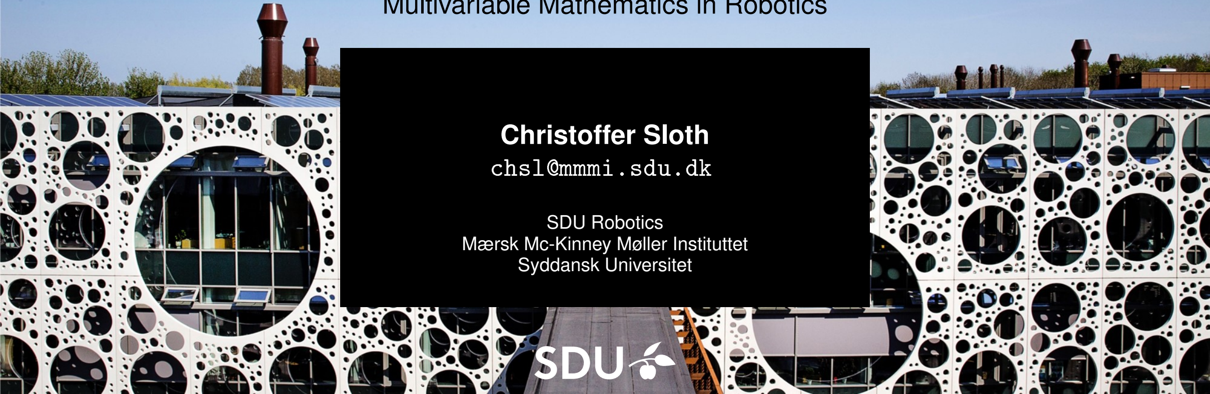
Lektion 1: Fourierrækker og Fouriertransformation

Modellering af elektromekaniske systemer
Multivariable Mathematics in Robotics



Christoffer Sloth

chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
Mærsk Mc-Kinney Møller Instituttet
Syddansk Universitet

Dagsorden

Viden[1]

Den studerende skal kunne:

- forklare den grundlæggende fysiks love og begreber
- beskrive et elektromekanisk system ved hjælp af systemets parametre
- redegøre for virkemåden af børstede og børsteløse DC motorer
- opstille overføringsfunktioner for lineære systemer

Færdigheder

Den studerende skal kunne:

- udføre fritlegemeanalyse på et mekanisk system
- anvende Newtons 3 love til modellering af mekaniske systemer
- anvende Lagrange D'Alemberts princip til modellering af mekaniske systemer
- opstille differentialligninger, der beskriver et elektromekanisk systems bevægelse
- fortolke lineære systemers bevægelse i frekvensdomæne
- modellere og simulere simple serielle manipulatorer

Kompetencer

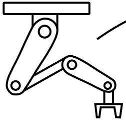
Den studerende skal kunne:

- simulere elektromekaniske systemer og fortolke deres bevægelse

[1] Basseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=46418&listid=5027&lang=da

- **Lektion 1**: Fourierrækker og Fouriertransformation
- **Lektion 2**: Laplace transformation
- **Lektion 3**: Kræfter og bevægelse
- **Lektion 4**: Arbejde og energi
- **Lektion 5**: Impulsmoment og stød
- **Lektion 6**: Relativ bevægelse og fiktive kræfter
- **Lektion 7**: Plan bevægelse af stive legemer
- **Lektion 8**: Almen bevægelse af stive legemer
- **Lektion 9**: Svingninger
- **Lektion 10**: DC motoren
- **Lektion 11**: Modellering af robotarm
- **Lektion 12**: Simulering af mekaniske systemer

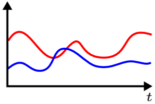
Elektromekanisk system



Differentialligninger

$$\ddot{z} = a_1\dot{z} + a_0 z + bu$$

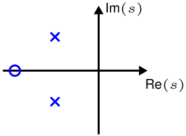
Simulering



(hvis lineær)

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

Frekvensdomæneanalyse



Motivation

Der findes mange metoder til approksimering af funktioner. Herunder er *Taylor-approksimation* som I har mødt tidligere.

Definition (Taylorrække)
Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være en funktion, der kan differentieres uendelig mange gange. Så er Taylorrækken for funktionen f ved punktet a defineret som

$$\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

hvor $f^{(n)}(a)$ er den n-te afledte af f evalueret i punktet a og $n!$ er n-fakultet.

Hvis der kun benyttes et endeligt antal led fra Taylorrækken til approksimation af en funktion kan dette være et behjælpeligt værktøj

En N-te ordens Taylor-approksimation af funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (der kan differentieres uendelig mange gange) i punktet a er defineret som

$$P_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Vi betragter eksponential funktionen $f = e^x$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.

Vi betragter eksponential funktionen $f = e^x$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.
Her er

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) \\ &= e^1 + e^1(x-1) \end{aligned}$$

Vi betragter eksponential funktionen $f = e^x$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.
Her er

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) \\ &= e^1 + e^1(x-1) \end{aligned}$$

Bemærk at $P_1(x)$ er en affine approksimation af f.

Vi betragter eksponential funktionen $f = e^x$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.
Her er

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) \\ &= e^1 + e^1(x-1) \end{aligned}$$

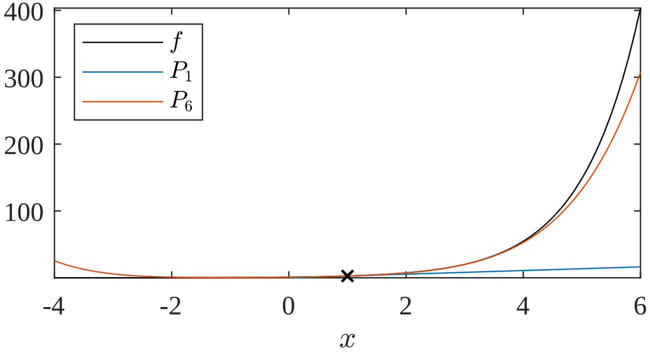
Bemærk at $P_1(x)$ er en affine approksimation af f.
En højere ordens approksimation giver en bedre approksimation

$$P_6(x) = e^1 + e^1(x-1) + \frac{e^1}{2}(x-1)^2 + \frac{e^1}{6}(x-1)^3 + \frac{e^1}{24}(x-1)^4 + \frac{e^1}{120}(x-1)^5 + \frac{e^1}{720}(x-1)^6$$

Motivation

Eksempel 1 (Taylor-approksimation)

Vi betragter eksponential funktionen $f = e^x$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.



Vi betragter funktionen $f = \sin(x)$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.

Vi betragter funktionen $f = \sin(x)$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.
Her er

$$\begin{aligned} P_1(x) &= f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) \\ &= \sin(1) + \cos(1)(x-1) \end{aligned}$$

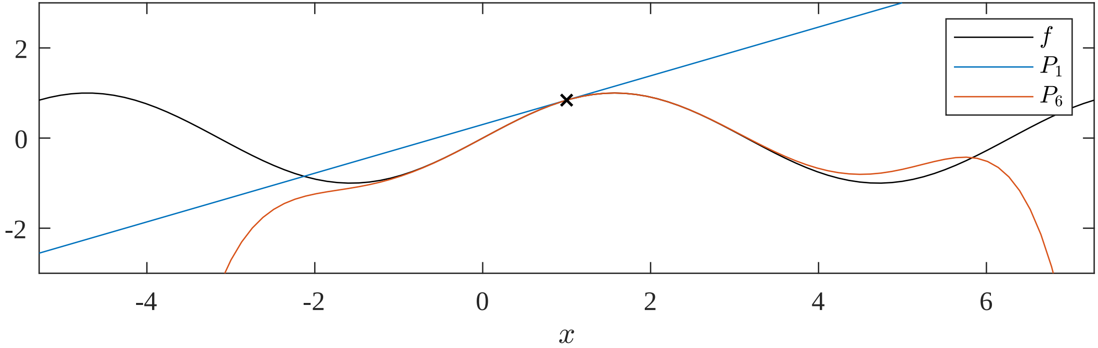
Vi betragter funktionen $f = \sin(x)$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.
Her er

$$
\begin{aligned}
P_1(x) &= f(1) + \frac{f^{(1)}(1)}{1!}(x-1) \\
&= \sin(1) + \cos(1)(x-1)
\end{aligned}
$$

En sjette-ordens approksimation giver

$$
\begin{aligned}
P_6(x) = \sin(1) + \cos(1)(x-1) \quad &- \frac{\sin(1)}{2}(x-1)^2 - \frac{\cos(1)}{6}(x-1)^3 + \frac{\sin(1)}{24}(x-1)^4 \\
&+ \frac{\cos(1)}{120}(x-1)^5 - \frac{\sin(1)}{720}(x-1)^6
\end{aligned}
$$

Vi betragter funktionen $f = \sin(x)$ og udregner første- og sjette-ordens approksimationer P_1 og P_6 i punktet $x = 1$.



En *Fourierrække* er en uendelig række på følgende form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

hvor L er et positivt tal.

En *Fourierrække* er en uendelig række på følgende form

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

hvor L er et positivt tal.

Fourierrækker benyttes i forbindelse med periodiske funktioner, i.e., f er periodisk med periode $2L$, dvs. $f(x + 2L) = f(x)$.

Vi betragter igen den periodiske funktion $f = \sin(x)$ med periode $2L = 2\pi$.

Vi betragter igen den periodiske funktion $f = \sin(x)$ med periode $2L = 2\pi$. En *Fourierrække*, der beskriver f er dermed

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

hvor $a_n = 0$ for $n = 0, 1, \dots$ og $b_n = 0$ for $n \neq 1$ og $b_1 = 1$.

Vi betragter igen den periodiske funktion $f = \sin(x)$ med periode $2L = 2\pi$. En *Fourierrække*, der beskriver f er dermed

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

hvor $a_n = 0$ for $n = 0, 1, \ldots$ og $b_n = 0$ for $n \neq 1$ og $b_1 = 1$.

Dette kan reduceres til

$$f(x) = b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{\pi}\right) = \sin(x)$$

På samme vis som Taylor-approksimationen kunne benyttes til approksimation af funktioner kan Fourierrækker benyttes på samme form. Her er en Fourierrække af orden N givet som

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

På samme vis som Taylor-approksimationen kunne benyttes til approksimation af funktioner kan Fourierrækker benyttes på samme form. Her er en Fourierrække af orden N givet som

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

Vi siger at Fourierrækken konvergerer hvis

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x)$$

På samme vis som Taylor-approksimationen kunne benyttes til approksimation af funktioner kan Fourierrækker benyttes på samme form. Her er en Fourierrække af orden N givet som

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

Vi siger at Fourierrækken konvergerer hvis

$$\lim_{N\to\infty} S_N(x) = f(x)$$

Denne konvergens benyttes til at approksimere en funktion bedre og bedre ved at forøge ordenen N.

Lad f være en periodisk funktion med periode $2L$ og lad $f(x)$ og $f'(x)$ være stykvis kontinuerlige på intervallet $-L < x < L$. Så vil f have en konvergerende Fourierrække med koefficienter a_n og b_n givet som

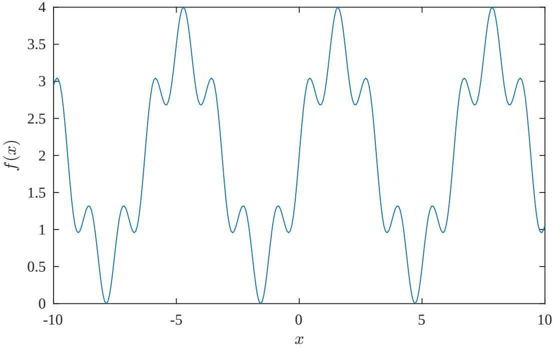
$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx, \qquad n > 0$$

Betragt grafen for funktionen

$$f(x) = \sin(3x)\cos(2x) + \sin(x) + 2$$

Det ses at $f(x) = f(x + 2\pi)$.

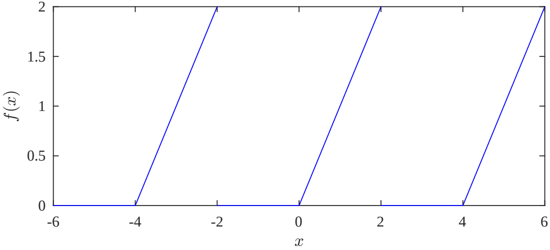


Betragt den periodiske funktion $f(x)$ defineret fra

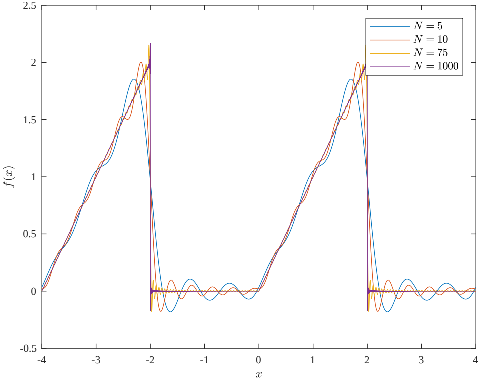
$$f(x) = \begin{cases} 0, & -2 < x < 0 \\ x, & 0 \leq x < 2 \end{cases} \tag{1}$$

$$f(x+4) = f(x) \tag{2}$$

Følgende viser grafen af funktionen $f(x)$.



Den periodiske funktion kan approksimeres tættere og tættere jo flere harmoniske, der inkluderes ($n = 1, 2, \ldots, N$).



Fourier koefficienterne har en vigtig fortolkning i forhold til frekvensindholdet i et signal, hvilket kaldes et signals *spektrum*.

Fourier koefficienterne har en vigtig fortolkning i forhold til frekvensindholdet i et signal, hvilket kaldes et signals *spektrum*.
Vi benytter følgende trigonometriske identitet

$$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) = A\cos(\omega x - \phi)$$

hvor

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{og} \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Her er ϕ fasevinklen og A er amplituden.

Fourier koefficienterne har en vigtig fortolkning i forhold til frekvensindholdet i et signal, hvilket kaldes et signals *spektrum*.
Vi benytter følgende trigonometriske identitet

$$a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x) = A\cos(\omega x - \phi)$$

hvor

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \text{og} \qquad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Her er ϕ fasevinklen og A er amplituden.

Vi benytter ovenstående trigonometriske identitet på det $n$te led i Fourierrækken

$$a_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = A_n\cos\left(\frac{n\pi x}{L} - \phi_n\right)$$

hvor

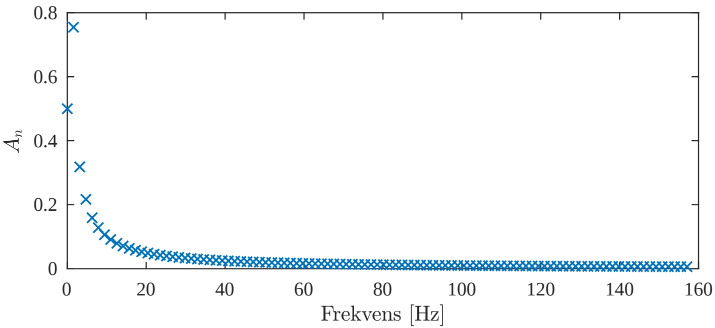
$$A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad \text{og} \qquad \phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Med den tidligere omskrivning kan en Fourierrække skrives som ($A_0 = a_0/2$)

$$f(x) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L} - \phi_n\right)$$

Det ses at f er en sum af sinudiale funktioner og A_n beskemmer amplituden af det $n$te frekvens bidrag. Samtidig er A_n^2 relateret til energien i signalet ved en bestemt frekvens.

Et spektrum for trekantsignalet i Eksempel 4 kan tegnes ud fra Fourierkoefficienterne. Herunder er spektrum for signalet.



Fourierrækker kan udtrykkes med komplekse variable ved brug af Euler's identitet

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

hvor $j = \sqrt{-1}$ samt følgende relationer

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \text{og} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

Fourierrækker kan udtrykkes med komplekse variable ved brug af Euler's identitet

$$e^{jx} = \cos(x) + j\sin(x)$$

hvor $j = \sqrt{-1}$ samt følgende relationer

$$\cos(x) = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \qquad \text{og} \qquad \sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

En Fourierrække kan således skrives som

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L}$$

hvor c_n er komplekse tal.

Koefficienterne for Fourierrækken

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

og den ækvivalente Fourierrække

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L}$$

er relateret ved

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \qquad \text{for } n > 0$$

Koefficienterne for Fourierrækken

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$$

og den ækvivalente Fourierrække

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L}$$

er relateret ved

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \qquad \text{for } n > 0$$

Dermed er

$$|c_n| = \frac{1}{2} A_n$$

$$\arg(c_n) = -\tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right) = -\phi_n$$

Lad $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n e^{jn\pi t/L}$ og $z(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n e^{jn\pi t/L}$ så gælder følgende egenskaber

1. **Linearitet**. Fourierrækken for $Ay(t) + Bz(t)$ er givet ved

$$\mathcal{F}[y(t) + z(t)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\alpha_n + \beta_n) e^{jn\pi t/L}$$

2. **Tidsforskydning**. Fourierrækken for $Ay(t - t_0)$ er givet ved

$$\mathcal{F}[y(t - t_0)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_n e^{-jn\pi t_0/L}\right) e^{jn\pi t/L}$$

Recall that complex numbers can be represented as follows

$$
\begin{aligned}
z &= a + jb \\
&= r\left(\cos(\phi) + j\sin(\phi)\right) \\
&= re^{j\phi} \\
&= r\angle\phi
\end{aligned}
$$

Fourierrækker kan benyttes til approksimation af periodiske funktioner, men hvad kan gøres hvis en aperiodisk funktion skal approksimeres?

Hovedideen bag Fouriertransformation er at approksimere en aperiodisk funktion $h(x)$ ved at introducere en ny funktion $\tilde{h}(x)$ som har følgende egenskaber

1. $\tilde{h}(x)$ er periodisk med periode $2L$
2. L er "stor"
3. $h(x) = \tilde{h}(x)$ for $-L < x < L$

Fourierrækker kan benyttes til approksimation af periodiske funktioner, men hvad kan gøres hvis en aperiodisk funktion skal approksimeres?

Hovedideen bag Fouriertransformation er at approksimere en aperiodisk funktion $h(x)$ ved at introducere en ny funktion $\tilde{h}(x)$ som har følgende egenskaber

1. $\tilde{h}(x)$ er periodisk med periode $2L$
2. L er "stor"
3. $h(x) = \tilde{h}(x)$ for $-L < x < L$

Vi lader $L \to \infty$ i det følgende.

Da $\tilde{h}(x)$ er periodisk kan den skrives som Fourierrækken

$$\tilde{h}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L}$$

hvor

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} \tilde{h}(x) e^{-jn\pi x/L} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} h(x) e^{-jn\pi x/L} dx$$

Da $\tilde{h}(x)$ er periodisk kan den skrives som Fourierrækken

$$\tilde{h}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L}$$

hvor

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} \tilde{h}(x) e^{-jn\pi x/L} dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} h(x) e^{-jn\pi x/L} dx$$

Dermed kan funktionen $\tilde{h}(x)$ skrives som

$$\tilde{h}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L}\left(\int_{-L}^{L} h(u) e^{-jn\pi u/L} du\right) e^{jn\pi x/L}$$

Dermed kan funktionen $\tilde{h}(x)$ skrives som

$$\tilde{h}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2L} \left(\int_{-L}^{L} h(u) e^{-jn\pi u/L} du \right) e^{jn\pi x/L}$$

Vi definerer følgende variable

$$\Delta\omega = \frac{\pi}{L} \text{ and } \omega_n = \frac{n\pi}{L}$$

og omskriver

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L}^{L} h(u) e^{-j\omega_n u} du \right) e^{j\omega_n x} \Delta\omega$$

Fouriertransformation
Repræsentation af aperiodisk funktion (II)

Formlen

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\int_{-L}^{L} h(u) e^{-j\omega_n u} du \right) e^{j\omega_n x} \Delta\omega$$

omskrives som

$$\tilde{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) \Delta\omega$$

hvor

$$F(\omega_n) = \left(\int_{-L}^{L} h(u) e^{-j\omega_n u} du \right) e^{j\omega_n x}$$

For at lade $\tilde{h}(x)$ approksimere $h(x)$ lader vi L gå imod uendelig, dvs

$$L \to \infty \qquad \text{eller } \Delta\omega \to 0$$

og får

$$h(x) = \lim_{L\to\infty} \tilde{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n)\Delta\omega$$

For at lade $\tilde{h}(x)$ approksimere $h(x)$ lader vi L gå imod uendelig, dvs

$$L \to \infty \qquad \text{eller } \Delta\omega \to 0$$

og får

$$h(x) = \lim_{L\to\infty} \tilde{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n)\Delta\omega$$

Dette ligner vores konstruktion af Riemann integralet.

For at lade $\tilde{h}(x)$ approksimere $h(x)$ lader vi L gå imod uendelig, dvs

$$L \to \infty \qquad \text{eller } \Delta\omega \to 0$$

og får

$$h(x) = \lim_{L\to\infty} \tilde{h}(x) = \frac{1}{2\pi} \lim_{L\to\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n)\Delta\omega$$

Dette ligner vores konstruktion af Riemann integralet.

Slutteligt kan $h(x)$ skrives som

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-j\omega u} du \right) e^{j\omega x} d\omega$$

Fouriertransform og invers Fouriertransform defineres ud fra

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-j\omega u} du \right) e^{j\omega x} d\omega$$

Fouriertransform og invers Fouriertransform defineres ud fra

$$h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} h(u) e^{-j\omega u} du \right) e^{j\omega x} d\omega$$

Fouriertransformen af $h(t)$ er

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) e^{-j\omega t} dt$$

Invers Fouriertransformen af $H(\omega)$ er

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

En Dirac delta-funktion $\delta(t)$, som er et meget kort og kraftigt signal, defineres som følger

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

hvor f er en kontinuerlig funktion.

Fouriertransformation
Egenskaber

Egenskab	Tidsdomæne $x(t)$	Fouriertransform $X(\omega)$
Linearitet	$ax_1(t) + bx_2(t)$	$aX_1(j\omega) + bX_2(\omega)$
Tidsforsinkelse	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Differentiering i tid	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(\omega)$
Differentiering i frekvens	$-jtx(t)$	$\frac{dX(\omega)}{d\omega}$
Tidsintegrering	$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi x(0)\delta(\omega)$

Fouriertransformation
Transformations par

Signal	Fouriertransform
$\delta(t)$	1
$u(t)$	$\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
$\delta(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0}$
$\sin(\omega_0 t)$	$-j\pi(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0))$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
1	$2\pi\delta(\omega)$

Opsummering

Fourierrækker benyttes i forbindelse med ***periodiske funktioner***, dvs. $f(x+2L) = f(x)$.

Lad f være en periodisk funktion med periode $2L$ og lad $f(x)$ og $f'(x)$ være stykvis kontinuerlige på intervallet $-L < x < L$. Så vil f have en konvergerende Fourierrække

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\pi x/L}$$

med koefficienter a_n, b_n og c_n givet som

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n \geq 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \qquad n > 0$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n) \qquad \text{for } n > 0$$

Fouriertransformation
Fouriertransformen af $h(t)$ er

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}dt$$

Invers Fouriertransformation
Invers Fouriertransformen af $H(\omega)$ er

$$h(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} H(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$