x\,y^2\,, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2\,.$$

Nel derivare rispetto ad x si considera y costante (come se fosse, ad esempio $y^2 = 9$ e si dovesse derivare la funzione $x \to x^2 + 9x$); si ottiene la derivata parziale rispetto ad x:

(91.6) $$f_x\,(x, y) = 2x + y^2$$

e, analogamente, la derivata rispetto ad y:

(91.7) $$f_y\,(x, y) = 2xy.$$

La funzione

(91.8) $$f(x, y) = \text{sen}\ xy, \qquad (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

il cui grafico è rappresentato in figura 11.12, ammette le seguenti derivate parziali:

(91.9) $$f_x = y \cos xy, \qquad f_y = x \cos xy, \qquad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2\,.$$

Come ultimo esempio consideriamo la funzione

(91.10) $$f(x, y) = e^x\,;$$

si tratta di una funzione costante rispetto ad y e le sue derivate parziali valgono:

(91.11) $$f_x = e^x\,, \qquad f_y = 0, \qquad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2\,.$$

Se la funzione f ammette derivate parziali f_x, f_y in un punto (x, y), in tale punto si definisce il *gradiente di* f, indicato con grad f, oppure con Df, come il *vettore* di $\mathbf{R}^2$ (si veda il paragrafo 31) avente per componenti le derivate parziali di f; in simboli:

(91.12) $$\text{grad}\ f = Df = (f_x, f_y).$$

Si dimostra che, se non è nullo, il vettore gradiente indica la direzione di massima pendenza del grafico della funzione.

Ad esempio, la funzione

(91.13) $$f(x, y) = x + 2y, \ (x, y) \in \mathbf{R}^2$$

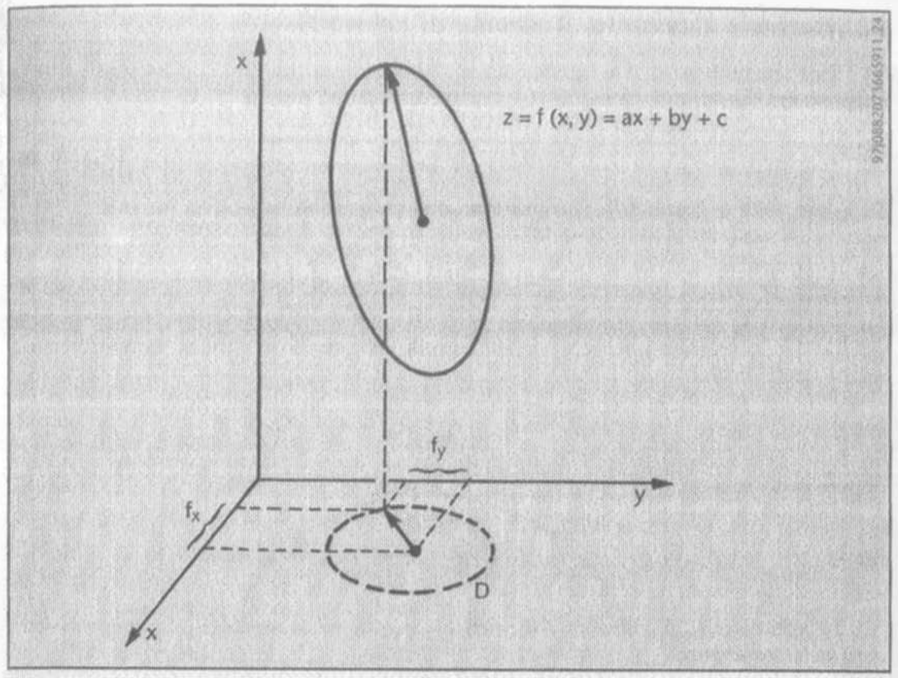


Figura 11.24

ammette derivate parziali $f_x = 1$, $f_y = 2$ costanti su $\mathbf{R}^2$. Il gradiente di f per definizione è il vettore di $\mathbf{R}^2$

(91.14) $$\text{grad}\ f = (1, 2)$$

ed esprime la direzione ed il verso nel piano di base x, y in cui conviene muoversi per ottenere il massimo incremento della funzione f (a parità di percorso nel piano x, y).

Generalizzando l'esempio (91.13), in figura 11.24 è stato rappresentato il grafico di una generica *funzione lineare* di due variabili, di equazione

(91.15) $$z = f(x, y) = ax + by + c,$$

con $(x, y) \in D$, dove come dominio D è stato scelto un cerchio del piano x, y. Il grafico di f(x, y), con $(x, y) \in D$, è una porzione di un piano dello spazio tridimensionale di assi x, y, z. Il gradiente di f(x, y):

(91.16) $$\text{grad}\ f = (f_x, f_y) = (a, b)$$

è rappresentato in figura 11.24 da un vettore giacente (nel piano x, y) nel cerchio D; nella direzione del gradiente, in corrispondenza, la funzione f(x, y) ha la massima pendenza.

92. Derivate successive. Teorema di Schwarz

Sia f una funzione di due variabili definita in un intorno circolare I_δ di un punto di $\mathbf{R}^2$ e supponiamo che in tutti i punti di I_δ f ammetta derivate parziali

$$f_x(x, y), \quad f_y(x, y), \qquad (x, y) \in I_\delta . \tag{92.1}$$

Se a loro volta le funzioni f_x, f_y ammettono derivate parziali

$$\frac{\partial}{\partial x} f_x, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_x, \quad \frac{\partial}{\partial x} f_y, \quad \frac{\partial}{\partial y} f_y, \tag{92.2}$$

quest'ultime si chiamano *derivate parziali seconde* della funzione f e si indicano rispettivamente con i simboli

$$f_{xx}, \quad f_{xy}, \quad f_{yx}, \quad f_{yy}, \tag{92.3}$$

oppure con i simboli

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \tag{92.4}$$

In particolare f_{xy}, f_{yx} vengono dette *derivate seconde miste,* mentre f_{xx}, f_{yy} vengono dette *derivate seconde pure.*

Ad esempio, la funzione

$$f(x, y) = x^y , \qquad \forall (x, y) \in D = \{(x, y) \in R^2 : x > 0\} \tag{92.5}$$

per y fissato è una potenza, mentre per x fissato è un esponenziale che, ai fini della derivazione rispetto ad y, è opportuno rappresentare nella forma $f(x, y) = e^{y \log x}$. Le derivate parziali prime di f(x, y) valgono

$$f_x = y\, x^{y-1}, \quad f_y = x^y \cdot \log x. \tag{92.6}$$

Le derivate seconde pure sono date da

$$f_{xx} = y(y-1)\, x^{y-2}, \quad f_{yy} = x^y \cdot (\log x)^2; \tag{92.7}$$

per ottenere f_{xy} deriviamo f_x in (92.6) rispetto ad y con la regola di derivazione del prodotto:

$$f_{xy} = x^{y-1} + y\, x^{y-1} \cdot \log x = x^{y-1} (1 + y \log x); \tag{92.8}$$

la derivata f_{yx} è ottenuta derivando rispetto ad x f_y in (92.6):

$$f_{yx} = y\, x^{y-1} \cdot \log x + x^y \cdot \frac{1}{x} = x^{y-1} (y \log x + 1). \tag{92.9}$$

Il lettore che ha seguito il calcolo di f_{xy} e f_{yx} avrà notato che, con passaggi intermedi differenti nei due casi, si è ottenuto lo stesso risultato finale. Ciò non è casuale ed è formalizzato nell'importante teorema che segue.

TEOREMA DI SCHWARZ. — *Se una funzione* f *ammette entrambe le derivate miste* f_{xy}, f_{yx} *e se tali derivate seconde sono continue in* (x_0, y_0), *allora* $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Dimostrazione: indichiamo con I_δ un intorno circolare del punto $(x_0; y_0)$ dove risultano definite le derivate seconde miste f_{xy}, f_{yx} e sia (x, y) un punto di I_δ, con $x \neq x_0$ e $y \neq y_0$, come in figura 11.25.

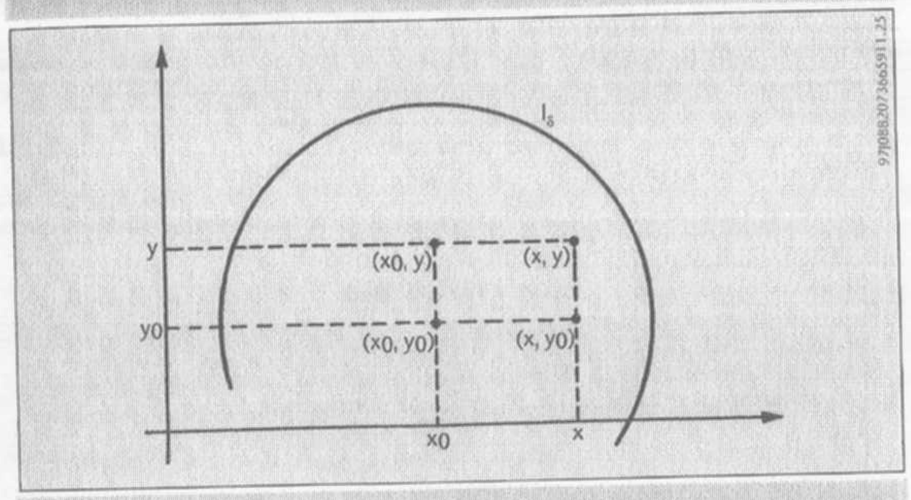


Figura 11.25

Utilizzando i valori della funzione f in corrispondenza ai punti rappresentati in figura 11.25, definiamo

$$F(x) = f(x, y) - f(x, y_0) \qquad (\textit{per y fissato}); \tag{92.10}$$

$$G(y) = f(x, y) - f(x_0, y) \qquad (\textit{per x fissato}). \tag{92.11}$$

Risulta:

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= f(x, y) - f(x, y_0) - [f(x_0, y) - f(x_0, y_0)], \\ G(y) - G(y_0) &= f(x, y) - f(x_0, y) - [f(x, y_0) - f(x_0, y_0)]. \end{aligned} \tag{92.12}$$

per cui

$$F(x) - F(x_0) = G(y) - G(y_0). \tag{92.13}$$

Applichiamo il teorema di Lagrange (paragrafo 83) alla funzione F(x) nell'intervallo di estremi x_0, x: esiste in tale intervallo un punto x_1 per cui

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= F'(x_1)(x - x_0) = \\ &= [f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0)]\,(x - x_0); \end{aligned} \tag{92.14}$$

applicando di nuovo il teorema di Lagrange alla funzione $y \to f_x(x_1, y)$ nell'intervallo di estremi y_0, y, otteniamo l'esistenza in tale intervallo di un punto y_1 per cui

$$\begin{aligned} F(x) - F(x_0) &= [f_x(x_1, y) - f_x(x_1, y_0)]\,(x - x_0) = \\ &= f_{xy}(x_1, y_1)\,(x - x_0)\,(y - y_0). \end{aligned} \tag{92.15}$$

Procediamo in modo analogo con la funzione G(y) nell'intervallo di estremi y_0, y: esistono y_2, e poi x_2, per cui

$$\begin{aligned} G(y) - G(y_0) &= G'(y_2)(y - y_0) = \\ &= [f_y(x, y_2) - f_y(x_0, y_2)]\,(y - y_0) = \\ &= f_{yx}(x_2, y_2)\,(x - x_0)(y - y_0). \end{aligned} \tag{92.16}$$

Confrontando le (92.13), (92.15), (92.16), si perviene alla condizione

$$f_{xy}(x_1, y_1) = f_{yx}(x_2, y_2). \tag{92.17}$$

essendo i punti (x_1, y_1) e (x_2, y_2) interni al rettangolo disegnato in figura 11.26. Passando al limite per $(x, y) \to (x_0, y_0)$ anche (x_1, y_1) e (x_2, y_2) tendono a (x_0, y_0); per l'ipotesi di continuità di f_{xy}, f_{yx} si ottiene la tesi $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

Per finire osserviamo che se le derivate seconde miste non sono continue, allora non necessariamente sono uguali. Osserviamo inoltre che il teorema di Schwarz fornisce informazioni anche per le derivate terze, quarte, e così via; infatti, applicando ad esempio il teorema alla derivata parziale f_x, si trova che $f_{xxy} = f_{xyx}$, purché tali derivate terze siano continue. Pertanto, se una funzione di due variabili ammette derivate terze continue, quelle distinte sono al più quattro, e cioè:

$$f_{xxx}, \qquad f_{xxy}, \qquad f_{xyy}, \qquad f_{yyy}. \tag{92.18}$$

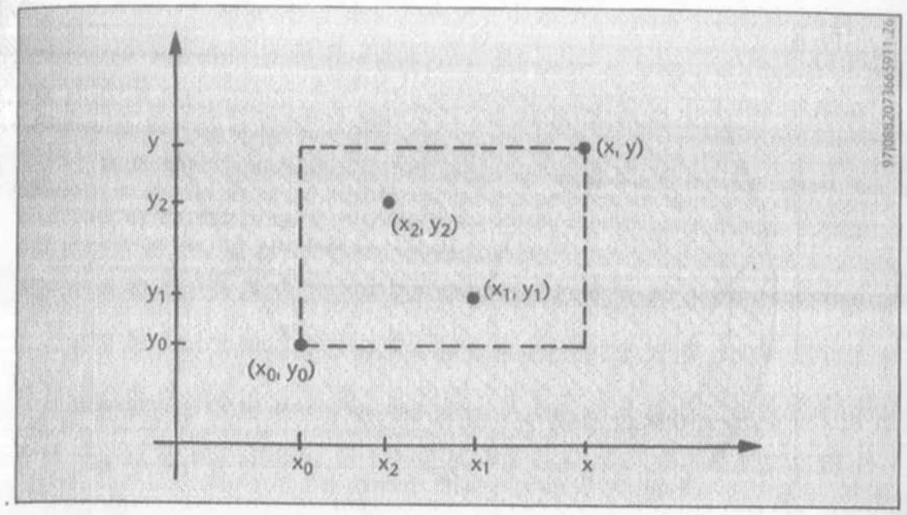


Figura 11.26

93. Massimi e minimi relativi

Sia f(x, y) una funzione di due variabili definita in un insieme $D \subseteq \mathbf{R}^2$. Un punto $(x_0, y_0) \in D$ è di *massimo relativo* per la funzione f(x, y) nel dominio D se esiste un intorno circolare I_δ di (x_0, y_0) tale che

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \qquad \forall (x, y) \in I_\delta \cap D \tag{93.1}$$

(ricordiamo che I_δ è stato definito nel paragrafo 90).

Analogamente, un punto $(x_0, y_0) \in D$ è di *minimo relativo* per la funzione f(x, y) nel dominio D se esiste un intorno circolare I_δ di (x_0, y_0) tale che

$$f(x_0, y_0) \leq f(x, y), \qquad \forall (x, y) \in I_\delta \cap D. \tag{93.2}$$

Un punto (x_0, y_0) è *interno* ad un insieme $D \subseteq \mathbf{R}^2$ se esiste un intorno circolare I_δ di (x_0, y_0) contenuto in D (si veda la figura 11.27).

Pertanto un punto $(x_0, y_0) \in D$ è di massimo (rispettivamente minimo) relativo *interno* all'insieme D per la funzione f se esiste un intorno circolare I_δ di (x_0, y_0) tale che

$$f(x_0, y_0) \geq f(x, y), \ \forall (x, y) \in I_\delta \tag{93.3}$$

(rispettivamente $f(x_0, y_0) \leq f(x, y)$, $\forall (x, y) \in I_\delta$).

I due teoremi che seguono sono utili per la determinazione dei punti di massimo e di minimo relativo interni al dominio di una funzione di due variabili.

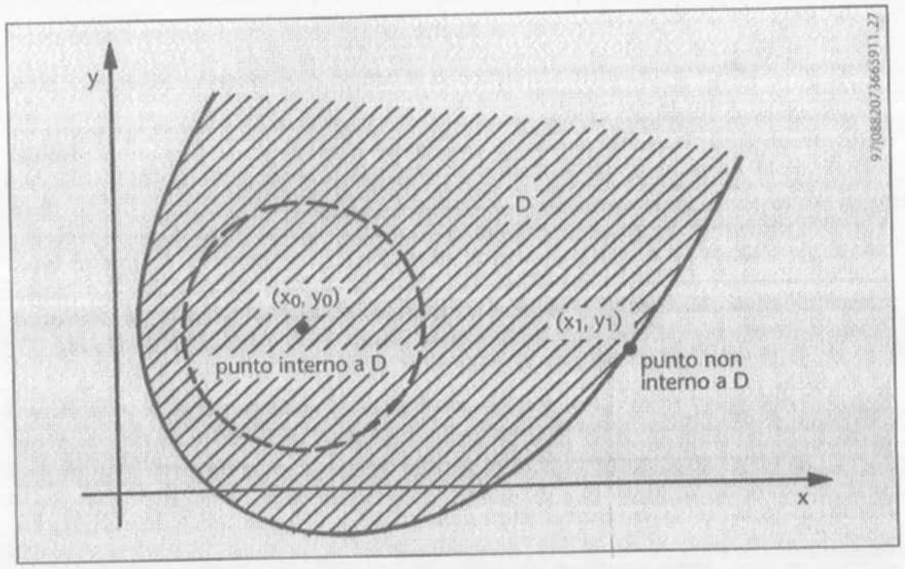


Figura 11.27

TEOREMA (CONDIZIONE NECESSARIA). — *Se* (x_0, y_0) *è un punto di massimo o di minimo relativo interno al dominio* D *di una funzione* f(x, y) *e se* f(x, y) *è dotata di derivate parziali prime in* (x_0, y_0), *allora risulta*

$$f_x(x_0, y_0) = 0; \quad f_y(x_0, y_0) = 0. \tag{93.4}$$

Dimostrazione: supponiamo ad esempio che (x_0, y_0) sia un punto di massimo relativo interno al dominio D di una funzione f(x, y); esiste allora un intorno circolare I_δ per cui vale la disuguaglianza (93.3).

Fissato $y = y_0$, consideriamo la funzione di una variabile reale

$$F(x) = f(x, y_0), \tag{93.5}$$

che, per la (93.3) con $y = y_0$, soddisfa:

$$F(x_0) \geq F(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}: x_0 - \delta < x < x_0 + \delta; \tag{93.6}$$

cioè x_0 è un punto di massimo relativo interno per la funzione F(x) nell'intervallo $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Per il teorema di Fermat (paragrafo 82), risulta $F'(x_0) = 0$, cioè, ricordando la definizione (93.5) della funzione F(x)

$$F'(x_0) = f_x(x_0, y_0) = 0. \tag{93.7}$$

Si procede in modo analogo per ottenere $f_y(x_0, y_0) = 0$.

In base al teorema precedente, i punti di massimo o di minimo interni al dominio di una funzione di due variabili vanno ricercati tra i punti che annullano entrambe le derivate parziali prime; tali punti si dicono punti critici per la funzione. In altre parole, un punto critico per una funzione è un punto in cui si annulla il gradiente della funzione.

Il teorema che segue fornisce un criterio per stabilire se un punto critico sia di massimo o di minimo relativo per una funzione; prima di enunciare il teorema premettiamo alcune notazioni.

Supponiamo che f(x, y) ammetta derivate seconde continue in un insieme $D \subseteq \mathbf{R}^2$; si definisce il *determinante Hessiano* H(x, y) (o semplicemente *Hessiano*):

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{vmatrix} = f_{xx} \cdot f_{yy} - (f_{xy})^2 \tag{93.8}$$

(ricordiamo che, per il teorema di Schwarz, risulta $f_{xy} = f_{yx}$). Talvolta, per mettere in luce la dipendenza dalla funzione f, si usa la notazione Hf(x, y), invece di H(x, y).

TEOREMA (CONDIZIONE SUFFICIENTE). — *Nelle ipotesi precedenti, se risulta*

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0, & f_y(x_0, y_0) = 0 \\ Hf(x_0, y_0) > 0, & f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \end{cases} \tag{93.9}$$

allora (x_0, y_0) *è un punto di minimo relativo per* f(x, y). *Se invece risulta*

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0, & f_y(x_0, y_0) = 0 \\ Hf(x_0, y_0) > 0, & f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \end{cases} \tag{93.10}$$

allora (x_0, y_0) *è un punto di massimo relativo per* f(x, y). *Infine, se risulta*

$$Hf(x_0, y_0) < 0, \tag{93.11}$$

allora il punto (x_0, y_0) *non è né di massimo, né di minimo per* f(x, y) (ed in tal caso si dice anche che (x_0, y_0) è un *punto a sella* per f(x, y)).

Pertanto un punto critico (x_0, y_0) risulta di massimo o di minimo relativo per una funzione f(x, y) se $Hf(x_0, y_0) > 0$; se invece $Hf(x_0, y_0) < < 0$ allora il punto (x_0, y_0) non è né di massimo né di minimo. Il caso $Hf(x_0, y_0) = 0$ non è contemplato nell'enunciato del teorema, potendosi verificare sia che (x_0, y_0) è di massimo o di minimo, sia il caso contrario.

Non diamo la dimostrazione della condizione sufficiente sopra enunciata, ma illustriamo alcuni esempi.

La funzione

(93.12) $$f(x, y) = x^2 + y^2$$

ammette derivate parziali $f_x = 2x$, $f_y = 2y$ che si annullano nel punto di coordinate (0, 0). Il determinante Hessiano vale

(93.13) $$H = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

ed è quindi positivo. Essendo $f_{xx} = 2 > 0$, il punto (0, 0), in base alla (93.9), è di minimo relativo per la funzione. Si verifica anche direttamente che (0, 0) risulta punto di minimo assoluto per f(x, y) su $\mathbf{R}^2$, perché

(93.14) $$f(0, 0) = 0 \leq x^2 + y^2 = f(x, y), \ \forall (x, y) \in \mathbf{R}.$$

Anche la funzione

(93.15) $$f(x, y) = y^2 - x^2$$

ha derivate parziali $f_x = -2x$, $f_y = 2y$ che si annullano in (0, 0). Però, essendo il determinante Hessiano

(93.16) $$H = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

negativo, in base alla (93.11), (0, 0) è un punto a sella per la funzione; tale punto a sella è ben riconoscibile nel grafico della funzione in figura 11.6.

La funzione

(93.17) $$f(x, y) = x^3 - 6y(x + y)$$

è definita nel dominio D costituito da tutto lo spazio $\mathbf{R}^2$. Il gradiente di f si annulla in corrispondenza ai punti di coordinate (x, y), soluzioni del sistema

(93.18) $$\begin{cases} f_x = 3x^2 - 6y = 0 \\ f_y = -6x - 12y = 0 \end{cases};$$

dalla seconda equazione si ricava $x = -2y$, che, sostituito nella prima, dà luogo a $12y^2 - 6y = 0$, cioè $y = 0$, oppure $y = 1/2$; in corrispondenza è $x = 0$, oppure $x = -1$.

Perciò i punti di coordinate (0, 0), (−1, 1/2) sono critici per la funzione f in (93.17).

Il determinante Hessiano di f vale

(93.19) $$H(x, y) = \begin{vmatrix} 12x & -6 \\ -6 & -12 \end{vmatrix} = -144x - 36.$$

In particolare per (x, y) = (0, 0) si trova H(0, 0) = −36; siamo quindi nella condizione (93.11) del teorema precedente e (0, 0) è un punto a sella per f(x, y). Invece, per (x, y) = = (−1, 1/2) si trova H(−1, 1/2) = 108 > 0; essendo $f_{xx}(-1, 1/2) = -12 < 0$, siamo nella condizione (93.10) ed il punto di coordinate (−1, 1/2) è di massimo relativo per f(x, y).

In figura 11.28 è rappresentato il grafico di f(x, y); si noti in particolare il punto di massimo relativo nel quadrante delle y positive e delle x negative.

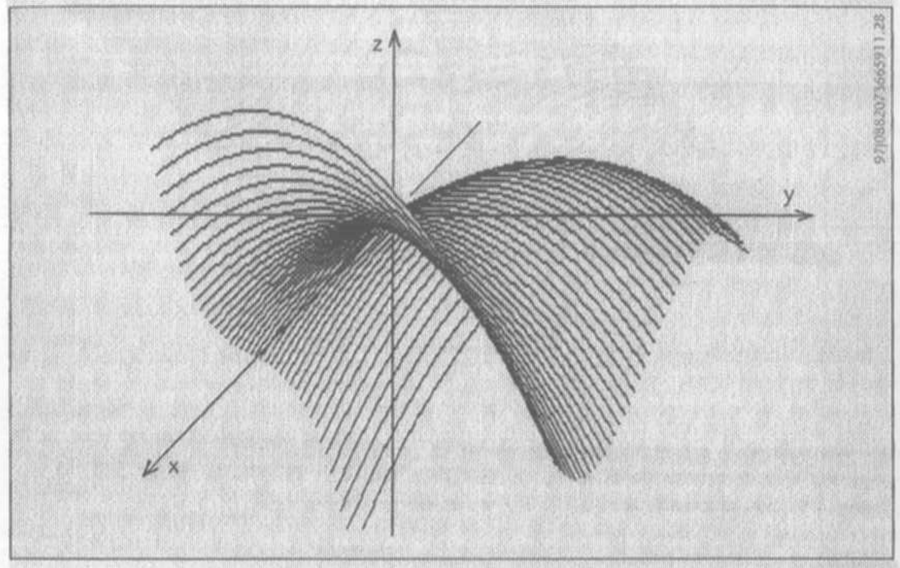


Figura 11.28 — $f(x, y) = x^3 - 6y(x + y)$

I punti critici della funzione

(93.20) $$f(x, y) = y\, e^{-(x^2 + y^2)}$$

si determinano risolvendo il sistema

(93.21) $$\begin{cases} f_x = -2xy\, e^{-(x^2 + y^2)} = 0 \\ f_y = (1 - 2y^2)\, e^{-(x^2 + y^2)} = 0 \end{cases}.$$

La prima equazione fornisce le condizioni x = 0 oppure y = 0. Quest'ultima, cioè y = 0, non è compatibile con l'altra condizione $f_y = 0$, che invece è soddisfatta per $1 - 2y^2 = = 0$, cioè per $y = \pm \sqrt{2}/2$. Si trovano quindi i punti critici $(0, \sqrt{2}/2)$, $(0, -\sqrt{2}/2)$.

Si verifica che il determinante Hessiano è positivo in entrambi i casi, mentre per

(93.22) $$f_{xx} = (-2y + 4x^2)\, e^{-(x^2 + y^2)}$$

si ha: $f_{xx}(0, \sqrt{2}/2) = -\sqrt{2}\, e^{-1/2} < 0$, $f_{xx}(0, -\sqrt{2}/2) = \sqrt{2}\, e^{-1/2} > 0$. Pertanto $(0, \sqrt{2}/2)$ è un punto di massimo e $(0, -\sqrt{2}/2)$ è un punto di minimo per la funzione f(x, y), il cui grafico è rappresentato in figura 11.29.

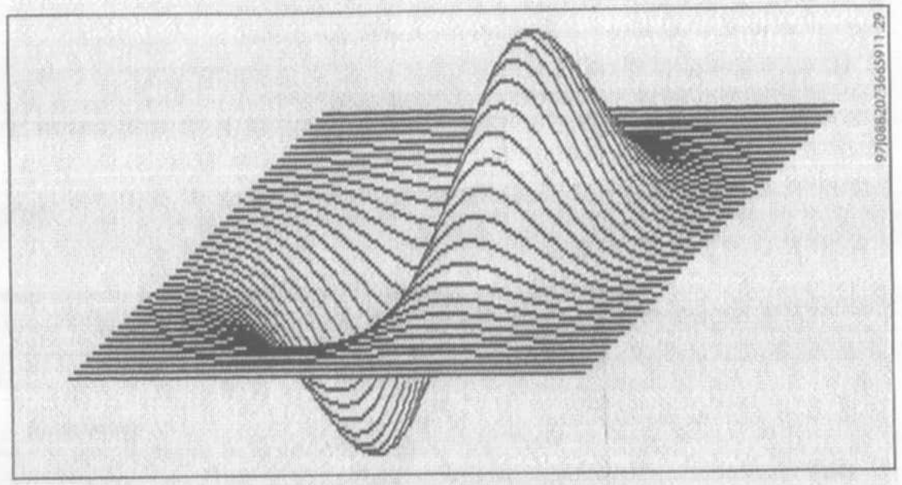


Figura 11.29 — $f(x, y) = y\, e^{-(x^2+y^2)}$

Chiudiamo il paragrafo con un esempio di punto di massimo (o di minimo) per una funzione con determinante Hessiano nullo. Dalla figura 11.11 si vede chiaramente che il punto centrale, di coordinate (0, 0), è di massimo per la funzione

(93.23) $$f(x, y) = \cos(x^2 + y^2);$$

ciò è evidente anche analiticamente, perché, essendo

(93.24) $$f(0, 0) = \cos 0 = 1 \geq \cos(x^2 + y^2) = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in \mathbf{R}^2,$$

il punto (0, 0) risulta di massimo assoluto per f(x, y) su $\mathbf{R}^2$. In accordo con la condizione necessaria (93.4), (0, 0) è una soluzione del sistema

(93.25) $$\begin{cases} f_x = -2x \operatorname{sen}(x^2 + y^2) = 0 \\ f_y = -2y \operatorname{sen}(x^2 + y^2) = 0 \end{cases}.$$

Il determinante Hessiano vale

(93.26) $$Hf = \begin{vmatrix} -2\operatorname{sen}(x^2+y^2) - 4x^2\cos(x^2+y^2) & -4xy\cos(x^2+y^2) \\ -4xy\cos(x^2+y^2) & -2\operatorname{sen}(x^2+y^2) - 4y^2\cos(x^2+y^2) \end{vmatrix}$$

e si annulla in (0, 0) (infatti tutte le derivate parziali seconde si annullano in (0, 0)).

94. Funzioni di tre o più variabili reali

Indichiamo con $\mathbf{R}^3$ l'insieme delle *terne ordinate* di numeri reali:

$$\mathbf{R}^3 = \{(x, y, z): x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R},\ z \in \mathbf{R}\}$$

e, più generalmente, con $\mathbf{R}^n$, come nel capitolo 4, l'insieme delle *n-ple ordinate* di numeri reali:

(94.2) $$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n): x_i \in \mathbf{R},\ \forall i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

Un'applicazione f che ad ogni elemento di un insieme $D \subseteq \mathbf{R}^n$ fa corrispondere uno ed un solo elemento di $\mathbf{R}$ è detta una *funzione di* n *variabili* ed è denotata con il simbolo

(94.3) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n);$$

nel caso particolare n = 3 si ha una funzione f di tre variabili reali, che è denotata anche con il simbolo

(94.4) $$f(x, y, z)$$

in ogni caso si usa anche il simbolo $f: D \to \mathbf{R}$ e l'insieme D è detto il *dominio* della funzione f.

Molte definizioni e concetti introdotti nei paragrafi precedenti per le funzioni di due variabili si estendono alle funzioni di tre o più variabili; ciò vale ad esempio per le definizioni di limite, continuità, derivate parziali. Vediamo più in dettaglio quest'ultimo argomento.

La *derivata parziale* di una funzione f rispetto alla variabile x_i, nel punto $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, è il limite

(94.5) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_1, \ldots, x_i + h, \ldots, x_n) - f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)}{h},$$

purché tale limite esista e sia finito; in tal caso si denota con uno dei simboli

(94.6) $$f_{x_i}; \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}; \quad D_{x_i} f; \quad D_i f.$$

Ad esempio, le derivate parziali della funzione di tre variabili

(94.7) $$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xyz$$

sono date da

(94.8) $$f_x = 2x + yz; \quad f_y = 2y + xz; \quad f_z = 2z + xy.$$

Mentre la funzione di n variabili, detta *modulo* o *norma*, e definita da

(94.9) $$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

ammette, per ogni $(x_1, x_2, ..., x_n) \neq (0, 0, ..., 0)$, derivate parziali date da

(94.10) $$f_{x_i} = \frac{x_i}{f} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2}}, \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Come per le funzioni di due variabili, anche per le funzioni di n variabili si definiscono le *derivate parziali seconde*, che vengono a costituire la seguente matrice quadrata n×n, detta *matrice Hessiana*

(94.11) $$\begin{pmatrix} f_{x_1 x_1} & f_{x_1 x_2} & ... & f_{x_1 x_n} \\ f_{x_2 x_1} & f_{x_2 x_2} & ... & f_{x_2 x_n} \\ & ... & ... & ... \\ f_{x_n x_1} & f_{x_n x_2} & ... & f_{x_n x_n} \end{pmatrix}.$$

Applicando il teorema di Schwarz (paragrafo 92) sull'inversione dell'ordine di derivazione alla funzione di due variabili

(94.12) $$g(x_i, x_j) = f(x_1, ..., x_i, ..., x_j, ..., x_n) \qquad (i \neq),$$

lasciando fissate le altre variabili con il ruolo di parametri, si ottiene la formula

(94.13) $$f_{x_i x_j} = f_{x_j x_i}, \qquad \forall i, j = 1, 2, ..., n, \ (i \neq j),$$

purché tali derivate seconde esistano e siano continue. Pertanto la matrice Hessiana (94.11) è una matrice simmetrica, nel caso in cui tutte le derivate parziali seconde siano continue.

Con le stesse definizioni e la stessa dimostrazione del paragrafo precedente si prova che in un punto di massimo o di minimo relativo interno al dominio di definizione risulta

(94.14) $$f_{x_1} = f_{x_2} = ... = f_{x_n} = 0,$$

nell'ipotesi che le derivate parziali prime esistano nel punto.

Una condizione sufficiente per i massimi ed i minimi, in termini della matrice Hessiana (94.11), esiste ma è più complessa della formulazione data nel paragrafo precedente nel caso di funzioni di due variabili; tale condizione sufficiente si esprime dicendo che la matrice Hessiana (94.11) è definita positiva (rimandiamo ad un testo di Analisi Matematica 2, o di Geometria, per la nozione di matrice quadrata definita positiva). La condizione sufficiente, nel caso di funzioni di n-variabili, ha un notevole interesse teorico, ma ha un minore interesse applicativo nella risoluzione di esercizi.

CAPTIOLO 12

INTEGRALI DEFINITI

95. Il metodo di esaustione

Con l'espressione «*metodo di esaustione*» si fa riferimento ad un metodo per calcolare le aree ed i volumi di figure curvilinee, usato da Archimede nel III secolo a.C., ma risalente, secondo lo stesso Archimede, ed Eudosso di Cnide, vissuto nel IV secolo a.C.

Abbiamo già descritto nel paragrafo 40 il metodo che Archimede utilizzava per calcolare l'area di un cerchio, approssimando tale area con le aree di poligoni regolari di n lati inscritti (o circoscritti). Riferendoci a questo esempio, con la parola «*esaustione*» si vuole significare che un cerchio viene riempito, o «*esaurito*», inscrivendo in esso poligoni regolari di n lati, e facendo poi tendere n all'infinito.

Descriviamo in questo paragrafo il metodo di esaustione con il linguaggio moderno, facendo uso della teoria dei limiti, in modo da facilitare la comprensione del metodo generale che introdurremo nel paragrafo successivo.

Calcoliamo con il metodo di esaustione l'area di un *settore di parabola*, cioè l'area della regione S che nel piano cartesiano x, y è compresa tra l'asse delle x, il grafico della funzione $f(x) = x^2$ nell'intervallo [0, b], e la retta verticale di equazione $x = b$ $(b > 0)$, come in figura 12.1.

Dividiamo l'intervallo [0, b] in $n \in \mathbf{N}$ intervalli, $[x_{k-1}, x_k]$, ciascuno di ampiezza b/n, ponendo:

(95.1) $$x_0 = 0, \qquad x_1 = \frac{1}{n} b, \qquad x_2 = \frac{2}{n} b, ..., \qquad x_k = \frac{k}{n} b, ..., \qquad x_n = b.$$

Calcoliamo l'area della regione tratteggiata nella figura 12.2. La regione tratteggiata è unione di rettangoli. Il generico rettangolo ha per base l'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, di lunghezza uguale a b/n, ed ha per altezza il valore della funzione in x_{k-1}, cioè $f(x_{k-1}) = x_{k-1}^2$. L'area totale è data dalla somma delle aree dei rettangoli componenti, cioè (il simbolo di sommatoria è stato introdotto nel paragrafo 88):

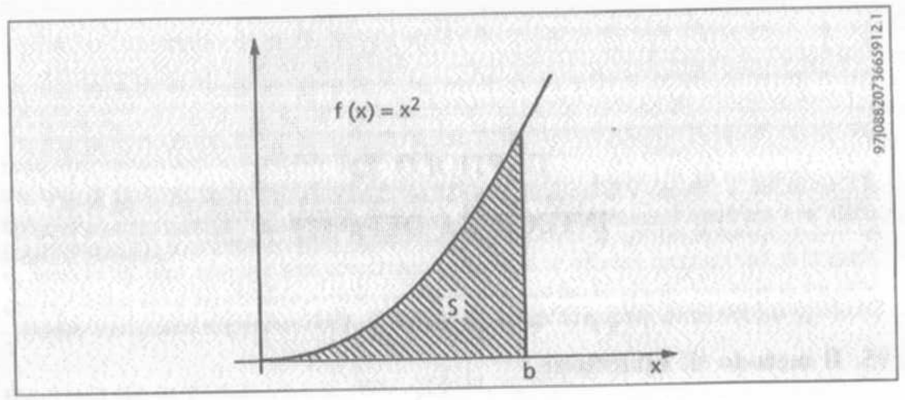


Figura 12.1

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1})\,(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2 \frac{b}{n} = \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2 \,. \tag{95.2}$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo semplicemente messo in evidenza il fattore b/n, comune a tutti gli addendi della somma.

Per facilitare il lettore osserviamo che la (95.2) si può riscrivere esplicitamente, senza l'uso del simbolo di sommatoria, nel modo seguente:

$$\begin{aligned} &f(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_1)\,(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) + \ldots + \\ &+ f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1}) = x_0^2\frac{b}{n} + x_1^2\frac{b}{n} + \ldots + x_{k-1}^2\frac{b}{n} + \ldots + x_{n-1}^2\frac{b}{n} = \\ &= \frac{b}{n}\,(x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_{k-1}^2 + \ldots + x_{n-1}^2). \end{aligned} \tag{95.3}$$

La somma indicata nella (95.2) è un'approssimazione per difetto dell'area della regione S. Analogamente otteniamo un'approssimazione per eccesso considerando l'area della unione di rettangoli, come in figura 12.3.

Rispetto al caso precedente, stiamo considerando rettangoli con la stessa base, ma con diversa altezza. Il generico rettangolo ha per base l'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, e per altezza $f(x_k) = x_k^2$. L'area totale in questo caso è data da

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \frac{b}{n} = \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \,. \tag{95.4}$$

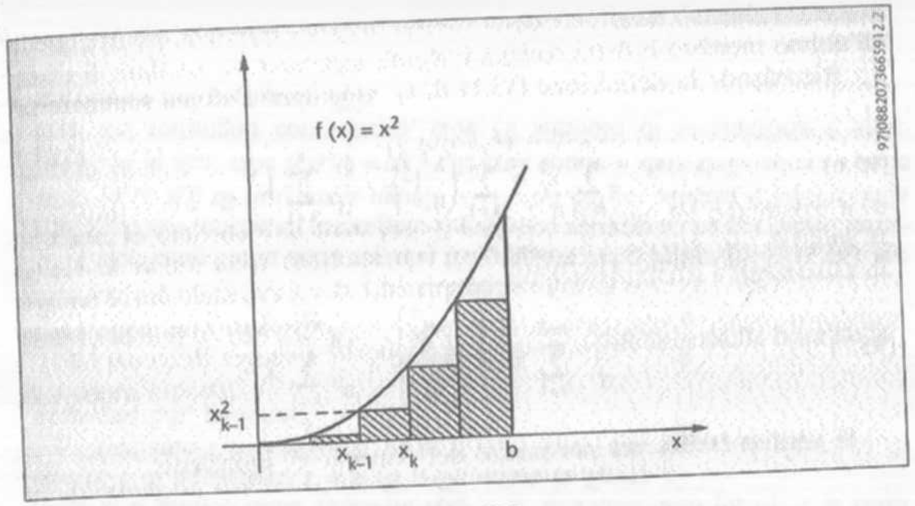


Figura 12.2

Quindi abbiamo ottenuto le seguenti stime per difetto e per eccesso dell'area della regione S:

$$\frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} x_{k-1}^2 < \textit{area}\ S < \frac{b}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \,, \qquad \forall n \in \mathbf{N}; \tag{95.5}$$

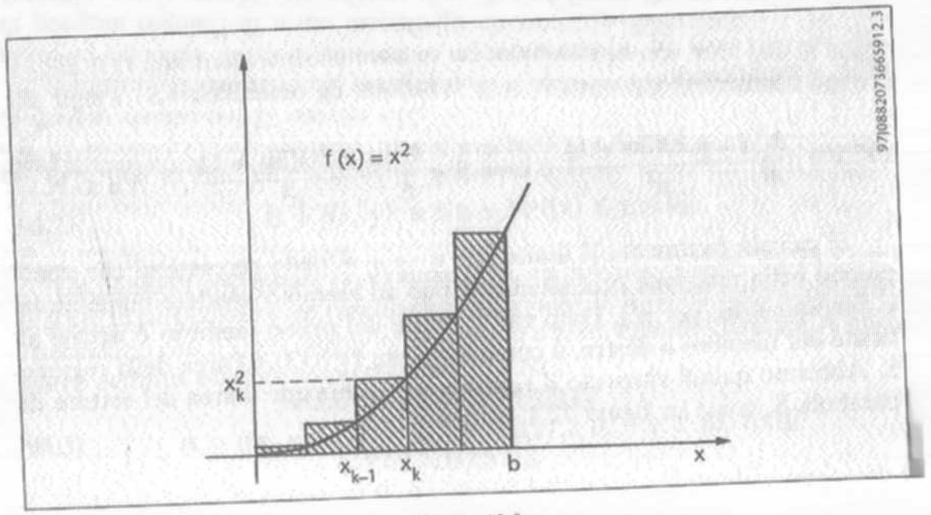


Figura 12.3

la somma a primo membro è detta *somma integrale inferiore*, mentre quella all'ultimo membro è detta *somma integrale superiore*.

Ricordando la definizione (95.1) di x_k, valutiamo l'ultima sommatoria:

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n} b\right)^2 = \frac{b^2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k^2 ; \tag{95.6}$$

la (95.5) si può quindi riscrivere:

$$\frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n-1} k^2 < \textit{area } S < \frac{b^3}{n^3} \sum_{k=1}^{n} k^2 . \tag{95.7}$$

Si verifica facilmente per mezzo del principio di induzione:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6} n (n + 1) (2n + 1). \tag{95.8}$$

Sostituiamo questo valore nell'ultimo membro della (95.7), mentre a primo membro sostituiamo il valore della somma corrispondente, cambiando quindi n con n – 1. Otteniamo:

$$\frac{b^3}{6} \frac{(n-1)\, n(2n-1)}{n^3} < \textit{area } S < \frac{b^3}{6} \frac{n(n+1)\,(2n+1)}{n^3} ; \tag{95.9}$$

cioè, semplificando:

$$\frac{b^3}{6} \frac{(n-1)(2n-1)}{n^2} < \textit{area } S < \frac{b^3}{6} \frac{(n+1)(2n+1)}{n^2} , \qquad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{95.10}$$

Si calcola facilmente il limite per $n \to +\infty$ delle successioni che compaiono nella relazione precedente (si può ad esempio dividere numeratore e denominatore per n^2). Dato che il limite del primo membro è uguale al limite del membro a destra, il comune valore ($= b^3/3$) è l'area della regione S. Abbiamo quindi ritrovato il risultato di Archimede: l'area del settore di parabola S, come in figura 12.1, è data da

$$\textit{area } S = \frac{b^3}{3} . \tag{95.11}$$

Si noti ciò che apparentemente può sembrare una coincidenza: derivando il risultato trovato rispetto a b otteniamo:

$$\frac{d}{db} (\textit{area } S) = b^2 . \tag{95.12}$$

Cioè, la derivata dell'area, pensata come funzione del parametro b, è uguale al valore della funzione $f(x) = x^2$, che ci è servita per definire la regione S, calcolata per x = b. Chiariremo nel paragrafo 101 l'importanza di questa apparente curiosità.

Nei paragrafi seguenti introduciamo l'integrale definito sulla base delle idee sopra esposte.

96. L'integrale definito: interpretazione geometrica

L'*integrale definito*, nonostante abbia una interpretazione geometrica molto semplice e significativa, risulta talvolta, dal punto di vista della definizione, un concetto matematico di difficile comprensione per lo studente. Per tale motivo abbiamo ritenuto opportuno posporre al paragrafo 98 la definizione di *integrale definito* che, pur in una formulazione rigorosa, è comunque presentata in modo semplice ed essenziale; nei paragrafi 98-100 viene completato l'argomento con tutte le necessarie dimostrazioni.

Comunque, per facilitare il lettore che per la prima volta si avvicina al concetto di integrale definito, ne premettiamo in questo paragrafo l'interpretazione geometrica. Ad una prima lettura, dopo il presente paragrafo 96 ed il successivo 97, si potrà saltare al teorema fondamentale del calcolo integrale, proposto all'inizio del capitolo 13.

Sia f(x) una funzione continua in un intervallo [a, b]. Con riferimento alla figura 12.4 definiamo gli insiemi

$$A = \{(x, y): a \le x \le b,\ 0 \le y \le f(x)\} ; \tag{96.1}$$

$$B = \{(x, y): a \le x \le b,\ f(x) \le y \le 0\}. \tag{96.2}$$

Un punto di coordinate (x, y) appartiene all'insieme A se $x \in [a, b]$ e $y \in [0, f(x)]$; in particolare è necessario che l'intervallo [0, f(x)] sia non vuoto, cioè è necessario che f(x) sia maggiore od uguale a zero. Quindi l'insieme A può essere definito equivalentemente nella forma

$$A = \{(x, y): \quad x \in [a, b], \quad f(x) \ge 0, \quad y \in [0, f(x)]\} \tag{96.3}$$

e, analogamente, l'insieme B può essere definito equivalentemente nella forma

(96.4) $\qquad B = \{(x, y): \quad x \in [a, b], \quad f(x) \le 0, \quad y \in [f(x), 0]\}.$

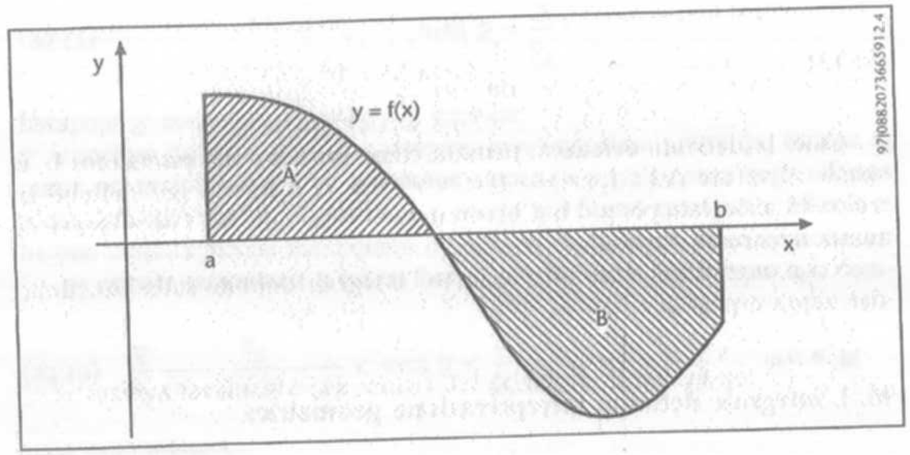


Figura 12.4

Quindi, in particolare, se per ogni $x \in [a, b]$ risulta $f(x) > 0$ (come in figura 12.5) allora l'insieme B è vuoto; mentre, se $f(x) < 0$ per ogni $x \in [a, b]$, allora l'insieme A è vuoto (figura 12.6). Gli insiemi A e B sono detti *rettangoloidi* relativi alla funzione f(x) nell'intervallo [a, b].

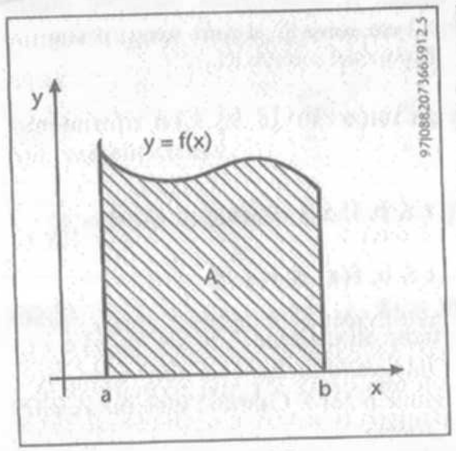


Figura 12.5

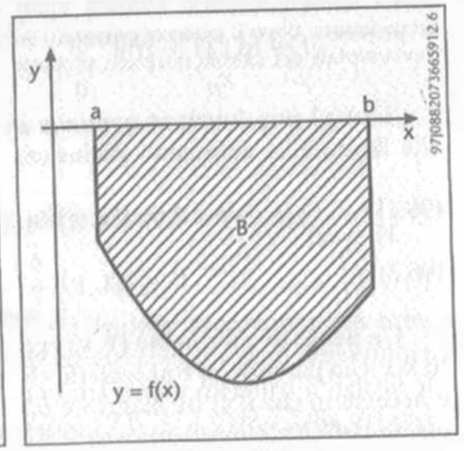


Figura 12.6

È importante tenere presente (la dimostrazione è fornita nel paragrafo 99) che è sempre possibile definire l'area degli insiemi A e B nel caso in cui la funzione f(x) sia *continua* in tutto l'intervallo chiuso e limitato [a, b].

L'area, in linea di principio, si calcola in modo analogo a come fatto nel paragrafo precedente per il settore di parabola.

In breve ciò si enuncia dicendo che ogni funzione *continua* f(x) è *integrabile* in ogni intervallo chiuso e limitato [a, b]. In tal caso l'*integrale definito* tra a e b (indicato con il simbolo a primo membro della (96.5)) è dato da

(96.5) $$\int_a^b f(x)\,dx = \textit{area } A - \textit{area } B.$$

In particolare, se $f(x) \ge 0$ per ogni $x \in [a, b]$, allora l'area dell'insieme B vale zero (analogamente se $f(x) \le 0$ in [a, b]); quindi

(96.6) $$f(x) \ge 0,\ \forall x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = \textit{area } A;$$

(96.7) $$f(x) \le 0,\ \forall x \in [a, b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx = -\textit{area } B.$$

Ad esempio, secondo la (96.6), l'area del settore di parabola S in figura 12.1, delimitato dalla funzione $f(x) = x^2$, in base al risultato (95.11), si esprime con l'integrale definito:

(96.8) $$\int_0^b x^2\,dx = \textit{area } S = \frac{b^3}{3}.$$

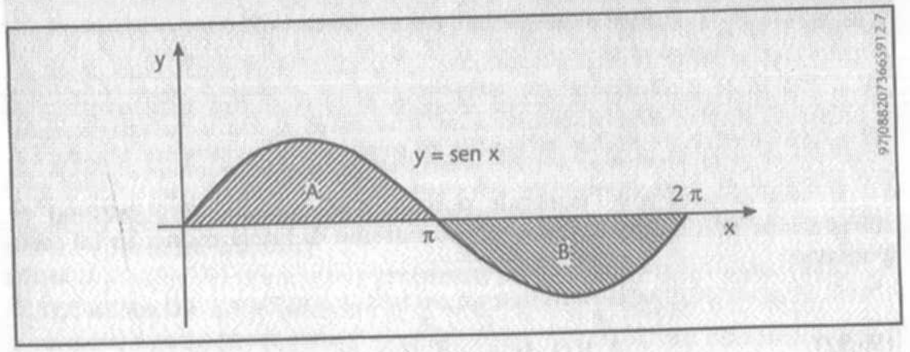


Figura 12.7

Come ulteriore esempio consideriamo l'integrale definito della funzione f(x) = sen x nell'intervallo $[0, 2\pi]$. L'integrale è nullo perché, con riferimento alla figura 12.7, l'area dell'insieme A è uguale all'area dell'insieme B:

(96.9) $$\int_0^{2\pi} \text{sen } x \, dx = \textit{area } A - \textit{area } B = 0.$$

Quanto vale l'integrale definito della funzione sen x nell'intervallo $[0, \pi]$? In altre parole, quanto vale l'area dell'insieme A in figura 12.7 ?

Con il metodo di esaustione si potrebbe giungere al risultato, che peraltro è determinato per altra (più semplice) via nel paragrafo 102. Limitiamoci in questa sede a valutazioni per eccesso e per difetto: con riferimento alla figura 12.8, l'insieme A è contenuto nel rettangolo R avente per base l'intervallo $[0, \pi]$ e altezza lunga 1; quindi:

(96.10) $$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx = \textit{area } A < \textit{area } R = \pi.$$

Con riferimento alla figura 12.9, l'insieme A contiene il triangolo T, di base $[0, \pi]$ e l'altezza lunga 1; perciò:

(96.11) $$\int_0^{\pi} \text{sen } x \, dx = \textit{area } A > \textit{area } T = \frac{\pi}{2}.$$

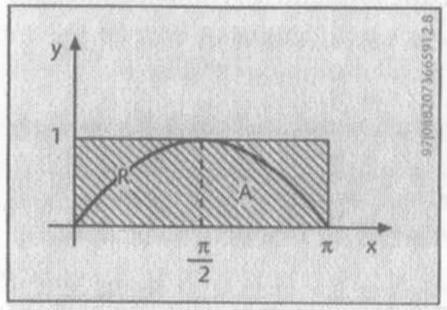


Figura 12.8

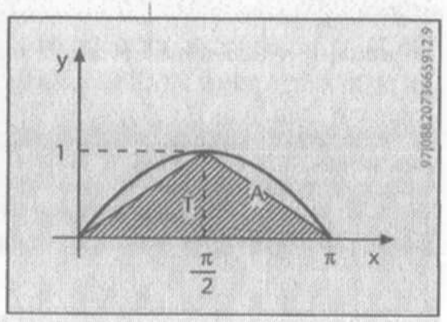


Figura 12.9

Quindi, l'integrale della funzione sen x, nell'intervallo $[0, \pi]$, è un numero compreso tra $\pi/2 \simeq 1.5...$ e $\pi \simeq 3.1...$; verificheremo alla fine del paragrafo 102 che l'integrale è uguale a 2.

È utile considerare l'integrale definito anche se il primo estremo di integrazione non è minore del secondo estremo di integrazione. In tal caso poniamo:

(96.12) $$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx \qquad (a > b);$$

(96.13) $$\int_a^a f(x)\, dx = 0.$$

97. Prime proprietà Il teorema della media

Nella dimostrazione del teorema fondamentale del calcolo integrale (paragrafo 101) risultano utili le due proprietà seguenti, che hanno una semplice interpretazione geometrica.

ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE RISPETTO ALL'INTERVALLO. — *Se* f(x) *è continua in* [a, b] *e* c *è un punto interno ad* [a, b], *risulta*

(97.1) $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx.$$

Infatti, con riferimento alla figura 12.10, se $f(x) \geq 0$ in [a, b] la formula (97.1) corrisponde ad affermare che l'area dell'insieme A è uguale alla somma delle aree degli insiemi A_1 e A_2. Il lettore esamini il caso con f(x) di segno indefinito.

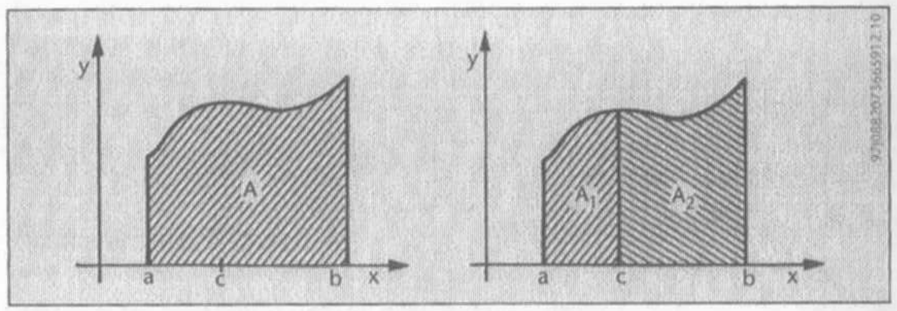


Figura 12.10

Per la dimostrazione analitica della formula (97.1) rimandiamo al paragrafo 97. Osserviamo che la formula vale indipendentemente dall'ordine fissato per i tre punti a, b, c; il motivo di ciò risiede nelle definizioni (96.12), (96.13).

TEOREMA DELLA MEDIA. — *Sia* f *una funzione continua nell'intervallo* [a, b]. *Esiste un punto* $x_0 \in [a, b]$ *tale che*

(97.2) $$\int_a^b f(x)\, dx = f(x_0)\,(b - a).$$

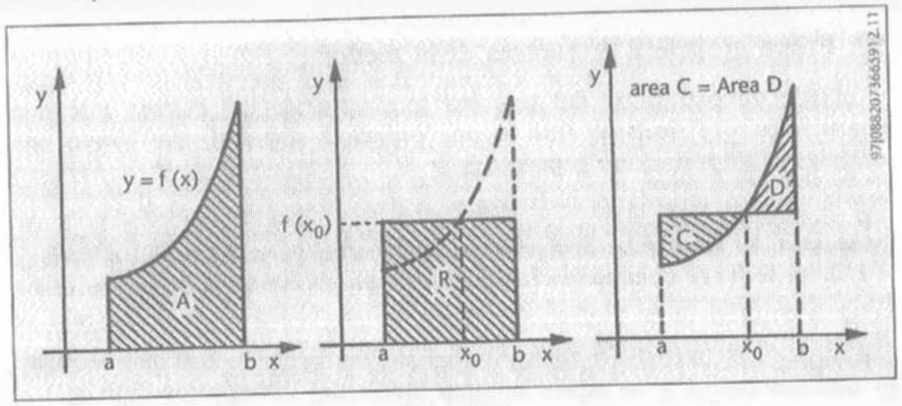


Figura 12.11

Con riferimento alla figura 12.11, dove è rappresentato il grafico di una funzione $f(x) \geq 0$ in [a, b], il teorema della media afferma che l'area del rettangoloide A relativo alla funzione f(x) nell'intervallo [a, b] è uguale all'area di un rettangolo R che ha per base l'intervallo [a, b] e per altezza un valore opportuno $f(x_0)$ (cioè un valore non scelto a caso, ma determinato in base alla particolare funzione considerata).

Dimostriamo il teorema della media supponendo che $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [a, b]$, facendo uso dell'interpretazione geometrica (96.6); avvertiamo il lettore che nel paragrafo 100 è proposta una dimostrazione puramente analitica del teorema (detto anche *secondo* teorema della media).

Indichiamo con m, M rispettivamente il minimo ed il massimo di f(x) in [a, b], esistenti in base al teorema di Weierstrass (paragrafo 56). In figura 12.12 sono rappresentati il rettangoloide A, relativo alla funzione f(x) nell'intervallo [a, b], ed i rettangoli R_1, R_2, di base l'intervallo [a, b] e aventi altezza lunga rispettivamente m, M. Dato che $R_1 \subseteq A \subseteq R_2$, risulta

(97.3) $$\textit{area } R_1 \leq \textit{area } A \leq \textit{area } R_2 .$$

Essendo *area* $R_1 = m(b - a)$, *area* $R_2 = M(b - a)$, in base alla (96.6) otteniamo

(97.4) $$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\, dx \leq M(b - a)$$

e dividendo per $b - a$ (> 0):

(97.5) $$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx \leq M.$$

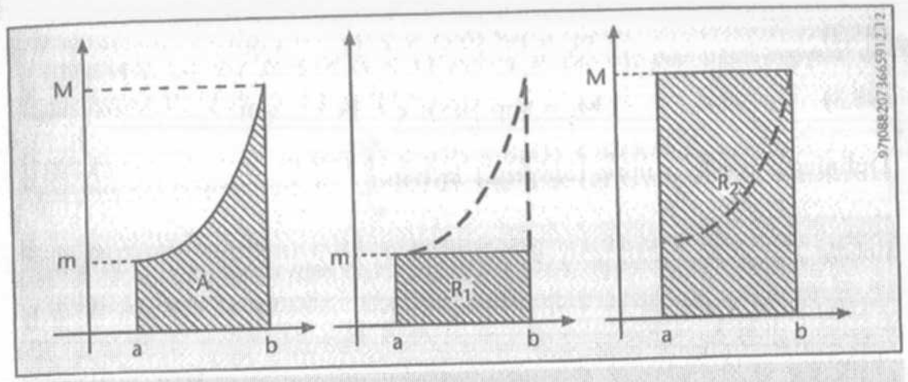


Figura 12.12

Quindi l'integrale definito di f, diviso per $b - a$, è un numero y compreso tra il minimo ed il massimo della funzione f. Per il secondo teorema dell'esistenza dei valori intermedi (paragrafo 56), la funzione f assume *tutti* i valori compresi tra m ed M. In particolare f assume anche il valore y. Perciò esiste un punto $x_0 \in [a, b]$ per cui $f(x_0) = y$, cioè:

(97.6) $$f(x_0) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\, dx,$$

che equivale alla tesi (97.2).

98. Definizioni e notazioni

Nel prosieguo si studia in maniera più approfondita la teoria dell'integrazione definita introdotta nei precedenti tre paragrafi. In prima lettura il presente paragrafo ed i successivi possono essere saltati e rinviati ad una successiva fase di approfondimento.

Sia f(x) una funzione *limitata* nell'intervallo chiuso [a, b] di **R**.

Una *partizione* P di [a, b] è un insieme ordinato costituito di n + 1 punti distinti $x_0, x_1, \ldots, x_n$, con $n \in \mathbf{N}$, tali che

(98.1) $$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_k < \ldots < x_n = b.$$

Quindi, per definizione, risulta $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$. Gli n + 1 punti individuano n intervalli $[x_{k-1}, x_k]$, con $k = 1, 2, \ldots, n$.

Per ogni partizione P di [a, b], poniamo

(98.2) $$m_k = \inf \{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

(98.3) $$M_k = \sup \{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

Definiamo poi le *somme (integrali) inferiori*

(98.4) $$s(P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1})$$

e le *somme (integrali) superiori*

(98.5) $$S(P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}).$$

Se la funzione f(x) è positiva in [a, b], le somme integrali hanno il chiaro significato geometrico di somma delle aree dei rettangoli rispettivamente inscritti e circoscritti, come in figura 12.13. Si noti però che s(P), S(P) sono definite, indipendentemente dal significato geometrico di area, anche se f(x) non è positiva nell'intervallo [a, b].

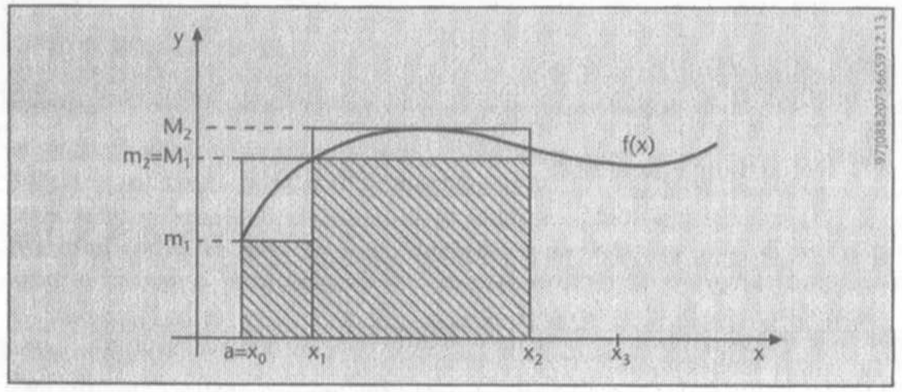


Figura 12.13

Dato che $m_k \le M_k$ per ogni k, dalla definizione risulta che

(98.6) $$s(P) \le S(P), \qquad \forall\ P.$$

Più in generale, vale il seguente

LEMMA. — *Sia* $m \le f(x) \le M$ *per* $x \in [a, b]$; *per ogni coppia di partizioni* P, Q *di* [a, b], *si ha*

(98.7) $$m(b - a) \le s(P) \le S(Q) \le M(b - a).$$

Dimostrazione: poniamo $R = P \cup Q$, cioè indichiamo con R la partizione che si ottiene prendendo contemporaneamente i punti di P e i punti Q. Cominciamo col confrontare fra loro le somme integrali inferiori s(P) e s(R). Supponiamo, per semplicità che R contenga un solo punto $\bar{x}$ in più di P e siano x_{k-1}, x_k due punti consecutivi della partizione P tali che $\bar{x} \in [x_{k-1}, x_k]$. Poniamo

(98.8) $$\overline{m}_1 = \inf \{f(x): x \in [x_{k-1}, \bar{x}]\};$$

(98.9) $$\overline{m}_2 = \inf \{f(x): x \in [\bar{x}, x_k]\}.$$

Le somme inferiori s(R) e s(P) differiscono per pochi termini; precisamente:

(98.10) $$s(R) - s(P) = [\overline{m}_1 (\bar{x} - x_{k-1}) + \overline{m}_2 (x_k - \bar{x})] - m_k (x_k - x_{k-1}).$$

Essendo $\overline{m}_1 \ge m_k$, $\overline{m}_2 \ge m_k$, in quanto l'insieme dei valori f(x) per $x \in [x_{k-1}, x_k]$ contiene sia l'insieme delle f(x) per $x \in [x_{k-1}, \bar{x}]$, sia l'insieme delle f(x) per $x \in [\bar{x}, x_k]$, otteniamo:

(98.11) $$s(R) - s(P) \ge m_k (\bar{x} - x_{k-1} + x_k - \bar{x} - x_k + x_{k-1}) = 0.$$

Si procede in modo analogo se la partizione R contiene più di un punto rispetto alla partizione P. Quindi

(98.12) $$s(P) \le s(R).$$

Analogamente si dimostra che

(98.13) $$S(R) \le S(Q).$$

Da tali relazioni e dalla (98.6) si ricava

(98.14) $$s(P) \le s(R) \le S(R) \le S(Q).$$

Per concludere la dimostrazione del lemma, basta provare che, per ogni partizione R di [a, b], risulta

(98.15) $$m(b - a) \le s(R) \le S(R) \le M(b - a).$$

Limitiamoci a provare la prima disuguaglianza di (98.15). A tale scopo basta applicare il ragionamento, che ci ha permesso di ottenere la (98.14), alla partizione banale $P = [a, b]$; infatti risulta $R = P$, ovvero R ha almeno un punto più di P.

Indichiamo ora con A l'insieme numerico descritto dalle somme integrali inferiori s(P) al variare delle partizioni P dell'intervallo [a, b] e con B l'insieme delle corrispondenti somme superiori:

$$A = \{s(P)\}; \quad B = \{S(P)\}. \tag{98.16}$$

Dal lemma precedente segue che i due insiemi A e B sono *separati*, cioè $a \leq b$ per ogni $a \in A$, $b \in B$. Dall'assioma (2.11) di completezza segue che esiste almeno un numero reale c maggiore o uguale a tutti gli elementi di A e minore o uguale a tutti gli elementi di B.

Supponiamo che tale elemento c sia l'*unico* elemento di separazione fra A e B; in altre parole, posto

$$s(f) = \sup \{s(P): P \textit{ partizione di } [a, b]\}, \tag{98.17}$$

$$S(f) = \inf \{S(P): P \textit{ partizione di } [a, b]\}, \tag{98.18}$$

supponiamo che risulti

$$c = s(f) = S(f); \tag{98.19}$$

allora diremo che f(x) è *integrabile secondo Riemann* in [a, b].

In tal caso l'elemento di separazione c si indica con

$$\int_a^b f(x)\, dx \tag{98.20}$$

e si chiama *integrale definito* di f in [a, b].

Dal lemma precedente segue banalmente che, se f(x) è una funzione costante, con $f(x) = m$ per ogni $x \in [a, b]$, allora

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b m\, dx = m(b - a). \tag{98.21}$$

Dalle proprietà dell'estremo inferiore e dell'estremo superiore si ricava poi il seguente:

TEOREMA. — *Una funzione* f *limitata in* [a, b] *è ivi integrabile secondo Riemann se e solo se, per ogni* $\varepsilon > 0$, *esiste una partizione* P *di* [a, b] *tale che*

$$S(P) - s(P) < \varepsilon. \tag{98.22}$$

L'integrale definito di una funzione ha un notevole significato geometrico. Ad esempio, se f(x) è una funzione positiva, integrabile nell'intervallo chiuso [a, b], qualunque sia la partizione $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ di [a, b], la somma s(P) rappresenta l'area di un *plurirettangolo* (cioè di una unione di rettangoli) *contenuto* nell'insieme

$$S = \{(x, y) \in [a, b] \times \mathbf{R}: 0 \leq y \leq f(x)\}, \tag{98.23}$$

mentre la somma S(P) rappresenta l'area di un plurirettangolo *contenente* S (si veda anche la precedente figura 12.13). L'insieme S prende il nome di *rettangoloide* di base [a, b] relativo alla funzione f(x).

Il teorema precedente afferma allora che, nelle nostre ipotesi, si possono trovare un plurirettangolo contenente S ed uno contenuto in S le cui aree differiscono per meno di ε. Dunque è ragionevole attribuire a S un'*area* uguale all'elemento di separazione tra le aree dei plurirettangoli «inscritti» e quelle dei plurirettangoli «circoscritti». In altre parole, possiamo affermare che, *se* f(x) *è positiva e integrabile, l'area del rettangoloide di base* [a, b] *è uguale all'integrale* (98.20).

Concludiamo il paragrafo con alcune notazioni e definizioni, utili per il seguito. Nell'espressione (98.20) i numeri a, b si dicono *estremi di integrazione*, la funzione f si dice *funzione integranda*, la variabile x si dice *variabile di integrazione*.

Si noti che il risultato dell'integrazione non dipende da x, cioè non è una funzione (non costante) di x, ma è semplicemente un numero reale.

È utile considerare l'integrale definito (98.20) anche se il primo estremo di integrazione non è minore del secondo. Come già indicato nel paragrafo 96, poniamo:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, dx \quad (a > b); \tag{98.24}$$

$$\int_a^a f(x)\, dx = 0. \tag{98.25}$$

99. Proprietà degli integrali definiti

Esaminiamo alcune semplici proprietà dell'integrale definito di una funzione integrabile secondo Riemann in un intervallo chiuso e limitato. Cominciamo con una proprietà che ha un chiaro significato geometrico quando si interpretano gli integrali definiti di funzioni positive come aree di certe regioni piane. In tale contesto la *proprietà di additività* corrisponde al fatto che l'area della unione di due regioni piane prive di punti in comune è uguale alla somma delle due aree (si veda anche il paragrafo 97).

ADDITIVITÀ DELL'INTEGRALE RISPETTO ALL'INTERVALLO. — *Se* a, b, c *sono tre punti di un intervallo dove la funzione* f(x) *è integrabile, allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx. \tag{99.1}$$

Dimostrazione: se due, tra i tre punti a, b, c, coincidono fra loro, allora la tesi (99.1) segue dalle definizioni (98.24), (98.25). Altrimenti, consideriamo preliminarmente il caso in cui c sia un punto interno all'intervallo [a, b]. Se P_1, P_2 sono partizioni rispettivamente degli intervalli [a, c], [c, b], allora $P = P_1 \cup P_2$ è una partizione dell'intervallo [a, b] e risulta:

$$s(P) = s(P_1) + s(P_2); \qquad S(P) = S(P_1) + S(P_2). \tag{99.2}$$

Da ciò segue facilmente la tesi. I casi rimanenti (ad esempio con b interno all'intervallo [a, c], ecc) si riconducono al caso già trattato, tramite la (98.24).

Un'altra proprietà notevole che non dimostriamo per brevità è la:

LINEARITÀ DELL'INTEGRALE. — *Se* f, g *sono funzioni integrabili in* [a, b] *e se* c *è un numero reale, anche* f + g *e* c · f *sono integrabili in* [a, b] *e risulta*

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx; \tag{99.3}$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx. \tag{99.4}$$

Dalla definizione di integrale segue facilmente anche la seguente proprietà:

CONFRONTO TRA INTEGRALI. — *Se* f, g *sono funzioni integrabili in* [a, b] *e se* $f(x) \le g(x)$ *per ogni* $x \in [a, b]$ *allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \tag{99.11}$$

Dato che l'integrale definito della funzione identicamente nulla è zero, dalla proprietà precedente si deduce che:

$$f(x) \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \ge 0 \qquad (a < b). \tag{99.12}$$

Infine, utilizzando le disuguaglianze

$$-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)|, \qquad \forall x \in [a, b], \tag{99.13}$$

ancora dalla proprietà di confronto (99.11) e dalla (99.4) con $c = -1$, si deduce

$$-\int_a^b |f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b |f(x)|\,dx, \tag{99.14}$$

che, in base alla equivalenza (9.9) relativa al valore assoluto, si scrive anche nella forma:

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx \qquad (a < b). \tag{99.15}$$

100. Uniforme continuità. Teorema di Cantor

Allo scopo di dimostrare che una funzione continua in un intervallo chiuso e limitato risulta integrabile secondo Riemann in tale insieme, introduciamo in questo paragrafo il concetto di *uniforme continuità*.

Sia f(x) una funzione continua nell'intervallo I di **R**. Allora, per ogni $x_0 \in I$ e per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ tale che, se $x \in I$ e $|x - x_0| < \delta$, risulta $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Tale numero δ dipende, in generale, sia da ε che da x_0.

Ad esempio, sia $f(x) = x^2$; per $x \in I = \mathbf{R}$. Fissato $\varepsilon > 0$, supponiamo che esista $\delta > 0$, dipendente solo da ε e non da x_0, tale che

$$|x - x_0| < \delta \quad \Rightarrow \quad |x^2 - x_0^2| < \varepsilon. \tag{100.1}$$

Posto $x = x_0 + h$, pur di prendere $|h| < \delta$, si ha

$$|(x_0 + h)^2 - x_0^2| = |2x_0h + h^2| < \varepsilon, \qquad \forall\, x_0 \in \mathbf{R}. \tag{100.2}$$

Ma ciò è assurdo in quanto, per ogni $h \neq 0$, risulta

$$\lim_{x_0 \to +\infty} |2x_0h + h^2| = +\infty. \tag{100.3}$$

È opportuno introdurre la seguente

DEFINIZIONE DI FUNZIONE UNIFORMEMENTE CONTINUA. — *Si dice che* $f: I \to \mathbf{R}$ *è uniformemente continua nell'intervallo* I *di* $\mathbf{R}$ *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *tale che, per ogni* $x, x' \in I$,

$$|x - x'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{100.4}$$

Riprendendo l'esempio precedente, la funzione $f(x) = x^2$ non è uniformemente continua su tutto $\mathbf{R}$; invece, essendo continua in $\mathbf{R}$, è anche uniformemente continua in ogni intervallo chiuso e limitato $[a, b] \subseteq \mathbf{R}$, grazie al seguente teorema di Cantor.

Una notevole classe di funzioni uniformemente continue è quella delle *funzioni lipschitziane*.

Un importante criterio di uniforme continuità è fornito dal seguente

TEOREMA DI CANTOR. — *Sia* f *una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato* [a, b]. *Allora* f *è uniformemente continua in* [a, b].

Dimostrazione: procediamo per assurdo. A tale scopo ricordiamo in simboli, per comodità del lettore, la definizione (da negare) di continuità uniforme:

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0:\ \forall x, x' \in [a, b],\ |x - x'| < \delta \Rightarrow \Rightarrow |f(x) - f(x')| < \varepsilon. \tag{100.5}$$

Negare la (100.5) equivale ad affermare che esiste $\varepsilon_0 > 0$ tale che, qualunque sia $\delta > 0$, esistono in corrispondenza x, x' (dipendenti da δ) con le proprietà

$$|x - x'| < \delta, \quad |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon_0; \tag{100.6}$$

in simboli:

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0:\ \forall\, \delta > 0,\ \exists x, x' \in [a, b]:\ \text{vale (100.6)}. \tag{100.7}$$

Scegliamo $\delta = 1/n$, con $n \in \mathbf{N}$, e indichiamo con x_n, x'_n i corrispondenti punti di [a, b] per cui vale la (100.6); abbiamo quindi

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0:\quad \forall\, n \in \mathbf{N},\quad \exists\, x_n, x'_n \in [a, b]:$$
$$|x_n - x'_n| < \frac{1}{n}, \quad |f(x_n) - f(x'_n)| \geq \varepsilon_0. \tag{100.8}$$

Per il teorema di Bolzano – Weierstrass (paragrafo 61) esiste una successione x_{n_k}, estratta da x_n, convergente verso un punto $x_0 \in [a, b]$; inoltre, essendo

$$x_{n_k} - \frac{1}{n_k} < x'_{n_k} < x_{n_k} + \frac{1}{n_k}, \qquad \forall k \in \mathbf{N}, \tag{100.9}$$

per il teorema dei carabinieri anche x'_{n_k} converge ad x_0 per $k \to +\infty$.

Dall'ipotesi di continuità di f(x) segue

$$\lim_{k \to +\infty} [f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})] = f(x_0) - f(x_0) = 0, \tag{100.10}$$

che contrasta con il fatto che

$$|f(x_{n_k}) - f(x'_{n_k})| \geq \varepsilon_0, \quad \forall\, k \in \mathbf{N}. \tag{100.11}$$

101. Integrabilità delle funzioni continue

Dimostriamo il seguente teorema di

INTEGRABILITÀ DELLE FUNZIONI CONTINUE. — *Sia* f(x) *una funzione continua in* [a, b]. *Allora* f(x) *è integrabile secondo Riemann in* [a, b].

Dimostrazione: per il teorema di Cantor, f(x) è uniformemente continua e perciò, fissato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$|f(x) - f(x')| < \frac{\varepsilon}{b - a}, \tag{101.1}$$

per ogni coppia di punti $x, x' \in [a, b]$ tali che $|x - x'| < \delta$. Se P è una partizione di $[a, b]$, $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, con $x_0 = a$, $x_n = b$, tale che $|x_k - x_{k-1}| < \delta$ per ogni $k = 1,\ldots,n$, allora, posto

$$(101.2)\qquad \begin{aligned} m_k &= \inf\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \\ M_k &= \sup\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \end{aligned}$$

risulta per la (101.1):

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad \forall\, k = 1,\ldots,n,$$

e perciò

$$(101.3)\qquad \begin{aligned} S(P) - s(P) &= \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) < \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \varepsilon; \end{aligned}$$

dal teorema del paragrafo 98 segue l'asserto.

102. I teoremi della media

(PRIMO) TEOREMA DELLA MEDIA. — *Sia* f *una funzione limitata ed integrabile in* [a, b]. *Allora*

$$(102.1)\qquad m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a),$$

ove $m = \inf\{f(x): x \in [a, b]\}$, $M = \sup\{f(x): x \in [a, b]\}$.

Dimostrazione: l'integrale definito è l'elemento di separazione delle somme integrali inferiori e delle somme integrali superiori; perciò, qualunque sia la partizione P dell'intervallo [a, b], si ha

$$(102.2)\qquad s(P) \le \int_a^b f(x)\,dx \le S(P).$$

Scegliendo la partizione banale di [a, b], costituita dai soli punti a, b ($P = \{a, b\}$), risulta

$$(102.3)\qquad s(P) = m(b-a), \quad S(P) = M(b-a),$$

che, insieme alla (102.2), dà la tesi (102.1).

Il significato geometrico del teorema che segue è stato ampiamente discusso nel paragrafo 97.

(SECONDO) TEOREMA DELLA MEDIA. — *Se* f(x) *è continua in* [a, b], *esiste un punto* $x_0 \in [a, b]$ *tale che*

$$(102.4)\qquad \int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a).$$

Dimostrazione: per il teorema di Weierstrass (paragrafo 56) esistono il valore minimo m ed il valore massimo M di f(x) in [a, b]. Dividendo per $b - a$ (> 0) tutti i membri della tesi (102.1) del primo teorema della media, abbiamo

$$(102.5)\qquad m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le M;$$

perciò il valore medio y di f(x) in [a, b], definito da

$$(102.6)\qquad y = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx,$$

è un valore compreso fra il minimo m ed il massimo M di f(x) in [a, b]. In base al secondo teorema dell'esistenza dei valori intermedi (paragrafo 56), esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = y$, che, ricordando la definizione (102.6) di y, equivale alla tesi (102.4).

CAPITOLO 13

INTEGRALI INDEFINITI

103. Il teorema fondamentale del calcolo integrale

Ci proponiamo di mettere in evidenza una importante relazione tra integrali e derivate, che ha notevoli applicazioni in tutto il calcolo integrale.

Sia f una funzione continua nell'intervallo [a, b]. Per ogni $x \in [a, b]$ consideriamo l'integrale definito:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, dt. \tag{103.1}$$

Notiamo che abbiamo rappresentato l'integrale definito usando la variabile di integrazione t, invece che la x, con un puro scambio di simboli. Invece abbiamo denotato con x il secondo estremo di integrazione. Per ogni x è determinato l'integrale definito nell'intervallo [a, x] della funzione f; pertanto il risultato dell'integrazione risulta una funzione di x. Ciò spiega il simbolo di funzione F(x) a primo membro della (103.1); tale funzione si chiama *funzione integrale*.

Ad esempio, con il calcolo del settore di parabola (si veda la (95.11); si veda anche la (96.8)) si è ottenuto

$$F(x) = \int_0^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3}, \qquad \forall x \geq 0. \tag{103.2}$$

In questo esempio la funzione integrale vale $F(x) = x^3/3$; la sua derivata, uguale a $F'(x) = x^2$, è anche uguale alla funzione integranda $f(t) = t^2$, calcolata per $t = x$.

Tale proprietà vale in generale; infatti, risulta in generale che $F'(x) = f(x)$, secondo il teorema che segue.

TEOREMA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE. — *Sia* f *una funzione continua nell'intervallo* [a, b]. *La funzione integrale* F(x), *definita in* (103.1), *è derivabile e la derivata vale*

$$F'(x) = f(x), \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{103.3}$$

Dimostrazione: occorre calcolare il limite del rapporto incrementale della funzione F(x), quando l'incremento tende a zero. Cominciamo con il rapporto incrementale

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\left[\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] =$$

$$= \frac{1}{h}\left[\int_a^x f(t)\,dt + \int_x^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\right] = \tag{103.4}$$

$$= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt.$$

Abbiamo utilizzato la proprietà di additività dell'integrale rispetto all'intervallo. Trasformiamo l'ultimo integrale per mezzo del (secondo) teorema della media applicato all'intervallo di estremi x e x + h: esiste un punto compreso tra x ed x + h, che dipende quindi da h, che indichiamo con x(h), tale che

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)\,dt = f(x(h)). \tag{103.5}$$

Dato che x(h) è compreso tra x ed x + h, per $h \to 0$ risulta:

$$\lim_{h\to 0} x(h) = x. \tag{103.6}$$

La tesi segue dalla continuità della funzione integranda f; infatti:

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x(h)) = f(x). \tag{103.7}$$

104. Primitive. Formula fondamentale del calcolo integrale

DEFINIZIONE. — *Una funzione* F(x), *derivabile nell'intervallo* [a, b], *è una primitiva di* f(x) *se* F′ (x) = f(x) *per ogni* x ∈ [a, b].

Ad esempio una primitiva della funzione f(x) = x è $F(x) = x^2/2$. Una primitiva della funzione f(x) = sen x è F(x) = − cos x.

Tenendo presente la definizione di primitiva, possiamo enunciare il teorema fondamentale del calcolo integrale dicendo che: *se* f *è una funzione continua in* [a, b], *allora la funzione integrale* F, *definita in* (103.1), *è una primitiva di* f.

È chiaro che, se F(x) è una primitiva di una funzione f(x), anche G(x) = F(x) + c, qualunque sia la costante c, è una primitiva di f(x). Come provato nel lemma seguente, vale anche il viceversa, cioè tutte le primitive di f si ottengono nel modo anzidetto. Ciò caratterizza l'insieme delle primitive di una data funzione.

CARATTERIZZAZIONE DELLE PRIMITIVE DI UNA FUNZIONE IN UN INTERVALLO. — *Se* F(x) *e* G(x) *sono due primitive di una stessa funzione* f(x) *in un intervallo* [a, b], *esiste una costante* c *tale che*

$$G(x) = F(x) + c, \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{104.1}$$

Dimostrazione: poniamo H(x) = G(x) − F(x); risulta

$$H'(x) = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0. \tag{104.2}$$

Applichiamo il teorema di Lagrange alla funzione H(x) nell'intervallo [a, x], con x fissato in (a, b]: esiste $x_0 \in (a, x)$ tale che

$$H(x) - H(a) = H'(x_0)(x - a) = 0 \cdot (x - a) = 0; \tag{104.3}$$

perciò H(x) = H(a), per ogni x ∈ (a, b].

Ponendo c = H(a), H(x) risulta costante, uguale a c, per ogni x ∈ [a, b] (si noti che avremmo potuto equivalentemente dedurre dalla (104.2) che H(x) è una funzione costante in [a, b], utilizzando la caratterizzazione delle funzioni costanti del paragrafo 84).

Quindi, G(x) = F(x) + H(x) = F(x) + c, per ogni x ∈ [a, b].

La formula che segue riconduce il calcolo degli integrali definiti alla ricerca delle primitive delle funzioni continue.

FORMULA FONDAMENTALE DEL CALCOLO INTEGRALE. — *Sia* f *una funzione continua in* [a, b]. *Sia* G *una primitiva di* f. *Allora*

$$\int_a^b f(x)\,dx = [G(x)]_a^b = G(b) - G(a). \tag{104.4}$$

Il simbolo $[G(x)]_a^b$ significa appunto la differenza dei valori della funzione G(x) per x = b e x = a.

Per dimostrare la formula fondamentale, consideriamo la funzione integrale (103.1), indicando con t la variabile di integrazione.

La funzione integrale F e la funzione G sono entrambe primitive della funzione f. In base alla caratterizzazione precedente, esiste una costante c tale che

$$G(x) = F(x) + c = c + \int_a^x f(t)\,dt, \qquad \forall x \in [a, b]. \tag{104.5}$$

Per x = a abbiamo

$$G(a) = c + \int_a^a f(t)\,dt = c \tag{104.6}$$

e, sostituendo il valore trovato al posto di c nella (104.5),

$$G(x) = G(a) + \int_a^x f(t)\,dt. \tag{104.7}$$

La tesi segue ponendo x = b in (104.7).

Utilizzando la formula fondamentale del calcolo integrale si ritrova immediatamente il risultato (95.1): con i simboli degli integrali definiti, l'area del settore di parabola considerato nel paragrafo 95 è dato da

$$\int_0^b x^2\,dx\,. \tag{104.8}$$

Una primitiva della funzione x^2 è la funzione $G(x) = x^3/3$. Quindi

$$\int_0^b x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{b^3}{3}\,. \tag{104.9}$$

Mediante la formula fondamentale del calcolo integrale si risolve facilmente il problema posto nel paragrafo 96, consistente nel calcolo dell'integrale definito della funzione f(x) = sen x nell'intervallo [0, π]: dato che una primitiva della funzione sen x è G(x) = – cos x, si ottiene

$$\int_0^\pi \operatorname{sen} x\,dx = [-\cos x]_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = 2. \tag{104.10}$$

105. L'integrale indefinito

Nel paragrafo precedente abbiamo ricondotto il calcolo di un integrale definito alla ricerca delle primitive della funzione integranda. È perciò naturale porre la seguente:

DEFINIZIONE. — *Sia* f *una funzione continua in un intervallo* [a, b]. *L'insieme di tutte le primitive di* f *in* [a, b] *si chiama integrale indefinito di* f *e si indica con il simbolo*

$$\int f(x)\,dx. \tag{105.1}$$

In base alla caratterizzazione data nel paragrafo precedente, possiamo affermare che

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c, \tag{105.2}$$

dove F è una primitiva di f e c è una costante arbitraria.

Sottolineamo che c'è una sostanziale differenza tra l'integrale definito e quello indefinito, che indichiamo rispettivamente con i simboli

$$\int_a^b f(x)\,dx, \qquad \int f(x)\,dx; \tag{105.3}$$

il primo dei due integrali è un numero reale, il secondo integrale è un insieme di funzioni. Il legame tra i due integrali è dato dalla formula fondamentale (104.4).

Ricordando che la derivata di una somma è uguale alla somma delle derivate, si ottiene la proprietà corrispondente per gli integrali indefiniti:

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx. \tag{105.4}$$

Analogamente, ricordando la formula (77.7), che esprime la derivata del prodotto di una costante per una funzione, risulta

$$\int c\, f(x)\, dx = c \int f(x)\, dx \quad (c = \textit{costante}). \tag{105.5}$$

Si noti l'analogia delle due proprietà sopra elencate per l'integrale indefinito con le proprietà di linearità (97.3), (97.4) per l'integrale definito.

Riportiamo di seguito una serie di integrali indefiniti immediati. Tali integrali, di facile verifica, sono ottenuti a partire dalle tabelle per le derivate esposte nei paragrafi 79, 81.

$$\int x^b\, dx = \frac{x^{b+1}}{b+1} + c, \qquad b \neq -1\,; \tag{105.6}$$

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \log x + c, \qquad x > 0\,; \tag{105.7}$$

$$\int e^x\, dx = e^x + c; \tag{105.8}$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + c\,; \tag{105.9}$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + c\,; \tag{105.10}$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + c\,; \tag{105.11}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x + c\,; \tag{105.12}$$

$$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + c. \tag{105.13}$$

A proposito dell'integrale (105.7), notiamo che risulta

$$D \log |x| = \frac{1}{x}, \qquad \forall\, x \neq 0; \tag{105.14}$$

infatti, se $x > 0$ la relazione precedente è ben nota. Invece, se $x < 0$, per la regola di derivazione delle funzioni composte, risulta

$$D \log |x| = D \log(-x) = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x} \quad (x < 0). \tag{105.15}$$

La (105.14), in termini di integrali indefiniti, è equivalente a

$$\int \frac{1}{x} = \log |x| + c\,, \tag{105.16}$$

intendendo che l'integrale in (105.16) è considerato in un intervallo non contenente il punto $x = 0$.

In molte situazioni ci si riconduce ad integrali immediati del tipo sopra indicato, utilizzando la formula di derivazione delle funzioni composte. Così ad esempio la formula (105.6) si generalizza nel modo seguente: si parte dalla formula di derivazione, valida per una funzione $f(x)$ positiva e derivabile

$$D\, \frac{[f(x)]^{b+1}}{b+1} = [f(x)]^b \cdot f'(x) \qquad (b \neq -1). \tag{105.17}$$

In corrispondenza si ottiene la formula di integrazione indefinita

$$\int [f(x)]^b\, f'(x)\, dx = \frac{1}{b+1}\, [f(x)]^{b+1} + c \qquad (b \neq -1). \tag{105.18}$$

Come esempio consideriamo:

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\, dx = -\log |\cos x| + c\,; \tag{105.19}$$

abbiamo calcolato una primitiva dopo aver riconosciuto che a numeratore della funzione integranda c'è, a meno del segno, la derivata del denominatore.

106. Integrazione per decomposizione in somma

In molti casi il calcolo dell'integrale indefinito di una funzione si può ricondurre al calcolo di integrali già noti, o di tipo più semplice. Un metodo particolarmente frequente consiste nel decomporre la funzione integranda nella somma di due o più funzioni, applicando poi la proprietà di linearità (105.4). Illustriamo ciò con alcuni esempi.

Calcoliamo il seguente integrale indefinito

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx\,; \tag{106.1}$$

sommando e sottraendo 1 al numeratore della funzione integranda otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x+1}\,dx &= \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int \left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx = \\ &= \int 1\,dx - \int \frac{dx}{x+1} = x - \log|x+1| + c.\end{aligned} \tag{106.2}$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx\,; \tag{106.3}$$

ricordando la definizione della funzione tangente, abbiamo

$$\mathrm{tg}^2\,x = \frac{\mathrm{sen}^2\,x}{\cos^2 x} = \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1\,; \tag{106.4}$$

per decomposizione in somma otteniamo

$$\begin{aligned}\int \mathrm{tg}^2\,x\,dx &= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right)dx = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \mathrm{tg}\,x - x + c\,.\end{aligned} \tag{106.5}$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \frac{dx}{\mathrm{sen}\,x\cos x}\,; \tag{106.6}$$

anche in questo caso scriviamo il numeratore della funzione integranda in modo che sia possibile scindere la frazione nella somma di due frazioni

$$\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{sen}\,x\cos x} &= \frac{\mathrm{sen}^2\,x + \cos^2 x}{\mathrm{sen}\,x\cos x} = \\ &= \frac{\mathrm{sen}^2\,x}{\mathrm{sen}\,x\cos x} + \frac{\cos^2 x}{\mathrm{sen}\,x\cos x} = \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}\,;\end{aligned} \tag{106.7}$$

integrando entrambi i membri otteniamo

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\mathrm{sen}\,x\cos x} &= \int \frac{\mathrm{sen}\,x}{\cos x}\,dx + \int \frac{\cos x}{\mathrm{sen}\,x}\,dx = \\ &= -\log|\cos x| + \log|\mathrm{sen}\,x| + c\,.\end{aligned} \tag{106.8}$$

Calcoliamo l'integrale indefinito

$$\int \mathrm{sen}^2\,x\,dx\,; \tag{106.9}$$

ricordiamo la formula (10.7) di duplicazione

$$\cos 2x = \cos^2 x - \mathrm{sen}^2\,x = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2\,x, \tag{106.10}$$

da cui si deduce che $\mathrm{sen}^2\,x = (1 - \cos 2x)/2$. Otteniamo

$$\int \mathrm{sen}^2\,x\,dx = \frac{1}{2}\int (1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}\,x - \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}\,2x + c\,; \tag{106.11}$$

nell'ultimo passaggio si è tenuto conto che $D\,\mathrm{sen}\,2x = 2\cos 2x$. Se lo si preferisce, si può scrivere il risultato utilizzando la formula di duplicazione (10.6) per la funzione seno, nel modo seguente:

$$\int \mathrm{sen}^2\,x\,dx = \frac{1}{2}\,(x - \mathrm{sen}\,x\cos x) + c\,. \tag{106.12}$$

Dal risultato ottenuto è facile dedurre il valore dell'integrale

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,dx &= \int (1-\mathrm{sen}^2\,x)\,dx = \\ &= x - \int \mathrm{sen}^2\,x\,dx = \frac{1}{2}\,(x + \mathrm{sen}\,x\cos x) + c\,.\end{aligned} \tag{106.13}$$

107. Integrazione delle funzioni razionali

È sempre possibile, in linea di principio, calcolare per decomposizione in somma l'integrale indefinito delle *funzioni razionali*, cioè delle funzioni

che sono il rapporto di due polinomi f(x), g(x):

$$\text{(107.1)} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \qquad m, n \in \mathbf{N}.$$

Nella (107.1) è rappresentata una funzione razionale ottenuta come rapporto tra un polinomio f(x), di grado m, ed un polinomio g(x), di grado n.

Se $m \geq n$, cioè se il grado del numeratore è maggiore od uguale al grado del denominatore, si esegue la *divisione tra i polinomi* f(x) e g(x). Se indichiamo con r(x), q(x) rispettivamente il *resto* ed il *quoziente* della divisione, possiamo scrivere la scomposizione

$$\text{(107.2)} \qquad f(x) = g(x)\, q(x) + r(x)\ ;$$

cioè: moltiplicando il quoziente q(x) per il divisore g(x), ed aggiungendo il resto, si ottiene il dividendo f(x). La stessa relazione si può scrivere mettendo in luce il rapporto f/g nel modo seguente:

$$\text{(107.3)} \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{g(x)}\ .$$

Ricordiamo che *il resto è un polinomio di grado inferiore al grado* n *del divisore* g(x).

Per l'integrale della funzione razionale f(x)/g(x) si ottiene

$$\text{(107.4)} \qquad \int \frac{f(x)}{g(x)}\, dx = \int q(x)\, dx + \int \frac{r(x)}{g(x)}\, dx\ .$$

Dato che q(x) è un polinomio, il suo integrale indefinito è immediato. Ci siamo quindi ricondotti a calcolare l'integrale della funzione razionale r(x)/g(x), che ha la proprietà che il grado del polinomio a numeratore è inferiore al grado del polinomio a denominatore.

Prima di proseguire ad integrare r(x)/g(x), ricordiamo con un esempio come si esegue la *divisione tra polinomi*. Consideriamo la funzione razionale

$$\text{(107.5)} \qquad \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1}\ ;$$

procediamo nella divisione in modo analogo al modo in cui si effettua la divisione tra due numeri naturali, secondo il seguente schema:

(107.6)

$$\begin{array}{l|l}
x^5 - 3x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + x + 3 & x^2 - 1 \\ \cline{2-2}
\underline{x^5 \qquad - x^3} & x^3 - 3x^2 + x - 3 \\
\quad - 3x^4 + x^3 + x + 3 & \\
\quad \underline{- 3x^4 + \qquad + 3x^2} & \\
\qquad x^3 - 3x^2 + x + 3 & \\
\qquad \underline{x^3 \qquad - x} & \\
\qquad\quad - 3x^2 + 2x + 3 & \\
\qquad\quad \underline{- 3x^2 \qquad + 3} & \\
\qquad\qquad 2x &
\end{array}$$

Il resto r(x) ed il quoziente q(x) valgono rispettivamente: $r(x) = 2x$, $q(x) = x^3 - 3x^2 + x - 3$. In questo caso la scomposizione (107.3) corrisponde a

$$\text{(107.7)} \qquad \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1} = x^3 - 3x^2 + x - 3 + \frac{2x}{x^2 - 1}\ .$$

Ora si ottiene facilmente l'integrale indefinito

$$\text{(107.8)} \qquad \begin{aligned} \int \frac{x^5 - 3x^4 + x + 3}{x^2 - 1}\, dx &= \int (x^3 - 3x^2 + x - 3)\, dx + \int \frac{2x}{x^2 - 1}\, dx = \\ &= \frac{x^4}{4} - x^3 + \frac{x^2}{2} - 3x + \log|x^2 - 1| + c\ . \end{aligned}$$

Ritorniamo al calcolo dell'integrale della funzione razionale r(x)/g(x), dove r(x) è un polinomio di grado inferiore al grado del polinomio g(x). Per semplicità ci limitiamo a considerare il caso in cui g(x) sia un polinomio di secondo grado. In tali condizioni, il grado di r(x) è minore di due. Quindi risulta

$$\text{(107.9)} \qquad g(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0); \qquad r(x) = dx + e.$$

Per calcolare l'integrale indefinito di r(x)/g(x) è opportuno distinguere i tre casi, in cui l'equazione $g(x) = 0$ abbia 2 radici reali distinte, oppure 2 radici coincidenti, oppure nessuna radice reale. Consideriamo tre esempi in cui si verificano queste situazioni.

Il caso $b^2 - 4ac > 0$ si tratta come nell'esempio seguente: dopo aver trovato le radici del denominatore ($x_1 = -1$, $x_2 = 2$), scomponiamo la frazione

$$\frac{x+7}{x^2-x-2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2}, \tag{107.10}$$

con A, B numeri reali da determinare. Sviluppando il secondo membro otteniamo

$$\frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} = \frac{Ax - 2A + Bx + B}{(x+1)(x-2)} = \frac{(A+B)\,x - 2A + B}{x^2-x-2}; \tag{107.11}$$

affinché valga l'uguaglianza (107.10) per ogni x, deve risultare

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ -2A + B = 7 \end{cases}. \tag{107.12}$$

Si risolve il sistema per sostituzione, oppure sottraendo le due equazioni membro a membro, e si ricava $A = -2$, $B = 3$. Con i valori trovati di A, B, tenendo conto della scomposizione (107.10), si calcola l'integrale definito

$$\begin{aligned} \int \frac{x+7}{x^2-x-2}\,dx &= \int \frac{-2}{x+1}\,dx + \int \frac{3}{x-2}\,dx = \\ &= -2\log|x+1| + 3\log|x-2| + c\,. \end{aligned} \tag{107.13}$$

Il caso $b^2 - 4ac = 0$ si tratta come nell'esempio seguente:

$$\frac{x}{x^2+2x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}; \tag{107.14}$$

come in precedenza si determinano le costanti A, B in modo che valga l'identità (107.14) per ogni $x \in \mathbf{R}$ ($x \neq -1$); si calcola il denominatore comune e si trovano le condizioni $A = 1$, $A + B = 0$; cioè $A = 1$, $B = -1$. Risulta in definitiva

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2+2x+1}\,dx &= \int \frac{dx}{x+1} - \int \frac{dx}{(x+1)^2} = \\ &= \log|x+1| + \frac{1}{x+1} + c\,. \end{aligned} \tag{107.15}$$

Infine, se $b^2 - 4ac < 0$, cioè se l'equazione $g(x) = 0$ non ha radici reali, si procede come nell'esempio seguente:

$$\frac{1-2x}{x^2+2x+5} = \frac{A(2x+2)+B}{x^2+2x+5}; \tag{107.16}$$

l'espressione $(2x + 2)$, che compare nella relazione precedente, è stata scelta perché è la derivata del denominatore. Si ricava immediatamente il sistema: $2A = -2$, $2A + + B = 1$, cioè $A = -1$, $B = 3$. Quindi

$$\begin{aligned} \int \frac{1-2x}{x^2+2x+5}\,dx &= -\int \frac{2x+2}{x^2+2x+5}\,dx + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5} = \\ &= -\log(x^2+2x+5) + 3\int \frac{dx}{x^2+2x+5}; \end{aligned} \tag{107.17}$$

si noti che $\log(x^2 + 2x + 5) = \log|x^2 + 2x + 5|$, dato che il polinomio di secondo grado è positivo per ogni x.

Scomponiamo l'ultimo integrale nel modo seguente, tenendo conto che x^2 e $2x$ sono due addendi del polinomio $(x + 1)^2$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+2x+5} &= \int \frac{dx}{(x+1)^2+4} = \\ \frac{1}{4}\int \frac{dx}{[(x+1)/2]^2+1} &= \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x+1}{2} + c\,. \end{aligned} \tag{107.18}$$

Indichiamo il metodo seguito per un generico polinomio g(x), con $a > 0$:

$$\begin{aligned} g(x) &= ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] = \\ &= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]; \end{aligned} \tag{107.19}$$

infine si mette in evidenza il fattore positivo $(4ac - b^2)/4a^2$.

Diamo ancora un esempio relativo al caso $b^2 - 4ac < 0$:

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1} =$$

(107.20)

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{2/\sqrt{3}\,dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c\,.$$

Il metodo descritto si applica anche a funzioni razionali che hanno a denominatore un polinomio di grado superiore a due, purché sia possibile calcolarne esplicitamente le radici, come nell'esempio che segue.

Come in precedenza, si inizia con la divisione tra polinomi:

(107.21) $$\int \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{x^3+x-1}{x^4+x^2}\,dx\,;$$

poi si scompone l'ultimo integrando

(107.22) $$\frac{x^3+x-1}{x^4+x^2} = \frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C+Dx}{x^2+1}\,;$$

si trova che vale l'identità se $A = C = 1$, $B = -1$, $D = 0$. Quindi

(107.23) $$\int \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \log|x| - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + c\,.$$

108. Integrazione per parti

Mentre il metodo di integrazione per decomposizione in somma si basa sulla regola di derivazione della somma di due funzioni, il metodo di integrazione per parti, che stiamo per descrivere, si basa sulla formula di derivazione del prodotto di due funzioni.

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI. — *Se in un intervallo* f, g *sono due funzioni derivabili con derivata continua, risulta*

(108.1) $$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx.$$

Chiameremo f(x) il *fattore finito*, mentre $g'(x)$ è detto *fattore differenziale*. L'ipotesi che le derivate $f'(x)$, $g'(x)$ siano continue assicura che gli integrali in (108.1) siano ben definiti. Il lettore non confonda tale ipotesi con la condizione, più debole, che f(x), g(x) siano continue.

Per dimostrare la (108.1) partiamo dalla formula di derivazione del prodotto

(108.2) $$[f(x)\,g(x)]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x).$$

Calcoliamo gli integrali indefiniti di entrambi i membri ed utilizziamo la proprietà di linearità (105.4)

(108.3) $$\int [f(x)\,g(x)]'\,dx = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx.$$

La tesi (108.1) si ottiene osservando che la funzione $f \cdot g$ è una primitiva della sua derivata $[f \cdot g]'$.

Consideriamo alcuni esempi. Cominciamo con l'integrale indefinito

(108.4) $$\int x\cos x\,dx\,;$$

applichiamo la formula (108.1) di integrazione per parti, con $f(x) = x$ e $g'(x) = \cos x$, quindi $g(x) = \operatorname{sen} x$ (si noti che, ponendo $g'(x) = \cos x$, potremmo scegliere $g(x) = c + \operatorname{sen} x$, con c costante; verificare per esercizio che il risultato finale non cambia):

(108.5) $$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx =$$

$$= x\operatorname{sen} x + \cos x + c.$$

Calcoliamo per parti, ponendo $f(x) = x^2$, $g'(x) = \cos x$, l'integrale indefinito

(108.6) $$\int x^2\cos x\,dx = x^2\operatorname{sen} x - 2\int x\operatorname{sen} x\,dx$$

$$\int \frac{x}{x^2+x+1}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}\,dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+x+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1/2)^2+3/4} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x+\frac{1}{2}\right)\right]^2+1} = \tag{107.20}$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\int \frac{2/\sqrt{3}\,dx}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+1} =$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+x+1) - \frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + c\,.$$

Il metodo descritto si applica anche a funzioni razionali che hanno a denominatore un polinomio di grado superiore a due, purché sia possibile calcolarne esplicitamente le radici, come nell'esempio che segue.

Come in precedenza, si inizia con la divisione tra polinomi:

$$\int \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}\,dx = \int x\,dx - \int \frac{x^3+x-1}{x^4+x^2}\,dx\,; \tag{107.21}$$

poi si scompone l'ultimo integrando

$$\frac{x^3+x-1}{x^4+x^2} = \frac{x^3+x-1}{x^2(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C+Dx}{x^2+1}\,; \tag{107.22}$$

si trova che vale l'identità se $A = C = 1$, $B = -1$, $D = 0$. Quindi

$$\int \frac{x^5-x+1}{x^4+x^2}\,dx = \frac{x^2}{2} - \log|x| - \frac{1}{x} - \operatorname{arctg} x + c\,. \tag{107.23}$$

108. Integrazione per parti

Mentre il metodo di integrazione per decomposizione in somma si basa sulla regola di derivazione della somma di due funzioni, il metodo di integrazione per parti, che stiamo per descrivere, si basa sulla formula di derivazione del prodotto di due funzioni.

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER PARTI. — *Se in un intervallo* f, g *sono due funzioni derivabili con derivata continua, risulta*

$$\int f(x)\,g'(x)\,dx = f(x)\,g(x) - \int f'(x)\,g(x)\,dx. \tag{108.1}$$

Chiameremo f(x) il *fattore finito*, mentre $g'(x)$ è detto *fattore differenziale*. L'ipotesi che le derivate $f'(x)$, $g'(x)$ siano continue assicura che gli integrali in (108.1) siano ben definiti. Il lettore non confonda tale ipotesi con la condizione, più debole, che f(x), g(x) siano continue.

Per dimostrare la (108.1) partiamo dalla formula di derivazione del prodotto

$$[f(x)\,g(x)]' = f'(x)\,g(x) + f(x)\,g'(x). \tag{108.2}$$

Calcoliamo gli integrali indefiniti di entrambi i membri ed utilizziamo la proprietà di linearità (105.4)

$$\int [f(x)\,g(x)]'\,dx = \int f'(x)\,g(x)\,dx + \int f(x)\,g'(x)\,dx. \tag{108.3}$$

La tesi (108.1) si ottiene osservando che la funzione $f \cdot g$ è una primitiva della sua derivata $[f \cdot g]'$.

Consideriamo alcuni esempi. Cominciamo con l'integrale indefinito

$$\int x\cos x\,dx\,; \tag{108.4}$$

applichiamo la formula (108.1) di integrazione per parti, con $f(x) = x$ e $g'(x) = \cos x$, quindi $g(x) = \operatorname{sen} x$ (si noti che, ponendo $g'(x) = \cos x$, potremmo scegliere $g(x) = c + + \operatorname{sen} x$, con c costante; verificare per esercizio che il risultato finale non cambia):

$$\int x\cos x\,dx = x\operatorname{sen} x - \int \operatorname{sen} x\,dx = \tag{108.5}$$

$$= x\operatorname{sen} x + \cos x + c.$$

Calcoliamo per parti, ponendo $f(x) = x^2$, $g'(x) = \cos x$, l'integrale indefinito

$$\int x^2\cos x\,dx = x^2\operatorname{sen} x - 2\int x\operatorname{sen} x\,dx \tag{108.6}$$

integrando di nuovo per parti, scegliendo come fattore finito x e come fattore differenziale sen x, otteniamo

$$\int x^2 \cos x \, dx = x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \int \cos x \, dx = \tag{108.7}$$
$$= x^2 \operatorname{sen} x + 2x \cos x - 2 \operatorname{sen} x + c.$$

Calcoliamo per parti l'integrale seguente, ponendo $f(x) = \log x$, $g'(x) = 1$:

$$\int \log x \, dx = x \log x - \int \frac{1}{x} \cdot x \, dx = \tag{108.8}$$
$$= x \log x - x + c.$$

Assumendo come fattore finito x e come fattore differenziale e^x, calcoliamo per parti l'integrale

$$\int x e^x \, dx = x e^x - \int e^x \, dx = x e^x - e^x + c. \tag{108.9}$$

Nell'integrale seguente assumiamo come fattore finito e^x e come fattore differenziale sen x

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = - e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx \; ; \tag{108.10}$$

integriamo di nuovo per parti l'ultimo integrale:

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = - e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x - \int e^x \operatorname{sen} x \, dx \; ; \tag{108.11}$$

dalla relazione precedente si può ricavare il valore dell'integrale

$$\int e^x \operatorname{sen} x \, dx = \frac{e^x}{2} (\operatorname{sen} x - \cos x) + c. \tag{108.12}$$

Con lo stesso metodo possiamo calcolare l'integrale

$$\int \cos^2 x \, dx = \int \cos x \cos x \, dx = \operatorname{sen} x \cos x + \int \operatorname{sen}^2 x \, dx = \tag{108.13}$$
$$= \operatorname{sen} x \cos x + \int (1 - \cos^2 x) \, dx = \operatorname{sen} x \cos x + x - \int \cos^2 x \, dx \; ;$$

ricavando dalla relazione precedente il valore dell'integrale, si ritrova il risultato, ottenuto per altra via in (106.13):

$$\int \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} (\operatorname{sen} x \cos x + x) + c. \tag{108.14}$$

Chiudiamo il paragrafo scrivendo esplicitamente la *regola di integrazione per parti per gli integrali definiti*. Tenendo conto della relazione tra gli integrali indefiniti e gli integrali definiti espressa dalla formula fondamentale (104.4), otteniamo dalla (108.1):

$$\int_a^b f(x) \, g'(x) \, dx = [f(x) \, g(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \, g(x) \, dx \, . \tag{108.15}$$

109. Integrazione per sostituzione

Abbiamo visto che il metodo di integrazione per decomposizione in somma si basa sulla regola di derivazione di una somma ed il metodo di integrazione per parti si basa sulla formula di derivazione di un prodotto. Il metodo di integrazione per sostituzione, che descriviamo in questo paragrafo, si basa sulla formula di derivazione delle funzioni composte.

FORMULA DI INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE. — *Sia* f *una funzione continua e* g *una funzione derivabile con derivata continua. Risulta*

$$\left[\int f(x) \, dx\right]_{x = g(t)} = \int f(g(t)) \, g'(t) \, dt. \tag{109.1}$$

Osserviamo che la formula di integrazione per sostituzione (109.1) non richiede, per la sua validità, che g(t) sia una funzione invertibile; naturalmente il risultato dell'integrazione indefinita è espresso in funzione di t, mediante la posizione $x = g(t)$, con x che varia nel codominio della funzione g. Per poter esprimere il risultato in funzione di x, occorre supporre che g(t) sia una funzione invertibile; in tal caso si ottiene il risultato finale, in funzione di x, con l'ulteriore sostituzione $t = g^{-1}(x)$. Notiamo però che, per il calcolo di un integrale definito, può non essere necessario invertire g(t), come mostrato nella successiva formula (109.14).

Il simbolo a primo membro della (109.1) significa, indicando con F(x) una primitiva di f(x), che

$$\int f(x) \, dx = F(x) + c; \qquad \left[\int f(x) \, dx\right]_{x = g(t)} = F(g(t)) + c. \tag{109.2}$$

La dimostrazione della (109.1) consiste nell'osservare che

$$F(g(t)) + c = \int f(g(t)) \, g'(t) \, dt \; ; \tag{109.3}$$

ciò è conseguenza del teorema di derivazione delle funzioni composte. Infatti, dato che

$$\frac{d}{dt} F(g(t)) = F'(g(t))\, g'(t) = f(g(t))\, g'(t), \tag{109.4}$$

abbiamo verificato che $F(g(t))$ è una primitiva di $f(g(t))g'(t)$, cioè abbiamo verificato la tesi (109.3).

Se $x = g(t)$, la quantità $g'(t) \cdot dt$ (che è una funzione delle due variabili t, dt) si chiama il differenziale della funzione g(t), e si indica con il simbolo dx. Perciò, il *differenziale* della funzione derivabile $x = g(t)$ è, per definizione, dato da

$$dx = g'(t)\, dt\,; \tag{109.5}$$

tale definizione è motivata dalla formula (109.1) di integrazione per sostituzione; infatti, in (109.1) x si trasforma in g(t), mentre il differenziale dx si trasforma secondo la (109.5).

Consideriamo alcuni esempi, cominciando con l'integrale

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} - 3}\, dx\,; \tag{109.6}$$

è naturale porre $x = t^2$. In base alla formula (109.1), con $x = g(t) = t^2$, otteniamo, per $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt{x} - 3}\, dx &= \int \frac{2t}{t - 3}\, dt = \qquad (x = t^2) \\ &= 2\left[\int \frac{t-3}{t-3}\, dt + \int \frac{3}{t-3}\, dt\right] = \\ &= 2t + 6 \log |t - 3| + c\,; \end{aligned} \tag{109.7}$$

volendo scrivere il risultato finale in funzione di x, si sostituisce $t = \sqrt{x}$, ottenendo:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x} - 3}\, dx = 2\sqrt{x} + 6 \log |\sqrt{x} - 3| + c. \tag{109.8}$$

Con la sostituzione $2x - 1 = t^2$, cioè $x = g(t) = (t^2 + 1)/2$, calcoliamo l'integrale, per $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \int \frac{x + \sqrt{2x - 1}}{x - \sqrt{2x - 1}}\, dx &= \qquad \left(x = \frac{t^2 + 1}{2}\right) \\ &= \int \frac{(t^2 + 1)/2 + t}{(t^2 + 1)/2 - t}\, t\, dt = \int \frac{t^3 + 2t^2 + t}{t^2 - 2t + 1}\, dt\,; \end{aligned} \tag{109.9}$$

abbiamo ottenuto l'integrale di una funzione razionale, che possiamo risolvere con il metodo indicato nel paragrafo 105. Notiamo che il denominatore ha due radici concidenti e che, eseguendo i conti, si ottiene la scomposizione:

$$\begin{aligned} \frac{t^3 + 2t^2 + t}{t^2 - 2t + 1} &= t + 4 + \frac{8t - 4}{t^2 - 2t + 1} = \\ &= t + 4 + 4\left(\frac{2}{t - 1} + \frac{1}{(t - 1)^2}\right); \end{aligned} \tag{109.10}$$

quindi $(x = (t^2 + 1)/2)$:

$$\int \frac{x + \sqrt{2x - 1}}{x - \sqrt{2x - 1}}\, dx = \frac{t^2}{2} + 4t + 8 \log |t - 1| - \frac{4}{t - 1} + c\,; \tag{109.11}$$

è facile scrivere il risultato finale in funzione di x, tenendo presente che $t = \sqrt{2x - 1}$.

Con la sostituzione $x = \text{sen}\, t$, calcoliamo l'integrale (ci limitiamo ai valori di t per cui $\cos t \geq 0$)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1 - x^2}\, dx &= \int \sqrt{1 - \text{sen}^2 t}\, \cos t\, dt = \qquad (x = \text{sen}\, t) \\ &= \int \cos^2 t\, dt = \frac{1}{2}(t + \text{sen}\, t \cos t) + c; \end{aligned} \tag{109.12}$$

l'ultimo integrale era stato calcolato in (106.13) (ed anche in (108.14)).

Per finire, scriviamo esplicitamente la formula di integrazione per sostituzione per gli integrali definiti. Consideriamo l'integrale di una funzione f esteso ad un intervallo [a, b], ed effettuiamo la sostituzione $x = g(t)$. Supponiamo che ad $x = a$, $x = b$ corrispondano tramite la funzione g i valori $t = c$, $t = d$; cioè supponiamo che risulti:

$$g(c) = a, \quad g(d) = b. \tag{109.13}$$

In tali condizioni deduciamo immediatamente la *regola di integrazione per sostituzione per gli integrali definiti*:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f(g(t))\,g'(t)\,dt. \tag{109.14}$$

Ad esempio, consideriamo l'integrale definito, corrispondente all'integrale indefinito (109.12),

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx. \tag{109.15}$$

Abbiamo verificato che è utile effettuare la sostituzione x = sent. Dato che risulta

$$\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1, \quad \operatorname{sen}\frac{\pi}{2} = 1, \tag{109.16}$$

applicando la formula (109.14) e ricordando il risultato dell'integrale indefinito (108.14), otteniamo

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 t\,dt = \\ &= \left[\frac{1}{2}(t + \operatorname{sen}t \cos t)\right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned} \tag{109.17}$$

110. Calcolo di aree di figure piane

Abbiamo introdotto l'integrale definito con lo scopo principale di calcolare aree di figure piane del tipo

$$A = \{(x, y): \quad a \le x \le b, \quad 0 \le y \le f(x)\}, \tag{110.1}$$

dove f(x) è una funzione continua e non negativa nell'intervallo [a, b]. In tal caso risulta

$$\textit{area di } A = \int_a^b f(x)\,dx\,. \tag{110.2}$$

Più generalmente possiamo calcolare l'area di una regione T, come in figura 13.1, definita per mezzo di due funzioni continue f(x), g(x), dalle limitazioni seguenti

$$T = \{(x, y): \quad a \le x \le b,\ g(x) \le y \le f(x)\}. \tag{110.3}$$

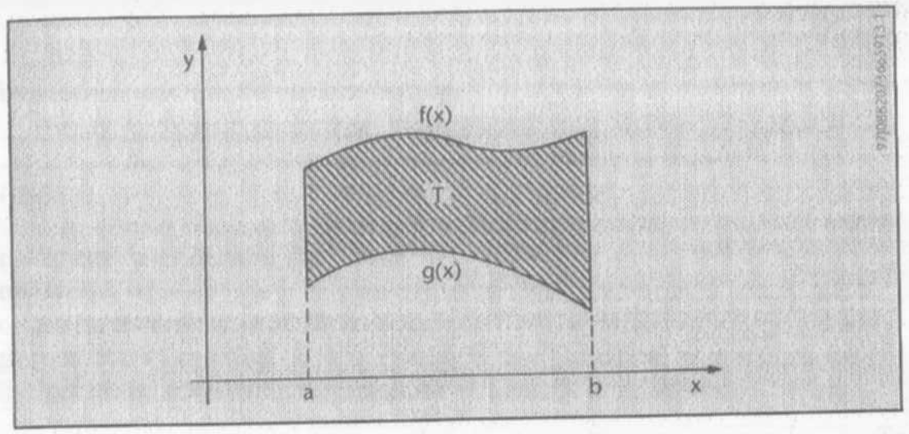


Figura 13.1

In tal caso l'area della regione T si calcola per sottrazione degli integrali definiti relativi rispettivamente ad f, g: cioè

$$\textit{area di } T = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx\,. \tag{110.4}$$

Come applicazione, calcoliamo l'area di un *cerchio* di raggio r. Come nel paragrafo 11, il cerchio C di centro l'origine e raggio r è individuato dalle limitazioni

$$C = \{(x, y): -r \le x \le r,\ -\sqrt{r^2 - x^2} \le y \le \sqrt{r^2 - x^2}\}. \tag{110.5}$$

La situazione è quella descritta in (110.3), con $g(x) = -\sqrt{r^2 - x^2}$, $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. In conformità con la formula (110.4), l'area del cerchio è data da

$$\begin{aligned} \textit{area di } C &= \int_{-r}^{r} [\sqrt{r^2 - x^2} - (-\sqrt{r^2 - x^2})]\,dx = \\ &= 2\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\,dx. \end{aligned} \tag{110.6}$$

Anche l'ultimo membro della relazione precedente ha un chiaro significato geometrico. Infatti, in base alla (110.2), rappresenta il doppio dell'area del semicerchio al di sopra dell'asse delle x.

Effettuiamo la sostituzione x = rt. Utilizzando la formula (109.14) con x = g(t) = rt, si ottiene

(110.7) $$\int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = \int_{-1}^{1} \sqrt{r^2 - r^2 t^2}\, r\, dt = r^2 \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt$$

e l'ultimo integrale, calcolato in (109.17), è uguale in $\pi/2$.

Riassumendo, abbiamo dimostrato che *l'area di un cerchio* di raggio r vale

(110.8) $$\textit{area di } C = 2 \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2}\, dx = 2\, r^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi\, r^2 .$$

Il lettore osservi che abbiamo già calcolato l'area del cerchio alla fine del paragrafo 47.

Possiamo calcolare l'area della regione piana racchiusa dall'*ellisse* di equazione

(110.9) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 ;$$

ricavando la y come nella (11.7), la regione E di cui vogliamo calcolare l'area è definita dalle limitazioni

(110.10) $$E = \{(x, y): -a \le x \le a,\ -\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} \le y \le \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\} ;$$

con lo stesso procedimento usato in precedenza per il cerchio, otteniamo che *l'area dell'ellisse* vale

(110.11) $$\textit{area di } E = \int_{-a}^{a} 2\,\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, dx = 2\, ab \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - t^2}\, dt = \pi ab.$$

111. Calcolo di volumi

Consideriamo un solido V che occupa una regione dello spazio ordinario a tre dimensioni. Fissiamo una retta ed un sistema di ascisse su di essa; chiamiamo tale retta asse delle x. Consideriamo l'insieme dei piani perpendicolari all'asse delle x. Ad ogni x associamo il piano che è perpendicolare alla retta data e che la incontra nel punto di ascissa x. Per ogni $x \in [a, b]$, ogni piano ha in comune con il solido V una sezione S(x), come in figura 13.2.

Dato che, per ogni $x \in [a, b]$, S(x) è una regione piana, possiamo supporre di conoscerne l'area in base al metodo del paragrafo precedente. Cioè supponiamo che sia definita la funzione che ad ogni $x \in [a, b]$ associa la quantità A(x), area della sezione piana S(x); cioè

(111.1) $$A(x) = \textit{area della sezione } S(x).$$

Supponiamo anche che A(x) sia una funzione continua in [a, b].

Ad esempio, se V è una sfera di raggio r e centro nell'origine dell'asse delle x, come in figura 13.2, poniamo $a = -r$, $b = r$; per ogni $x \in [-r, r]$ la regione piana S(x) è un cerchio; il raggio del cerchio S(x) si determina facilmente in base al teorema di Pitagora, ed è uguale a

$\sqrt{r^2 - x^2}$. Quindi in questo esempio risulta $A(x) = \pi(r^2 - x^2)$. Nella figura 13.3 è riportato il grafico della funzione A(x), che nel nostro esempio è una parabola.

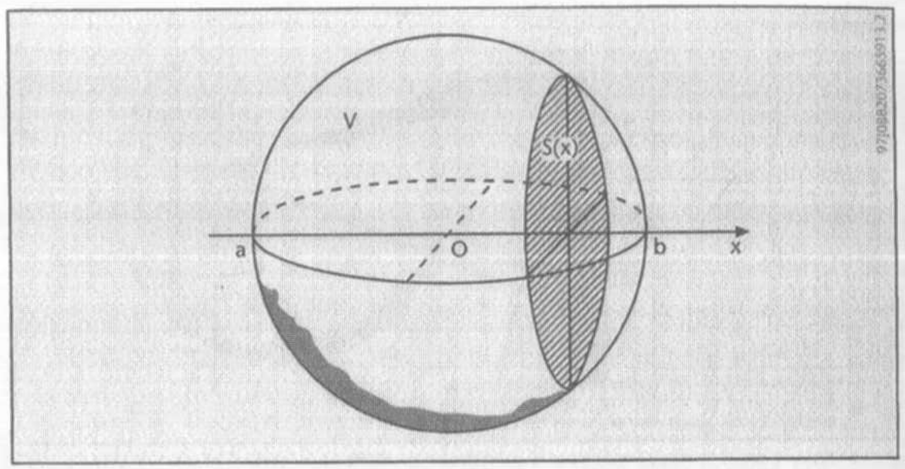


Figura 13.2

Consideriamo ora le somme integrali della funzione A(x) nell'intervallo [a, b]. Ad esempio, limitiamoci alle somme integrali inferiori. Fissiamo una partizione P dell'intervallo [a, b], e sia $[x_{k-1}, x_k]$ un generico intervallo della partizione. In figura 13.4 è disegnato il rettangolo, avente come base l'intervallo $[x_{k-1}, x_k]$, relativo alla somma integrale inferiore di A(x), ed è anche disegnata una interpretazione geometrica relativa al solido V.

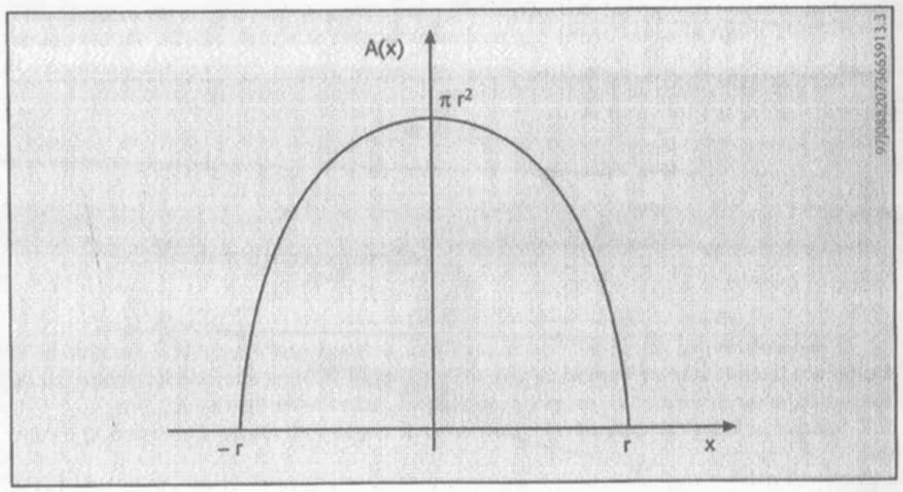


Figura 13.3

In figura 13.4, al rettangolo di area $A(x_k)(x_k - x_{k-1})$ corrisponde il cilindro che ha per base un cerchio di area $A(x_k)$ e la cui altezza vale $(x_k - x_{k-1})$. Cioè ad ogni rettangolo di una certa area corrisponde un cilindro di pari volume.

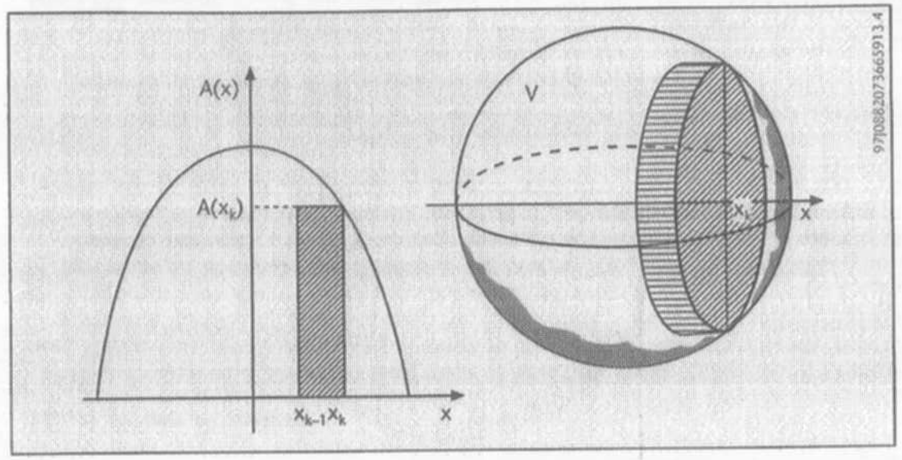


Figura 13.4

Ad ogni somma integrale relativa alla funzione A(x) nell'intervallo [a, b], corrisponde un solido costituito dalla unione di un numero finito di cilindri, e tale unione è una approssimazione del solido V. È quindi naturale che il volume di V sia uguale all'integrale della funzione A(x) nell'intervallo [a, b], cioè

$$\text{(111.2)} \qquad \textit{volume di } V = \int_a^b A(x)\,dx\,.$$

Nel caso della sfera di raggio r otteniamo

$$\text{(111.3)} \qquad \begin{aligned} \textit{volume della sfera} &= \int_{-r}^{r} A(x)\,dx = \int_{-r}^{r} \pi(r^2 - x^2)\,dx = \\ &= \pi\left[r^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_{x=-r}^{x=r} = \pi\left[r^3 - \frac{r^3}{3} - \left(-r^3 + \frac{r^3}{3}\right)\right] = \frac{4}{3}\pi\, r^3\,. \end{aligned}$$

È particolarmente semplice il caso in cui V è un *solido di rotazione*, cioè il contorno di V è ottenuto facendo ruotare intorno all'asse delle x il grafico di una funzione f(x), come per la sfera raffigurata in figura 13.2, o, più generalmente, come nella figura 13.5.

In tal caso la regione piana S(x) è un cerchio di raggio f(x). Quindi l'area di S(x) è data da

$$\text{(111.4)} \qquad A(x) = \pi[f(x)]^2\,;$$

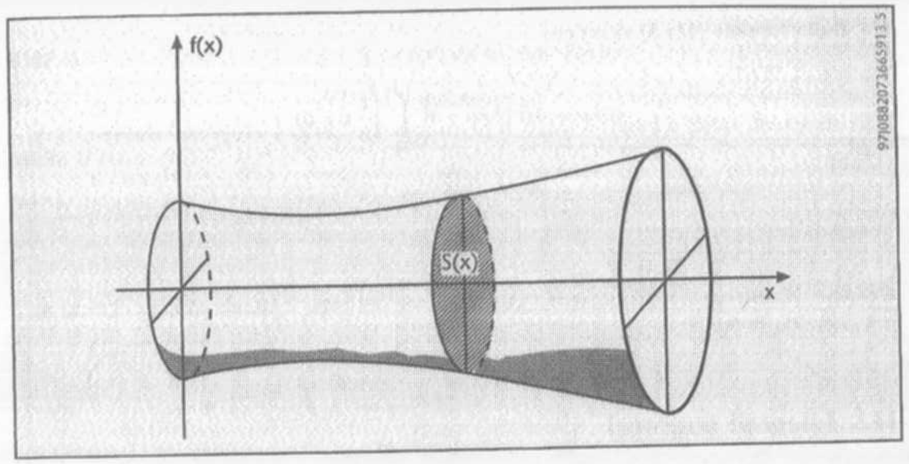


Figura 13.5

in corrispondenza abbiamo la formula che esprime il *volume di un solido di rotazione*:

$$\text{(111.5)} \qquad \pi \int_a^b [f(x)]^2\,dx\,.$$

Nel caso della sfera di raggio r, essendo $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, otteniamo lo stesso risultato di (111.3).

Per mezzo della formula (111.5) possiamo calcolare il volume di un *cono circolare retto*, di altezza h, ed avente per base un cerchio di raggio r. Tale cono può essere ottenuto facendo ruotare intorno all'asse delle x la retta di equazione y = (r/h)x, come in figura 13.6.

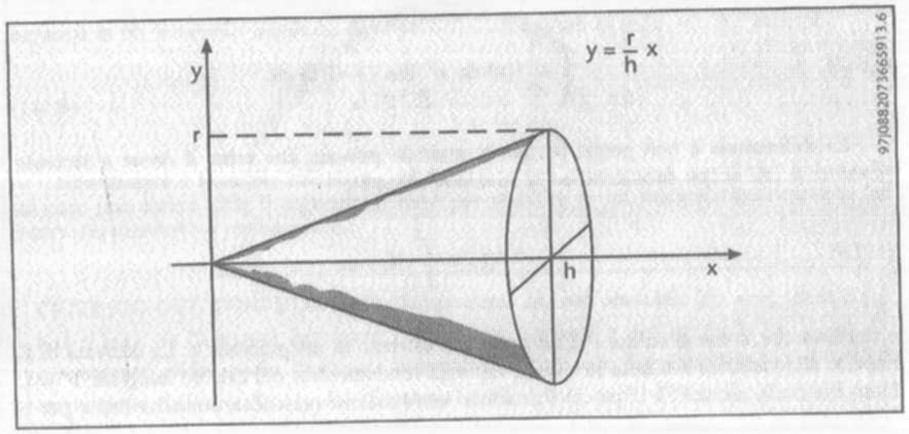


Figura 13.6

Dalla formula (111.5) si ottiene

$$\text{(111.6)} \qquad \begin{aligned} \textit{volume del cono} &= \pi \int_0^h \left(\frac{r}{h}\,x\right)^2 dx = \\ &= \pi \frac{r^2}{h^2} \int_0^h x^2\, dx = \pi \frac{r^2}{h^2} \cdot \frac{h^3}{3} = \frac{1}{3}\pi\, r^2\, h\,; \end{aligned}$$

abbiamo dimostrato il fatto ben noto, che il volume del cono è uguale all'area di base πr^2, per l'altezza, diviso 3.

112. Integrali impropri

Nei paragrafi precedenti abbiamo studiato l'integrale definito di una funzione limitata in un intervallo chiuso e limitato [a, b]. Nelle applicazioni è utile considerare anche integrali come i seguenti:

$$\text{(112.1)} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx; \qquad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx.$$

Tali integrali non rientrano nei casi già trattati; infatti nel primo caso l'integrale è esteso ad un intervallo illimitato; nel secondo caso la funzione integranda non è limitata per $x \to 0^+$. Integrali come quelli in (112.1) prendono il nome di *integrali impropri*.

Per definire il valore degli integrali impropri, consideriamo funzioni che, oltre ad essere *continue* all'interno dell'intervallo preso in considerazione, sono anche *non negative*. Consideriamo preliminarmente l'integrale improprio esteso ad un intervallo illimitato $[a, +\infty)$; diamo la seguente definizione:

$$\text{(112.2)} \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)\, dx.$$

La definizione è ben posta, perché è possibile provare che *esiste il limite a secondo membro*; a tale scopo consideriamo la funzione integrale

$$\text{(112.3)} \qquad F(b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

e notiamo che, come al solito, F è funzione dell'estremo di integrazione b. La derivata di F rispetto alla variabile b è nota in base al teorema fondamentale del calcolo integrale: $F' = f$. Dato che $f \geq 0$, anche $F' \geq 0$; perciò F, essendo una funzione crescente, ammette limite per $b \to +\infty$. È dunque lecito definire, come in (112.2)

$$\text{(112.4)} \qquad \int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} F(b).$$

L'integrale improprio è detto *convergente* se il limite è finito, è detto *divergente* se il limite è $+\infty$.

Riprendendo il primo integrale in (112.1), risulta

$$\text{(112.5)} \qquad \begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\, dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}\, dx = \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1. \end{aligned}$$

Più generalmente, per ogni $p \neq 1$, possiamo considerare l'integrale:

$$\text{(112.6)} \qquad \begin{aligned} \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx &= \lim_{b \to +\infty} \int_1^b x^{-p}\, dx = \\ &= \lim_{b \to +\infty} \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^b = \lim_{b \to +\infty} \left(\frac{b^{1-p}}{1-p} + \frac{1}{p-1}\right). \end{aligned}$$

L'integrale improprio converge o diverge a secondo che l'esponente p sia maggiore o minore di 1; infatti:

$$\text{(112.7)} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^p}\, dx = \begin{cases} 1/(p-1) & \textit{se} \quad p > 1 \\ +\infty & \textit{se} \quad p < 1 \end{cases}.$$

In modo analogo si definisce l'integrale improprio di una funzione *continua e non negativa* in un intervallo illimitato del tipo $(-\infty, a]$, oppure $(-\infty, +\infty)$. Ad esempio:

$$\text{(112.8)} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to +\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\, dx\,.$$

Non sempre è possibile calcolare esplicitamente una primitiva di una data funzione. In tal caso può essere utile il seguente criterio per stabilire se un integrale improprio su un intervallo illimitato è convergente.

CRITERIO DEL CONFRONTO. — *Supponiamo che nell'intervallo* $[a, +\infty)$ *risulti* $0 \leq f(x) \leq g(x)$. *Se l'integrale improprio relativo alla funzione* g *nell'intervallo* $[a, +\infty)$ *è convergente, allora anche l'integrale improprio relativo alla funzione* f *in* $[a, +\infty)$ *è convergente. Se invece l'integrale relativo ad* f *è divergente, anche l'integrale relativo a* g *è divergente.*

Dimostrazione: per la proprietà di confronto (99.11) risulta

$$\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx. \tag{112.9}$$

Calcoliamo il limite per $b \to +\infty$. Esiste il limite di entrambi i membri. Se il limite a secondo membro è finito, anche il limite a primo membro deve risultare finito. Se invece il limite del primo membro è infinito, anche il limite del secondo membro deve essere $+\infty$.

Ad esempio, verifichiamo che il seguente integrale improprio, che sarà studiato più estesamente nel paragrafo successivo, è convergente:

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx < +\infty. \tag{112.10}$$

Naturalmente l'integrale (112.10) è convergente se e soltanto se è convergente l'analogo integrale esteso all'intervallo $[1, +\infty)$, invece che $[0, +\infty)$; infatti i due integrali differiscono fra loro dell'integrale definito su $[0, 1]$ dalla funzione data. Per $x \in [1, +\infty)$ risulta $1 \le x$, e quindi

$$f(x) = e^{-x^2} \le e^{-x^2}\,x = g(x), \qquad \forall x \in [1, +\infty). \tag{112.11}$$

La funzione a destra ha il vantaggio di avere una primitiva facilmente calcolabile; risulta

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} e^{-x^2}\,x\,dx &= \lim_{b\to+\infty}\int_1^b e^{-x^2}\,x\,dx = \lim_{b\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_1^b = \\ &= \lim_{b\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-b^2}+\frac{1}{2}e^{-1}\right) = \frac{1}{2e}.\end{aligned} \tag{112.12}$$

Perciò l'integrale improprio relativo alla funzione $g(x)$ nell'intervallo $[1, +\infty)$ è convergente. Per il criterio del confronto anche l'integrale improprio della funzione $f(x)$ è convergente; cioè vale la (112.10).

In modo analogo si procede per l'integrale improprio, esteso ad un intervallo $[a, b]$, di una funzione che non è continua ad un estremo di integrazione, ad esempio all'estremo a. Supponiamo che f sia una funzione *continua e non negativa* nell'intervallo $(a, b]$; definiamo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{h\to 0^+}\int_{a+h}^b f(x)\,dx. \tag{112.13}$$

Come in precedenza si verifica che l'integrale definito a secondo membro è monotòno rispetto ad h, quindi esiste il limite per $h \to 0^+$. Se il limite è finito, l'integrale improprio (112.13) si dice *convergente*, altrimenti si dice *divergente*.

Lasciamo al lettore la cura di formulare un criterio di confronto per questo tipo di integrali impropri.

A titolo di esempio, calcoliamo per ogni $p \ne 1$, l'integrale improprio

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx &= \lim_{h\to 0^+}\int_h^1 x^{-p}\,dx = \\ &= \lim_{h\to 0^+}\left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_h^1 = \lim_{h\to 0^+}\left(\frac{1}{1-p}-\frac{h^{1-p}}{1-p}\right).\end{aligned} \tag{112.14}$$

L'integrale improprio converge o diverge a secondo che p sia minore o maggiore di 1; infatti:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}\,dx = \begin{cases} 1/(1-p) & se \quad p < 1 \\ +\infty & se \quad p > 1 \end{cases}. \tag{112.15}$$

In particolare il secondo integrale dell'esempio iniziale (112.1) è convergente e si ottiene dal conto precedente per $p = 1/2$:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2. \tag{112.16}$$

113. La funzione gaussiana

La *funzione gaussiana*, così chiamata dal nome del matematico tedesco C.F. Gauss, vissuto tra il 1777 e il 1855, è la funzione

$$f(x) = e^{-x^2}. \tag{113.1}$$

Allo scopo di disegnarne il grafico, cominciamo con l'osservare che

$$\lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2} = 0. \tag{113.2}$$

Quindi l'asse x è un asintoto orizzontale. Inoltre la funzione, essendo positiva per ogni x, è al di sopra del suo asintoto.

Calcoliamo la derivata: $f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$, è positiva per $x < 0$, è negativa per $x > 0$; quindi il punto $x = 0$ è di massimo. Per la derivata seconda si ha:

$$f''(x) = -2\,e^{-x^2} + 4\,x^2\,e^{-x^2} = 2\,e^{-x^2}\,(2\,x^2 - 1). \tag{113.3}$$

La derivata seconda è negativa nell'intervallo $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$. In tale intervallo la funzione è concava; al di fuori di tale intervallo la funzione è convessa. Si ottiene il grafico come in figura 13.7.

Per disegnare il grafico con precisione è utile notare che $\sqrt{2}/2$ è circa 0.7, mentre $e^{-1/2}$ vale circa 0.6. Inoltre la funzione si avvicina rapidamente al suo asintoto; ad esempio risulta $f(2) = 0.18...$, $f(3) = 0.0001...$

La funzione gaussiana ha un'importanza fondamentale in calcolo delle probabilità. A tale proposito si noti che il grafico della funzione gaussiana è simile al profilo «*a campana*» della funzione di probabilità rappresentata nella figura 8.5 del paragrafo 67. In calcolo delle probabilità una delle informazioni principali sulla funzione gaussiana è il valore del suo integrale improprio in $(-\infty, +\infty)$. Dimostreremo che risulta

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}\,. \tag{113.4}$$

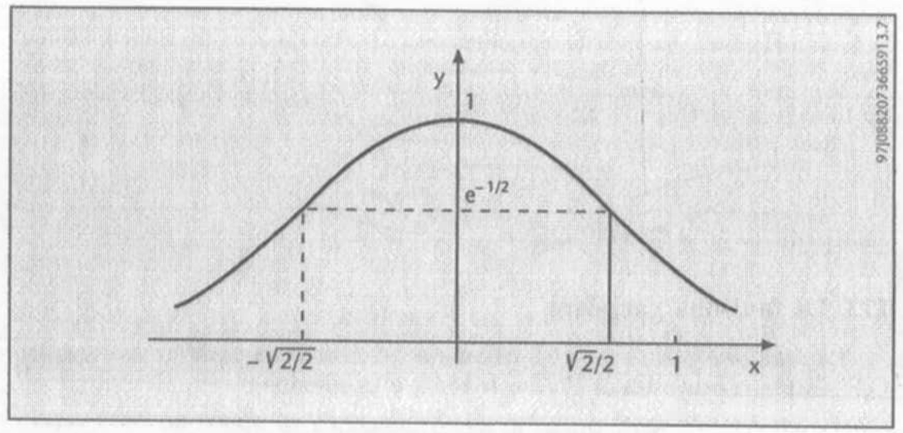


Figura 13.7

Notiamo che, generalizzando la (113.1), è gaussiana anche la funzione seguente, per ogni scelta dei parametri A, B, x_0, con A, B positivi:

$$f(x) = A\, e^{-B(x - x_0)^2}\,. \tag{113.5}$$

La funzione gaussiana in (113.5) è simmetrica rispetto al punto x_0. Il grafico di tale funzione si ottiene dal grafico in figura 13.7, tenendo conto che i parametri A, B agiscono come un cambio di scala rispettivamente sugli assi y, x. In figura 13.8 sono riportati i grafici corrispondenti a due diverse scelte dei parametri A, B, x_0.

Nelle applicazioni al calcolo delle probabilità è interessante scegliere i parametri A, B in modo che l'integrale improprio della funzione f(x) su

$(-\infty, +\infty)$ sia uguale ad 1 (questa proprietà è analoga alla (67.5) per la funzione *distribuzione binomiale*). Con la sostituzione $t = \sqrt{B}\,(x - x_0)$, in base al risultato (113.4), possiamo calcolare l'integrale improprio:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} A\, e^{-B(x - x_0)^2}\, dx = \tag{113.6}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} A\, e^{-t^2} \frac{1}{\sqrt{B}}\, dt = \frac{A}{\sqrt{B}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = A\sqrt{\frac{\pi}{B}}\,.$$

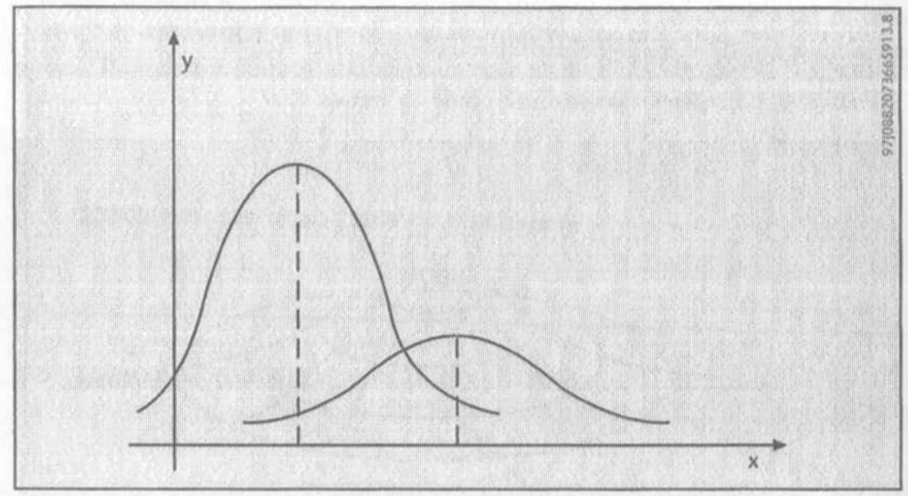


Figura 13.8

Dato che $A\sqrt{\pi/B} = 1$ se e solo se $A = \sqrt{B/\pi}$, con questa scelta del parametro A, per ogni $B > 0$ otteniamo:

$$f(x) = \sqrt{\frac{B}{\pi}}\; e^{-B(x - x_0)^2} \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 1. \tag{113.7}$$

In luogo dei simboli B, x_0, spesso si utilizzano i simboli σ, μ, con $\sigma > 0$, ponendo

$$x_0 = \mu, \qquad B = \frac{1}{2\,\sigma^2}\,; \tag{113.8}$$

si considera quindi la seguente funzione gaussiana, che ha integrale improprio, esteso all'intervallo $(-\infty, +\infty)$, uguale ad 1:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}; \tag{113.9}$$

la funzione f(x) in (113.9) prende anche il nome di *distribuzione gaussiana* (o *distribuzione normale*) *di probabilità*. Il numero μ è la *media* della distribuzione; il parametro σ prende il nome di *deviazione standard*. I valori $x = \mu \pm \sigma$ sono le ascisse dei punti di flesso della funzione f(x).

Rimane da calcolare l'integrale improprio (113.4). Dato che non è possibile esprimere in modo elementare una primitiva della funzione e^{-x^2}, occorre procedere con un metodo diverso. Partiamo dal grafico della funzione e^{-x^2} in figura 13.7 e facciamo ruotare tale grafico intorno all'asse y; otteniamo un solido di rotazione come in figura 13.9.

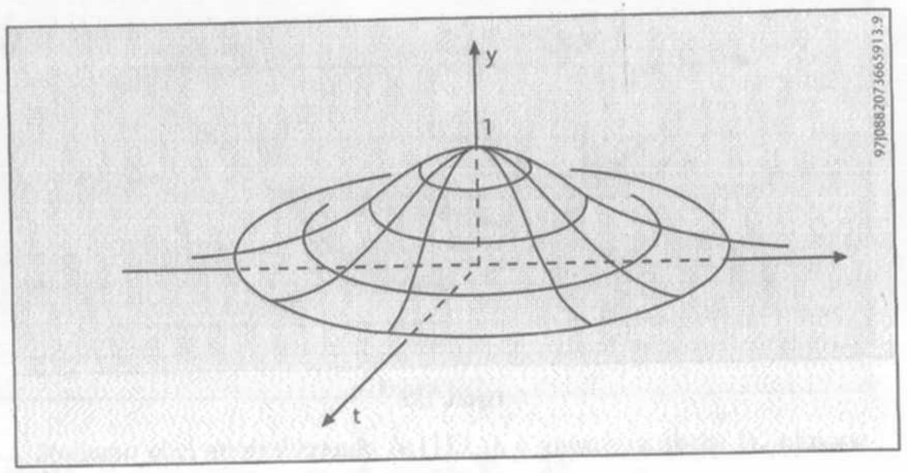


Figura 13.9

Per dare un'espressione analitica alla funzione di due variabili rappresentata in figura 13.9, osserviamo che ad ogni numero reale x positivo (sull'asse x delle ascisse) abbiamo associato tutti quei punti del piano di base di coordinate (x, t), che sono sulla circonferenza di centro l'origine e raggio x. Cioè, in base al teorema di Pitagora, dobbiamo sostituire ad x la quantità $\sqrt{x^2 + t^2}$. Quindi nella figura 13.9 è rappresentato il grafico della funzione di due variabili

$$f(x, t) = e^{-(x^2 + t^2)}. \tag{113.10}$$

Proponiamoci di calcolare il volume del solido V a forma di campana, rappresentato in figura 13.9, e delimitato analiticamente dalle condizioni:

$$V = \{(x, t, y): \quad 0 \le y \le e^{-(x^2 + t^2)}\}. \tag{113.11}$$

Con il metodo descritto nel paragrafo 111, per ogni x fissato indichiamo con S(x) la sezione piana comune al solido V e al piano, di ascissa x, perpendicolare all'asse x, come in figura 13.10.

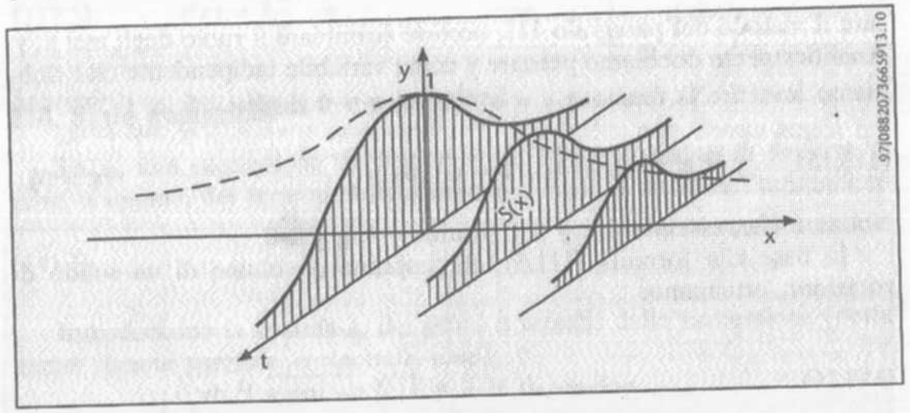


Figura 13.10

Indichiamo con A(x) l'area di S(x); risulta

$$A(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2 + t^2)}\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \cdot e^{-t^2}\, dt; \tag{113.12}$$

notiamo che, essendo t la variabile di integrazione, la quantità e^{-x^2} è costante rispetto a t; quindi può essere portata al di fuori del segno di integrale:

$$A(x) = e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = C\, e^{-x^2}; \tag{113.13}$$

abbiamo indicato con C il valore incognito dell'integrale da calcolare. In base alla formula (111.2) otteniamo

$$\textit{volume di } V = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} C\,e^{-x^2}\,dx =$$

(113.14)

$$= C \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = C^2 .$$

Ora teniamo conto del fatto che V è un solido di rotazione. Per applicare il metodo del paragrafo 111, occorre scambiare il ruolo degli assi x, y. Analiticamente dobbiamo pensare y come variabile indipendente cioè dobbiamo invertire la funzione $y = e^{-x^2}$. Per $x > 0$ risulta:

(113.15) $$y = e^{-x^2} \iff x = \sqrt{-\log y} \qquad (x > 0).$$

Notiamo che, essendo $0 < y \leq 1$, risulta $-\log y \geq 0$.

In base alla formula (111.5), che esprime il volume di un solido di rotazione, otteniamo:

(113.16) $$\textit{volume di } V = \pi \int_0^1 [\sqrt{-\log y}\,]^2\,dy .$$

L'integrale (113.16) è improprio, perché la funzione $-\log y$ tende a $+\infty$ per $y \to 0$. Ricordando l'integrale indefinito (108.8) otteniamo

$$\textit{volume di } V = \lim_{h\to 0^+} \pi \int_h^1 (-\log y)\,dy =$$

(113.17)

$$= \lim_{h\to 0^+} \pi[y - y\log y\,]_h^1 = \pi - \lim_{h\to 0^+} \pi(h - h\log h) = \pi.$$

Dalle (113.14), (113.17) ricaviamo ciò che volevamo dimostrare:

(113.18) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = C = \sqrt{\textit{volume di } V} = \sqrt{\pi} .$$

CAPITOLO 14

SERIE

114. Serie numeriche

Sia a_n una successione di numeri reali. Ci proponiamo di definire la *serie*, o somma, dei termini della successione, cioè di definire l'espressione

(141.1) $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$$

Introduciamo la somma s_n dei primi n termini della successione (detta anche *somma parziale*, o *ridotta n-sima*):

(114.2) $$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Ricordiamo che il simbolo Σ, di sommatoria, è stato introdotto nel paragrafo 88. È naturale definire l'espressione (114.1) come limite, per $n \to +\infty$, della successione s_n delle somme parziali. Cioè poniamo per definizione

(114.3) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

Il simbolo a primo membro si legge: somma, o serie, per k che va da 1 a $+\infty$, di a_k. Se il limite per $n \to +\infty$ di s_n esiste ed è un numero finito, si dice che la serie è *convergente*. Se il limite di s_n vale $+\infty$ (oppure $-\infty$), si dice che la serie è *divergente*. Se non esiste il limite per $n \to +\infty$ di s_n si dice che la serie è *indeterminata*; naturalmente, la somma della serie a primo membro della (114.3) è definita solo nel caso in cui la serie è regolare.

Il *carattere* di una serie è la sua proprietà di essere *convergente*, o *divergente* oppure *indeterminata*.

A titolo di esempio consideriamo la serie seguente, *detta serie di Mengoli:*

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\dots \tag{114.4}$$

La somma s_n dei primi n termini della serie è data dalla formula (che si dimostra facilmente per induzione):

$$s_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}; \tag{114.5}$$

per $n\to+\infty$, s_n converge ad 1. Quindi la serie data è convergente e la somma vale

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}=\lim_{n\to+\infty}s_n=1. \tag{114.6}$$

Consideriamo ora la serie associata alla successione $a_n=(-1)^n$, cioè:

$$-1+1-1+\dots+(-1)^n+\dots \tag{114.7}$$

Per la successione s_n delle somme parziali otteniamo: $s_1=-1$; $s_2=0$; $s_3=-1$; $s_4=0$; ... La successione s_n non ha limite; quindi la serie (114.7) è indeterminata.

Si noti che l'esempio (114.7) di serie indeterminata è stato dato a partire dalla successione $a_n=(-1)^n$ che non converge a zero; questo è un motivo per escludere a priori che la serie converga, secondo la seguente:

PROPOSIZIONE. — *Se la serie* $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ *è convergente, allora la successione* a_n *tende a zero per* $n\to+\infty$.

Dimostrazione: indichiamo con s_n la successione delle somme parziali e con s la somma della serie. Essendo

$$s_{n+1}=s_n+a_{n+1}\,, \qquad \forall n\in\mathbf{N}, \tag{114.8}$$

risulta

$$\lim_{n\to+\infty}a_{n+1}=\lim_{n\to+\infty}s_{n+1}-\lim_{n\to+\infty}s_n=s-s=0. \tag{114.9}$$

115. Serie a termini non negativi

Diremo che una serie $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ è a *termini non negativi* se per ogni $n\in\mathbf{N}$ risulta $a_n\geq 0$. Diremo che una serie è a *termini positivi* se $a_n>0$ per ogni n.

La successione s_n delle somme parziali di una serie a termini non negativi è crescente. Infatti, dato che $a_{n+1}\geq 0$ per ogni n, risulta anche $s_{n+1}=s_n+a_{n+1}\geq s_n$. Quindi, in base al teorema sulle successioni monotòne (paragrafo 48), s_n non può essere indeterminata, ma ammette sicuramente limite (eventualmente uguale a $+\infty$). Abbiamo così dimostrato il seguente:

TEOREMA SULLE SERIE A TERMINI NON NEGATIVI. — *Una serie a termini non negativi non può essere indeterminata. È quindi convergente, oppure divergente.*

Ad esempio, in base al teorema sulle serie a termini non negativi ed alla proposizione del paragrafo precedente, è possibile affermare che

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k+1}=+\infty\,; \tag{115.1}$$

infatti, la serie data è a termini positivi, quindi può essere divergente a $+\infty$, oppure convergente. Ma non è convergente, perché la successione $a_n=n/(n+1)$, non tende a zero per $n\to+\infty$, ma tende a 1.

116. La serie geometrica

Per ogni numero reale x consideriamo la *serie geometrica*

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=1+x+x^2+\dots+x^n+\dots \tag{116.1}$$

Il numero x si dice *ragione* della serie geometrica.

Se x è positivo, la serie è a termini positivi; perciò, se $x>0$, la serie è convergente oppure divergente. Se $x\geq 1$, la successione $a_n=x^n$ non tende a zero; quindi, in base alla proposizione del paragrafo 114, la serie è divergente, cioè risulta

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=+\infty, \qquad \forall x\geq 1\,. \tag{116.2}$$

Fissato $x < 1$, calcoliamo la somma parziale s_n. Ricordando la formula (12.7), abbiamo

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}. \tag{116.3}$$

In accordo con la relazione di limite (47.1), per $n \to +\infty$, x^{n+1} tende a zero se $x \in (-1, 1)$, mentre non ha limite se $x \leq -1$. In corrispondenza otteniamo

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \begin{cases} 1/(1 - x), & \textit{se} \quad -1 < x < 1 \\ \textit{non esiste}, & \textit{se} \quad x \leq -1 \end{cases}. \tag{116.4}$$

Riassumendo, la serie geometrica è convergente se $|x| < 1$, divergente se $x \geq 1$, indeterminata se $x \leq -1$. Risulta inoltre:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1 - x}, \quad \textit{se} \quad -1 < x < 1. \tag{116.5}$$

117. La serie armonica

La serie seguente è detta *serie armonica*:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \tag{117.1}$$

Per stabilire il *carattere* di tale serie, cioè per stabilire se la serie data è convergente o divergente, osserviamo che:

$$x \geq k \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}. \tag{117.2}$$

Calcolando l'integrale definito nell'intervallo $[k, k + 1]$, otteniamo

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dx}{k} = \frac{1}{k} \int_k^{k+1} dx = \frac{1}{k}. \tag{117.3}$$

Consideriamo l'area della regione piana al di sotto del grafico della funzione $1/x$, per $k \leq x \leq k + 1$, e al di sopra dell'asse delle x. Nella relazione precedente abbiamo confrontato tale area con l'area del rettangolo disegnato in figura 14.1.

Sommando, per k che varia da 1 ad n, otteniamo

$$\sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}. \tag{117.4}$$

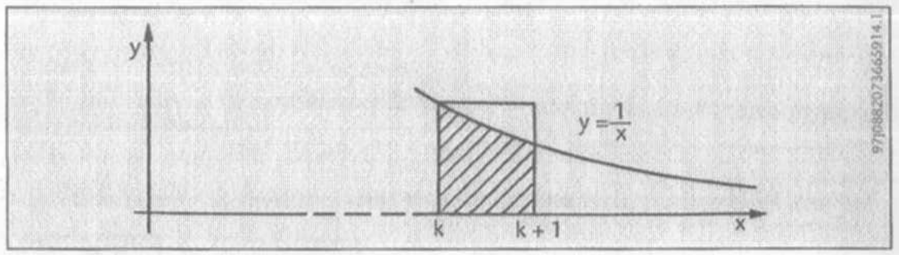


Figura 14.1

A secondo membro c'è la ridotta n-sima s_n della serie armonica. Sviluppiamo la somma a primo membro (utilizziamo la proprietà (97.1) di additività dell'integrale rispetto all'intervallo):

$$s_n \geq \sum_{k=1}^{n} \int_k^{k+1} \frac{dx}{x} = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} = \log(n + 1). \tag{117.5}$$

La successione $\log(n + 1)$ tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$; quindi anche la successione s_n tende a $+\infty$. Cioè *la serie armonica* (117.1) *è divergente*.

Data l'importanza dell'argomento, proponiamo una seconda dimostrazione della divergenza della serie armonica, senza far uso del calcolo integrale.

A tale scopo ricordiamo (paragrafo 49) che

$$a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \tag{117.6}$$

è una successione crescente, convergente al numero di Nepero e per $k \to +\infty$; abbiamo quindi

$$e \geq a_k = \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k, \qquad \forall k \in \mathbf{N}. \tag{117.7}$$

Dato che la funzione log x è crescente in $(0, +\infty)$, risulta $\log e \geq \log a_k$, per ogni $k \in \mathbf{N}$; cioè

$$1 = \log e \geq \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k = k \log\left(1 + \frac{1}{k}\right), \qquad \forall k \in \mathbf{N}, \tag{117.8}$$

da cui

$$\frac{1}{k} \geq \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \log(k+1) - \log k, \qquad \forall k \in \mathbf{N}. \tag{117.9}$$

Sommando per $k = 1, 2, \ldots, n$, otteniamo

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \\ &\geq [\log(n+1) - \log n] + [\log n - \log(n-1)] + \ldots + \\ &+ [\log 2 - \log 1] = \log(n+1) - \log 1 = \log(n+1). \end{aligned} \tag{117.10}$$

Si noti che, per altra via, si è ottenuta di nuovo la (117.5). Dato che la successione $\log(n + 1)$ diverge a $+\infty$ per $n \to +\infty$, anche la successione s_n delle somme parziali diverge a $+\infty$.

Consideriamo, per ogni valore del parametro positivo p, la seguente *serie armonica generalizzata*:

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \ldots + \frac{1}{n^p} + \ldots \tag{117.11}$$

Procediamo analogamente a come fatto in precedenza. Se $k \leq x \leq k + 1$, risulta

$$\frac{1}{(k+1)^p} \leq \frac{1}{x^p} \leq \frac{1}{k^p}, \qquad \forall x \in [k, k+1]. \tag{117.12}$$

Integriamo nell'intervallo $[k, k + 1]$ e sommiamo rispetto a k:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^p} \leq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^p}. \tag{117.13}$$

La somma a destra è la ridotta n-sima s_n; la somma a sinistra, a meno del primo termine (uguale ad 1), è la ridotta $(n + 1)$-sima. Quindi possiamo riscrivere la relazione precedente nella forma

$$s_{n+1} - 1 \leq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} \leq s_n. \tag{117.14}$$

Abbiamo già considerato il caso $p = 1$; distinguiamo ora i casi $p < 1$ e $p > 1$. Se $p < 1$ otteniamo

$$s_n \geq \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} = \left[\frac{x^{1-p}}{1-p}\right]_1^{n+1} = \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}; \tag{117.15}$$

dato che $1 - p > 0$, l'ultimo membro tende a $+\infty$ per $n \to +\infty$; quindi anche la successione s_n tende a $+\infty$. Pertanto la serie armonica generalizzata è divergente se $p < 1$.

Invece, se $p > 1$, dalla (117.14) otteniamo

$$s_{n+1} \leq 1 + \int_1^{n+1} \frac{dx}{x^p} = 1 + \frac{(n+1)^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p}; \tag{117.16}$$

dato che $1 - p < 0$, per $n \to +\infty$ la successione $(n + 1)^{1-p}$ tende a zero. Quindi la successione s_{n+1} (che ha limite perché la serie è a termini positivi) è convergente.

Riassumendo, abbiamo dimostrato che *la serie armonica generalizzata è convergente se* $p > 1$ ed *è divergente se* $0 < p \leq 1$. Naturalmente la serie (117.1) è divergente anche se $p \leq 0$, in quanto il suo termine n-simo non tende a zero.

118. Criteri di convergenza

Non sempre è semplice calcolare esplicitamente la somma di una serie (per questo spesso si ricorre a metodi numerici). È più facile ed è sempre interessante poter stabilire a priori il carattere di una serie, cioè stabilire se una data serie è convergente oppure no. Considereremo sempre in questo paragrafo serie a termini non negativi.

CRITERIO DEL CONFRONTO. — *Siano* a_n, b_n *due successioni tali che* $0 \leq a_n \leq b_n$ *per ogni* n. *Si ha*:

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k < +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty; \tag{118.1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = +\infty. \tag{118.2}$$

Dimostrazione: indichiamo con s_n, t_n le ridotte n-sime delle due serie relative rispettivamente alle successioni a_n, b_n. Per le ipotesi fatte risulta $s_n \leq t_n$ per ogni n. Inoltre le due ridotte s_n, t_n hanno limite per $n \to +\infty$, dato che le serie date sono a termini non negativi. Perciò, se il limite di t_n è finito anche il limite di s_n è finito, cioè vale la (118.1). Analogamente, se il limite di s_n è $+\infty$, anche t_n diverge a $+\infty$, cioè vale la (118.2).

Osserviamo esplicitamente che, nelle ipotesi del teorema di confronto, è sufficiente assumere che $a_n \leq b_n$ per n grande, cioè per ogni $n > \nu$, con ν fissato.

CRITERIO DEGLI INFINITESIMI. — *Sia* a_n *una successione a termini non negativi. Supponiamo che, fissato un numero reale* p, *esista il limite:*

(118.3) $$\ell = \lim_{n \to +\infty} n^p a_n .$$

Si ha:

(118.4) $$\ell \neq +\infty, \quad p > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty ;$$

(118.5) $$\ell \neq 0, \quad p \leq 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty.$$

Dimostrazione: nella condizione (118.4) con il limite ℓ finito, per la definizione di limite di successione (con $\varepsilon = 1$), esiste un indice ν tale che

(118.6) $$n^p a_n < \ell + 1, \qquad \forall n > \nu.$$

Per tali n risulta quindi $0 \leq a_n < (\ell + 1)/n^p$. Applichiamo il criterio di confronto (118.1), con $b_n = (\ell + 1)/n^p$. Dato che $p > 1$, la serie armonica generalizzata relativa a b_n è convergente: quindi anche la serie relativa ad a_n converge.

Nella condizione (118.5) con $\ell \neq 0$, esiste un indice ν tale che (per semplicità consideriamo $\ell \in \mathbf{R}$)

(118.7) $$n^p a_n > \ell/2, \qquad \forall n > \nu .$$

Procedendo in modo analogo a come fatto in precedenza otteniamo la (118.5).

A titolo di esempio, possiamo affermare che la serie

(118.8) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k + 1}{k^5 + 4k + 3}$$

è convergente. Ciò segue dal criterio (118.4) con $p = 4$; infatti risulta

(118.9) $$\lim_{n \to +\infty} n^4 \frac{2n + 1}{n^5 + 4n + 3} = 2.$$

Allo stesso modo, applicando il criterio (118.4) con $p = 2$, si verifica che la serie seguente è convergente:

(118.10) $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{k}\right) < +\infty.$$

CRITERIO DEL RAPPORTO. — *Sia* a_n *una successione a termini positivi. Supponiamo che esista il limite*

(118.11) $$\ell = \lim_{n \to +\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} .$$

Allora si ha:

(118.12) $$\ell < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k < +\infty ;$$

(118.13) $$\ell > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = +\infty.$$

Dimostrazione: supponiamo $\ell < 1$ e scegliamo un numero x tale che $\ell < x < 1$. In base alla definizione di limite di successione (con $\varepsilon = x - \ell$), esiste un indice ν per cui

(118.14) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} < x, \qquad \forall n \geq \nu.$$

Per semplicità supponiamo che l'indice ν sia uguale ad 1. Abbiamo allora $a_2 < a_1 x$; $a_3 < a_2 x < a_1 x^2$,..., in generale:

(118.15) $$a_n < a_1 x^{n-1} .$$

La serie associata alla successione $b_n = a_1 x^n$ è la serie geometrica di ragione x (il fattore a_1, comune a tutti i termini, non influenza il carattere della serie geometrica). Dato che $0 < x < 1$, la serie associata a b_n è convergente.

Per il criterio del confronto, anche la serie associata alla successione a_n è convergente; quindi la (118.12) è provata.

Se $\ell > 1$, esiste un indice ν per cui

(118.16) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \qquad \forall n > \nu.$$

Quindi la successione a_n è strettamente crescente per $n > \nu$, e perciò non può convergere a zero; in base alla proposizione del paragrafo 114, la serie data è divergente (essendo a termini positivi).

Come esempio consideriamo la *serie esponenziale*

(118.17) $$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

con x numero reale fissato. Ponendo $a_n = x^n/n!$, se $x > 0$ si trova

(118.18) $$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{x^n} = \frac{x}{n+1} ;$$

la quantità a_{n+1}/a_n tende a zero per $n \to +\infty$; in base al criterio del rapporto, la serie esponenziale è convergente per $x > 0$. Dimostreremo nel paragrafo 122 che la serie esponenziale è convergente per ogni x, e che la somma della serie vale e^x.

Talvolta è utile anche il criterio seguente, detto della radice, che si dimostra confrontando la serie data con la serie geometrica, analogamente a quanto è stato fatto per dimostrare il criterio del rapporto.

CRITERIO DELLA RADICE. — *Sia* a_n *una successione a termini non negativi. Supponiamo che esista il limite*

(118.19) $$\ell = \lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a_n} .$$

Allora valgono le stesse conclusioni (118.12), (118.13) *del criterio precedente.*

Dimostrazione: nell'ipotesi $\ell < 1$, sia $\varepsilon > 0$ tale che $\ell + \varepsilon < 1$. Per definizione di limite, esiste $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\sqrt[n]{a_n} < \ell + \varepsilon$ per $n \geq \nu$, ovvero tale che $a_n < (\ell + \varepsilon)^n$ per $n \geq \nu$. Poiché la serie geometrica di ragione $\ell + \varepsilon < 1$ converge, anche la serie di termine generale a_n converge, per il criterio del confronto.

Se $\ell > 1$, sia $\nu \in \mathbf{N}$ tale che $\sqrt[n]{a_n} > 1$, cioè $a_n > 1$ per ogni $n > \nu$. Poiché a_n non può essere infinitesima, per la proposizione del paragrafo 114 la serie non è convergente e dunque è divergente (in quanto a termini non negativi).

119. Serie alternate

Nei paragrafi precedenti abbiamo considerato essenzialmente serie a termini non negativi. Nel presente paragrafo eliminiamo tale restrizione; in particolare, consideriamo *serie alternate*, cioè serie del tipo

(119.1) $$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

con $a_n > 0$. Proveremo, ad esempio, che la *serie armonica alternata*

(119.2) $$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \dots$$

è convergente.

Vale il seguente criterio di convergenza di cui non diamo la dimostrazione

CRITERIO DI CONVERGENZA PER LA SERIE ALTERNATE. — *Sia* $a_n \geq 0$ *una successione decrescente ed infinitesima. Allora la serie* (119.1) *è convergente. Inoltre, detta* s *la somma,* s_n *la ridotta n-sima, si ha*

(119.3) $$|s_n - s| \leq a_{n+1} , \qquad \forall n \in \mathbf{N}.$$

Talvolta la (119.3) viene descritta in maniera espressiva affermando che *l'errore che si commette sostituendo alla somma della serie la somma dei primi* n *termini è maggiorato in valore assoluto, dal primo termine trascurato.*

La serie armonica alternata

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + \dots \tag{119.4}$$

verifica le ipotesi del precedente criterio e perciò converge. Domandiamoci quanti termini dobbiamo sommare in modo che la somma parziale s_n differisca dalla somma s della serie per meno di 1/100. In altre parole, vogliamo determinare n in modo che $|s - s_n| \le 1/100$. A tale scopo, per la (119.3), basterà determinare n in modo che $a_{n+1} \le 1/100$, cioè $1/(n+1) \le 1/100$, che è soddisfatta per $n \ge 99$.

120. Convergenza assoluta

Una serie

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots \tag{120.1}$$

si dice *assolutamente convergente* se risulta convergente la serie dei valori assoluti:

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots \tag{120.2}$$

In generale una serie convergente non necessariamente è assolutamente convergente, come si vede pensando alla serie armonica alternata. Il viceversa sussiste, grazie al seguente

TEOREMA. — *Una serie assolutamente convergente è convergente.*

Proponiamo due diverse dimostrazioni; la prima, classica, fa uso del criterio di convergenza di Cauchy (paragrafo 64).

Dimostrazione (*primo metodo*): indichiamo con s_n la successione delle ridotte della serie (120.1). A norma del criterio di convergenza di Cauchy del paragrafo 64, basterà dimostrare che s_n è una successione di Cauchy, cioè che, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste ν tale che

$$|s_p - s_q| = \left|\sum_{k=1}^{p} a_k - \sum_{k=1}^{q} a_k\right| < \varepsilon, \qquad \forall p, q \ge \nu, \tag{120.3}$$

o, ciò che è lo stesso, che, per ogni $q \ge \nu$ e $r \in \mathbf{N}$:

$$\left|\sum_{k=1}^{q+r} a_k - \sum_{k=1}^{q} a_k\right| = |a_{q+1} + a_{q+2} + \dots + a_{q+r}| < \varepsilon. \tag{120.4}$$

Fissato $\varepsilon > 0$, sia ν tale che, per ogni $q \ge \nu$ e $r \in \mathbf{N}$:

$$|a_{q+1}| + |a_{q+2}| + \dots + |a_{q+r}| < \varepsilon; \tag{120.5}$$

ciò si verifica perché la successione $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|$ è convergente per ipotesi e, perciò, di Cauchy. Dalla (120.5), essendo

$$|a_{q+1} + \dots + a_{q+r}| \le |a_{q+1}| + \dots + |a_{q+r}|, \tag{120.6}$$

segue la (120.4) per ogni $q \ge \nu$ e $r \in \mathbf{N}$.

Dimostrazione (*secondo metodo*): la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + |a_k|) \tag{120.7}$$

è convergente per il criterio del confronto, essendo

$$0 \le a_k + |a_k| \le 2|a_k|, \qquad \forall k \in \mathbf{N}, \tag{120.8}$$

ed essendo la serie di termine generale $|a_k|$, per ipotesi, convergente. Per ogni $n \in \mathbf{N}$, si ha

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k + |a_k|) - \sum_{k=1}^{n} |a_k| \tag{120.9}$$

ed il limite per $n \to +\infty$ del primo membro esiste finito perché esiste finito il limite dei singoli addendi del secondo membro.

121. Proprietà commutativa delle serie

Data la serie

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots, \tag{121.1}$$

diremo che la serie

$$b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots \tag{121.2}$$

è ottenuta *riordinando* i termini della serie (121.1), se esiste un'applicazione invertibile $i : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ tale che

$$b_n = a_{i(n)}, \qquad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{121.3}$$

In tal caso si può anche affermare che la serie data è ottenuta riordinando i termini della serie (121.2), pur di ricorrere all'applicazione inversa i^{-1}.

Ci domandiamo se due serie, ottenute l'una dall'altra per riordinamento dei termini, abbiamo lo stesso carattere, cioè, in altre parole, se sussiste una specie di *proprietà commutativa* per le serie.

In proposito sussiste il seguente

TEOREMA. — *Se la serie* (121.1) *è a termini non negativi ed è convergente (rispettivamente, divergente) allora anche la serie* (121.2) *è convergente verso la stessa somma (rispettivamente, divergente).*

Dimostrazione: a norma del teorema sul limite delle successioni monotone del paragrafo 60, basta provare che

(121.4) $$\sup_n (a_{i(1)} + \dots + a_{i(n)}) = \sup_n (a_1 + \dots + a_n),$$

ovvero, per le proprietà dell'estremo superiore, che valgono le condizioni

(121.5) $$a_{i(1)} + \dots + a_{i(n)} \le \sup_n (a_1 + \dots + a_n), \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

(121.6) $$\forall x < \sup_n (a_1 + \dots + a_n), \quad \exists m \in \mathbf{N} : a_{i(1)} + \dots + a_{i(m)} > x.$$

Per provare (121.5), poniamo $j(n) = \max\{i(1),\dots,i(n)\}$; allora si ha

(121.7) $$a_{i(1)} + \dots + a_{i(n)} \le a_1 + \dots + a_{j(n)} \le \sup_n (a_1 + \dots + a_n).$$

Per provare (121.6), indichiamo con k un numero naturale tale che $a_1 + \dots + a_k > x$ e con $n_1,\dots,n_k$ i numeri naturali tali che

(121.8) $$i(n_1) = 1, \dots, i(n_k) = k.$$

Posto $m = \max\{n_1,\dots,n_k\}$, si ha

(121.9) $$a_{i(1)} + \dots + a_{i(m)} \ge a_1 + \dots + a_k,$$

come volevasi dimostrare.

Dal teorema precedente segue il

COROLLARIO. — *Se la serie* (121.1) *è assolutamente convergente e la serie* (121.2) *è ottenuta da essa riordinando i termini come in* (121.3), *allora la serie* (121.2) *è assolutamente convergente e le due serie considerate hanno la stessa somma.*

Dimostrazione: per il teorema precedente, si ha

(121.10) $$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{i(n)}| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|.$$

D'altra parte, poiché la serie di termine generale $|a_n| - a_n$ è a termini non negativi e convergente, dal teorema precedente si ricava anche che

(121.11) $$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| - a_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_{i(n)}| - a_{i(n)}) ;$$

dalle (121.10), (121.11) segue

(121.12) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i(n)} .$$

Il risultato espresso dal corollario si può invertire, nel senso che, se, qualunque sia l'applicazione invertibile $i : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$, risulta

(121.13) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{i(n)} ,$$

allora necesariamente la serie di termine generale a_n è assolutamente convergente. Omettiamo, per brevità, la dimostrazione di tale affermazione.

122. Serie di Taylor

Consideriamo una funzione f(x) definita in un intorno di un punto x_0. Supponiamo che in x_0 f(x) ammetta infinite derivate $f'(x_0), f''(x_0),\dots,f^{(n)}(x_0),\dots$ Traendo spunto dalla formula di Taylor (paragrafo 88), è naturale considerare la serie

(122.1) $$f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots$$

La (122.1) è detta *serie di Taylor* della funzione f(x) con centro nel punto x_0. La funzione f(x) è *sviluppabile in serie di Taylor* (con centro x_0) se per ogni x in un intorno di x_0 la serie (122.1) è convergente e la somma della serie vale f(x); cioè, se esiste $\delta > 0$ tale che

(122.2) $$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k , \qquad \forall x: |x - x_0| < \delta.$$

Sussiste il seguente teorema di cui, per semplicità, omettiamo la dimostrazione

TEOREMA. — *Sia* $f(x)$ *una funzione che ammette infinite derivate nell'intervallo* $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, *con* $\delta > 0$. *Supponiamo che esista un numero* M *per cui*

$$|f^{(n)}(x)| \le M, \qquad \forall x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta], \quad \forall n \in \mathbf{N}. \tag{122.3}$$

Allora $f(x)$ *è sviluppabile in serie di Taylor di centro* x_0.

Il teorema precedente si applica, ad esempio, alle funzioni trigonometriche sen x, cos x. Infatti, indicando con $f(x)$ una di tali funzioni, si vede subito che $|f^{(n)}(x)| \le 1$ per ogni $n \in \mathbf{N}$ e per ogni $x \in \mathbf{R}$. Quindi le funzioni sen x, cos x sono sviluppabili in serie di Taylor, ad esempio con centro in 0. Ricordando la formula di Taylor (88.17), (88.18) di tali funzioni, si ottengono gli sviluppi in serie

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \tag{122.7}$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \tag{122.8}$$

Il teorema precedente si applica anche alla funzione esponenziale $f(x) = e^x$. Risulta

$$|f^{(n)}(x)| = e^x \le e^\delta = M, \qquad \forall x \in [-\delta, \delta]. \tag{122.9}$$

Quindi le ipotesi del teorema precedente sono soddisfatte anche per la funzione esponenziale. Perciò la funzione esponenziale è sviluppabile in serie di Taylor con centro 0 e vale la formula

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \tag{122.10}$$

Particolarmente significativo è il caso in cui $x = 1$, per cui risulta

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \dots \tag{122.11}$$

Consideriamo altri esempi di funzioni sviluppabili in serie di Taylor. Abbiamo già verificato con la (116.5) che, se $x \in (-1, 1)$, la serie geometrica è convergente e la somma vale:

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \tag{122.12}$$

Invitiamo il lettore a verificare per esercizio che, posto $f(x) = 1/(1-x)$, allora $f^{(n)}(0) = n!$ per ogni n. Quindi la (122.12) è lo sviluppo in serie di Taylor con centro 0, della funzione $1/(1-x)$.

È utile scrivere la formula di Taylor per la funzione precedente:

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n} x^k + R_n(x)\,; \tag{122.13}$$

è possibile scrivere esplicitamente il resto $R_n(x)$; infatti, in base alla relazione (12.7), abbiamo:

$$R_n(x) = \frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1}}{1-x}, \qquad \forall x \in (-1, 1); \tag{122.14}$$

con tale espressione del resto, integrando tra 0 e x entrambi i membri della (122.13), otteniamo

$$-\log(1-x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{k+1}}{k+1} + \int_0^x R_n(t)\,dt. \tag{122.15}$$

La funzione $1/(1-t)$ è crescente; quindi, se $t \le x$, risulta $1/(1-t) \le 1/(1-x)$. Considerando per semplicità $x \ge 0$, otteniamo

$$\begin{aligned} 0 \le \int_0^x R_n(t)\,dt &= \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-t}\,dt \le \\ &\le \int_0^x \frac{t^{n+1}}{1-x}\,dt = \frac{1}{1-x}\left[\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_{t=0}^{t=x} = \frac{1}{n+2}\,\frac{x^{n+2}}{1-x}. \end{aligned} \tag{122.16}$$

Ricordiamo che $x^{n+2} \to 0$ se $n \to +\infty$, perché $x < 1$; quindi, per $n \to +\infty$, l'integrale tra 0 e x di R_n tende a zero. Passando al limite nella (122.15) otteniamo

$$-\log(1-x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1}. \tag{122.17}$$

Se nella formula precedente si cambia x con $-x$, si ottiene lo sviluppo in serie di Taylor della funzione $\log(1+x)$ (si confronti con la formula di Taylor (88.16)):

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + \dots \tag{122.18}$$

Ancora, cambiando x con $-x^2$ nella formula (122.12), si ottiene il seguente sviluppo:

(122.19) $$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \dots + (-1)^n x^{2n} + \dots$$

Integrando entrambi i membri, con lo stesso metodo usato in precedenza, si ottiene

(122.20) $$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots$$

Particolarmente significativo è il caso in cui $x = 1$; dato che $\operatorname{arctg} 1 = \pi/4$, otteniamo

(122.21) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \dots$$

123. Cenni sulle serie di Fourier

Le *serie di Fourier* sono particolari serie che furono introdotte essenzialmente per lo studio di piccole oscillazioni di mezzi elastici. Un esempio tipico è quello delle oscillazioni di una corda di uno strumento musicale. Consideriamo una corda tesa, i cui estremi siano fissati. Se spostiamo la corda dalla sua posizione di equilibrio, essa comincia a vibrare compiendo piccole oscillazioni, che supponiamo avvengano in un piano. Fissiamo un punto della corda; indichiamo con d la distanza del punto dalla posizione di equilibrio. La distanza varia col tempo, cioè $d = d(t)$ è una funzione del tempo; in alcuni casi $d(t)$ può essere descritta come somma di funzioni del tipo

(123.1) $$a \cos kt + b \operatorname{sen} kt,$$

con a, b, k numeri reali. Altri fenomeni che talvolta possono essere descritti con somme di funzioni del tipo (123.1) sono ad esempio i risultati di un elettroencefalogramma o di un elettrocardiogramma, che hanno la caratteristica di essere tipicamente oscillanti e periodici.

Ricordiamo che una funzione $f(x)$ si dice *periodica di periodo* T se

(123.2) $$f(x + T) = f(x), \qquad \forall x \in \mathbf{R}.$$

Se una funzione è periodica di periodo T, naturalmente è anche periodica di periodo uguale ad un qualsiasi multiplo intero di T.

La funzione indicata in (123.1) è periodica. Dato che $\cos(kt) = \cos(kt + 2\pi) = \; = \cos(k(t + 2\pi/k))$, e analogamente per il seno, la funzione in (123.1) è periodica di periodo $2\pi/k$. Se k è *intero*, la funzione (123.1) è anche periodica di periodo 2π. Quindi, se k è intero, una somma di funzioni come in (123.1) dà luogo ad una funzione periodica di periodo 2π. Se il periodo della funzione che si vuole rappresentare è diverso, è sufficiente cambiare scala nella variabile indipendente.

Sia $f(x)$ una funzione definita su $\mathbf{R}$ e periodica di periodo 2π. Diremo che $f(x)$ è *sviluppabile in serie di Fourier* se esistono dei coefficienti a_0, a_k, b_k con $k \in \mathbf{N}$, per cui risulta

(123.3) $$f(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx).$$

Non entriamo nel merito di quando sia possibile rappresentare $f(x)$ con la serie di Fourier indicata in (123.3). Invece ci limitiamo a dare la regola per il calcolo dei coefficienti a_0, a_k, b_k; poi considereremo un esempio.

I *coefficienti di Fourier* a_0, a_k, b_k dipendono dai valori di $f(x)$ in un intervallo di lunghezza 2π. Se prendiamo in considerazione l'intervallo $[-\pi, \pi]$, tali coefficienti sono dati da

(123.4) $$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx\,;$$

(123.5) $$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \qquad \forall k \in \mathbf{N};$$

(123.6) $$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen} kx\, dx, \qquad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Consideriamo come esempio la funzione periodica, rappresentata in figura 14.2, e definita da

(123.7) $$f(x) = \begin{cases} -1 & se \quad (2h-1)\pi \le x < 2h\pi \\ 1 & se \quad 2h\pi \le x < (2h+1)\pi \end{cases}, \quad h \in \mathbf{Z}.$$

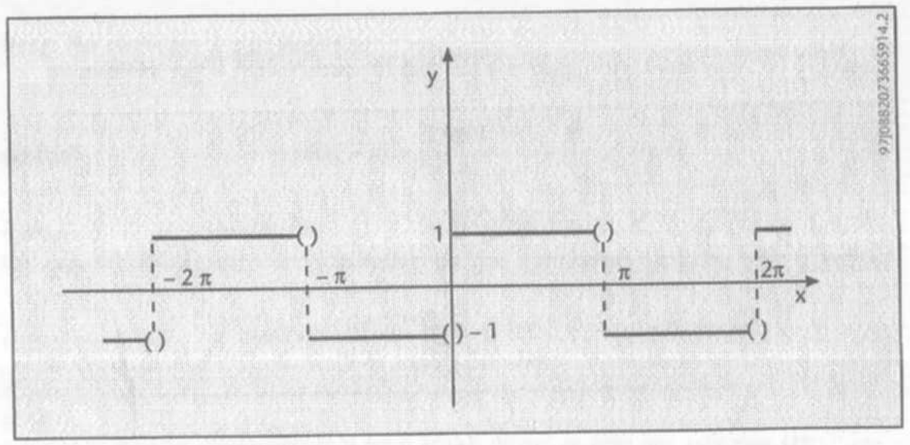


Figura 14.2

Limitatamente all'intervallo $[-\pi, \pi)$, $f(x)$ è definita da

(123.8) $$f(x) = \begin{cases} -1 & se \quad -\pi \le x < 0 \\ 1 & se \quad 0 \le x < \pi \end{cases}.$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier di f(x); dato che f(x) è una funzione dispari, si riconosce che $a_0 = 0$, $a_k = 0$ per ogni k; infatti ad esempio

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0} dx + \int_{0}^{\pi} dx\right\} = 0. \tag{123.9}$$

Calcoliamo i coefficienti b_k:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\text{sen}\,kx\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\int_{-\pi}^{0} \text{sen}\,kx\,dx + \int_{0}^{\pi} \text{sen}\,kx\,dx\right\} = \tag{123.10}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\left[\frac{\cos kx}{k}\right]_{-\pi}^{0} - \left[\frac{\cos kx}{k}\right]_{0}^{\pi}\right\} = \frac{2}{k\pi}\{1 - \cos k\pi\}.$$

Se k è pari risulta $\cos k\pi = 1$, quindi $b_k = 0$; se k è dispari, risulta $\cos k\pi = -1$, quindi $b_k = 4/(k\pi)$. Perciò ci aspettiamo che valga lo sviluppo in serie di Fourier:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\,\text{sen}\,kx = \frac{4}{\pi}\left\{\text{sen}\,x + \frac{\text{sen}\,3x}{3} + \frac{\text{sen}\,5x}{5} + \dots\right\}. \tag{123.11}$$

Nelle figure 14.3, 14.4 riportiamo rispettivamente i grafici delle due funzioni

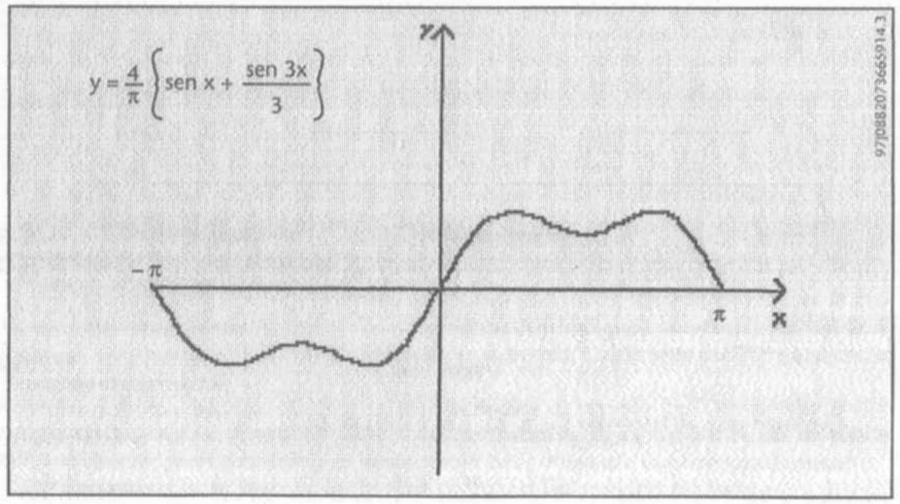


Figura 14.3

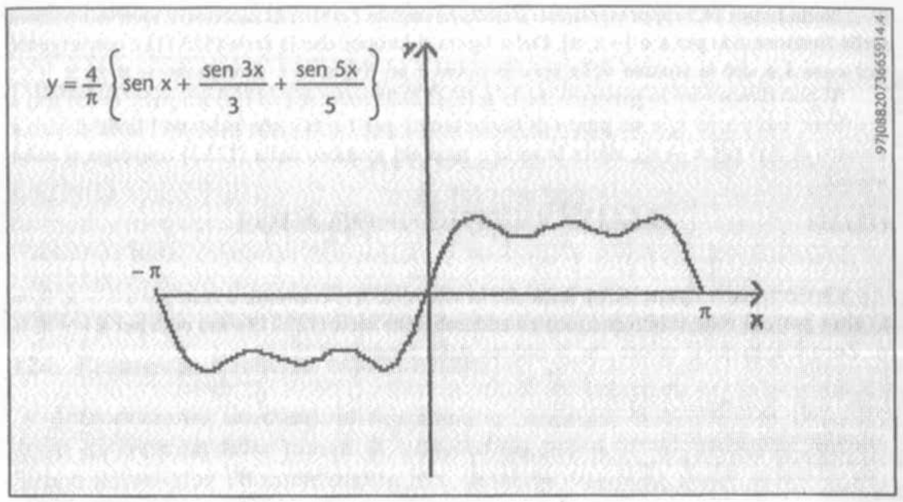


Figura 14.4

$$\frac{4}{\pi}\left\{\text{sen}\,x + \frac{\text{sen}\,3x}{3}\right\}; \qquad \frac{4}{\pi}\left\{\text{sen}\,x + \frac{\text{sen}\,3x}{3} + \frac{\text{sen}\,5x}{5}\right\}. \tag{123.12}$$

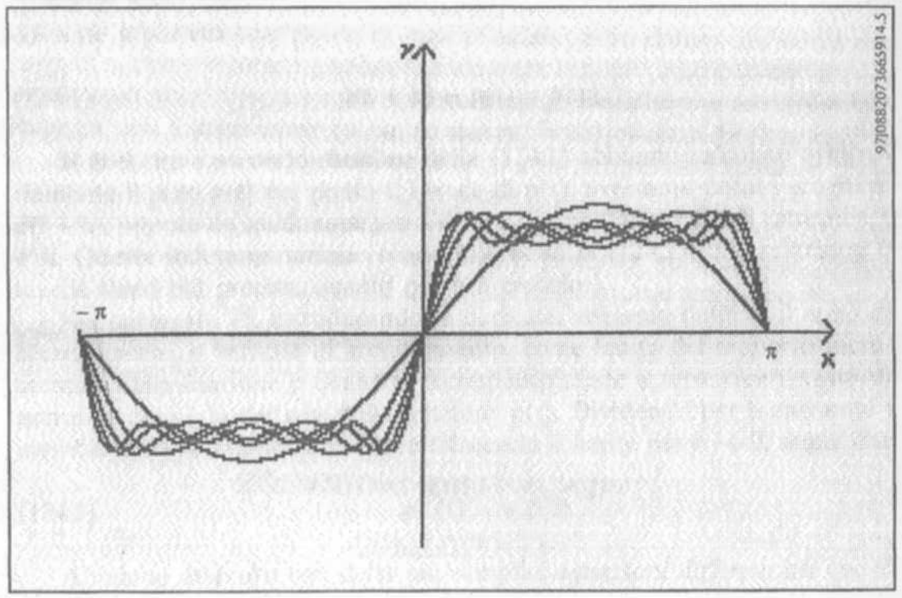


Figura 14.5

Nella figura 14.5 rappresentiamo simultaneamente i grafici di successive approssimazioni della funzione f(x) per $x \in [-\pi, \pi]$. Dalla figura si intuisce che la serie (123.11) è convergente per ogni x e che la somma della serie è ugual e ad f(x) se x è diverso da $-\pi, 0, \pi$.

Si può dimostrare in generale che la serie (123.3) converge ad f(x) nei punti in cui f(x) è continua; inoltre, se x_0 è un punto di discontinuità per f e tale che esistano i limiti destro e sinistro di f(x) per $x \to x_0$, allora la serie a secondo membro della (123.3) converge al *valor medio*:

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x \to x_0^+} f(x) + \lim_{x \to x_0^-} f(x)\right]. \tag{123.13}$$

Osservando la figura 14.5 si nota che la serie (123.11) converge a zero per $x = -\pi, 0, \pi$. D'altra parte si vede subito che tutti gli addendi della serie (123.11) sono nulli per $x = -\pi, 0, \pi$. Zero è appunto il valore che si ottiene dalla formula (123.13).

CAPITOLO 15

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

124. Premessa. Crescita esponenziale

Introduciamo un esempio di *equazione differenziale* studiando un modello di crescita della massa di una cellula posta in un ambiente ideale. Supponiamo che l'accrescimento sia determinato solo dalla velocità del metabolismo all'interno della cellula stessa.

Indichiamo con p(t) il *peso* della cellula in funzione del tempo t. Se la crescita non è influenzata da fattori esterni, è ragionevole pensare che, in un piccolo intervallo di tempo, l'accrescimento della cellula sia proporzionale al tempo trascorso ed al peso stesso della cellula. Indicando con t, t + h ($h \neq 0$), due successivi istanti di tempo, supponiamo quindi che esista una costante a per cui

$$p(t + h) - p(t) = ahp(t) . \tag{124.1}$$

Si noti che a secondo membro della (124.1) abbiamo calcolato arbitrariamente il peso p(t) nel punto t; invece di p(t), avremmo potuto scegliere p(t + h), oppure un qualunque altro valore di t nell'intervallo di estremi t, t + h. Questa indeterminazione rende imprecisa la (124.1); tale relazione è invece tanto più precisa, quanto più h è piccolo.

Nel paragrafo 75, introducendo le derivate, abbiamo definito il *tasso di accrescimento*, o velocità di accrescimento, come limite del rapporto incrementale della funzione p quando l'incremento tende a zero; cioè il tasso di accrescimento è la *derivata* della funzione p(t). Dividendo per h entrambi i membri della relazione precedente e facendo il limite per $h \to 0$, segue che

$$p'(t) = a\, p(t) . \tag{124.2}$$

Abbiamo ottenuto una delle più semplici *equazioni differenziali* che si possano considerare. La funzione p(t) è una soluzione dell'equazione differenziale (124.2). L'equazione differenziale (124.2) esprime un legame tra la

funzione incognita p(t) e la sua derivata prima. Sottolineamo che l'incognita di una equazione differenziale è una funzione (o più funzioni), e non è un numero reale (o più numeri reali), come accade ad esempio per le equazioni algebriche.

Non avendo ancora descritto alcun metodo risolutivo per le equazioni differenziali, ci limitiamo a verificare che la funzione $p(t) = e^{at}$ è una soluzione dell'equazione (124.2). Infatti in tal caso risulta $p'(t) = ae^{at}$, e quindi l'equazione (124.2) è soddisfatta per ogni t. Più generalmente, per ogni valore della costante c, la funzione $p(t) = ce^{at}$ è soluzione; infatti:

$$\frac{d}{dt}\, p(t) = \frac{d}{dt}\, c\, e^{at} = ca\, e^{at} = ap(t)\,. \tag{124.3}$$

Perciò il peso della cellula cresce secondo la legge $p(t) = ce^{at}$. La costante c può essere determinata conoscendo il peso p_0 all'istante iniziale. Se indichiamo con p_0 il peso (noto) della cellula all'istante t = 0, abbiamo la *condizione iniziale:*

$$p(0) = c\, e^0 = c = p_0\,. \tag{124.4}$$

In definitiva la soluzione è $p(t) = p_0 e^{at}$.

Le considerazioni proposte per descrivere l'aumento del peso di una cellula si applicano anche al modello di *crescita di una popolazione*, introdotto nel paragrafo 48. Infatti la legge (124.1) è simile alla legge (48.7) (nel paragrafo 48 la costante a era stata assunta uguale ad 1). Possiamo quindi interpretare la formula (124.1) come un modello per la funzione popolazione p(t); essa soddisfa l'equazione differenziale (124.2). Se la condizione iniziale è $p(0) = p_0$, troviamo di nuovo la soluzione (detta, brevemente, *crescita esponenziale*):

$$p(t) = p_0\, e^{at}\,. \tag{124.5}$$

Quindi la popolazione è completamente determinata, nota la costante a, e nota la popolazione p_0 (> 0) all'istante t = 0. Se a > 0 la popolazione cresce rispetto al tempo; se a = 0 la popolazione rimane costante: $p(t) = p_0$; se a < 0 la popolazione decresce e tende a zero per $t \to +\infty$.

Nei paragrafi seguenti prenderemo in considerazione, oltre all'equazione differenziale (124.2), alcune generalizzazioni, utili nelle applicazioni.

In questo capitolo studieremo le equazioni del *primo ordine*, cioè equazioni differenziali che esprimono un legame tra una funzione incognita e la sua derivata prima; considereremo le equazioni lineari, le equazioni di Bernoulli, le equazioni a variabili separabili. Nel capitolo seguente studieremo alcune equazioni del *secondo ordine*, cioè equazioni differenziali che esprimono un legame tra una funzione incognita e le sue derivate prime e

seconde; considereremo in particolare le equazioni lineari e coefficienti costanti. Prenderemo anche in considerazione alcuni *sistemi differenziali* del primo ordine in due equazioni e due incognite.

125. Equazioni lineari

Un'*equazione differenziale lineare del primo ordine* è del tipo:

$$y' = a(x)\, y + b(x), \tag{125.1}$$

dove a(x), b(x) sono funzioni continue in un intervallo fissato. La funzione y = y(x) è l'incognita dell'equazione differenziale (125.1). Una funzione y(x) si chiama *soluzione* dell'equazione data se è derivabile e se y(x), y′ (x) soddisfano l'equazione (125.1) per ogni x dell'intervallo fissato.

Se la funzione b(x) è identicamente nulla, l'equazione si dice *omogenea*, altrimenti si dice *non omogenea.*

Se a, b sono costanti, con b = 0, si ritrova l'equazione omogenea (124.2) considerata nel paragrafo precedente, che ha come soluzioni le funzioni in (124.5). È perciò naturale aspettarsi che, anche in generale, l'equazione (125.1) abbia un insieme di soluzioni dipendenti da una costante scelta arbitrariamente.

TEOREMA. — *Tutte le soluzioni dell'equazione differenziale* (125.1) *sono espresse da*

$$y(x) = e^{A(x)} \int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx, \tag{125.2}$$

dove A(x) *è una primitiva della funzione* a(x).

Dimostrazione: sia A(x) una primitiva della funzione a(x), cioè A′ (x) = a(x) per ogni x dell'intervallo considerato. La funzione $e^{-A(x)}$ è positiva per ogni x; moltiplichiamo entrambi i membri dell'equazione differenziale (125.1) per tale funzione:

$$e^{-A(x)}\, y'(x) = e^{-A(x)}\, a(x)\, y(x) + e^{-A(x)}\, b(x). \tag{125.3}$$

Si riconosce che l'equazione precedente contiene gli addendi della seguente derivata:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-A(x)}\, y(x)\right] = e^{-A(x)}\,(-A'(x))\, y(x) + \tag{125.4}$$
$$+\, e^{-A(x)}\, y'(x) = e^{-A(x)}\, y'(x) - e^{-A(x)}\, a(x)\, y(x);$$

da tale osservazione si deduce che l'equazione (125.3) è equivalente a

$$\frac{d}{dx}\left[e^{-A(x)}\, y(x)\right] = e^{-A(x)}\, b(x). \tag{125.5}$$

Integrando entrambi i membri otteniamo

$$e^{-A(x)}\, y(x) = \int e^{-A(x)}\, b(x)\, dx \tag{125.6}$$

e, moltiplicando ambo i membri per $e^{A(x)}$, otteniamo la (125.2). Infine notiamo che tutti i passaggi fatti sono invertibili; quindi con i passaggi indicati si verifica che le funzioni $y(x)$ in (125.2) sono effettivamente soluzioni dell'equazione differenziale (125.1). Ciò completa la prova.

Per le equazioni differenziali lineari del primo ordine omogenee, cioè con $b(x) = 0$, le soluzioni (125.2) divengono più semplicemente

$$y(x) = c\, e^{A(x)}\,, \tag{125.7}$$

dove $A(x)$ è una primitiva della funzione $a(x)$, e dove c è una costante arbitraria.

Come primo esempio, applichiamo il teorema all'equazione (124.2) che, con i simboli di questo paragrafo, si scrive equivalentemente $y' = ay$. Essendo a costante, poniamo $A(x) = ax$. In accordo con quanto detto nel paragrafo precedente, dalla (125.7) otteniamo che le soluzioni dell'equazione (124.2) sono date, per ogni scelta della costante c, da:

$$y(x) = c\, e^{ax}\,. \tag{125.8}$$

Come ulteriore esempio, determiniamo per $x > 0$ tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = \frac{xy + 1}{x^2}\,. \tag{125.9}$$

Scomponendo l'espressione a secondo membro, si riconosce che si tratta di una equazione differenziale lineare con coefficienti $a(x) = 1/x$, $b(x) = 1/x^2$. Essendo interessati al caso

$x > 0$, poniamo $A(x) = \log x$; quindi $e^{-A(x)} = 1/x$. Dalla formula risolutiva (125.2) si ottiene

$$y(x) = x \int \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x^2}\, dx = x\left(-\frac{1}{2\,x^2} + c\right) = -\frac{1}{2x} + cx. \tag{125.10}$$

126. Teorema di Cauchy per le equazioni lineari del primo ordine

In questo paragrafo mettiamo in luce la dipendenza delle soluzioni $y(x)$ dell'equazione differenziale lineare del primo ordine (125.1) dal *dato iniziale*. Precisamente, mostriamo che, per ogni *dato iniziale* y_0 e per ogni punto x_0, è possibile scegliere la costante che deriva dall'integrazione indefinita in (125.2), in modo da soddisfare la condizione iniziale $y(x_0) = y_0$.

Risolviamo il seguente problema differenziale, che viene chiamato *problema di Cauchy*:

$$\begin{cases} y' = a(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}. \tag{126.1}$$

TEOREMA DI CAUCHY (PER LE EQUAZIONI LINEARI DEL PRIMO ORDINE). — *Sia* x_0 *un punto di un intervallo dove* $a(x)$, $b(x)$ *sono continue. Per ogni numero reale* y_0 *esiste ed è unica la soluzione del problema di Cauchy* (126.1).

Dimostrazione: sappiamo già che l'equazione differenziale ha infinite soluzioni. Occorre provare che tra queste ne esiste una, ed una sola, con la proprietà che $y(x_0) = y_0$. A tale scopo scegliamo $A(x)$, primitiva di $a(x)$, in modo che $A(x_0) = 0$, cioè:

$$A(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt. \tag{126.2}$$

Inoltre scriviamo la formula (125.2), di rappresentazione delle soluzioni, in modo da mettere in luce la costante additiva che proviene dall'integrazione indefinita:

$$y(x) = e^{A(x)}\left(c + \int_{x_0}^{x} e^{-A(t)}\, b(t)\, dt\right). \tag{126.3}$$

Dato che $A(x_0) = 0$, risulta $y(x_0) = e^0(c + 0) = c$; quindi esiste una ed una sola costante c per cui

$$c = y_0 = y(x_0). \tag{126.4}$$

Diamo un'interpretazione geometrica del teorema di Cauchy. Supponiamo per semplicità che a(x), b(x) siano continue su tutto l'asse reale. Fissiamo un sistema di assi cartesiani x, y. Il teorema di Cauchy per le equazioni differenziali lineari del primo ordine afferma che, per ogni punto di coordinate (x_0, y_0), passa una ed una sola soluzione, o *curva integrale*, dell'equazione differenziale in (126.1).

È possibile disegnare tali curve integrali tenendo conto che, per ogni punto (x_0, y_0), il coefficiente angolare $y'(x_0)$ della retta tangente a tali curve è determinato dall'equazione differenziale stessa; infatti si ha

$$y'(x_0) = a(x_0)\, y(x_0) + b(x_0) = a(x_0)\, y_0 + b(x_0). \tag{126.5}$$

In figura 15.1 riportiamo il grafico delle curve integrali corrispondenti al caso $a \equiv 1$, $b \equiv 0$; cioè corrispondenti all'equazione $y' = y$. In tal caso il coefficiente angolare è uguale all'ordinata di ogni punto. Il disegno mostra chiaramente che l'equazione data ha come soluzioni le curve esponenziali $y(x) = ce^x$, con c costante.

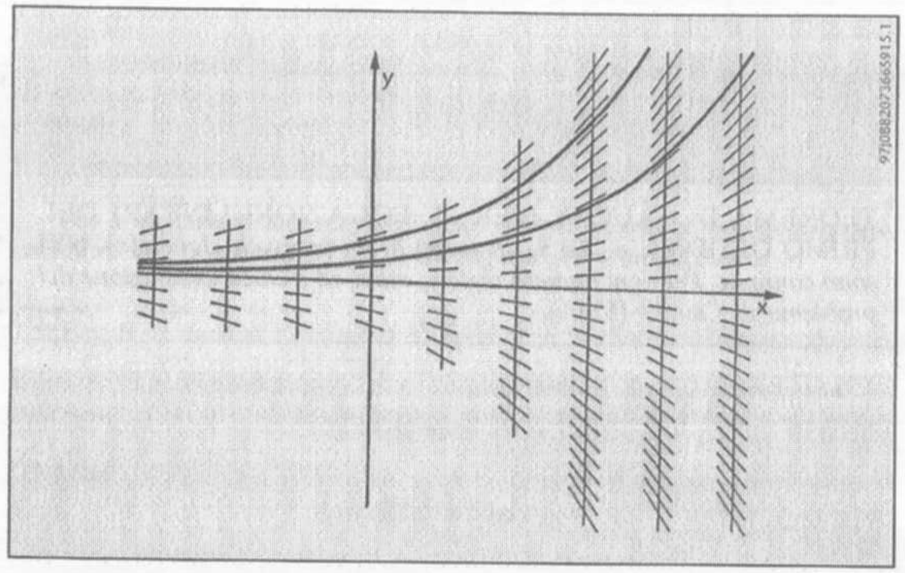


Figura 15.1

127. Equazioni di Bernoulli

Si dicono *di Bernoulli* le equazioni differenziali del primo ordine del tipo

$$y' = a(x)y + b(x)\, y^{\alpha}, \tag{127.1}$$

con a(x), b(x) funzioni continue in uno stesso intervallo. L'esponente α è un numero reale che supporremo diverso da 0 e da 1, per non ricadere nel caso delle equazioni lineari, considerato nel paragrafo precedente.

Notiamo che, se $\alpha > 0$, la funzione y(x) identicamente nulla è soluzione dell'equazione data. Se $\alpha > 0$ e y(x) non si annulla per alcun valore di x, oppure se $\alpha < 0$, è opportuno dividere entrambi i membri dell'equazione per y^{α}:

$$\frac{y'}{y^{\alpha}} = a(x)\, y^{1-\alpha} + b(x). \tag{127.2}$$

È ora naturale effettuare la sostituzione $z(x) = [y(x)]^{1-\alpha}$; per la regola di derivazione delle funzioni composte risulta

$$z' = (1-\alpha)\, y^{-\alpha}\, y' \;; \tag{127.3}$$

sostituiamo il valore trovato nell'equazione (127.2):

$$z' = (1-\alpha)\, a(x)z + (1-\alpha)\, b(x). \tag{127.4}$$

Questa è un'equazione lineare del primo ordine che si risolve con il metodo indicato nel paragrafo 125. Ad ogni soluzione z(x) di (127.4) corrisponde una soluzione y(x), dell'equazione iniziale (127.1), data da

$$y(x) = [z(x)]^{1/(1-\alpha)}, \tag{127.5}$$

purché sia definito il secondo membro.

Risolviamo il seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = 2y \operatorname{tg} x + \sqrt{y} & (-\pi/2 < x < \pi/2) \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{127.6}$$

L'equazione differenziale è di Bernoulli, con esponente $\alpha = 1/2$. La funzione $y \equiv 0$ non è soluzione (infatti non verifica la condizione iniziale). Dividiamo l'equazione per $\sqrt{y}$:

$$\frac{y'}{\sqrt{y}} = 2\sqrt{y}\, \operatorname{tg}x + 1 \;; \tag{127.7}$$

effettuiamo la sostituzione $z(x) = \sqrt{y(x)}$; per la condizione iniziale y(0) = 1, deve anche risultare z(0) = 1. Inoltre, essendo $z' = y'/(2\sqrt{y})$, otteniamo il problema di Cauchy nella funzione incognita z:

$$\begin{cases} z' = z \operatorname{tg} x + (1/2) \\ z(0) = 1 \end{cases} \tag{127.8}$$

L'equazione differenziale è lineare; una primitiva della funzione $a(x) = \operatorname{tg} x$ è $A(x) = -\log |\cos x|$; però, dato che nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ la funzione $\cos x$ è positiva, in tale intervallo $A(x) = -\log \cos x$ è una primitiva della funzione $\operatorname{tg} x$. Risulta

$$e^{-A(x)} = e^{\log \cos x} = \cos x; \qquad e^{A(x)} = \frac{1}{\cos x}. \tag{127.9}$$

Dalla formula risolutiva (125.2) per le equazioni lineari, otteniamo

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{1}{\cos x} \int \frac{1}{2} \cos x \, dx = \\ &= \frac{1}{\cos x} \left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} x + c \right) = \frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{c}{\cos x}. \end{aligned} \tag{127.10}$$

Imponendo la condizione iniziale $z(0) = 1$ si determina la costante c, che risulta uguale ad 1. Perciò la soluzione del problema di Cauchy (127.6) è la funzione definita nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$ da

$$y(x) = (z(x))^2 = \left(\frac{1}{2} \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x} \right)^2. \tag{127.11}$$

Come secondo esempio, determiniamo tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$y' = x(y - y^3). \tag{127.12}$$

È un'equazione di Bernoulli con esponente $\alpha = 3$. Si noti che la funzione $y = 0$ è una soluzione. Se $y \neq 0$, dividendo per y^3 otteniamo

$$\frac{y'}{y^3} = x\, y^{-2} - x. \tag{127.13}$$

Ponendo $z = y^{-2}$, da cui $z' = -2y^{-3}y'$, otteniamo l'equazione lineare nell'incognita z:

$$z' = -2xz + 2x. \tag{127.14}$$

Una primitiva della funzione $-2x$ è $A(x) = -x^2$; quindi le soluzioni della (127.14) sono date da

$$z(x) = e^{-x^2} \int 2x\, e^{x^2}\, dx = e^{-x^2} (e^{x^2} + c) = 1 + c\, e^{-x^2}. \tag{127.15}$$

Infine troviamo le soluzioni dell'equazione iniziale (127.12):

$$y(x) = \pm (1 + c\, e^{-x^2})^{-1/2}. \tag{127.16}$$

Tutte le soluzioni espresse dalla (127.16) sono di segno costante, cioè positive oppure negative per ogni x. La soluzione $y = 0$, trovata all'inizio, non si ottiene dalla (127.16) per alcun valore della costante c. Si osservi che, per $c = 0$, si ottengono le soluzioni $y = \pm 1$.

Valutiamo il segno della derivata $y'(x)$; a tale scopo si può calcolare esplicitamente la derivata di $y(x)$, oppure, più semplicemente, si può stabilire il segno della y' dall'equazione (127.12). Risulta $y' = xy(1 - y^2)$; si stabilisce quando $y' > 0$ in base al segno dei tre fattori x, y, $1 - y^2$. Limitiamoci alle soluzioni $y(x)$ positive. Se $0 < y < 1$, allora $y' > 0$ per $x > 0$, mentre $y' < 0$ se $x < 0$. In tal caso il punto $x = 0$ è di minimo per ogni soluzione. Invece, se $y > 1$ (che corrisponde analiticamente a $c < 0$), il punto $x = 0$ è di massimo per ogni soluzione. Riportiamo in figura 15.2 i grafici delle soluzioni trovate.

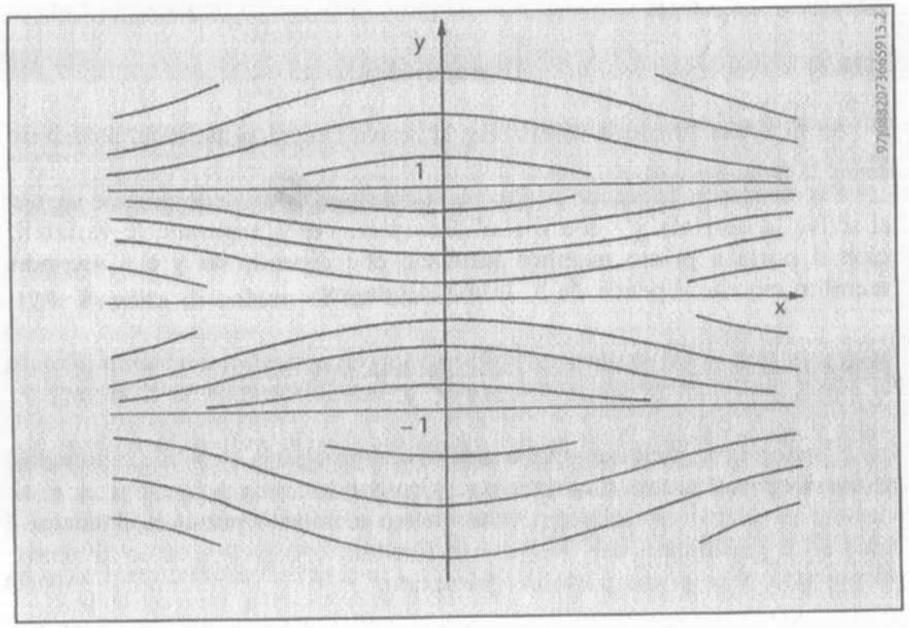


Figura 15.2

128. Equazioni a variabili separabili

Si dicono a variabili separabili le equazioni differenziali del primo ordine del tipo

$$y' = f(x) \cdot g(y), \tag{128.1}$$

con $f(x)$, $g(y)$ funzioni continue. Facendo riferimento alle equazioni differenziali del paragrafo precedente, l'equazione (127.12) è a variabili separabili, mentre l'equazione considerata in (127.6) non è a variabili separabili.

Se $g(y_0) = 0$ per qualche valore reale y_0, allora la funzione costante $y(x) = y_0$ è soluzione dell'equazione differenziale (128.1). Se $g(y)$ non si annulla, possiamo dividere entrambi i membri per $g(y)$ ed integrare rispetto ad x:

$$\int \frac{y'(x)}{g(y(x))}\, dx = \int f(x)\, dx\,. \tag{128.2}$$

Indichiamo con $F(x)$ una primitiva della funzione $f(x)$; indichiamo con $G(y)$ una primitiva della funzione $1/g(y)$, pensando y come variabile indipendente. La relazione precedente si può riscrivere nella forma

$$G(y(x)) = F(x) + c. \tag{128.3}$$

Se G è una funzione invertibile, si ricava l'espressione della soluzione $y(x)$.

Per ricordare il metodo proposto, si consiglia di procedere come segue: si scrive la derivata y' con il simbolo dy/dx. Poi si separano le variabili, cioè si porta a primo membro tutto ciò che dipende da y e a secondo membro ciò che dipende da x. Infine si integra:

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)\, dx\,. \tag{128.4}$$

Si osservi che, nell'integrale a primo membro, y è la variabile di integrazione. Dopo effettuata l'integrazione, ricordando che y è funzione di x, si ottiene la (128.3). Sottolineamo che questo metodo è puramente mnemonico ed è giustificato dal fatto che il risultato è corretto, come abbiamo dimostrato nella prima parte del paragrafo.

Consideriamo due esempi. Cominciamo con l'equazione differenziale

$$y' = 2(x + xy^2\,). \tag{128.5}$$

L'equazione data non è lineare, né di Bernoulli, ma è a variabili separabili; infatti a secondo membro si può mettere in evidenza il fattore x. Scriviamo $y' = dy/dx$ e separiamo le variabili:

$$\frac{dy}{1 + y^2} = 2x\, dx. \tag{128.6}$$

Integriamo il primo membro rispetto ad y ed il secondo rispetto ad x:

$$\operatorname{arctg} y = x^2 + c, \tag{128.7}$$

dove c è una costante arbitraria. Infine, ricavando la y, otteniamo le soluzioni:

$$y(x) = \operatorname{tg}\,(\,x^2 + c). \tag{128.8}$$

Cerchiamo una soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \cos^2 y \\ y(0) = 0 \end{cases}. \tag{128.9}$$

Con il metodo di separazione delle variabili otteniamo

$$\operatorname{tg} y = \int \frac{dy}{\cos^2 y} = \int dx = x + c. \tag{128.10}$$

Dovendo risultare $y = 0$ per $x = 0$, si trova $\operatorname{tg} 0 = c$, cioè $c = 0$. Quindi la soluzione è $y(x) = \operatorname{arctg} x$.

L'equazione (124.2) oltre ad essere lineare, è anche a variabili separabili. Il lettore ritrovi le soluzioni di tale equazione per la via indicata in questo paragrafo.

129. Perdita di calore di un corpo

Un animale (od anche un qualsiasi oggetto caldo) esposto ad una temperatura esterna inferiore alla propria è soggetto ad una perdita di calore. Il fenomeno varia da soggetto a soggetto e dipende dal metabolismo interno. Inoltre alcune parti del corpo disperdono calore più rapidamente che altre. Infine la temperatura può non essere costante in tutto il corpo.

Nonostante queste complicazioni, allo scopo di introdurre un modello matematico che sia il più semplice possibile, consideriamo una situazione ideale in cui il raffreddamento del corpo sia regolato dalla *legge di Newton*, la quale afferma che ad ogni istante la velocità di diminuzione della temperatura è proporzionale alla differenza tra la temperatura stessa del corpo e quella del mezzo circostante.

Indichiamo con k la costante di proporzionalità, e con $T(t)$ la temperatura del corpo in funzione del tempo t; infine indichiamo con E la temperatura *esterna*, che supponiamo costante e minore di $T(t)$. La legge di Newton si formula per mezzo dell'equazione differenziale:

$$T'(t) = k(E - T(t)). \tag{130.1}$$

Conoscendo la temperatura T_0 ($> E$) del corpo all'istante iniziale $t = 0$, si perviene al problema di Cauchy:

$$\begin{cases} T' = -\,kT + kE \\ T(0) = T_0 \end{cases}. \tag{130.2}$$

Usiamo la formula risolutiva (126.3), (126.4). La funzione primitiva $A(t)$, indicata con l'integrale (126.2), è $A(t) = -\,kt$. Quindi la soluzione $T(t)$ del problema di Cauchy (130.2) è:

$$T(t) = e^{-kt}\left(T_0 + \int_0^t e^{ks}\, kE\, ds\right) = \tag{130.3}$$

$$= e^{-kt}\,(T_0 + E(e^{kt} - 1)) = (T_0 - E)\, e^{-kt} + E.$$

Osserviamo che avremmo ottenuto lo stesso risultato seguendo il metodo indicato nel paragrafo 126 per le equazioni a variabili separabili.

Dato che $T_0 - E > 0$, risulta $T(t) > E$ per ogni t. Si noti inoltre che $T(t) \to E$ per $t \to +\infty$. Quindi in questo modello l'animale perde temperatura in modo da adeguarsi alla temperatura esterna E.

Con un diverso modello matematico si può tener conto del calore prodotto dal metabolismo interno dell'animale. Si può supporre che il metabolismo interno tenda ad aumentare la temperatura di una quantità b(t), funzione del tempo. In tal caso il problema di Cauchy (130.2) deve essere modificato nel seguente

$$\begin{cases} T' = -kT + kE + b(t) \\ T(0) = T_0 \end{cases} \tag{130.4}$$

Si tratta di nuovo di un problema lineare che si può risolvere con il metodo del paragrafo 123.

Ci si può chiedere per quale funzione b(t) il corpo rimane a temperatura costante T_0. Ciò significa che la funzione T(t), costante uguale a T_0, è soluzione del problema di Cauchy (130.4). In tal caso $T' = 0$, quindi l'equazione differenziale è soddisfatta purché:

$$-k\,T_0 + kE + b(t) = 0. \tag{130.5}$$

Si ricava immediatamente che il metabolismo interno deve produrre una quantità di calore in modo che risulti b costante uguale a:

$$b = k(T_0 - E). \tag{130.6}$$

130. Il debito di ossigeno

È ben noto che un individuo, durante uno sforzo fisico, consuma una quantità di ossigeno maggiore che in condizioni di riposo. Se lo sforzo fisico è intenso, come ad esempio durante una corsa veloce, il corpo consuma una quantità di ossigeno superiore alla quantità immessa dall'esterno attraverso i polmoni.

In questo modo si accumula il cosiddetto *debito di ossigeno*: il corpo consuma per un certo periodo di tempo più ossigeno di quello che riceve dall'esterno; in un secondo tempo l'organismo attraversa una *fase di recupero* in cui, per riequilibrare la situazione, continua ad immettere più ossigeno di quello che normalmente consuma in condizioni di riposo.

Indichiamo con t il tempo e con $y = y(t)$ il debito di ossigeno in funzione del tempo. La derivata $y'(t)$, cioè la velocità con cui varia y(t), dipende principalmente da due variabili: in modo crescente dalla velocità con cui si consuma energia con lo sforzo, ed in modo decrescente dalla velocità con cui si immette ossigeno nel corpo attraverso i polmoni.

La velocità dell'energia consumata, cioè la derivata del lavoro rispetto al tempo, è un dato del problema in genere noto; in Fisica si chiama *potenza* e per questo motivo la indicheremo con p(t). È ragionevole pensare che la velocità con cui si immette ossigeno attraverso i polmoni sia proporzionale al debito di ossigeno y(t). Se consideriamo il caso più semplice, in cui $y'(t)$ dipende linearmente da y(t) e p(t), avremo

$$y'(t) = -ay(t) + bp(t), \tag{131.1}$$

con a, b costanti positive. Ricordiamo che y(t), incognita dell'equazione differenziale, è il debito di ossigeno, mentre p(t), derivata dal lavoro rispetto al tempo (potenza), è una funzione nota.

Consideriamo tre possibili funzioni p(t). Cominciamo con il caso in cui p(t) è una costante p positiva e consideriamo il problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = -ay + bp & (a, b, p > 0) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{131.2}$$

Si tratta di un problema differenziale lineare del primo ordine. Corrisponde ad un individuo che effettua un lavoro uniforme rispetto al tempo, iniziando da una situazione di riposo, quindi con un debito di ossigeno y(0) uguale a zero.

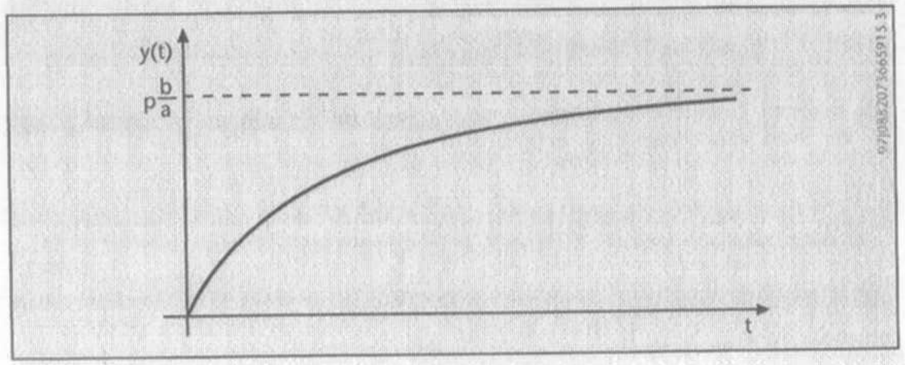


Figura 15.3

Con il metodo della separazione delle variabili, o con il metodo delle equazioni lineari, si trova la soluzione

$$y(t) = \frac{b}{a}\, p\,(1 - e^{-at}). \tag{131.3}$$

Si tratta di una funzione esponenziale che per $t \to +\infty$ tende a pb/a. Il grafico è riportato in figura 15.3.

Consideriamo ora il caso in cui $p(t) = 0$ e $y(0) > 0$. Ciò corrisponde ad un individuo che

(per $t < 0$) ha fatto uno sforzo accumulando un debito di ossigeno pari a $y(0)$. All'istante $t = 0$ il lavoro cessa ed il debito di ossigeno si dovrebbe ridurre fino a zero. Verifichiamo quantitativamente questa idea qualitativa: $y(x)$ è soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -ay \\ y(0) = y_0 \qquad (a,\ y_0 > 0) \end{cases} \tag{131.4}$$

Si trova facilmente la soluzione

$$y(t) = y_0\, e^{-at}\,. \tag{131.5}$$

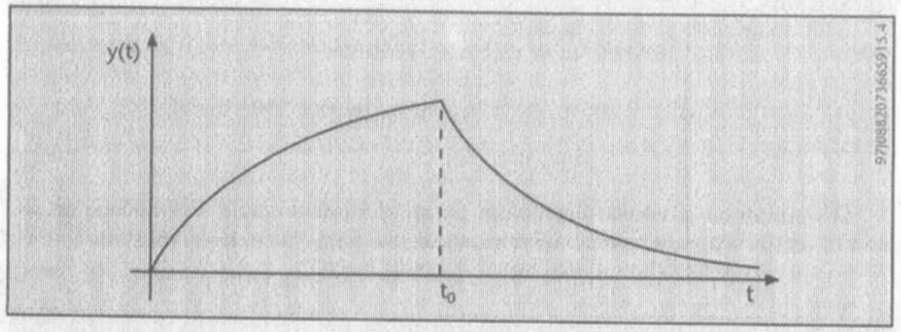


Figura 15.4

Tale soluzione è positiva, decrescente, e tende a zero per $t \to +\infty$.

Per finire, consideriamo il caso in cui $y(0) = 0$ e

$$p(t) = \begin{cases} p & \text{se } t \in [0,\ t_0] \\ 0 & \text{se } t \in (t_0,\ +\infty) \end{cases}, \tag{131.6}$$

dove t_0, p sono costanti positive. In corrispondenza abbiamo il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = -ay + bp(t) \qquad (a,\ b > 0) \\ y(0) = 0 \end{cases} \tag{131.7}$$

Questo problema differenziale corrisponde ad un individuo che effettua un lavoro uniforme partendo da una fase di riposo, e che dopo un tempo t_0 ritorna in riposo. La soluzione $y(t)$ si ottiene combinando la funzione (131.3) per $t \in [0,\ t_0]$ con una traslata della funzione (131.5) per $t > t_0$. In figura 15.4 è riportato il grafico, notevolmente espressivo, del debito di ossigeno $y(t)$ corrispondente alla potenza $p(t)$ definita in (131.6).

131. Passaggio di una sostanza attraverso una membrana

Consideriamo un *vaso*, ad esempio un vaso sanguigno, di forma cilindrica. Introduciamo sull'asse del cilindro (asse x) un sistema di ascisse. Supponiamo che venga introdotta all'interno del vaso, durante tutto l'arco di tempo in cui si osserva il fenomeno, una sostanza chimica e che tale sostanza si muova nella direzione dell'asse x con velocità costante. Indichiamo con $y(x)$ la *concentrazione* della sostanza nella sezione di ascissa x.

Supponiamo che la parete del cilindro sia costituita da una membrana che si lascia attraversare dalla soluzione. Se la sostanza chimica tende a trasferirsi nei tessuti esterni al vaso, la concentrazione diminuirà al crescere di x. Ci si chiede quanto vale la concentrazione $y(x)$ in funzione di x.

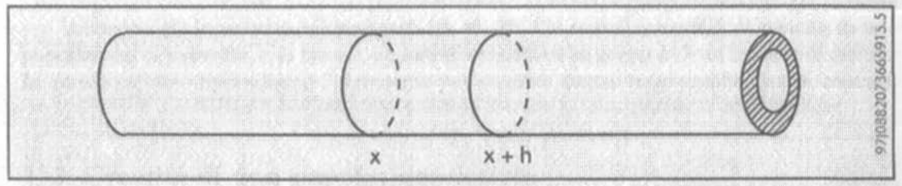


Figura 15.5

Consideriamo due sezioni del cilindro di ascisse x e $x + h$, con $h \neq 0$, come in figura 15.6. È naturale supporre che la concentrazione $y(x + h)$ sia minore della concentrazione $y(x)$, cioè che la variazione della concentrazione $y(x + h) - y(x)$ sia negativa. Tale variazione di concentrazione, in valore assoluto, è proporzionale alla concentrazione (maggiore è la concentrazione, tanto maggiore risulterà il passaggio della sostanza attraverso la membrana) ed è proporzionale anche alla lunghezza h; cioè

$$y(x + h) - y(x) = -ay(x)\, h. \tag{132.1}$$

Il fattore a, che supponiamo costante rispetto ad x e h, dipenderà da altre variabili. Ad esempio, sarà direttamente proporzionale al raggio del cilindro (maggiore è la superficie laterale del cilindro, maggiore risulterà il passaggio attraverso la membrana), mentre sarà inversamente proporzionale alla velocità del fluido all'interno del vaso.

Dividendo entrambi i membri per h, e calcolando il limite per $h \to 0$, otteniamo

$$y' = -ay. \tag{132.2}$$

Abbiamo già calcolato le soluzioni dell'equazione differenziale (132.2). Se la concentrazione è nota in un punto x_0, sia $y(x_0) = y_0$, si trova la soluzione

$$y(x) = y_0\, e^{-a(x - x_0)}\,. \tag{132.3}$$

CAPITOLO 16

MODELLI MATEMATICI IN DINAMICA DI POPOLAZIONI

Abbiamo già incontrato nei paragrafi 15, 48, 75, 124 semplici modelli di crescita di una popolazione di individui, o di batteri, oppure di crescita di un corpo o di un insieme di cellule. In questo capitolo riprendiamo l'argomento per studiare alcune leggi significative di crescita.

132. Crescita di una popolazione isolata

Indichiamo con $p(t)$ (≥ 0) il numero degli individui di una popolazione in funzione del tempo. Supponiamo che la popolazione sia *isolata*, cioè che la crescita non sia influenzata da fattori esterni.

Indichiamo con t, $t + h$ ($h \neq 0$) due istanti di tempo. Come nel paragrafo 124 supporremo che la crescita della popolazione, nell'intervallo di tempo h, sia proporzionale alla popolazione stessa e all'intervallo di tempo:

$$p(t + h) - p(t) = ahp(t). \tag{132.1}$$

Il fattore di proporzionalità a può essere considerato costante in un piccolo intervallo di tempo. Però ciò non è realistico in un lungo intervallo di tempo; infatti è ragionevole pensare che maggiore è il numero degli individui, peggiori divengano le condizioni ambientali e di conseguenza minore divenga la capacità di riproduzione. Perciò si ottiene un modello più realistico supponendo che a sia una funzione decrescente di p.

Il belga Verhulst ha proposto un modello basato su una funzione $a(p)$ lineare:

$$a(p) = -mp + q, \tag{132.2}$$

con m,q costanti positive. A causa del segno meno, la funzione $a(p)$ è decrescente. Il grafico di $a(p)$ è riportato in figura 16.1.

Essendo interessati al caso $a(p) > 0$, supporremo che

$$0 < p < q/m. \tag{132.3}$$

Prima di procedere oltre è opportuno osservare che, per ogni t, $p(t)$ è un numero intero; quindi la funzione $p(t)$, se non è costante, è discontinua. Nelle applicazioni è interessante considerare popolazioni con un grande numero di individui; in tal caso, non si modifica la sostanza del modello supponendo che $p(t)$ vari con continuità rispetto al tempo. Anzi, più precisamente, supporremo che $p(t)$ sia derivabile rispetto al tempo.

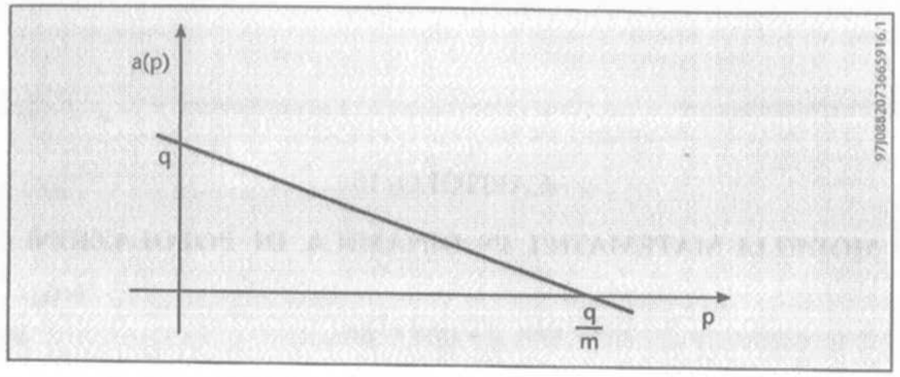


Figura 16.1

Come nel paragrafo 124, dividiamo entrambi i membri dell'equazione (132.1) per h, e calcoliamo il limite per $h \to 0$; abbiamo

(132.4) $$p' = ap.$$

Tenendo presente l'espressione (132.2) di $a = a(p)$, otteniamo l'equazione differenziale

(132.5) $$p' = qp - m\,p^2 .$$

Si tratta di un'equazione differenziale del primo ordine di Bernoulli, che possiamo risolvere con il metodo del paragrafo 127. Cominciamo con l'osservare che la soluzione identicamente nulla non è di interesse nel nostro caso concreto. Dividiamo entrambi i membri per p^2:

(132.6) $$\frac{p'}{p^2} = q\,\frac{1}{p} - m.$$

Poniamo $z(t) = 1/p(t)$. Risulta $z' = -\,p'/p^2$; quindi

(132.7) $$z' = -\,qz + m.$$

Abbiamo ottenuto una equazione lineare nell'incognita $z(t)$, che si risolve con la formula (125.2). Una primitiva della funzione costante $-\,q$ è $A(t) = -\,qt$; quindi

(132.8) $$z(t) = e^{-qt}\int e^{qt}\,m\,dt = \frac{1}{q}\,e^{-qt}\int q\,e^{qt}\,m\,dt = \frac{1}{q}\,e^{-qt}\,(m\,e^{qt} + c) = \frac{m}{q} + c\,e^{-qt} .$$

Ricordando che $p = 1/z$, si ottiene

(132.9) $$p(t) = \frac{q}{m + cq\,e^{-qt}} .$$

La soluzione $p(t)$ trovata è definita per ogni t se la costante c è positiva; inoltre, in tal caso

(132.10) $$0 < p(t) = \frac{q}{m + cq\,e^{-qt}} < \frac{q}{m} ;$$

quindi, se $c > 0$, le condizioni (132.3) sono verificate.

La funzione $p(t)$ in (132.9), detta *funzione logistica*, è crescente; dato che il coefficiente ad esponente della funzione esponenziale è negativo, per $t \to +\infty$, $p(t)$ tende al valore

(132.11) $$\lim_{t\to+\infty} p(t) = \frac{q}{m} .$$

Il lettore è invitato a verificare, calcolando le derivate prime e seconde, che, se c, m, q sono positivi, la funzione $p(t)$ è strettamente crescente per ogni t, è convessa per $t < (1/q)\log(cq/m)$ ed è concava altrimenti. In figura 16.2 è disegnato il grafico di $p(t)$.

Si noti che inizialmente $p(t)$ cresce lentamente; poi la crescita diventa più rapida, in prossimità del punto di flesso; infine, per $t \to +\infty$, $p(t)$ cresce più lentamente ed il tasso di accrescimento $p'(t)$ tende a zero. Si noti anche che, per valori di $p(t)$ vicini a zero, la funzione $p(t)$ è convessa ed ha un grafico simile alla funzione esponenziale. Ciò significa che il modello assunto nel paragrafo 124, che ha come soluzione la funzione esponenziale (124.5), è realistico solo se la popolazione non è troppo grande.

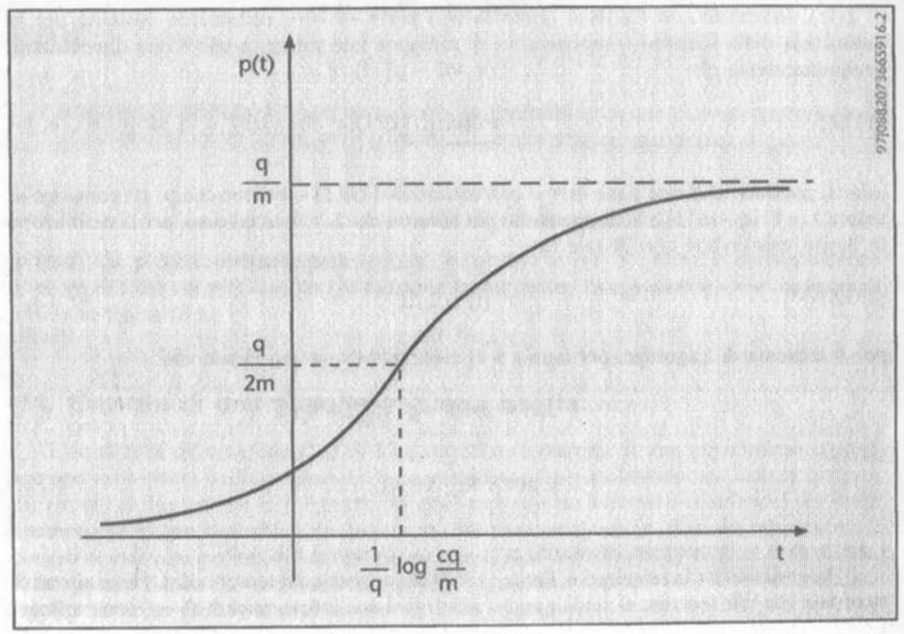


Figura 16.2

133. Integrazione grafica

Sia per l'interesse in sé, che per introdurre il *metodo di integrazione grafica* che utilizzeremo anche nel paragrafo seguente, mostriamo come ottenere le proprietà del grafico delle soluzioni p(t) dell'equazione differenziale (132.5), indipendentemente dalla loro espressione analitica.

Riprendiamo l'equazione differenziale (132.5), osservando che il metodo proposto si applica anche a casi più generali:

$$p'(t) = q \cdot p(t) - m \cdot [p(t)]^2 = \tag{133.1}$$
$$= p(t) \cdot [q - m \cdot p(t)].$$

In base alle limitazioni (132.3):

$$p(t) > 0, \qquad p(t) < \frac{q}{m}, \tag{133.2}$$

il secondo membro dell'equazione differenziale (133.1) è maggiore di zero; perciò anche

$$p'(t) > 0, \qquad \forall t, \tag{133.3}$$

sempre che siano verificate le limitazioni (133.2).

La funzione p(t) è quindi crescente e limitata su **R** (che, si può dimostrare, è il dominio di p(t)). Indicando con $\ell \in \mathbf{R}$ il limite di p(t) per $t \to +\infty$, certamente esistente per la monotonia della funzione, proponiamoci di calcolare tale valore; a tale scopo dimostriamo preliminarmente che

$$\lim_{t \to +\infty} p'(t) = 0\,; \tag{133.4}$$

infatti, passando al limite per $t \to +\infty$ nell'equazione (133.1) si ottiene che p′ (t) converge al valore $L = \ell \cdot [q - m \cdot \ell] \geq 0$. Supponiamo per assurdo che $L > 0$; in tal caso, per la definizione di limite, esisterebbe $t_1 \in \mathbf{R}$ tale che

$$p'(t) > L/2, \qquad \forall t > t_1\,; \tag{133.5}$$

per il teorema di Lagrange, per ogni $t > t_1$ esisterebbe $t_2 \in [t_1, t]$ tale che

$$p(t) = p(t_1) + p'(t_2)(t - t_1) \geq \tag{133.6}$$
$$\geq p(t_1) + \frac{L}{2}(t - t_1)$$

e per $t \to +\infty$ troveremmo l'assurdo $p(t) \to +\infty$. Pertanto è $L = 0$.

Osserviamo che la relazione di limite (133.4) segue anche dal teorema di L'Hôpital, pur di ricordare che tale teorema si applica anche alla forma *non* indeterminata $\infty/(+\infty)$ con $\ell \in \mathbf{R}$; infatti, dato che p′ (t) ammette limite (uguale ad L) per $t \to +\infty$, vale la tesi del teorema, la quale afferma che

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{p(t)}{t} = \lim_{t \to +\infty} p'(t) \tag{133.7}$$

e la conclusione (133.4) segue dal fatto che il limite a primo membro vale $\ell/(+\infty) = 0$.

Con due diverse dimostrazioni la (133.4) è quindi provata.

Passando al limite per $t \to +\infty$ in entrambi i membri dell'equazione differenziale (133.1) otteniamo

$$0 = \ell \cdot [q - m \cdot \ell], \tag{133.8}$$

da cui segue che $\ell = 0$, oppure che $\ell = q/m$; essendo p(t) una funzione positiva e crescente, il suo limite ℓ per $t \to +\infty$ non può essere uguale a zero; pertanto è $\ell = q/m$, cioè

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = \frac{q}{m}\,; \tag{133.9}$$

inoltre, con lo stesso ragionamento si vede che

$$\lim_{t \to -\infty} p(t) = 0. \tag{133.10}$$

Tali valori di limite giustificano l'esistenza dei due asintoti orizzontali in figura 16.2.

Deriviamo entrambi i membri dell'equazione differenziale alla ricerca dei punti di flesso:

$$p''(t) = qp'(t) - 2m\, p(t) \cdot p'(t) = \tag{133.11}$$
$$= p'(t)\,[q - 2m\, p(t)]\,;$$

per la condizione $p' > 0$ (si veda la (133.3)) risulta

$$p''(t) \geq 0 \iff p(t) \leq \frac{q}{2m}\,; \tag{133.12}$$

ne segue che p(t) è convessa se $p(t) \leq q/(2m)$, è concava se $p(t) \geq q/(2m)$; in corrispondenza al valore di t per cui $p(t) = q/(2m)$ la funzione ha un flesso. Tali proprietà sono conformi al grafico in figura 16.2.

134. Crescita di una popolazione non isolata

L'equazione differenziale (132.5) è un modello di crescita di una popolazione isolata, cioè non influenzata da fattori esterni. Se si considera una popolazione non isolata, occorre tener conto di due termini E, I, il primo dei quali rappresenta il numero di individui per unità di tempo che *emigra*, cioè che lascia la zona in osservazione; il termine I invece rappresenta il numero di individui per unità di tempo che *immigra*, cioè che entra nella regione considerata. Naturalmente il tasso di accrescimento p′ (t) è crescente rispetto ad I ed è decrescente rispetto ad E. La (132.5) si modifica nel modello seguente:

$$p' = qp - m\,p^2 + I - E. \tag{134.1}$$

Ricordiamo che m, q sono costanti positive. In generale I ed E possono essere funzioni dipendenti da t, ed anche da p. Per semplicità ci limitiamo a considerare I, E costanti positive.

L'equazione differenziale (134.1) è non lineare del primo ordine. Se m, q, E, I sono costanti, l'equazione è a variabili separabili di tipo particolare, noto con il nome di *equazione di Riccati*. Qui non seguiremo la via della risoluzione esplicita, ma determineremo l'andamento delle soluzioni direttamente della struttura dell'equazione (134.1), con il metodo di *integrazione grafica* introdotto nel paragrafo precedente.

Consideriamo la funzione di secondo grado nella variabile reale x:

$$f(x) = -m x^2 + qx + I - E ; \tag{134.2}$$

il grafico di f(x) è costituito da una parabola concava che interseca l'asse delle x se e soltanto se il discriminante

$$\Delta = q^2 + 4m(I - E) \tag{134.3}$$

non risulta negativo. In tal caso indichiamo con x_1, x_2 ($x_1 \le x_2$) le due radici dell'equazione $f(x) = 0$.

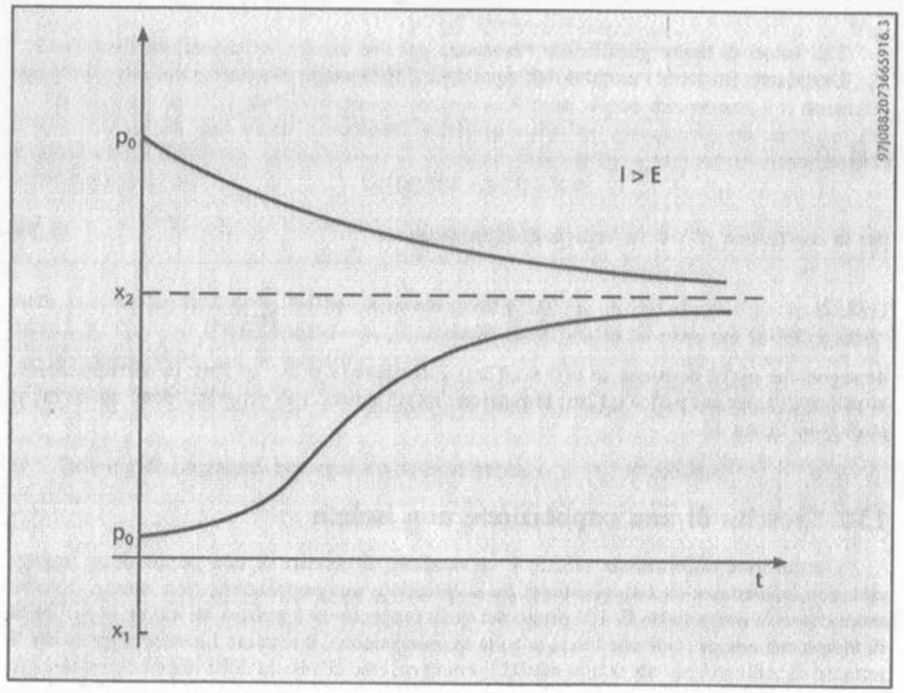


Figura 16.3

Consideriamo una soluzione p(t) dell'equazione differenziale (134.1) che per t = 0

assume un valore assegnato p_0. Dato che p(t) è una misura del numero degli individui di una popolazione, supporremo che p(t) e p_0 siano quantità non negative. Tramite la funzione f(x), definita in (134.2), possiamo dire che p(t) è soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} p'(t) = f(p(t)) \\ p(0) = p_0 \end{cases} \tag{134.4}$$

Discutiamo preliminarmente il caso I > E, in cui l'immigrazione è superiore all'emigrazione; successivamente supporremo I < E. Il caso I = E è identico al caso discusso nel paragrafo precedente.

Se I > E, il discriminante Δ in (134.3) risulta positivo. L'equazione algebrica $f(x) = 0$ ha due radici distinte x_1, x_2; il prodotto x_1x_2, uguale a $(I - E)/(-m)$ è negativo (si veda la (14.3)); quindi la radice x_1 è negativa, mentre x_2 è positiva. Ci proponiamo di verificare che p(t) converge a x_2 per $t \to +\infty$, e che l'andamento di p(t) è descritto dal grafico in figura 16.3.

Se il dato iniziale p_0 è uguale ad x_2 allora la soluzione del problema di Cauchy (134.4) è la funzione costante $p(t) = p_0 = x_2$. Infatti in tal caso $p' = 0 = f(p)$. Si può verificare che, se $p_0 > x_2$, allora risulta $p(t) > x_2$ per ogni t; viceversa, se $p_0 < x_2$, allora $p(t) < x_2$ per ogni t.

La funzione di secondo grado f(x) è positiva all'interno dell'intervallo delle radici (x_1, x_2); quindi, se $p(t) < x_2$, risulta $f(p(t)) > 0$. Perciò in tal caso la derivata $p' = f(p)$ è positiva, cioè p(t) è crescente. Pertanto esiste il limite per $t \to +\infty$ di p(t); indichiamo con ℓ ($< +\infty$) tale limite.

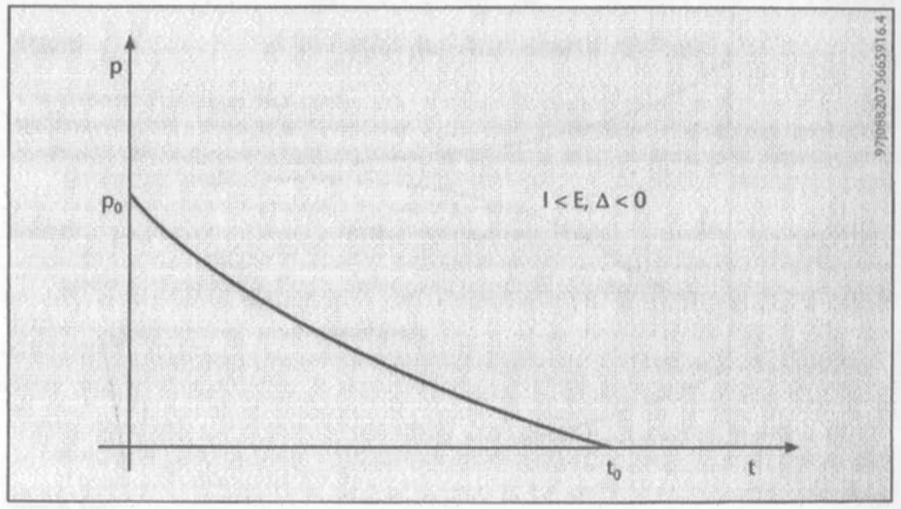


Figura 16.4

Dato che, come nel paragrafo precedente, risulta

$$\lim_{t \to +\infty} p'(t) = 0, \tag{134.5}$$

passando al limite per $t \to +\infty$ nell'equazione differenziale troviamo

(134.6) $$0 = \lim_{t \to +\infty} p'(t) = \lim_{t \to +\infty} f(p(t)) = f(\ell).$$

Quindi ℓ è una radice positiva di $f(x) = 0$; cioè $\ell = x_2$. Il grafico in figura 16.3 è giustificato se $p_0 \le x_2$.

Nel caso che p_0 sia maggiore di x_2, dato che la funzione f è negativa all'esterno dell'intervallo delle radici $[x_1, x_2]$, risulta $p'(t) = f(p(t)) < 0$. Quindi p(t) è decrescente, e si verifica come in precedenza che converge a x_2 per $t \to +\infty$. Quindi il grafico in figura 16.3 è giustificato anche se $p_0 > x_2$.

Supponiamo ora che l'emigrazione sia maggiore dell'immigrazione, cioè che $I < E$. Il discriminante è somma algebrica di due numeri reali di segno opposto; distinguiamo i casi $\Delta < 0$, $\Delta \ge 0$.

Se $I < E$ e $\Delta < 0$, l'equazione di secondo grado $f(x) = 0$ non ha radici reali e risulta $f(x) < 0$ per ogni x; quindi $p'(t) = f(p(t)) < 0$ e la funzione p(t) è decrescente, come in figura 16.4.

Se, come in precedenza, la funzione p(t) avesse un limite finito ℓ per $t \to +\infty$, tale numero ℓ dovrebbe essere una radice dell'equazione $f(x) = 0$. Quindi p(t) non può convergere ad un limite finito ℓ, perciò deve divergere a $-\infty$. Dato che siamo interessati ad una soluzione $p(t) \ge 0$, la funzione p(t) descrive il fenomeno fino ad un istante di tempo t_0, in cui $p(t_0) = 0$. In tale istante la popolazione si estingue.

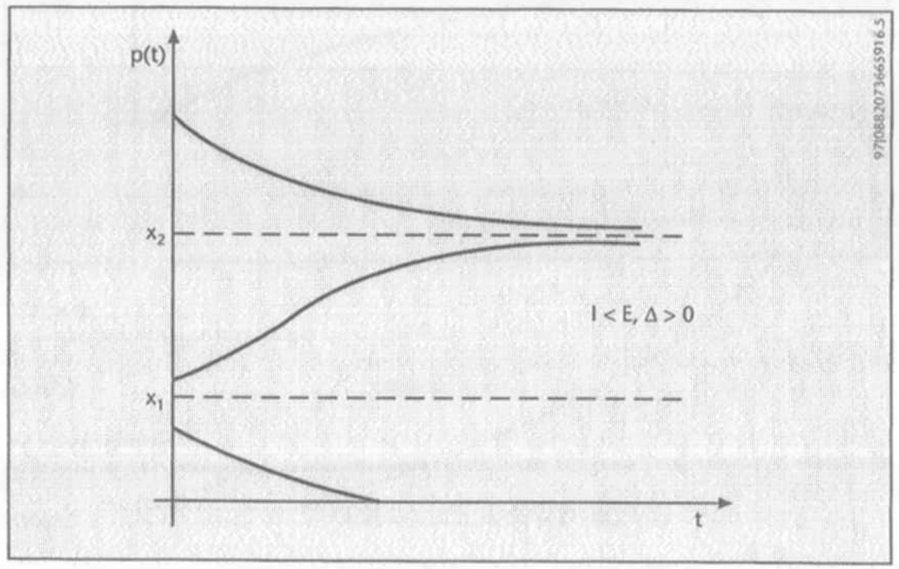


Figura 16.5

Se risulta $I < E$ e $\Delta > 0$ (il caso $\Delta = 0$ è simile) l'equazione $f(x) = 0$ ha due radici x_1, x_2 positive, perché il prodotto $x_1 x_2 = (I - E)/(-m)$ e la somma $x_1 + x_2 = -q/(-m)$ sono positivi. Occorre distinguere i casi in cui la popolazione iniziale è compresa tra 0 e x_1 tra x_1 e x_2, o maggiore di x_2. In corrispondenza si ha

(134.7) $$p_0 \in (0, x_1) \Rightarrow p' = f(p) < 0 \Rightarrow p(t) \textit{ decrescente};$$

(134.8) $$p_0 \in (x_1, x_2) \Rightarrow p' = f(p) > 0 \Rightarrow p(t) \textit{ crescente};$$

(134.9) $$p_0 \in (x_2, +\infty) \Rightarrow p' = f(p) < 0 \Rightarrow p(t) \textit{ decrescente}.$$

Si verifica come in precedenza che il grafico di p(t), nei tre casi, è quello riprodotto in figura 16.5.

Il numero x_1 rappresenta la *soglia di sopravvivenza*. Se il valore iniziale è maggiore di x_1, la popolazione cresce e tende a stabilizzarsi intorno al valore limite x_2; se invece il dato iniziale è inferiore a x_1, allora la popolazione è decrescente e si estingue in tempo finito.

135. Diffusione di una infezione

Studiamo la velocità con cui si trasmette un'infezione. Indichiamo con P il numero totale di individui che sono sensibili al contagio; indichiamo inoltre con p(t) il numero degli individui portatori dell'infezione. Quindi il numero degli individui sensibili al contagio, ma non ancora portatori dell'infezione, è dato dalla differenza $P - p(t)$.

È realistico pensare che il contagio si diffonda tanto più rapidamente, quanto più è alto il numero degli individui malati, ed anche quanto più è alto il numero degli individui sani. Supporremo che il tasso di accrescimento $p'(t)$ sia proporzionale, secondo una costante k, alle quantità p(t) e $P - p(t)$; cioè:

(135.1) $$p'(t) = k\,p(t)\,[P - p(t)] = kPp(t) - k\,p^2(t).$$

Si tratta di un'equazione differenziale di Bernoulli, che può essere risolta con il metodo del paragrafo 125. Procedendo come fatto per risolvere l'equazione differenziale (132.5), imponendo la condizione iniziale $p(0) = p_0$, si ritrova la *funzione logistica*:

(135.2) $$p(t) = \frac{P\,p_0}{p_0 + (P - p_0)\,e^{-kPt}}.$$

Il grafico di p(t) in figura 16.6 è simile al grafico in figura 16.2. La funzione p(t) risulta crescente, cioè il contagio aumenta rispetto al tempo. In un primo tempo il contagio aumenta lentamente; il momento di massima espansione dell'infezione si ha in prossimità del punto di flesso della funzione p(t), dove la pendenza della curva, cioè la derivata, è massima; infine, per $t \to +\infty$, la velocità di diffusione del contagio diminuisce ($p'(t) \to 0$) ed il numero di persone infette p(t) tende, per $t \to +\infty$, al numero totale P di individui sensibili al contagio.

Per la determinazione della massima velocità di diffusione dell'infezione, si può procedere calcolando il massimo della funzione derivata $p'(t)$, che si trova in corrispondenza al punto (di flesso) t per cui si annulla la derivata seconda $p''(t)$ della funzione in (135.2).

A tale scopo è utile il metodo di integrazione grafica del paragrafo 133; come nella (133.11), derivando entrambi i membri dell'equazione differenziale (135.1), otteniamo

(135.3) $$\begin{aligned} p''(t) &= kPp'(t) - 2kp(t)\cdot p'(t) = \\ &= kp'(t)\,[P - 2p(t)]; \end{aligned}$$

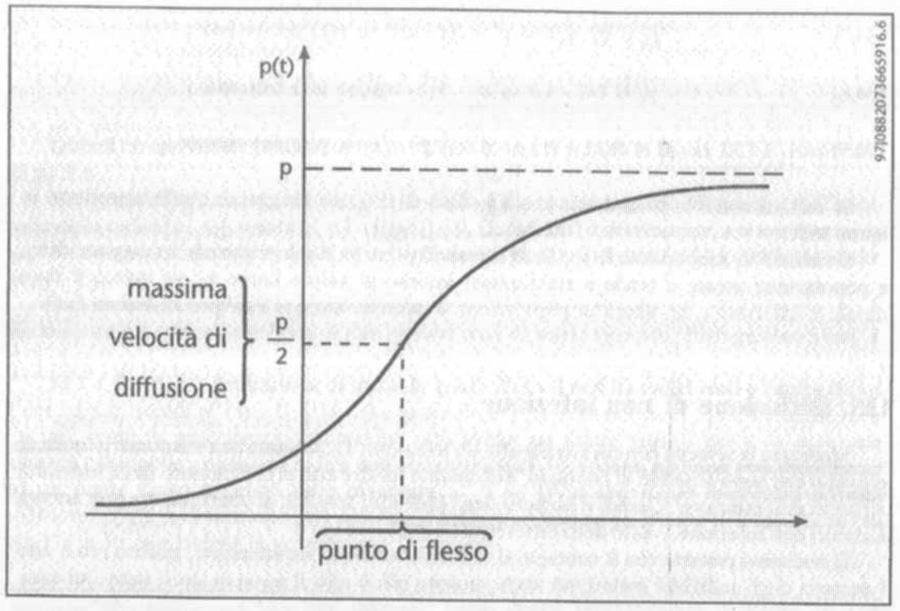


Figura 16.6

dato che $p'(t) > 0$ per ogni $t \in \mathbf{R}$, risulta $p''(t) > 0$ se $P - 2p(t) > 0$ (ed in corrispondenza $p'(t)$ è crescente) e $p''(t) < 0$ se $P - 2p(t) < 0$ (con $p'(t)$ decrescente).

Quindi, se $p(t) = P/2$, la velocità di diffusione $p'(t)$ è minima. In definitiva si è trovato che la massima velocità di espansione dell'infezione si ha quando il numero degli individui contagiati $p(t)$ è pari alla metà del totale P degli individui sensibili al contagio.

136. Un modello di crescita della popolazione mondiale

Nel paragrafo 132 abbiamo ricavato la funzione

$$p(t) = \frac{q}{m + cq\, e^{-qt}} \tag{136.1}$$

come soluzione dell'equazione differenziale (132.5), che descrive un modello di crescita di una popolazione isolata.

In questo paragrafo proponiamo un metodo per la determinazione dei parametri c, m, q che appaiono in (136.1), nel caso in cui il modello di crescita della popolazione isolata sia relativo alla *popolazione mondiale*.

Notiamo che è ragionevole pensare alla evoluzione della popolazione umana della terra come alla evoluzione di un sistema isolato; osserviamo anche che il modello andrebbe perfezionato con l'esame più dettagliato delle zone industrializzate e non, ricche e povere, ecc. In ogni caso, il considerare la popolazione del globo indifferenziata per zone fornisce dei

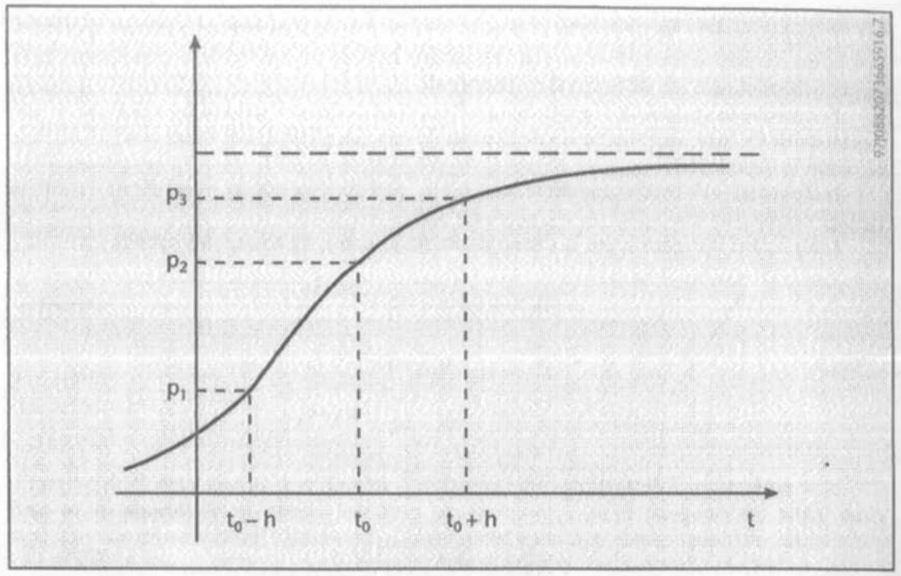


Figura 16.7

buoni risultati per una prima analisi.

Come ultima osservazione notiamo che, nelle applicazioni, si procede preliminarmente ad una analisi statistica dei dati sperimentali e si applica poi il *metodo dei minimi quadrati* per la determinazione dei parametri, come indicato nel capitolo che segue.

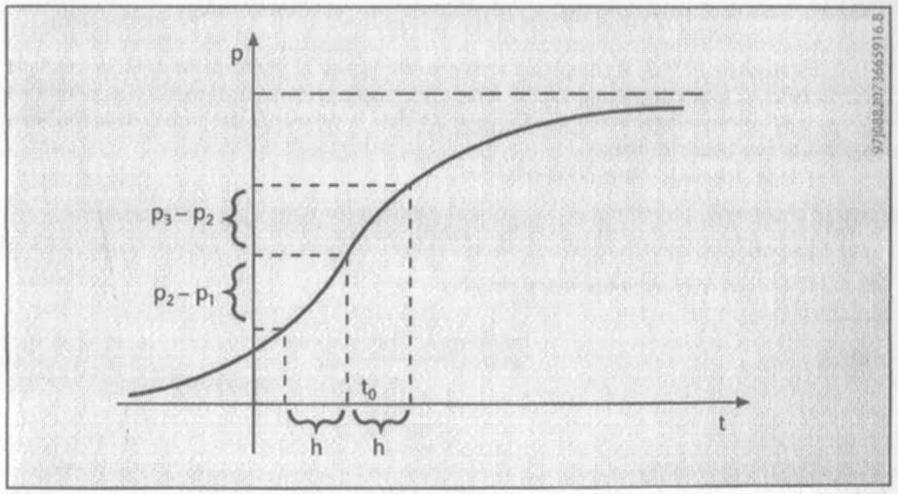


Figura 16.8

I tre parametri c, m, q in (136.1) possono essere determinati in base a misure sperimentali, stime, censimenti; a tale scopo sono necessarie almeno tre misure della popolazione p(t), in corrispondenza a tre distinti valori temporali.

Per motivi di semplicità di rappresentazione, consideriamo il caso di tre valori del tempo equidistanti fra loro; indichiamo il valore centrale con t_0 e gli altri due valori con $t_0 - h$ e $t_0 + h$, come in figura 16.7.

Indichiamo, nell'ordine crescente, con p_1, p_2, p_3 i corrispondenti valori di p(t), come in figura; assumiamo che t_0, h, p_1, p_2, p_3 siano noti.

I parametri incogniti c, m, q vanno determinati come soluzione del sistema

$$\text{(136.2)} \qquad \begin{cases} p_1 = q \cdot (m + cq\, e^{-q(t_0 - h)})^{-1} \\ p_2 = q \cdot (m + cq\, e^{-q t_0})^{-1} \\ p_3 = q \cdot (m + cq\, e^{-q(t_0 + h)})^{-1} \end{cases} .$$

Non entriamo nei dettagli di come risolvere il sistema non lineare (136.2) in tre equazioni, nelle tre incognite c, m, q; proponiamo però nel seguito la risoluzione in un caso particolare. Comunque, per il lettore interessato a completare la dimostrazione nel caso generale, forniamo la soluzione in termini della funzione p(t) in (136.1), che è data da

$$\text{(136.3)} \qquad p(t) = \frac{p_2\,[p_2\,(p_1 + p_3) - 2\,p_1\,p_3]}{(p_2^2 - p_1\,p_3) + [p_2\,(p_1 + p_3) - (p_2^2 + p_1\,p_3)]\left[\dfrac{(p_2 - p_1)\,p_3}{(p_3 - p_2)\,p_1}\right]^{(t_0 - t)/h}}$$

(osserviamo che è necessario imporre alcune condizioni di compatibilità sui valori p_1, p_2, p_3, affinché p(t) risulti una *funzione logistica*, come quella rappresentata in figura 16.7; ad esempio occorre imporre che $(p_2^2 - p_1 p_3) > 0$ ed altre condizioni simili).

L'espressione (136.3) si semplifica se t_0 è scelto uguale al punto di flesso della funzione p(t); in tal caso, non solo gli intervalli di tempo, ma anche i relativi incrementi di popolazione $p_2 - p_1$ e $p_3 - p_2$ sono uguali fra loro (figura 16.8), data la simmetria del grafico della funzione rispetto al suo punto di flesso.

Pertanto, tenendo conto delle relazioni

$$\text{(136.4)} \qquad p_2 - p_1 = p_3 - p_2 , \qquad p_1 + p_3 = 2\,p_2 ,$$

da (136.3), dopo aver semplificato, si ottiene

$$\text{(136.5)} \qquad p(t) = \frac{2\,p_2}{1 + \left(\dfrac{p_3}{p_1}\right)^{(t_0 - t)/h}} .$$

Proponiamo la risoluzione del sistema (136.2) nelle condizioni anzidette, cioè nell'ipotesi (136.4); considerando i reciproci e sottraendo membro a membro otteniamo

$$\text{(136.6)} \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_2} = c\, e^{-q t_0}\,(e^{qh} - 1) \\[2ex] \dfrac{1}{p_2} - \dfrac{1}{p_3} = c\, e^{-q t_0}\,(1 - e^{-qh}) \end{cases}$$

da cui, dividendo membro a membro

$$\text{(136.7)} \qquad \frac{\dfrac{1}{p_1} - \dfrac{1}{p_2}}{\dfrac{1}{p_2} - \dfrac{1}{p_3}} = \frac{e^{qh} - 1}{1 - \dfrac{1}{e^{qh}}} = e^{qh} ;$$

in definitiva

$$\text{(136.8)} \qquad e^{qh} = \frac{(p_2 - p_1) \cdot p_3}{(p_3 - p_2) \cdot p_1}$$

da cui è possibile ricavare qh; è però preferibile, in vista della sostituzione dei valori trovati nell'espressione analitica di p(t) in (136.1), osservare che risulta

$$\text{(136.9)} \qquad e^{-qt} = \left[\frac{(p_2 - p_1)\,p_3}{(p_3 - p_2)\,p_1}\right]^{-t/h} .$$

Ciò spiega il termine esponenziale nella formula di rappresentazione (136.3) relativa al caso generale.

Nell'ipotesi (136.4), in cui $p_2 - p_1 = p_3 - p_2$, otteniamo

$$\text{(136.10)} \qquad e^{-qt} = \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{-t/h}$$

ed in particolare, per $t = t_0$,

$$\text{(136.11)} \qquad e^{-q t_0} = \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{-t_0/h} .$$

Ricordando che $p_2 = p(t_0)$, valore della funzione p(t) nel punto di flesso t_0, è uguale a

$$\text{(136.12)} \qquad p_2 = \frac{q}{2m}$$

(si veda il paragrafo 133 e la figura 16.2), otteniamo

$$\text{(136.13)} \qquad \begin{aligned} \frac{2m}{q} = \frac{1}{p(t_0)} &= \frac{m + cq\, e^{-q t_0}}{q} = \\ &= \frac{m}{q} + c\left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{-t_0/h} \end{aligned}$$

e in definitiva

$$\frac{m}{q} = c\left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{-t_0/h} \tag{136.14}$$

Sostituendo i valori (136.10), (136.12), (136.14) nell'espressione generale di p(t), otteniamo

$$p(t) = \frac{q}{m + cq\,e^{-qt}} = \frac{1}{\frac{m}{q} + c\,e^{-qt}} =$$

$$= \frac{1}{\frac{m}{q}\left[1 + \left(c \cdot \frac{q}{m}\right) e^{-qt}\right]} = \frac{q/m}{1 + \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{t_0/h} \cdot \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{-t/h}} = \tag{136.15}$$

$$= \frac{2\,p_2}{1 + \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^{(t_0 - t)/h}},$$

in accordo con la tesi (136.5).

A partire della (136.5), secondo i dati e le proiezioni dei demografi delle Nazioni Unite, si scrive la formula (con $p_1 = 5$, $p_2 = 6$, $p_3 = 7$, $h = 11$ e t_0, punto di flesso, uguale a 1998):

$$p(t) = \frac{12}{1 + \left(\frac{7}{5}\right)^{(1998-t)/11}}, \tag{136.16}$$

dove il tempo t è misurato in *anni* e la popolazione p(t) è misurata in *miliardi* di individui.

Da tale funzione logistica p(t) si ricavano in particolare i valori

$$\begin{aligned} p(1987) &= 5 \textit{ miliardi} \\ p(1998) &= 6 \textit{ miliardi} \\ p(2009) &= 7 \textit{ miliardi} \end{aligned} \tag{136.17}$$

e, facendo uso di una calcolatrice, si ottiene la tabella in figura 16.9 (con valori troncati alla terza cifra decimale).

Popolazione mondiale (in miliardi di individui)

anno	1998	2000	2002	2004	2006	2008	2010	2012
popolazione	6	6.183	6.366	6.549	6.730	6.910	7.088	7.265

anno	2014	2016	2018	2020	2022	2024	2026	2028
popolazione	7.439	7.611	7.780	7.945	8.108	8.267	8.423	8.574

anno	2030	2032	2034	2036	2038	2040	2042	2044
popolazione	8.722	8.866	9.005	9.141	9.272	9.399	9.521	9.639

Figura 16.9

Occorre osservare che i valori della popolazione riportati nella tabella sono soltanto indicativi; l'approssimazione con il dato reale peggiora, in genere, se il tempo t si allontana dall'ultima misura effettiva. Per tale motivo i parametri vanno aggiornati periodicamente.

Per finire notiamo che il *valore asintotico* per la popolazione mondiale secondo lo sviluppo previsto dalla funzione logistica (136.16) è

$$\lim_{t \to +\infty} p(t) = 12 \textit{ miliardi}. \tag{136.18}$$

CAPITOLO 17

ELABORAZIONE STATISTICA DI DATI SPERIMENTALI

137. Regressione lineare

Molti esperimenti sono finalizzati a determinare la relazione che intercorre tra una variabile indipendente x, ed un'altra variabile y, cioè a determinare una funzione $y = f(x)$. Nelle applicazioni spesso la variabile x rappresenta il tempo, ma può rappresentare anche altre quantità, come ad esempio il peso di una sostanza chimica, l'intensità di uno stimolo elettrico, una temperatura. Nell'esempio che esaminiamo nella seconda parte di questo paragrafo x rappresenta una velocità.

In un esperimento spesso si misura la risposta y in funzione di un certo numero (finito) di valori della x. Dall'insieme delle coppie (x, y) ottenute si cerca di risalire alla legge che lega x con y, cioè alla funzione $y = f(x)$. In Statistica si parla anche di *regressione* di y rispetto ad x. Ciò permette poi di calcolare, senza ricorrere di nuovo all'esperimento, il valore di y per nuovi (infiniti) valori della x.

In questo capitolo esaminiamo la *regressione lineare*, che corrisponde a cercare una funzione $y = f(x)$ lineare; cioè esaminiamo un metodo per determinare i due coefficienti m, q della funzione $y = mx + q$, in dipendenza dei dati trovati sperimentalmente. Vedremo nel paragrafo 141 che il metodo proposto è applicabile anche ad altre situazioni in cui la funzione $y = f(x)$ non è lineare, ma, ad esempio, è di tipo esponenziale o logaritmico.

Esaminiamo nel seguito i risultati di un esperimento. Consideriamo una situazione particolare, i cui aspetti statistico-matematici si ripetono frequentemente nelle applicazioni.

Mediante un'apparecchiatura apposita, uno *spirometro*, si può valutare il volume d'aria che entra od esce dai polmoni di un individuo, e si può valutare anche il volume di ossigeno respirato. In un esperimento viene misurato l'ossigeno consumato da un individuo che cammina. Vengono effettuate varie misure in corrispondenza a varie velocità dell'individuo. I valori ottenuti sono riportati nella tabella seguente e nel grafico in figura 17.1.

velocità km/h	0	1	2	3	4	5	6	7	8
ossigeno litri/h	19	20	20.5	21.5	22	23	23	23.5	24

Dal grafico risulta chiaramente che il volume di ossigeno consumato è all'incirca una *funzione lineare* della velocità dell'individuo. Però, anche a causa degli errori di misura da cui è affetto ogni esperimento, i punti non sono perfettamente allineati. Come scegliere la retta che meglio descrive la funzione: *velocità* $\rightarrow$ *ossigeno* ? Nei paragrafi seguenti indichiamo un metodo per effettuare tale scelta.

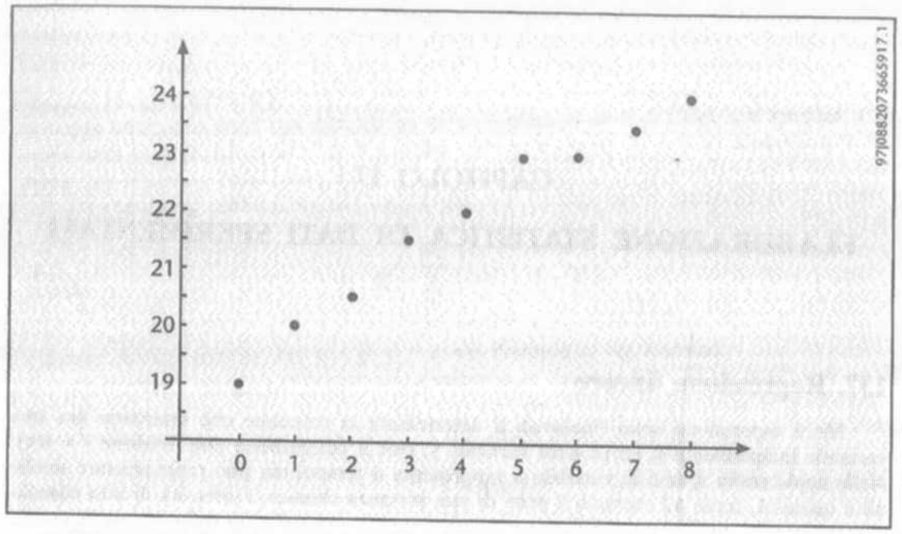


Figura 17.1

138. Media aritmetica, varianza, deviazione standard

Introduciamo in questo paragrafo alcune definizioni, molto usate in Statistica, relative ad un insieme di n numeri reali $\{x_1, x_2,...,x_n\}$.

Fissato un altro numero reale x, la distanza tra x ed x_1 è data da $x - x_1$, se $x > x_1$; oppure è $x_1 - x$ se $x_1 > x$. Cioè, ricordando la definizione (8.3) di valore assoluto, la distanza tra x ed x_1 è misurata da $|x - x_1|$. Per eseguire i conti, è però più comodo considerare il quadrato della distanza $(x - x_1)^2$. La funzione

$$f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x - x_k)^2 \tag{138.1}$$

esprime una misura della distanza del numero x dagli altri numeri dell'insieme $\{x_1, x_2,...,x_n\}$. Il fattore moltiplicativo 1/n non è determinante, ma è utile perché normalizza la funzione in base al numero dei punti. In altre applicazioni di tipo statistico si usa il fattore 1/(n – 1), invece di 1/n.

Consideriamo il seguente problema: *esiste un numero reale* x *che è il più vicino possibile agli altri numeri* $x_1, x_2,...,x_n$? *Più precisamente, esiste, è unico, qual'è il punto di minimo della funzione* f(x) *in* (138.1)?

Abbiamo imparato a trovare i punti di minimo di una funzione per mezzo delle sue derivate prime e seconde (si ricordi la (117.11)). Tenendo conto che $\sum_{k=1}^{n} x = x + x + ... + x = nx$, abbiamo

$$f'(x) = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n}(x - x_k) = \frac{2}{n}\left(nx - \sum_{k=1}^{n} x_k\right); \tag{138.2}$$

$$f''(x) = 2. \tag{138.3}$$

La derivata seconda è positiva; perciò f(x) è una funzione convessa. Inoltre f(x) è un polinomio di secondo grado; ciò si riconosce dalla definizione (138.1), oppure dal fatto che la derivata seconda f″ è costante. Quindi il grafico di f(x) è una parabola convessa.

Dato che la derivata seconda è positiva, se in un punto la derivata prima è nulla, tale punto è necessariamente di minimo. Ponendo in (138.2) f′(x) = 0, si trova l'unico punto di minimo $\bar{x}$:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,. \tag{138.4}$$

Il numero $\bar{x}$ è la *media aritmetica* degli n numeri $x_1, x_2,...,x_n$. Si usa l'aggettivo «aritmetica», per distinguere $\bar{x}$ da altri tipi di media. Si dice anche che $\bar{x}$ è la *media statistica*, o il *baricentro* degli n punti.

Il valore minimo $f(\bar{x})$ della funzione f si chiama *varianza*. La varianza si indica spesso con s^2 (o con σ^2) (si veda il paragrafo 73); quindi

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x} - x_k)^2\,. \tag{138.5}$$

La radice quadrata della varianza è la *deviazione standard:*

$$s = \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x} - x_k)^2\right)^{1/2}. \tag{138.6}$$

La varianza, ed anche la deviazione standard, è una misura di quanto i punti siano sparpagliati. Ad esempio, dalla (138.5) risulta che s = 0 solo se $(\bar{x} - x_k) = 0$ per ogni k, cioè solo se tutti i numeri x_k coincidono tra loro ($x_k = \bar{x}$ per ogni k).

Sarà utile nel seguito l'espressione della varianza che si ottiene svolgendo i quadrati; nel terzo passaggio usiamo la definizione (138.4) di $\bar{x}$:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\bar{x}^2 - 2\bar{x}\,x_k + x_k^2) = \\ &= \frac{1}{n}\left(n\,\bar{x}^2 - 2\bar{x}\sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=1}^{n} x_k^2\right) = \\ &= \bar{x}^2 - 2\bar{x}\cdot\bar{x} + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \bar{x}^2\,. \end{aligned} \tag{138.7}$$

Se, invece di un insieme di numeri reali, è dato un insieme costituito da n coppie di numeri reali $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)\}$, si definiscono le *medie aritmetiche*

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k. \tag{138.8}$$

Il punto del piano di coordinate $(\bar{x}, \bar{y})$ si chiama il *baricentro* del sistema di punti. Come nella (138.7) si definiscono le *varianze*

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \bar{x}^2, \qquad s_y^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^2 - \bar{y}^2. \tag{138.9}$$

Infine si utilizza anche la *covarianza* c_{xy}, che si può sviluppare analogamente a quanto fatto in (138.7):

$$\begin{aligned} c_{xy} &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (\bar{x} - x_k)(\bar{y} - y_k) = \\ &= \bar{x}\,\bar{y} - \frac{\bar{x}}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k - \frac{\bar{y}}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k y_k - \bar{x}\,\bar{y} \end{aligned} \tag{138.10}$$

139. Il metodo dei minimi quadrati

Siano (x_k, y_k), $k = 1, 2, \ldots, n$, le coordinate di n (≥ 2) punti del piano. Si vuole determinare la retta di equazione

$$y = mx + q, \tag{139.1}$$

con m, q parametri incogniti, che passa «il più vicino possibile» agli n punti dati, nel senso che ora precisiamo.

La distanza verticale tra il punto k-esimo e la retta è $|y - y_k| = |mx_k + q - y_k|$. Consideriamo la somma, per $k = 1, 2, \ldots, n$, dei quadrati di tali distanze:

$$E = \sum_{k=1}^{n} (mx_k + q - y_k)^2. \tag{139.2}$$

La quantità E rappresenta una misura dell'*errore* totale che si commette nel sostituire i punti (x_k, y_k) con i corrispondenti punti sulla retta (139.1). Per esempio, se tutti i punti sono sulla retta (139.1), allora $y_k = mx_k + q$ per ogni k, e quindi $E = 0$. In generale E è una quantità positiva o nulla che dipende da m, q; si cercano m, q in modo che l'errore E sia minimo (*minimi quadrati*).

Per dimostrare che $E = E(m, q)$ ammette minimo, occorre studiare E come *funzione di due variabili* (capitolo 11). Per facilitare il lettore che non ha familiarità con le funzioni di due variabili, in un primo tempo utilizziamo soltanto i metodi relativi alle funzioni di una variabile reale, per determinare i valori di m, q che rendono minimo l'errore E, assumendo che tale minimo esista. Più avanti ritroveremo i risultati con i metodi più completi delle funzioni di due variabili.

Consideriamo le due funzioni f, g di una variabile reale

$$f(m) = \sum_{k=1}^{n} (mx_k + q - y_k)^2, \qquad \forall m \in \mathbf{R},\ q \textit{ fissato}; \tag{139.3}$$

$$g(q) = \sum_{k=1}^{n} (mx_k + q - y_k)^2, \qquad \forall q \in \mathbf{R},\ m \textit{ fissato}. \tag{139.4}$$

La coppia (m, q) minimizza le due funzioni f(m), g(q). Calcoliamo le derivate prima e seconda di f (si faccia attenzione a derivare rispetto ad m):

$$\begin{aligned} f'(m) &= 2\sum_{k=1}^{n} (mx_k + q - y_k)\, x_k = \\ &= 2\left(m\sum_{k=1}^{n} x_k^2 + q\sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k y_k\right); \end{aligned} \tag{139.5}$$

$$f''(m) = 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2. \tag{139.6}$$

La derivata seconda è maggiore di zero (la derivata seconda vale zero solo se $x_k = 0$ per ogni k, che è un caso di scarso interesse). Perciò f è una funzione convessa ed ogni punto con derivata nulla è necessariamente un punto di minimo.

Le derivate prima e seconda di g sono (si noti che $\sum_{k=1}^{n} q = qn$):

$$\begin{aligned} g'(q) &= 2\sum_{k=1}^{n} (mx_k + q - y_k) = \\ &= 2\left(m\sum_{k=1}^{n} x_k + qn - \sum_{k=1}^{n} y_k\right); \end{aligned} \tag{139.7}$$

$$g''(q) = 2n. \tag{139.8}$$

Anche la derivata seconda di g è positiva, quindi g è convessa. La coppia (m, q) che cerchiamo si ricava imponendo che valgano le due condizioni $f' = 0$, $g' = 0$, cioè

$$\text{(139.9)} \qquad \begin{cases} m \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + q \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k = 0 \\ m \sum_{k=1}^{n} x_k + qn - \sum_{k=1}^{n} y_k = 0 \end{cases} ;$$

abbiamo un sistema di due equazioni nelle due incognite m, q; possiamo risolvere il sistema per sostituzione, oppure, più velocemente, possiamo moltiplicare la seconda equazione per $\sum_{k=1}^{n} x_k / n$ (in modo che il coefficiente di q risulti lo stesso in entrambe le equazioni) e poi sottrarre, ottenendo

$$\text{(139.10)} \qquad m \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{m}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} y_k = 0.$$

Si ricava

$$\text{(139.11)} \qquad m = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{k=1}^{n} y_k}{\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2} ,$$

purché il denominatore sia diverso da zero. Dalla seconda equazione del sistema (139.9) si ricava poi q in funzione di m.

Con i simboli di *media aritmetica* (138.8), *varianza* (138.9), *covarianza* (138.10), introdotti nel paragrafo precedente, otteniamo

$$\text{(139.12)} \qquad m = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k - \bar{x}\,\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \bar{x}^2} = \frac{c_{xy}}{s_x^2} ;$$

$$\text{(139.13)} \qquad q = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k - \frac{m}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \bar{y} - m\bar{x} .$$

I coefficienti m, q della retta risultano determinati purché la varianza s_x sia diversa da zero. Abbiamo già osservato nel paragrafo precedente che $s_x = 0$ se e soltanto se tutti i numeri x_k, per $k = 1, 2, \ldots, n$, coincidono fra loro. Geometricamente ciò accade solo se gli n punti di coordinate (x_k, y_k) sono allineati verticalmente.

I conti sopra proposti si possono ripetere e completare con i simboli e le proprietà delle funzioni di due variabili (si veda il capitolo 11). In particolare, le derivate $f'(m)$ e $g'(q)$ in (139.5), (139.7) non sono altro che le *derivate parziali* della funzione di due variabili $E = E(m, q)$ definita in (139.2); risulta

$$\text{(139.14)} \qquad \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial m} &= 2\left(m \sum_{k=1}^{n} x_k^2 + q \sum_{k=1}^{n} x_k - \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k\right), \\ \frac{\partial E}{\partial q} &= 2\left(m \sum_{k=1}^{n} x_k + qn - \sum_{k=1}^{n} y_k\right). \end{aligned}$$

Il *determinante Hessiano* (si veda la definizione (93.8)) vale

$$\text{(139.15)} \qquad \begin{aligned} H &= \begin{vmatrix} 2\sum_{k=1}^{n} x_k^2 & 2\sum_{k=1}^{n} x_k \\ 2\sum_{k=1}^{n} x_k & 2n \end{vmatrix} = \\ &= 4n \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 4\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2 = \\ &= 4\, n^2 \left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2\right] = 4\, n^2\, s_x^2 \end{aligned}$$

(abbiamo utilizzato la *varianza* s_x^2 in (138.9)).

Nell'ipotesi che la varianza s_x^2 sia diversa da zero (che, come osservato in precedenza, corrisponde a supporre che gli n punti di coordinate (x_k, y_k) non siano allineati verticalmente), si trova quindi che il determinante Hessiano è positivo. In corrispondenza ai valori m, q dati rispettivamente in (139.12), (139.13) risulta quindi

$$\text{(139.16)} \qquad \frac{\partial E}{\partial m} = 0, \qquad \frac{\partial E}{\partial q} = 0, \qquad H > 0, \qquad \frac{\partial^2 E}{\partial m^2} > 0 ;$$

in base alla condizione sufficiente (93.9) il punto di coordinate (m, q) espresse in (139.12), (139.13) è di minimo per la funzione E(m, q).

Riassumendo, dati n (≥ 2) punti del piano non allineati verticalmente, si determina, con il metodo dei minimi quadrati, la retta di regressione lineare di equazione $y = mx + q$, con m, q espressi dalle formule (139.12), (139.13).

Terminiamo il paragrafo con due osservazioni. La prima è che la retta di regressione passa per il baricentro $(\bar{x}, \bar{y})$ del sistema di punti. Infatti, si vede dalla (139.13) che $\bar{y} = m\bar{x} + q$. La seconda osservazione riguarda il nome «regressione», che ha avuto origine da uno studio di statistica biologica di F. Galton, nel secolo scorso. Galton elaborò un esame statistico, con il metodo dei minimi quadrati, sulla persistenza di alcuni caratteri, come la statura o l'obesità, coll'avvicendarsi delle generazioni. È noto che se i genitori hanno un carattere diverso dalla media della popolazione, in genere anche per i figli quel carattere si discosta dalla media, ma la variazione è minore. Cioè si manifesta una regressione della variazione di quel carattere rispetto ai valori medi.

140. Il coefficiente di correlazione

Nel paragrafo precedente abbiamo determinato, con il metodo dei minimi quadrati, una retta che meglio «approssima» n punti del piano. Rimane però il problema di valutare se è ragionevole o no pensare che i punti dati rappresentino i valori, eventualmente affetti da piccoli errori sperimentali, di una funzione lineare.

Come esempio consideriamo i quattro punti del piano di coordinate (1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3), rappresentati in figura 17.2.

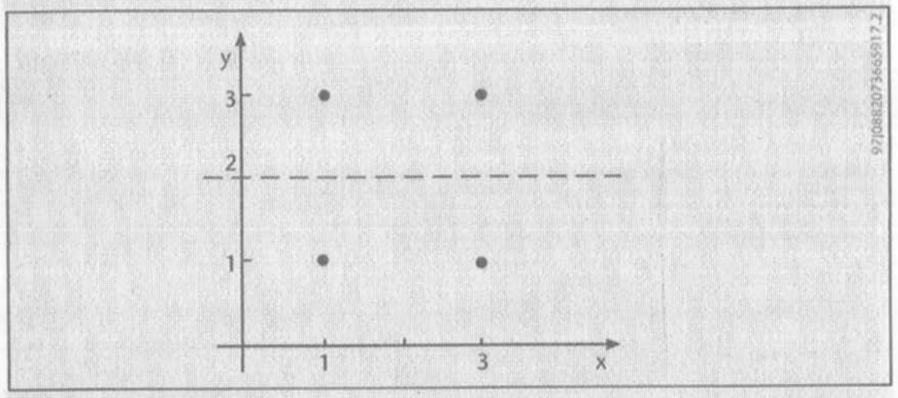


Figura 17.2

Risulta $\bar{x} = \bar{y} = 2$; inoltre

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} x_k\, y_k = \frac{1}{4}(1 + 3 + 3 + 9) = 4. \tag{140.1}$$

Dalle (139.12), (139.13) si ricava che $m = 0$, $q = 2$. Quindi la retta tratteggiata in figura 17.2 è la retta di regressione lineare dei quattro punti. È ragionevole questo risultato? Cioè è ragionevole schematizzare i quattro punti dati con la retta di equazione $y = 2$? La risposta ad una richiesta di opinione, come in questo caso, può essere soggettiva. Certamente tra le rette orizzontali è naturale scegliere quella di ordinata uguale a 2, che tra l'altro passa per il baricentro. Però, se la retta di equazione $y = 2$ può rappresentare i quattro punti, per simmetria la retta verticale di equazione $x = 2$ rappresenta altrettanto bene i quattro punti. Oppure, perché non scegliere la retta $y = x$, che è una diagonale del quadrato con vertici nei quattro punti?

Come si vede dall'esempio proposto in figura 17.2 è necessario dare un criterio di valutazione per stabilire se la retta di regressione è o no una buona schematizzazione degli n punti assegnati.

Un criterio è basato sulla seguente osservazione: è possibile determinare una seconda retta di regressione lineare, di equazione

$$y = m'\, x + q', \tag{140.2}$$

pur di pensare x in funzione di y. Scambiando il ruolo degli assi x, y, si tratta di determinare la retta di equazione ($m' \neq 0$)

$$x = \frac{1}{m'} \qquad y = \frac{q'}{m'} \quad , \tag{140.3}$$

che risulti di regressione lineare, secondo il metodo del paragrafo precedente, per gli n punti di coordinate $(y_1, x_1), (y_2, x_2), \ldots, (y_n, x_n)$.

Per determinare tali coefficienti non è necessario fare alcun conto, ma basta trascrivere le formule (139.12), (139.13), scambiando x_k con y_k per ogni k. Supponendo che i punti non siano allineati né verticalmente, né orizzontalmente, si ottiene

$$\frac{1}{m'} = \frac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k - \bar{x}\,\bar{y}}{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k^2 - \bar{y}^2} = \frac{c_{xy}}{s_y^2} \quad . \tag{140.4}$$

Si trova poi $-q'/m' = \bar{x} - (1/m')\,\bar{y}$, cioè $\bar{y} = m'\,\bar{x} + q'$; quindi anche questa retta passa per il baricentro del sistema di punti.

Il coefficiente m' non è necessariamente uguale ad m. Però m ed m' hanno lo stesso segno (se non sono nulli); infatti il rapporto è positivo:

$$\frac{m}{m'} = \frac{c_{xy}^2}{s_x^2\, s_y^2} \, . \tag{140.5}$$

La radice quadrata di tale numero, indicata con r, è detta *coefficiente di correlazione*; ricordando le notazioni del paragrafo 138, si ha

$$r = \frac{|\, c_{xy} \,|}{s_x\, s_y} = \frac{\left|\sum_{k=1}^{n} (\bar{x} - x_k)\,(\bar{y} - y_k)\right|}{\left(\sum_{k=1}^{n} (\bar{x} - x_k)^2 \,.\, \sum_{k=1}^{n} (\bar{y} - y_k)^2\right)^{1/2}} \, . \tag{140.6}$$

In base alla definizione risulta $r = 1$ se e solo se $m = m'$. Dato che le due rette si incontrano nel baricentro, le due rette coincidono se e solo se $m = m'$, cioè se e solo se $r = 1$.

Dimostriamo che

$$0 \leq r \leq 1 \; ; \tag{140.7}$$

a tale scopo facciamo riferimento alla espressione (140.6) di r, e poniamo $a_k = \bar{x} - x_k$, $b_k = \bar{y} - y_k$, per $k = 1, 2, \ldots, n$. Con tali notazioni la relazione $r \leq 1$ segue dalla

DISUGUAGLIANZA DI CAUCHY-SCHWARZ. — *Comunque si scelgono* 2n *numeri reali* a_k, b_k, *con* $k = 1, 2, \ldots, n$, *risulta*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\, b_k\right| \le \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)^{1/2}. \tag{140.8}$$

La dimostrazione della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz è proposta nel paragrafo 33.

Se $r = 1$ le due rette di regressione sopra considerate coincidono, cioè c'è un unico modo di determinare la retta di regressione lineare. Se $r < 1$, le due rette non coincidono; quanto più r è vicino a zero, tanto più i punti sono dispersi lontano dalle due rette di regressione. Il coefficiente di correlazione è quindi un parametro utile per valutare se è ragionevole o meno rappresentare i punti dati come valori di una funzione lineare.

Nell'esempio in figura 17.2 risulta

$$c_{xy} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} x_k\, y_k - \bar{x}\cdot\bar{y} = 4 - 4 = 0. \tag{140.9}$$

Quindi il coefficiente di correlazione dei quattro punti in figura 17.2 vale zero. Ciò può essere interpretato dicendo che i quattro punti in questione non sono «sufficientemente allineati».

Discutiamo la correlazione dei punti in figura 17.1. Riportiamo nella tabella seguente i valori del paragrafo 137, che corrispondono a misure dell'ossigeno consumato da un individuo che cammina a varie velocità.

	x_k	y_k	$x_k y_k$	x_k^2
	0	19	0	0
	1	20	20	1
	2	20.5	41	4
	3	21.5	64.5	9
	4	22	88	16
	5	23	115	25
	6	23	138	36
	7	23.5	164.5	49
	8	24	192	64
somme totali	36	196.5	823	204

Dato che $n = 9$, si trova $\bar{x} = 4$, $\bar{y} \cong 21.83$, e

$$\frac{1}{9}\sum_{k=1}^{9} x_k\, y_k \cong 91.44, \qquad \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{9} x_k^2 \cong 22.66. \tag{140.10}$$

I coefficienti m, q valgono rispettivamente

$$m \cong \frac{91.44 - 4(21.83)}{22.66 - 4^2} \cong 0.61, \tag{140.11}$$

$$q \cong 21.83 - 4(0.61) = 19.39. \tag{140.12}$$

Si è quindi trovato che la retta di regressione lineare dei punti in figura 17.1 ha l'espressione approssimata

$$y = 0.61x + 19.39. \tag{140.13}$$

Riportiamo in una tabella i valori x_k, y_k, i corrispondenti valori y sulla retta (140.13) e gli errori relativi.

x_k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_k	19	20	20.5	21.5	22	23	23	23.5	24
y	19.3	20	20.6	21.2	21.8	22.4	23	23.6	24.2
$y - y_k$	0.3	0	0.1	− 0.3	− 0.2	− 0.6	0	0.1	0.2

Dal segno delle differenze $y - y_k$ si può rappresentare agevolmente la retta di regressione lineare. Riferendoci ai punti rappresentati in figura 17.1, la retta passa per i punti di ascissa $x = 1$, $x = 6$; i punti di ascissa 3, 4, 5 sono al di sopra del grafico della retta, mentre i rimanenti punti sono al di sotto. Il lettore disegni tale retta nel grafico in figura 17.1.

Si vede che gli scarti $y - y_k$ sono abbastanza piccoli; quindi la retta di regressione lineare è rappresentativa dei punti dati. Ciò è confermato anche dal coefficiente di correlazione r, che è vicino ad 1; infatti, utilizzando l'espressione (140.6), si trova $r = 37/(60 \cdot 23.47)^{1/2} \cong 0.98$.

141. Modelli riconducibili al caso lineare

Il metodo di regressione si applica anche ad alcune funzioni non lineari, dipendenti da due parametri a, b, come le seguenti:

$$y = a \log x + b\,; \tag{141.1}$$

$$y = a\, x^b\,; \tag{141.2}$$

$$y = a\, e^{bx}\,; \tag{141.3}$$

$$y = 1/(a + b\, e^{-x}). \tag{141.4}$$

In alcune applicazioni è noto a priori che la funzione che descrive il fenomeno ha una prefissata espressione analitica dipendente da uno o due parametri a, b, come nei casi precedenti. Ad esempio, la funzione dose-risposta, ha l'espressione (141.1). Invece alcuni fenomeni di crescita hanno l'espressione analitica (141.3) o (141.4).

Il metodo di regressione ha lo scopo di determinare i parametri a, b di una funzione del tipo delle precedenti, in base ad n (≥ 2) valori noti (misure sperimentali). In pratica si effettuano sostituzioni sulle variabili x, y, in modo che il legame tra le nuove variabili x′, y′, sia lineare; successivamente si applica il metodo della regressione lineare.

Ponendo $x' = \log x$, la (141.1) si scrive in modo equivalente

$$y = ax' + b. \tag{141.5}$$

Date n coppie di numeri reali (x_k, y_k), con $x_k > 0$, per $k = 1, 2, \ldots, n$, si considerano le corrispondenti coppie $(x'_k, y_k) = (\log x_k, y_k)$; si applica poi il metodo dei minimi quadrati per determinare i coefficienti a, b di regressione lineare.

Nel caso (141.2), con a, x, y > 0, si pone $x' = \log x$, $y' = \log y$ e si ottiene

$$y' = \log y = \log ax^b = \log a + b \log x = \log a + bx'. \tag{141.6}$$

Con il metodo dei minimi quadrati si determinano i coefficienti log a, b.

Il caso (141.3), con a > 0, è analogo al precedente; ponendo $y' = \log y$, si ottiene

$$y' = \log y = \log(ae^{bx}) = \log a + bx. \tag{141.7}$$

Infine, nel caso (141.4), si può porre $y' = 1/y$, $x' = e^{-x}$, ottenendo

$$y' = a + be^{-x} = a + bx'. \tag{141.8}$$

Nel paragrafo 143 è indicata un'applicazione del metodo dei minimi quadrati ad un esempio concreto, per una funzione non lineare del tipo (141.3).

142. Elaborazione di dati di una distribuzione circolare

Alcuni esperimenti sono finalizzati a determinare un angolo, o una direzione, sulla base di un certo numero di misure effettuate. A titolo di esempio riportiamo i risultati di una ricerca condotta dal Prof. L. Pardi, che ringraziamo per la collaborazione. Ringraziamo anche il Prof. G. Chelazzi che ci ha aiutato a descrivere i risultati di tale ricerca.

Si è studiata la capacità di orientamento dei *talitri*, che sono piccoli crostacei che vivono sulle coste sabbiose. Quando la sabbia si asciuga, i talitri per non disidratarsi, si dirigono perpendicolarmente al mare fino a raggiungere la sabbia bagnata. È stata formulata l'ipotesi che, per individuare la giusta direzione verso il mare, i talitri usino l'azimuth del sole compensandone la variazione nell'arco del giorno. Gli esperimenti dimostrano che dei talitri, raccolti in una spiaggia del mare Tirreno, una volta depositati su una spiaggia dell'Adriatico si orientano verso l'interno, nella direzione opposta a quella del mare locale, erroneamente alla ricerca di un terreno più umido. In definitiva si ammette che ogni popolazione disponga di un programma ereditario, quindi controllato geneticamente, per correggere il moto apparente del sole ed ottenere così le necessarie indicazioni direzionali.

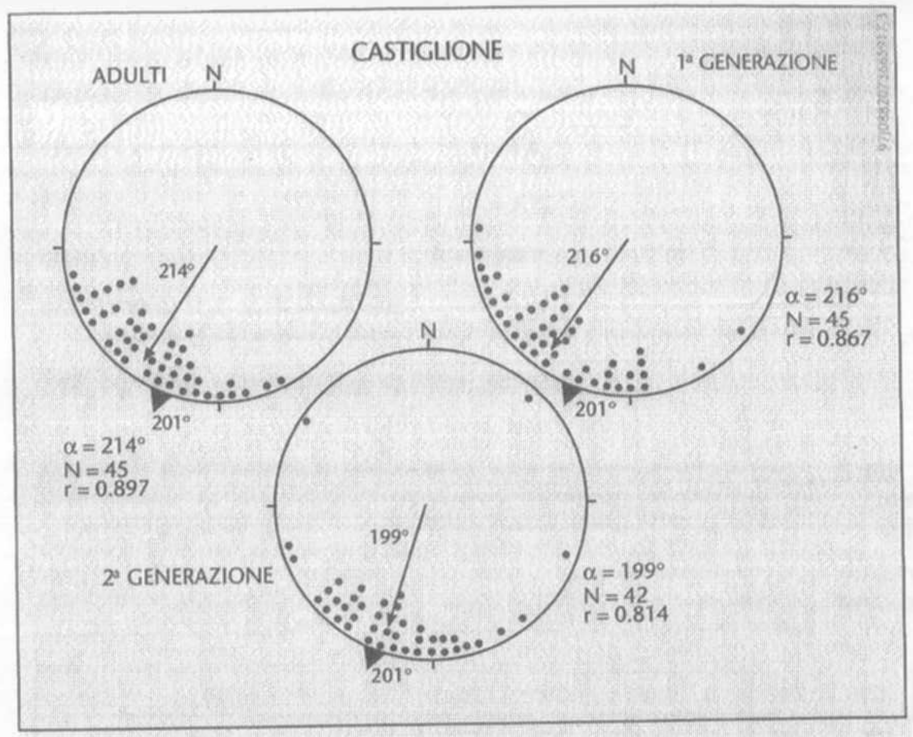


Figura 17.3

Per arrivare a queste conclusioni alcuni talitri sono stati posti al centro di un cerchio di sabbia. Sono poi state rilevate le direzioni prese. Naturalmente non tutti i crostacei sono andati nella stessa direzione. È stato quindi necessario determinare una direzione media, cioè è stato necessario elaborare i dati di una distribuzione circolare. Riportiamo in figura 17.3 i risultati di un esperimento effettuato su talitri prelevati a Castiglione della Pescaia (Grosseto). Sono riportati i dati delle rilevazioni effettuate su 45 e 42 crostacei, ed è indicato con α l'angolo medio risultante. Gli angoli sono misurati in senso orario a partire da Nord. Il triangolo nero indica la direzione del mare nella località di prelievo. Il significato di r risulterà chiaro alla fine del paragrafo.

Per comprendere l'aspetto matematico del problema, immaginiamo di avere distribuzioni circolari più semplici, basate su pochi dati, come in figura 17.4.

Nel caso (a) sono considerati due angoli, corrispondenti, nell'usuale sistema di riferimento, a 0 e 90 gradi. È naturale assumere come direzione media l'angolo di 45 gradi. Nel caso (b) è naturale assumere come medio un angolo compreso tra 45 e 90 gradi. Sorge un problema nel caso (c). Perché, se è ragionevole scegliere come media degli angoli di 0 e 90 gradi l'angolo di 45 gradi, tale angolo contrasta con la terza direzione, che è esattamente l'opposta a quelle di 45 gradi. Infine, nel caso (d), è chiaro che non esiste una direzione media privilegiata.

Si vede da questi esempi che il concetto di direzione media, o angolo medio, per una distribuzione circolare, necessita di una definizione appropriata.

L'idea è quella di sostituire al valore di ogni angolo α il corrispondente punto sulla circonferenza di raggio 1, con centro nel vertice dell'angolo, che ha coordinate $(x, y) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$. Così, dati n angoli, i cui valori misurati in radianti sono $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, si considerano i punti $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$, le cui componenti sono date da

(142.1) $$x_k = \cos \alpha_k\,, \quad y_k = \operatorname{sen} \alpha_k\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Come al solito, il *baricentro* del sistema di punti ha coordinate $(\bar{x}, \bar{y})$ espresse da

(142.2) $$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\,, \qquad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k\,.$$

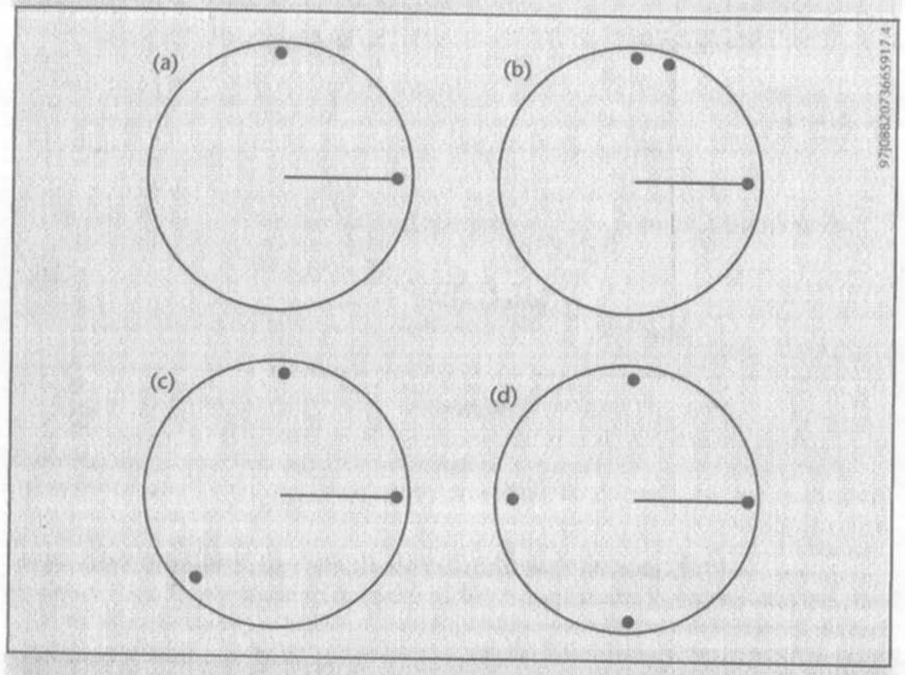


Figura 17.4

Il baricentro in genere non appartiene alla circonferenza, ma è interno al cerchio, come in figura 17.5; cioè risulta

(142.3) $$\bar{x}^2 + \bar{y}^2 \le 1.$$

Consideriamo il segmento che si ottiene congiungendo l'origine con il baricentro. Indichiamo con r la lunghezza di tale segmento, cioè

(142.4) $$r = \sqrt{\bar{x}^2 + \bar{y}^2}\,.$$

Per la (142.3) risulta $0 \le r \le 1$. Se $r \ne 0$, il segmento individua una direzione, che si chiama *direzione media* del sistema di punti. L'angolo che tale segmento forma con l'asse delle x è assunto come *angolo medio* degli n angoli dati.

Il numero r è una misura della dispersione dei punti dalla direzione media. Se $r = 0$ non è determinata alcuna direzione media; invece si ottiene $r = 1$ soltanto se tutti i punti in considerazione coincidono fra loro. Quanto più r è vicino ad 1, tanto più i punti sono concentrati intorno alla direzione media.

In figura 17.4, nel caso (a) (riprodotto anche in figura 21.5) risulta $(\bar{x}, \bar{y}) = (1/2, 1/2)$; quindi l'angolo medio è $\pi/4$ e $r = \sqrt{2}/2 \cong 0.707$. Nel caso (c) il baricentro ha coordinate $\bar{x} = \bar{y} = (2 - \sqrt{2})/6$; quindi l'angolo medio è di nuovo $\pi/4$, però il coefficiente di dispersione r è molto piccolo, infatti $r = \sqrt{2}\,(2 - \sqrt{2})/6 \cong 0.138$. Nel caso (d) il baricentro è nel centro del cerchio, quindi $r = 0$ e non è definita una direzione media.

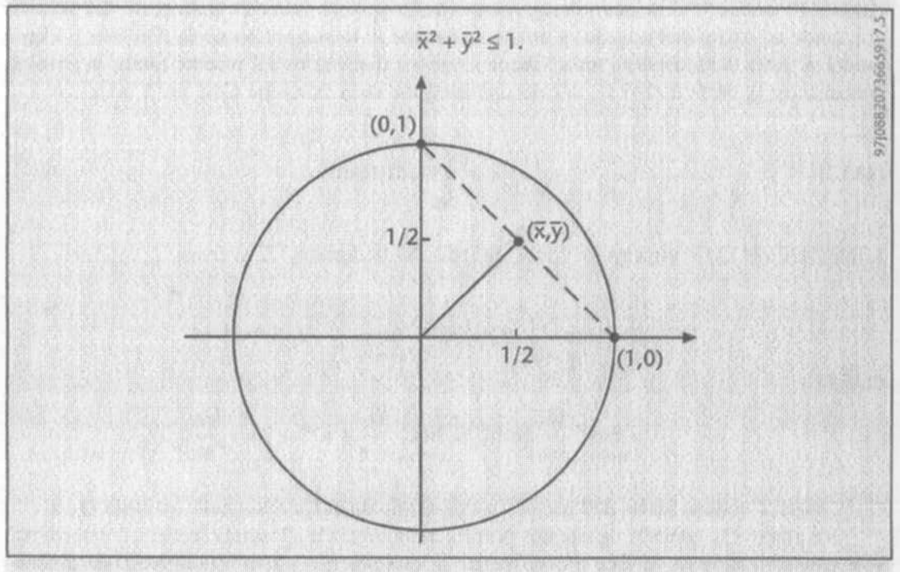


Figura 17.5

143. Valutazione del volume idrico di un acquifero

Consideriamo un problema di Geologia, relativo alla determinazione del volume d'acqua immagazzinato da un acquifero, cioè relativo alla valutazione delle acque sotterranee racchiuse in uno strato di rocce permeabili.

Il calcolo delle riserve permanenti di un acquifero è possibile solo in base ad una conoscenza della sua geometria, che spesso è molto complicata. Si possono invece valutare facilmente le riserve dell'acquifero studiando la quantità d'acqua sorgiva relativa al periodo di esaurimento. Il *periodo di esaurimento* è quel periodo dell'anno in cui l'acquifero non riceve un apporto esterno di acqua dovuta alle precipitazioni; in tale periodo normalmente

risulta decrescente la portata dell'acqua sorgiva, cioè la quantità d'acqua che lascia l'acquifero per unità di tempo.

È stato ipotizzato da Maillet, nel 1905, che in un periodo di esaurimento la portata Q(t) dell'acqua sorgiva decresca in funzione del tempo t secondo la legge esponenziale

$$Q(t) = Q_0\, e^{-at}\,. \tag{143.1}$$

Dato che per t = 0 risulta $Q(0) = Q_0$, il numero Q_0 rappresenta la portata della falda all'istante t = 0, in cui supponiamo inizi il periodo di esaurimento. Il numero positivo a è detto *coefficiente di esaurimento* e dipende dalle caratteristiche idrogeologiche dell'acquifero. Maggiore è il coefficiente a, più veloce risulta lo svuotamento dell'acquifero, a causa del segno meno ad esponente in (143.1).

In base alla conoscenza della portata di acqua sorgiva nel periodo di esaurimento, si può risalire al volume V di acqua immagazzinata nell'acquifero (almeno della parte del volume che tende ad uscire dall'acquifero, nota con il nome di *immagazzinamento dinamico*). Idealmente si tratta di raccogliere tutta l'acqua sorgiva e di misurarne il volume totale; in pratica, conoscendo la portata (143.1), si calcola l'integrale della funzione Q(t) per t > 0:

$$V = \int_0^{+\infty} Q(t)\, dt\,. \tag{143.2}$$

L'integrale (143.2) è improprio; con il metodo del paragrafo 112 si trova

$$\begin{aligned} V &= \lim_{k\to+\infty} \int_0^k Q(t)\, dt = \lim_{k\to+\infty} \int_0^k Q_0\, e^{-at}\, dt = \\ &= \lim_{k\to+\infty} \frac{Q_0}{-a} \left[e^{-at}\right]_0^k = \lim_{k\to+\infty} \frac{Q_0}{-a} \left(e^{-ak} - 1\right) = \frac{Q_0}{a}\,. \end{aligned} \tag{143.3}$$

Quindi il volume idrico dell'acquifero è determinato in funzione delle quantità Q_0, a.

Il numero Q_0, essendo uguale alla portata della sorgente all'istante iniziale, è determinabile sperimentalmente. Invece il coefficiente di esaurimento a non è determinabile direttamente.

È quindi necessario determinare il coefficiente a per via indiretta. A tale scopo si fissano n istanti di tempo $t_1, t_2, \ldots, t_n$ ed in corrispondenza si misurano sperimentalmente le relative portate $Q(t_n)$.

Comprendendo il valore della portata Q_0 per t = 0, si dispone così di n + 1 valori sperimentali della funzione (143.1). Si determinano poi i coefficienti Q_0, a con il metodo dei minimi quadrati. Infatti la funzione (143.1) è del tipo non lineare già considerato in (141.3); quindi ci si può ridurre ad un modello lineare con la sostituzione Q′ = log Q, come indicato nel paragrafo 141.

Il problema descritto in questo paragrafo ci è stato suggerito dal prof. Pietro Celico, che ringraziamo per la collaborazione.