Lektion 11: Euler-Lagrange Modellering

Modellering af elektromekaniske systemer

Christoffer Sloth
chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
Mærsk Mc-Kinney Møller Instituttet
Syddansk Universitet

SDU

Dagsorden

Introduktion

Euler-Lagrange modellering
- Modellering af konservative systemer
- Eksempler: Konservative systemer
- Modellering af ikke-konservative systemer
- Eksempler: Ikke-konservative systemer

Robot med to led
- Kinematik
- Potentiel energi
- Kinetisk energi
- Dynamik

Viden[1]

Den studerende skal kunne:

- forklare den grundlæggende fysiks love og begreber
- beskrive et elektromekanisk system ved hjælp af systemets parametre
- redegøre for virkemåden af børstede og børsteløse DC motorer
- opstille overføringsfunktioner for lineære systemer

Færdigheder

Den studerende skal kunne:

- udføre fritlegemeanalyse på et mekanisk system
- anvende Newtons 3 love til modellering af mekaniske systemer
- anvende Lagrange D'Alemberts princip til modellering af mekaniske systemer
- opstille differentialligninger, der beskriver et elektromekanisk systems bevægelse
- fortolke lineære systemers bevægelse i frekvensdomæne
- modellere og simulere simple serielle manipulatorer

Kompetencer

Den studerende skal kunne:

- simulere elektromekaniske systemer og fortolke deres bevægelse

[1] Basseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=46418&listid=5027&lang=da

Introduktion

Oversigt over lektioner

- **Lektion 1**: Bevægelse i flere dimensioner
- **Lektion 2**: Kræfter og bevægelse
- **Lektion 3**: Analyse i frekvensdomæne
- **Lektion 4**: Arbejde og energi
- **Lektion 5**: Impulsmoment og stød
- **Lektion 6**: Relativ bevægelse og fiktive kræfter
- **Lektion 7**: Plan bevægelse af stive legemer
- **Lektion 8**: Almen bevægelse af stive legemer
- **Lektion 9**: Svingninger
- **Lektion 10**: DC motoren
- **Lektion 11**: Modellering af robotarm
- **Lektion 12**: Simulering af mekaniske systemer

Euler-Lagrange modellering

Euler-Lagrange modellering benyttes til at finde en dynamisk model for et mekanisk system ud fra systemets potentielle energi E_{pot} og kinetiske energi E_{kin}.

Specifikt benyttes *Lagrangian* $\mathcal{L}$ givet ved

$$\mathcal{L} = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} \qquad [\text{J}]$$

Euler-Lagrange modellering
Generaliserede koordinater

Vi modellerer mekaniske systemer med n frihedsgrader. Disse er givet af værdierne for n ***generaliserede koordinater*** $q_1, \ldots, q_n$.

Euler-Lagrange modellering
Generaliserede koordinater

Vi modellerer mekaniske systemer med n frihedsgrader. Disse er givet af værdierne for n ***generaliserede koordinater*** $q_1, \ldots, q_n$.

De generaliserede koordinater skal være

- **Minimale**
- **Uafhængige**
  Hvis alle undtagen et koordinat fastholdes, så skal det sidste koordinat kunne tage værdier i et kontinuerligt område.
- **Fuldstændige**
  Kunne beskrive alle konfigurationer til alle tider.

Euler-Lagrange modellering

Generaliserede koordinater

Vi modellerer mekaniske systemer med n frihedsgrader. Disse er givet af værdierne for n ***generaliserede koordinater*** $q_1, \dots, q_n$.

De generaliserede koordinater skal være

- **Minimale**
- **Uafhængige**
  Hvis alle undtagen et koordinat fastholdes, så skal det sidste koordinat kunne tage værdier i et kontinuerligt område.
- **Fuldstændige**
  Kunne beskrive alle konfigurationer til alle tider.

Generaliserede koordinater skal overholde helt specifikke krav, men er i dette kursus er de positioner og vinkler for systemerne.

Hvis q er et trajektorie for et *konservativt mekanisk system* så gælder

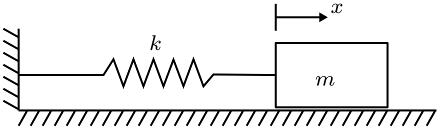
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0$$

hvor q er en n-dimensionel vektor af generaliserede koordinater og $\mathcal{L}$ er *Lagrangian* givet ved

$$\mathcal{L} = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} \qquad [\text{J}]$$

hvor E_{pot} er systemets potentielle energi og E_{kin} er systemets kinetiske energi.

Euler-Lagrange modellering
Eksempel: Masse-fjeder system



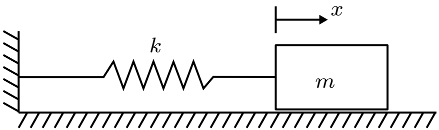
Ovenstående masse-fjeder system har dynamik givet ved

$$m\ddot{x} = -kx \qquad [\mathrm{N}]$$

hvor m er massen [kg], k er stivheden [N/m].

Den potentielle og kinetiske energi er

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2, \text{ og } E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$



Ovenstående masse-fjeder system har dynamik givet ved

$$m\ddot{x} = -kx \qquad [\mathrm{N}]$$

hvor m er massen [kg], k er stivheden [N/m].

Den potentielle og kinetiske energi er

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2, \text{ og } E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

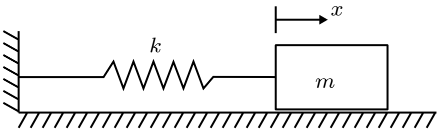
Fra Euler-Lagrange ligning med genereliseret koordinat $q = x$ haves

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

hvor

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Euler-Lagrange modellering
Eksempel: Masse-fjeder system



Ovenstående masse-fjeder system har dynamik givet ved

$$m\ddot{x} = -kx \qquad [\text{N}]$$

hvor m er massen [kg], k er stivheden [N/m].

Den potentielle og kinetiske energi er

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2, \text{ og } E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Fra Euler-Lagrange ligning med genereliseret koordinat $q = x$ haves

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0$$

hvor

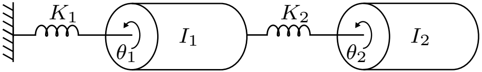
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$$

Dermed fås

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} + kx = m\ddot{x} + kx = 0$$

Euler-Lagrange modellering

Eksempel: Roterende masse-fjeder system



Ovenstående roterende masse-fjeder system har dynamik givet af impulsmomentsætningen som

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -K_1\theta_1 - K_2(\theta_1 - \theta_2) \qquad \text{[Nm]}$$

$$I_2\ddot{\theta}_2 = -K_2(\theta_2 - \theta_1) \qquad \text{[Nm]}$$

hvor I_1, I_2 er inertimomenter [kgm^2] og K_1, K_2 er stivheder [N/rad].

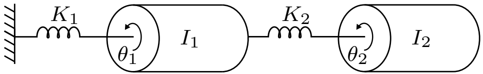
Den potentielle og kinetiske energi er

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}K_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}K_2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2$$

Euler-Lagrange modellering

Eksempel: Roterende masse-fjeder system



Ovenstående roterende masse-fjeder system har dynamik givet af impulsmomentsætningen som

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -K_1\theta_1 - K_2(\theta_1 - \theta_2) \qquad \text{[Nm]}$$

$$I_2\ddot{\theta}_2 = -K_2(\theta_2 - \theta_1) \qquad \text{[Nm]}$$

hvor I_1, I_2 er inertimomenter [kgm^2] og K_1, K_2 er stivheder [N/rad].

Den potentielle og kinetiske energi er

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}K_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}K_2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

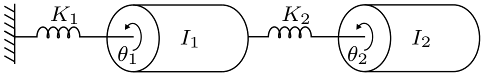
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2$$

Fra Euler-Lagrange ligning med genereliserede koordinater $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2) = (\theta_1, \theta_2)$ haves

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\boldsymbol{q}} = 0$$

hvor

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 - \left(\frac{1}{2}K_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}K_2(\theta_1 - \theta_2)^2\right)$$



Ovenstående roterende masse-fjeder system har dynamik givet af impulsmomentsætningen som

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -K_1\theta_1 - K_2(\theta_1 - \theta_2) \qquad \text{[Nm]}$$
$$I_2\ddot{\theta}_2 = -K_2(\theta_2 - \theta_1) \qquad \text{[Nm]}$$

hvor I_1, I_2 er inertimomenter [kgm^2] og K_1, K_2 er stivheder [N/rad].

Fra Euler-Lagrange ligning med genereliserede koordinater $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2) = (\theta_1, \theta_2)$ haves

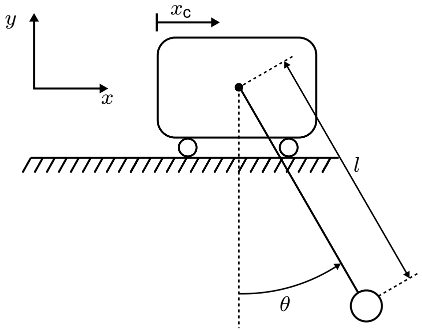
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{q}} = 0$$

hvor

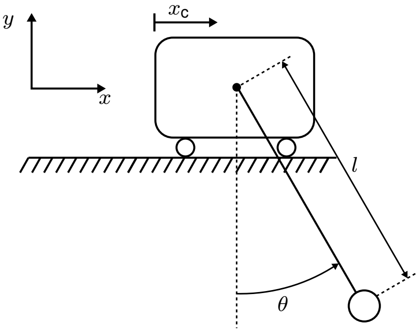
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 - \left(\frac{1}{2}K_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}K_2(\theta_1 - \theta_2)^2\right)$$

Dette kan også skrives

$$\begin{bmatrix} I_1\ddot{\theta}_1 + K_1\theta_1 + K_2(\theta_1 - \theta_2) \\ I_2\ddot{\theta}_2 - K_2(\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

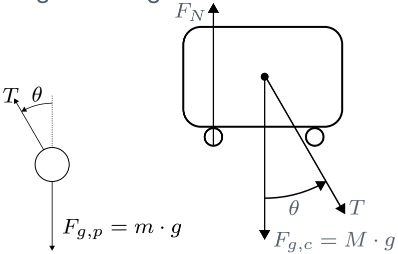


y
x
x_c
l
θ

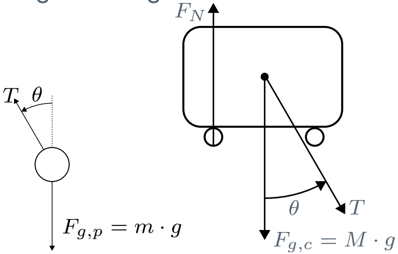


Hvor mange frihedsgrader har dette system?

Fritlegeme-diagrammer

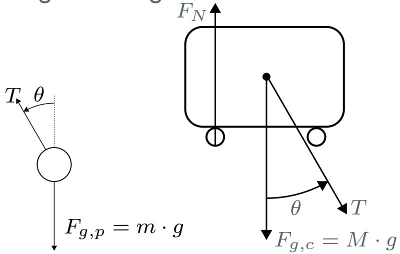


Fritlegeme-diagrammer



1. Anvend Newtons love på legemerne separat
2. Eliminer tensionskraften
3. Benyt relation mellem (x_p, y_p) og θ til omskrivning

Fritlegeme-diagrammer



1. Anvend Newtons love på legemerne separat
2. Eliminer tensionskraften
3. Benyt relation mellem (x_p, y_p) og θ til omskrivning

Den ***potentielle energi*** for systemet er lig den potentielle energi for pendulet

$$E_{\text{pot}} = mgy_p = -mgl\cos\theta$$

Den ***kinetiske energi*** for systemet er

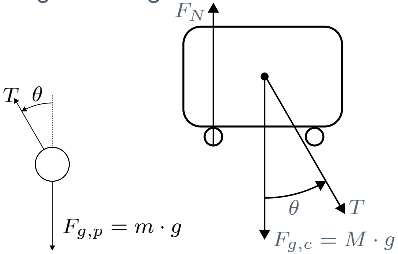
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\left(M\dot{x}_c^2 + m(\dot{x}_c + l\dot{\theta}\cos\theta)^2 + m(l\dot{\theta}\sin\theta)^2\right) + \frac{1}{2}J_p\dot{\theta}^2$$

og kan skrives

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_c^2 + ml\dot{x}_c\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}(ml^2+J_p)\dot{\theta}^2$$

hvor J_p er inertimomentet omkring massemidtpunktet for pendulet [kgm^2].

Fritlegeme-diagrammer



1. Anvend Newtons love på legemerne separat
2. Eliminer tensionskraften
3. Benyt relation mellem (x_p, y_p) og θ til omskrivning

Fra Euler-Lagrange ligning med genereliserede koordinater $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2) = (x_c, \theta)$ haves

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{q}} = 0$$

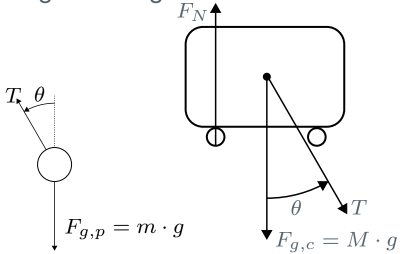
hvor

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_c^2 + ml\dot{x}_c\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}(ml^2 + J_p)\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

Euler-Lagrange modellering

Eksempel: Pendul på Vogn

Fritlegeme-diagrammer



1. Anvend Newtons love på legemerne separat
2. Eliminer tensionskraften
3. Benyt relation mellem (x_p, y_p) og θ til omskrivning

Fra Euler-Lagrange ligning med genereliserede koordinater $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2) = (x_c, \theta)$ haves

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{q}} = 0$$

hvor

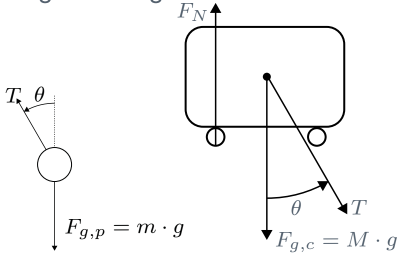
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_c^2 + ml\dot{x}_c\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}(ml^2 + J_p)\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

Første del af ligningen bliver dermed

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}_c} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -ml\sin\theta(g + \dot{x}_c\dot{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Euler-Lagrange modellering
Eksempel: Pendul på Vogn

Fritlegeme-diagrammer



1. Anvend Newtons love på legemerne separat
2. Eliminer tensionskraften
3. Benyt relation mellem (x_p, y_p) og θ til omskrivning

Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}_c^2 + ml\dot{x}_c\dot{\theta}\cos\theta + \frac{1}{2}(ml^2 + J_p)\dot{\theta}^2 + mgl\cos\theta$$

Første del af ligningen bliver dermed

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_c} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -ml\sin\theta(g + \dot{x}_c\dot{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

og

$$\begin{bmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}_c} \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\theta}} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} (M+m)\dot{x}_c + ml\dot{\theta}\cos\theta \\ ml\dot{x}_c\cos\theta + (ml^2 + J_p)\dot{\theta} \end{bmatrix}$$

Euler-Lagrange Modellering

Generelle kræfter

Fysiske systemer er ofte påvirket af eksterne styrbare kræfter og dissipative kræfter som friktion. Derfor udvides Euler-Lagrange ligning med generaliserede kræfter Q, der ikke nødvendigvis er konservative.

Euler-Lagrange Modellering
Generelle kræfter

Fysiske systemer er ofte påvirket af eksterne styrbare kræfter og dissipative kræfter som friktion. Derfor udvides Euler-Lagrange ligning med generaliserede kræfter Q, der ikke nødvendigvis er konservative.

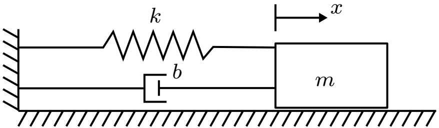
Denne udvidelse kaldes ***Lagrange–D'Alemberts princip***.

Hvis q er et trajektorie for et mekanisk system, der er påvirket af en generaliseret kraft Q så gælder

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = Q$$

hvor Q er en n-dimensionel vektor af generaliserede krafter. ***Lagrange–D'Alemberts princip*** kan skrives (for $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$)

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} &- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} &= Q_1 \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} &- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} &= Q_2 \\
\vdots \quad & \quad \vdots & \vdots \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} &- \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} &= Q_n
\end{aligned}$$



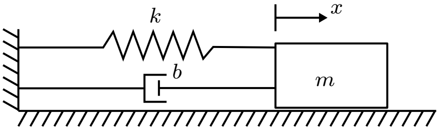
Ovenstående masse-fjeder-dæmper system har dynamik givet ved

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \qquad [\mathrm{N}]$$

hvor m er massen [kg], k er stivheden [N/m] og b er dæmpningen [N/(m/s)].

Den potentielle og kinetiske energi er

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2, \text{ og } E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$



Ovenstående masse-fjeder-dæmper system har dynamik givet ved

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \qquad [\mathrm{N}]$$

hvor m er massen [kg], k er stivheden [N/m] og b er dæmpningen [N/(m/s)].

Den potentielle og kinetiske energi er

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2, \text{ og } E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

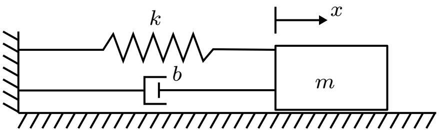
Fra Lagrange–D'Alemberts med genereliseret koordinat $q = x$ og generaliseret kraft $Q = -b\dot{x}$ haves

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = Q$$

hvor $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$.

Euler-Lagrange modellering

Eksempel: Masse-fjeder-dæmper system



Ovenstående masse-fjeder-dæmper system har dynamik givet ved

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} \qquad \text{[N]}$$

hvor m er massen [kg], k er stivheden [N/m] og b er dæmpningen [N/(m/s)].

Den potentielle og kinetiske energi er

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}kx^2, \text{ og } E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

Fra Lagrange–D'Alemberts med genereliseret koordinat $q = x$ og generaliseret kraft $Q = -b\dot{x}$ haves

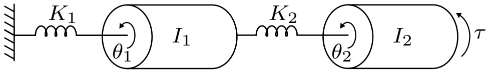
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = Q$$

hvor $\mathcal{L} = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 - \frac{1}{2}kx^2$. Dermed fås

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} + kx = m\ddot{x} + kx = -b\dot{x}$$

Euler-Lagrange modellering

Eksempel: Roterende masse-fjeder system med ekstern kraft



Ovenstående roterende masse-fjeder system har dynamik givet af impulsmomentsætningen som

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -K_1\theta_1 - K_2(\theta_1 - \theta_2) \qquad [\text{Nm}]$$

$$I_2\ddot{\theta}_2 = -K_2(\theta_2 - \theta_1) + \tau \qquad [\text{Nm}]$$

hvor I_1, I_2 er inertimomenter [kgm^2] og K_1, K_2 er stivheder [N/rad].

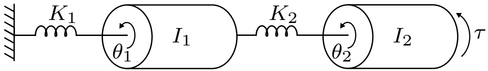
Den potentielle og kinetiske energi er

$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}K_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}K_2(\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2$$

Euler-Lagrange modellering

Eksempel: Roterende masse-fjeder system med ekstern kraft



Ovenstående roterende masse-fjeder system har dynamik givet af impulsmomentsætningen som

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -K_1\theta_1 - K_2(\theta_1 - \theta_2) \qquad \text{[Nm]}$$
$$I_2\ddot{\theta}_2 = -K_2(\theta_2 - \theta_1) + \tau \qquad \text{[Nm]}$$

hvor I_1, I_2 er inertimomenter [kgm^2] og K_1, K_2 er stivheder [N/rad].

Den potentielle og kinetiske energi er

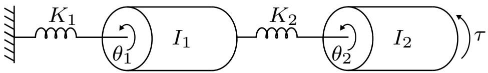
$$E_{\text{pot}} = \frac{1}{2}K_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}K_2(\theta_1 - \theta_2)^2$$
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2$$

Fra Euler-Lagrange ligning med genereliserede koordinater $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2) = (\theta_1, \theta_2)$ og generaliseret kraft $\boldsymbol{Q} = (0, \tau)$ haves

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Q}$$

hvor

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 - \left(\frac{1}{2}K_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}K_2(\theta_1 - \theta_2)^2\right)$$



Ovenstående roterende masse-fjeder system har dynamik givet af impulsmomentsætningen som

$$I_1\ddot{\theta}_1 = -K_1\theta_1 - K_2(\theta_1 - \theta_2) \qquad \text{[Nm]}$$
$$I_2\ddot{\theta}_2 = -K_2(\theta_2 - \theta_1) + \tau \qquad \text{[Nm]}$$

hvor I_1, I_2 er inertimomenter [kgm^2] og K_1, K_2 er stivheder [N/rad].

Fra Euler-Lagrange ligning med genereliserede koordinater $\boldsymbol{q} = (q_1, q_2) = (\theta_1, \theta_2)$ og generaliseret kraft $\boldsymbol{Q} = (0, \tau)$ haves

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\boldsymbol{q}}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \boldsymbol{q}} = \boldsymbol{Q}$$

hvor

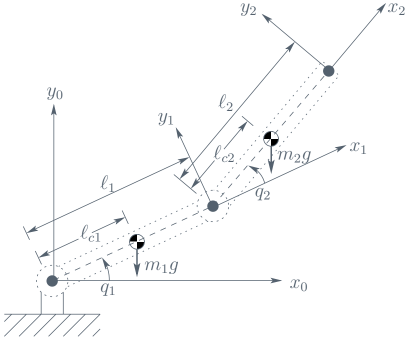
$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}I_1\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{\theta}_2^2 - \left(\frac{1}{2}K_1\theta_1^2 + \frac{1}{2}K_2(\theta_1 - \theta_2)^2\right)$$

Dette kan også skrives

$$\begin{bmatrix} I_1\ddot{\theta}_1 + K_1\theta_1 + K_2(\theta_1 - \theta_2) \\ I_2\ddot{\theta}_2 - K_2(\theta_1 - \theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau \end{bmatrix}$$

Robot med to led

Betragt robotarmen vist i nedenstående figur.



Definer de generaliserede koordinater som $(q_1, q_2) = (\theta_1, \theta_2)$, dvs. de generaliserede koordinater er vinklerne. Desuden er de generalliserede krafter momenterne, der påtrykkes i de to led, dvs. $(Q_1, Q_2) = (\tau_1, \tau_2)$.

Introduktion

Euler-Lagrange modellering

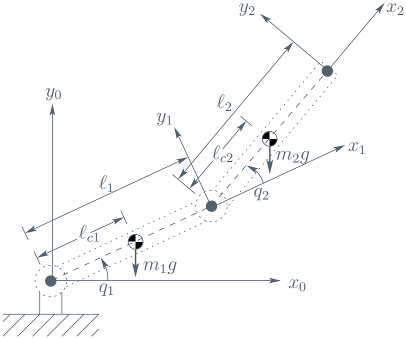
- Modellering af konservative systemer
- Eksempler: Konservative systemer
- Modellering af ikke-konservative systemer
- Eksempler: Ikke-konservative systemer

Robot med to led

- Kinematik
- Potentiel energi
- Kinetisk energi
- Dynamik

DH parametrene for robotten er given i følgende tabel.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2



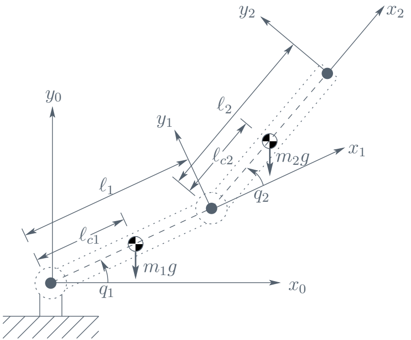
Robot med to led
DH parametre

DH parametrene for robotten er given i følgende tabel.

Link	a_i	α_i	d_i	θ_i
1	a_1	0	0	θ_1
2	a_2	0	0	θ_2

Hver koordinat transformation er givet ved

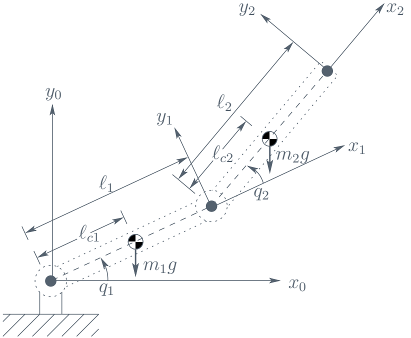
$$A_i^{i-1}(\theta_i) = \begin{bmatrix} c_i & -s_i & 0 & a_i c_i \\ s_i & c_i & 0 & a_i s_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Massemidtpunktet for Link 1 i ramme 0 er

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_{l_1} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & l_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & l_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=A_1^0} \begin{bmatrix} -l_1 + l_{c1} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

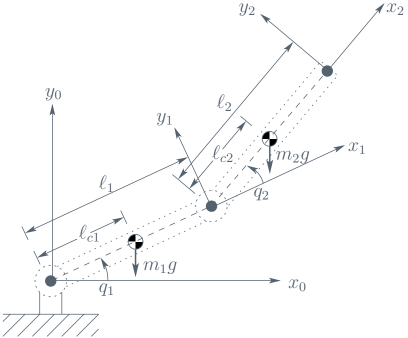
$$= \begin{bmatrix} l_{c1} c_1 \\ l_{c1} s_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Massemidtpunktet for Link 2 i ramme 0 er

$$
\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_{l_2} \\ 1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & l_1c_1 + l_2c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & l_1s_1 + l_2s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{=A_1^0A_2^1} \begin{bmatrix} -l_2 + l_{c2} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_{c2}c_{12} \\ l_1s_1 + l_{c2}s_{12} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}
$$



Jakobianter kan benyttes til at udtrykke hastigheden for massemidtpunktet af Link i

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{p}}_{l_i} &= J_P^{l_i}\dot{\boldsymbol{q}} \\
\boldsymbol{\omega}_i &= J_O^{l_i}\dot{\boldsymbol{q}}
\end{aligned}
$$

hvor

$$
\begin{aligned}
J_P^{l_i} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{P1}^{l_i} & \boldsymbol{J}_{P2}^{l_i} & \dots & \boldsymbol{J}_{Pi}^{l_i} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\
J_O^{l_i} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{O1}^{l_i} & \boldsymbol{J}_{O2}^{l_i} & \dots & \boldsymbol{J}_{Oi}^{l_i} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Jakobianter kan benyttes til at udtrykke hastigheden for massemidtpunktet af Link i

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{l_i} = J_P^{l_i}\dot{\boldsymbol{q}}$$
$$\boldsymbol{\omega}_i = J_O^{l_i}\dot{\boldsymbol{q}}$$

hvor

$$J_P^{l_i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{P1}^{l_i} & \boldsymbol{J}_{P2}^{l_i} & \dots & \boldsymbol{J}_{Pi}^{l_i} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$
$$J_O^{l_i} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{O1}^{l_i} & \boldsymbol{J}_{O2}^{l_i} & \dots & \boldsymbol{J}_{Oi}^{l_i} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

For et revolute led er

$$\boldsymbol{J}_{Pj}^{l_i} = \boldsymbol{z}_{j-1} \times (\boldsymbol{p}_{l_i} - \boldsymbol{p}_{j-1}) \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{J}_{Oj}^{l_i} = \boldsymbol{z}_{j-1}$$

hvor $\boldsymbol{p}_{j-1}$ er positionsvektoren for origo af ramme $j-1$ og $\boldsymbol{z}_{j-1}$ er retningsvektoren for z-aksen af ramme $j-1$.

For Link 1 haves

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{l_1} = J_P^{l_1}\dot{\boldsymbol{q}} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{\omega}_1 = J_O^{l_1}\dot{\boldsymbol{q}}$$

hvor

$$J_P^{l_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{P1}^{l_1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p}_{l_1} - \boldsymbol{p}_0) & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$
$$J_O^{l_1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{O1}^{l_1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}$$

For Link 1 haves

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{l_1} = J_P^{l_1}\dot{\boldsymbol{q}} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{\omega}_1 = J_O^{l_1}\dot{\boldsymbol{q}}$$

hvor

$$\begin{aligned} J_P^{l_1} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{P1}^{l_1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p}_{l_1} - \boldsymbol{p}_0) & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \\ J_O^{l_1} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{O1}^{l_1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dette medfører at

$$\begin{aligned} J_P^{l_1} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{P1}^{l_1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_{c1}c_1 \\ l_{c1}s_1 \\ 0 \end{bmatrix} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -l_{c1}s_1 & 0 \\ l_{c1}c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ J_O^{l_1} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{O1}^{l_1} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

For Link 2 haves

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{l_2} = J_P^{l_2}\dot{\boldsymbol{q}} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = J_O^{l_2}\dot{\boldsymbol{q}}$$

hvor

$$\begin{aligned} J_P^{l_2} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{P1}^{l_2} & \boldsymbol{J}_{P2}^{l_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p}_{l_2} - \boldsymbol{p}_0) & \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p}_{l_2} - \boldsymbol{p}_1) \end{bmatrix} \\ J_O^{l_2} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{O1}^{l_2} & \boldsymbol{J}_{O2}^{l_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{z}_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

For Link 2 haves

$$\dot{\boldsymbol{p}}_{l_2} = J_P^{l_2}\dot{\boldsymbol{q}} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{\omega}_2 = J_O^{l_2}\dot{\boldsymbol{q}}$$

hvor

$$\begin{aligned} J_P^{l_2} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{P1}^{l_2} & \boldsymbol{J}_{P2}^{l_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 \times (\boldsymbol{p}_{l_2} - \boldsymbol{p}_0) & \boldsymbol{z}_1 \times (\boldsymbol{p}_{l_2} - \boldsymbol{p}_1) \end{bmatrix} \\ J_O^{l_2} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{J}_{O1}^{l_2} & \boldsymbol{J}_{O2}^{l_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_0 & \boldsymbol{z}_1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dette medfører at

$$\begin{aligned} J_P^{l_2} &= \left[\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_{c2} c_{12} \\ l_1 s_1 + l_{c2} s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_{c2} c_{12} \\ l_1 s_1 + l_{c2} s_{12} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1 c_1 \\ l_1 s_1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \right] \\ &= \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_{c2} s_{12} & -l_{c2} s_{12} \\ l_1 c_1 + l_{c2} c_{12} & l_{c2} c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{og } J_O^{l_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Den potentielle energi skal udregnes i en inertiel ramme fx base rammen, der ikke accelererer. Dermed kan den potentielle energi udregnes fra

$$E_{\text{pot}}(\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n} E_{\text{pot},l_i}(\boldsymbol{q}) \qquad [\text{J}]$$

hvor E_{pot,l_i} er den potentielle energi for Link i [J].

Den potentielle energi skal udregnes i en inertiel ramme fx base rammen, der ikke accelererer. Dermed kan den potentielle energi udregnes fra

$$E_{\text{pot}}(\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n} E_{\text{pot},l_i}(\boldsymbol{q}) \qquad \text{[J]}$$

hvor E_{pot,l_i} er den potentielle energi for Link i [J].

Den samlede potentielle energi bliver således

$$E_{\text{pot}}(\boldsymbol{q}) = -\sum_{i=1}^{n} m_{l_i} \boldsymbol{g}_0^T \boldsymbol{p}_{l_i}(\boldsymbol{q}) \qquad \text{[J]}$$

hvor m_{l_i} er massen af Link i [kg], $\boldsymbol{g}_0$ er tyngdeaccelerationen i base rammen [m/s^2] og $\boldsymbol{p}_{l_i}(\boldsymbol{q})$ er positionen for massemidtpunktet for Link i i base rammen [m].

For den betragtede robotarms potentielle energi er

$$E_{\text{pot}}(\boldsymbol{q}) = -\sum_{i=1}^{2} m_{l_i} \boldsymbol{g}_0^T \boldsymbol{p}_{l_i}(\boldsymbol{q}) \qquad \text{[J]}$$

hvor

$$\boldsymbol{p}_{l_1} = \begin{bmatrix} l_{c1}c_1 \\ l_{c1}s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_{l_2} = \begin{bmatrix} l_1c_1 + l_{c2}c_{12} \\ l_1s_1 + l_{c2}s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{g}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}$$

For den betragtede robotarms potentielle energi er

$$E_{\text{pot}}(\boldsymbol{q}) = -\sum_{i=1}^{2} m_{l_i} \boldsymbol{g}_0^T \boldsymbol{p}_{l_i}(\boldsymbol{q}) \qquad \text{[J]}$$

hvor

$$\boldsymbol{p}_{l_1} = \begin{bmatrix} l_{c1} c_1 \\ l_{c1} s_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{p}_{l_2} = \begin{bmatrix} l_1 c_1 + l_{c2} c_{12} \\ l_1 s_1 + l_{c2} s_{12} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \boldsymbol{g}_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dette giver

$$E_{\text{pot}}(\boldsymbol{q}) = m_{l_1} g l_{c1} s_1 + m_{l_2} g (l_1 s_1 + l_{c2} s_{12}) \qquad \text{[J]}$$

Den kinetiske energi skal udregnes i en inertiel ramme fx base rammen, der ikke accelererer. Dermed kan den kinetiske energi udregnes fra

$$E_{\text{kin}}(\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n} E_{\text{kin},l_i}(\boldsymbol{q}) \qquad \text{[J]}$$

hvor E_{kin,l_i} er den kinetiske energi for Link i [J].

Den kinetiske energi skal udregnes i en inertiel ramme fx base rammen, der ikke accelererer. Dermed kan den kinetiske energi udregnes fra

$$E_{\text{kin}}(\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n} E_{\text{kin},l_i}(\boldsymbol{q}) \qquad \text{[J]}$$

hvor E_{kin,l_i} er den kinetiske energi for Link i [J].

Den kinetiske energi kan udtrykkes som summen af translatorisk og rotationel kinetisk energi

$$E_{\text{kin},l_i}(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i}^T \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T I_{l_i}(\boldsymbol{q}) \boldsymbol{\omega}_i$$

hvor både $\dot{\boldsymbol{p}}_i$, $\boldsymbol{\omega}_i$ og I_{l_i} er givet i base rammen.

Den såkaldte inerti-tensor I_{l_i} givet i base rammen kan omformuleres ved brug af en inertitensor, der ligger i ledets massemidtpunkt ($I^i_{l_i}$)

$$I_{l_i}(\boldsymbol{q}) = R^0_i(\boldsymbol{q}) I^i_{l_i} R^{0T}_i(\boldsymbol{q})$$

Den såkaldte inerti-tensor I_{l_i} givet i base rammen kan omformuleres ved brug af en inertitensor, der ligger i ledets massemidtpunkt ($I_{l_i}^i$)

$$I_{l_i}(\boldsymbol{q}) = R_i^0(\boldsymbol{q}) I_{l_i}^i R_i^{0T}(\boldsymbol{q})$$

Dette leder frem til følgende udtryk for den kinetiske energi

$$E_{\text{kin},l_i} = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i}^T \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T R_i^0 I_{l_i}^i R_i^{0T} \boldsymbol{\omega}_i$$

hvor både $\dot{\boldsymbol{p}}_i$ og $\boldsymbol{\omega}_i$ er givet i base rammen.

Robot med to led

Kinetisk energi: Inertitensor

Den såkaldte inerti-tensor I_{l_i} givet i base rammen kan omformuleres ved brug af en inertitensor, der ligger i ledets massemidtpunkt ($I_{l_i}^i$)

$$I_{l_i}(\boldsymbol{q}) = R_i^0(\boldsymbol{q}) I_{l_i}^i R_i^{0T}(\boldsymbol{q})$$

Dette leder frem til følgende udtryk for den kinetiske energi

$$E_{\text{kin},l_i} = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i}^T \dot{\boldsymbol{p}}_{l_i} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}_i^T R_i^0 I_{l_i}^i R_i^{0T} \boldsymbol{\omega}_i$$

hvor både $\dot{\boldsymbol{p}}_i$ og $\boldsymbol{\omega}_i$ er givet i base rammen.

Det ønskes at udtrykke $\dot{\boldsymbol{p}}_i$ og $\boldsymbol{\omega}_i$ ved brug af de generaliserede koordinater $\boldsymbol{q}$.

Ved brug af Jakobianten bliver den kinetiske energi

$$E_{\mathsf{kin}}(\boldsymbol{q}) = \sum_{i=1}^{n} E_{\mathsf{kin},l_i} \qquad \text{[J]}$$

hvor

$$E_{\mathsf{kin},l_i} = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{\boldsymbol{q}}^T J_P^{l_i T} J_P^{l_i} \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T J_O^{l_i T} R_i^0 I_{l_i}^i R_i^{0T} J_O^{l_i} \dot{\boldsymbol{q}}$$

For robottens første led fås

$$
\begin{aligned}
E_{\mathsf{kin},l_1} &= \frac{1}{2} m_{l_1} \dot{\boldsymbol{q}}^T J_P^{l_1 T} J_P^{l_1} \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T J_O^{l_1 T} R_1^0 I_{l_1}^1 R_1^{0T} J_O^{l_1} \dot{\boldsymbol{q}} \\
&= \frac{1}{2} m_{l_1} \dot{\boldsymbol{q}}^T \begin{bmatrix} -l_{c1} s_1 & l_{c1} c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_{c1} s_1 & 0 \\ l_{c1} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 \end{bmatrix} I_{l_1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} m_{l_1} l_{c1}^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 \end{bmatrix} I_{l_1}^1 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \begin{bmatrix} m_{l_1} l_{c1}^2 + I_{l_1,zz}^1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}
\end{aligned}
$$

Robot med to led
Eksempel: Kinetisk energi (II)

For robottens andet led fås

$$E_{\text{kin},l_2} = \frac{1}{2} m_{l_2} \dot{\boldsymbol{q}}^T J_P^{l_2 T} J_P^{l_2} \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T J_O^{l_2 T} R_2^0 I_{l_2}^2 R_2^{0T} J_O^{l_2} \dot{\boldsymbol{q}}$$

$$= \frac{1}{2} m_{l_2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_{c2} s_{12} & l_1 c_1 + l_{c2} c_{12} & 0 \\ -l_{c2} s_{12} & l_{c2} c_{12} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -l_1 s_1 - l_{c2} s_{12} & -l_{c2} s_{12} \\ l_1 c_1 + l_{c2} c_{12} & l_{c2} c_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}$$

$$+ \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix} I_{l_2}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} m_{l_2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \begin{bmatrix} l_1^2 + l_{c2}^2 + 2 l_1 l_{c2} c_2 & l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2 \\ l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2 & l_{c2}^2 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix} I_{l_2}^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \dot{\boldsymbol{q}}^T \begin{bmatrix} m_{l_2}(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2 l_1 l_{c2} c_2) + I_{l_2,zz}^2 & m_{l_2}(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2) + I_{l_2,zz}^2 \\ m_{l_2}(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2) + I_{l_2,zz}^2 & m_{l_2} l_{c2}^2 + I_{l_2,zz}^2 \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}}$$

Robottens potentielle og kinetiske energier er dermed

$$E_{\text{pot}} = m_{l_1} g l_{c1} s_1 + m_{l_2} g(l_1 s_1 + l_{c2} s_{12})$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\dot{\boldsymbol{q}}^T \underbrace{\begin{bmatrix} m_{l_1} l_{c1}^2 + I_{l_1,zz}^1 + m_{l_2}(l_1^2 + l_{c2}^2 + 2 l_1 l_{c2} c_2) + I_{l_2,zz}^2 & m_{l_2}(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2) + I_{l_2,zz}^2 \\ m_{l_2}(l_{c2}^2 + l_1 l_{c2} c_2) + I_{l_2,zz}^2 & m_{l_2} l_{c2}^2 + I_{l_2,zz}^2 \end{bmatrix}}_{=B(\boldsymbol{q})} \dot{\boldsymbol{q}}$$

hvor $B(\boldsymbol{q})$ er inertitensoren udtrykt med hensyn til base rammen.

Lagrange–D'Alemberts princip kan benyttes til modellering af systemet, hvor $\boldsymbol{q}$ er en vektor bestående af de to ledvinkler og τ_i er momentet påtrykt i led i

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = \tau_1$$
$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = \tau_2$$

hvor

$$\mathcal{L} = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}}$$

Hvordan tilføjes en friktionskraft til systembeskrivelsen?

Hvordan tilføjes en fjederkraft til systembeskrivelsen?

1. Opskriv bevægelsesligningerne robotarmen ved brug af Lagrange–D'Alemberts princip (MATLAB eller andet software kan benyttes i forbindelse med udledningen).
2. Hvilke kraftmomenter (τ_1, τ_2) skal påtrykkes ledene, hvis armen skal stå stille i konfigurationen $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2) = (\pi/3, \pi/3)$.
3. Simuler robotarmen ved brug af `ode45` med input $\boldsymbol{Q} = (\tau_1, \tau_2) = \mathbf{0}$. Benyt start-konfigurationen $\boldsymbol{q} = (\theta_1, \theta_2) = (\pi/3, \pi/3)$.

Navn	Symbol	Værdi	Enhed
Længde af Led 1	l_1	1	m
Længde af Led 2	l_2	1	m
Længde til CoM Led 1	l_{c1}	$0{,}5$	m
Længde til CoM Led 2	l_{c2}	$0{,}5$	m
Masse af Led 1	m_{l_1}	50	kg
Masse af Led 2	m_{l_2}	50	kg
Inerti af Led 1	$I^1_{l_1}$	10	kgm^2
Inerti af Led 2	$I^2_{l_2}$	10	kgm^2