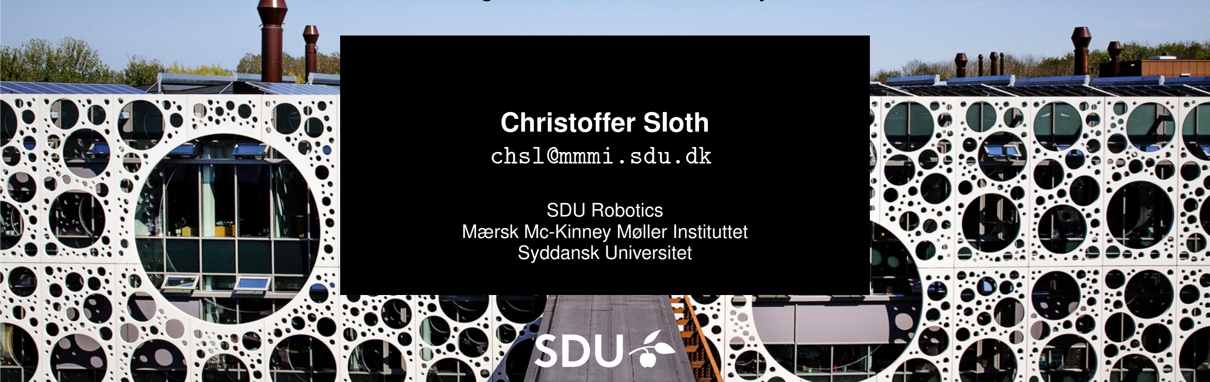
Lektion 8: Almen bevægelse af stive legemer

Modellering af elektromekaniske systemer



Christoffer Sloth

chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
Mærsk Mc-Kinney Møller Instituttet
Syddansk Universitet

Agenda

Introduktion

Udregning af impulsmomenter

Kinetisk energi for stive legemer

Bevægelsesligning for stift legeme

Kinematik baggrund
- Beskrivelse af positur for robot
- Beskrivelse af hastighed for robot

Opsummering

Viden[1]

Den studerende skal kunne:

- forklare den grundlæggende fysiks love og begreber
- beskrive et elektromekanisk system ved hjælp af systemets parametre
- redegøre for virkemåden af børstede og børsteløse DC motorer
- opstille overføringsfunktioner for lineære systemer

Færdigheder

Den studerende skal kunne:

- udføre fritlegemeanalyse på et mekanisk system
- anvende Newtons 3 love til modellering af mekaniske systemer
- anvende Lagrange D'Alemberts princip til modellering af mekaniske systemer
- opstille differentialligninger, der beskriver et elektromekanisk systems bevægelse
- fortolke lineære systemers bevægelse i frekvensdomæne
- modellere og simulere simple serielle manipulatorer

Kompetencer

Den studerende skal kunne:

- simulere elektromekaniske systemer og fortolke deres bevægelse

[1] Basseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=46418&listid=5027&lang=da

- **Lektion 1**: Bevægelse i flere dimensioner
- **Lektion 2**: Kræfter og bevægelse
- **Lektion 3**: Analyse i frekvensdomæne
- **Lektion 4**: Arbejde og energi
- **Lektion 5**: Impulsmoment og stød
- **Lektion 6**: Relativ bevægelse og fiktive kræfter
- **Lektion 7**: Plan bevægelse af stive legemer
- **Lektion 8**: Almen bevægelse af stive legemer
- **Lektion 9**: Svingninger
- **Lektion 10**: DC motoren
- **Lektion 11**: Modellering af robotarm
- **Lektion 12**: Simulering af mekaniske systemer

Massemidtpunktssætningen
Dynamikken for et partikelsystemets massemidtpunkt er

$$\frac{d\boldsymbol{p}_C}{dt} = \boldsymbol{F}_{\text{net}} \qquad [\text{N}]$$

hvor $\boldsymbol{p}_C$ er den totale impuls af partikelsystemets massemidtpunktet [kgm/s] og $\boldsymbol{F}_{\text{net}}$ er summen af ydre kræfter [N].

Impulsmomentsætningen
Lad $\boldsymbol{L}_O$ være *Impulsmomentet* med hensyn til punktet O for en partikel, så gælder det at

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\tau}_O \qquad [\text{Nm}]$$

hvor $\boldsymbol{\tau}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ er *kraftmomentet* med hensyn til O (punktet O skal ligge fast i et inertialsystem).

Kinetisk energi af stift legeme
Et stift legemes kinetiske energi er

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_C \omega^2 \qquad [\text{J}]$$

hvor I_C er inertimomentet [kgm^2] om en akse, der går igennem massemidtpunktet og er parallel med rotationsaksen.

Udregning af impulsmomenter

Introduktion

Udregning af impulsmomenter

Kinetisk energi for stive legemer

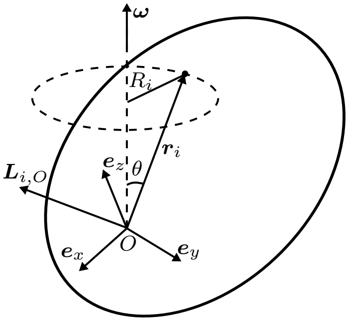
Bevægelsesligning for stift legeme

Kinematik baggrund
- Beskrivelse af positur for robot
- Beskrivelse af hastighed for robot

Opsummering

Et masse elementet m_i bidrager til impulsmomentet $\boldsymbol{L}_O$ omkring punktet O med

$$\boldsymbol{L}_{i,O} = \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{r_i} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$

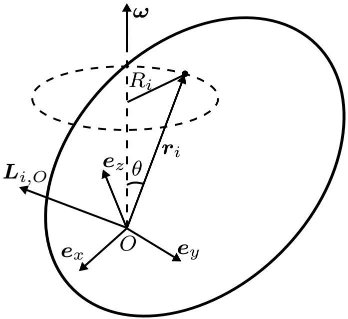


Et masse elementet m_i bidrager til impulsmomentet $\boldsymbol{L}_O$ omkring punktet O med

$$\boldsymbol{L}_{i,O} = \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{r_i} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$

Lad $\boldsymbol{r_i} = (x_i, y_i, z_i)$ og $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ så er

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} z_i\omega_y - y_i\omega_z \\ x_i\omega_z - z_i\omega_x \\ y_i\omega_x - x_i\omega_y \end{bmatrix}$$

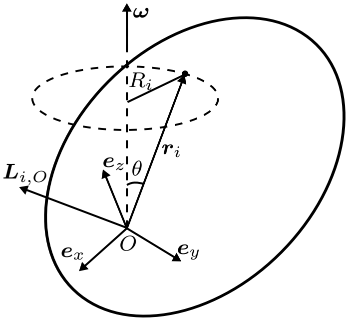


Et masse elementet m_i bidrager til impulsmomentet $\boldsymbol{L}_O$ omkring punktet O med

$$\boldsymbol{L}_{i,O} = \boldsymbol{r_i} \times \boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{r_i} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$

Lad $\boldsymbol{r_i} = (x_i, y_i, z_i)$ og $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ så er

$$\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_i & y_i & z_i \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} z_i\omega_y - y_i\omega_z \\ x_i\omega_z - z_i\omega_x \\ y_i\omega_x - x_i\omega_y \end{bmatrix}$$



På samme vis fås

$$\boldsymbol{L}_{i,O} = m_i \begin{bmatrix} (y_i^2 + z_i^2)\omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \\ -y_i x_i \omega_x + (x_i^2 + z_i^2)\omega_y - y_i z_i \omega_z \\ -z_i x_i \omega_x - z_i y_i \omega_y + (x_i^2 + y_i^2)\omega_z \end{bmatrix} = m_i \begin{bmatrix} (y_i^2 + z_i^2) & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & (x_i^2 + z_i^2) & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

Udregning af impulsmomenter
Rotation af stift legeme (II)

Fra udtrykket for masse elementet m_is bidrag til impulsmomentet $\boldsymbol{L}_O$ omkring punktet O

$$\boldsymbol{L}_{i,O} = m_i \begin{bmatrix} (y_i^2 + z_i^2) & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & (x_i^2 + z_i^2) & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

kan det samlede impulsmomentet findes ved summation, dvs.

$$\boldsymbol{L}_O = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & I_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}}_{\tilde{I}} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

hvor $I_{xx} = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2)$ og $D_{xy} = \sum m_i x_i y_i$.

Fra udtrykket for masse elementet m_is bidrag til impulsmomentet $\boldsymbol{L}_O$ omkring punktet O

$$\boldsymbol{L}_{i,O} = m_i \begin{bmatrix} (y_i^2 + z_i^2) & -x_i y_i & -x_i z_i \\ -y_i x_i & (x_i^2 + z_i^2) & -y_i z_i \\ -z_i x_i & -z_i y_i & (x_i^2 + y_i^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

kan det samlede impulsmomentet findes ved summation, dvs.

$$\boldsymbol{L}_O = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{xx} & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{yx} & I_{yy} & -D_{yz} \\ -D_{zx} & -D_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}}_{\tilde{I}} \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

hvor $I_{xx} = \sum m_i(y_i^2 + z_i^2)$ og $D_{xy} = \sum m_i x_i y_i$.

Dette udtryk skrives også

$$\boldsymbol{L}_O = \tilde{I}\boldsymbol{\omega}$$

hvor $\tilde{I}$ er inertitensoren.

Inertitensoren er en symmetrisk matrix, hvilket betyder at den kan diagonaliseres, således at

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

Inertitensoren er en symmetrisk matrix, hvilket betyder at den kan diagonaliseres, således at

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}$$

De akser, der diagonaliserer $\tilde{I}$ kaldes **hovedakser** eller **principale akser**.

Udregning af impulsmomenter

Perpendicular axis theorem

Betragt et plan objekt, hvor z-aksen er vinkelret på objektet mens x- og y-akserne er i planen. Så gælder der at

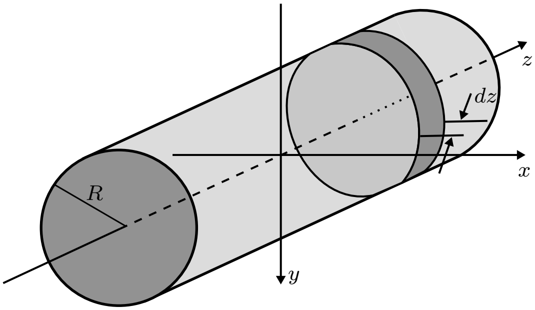
$$I_z = I_x + I_y \qquad [\text{kgm}^2]$$

hvor I_x, I_y, I_z er inertimomenterne om henholdsvis x, y og z-aksen.

Antag at en cylinder består af infinitesimal tynde skiver med tykkelse dz. Så vil massen af en sådan skive være

$$dm = \rho dV \qquad [\text{kg}]$$

hvor ρ er massefylden [kg/m^3] og dV er volumen [m^3].



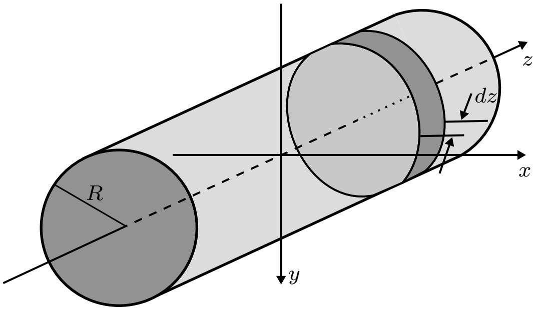
Antag at en cylinder består af infinitesimal tynde skiver med tykkelse dz. Så vil massen af en sådan skive være

$$dm = \rho dV \qquad [\text{kg}]$$

hvor ρ er massefylden [kg/m^3] og dV er volumen [m^3].

Da massefylden kan skrives $\rho = M/V$ hvor M er cylinderens masse og V er cylinderens volumen haves

$$dm = \frac{M}{2\pi R^2 L} 2\pi R^2 dz = \frac{M}{L} dz \qquad [\text{kg}]$$

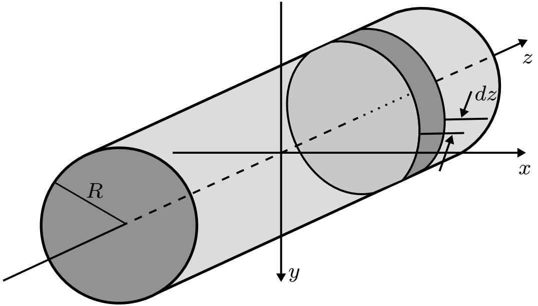


Da massefylden kan skrives $\rho = M/V$ hvor M er cylinderens masse og V er cylinderens volumen haves

$$dm = \frac{M}{2\pi R^2 L} 2\pi R^2 dz = \frac{M}{L} dz \qquad [\text{kg}]$$

Inertimomentet for en disk med radius R og masse m er

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2$$



Da massefylden kan skrives $\rho = M/V$ hvor M er cylinderens masse og V er cylinderens volumen haves

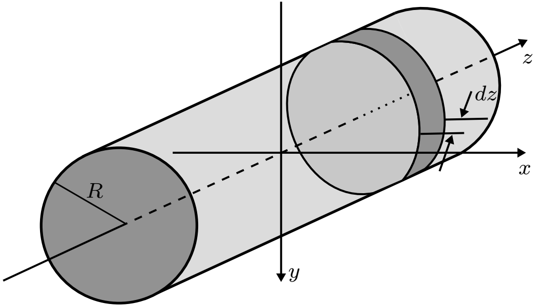
$$dm = \frac{M}{2\pi R^2 L} 2\pi R^2 dz = \frac{M}{L} dz \qquad \text{[kg]}$$

Inertimomentet for en disk med radius R og masse m er

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2$$

Derfor er inertimomentet for en infinitesimal tynd skive

$$dI_z = \frac{1}{2} dm R^2$$

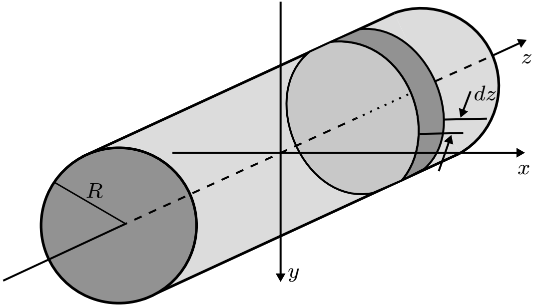


Fra inertimomentet for en infinitesimal tynde skive

$$dI_z = \frac{1}{2} dm R^2$$

omkring z-aksen der er orthogonal på skiven kan *perpendicular axis theorem* benyttes

$$dI_z = dI_x + dI_y$$



Fra inertimomentet for en infinitesimal tynde skive

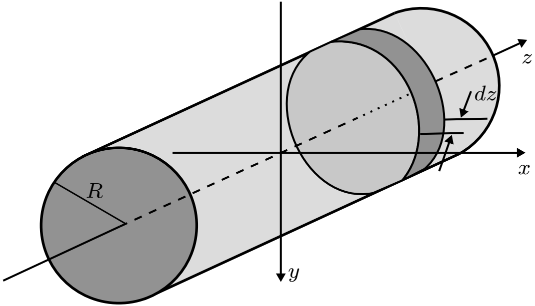
$$dI_z = \frac{1}{2} dm R^2$$

omkring z-aksen der er orthogonal på skiven kan *perpendicular axis theorem* benyttes

$$dI_z = dI_x + dI_y$$

Da $dI_x = dI_y$ haves

$$dI_z = 2 dI_x$$



Fra inertimomentet for en infinitesimal tynde skive

$$dI_z = \frac{1}{2} dm R^2$$

omkring z-aksen der er orthogonal på skiven kan *perpendicular axis theorem* benyttes

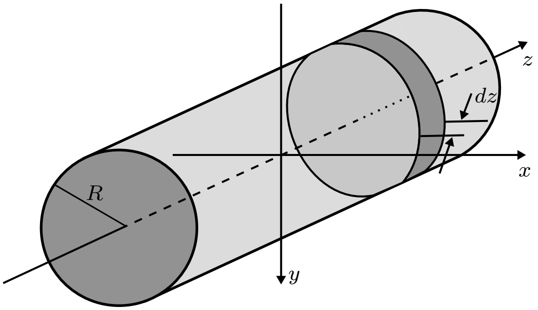
$$dI_z = dI_x + dI_y$$

Da $dI_x = dI_y$ haves

$$dI_z = 2 dI_x$$

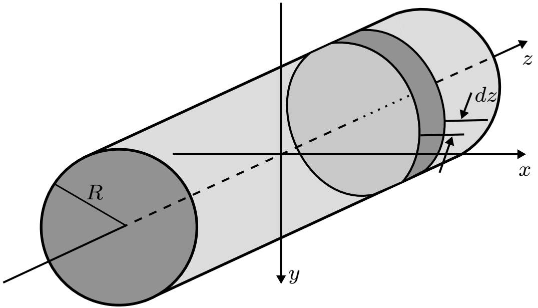
Dette medfører at

$$dI_x = \frac{1}{4} dm R^2$$



Fra Steiners sætning vides det at inertimomentet for en cirkelskive med afstand z væk fra massemidtpunktet er

$$dI_x = \frac{1}{4} dm R^2 + dm z^2$$



Udregning af impulsmomenter

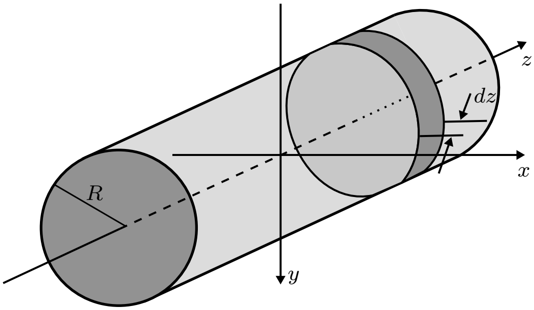
Eksempel: Udregning af inertitensor for cylinder (II)

Fra Steiners sætning vides det at inertimomentet for en cirkelskive med afstand z væk fra massemidtpunktet er

$$dI_x = \frac{1}{4} dm R^2 + dm z^2$$

for at finde inertimomentet for cylinderen integreres dI_x over z-aksen

$$\begin{aligned} I_x &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4} dm R^2 + dm z^2 \\ &= \frac{1}{4} M R^2 + \frac{M}{3L} \left(\frac{L^3}{2^3} - \frac{-L^3}{2^3} \right) \\ &= \frac{1}{4} M R^2 + \frac{1}{12} M L^2 \end{aligned}$$

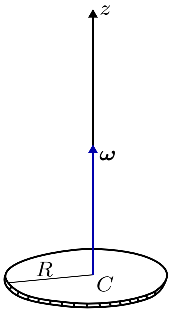


Impulsmomentet for svinghjulet (cirkulær plade) er

$$\boldsymbol{L}_C = \tilde{I}\boldsymbol{\omega}$$

hvor inertitensoren er

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{bmatrix}$$



Udregning af impulsmomenter

Eksempel: Svinghjul (I)

Impulsmomentet for svinghjulet (cirkulær plade) er

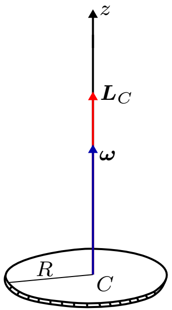
$$\boldsymbol{L}_C = \tilde{I}\boldsymbol{\omega}$$

hvor inertitensoren er

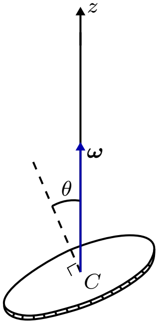
$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{bmatrix}$$

For dette eksempel fås

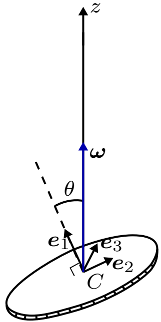
$$\boldsymbol{L}_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{4}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2}MR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2}MR^2\omega \end{bmatrix}$$



Svinghjulet er nu monteret skævt på akslen (med vinklen θ), der går i z-aksens retning. Impulsmomentet $\boldsymbol{L}_C$ findes nu ved brug af **hovedakserne** for skiven.



Svinghjulet er nu monteret skævt på akslen (med vinklen θ), der går i z-aksens retning. Impulsmomentet $\boldsymbol{L}_C$ findes nu ved brug af **hovedakserne** for skiven.



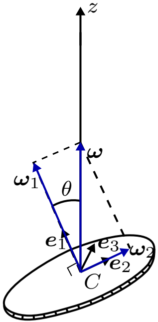
Udregning af impulsmomenter

Eksempel: Svinghjul (II)

Svinghjulet er nu monteret skævt på akslen (med vinklen θ), der går i z-aksens retning. Impulsmomentet $\boldsymbol{L}_C$ findes nu ved brug af **hovedakserne** for skiven.

Hastigheden i de nye koordinater er

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega \cos\theta \\ \omega \sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



Udregning af impulsmomenter

Eksempel: Svinghjul (II)

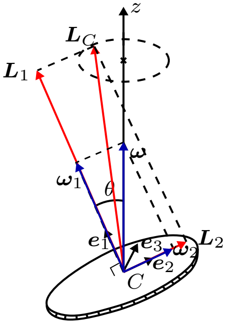
Hastigheden i de nye koordinater er

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega\cos\theta \\ \omega\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Impulsmomentet bliver således

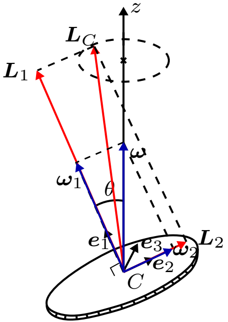
$$\boldsymbol{L}_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega\cos\theta \\ \omega\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}MR^2\omega \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



Hastigheden i de nye koordinater er

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega\cos\theta \\ \omega\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$



Impulsmomentet bliver således

$$\boldsymbol{L}_C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega\cos\theta \\ \omega\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2}MR^2\omega \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

Impulsmomentet **præcesserer** om omdrejningsaksen.

Introduktion

Udregning af impulsmomenter

Kinetisk energi for stive legemer

Bevægelsesligning for stift legeme

Kinematik baggrund
- Beskrivelse af positur for robot
- Beskrivelse af hastighed for robot

Opsummering

Hastigheden af et masseelement m_i, der roterer om punktet O med vinkelhastigheden $\boldsymbol{\omega}$ er

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \qquad [\text{m/s}]$$

hvor $\boldsymbol{r}_i$ er stedvektoren for m_i [m].

Hastigheden af et masseelement m_i, der roterer om punktet O med vinkelhastigheden $\boldsymbol{\omega}$ er

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \qquad [\mathrm{m/s}]$$

hvor $\boldsymbol{r}_i$ er stedvektoren for m_i [m].

Den kinetiske energi bliver således

$$E_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2} \sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = \frac{1}{2} \sum_i \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \cdot (m_i \boldsymbol{v}_i)$$

Hastigheden af et masseelement m_i, der roterer om punktet O med vinkelhastigheden $\boldsymbol{\omega}$ er

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \qquad \text{[m/s]}$$

hvor $\boldsymbol{r}_i$ er stedvektoren for m_i [m].

Den kinetiske energi bliver således

$$E_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \cdot (m_i \boldsymbol{v}_i)$$

Vi får herefter

$$E_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_i \times (m_i \boldsymbol{v}_i) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_i \underbrace{\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i}_{\boldsymbol{L}_{i,O}}$$

Kinetisk energi for stive legemer

Rotation om punkt O

Den kinetiske energi bliver således

$$E_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2}\sum_i m_i \boldsymbol{v}_i \cdot \boldsymbol{v}_i = \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i \cdot (m_i \boldsymbol{v}_i)$$

Vi får herefter

$$E_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2}\sum_i \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{r}_i \times (m_i \boldsymbol{v}_i) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \sum_i \underbrace{\boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i}_{\boldsymbol{L}_{i,O}}$$

Dermed kan den rotationelle kinetiske energi udtrykkes

$$E_{\text{kin,rot}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{L}_O = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \tilde{I}\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\omega}^T \tilde{I}\boldsymbol{\omega}$$

Kinetisk energi for stive legemer

Almen bevægelse

Den kinetiske energi for et stift legeme er summen af bidrag for massemidspunktets bevægelse og rotation om massemidtpunktet

$$
\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &= E_{C,\text{kin,trans}} + E_{C,\text{kin,rot}} \\
&= \frac{1}{2} M v_C^2 + E_{C,\text{kin,rot}}
\end{aligned}
$$

Den kinetiske energi for det skæve svinghjul kan bestemmes som

$$
\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &= E_{C,\text{kin,trans}} + E_{C,\text{kin,rot}} \\
&= \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \tilde{I} \boldsymbol{\omega}
\end{aligned}
$$

Kinetisk energi for stive legemer

Eksempel: Svinghjul

Den kinetiske energi for det skæve svinghjul kan bestemmes som

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= E_{C,\text{kin,trans}} + E_{C,\text{kin,rot}} \\ &= \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \tilde{I} \boldsymbol{\omega} \end{aligned}$$

Hastigheden af massemidtpunktet er $v_C = 0$ m/s, så den kinetiske energi er

$$\begin{aligned} E_{\text{kin}} &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \tilde{I} \boldsymbol{\omega} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \omega\cos\theta & \omega\sin\theta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}MR^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4}MR^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}MR^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega\cos\theta \\ \omega\sin\theta \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{4}\omega^2 MR^2 \left(\cos^2\theta + \frac{1}{2}\sin^2\theta \right) = \frac{1}{4}\omega^2 MR^2 \left(1 - \frac{1}{2}\sin^2\theta \right) \end{aligned}$$

Introduktion

Udregning af impulsmomenter

Kinetisk energi for stive legemer

Bevægelsesligning for stift legeme

Kinematik baggrund
- Beskrivelse af positur for robot
- Beskrivelse af hastighed for robot

Opsummering

For at bestemme bevægelsen for et stift legeme benyttes massemidtpunktssætningen

$$M\boldsymbol{a}_C = \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$$

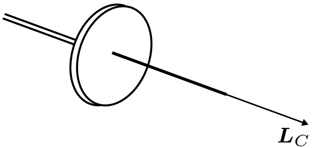
og impulsmomentsætningen om et punkt O i hvile i et inertialsystem

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$$

eller om legemets massemidtpunkt

$$\frac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{C,\text{ext}}$$

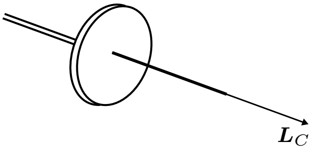
Snurreaksen kan dreje frit om systemets massemidtpunkt.



Snurreaksen kan dreje frit om systemets massemidtpunkt. Skivens snurreakse er en hovedakse, så impulsmomentet er

$$L_1 = I_1\omega$$

hvor ω er vinkelhastigheden [rad/s] og I_1 er inertimomentet om snurreaksen [kgm^2].



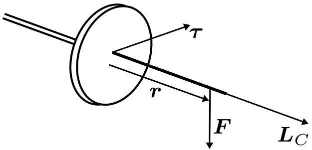
Snurreaksen kan dreje frit om systemets massemidtpunkt. Skivens snurreakse er en hovedakse, så impulsmomentet er

$$L_1 = I_1 \omega$$

hvor ω er vinkelhastigheden [rad/s] og I_1 er inertimomentet om snurreaksen [kgm^2].

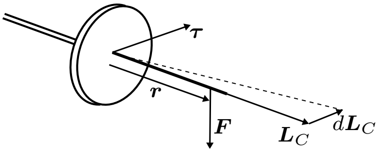
Snurren påvirkes kortvarigt (i tiden dt) af en kraft $\boldsymbol{F}$, hvilket giver anledning til kraftmomentet om snurrens massemidtpunkt

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad \text{[Nm]}$$



Impulsmomentsætningen giver

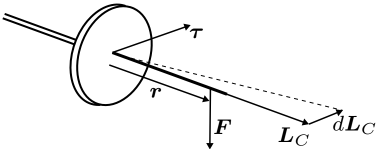
$$d\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{\tau} dt$$



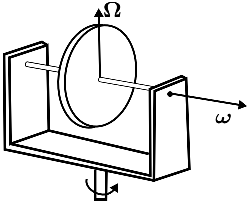
Impulsmomentsætningen giver

$$d\boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{\tau} dt$$

Da ændringen i impulsmoment $d\boldsymbol{L}_C$ er parallel med τ, vil snurren bevæge sig i den vandrette plan.



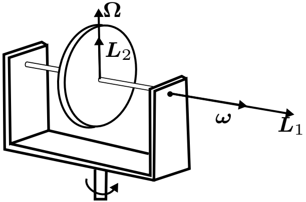
En snurre er i et ophæng, der roterer med vinkelhastigheden $\mathbf{\Omega}$.



En snurre er i et ophæng, der roterer med vinkelhastigheden $\boldsymbol{\Omega}$.

Impulsmomentet $\boldsymbol{L}_C$ findes ud fra komposanterne om de to rotationsakser

$$\boldsymbol{L}_1 = I_1\boldsymbol{\omega} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{L}_2 = I_2\boldsymbol{\Omega}$$



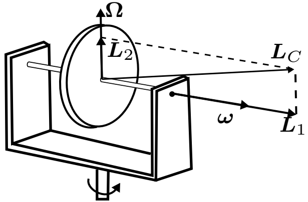
En snurre er i et ophæng, der roterer med vinkelhastigheden $\boldsymbol{\Omega}$.

Impulsmomentet $\boldsymbol{L}_C$ findes ud fra komposanterne om de to rotationsakser

$$\boldsymbol{L}_1 = I_1 \boldsymbol{\omega} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{L}_2 = I_2 \boldsymbol{\Omega}$$

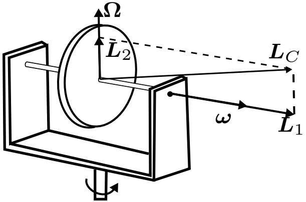
Impulsmomentet med hensyn til massemidtpunktet er

$$\boldsymbol{L}_C = I_1 \boldsymbol{\omega} + I_2 \boldsymbol{\Omega}$$



Impulsmomentet $\boldsymbol{L}_C$ findes ud fra komposanterne om de to rotationsakser

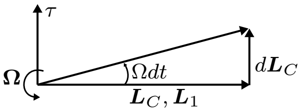
$$\boldsymbol{L}_1 = I_1\boldsymbol{\omega} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{L}_2 = I_2\boldsymbol{\Omega}$$



Impulsmomentet med hensyn til massemidtpunktet er

$$\boldsymbol{L}_C = I_1\boldsymbol{\omega} + I_2\boldsymbol{\Omega}$$

Da snurren roterer omkring den lodrette akse, så ændres retningen på $\boldsymbol{L}_C$ også.



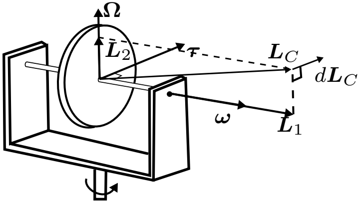
Impulsmomentet $\boldsymbol{L}_C$ findes ud fra komposanterne om de to rotationsakser

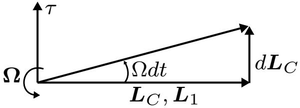
$$\boldsymbol{L}_1 = I_1\boldsymbol{\omega} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{L}_2 = I_2\boldsymbol{\Omega}$$

Impulsmomentet med hensyn til massemidtpunktet er

$$\boldsymbol{L}_C = I_1\boldsymbol{\omega} + I_2\boldsymbol{\Omega}$$

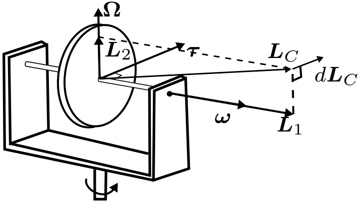
Da snurren roterer omkring den lodrette akse, så ændres retningen på $\boldsymbol{L}_C$ også.





Impulsmomentet $\boldsymbol{L}_C$ findes ud fra komposanterne om de to rotationsakser

$$\boldsymbol{L}_1 = I_1 \boldsymbol{\omega} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{L}_2 = I_2 \boldsymbol{\Omega}$$



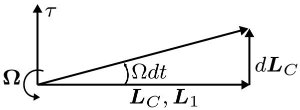
Impulsmomentet med hensyn til massemidtpunktet er

$$\boldsymbol{L}_C = I_1 \boldsymbol{\omega} + I_2 \boldsymbol{\Omega}$$

Da snurren roterer omkring den lodrette akse, så ændres retningen på $\boldsymbol{L}_C$ også.

Tidsændringen i impulsmomentet giver

$$\frac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L}_1$$



Bevægelsesligning for stift legeme

Eksempel: Snurre ophængt i en ende

Impulsmomentet med hensyn til massemidtpunktet er

$$\boldsymbol{L}_C = I_1\boldsymbol{\omega} + I_2\boldsymbol{\Omega}$$

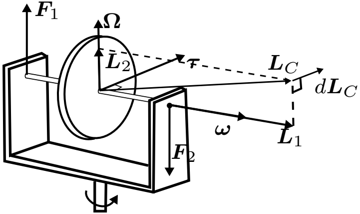
Da snurren roterer omkring den lodrette akse, så ændres retningen på $\boldsymbol{L}_C$ også.

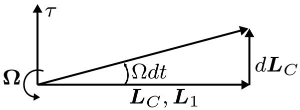
Tidsændringen i impulsmomentet giver

$$\frac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L}_C = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L}_1$$

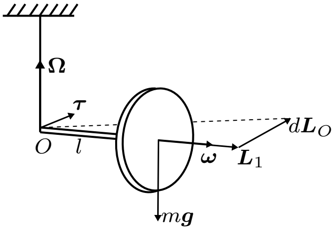
Størrelsen på kraftmomentet bliver $\tau = I_1\omega\Omega$ som kommer fra lejerne. Størrelsen af disse kræfter er

$$F_1 = F_2 = \frac{\tau}{2l} \qquad [\mathrm{N}]$$

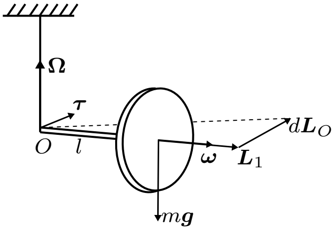




En snurre der kan rotere frit om punktet O, hvor den er ophængt vil have en præcessionsvinkelhastighed ω pga. tyngdekraften.



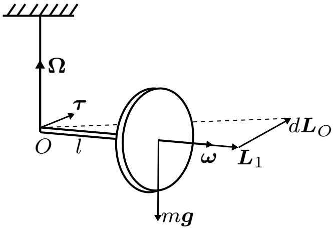
En snurre der kan rotere frit om punktet O, hvor den er ophængt vil have en præcessionsvinkelhastighed ω pga. tyngdekraften.



Kraftmomentet om O som tyngdekraften giver anledning til er

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{l} \times m\boldsymbol{g} \qquad [\text{Nm}]$$

En snurre der kan rotere frit om punktet O, hvor den er ophængt vil have en præcessionsvinkelhastighed ω pga. tyngdekraften.



Kraftmomentet om O som tyngdekraften giver anledning til er

$$\boldsymbol{\tau} = l \times m\boldsymbol{g} \qquad [\mathrm{Nm}]$$

Ved brug af impulsmomentsætningen få

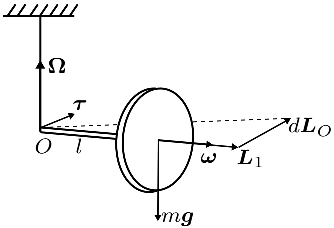
$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{\tau}$$

$$\Omega\omega I_1 = lmg$$

Bevægelsesligning for stift legeme

Eksempel: Snurre ophængt i en ende

En snurre der kan rotere frit om punktet O, hvor den er ophængt vil have en præcessionsvinkelhastighed ω pga. tyngdekraften.



Kraftmomentet om O som tyngdekraften giver anledning til er

$$\boldsymbol{\tau} = l \times m\boldsymbol{g} \qquad [\mathrm{Nm}]$$

Ved brug af impulsmomentsætningen få

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{\tau}$$

$$\Omega\omega I_1 = lmg$$

Dermed bliver præcessionsvinkelhastigheden $\Omega = \frac{lmg}{\omega I_1}$

Introduktion

Udregning af impulsmomenter

Kinetisk energi for stive legemer

Bevægelsesligning for stift legeme

Kinematik baggrund
- Beskrivelse af positur for robot
- Beskrivelse af hastighed for robot

Opsummering

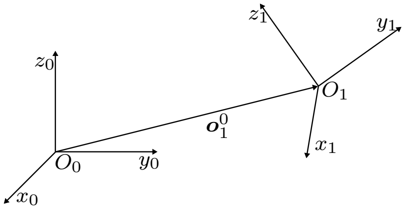
Formålet med en kinematisk beskrivelse af et mekanisk system beskående af stive legemer er at bestemme

- legemernes absolutte og relative **position** og **orientering** (ud fra systemets generaliserede koordinater)
- legemernes absolutte og relative **hastigheder** (ud fra ændringer i de generaliserede koordinater)
- systemets **arbejdsområde** (ved brug af Jakobianten)

Kinematik baggrund
Formål

Formålet med en kinematisk beskrivelse af et mekanisk system beskående af stive legemer er at bestemme

- legemernes absolutte og relative **position** og **orientering** (ud fra systemets generaliserede koordinater)
- legemernes absolutte og relative **hastigheder** (ud fra ændringer i de generaliserede koordinater)
- systemets **arbejdsområde** (ved brug af Jakobianten)

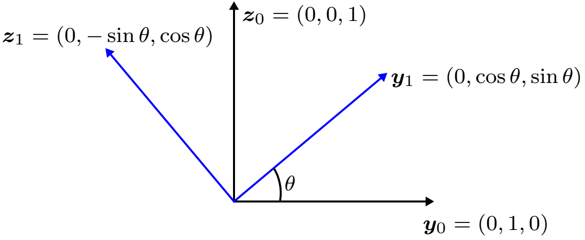


En grundlæggende operation i kinematik er beskrivelse af en rotation, der kan beskrives med en rotationsmatrix $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Kinematik baggrund
Rotationsmatrix (I)

En grundlæggende operation i kinematik er beskrivelse af en rotation, der kan beskrives med en rotationsmatrix $R \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.
En rotation omkring x-aksen kan beskrives med

$$R_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$



Kinematik baggrund

Rotationsmatrix (II)

Rotationsmatrcer er orthogonal matricer med determinant 1. Dette betyder

- Orthogonal matrix: $RR^T = I$ ($R^{-1} = R^T$).
- Determinant: $\det(R) = 1$.

Rotationsmatrcer er orthogonal matricer med determinant 1. Dette betyder

- Orthogonal matrix: $RR^T = I$ ($R^{-1} = R^T$).
- Determinant: $\det(R) = 1$.

Rotationsmatricer bevarer længden af en vektor, i.e.,

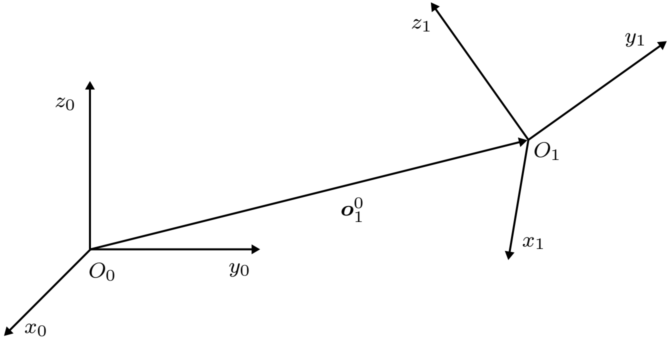
$$||\boldsymbol{p}|| = ||\boldsymbol{q}||$$

hvor $\boldsymbol{q} = R\boldsymbol{p}$.

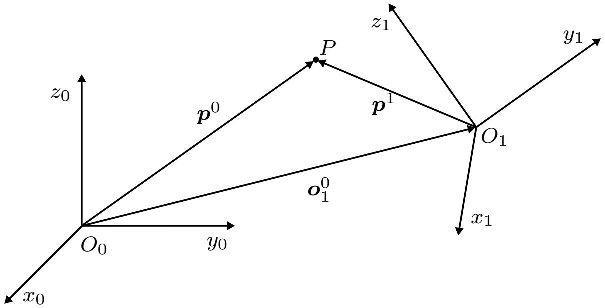
En homogen transformation kan repræsenteres som en 4×4 matrix

$$A = \begin{bmatrix} R_1^0 & \boldsymbol{o}_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

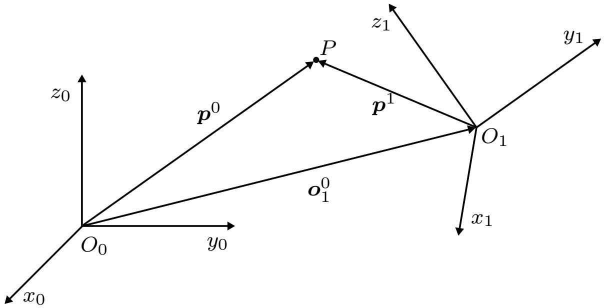
hvor R_1^0 er en 3×3 rotationsmatrix og $\boldsymbol{o}_1^0 \in \mathbb{R}^3$ er en translation.



Hvordan beskrives punktet $\boldsymbol{p}^1$ i koordinatramme 0 ($\boldsymbol{p}^0$)?



Hvordan beskrives punktet $\boldsymbol{p}^1$ i koordinatramme 0 ($\boldsymbol{p}^0$)?



Vi benytter følgende beskrivelse af punktet $\boldsymbol{p}^0$ ved brug af den homogenetransformation

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{p}^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 & \boldsymbol{o}_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

For at beskrive bevægelsen af en robot, så er det nødvendigt at kunne beskrive dens hastighed.

Vi forsøger at opstille formler for den lineære hastighed af værktøjet $\dot{\boldsymbol{p}}_e$ og dens vinkelhastighed $\boldsymbol{\omega}_e$ på følgende form

$$\boldsymbol{v}_e = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(\boldsymbol{q}) \\ J_O(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} = J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

hvor $J_P(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{3\times n}$, $J_O(\boldsymbol{q}) \in \mathbb{R}^{3\times n}$ og $J(\boldsymbol{q})$ kaldes den **geometriske Jakobiant**.

Kinematik baggrund

Hastighed: tidsafledte af en rotationsmatrix (I)

For at kunne udregne hastigheden skal den tidsafledte af en rotationsmatrix udregnes. Vi benytter følgende relation

$$R(t)R^T(t) = I$$

hvilket medfører at

$$R(t)\dot{R}^T(t) + \dot{R}(t)R^T(t) = 0.$$

Definer (den antisymmetriske) matrix S som

$$S(t) = \dot{R}(t)R^T(t)$$

For at kunne udregne hastigheden skal den tidsafledte af en rotationsmatrix udregnes. Vi benytter følgende relation

$$R(t)R^T(t) = I$$

hvilket medfører at

$$R(t)\dot{R}^T(t) + \dot{R}(t)R^T(t) = 0.$$

Definer (den antisymmetriske) matrix S som

$$S(t) = \dot{R}(t)R^T(t)$$

Slutteligt fås (ved postmultiplikation med $R(t)$)

$$\dot{R}(t) = S(t)R(t)$$

Kinematik baggrund

Hastighed: tidsafledte af en rotationsmatrix (II)

Nu kan hastigheden udregnes af punktet $\boldsymbol{q}$ givet ved

$$\boldsymbol{q} = R(t)\boldsymbol{p}$$

hvor $\boldsymbol{p}$ er en konstant vektor og $R(t)$ er en rotationsmatrix.
Hastigheden bliver

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{R}(t)\boldsymbol{p} = S(t)R(t)\boldsymbol{p}$$

Nu kan hastigheden udregnes af punktet $\boldsymbol{q}$ givet ved

$$\boldsymbol{q} = R(t)\boldsymbol{p}$$

hvor $\boldsymbol{p}$ er en konstant vektor og $R(t)$ er en rotationsmatrix.
Hastigheden bliver

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{R}(t)\boldsymbol{p} = S(t)R(t)\boldsymbol{p}$$

Det vides at

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\omega}(t) \times R(t)\boldsymbol{p}$$

Kinematik baggrund

Hastighed: tidsafledte af en rotationsmatrix (II)

Nu kan hastigheden udregnes af punktet $\boldsymbol{q}$ givet ved

$$\boldsymbol{q} = R(t)\boldsymbol{p}$$

hvor $\boldsymbol{p}$ er en konstant vektor og $R(t)$ er en rotationsmatrix.
Hastigheden bliver

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \dot{R}(t)\boldsymbol{p} = S(t)R(t)\boldsymbol{p}$$

Det vides at

$$\dot{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{\omega}(t) \times R(t)\boldsymbol{p}$$

Dermed er $S(t)$

$$\begin{bmatrix} 0 & -\omega_z(t) & \omega_y(t) \\ \omega_z(t) & 0 & -\omega_x(t) \\ -\omega_y(t) & \omega_x(t) & 0 \end{bmatrix}$$

for $\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t))$. Vi skriver ofte $S(t) = S(\boldsymbol{\omega}(t))$ og får dermed

$$\dot{R}(t) = S(\boldsymbol{\omega}(t))R(t)$$

Betragt rotationsmatricen

$$R(\alpha(t)) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Betragt rotationsmatricen

$$R(\alpha(t)) = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrix $S(t)$ kan udregnes som

$$\begin{aligned} S(t) &= \dot{\alpha} \begin{bmatrix} -\sin\alpha & -\cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \dot{\alpha} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = S(\boldsymbol{\omega}(t)) \end{aligned}$$

hvor $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \dot{\alpha})$.

Den tidsafledte af følgende kan nu udregnes

$$\boldsymbol{p}^0(t) = \boldsymbol{o}_1^0(t) + R_1^0(t)\boldsymbol{p}^1$$

og bliver (da $\boldsymbol{p}^1$ er konstant)

$$\dot{\boldsymbol{p}}^0(t) = \dot{\boldsymbol{o}}_1^0(t) + \dot{R}_1^0(t)\boldsymbol{p}^1$$

Den tidsafledte af følgende kan nu udregnes

$$\boldsymbol{p}^0(t) = \boldsymbol{o}_1^0(t) + R_1^0(t)\boldsymbol{p}^1$$

og bliver (da $\boldsymbol{p}^1$ er konstant)

$$\dot{\boldsymbol{p}}^0(t) = \dot{\boldsymbol{o}}_1^0(t) + \dot{R}_1^0(t)\boldsymbol{p}^1$$

Dette kan skrives

$$\dot{\boldsymbol{p}}^0(t) = \dot{\boldsymbol{o}}_1^0(t) + S(\boldsymbol{\omega}_1^0(t))R(t)\boldsymbol{p}^1$$

Kinematik baggrund

Hastighed af punkt i anden ramme

Den tidsafledte af følgende kan nu udregnes

$$\boldsymbol{p}^0(t) = \boldsymbol{o}_1^0(t) + R_1^0(t)\boldsymbol{p}^1$$

og bliver (da $\boldsymbol{p}^1$ er konstant)

$$\dot{\boldsymbol{p}}^0(t) = \dot{\boldsymbol{o}}_1^0(t) + \dot{R}_1^0(t)\boldsymbol{p}^1$$

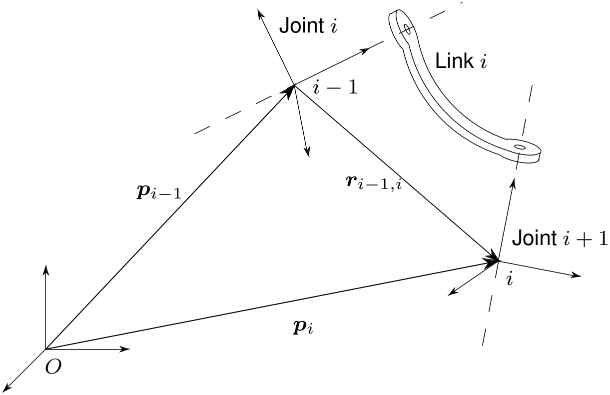
Dette kan skrives

$$\dot{\boldsymbol{p}}^0(t) = \dot{\boldsymbol{o}}_1^0(t) + S(\boldsymbol{\omega}_1^0(t))R(t)\boldsymbol{p}^1$$

Lad $\boldsymbol{r}_1^0 = R(t)\boldsymbol{p}^1$ så fås

$$\dot{\boldsymbol{p}}^0(t) = \dot{\boldsymbol{o}}_1^0(t) + \underbrace{S(\boldsymbol{\omega}_1^0(t))\boldsymbol{r}_1^0}_{\boldsymbol{\omega}_1^0(t)\times\boldsymbol{r}_1^0}$$

Link hastighederne udregnes i det følgende på baggrund af de to resultater udledt tidligere. Vi antager at $\boldsymbol{r}_{i-1,i}$ er konstant.



Positionen for origo af ramme i er

$$\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_{i-1} + R_{i-1}\boldsymbol{r}_{i-1,i}^{i-1} \qquad [\mathrm{m}]$$

hvor $\boldsymbol{r}_{i-1,i}^{i-1}$ er vektoren $\boldsymbol{r}_{i-1,i}$ givet i ramme $i-1$.

Kinematik baggrund
Translatorisk link hastighed

Positionen for origo af ramme i er

$$\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{p}_{i-1} + R_{i-1}\boldsymbol{r}_{i-1,i}^{i-1} \qquad \text{[m]}$$

hvor $\boldsymbol{r}_{i-1,i}^{i-1}$ er vektoren $\boldsymbol{r}_{i-1,i}$ givet i ramme $i-1$.

Dermed bliver hastigheden

$$\dot{\boldsymbol{p}}_i = \dot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times R_{i-1}\boldsymbol{r}_{i-1,i}^{i-1} = \dot{\boldsymbol{p}}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1} \times \boldsymbol{r}_{i-1,i} \qquad \text{[m/s]}$$

Det kan vises at

$$\boldsymbol{\omega}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + R_{i-1}\boldsymbol{\omega}^{i-1}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1} + \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \qquad \text{[rad/s]}$$

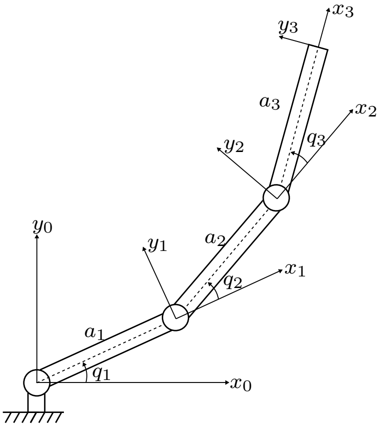
Dette betyder at vinkelhastighederne kan udregnes rekursivt fra $i = 1$ til $i = n$.

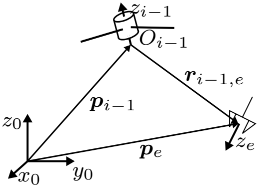
Hvis DH notation benyttes, så vil rotationen altid være om z-aksen. Dermed vil vinkelhastigheden af ramme i i forhold til ramme $i-1$ være

$$\boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \dot{\theta}_i \boldsymbol{z}_{i-1} \qquad [\text{rad/s}]$$

og den lineære hastighed vil være

$$\boldsymbol{v}_{i-1,i} = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \boldsymbol{r}_{i-1,i} \qquad [\text{m/s}]$$



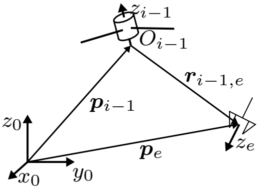


Jakobiantens translatoriske del skrives

$$\dot{\boldsymbol{p}}_e = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \boldsymbol{p}_e}{\partial q_i} \dot{q}_i = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_{Pi} \dot{q}_i$$

Når drejeled betragtes haves

$$\boldsymbol{J}_{Pi} \dot{q}_i = \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} \times \boldsymbol{r}_{i-1,e} = \dot{\theta}_i \underbrace{\boldsymbol{z}_{i-1} \times (\boldsymbol{p}_e - \boldsymbol{p}_{i-1})}_{=\boldsymbol{J}_{Pi}}$$



Jakobiantens rotationelle del skrives

$$\boldsymbol{\omega}_e = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{\omega}_{i-1,i} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{J}_{Oi}\dot{q}_i$$

Når drejeled betragtes haves

$$\boldsymbol{J}_{Oi}\dot{q}_i = \dot{\theta}_i \boldsymbol{z}_{i-1}$$

Samlet bliver Jakobianten

$$J = \begin{bmatrix} J_{P_1} & & J_{P_n} \\ & \cdots & \\ J_{O_1} & & J_{O_n} \end{bmatrix}$$

hvor

$$\begin{bmatrix} J_{P_i} \\ J_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{i-1} \times (\boldsymbol{p}_e - \boldsymbol{p}_{i-1}) \\ \boldsymbol{z}_{i-1} \end{bmatrix}$$

Opsummering

Introduktion

Udregning af impulsmomenter

Kinetisk energi for stive legemer

Bevægelsesligning for stift legeme

Kinematik baggrund
- Beskrivelse af positur for robot
- Beskrivelse af hastighed for robot

Opsummering

Impulsmomentet for et legeme, der roterer om et punkt O er

$$\boldsymbol{L}_O = \tilde{I}\boldsymbol{\omega}$$

hvor $\tilde{I}$ er inertitensoren [kgm^2].

Kinetisk energi af stift legeme

Et stift legemes kinetiske energi er

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega}^T \tilde{I} \boldsymbol{\omega} \qquad [\text{J}]$$

hvor $\tilde{I}$ er inertitensoren [kgm^2].

Hastigheden af end-effector $\boldsymbol{v}_e$ for en robot kan udregnes ved brug af Jakobianten

$$\boldsymbol{v}_e = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{p}}_e \\ \boldsymbol{\omega}_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_P(\boldsymbol{q}) \\ J_O(\boldsymbol{q}) \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{q}} = J(\boldsymbol{q})\dot{\boldsymbol{q}}$$

hvor $J(\boldsymbol{q})$ er Jakobianten. Hvis robotten kun har drejeled er Jakobianten givet ved

$$J = \begin{bmatrix} J_{P_1} & & J_{P_n} \\ & \cdots & \\ J_{O_1} & & J_{O_n} \end{bmatrix}$$

hvor

$$\begin{bmatrix} J_{P_i} \\ J_{O_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{z}_{i-1} \times (\boldsymbol{p}_e - \boldsymbol{p}_{i-1}) \\ \boldsymbol{z}_{i-1} \end{bmatrix}$$