Lektion 7: Plan bevægelse af stive legemer

Modellering af elektromekaniske systemer

Christoffer Sloth

chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
Mærsk Mc-Kinney Møller Instituttet
Syddansk Universitet

Agenda

Introduktion

Beskrivelse af plan bevægelse

Bevægelse af stive legemer

Kinetisk energi og arbejde for stive legemer

Dynamik af et stift legeme

Opsummering

Viden[1]

Den studerende skal kunne:

- forklare den grundlæggende fysiks love og begreber
- beskrive et elektromekanisk system ved hjælp af systemets parametre
- redegøre for virkemåden af børstede og børsteløse DC motorer
- opstille overføringsfunktioner for lineære systemer

Færdigheder

Den studerende skal kunne:

- udføre fritlegemeanalyse på et mekanisk system
- anvende Newtons 3 love til modellering af mekaniske systemer
- anvende Lagrange D'Alemberts princip til modellering af mekaniske systemer
- opstille differentialligninger, der beskriver et elektromekanisk systems bevægelse
- fortolke lineære systemers bevægelse i frekvensdomæne
- modellere og simulere simple serielle manipulatorer

Kompetencer

Den studerende skal kunne:

- simulere elektromekaniske systemer og fortolke deres bevægelse

[1] Basseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=46418&listid=5027&lang=da

- **Lektion 1**: Fourierrækker og Fouriertransformation
- **Lektion 2**: Laplace transformation
- **Lektion 3**: Kræfter og bevægelse
- **Lektion 4**: Arbejde og energi
- **Lektion 5**: Impulsmoment og stød
- **Lektion 6**: Relativ bevægelse og fiktive kræfter
- **Lektion 7**: Plan bevægelse af stive legemer
- **Lektion 8**: Almen bevægelse af stive legemer
- **Lektion 9**: Svingninger
- **Lektion 10**: DC motoren
- **Lektion 11**: Modellering af robotarm
- **Lektion 12**: Simulering af mekaniske systemer

Massemidtpunktssætningen
Dynamikken for et partikelsystemets massemidtpunkt er

$$M\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{F}_{\text{net}} \qquad [\text{N}]$$

hvor M er massen af partikelsystemet [kg], $\boldsymbol{a}_C$ er accelerationen af partikelsystemets massemidtpunktet [m/s^2] og $\boldsymbol{F}_{\text{net}}$ er summen af ydre kræfter [N].

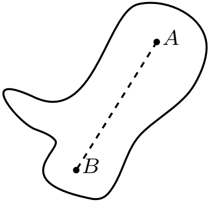
Impulsmomentsætningen
Lad $\boldsymbol{L}_O$ være *Impulsmomentet* med hensyn til punktet O for en partikel, så gælder det at

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\tau}_O \qquad [\mathrm{Nm}]$$

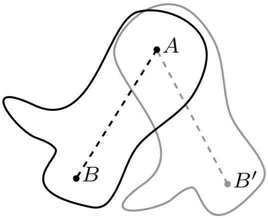
hvor $\boldsymbol{\tau}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ er *kraftmomentet* med hensyn til O (punktet O skal ligge fast i et inertialsystem).

Beskrivelse af plan bevægelse

Et stift legeme er et system af partikler, hvor partiklernes indbyrdes afstande er konstante.

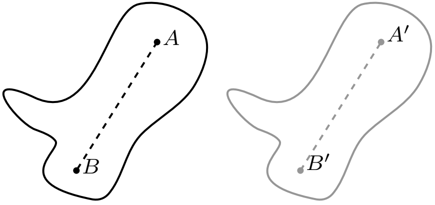


Et stift legeme er et system af partikler, hvor partiklernes indbyrdes afstande er konstante.



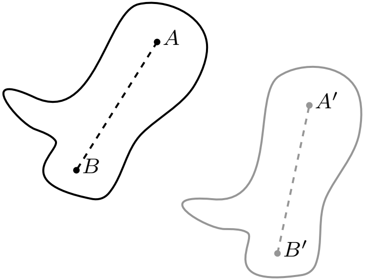
Et stift legeme kan lave en rotationel bevægelse

Et stift legeme er et system af partikler, hvor partiklernes indbyrdes afstande er konstante.



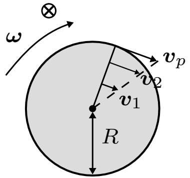
Et stift legeme kan lave en rotationel bevægelse, en translatorisk bevægselse

Et stift legeme er et system af partikler, hvor partiklernes indbyrdes afstande er konstante.

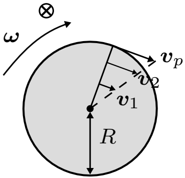


Et stift legeme kan lave en rotationel bevægelse, en translatorisk bevægselse eller en kombination af disse.

Betragt en skive, der har en rotation givet ved ω og et massemidtpunkt i hvile.



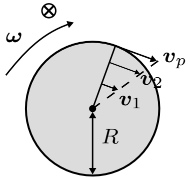
Betragt en skive, der har en rotation givet ved ω og et massemidtpunkt i hvile.



Hastigheden af et punkt med stedvektor $\boldsymbol{r}$ (fra omdrejningspunktet) er

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \qquad [\text{m/s}]$$

Betragt en skive, der har en rotation givet ved ω og et massemidtpunkt i hvile.



Hastigheden af et punkt med stedvektor $\boldsymbol{r}$ (fra omdrejningspunktet) er

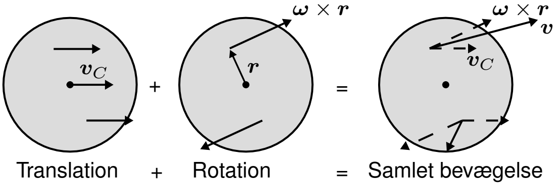
$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \qquad [\text{m/s}]$$

Farten af punkter på periferien af skiven er

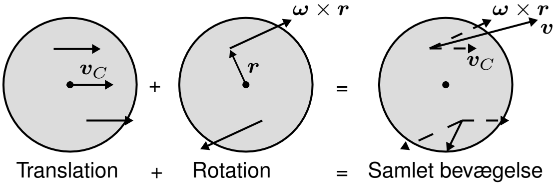
$$v_p = R\omega \qquad [\text{m/s}]$$

hvor R er radius af skiven [m].

Betragt en skive, der har en rotationsvektor ω og en hastighed af massemidtpunktet $\boldsymbol{v}_C \neq 0$ m/s.



Betragt en skive, der har en rotationsvektor ω og en hastighed af massemidtpunktet $\boldsymbol{v}_C \neq 0$ m/s.

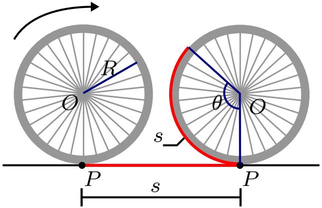


Hastigheden af et punkt på skiven med stedvektor $\boldsymbol{r}$ (fra massemidtpunktet) er

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \qquad [\text{m/s}]$$

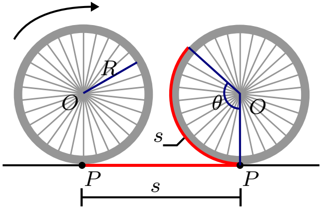
Ved rulning uden slip mellem hjul og underlag gælder følgende

$$x = s = R\theta \qquad [\mathrm{m}]$$



Ved rulning uden slip mellem hjul og underlag gælder følgende

$$x = s = R\theta \qquad [\mathrm{m}]$$



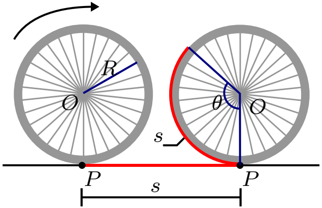
Hastigheden og accelerationen af massemidtpunktet midt i hjulet bliver således

$$v_C = R\omega \qquad \text{og} \qquad a_C = R\frac{d\omega}{dt}$$

Beskrivelse af plan bevægelse
Eksempel: Ren rulning

Ved rulning uden slip mellem hjul og underlag gælder følgende

$$x = s = R\theta \qquad [\mathrm{m}]$$



Hastigheden og accelerationen af massemidtpunktet midt i hjulet bliver således

$$v_C = R\omega \qquad \text{og} \qquad a_C = R\frac{d\omega}{dt}$$

Hastigheden af et punkt på hjulet er givet ved

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} \qquad [\mathrm{m/s}]$$

Bevægelse af stive legemer

Massemidtpunktssætningen benyttes til at finde massemidtpunktets bevægelse

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} \qquad \text{[N]}$$

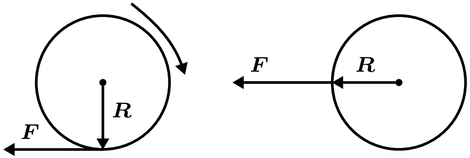
hvor M er legemets samlede masse [kg], $\boldsymbol{v}_C$ er massemidtpunktets hastighed [m/s] og $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ er en ekstern kraft [N].

Massemidtpunktssætningen benyttes til at finde massemidtpunktets bevægelse

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} \qquad [\text{N}]$$

hvor M er legemets samlede masse [kg], $\boldsymbol{v}_C$ er massemidtpunktets hastighed [m/s] og $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ er en ekstern kraft [N].

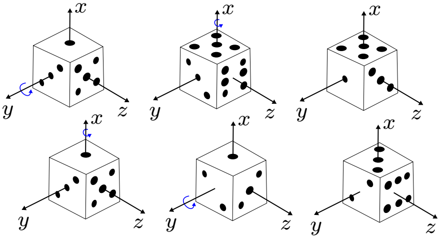
Betragt to skiver på et glat underlag, hvor skiverne er påvirket af den samme kraft $\boldsymbol{F}$.



Hvordan bevæger de to skivers massemidtpunkter sig?

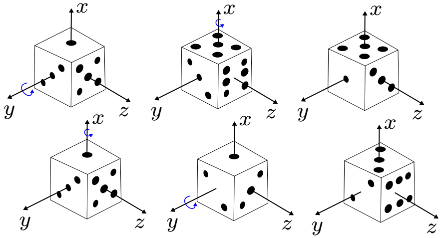
Hvad sker der i de følgende to scenarier:

- Et objekt roteres 90° omkring x-aksen efterfulgt af rotation på 90° omkring y-aksen.
- Et objekt roteres 90° omkring y-aksen efterfulgt af rotation på 90° omkring x-aksen.



Hvad sker der i de følgende to scenarier:

- Et objekt roteres $90°$ omkring x-aksen efterfulgt af rotation på $90°$ omkring y-aksen.
- Et objekt roteres $90°$ omkring y-aksen efterfulgt af rotation på $90°$ omkring x-aksen.



Konklusion: Det giver ikke mening direkte at addere rotationsvektorer.

Impulsmomentsætningen i z-retningen kan benyttes til beskrivelse af roterende bevægelse i planen, dvs.

$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z \qquad [\mathrm{Nm}]$$

Impulsmomentsætningen i z-retningen kan benyttes til beskrivelse af roterende bevægelse i planen, dvs.

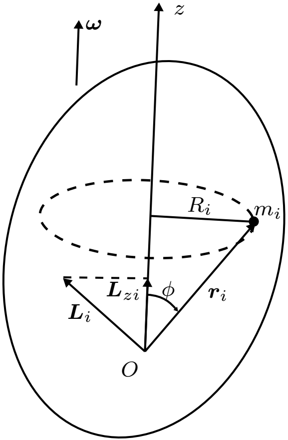
$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z \qquad [\mathrm{Nm}]$$

Ofte benyttes massemidtpunktet C som referencepunkt, og dermed bliver impulsmomentsætningen i z-retningen

$$\frac{dL_{C,z}}{dt} = \tau_{C,z} \qquad [\mathrm{Nm}]$$

Impulsmomentet for m_i om punktet O er

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$



Impulsmomentet for m_i om punktet O er

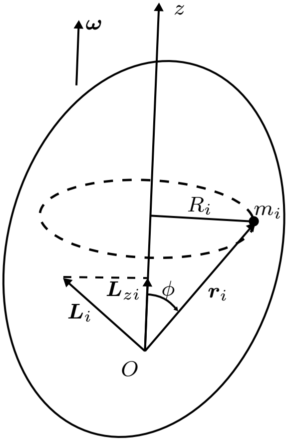
$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$

Af figuren ses det at

$$R_i = r_i \sin\phi$$

Dermed bliver størrelsen af impulsmomentet

$$L_i = |\boldsymbol{L}_i| = m_i r_i (\omega r_i \sin\phi)$$



Impulsmomentet for m_i om punktet O er

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$

Af figuren ses det at

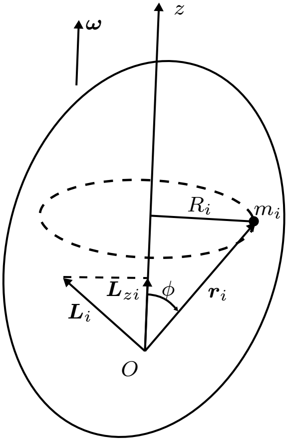
$$R_i = r_i \sin\phi$$

Dermed bliver størrelsen af impulsmomentet

$$L_i = |\boldsymbol{L}_i| = m_i r_i (\omega r_i \sin\phi)$$

I z-retningen er impulsmomentet for masse m_i om punktet O

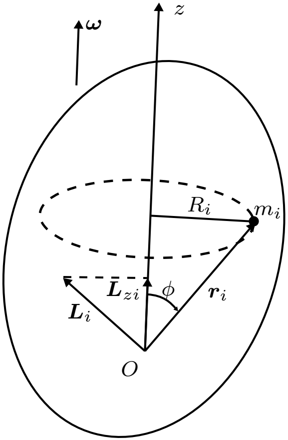
$$L_{zi} = L_i \sin\phi = m_i \omega (r_i \sin\phi)^2 = m_i \omega R_i^2$$



Impulsmomentet om punktet O for hele legemet er dermed

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \omega \underbrace{\sum_i m_i R_i^2}_{=I_z}$$

hvor I_z er legemets **inertimoment** om z-aksen [kgm^2].



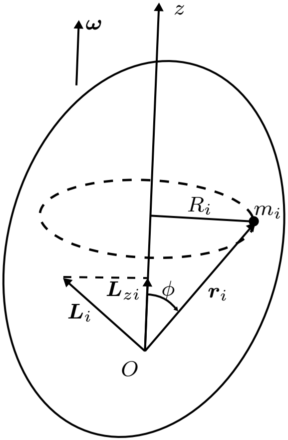
Impulsmomentet om punktet O for hele legemet er dermed

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \omega \underbrace{\sum_i m_i R_i^2}_{=I_z}$$

hvor I_z er legemets **inertimoment** om z-aksen [kgm^2].

Inertimomentet for en kontinuert massefordeling kan skrives

$$I_z = \int R^2 dm = \int R^2 \rho dV$$



Impulsmomentet for et stift legeme om et fast punkt i et inertialsystem eller om massemidtpunktet er

$$L_z = I_z\omega$$

hvor I_z er legemets inertimoment om en linje gennem punktet parallel med rotationsaksen.

Impulsmomentet for et stift legeme om et fast punkt i et inertialsystem eller om massemidtpunktet er

$$L_z = I_z \omega$$

hvor I_z er legemets inertimoment om en linje gennem punktet parallel med rotationsaksen.

Den rotationelle dynamik for et stift legeme er således

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \tau_z \qquad \text{eller} \qquad I_{C,z} \frac{d\omega}{dt} = \tau_{C,z}$$

Impulsmomentet for et stift legeme om et fast punkt i et inertialsystem eller om massemidtpunktet er

$$L_z = I_z \omega$$

hvor I_z er legemets inertimoment om en linje gennem punktet parallel med rotationsaksen.

Den rotationelle dynamik for et stift legeme er således

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \tau_z \qquad \text{eller} \qquad I_{C,z} \frac{d\omega}{dt} = \tau_{C,z}$$

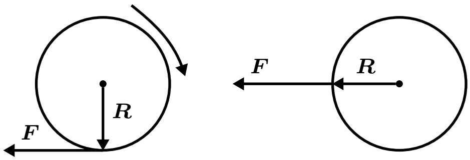
Slutteligt kan impulsmomentet også udtrykkes

$$L_z = I_{C,z}\omega + (\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{P})_z$$

hvor $\boldsymbol{P}$ er systemets samlede impuls.

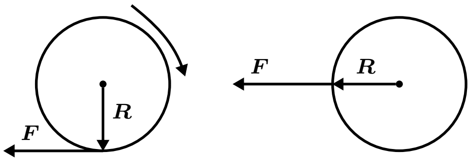
Den translatoriske bevægelse af begge legemer kan bestemmes ved brug af *massemidtpunktssætningen*

$$M \frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = \sum_i \boldsymbol{F}_{\text{ext}} \qquad [\text{N}]$$



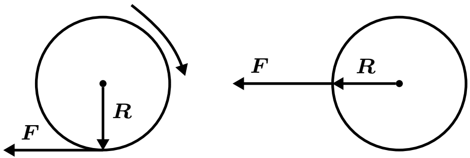
Den translatoriske bevægelse af begge legemer kan bestemmes ved brug af *massemidtpunktssætningen*

$$M \frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = \sum_i \boldsymbol{F}_{\text{ext}} \qquad [\text{N}]$$

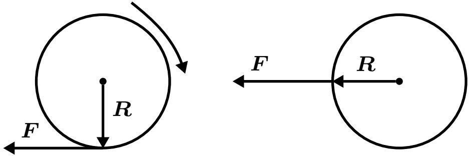


The rotationelle bevægelse af skiverne kan bestemmes ved brug af *impulsmoment sætningen*

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\tau}_O \qquad [\text{Nm}]$$

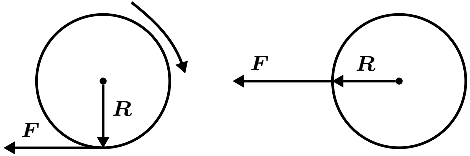


Vi betragter rotation omkring massemidtpunktet C.



Vi betragter rotation omkring massemidtpunktet C. Skivernes kraftmomenter ($\tau_{C,z} = (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{F})_z$) er

$$\text{(Skive } 1) : \tau_{C,z} = ((0, -R, 0) \times (-F, 0, 0))_z = RF$$
$$\text{(Skive } 2) : \tau_{C,z} = ((-R, 0, 0) \times (-F, 0, 0))_z = 0$$



Vi betragter rotation omkring massemidtpunktet C. Skivernes kraftmomenter ($\tau_{C,z} = (\boldsymbol{R} \times \boldsymbol{F})_z$) er

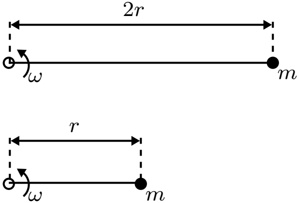
$$\text{(Skive } 1) : \tau_{C,z} = ((0, -R, 0) \times (-F, 0, 0))_z = RF$$
$$\text{(Skive } 2) : \tau_{C,z} = ((-R, 0, 0) \times (-F, 0, 0))_z = 0$$

Dermed er vinkelhastigheden for Skive 2 konstant, mens vinkelhastigheden for Skive 1 er

$$I_C \frac{d\omega}{dt} = RF$$

En rotationel bevægelse har en kinetisk energi ligesom en translatorisk bevægelse.

Hvilket af de to systemer er sværest at accelerere?



Kinetisk energi og arbejde for stive legemer

Kinetisk energi (I)

Den kinetiske energi for en partikel, der bevæger sig med en hastighed $\boldsymbol{v}$ er

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \qquad [\text{J}]$$

hvor v er størrelsen af $\boldsymbol{v}$.

Den kinetiske energi for en partikel, der bevæger sig med en hastighed $\boldsymbol{v}$ er

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \text{[J]}$$

hvor v er størrelsen af $\boldsymbol{v}$.

Roteres et legeme om en fast akse, kan det betragtes som bestående af flere partikler, og dermed kan den kinetiske energi udregnes som

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 \qquad \text{[J]}$$

hvor partikel i har massen m_i og hastigheden v_i.

Det forrige udtryk kan omskrives for stive legemer som ($v_i = \omega r_i$)

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_i m_i r_i^2 \right)}_{=I_z} \omega^2 \qquad [\mathrm{J}]$$

hvor I_z er inertimomentet [kgm^2].

Fra *Lektion 4* er den kinetiske energi for et partikelsystem udtrykt i L-Systemet

$$E_{\text{kin}} = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i v_C^2}_{E_{\text{kin,ext}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i {v_i'}^2}_{E_{\text{kin,int}}}$$

Fra *Lektion 4* er den kinetiske energi for et partikelsystem udtrykt i L-Systemet

$$E_{\text{kin}} = \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i v_C^2}_{E_{\text{kin,ext}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_i m_i {v'_i}^2}_{E_{\text{kin,int}}}$$

Dermed er den kinetiske energi for et stift legeme, der bevæger sig vilkåreligt

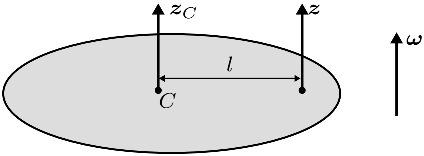
$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \underbrace{\frac{1}{2} M v_C^2}_{E_{\text{kin,ext}}} + \underbrace{\frac{1}{2}\omega^2 \sum_i m_i {r_i}^2}_{E_{\text{kin,int}}} \\ &= \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \end{aligned}$$

hvor I_C er inertimomentet om en akse, der går igennem massemidtpunktet og er parallel med rotationsaksen og r_i er m_is afstand til massemidtpunktet.

Betragt et legeme, der roterer omkring z-aksen og ikke z_C-aksen.
Legemets kinetiske energi bliver således

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad [\text{J}]$$

hvor I_z er inertimomentet om z-aksen.

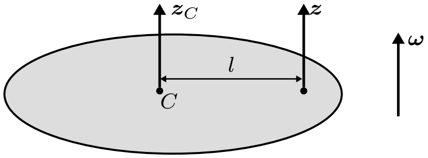


Betragt et legeme, der roterer omkring z-aksen og ikke z_C-aksen.
Legemets kinetiske energi bliver således

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad [\text{J}]$$

hvor I_z er inertimomentet om z-aksen.
Massemidtpunktets fart er

$$v_C = l\omega \qquad [\text{m/s}]$$



Kinetisk energi og arbejde for stive legemer

Steiners sætning (I)

Betragt et legeme, der roterer omkring z-aksen og ikke z_C-aksen.
Legemets kinetiske energi bliver således

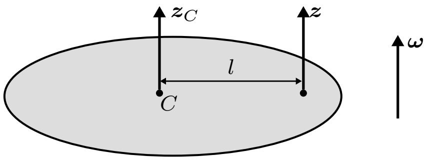
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 \qquad [\text{J}]$$

hvor I_z er inertimomentet om z-aksen.
Massemidtpunktets fart er

$$v_C = l\omega \qquad [\text{m/s}]$$

Den kinetiske energi kan derfor også skrives

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M (l\omega)^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \qquad [\text{J}]$$

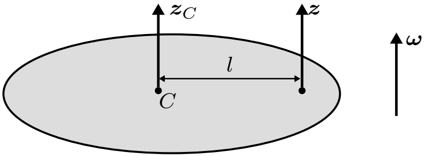


Fra udtrykkene for kinetisk energi

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} M (l\omega)^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \qquad [\text{J}]$$

konkluderes det at

$$I_z = I_C + Ml^2 \qquad [\text{kgm}^2]$$

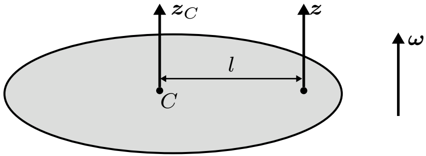


Fra udtrykkene for kinetisk energi

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} I_z \omega^2 = \frac{1}{2} M (l\omega)^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \qquad [\text{J}]$$

konkluderes det at

$$I_z = I_C + Ml^2 \qquad [\text{kgm}^2]$$

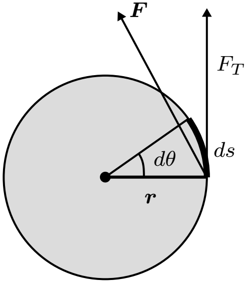


Steiners sætning
Lad z_C være en akse, der gå igennem massemidtpunktet og z være parallel med z_C. Så er inertimomentet om z-aksen

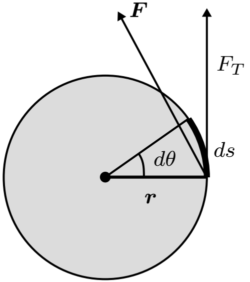
$$I_z = I_C + Ml^2 \qquad [\text{kgm}^2]$$

hvor M er massen af legemet [kg], l er afstanden mellem z og z_C [m] og I_C er inertimomentet om z_C-aksen [kgm^2].

En kraft $\boldsymbol{F}$ angriber et legeme i afstanden r fra massemidtpunktet.



En kraft $\boldsymbol{F}$ angriber et legeme i afstanden r fra massemidtpunktet.



Arbejdet udført af kraftmomentet $\tau_z = rF_T$ om z-aksen efter en infinitisimal vinkelændring $d\theta$ er

$$dW = F_T ds = F_T r d\theta = \tau_z d\theta \qquad [\mathrm{J}]$$

Et kraftmoment kan udføre et arbejde på et legeme. Hvis kraftmomentet er konstant, så bliver arbejdet

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \qquad [\mathrm{J}]$$

Et kraftmoment kan udføre et arbejde på et legeme. Hvis kraftmomentet er konstant, så bliver arbejdet

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \qquad [\mathrm{J}]$$

Hvis kraftmomentet er varierende kan arbejdet beregnes som

$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau(\theta) d\theta \qquad [\mathrm{J}]$$

Et kraftmoment kan udføre et arbejde på et legeme. Hvis kraftmomentet er konstant, så bliver arbejdet

$$W = \tau(\theta_f - \theta_i) \qquad [\mathrm{J}]$$

Hvis kraftmomentet er varierende kan arbejdet beregnes som

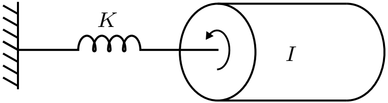
$$W = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau(\theta) d\theta \qquad [\mathrm{J}]$$

Slutteligt er effekten ved en ren rotation

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau\omega \qquad [\mathrm{W}]$$

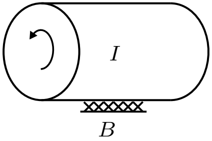
Stivheder modelleret som torsionsfjedre findes i mange systemer. Disse giver anledning til et moment, der er afhænger af vinklændringen over fjederen

$$\tau_s = -K\Delta\theta \qquad \text{[Nm]}$$

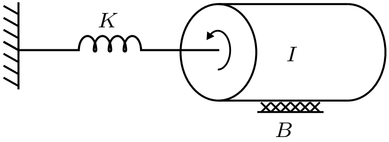


Dæmpning modelleres ligesom i et translatorisk system som

$$\tau_d = -B\omega \qquad [\text{Nm}]$$



Ved brug af impulsmomentsætningen kan en dynamisk model for følgende system opstilles.



Opsummering

Impulsmomentsætningen
Lad L_z være *Impulsmomentet* i z-aksens retning med hensyn til punktet O for et stift legeme, så gælder det at

$$\frac{dL_z}{dt} = I_z \frac{d\omega}{dt} = \tau_z \qquad [\text{Nm}]$$

hvor I_z er *inertimomentet* med hensyn til O (punktet O skal ligge fast i et inertialsystem).

Impulsmomentsætningen
Lad $L_{C,z}$ være *Impulsmomentet* i z-aksens retning med hensyn til massemidtpunktet C for et stift legeme, så gælder det at

$$\frac{dL_{C,z}}{dt} = I_C \frac{d\omega}{dt} = \tau_z \qquad [\text{Nm}]$$

hvor I_C er *inertimomentet* med hensyn til massemidtpunktet C.

Kinetisk energi
Den kinetiske energi for et stift legeme, der bevæger sig vilkåreligt er

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \qquad [\text{J}]$$

hvor I_C er inertimomentet om en akse, der går igennem massemidtpunktet.

Steiners sætning

Lad z_C være en akse, der gå igennem massemidtpunktet og z være parallel med z_C. Så er inertimomentet om z-aksen

$$I_z = I_C + Ml^2 \qquad [\text{kgm}^2]$$

hvor M er massen af legemet [kg], l er afstanden mellem z og z_C [m] og I_C er inertimomentet om z_C-aksen [kgm^2].