Lektion 6: Relativ bevægelse og fiktive kræfter

Modellering af elektromekaniske systemer

Christoffer Sloth
chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
Mærsk Mc-Kinney Møller Instituttet
Syddansk Universitet

Agenda

Introduktion

Pendul på Vogn

Relativ bevægelse
- Translaterende henførelsessystem
- Roterende henførelsessystem
- Eksempler

Opsummering

Viden[1]

Den studerende skal kunne:

- forklare den grundlæggende fysiks love og begreber
- beskrive et elektromekanisk system ved hjælp af systemets parametre
- redegøre for virkemåden af børstede og børsteløse DC motorer
- opstille overføringsfunktioner for lineære systemer

Færdigheder

Den studerende skal kunne:

- udføre fritlegemeanalyse på et mekanisk system
- anvende Newtons 3 love til modellering af mekaniske systemer
- anvende Lagrange D'Alemberts princip til modellering af mekaniske systemer
- opstille differentialligninger, der beskriver et elektromekanisk systems bevægelse
- fortolke lineære systemers bevægelse i frekvensdomæne
- modellere og simulere simple serielle manipulatorer

Kompetencer

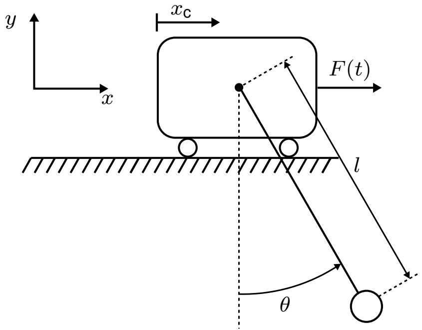
Den studerende skal kunne:

- simulere elektromekaniske systemer og fortolke deres bevægelse

[1] Basseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=46418&listid=5027&lang=da

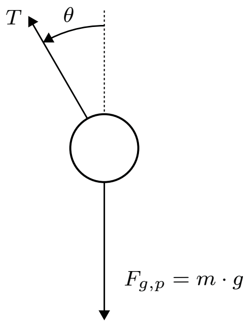
- **Lektion 1**: Fourierrækker og Fouriertransformation
- **Lektion 2**: Laplace transformation
- **Lektion 3**: Kræfter og bevægelse
- **Lektion 4**: Arbejde og energi
- **Lektion 5**: Impulsmoment og stød
- **Lektion 6**: Relativ bevægelse og fiktive kræfter
- **Lektion 7**: Plan bevægelse af stive legemer
- **Lektion 8**: Almen bevægelse af stive legemer
- **Lektion 9**: Svingninger
- **Lektion 10**: DC motoren
- **Lektion 11**: Modellering af robotarm
- **Lektion 12**: Simulering af mekaniske systemer

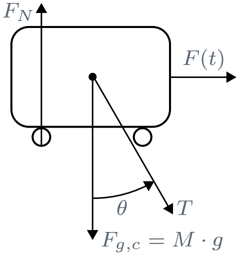
Betragt følgende system, der består af en vogn og et pendul.



Vognen kan kun bevæge sig horisontalt, mens pendulet roterer omkring et fast punkt på vognen. Pendulet antages at bestå af en masseløs snor med en masse m i enden.

Systemet består af to stive legemer, så der opstilles to fritlegemediagrammer.





Følgende ligninger kan opstilles ud fra Newtons 2. lov samt fritlegemediagrammerne.

Vogn
Vognen bevæger sig kun i x-aksens retning, da den resulterende kraft i y-aksens retning er nul

$$M\ddot{x}_c = F + T\sin\theta \qquad \text{[N]}$$

hvor F er en ekstern kraft [N], M er massen af vognen [kg] og T er tensionskraften [N].

Følgende ligninger kan opstilles ud fra Newtons 2. lov samt fritlegemediagrammerne.

Vogn
Vognen bevæger sig kun i x-aksens retning, da den resulterende kraft i y-aksens retning er nul

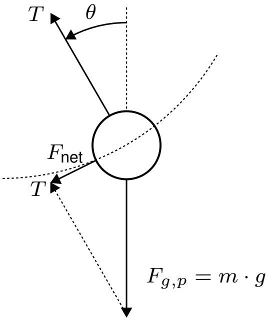
$$M\ddot{x}_c = F + T\sin\theta \qquad [\mathrm{N}]$$

hvor F er en ekstern kraft [N], M er massen af vognen [kg] og T er tensionskraften [N].

Pendul
Pendulet bevæger sig i både x- og y-aksens retning, da den følger en cirkulær bane, der opnås grundet tensionskraften T

$$m\ddot{x}_p = -T\sin\theta \qquad [\mathrm{N}]$$
$$m\ddot{y}_p = T\cos\theta - mg \qquad [\mathrm{N}]$$

Tensionskraften sikrer at massen m altid har afstanden l til vognen. Kraften overføres via snoren der forbinder vogn og pendul.



Pendulets position er

$$\begin{cases} x_p = x_c + l\sin\theta \\ y_p = -l\cos\theta \end{cases} \qquad [\text{m}]$$

Pendulets hastighed er

$$\begin{cases} \dot{x}_p = \dot{x}_c + l\cos(\theta)\dot{\theta} \\ \dot{y}_p = l\sin(\theta)\dot{\theta} \end{cases} \qquad [\text{m/s}]$$

Pendulets acceleration er

$$\begin{cases} \ddot{x}_p = \ddot{x}_c + l\left(\cos(\theta)\ddot{\theta} - \sin(\theta)\dot{\theta}^2\right) \\ \ddot{y}_p = l\left(\sin(\theta)\ddot{\theta} + \cos(\theta)\dot{\theta}^2\right) \end{cases} \qquad [\text{m/s}^2]$$

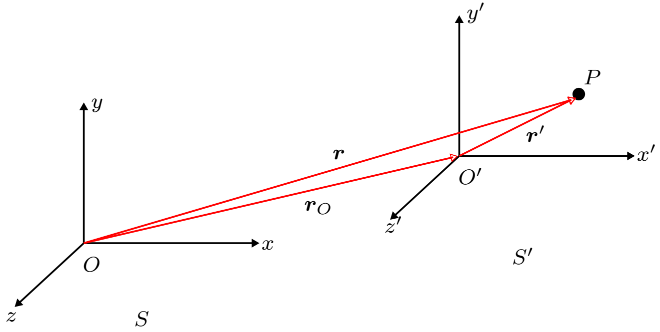
Introduktion

Pendul på Vogn

Relativ bevægelse
- Translaterende henførelsessystem
- Roterende henførelsessystem
- Eksempler

Opsummering

Relativ bevægelse
Koordinatsystemer



Vi betragter udelukkensde translatorisk bevægelse og antager at koordinatsystemernes akser er paralelle, dvs. den homogene transformation mellem S og S' er

$$\begin{bmatrix} I_{3\times 3} & \boldsymbol{r}_O \\ \mathbf{0}_{1\times 3} & 1 \end{bmatrix}$$

Relativ bevægelse
Jævnt translatorisk bevæget henførelsessystem (I)

En partikel P har stedvektor $\boldsymbol{r}$ til tiden t, og denne kan skrives

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}' \qquad [\mathrm{m}]$$

En partikel P har stedvektor $\boldsymbol{r}$ til tiden t, og denne kan skrives

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}' \qquad \text{[m]}$$

Antag at S' bevæger sig med konstant hastighed relativt til S ($\boldsymbol{r}_O = \boldsymbol{v}_O t$ hvor $\boldsymbol{v}_O \in \mathbb{R}^3$) så gælder det at

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}' \qquad \text{[m/s]}$$

Relativ bevægelse

Jævnt translatorisk bevæget henførelsessystem (I)

En partikel P har stedvektor $\boldsymbol{r}$ til tiden t, og denne kan skrives

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}' \qquad \text{[m]}$$

Antag at S' bevæger sig med konstant hastighed relativt til S ($\boldsymbol{r}_O = \boldsymbol{v}_O t$ hvor $\boldsymbol{v}_O \in \mathbb{R}^3$) så gælder det at

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}' \qquad \text{[m/s]}$$

Da $\boldsymbol{v}_O$ er en konstant ses det at accelerationen af de to koordinatsystemer er den samme

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \qquad [\text{m/s}^2]$$

En partikel P har stedvektor $\boldsymbol{r}$ til tiden t, og denne kan skrives

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}' \qquad [\text{m}]$$

Antag at S' bevæger sig med konstant hastighed relativt til S ($\boldsymbol{r}_O = \boldsymbol{v}_O t$ hvor $\boldsymbol{v}_O \in \mathbb{R}^3$) så gælder det at

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}' \qquad [\text{m/s}]$$

Da $\boldsymbol{v}_O$ er en konstant ses det at accelerationen af de to koordinatsystemer er den samme

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \qquad [\text{m/s}^2]$$

Da accelerationen er den samme i S og S', så gælder Newtons 2. lov i begge henførelsessystemer, dvs. S' er også et inertialsystem.

Lad S og S' være to henførelsessystemer, og antag at S' bevæger sig med konstant hastighed relativt til S. Da accelerationen er den samme i S og S', dvs.

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' \qquad [\text{m/s}^2]$$

så gælder Newtons 2. lov i begge henførelsessystemer, hvilket betyder at S' er også et *inertialsystem*.

Relativ bevægelse
Jævnt accelereret henførelsessystem (I)

Hvis koordinatsystemet S' accelererer, så kan vi som før skrive

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}' \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}'$$

hvor $\boldsymbol{v}'$ er den **relative hastighed** [m/s] og $\boldsymbol{v}_O$ er **medføringshastigheden** [m/s].

Ved differentiation fås

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}' \qquad [\text{m/s}^2]$$

hvor $\boldsymbol{a}'$ er den relative acceleration [m/s^2].

Hvis koordinatsystemet S' accelererer, så kan vi som før skrive

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}' \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{v}'$$

hvor $\boldsymbol{v}'$ er den **relative hastighed** [m/s] og $\boldsymbol{v}_O$ er **medføringshastigheden** [m/s].

Ved differentiation fås

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \boldsymbol{a}' \qquad [\text{m/s}^2]$$

hvor $\boldsymbol{a}'$ er den relative acceleration [m/s^2].

Ved brug af Newtons 2. lov fås (Newtons 2. lov kan kun anvendes i S)

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{a}_O + m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}_{\text{natur}} \qquad [\text{N}]$$

hvor $\boldsymbol{F}_{\text{natur}}$ er den resulterende kraft der virker på partiklen [N].

Fra ligningen

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}_{\text{natur}} - m\boldsymbol{a}_O \qquad [\text{N}]$$

konkluderes det at Newtons 2. lov først gælder i et accelererende henførelsessystem efter tilføjelsen af en fiktiv kraft

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}_{\text{natur}} + \boldsymbol{F}_{\text{fiktiv}} \qquad [\text{N}]$$

hvor $\boldsymbol{F}_{\text{fiktiv}} = -m\boldsymbol{a}_O$ er den fiktive kraft [N].

Den fiktive kraft for et accelererende henførelsessystem, der ikke roterer kaldes accelerationskraften eller elevationskraften, dvs.

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}_{\text{natur}} + \boldsymbol{F}_{\text{ev}} \qquad [\text{N}]$$

hvor $\boldsymbol{F}_{\text{ev}}$ er elevationskraften [N].

Lad S og S' være to henførelsessystemer, hvor accelerationen af S' relativt til S er $\boldsymbol{a}_O$. Bevægelsen af en partikel med massen m vil da være givet som følger i det accelererende henførelsessystem S'

$$m\boldsymbol{a}' = \boldsymbol{F}_{\text{natur}} + \boldsymbol{F}_{\text{ev}} \qquad [\text{N}]$$

hvor $\boldsymbol{F}_{\text{ev}} = -m\boldsymbol{a}_O$ er elevationskraften [N], $\boldsymbol{F}_{\text{natur}}$ er den resulterende kraft der virker på partiklen [N] og $\boldsymbol{a}'$ er partiklens acceleration i henførelsessystem S' [m/s^2].

Det kan ikke afgøres om S' er jævnt accelereret i forhold til S eller om der i S' virker en tyngdekraft.

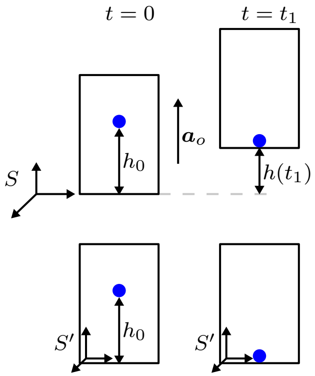
Det kan ikke afgøres om S' er jævnt accelereret i forhold til S eller om der i S' virker en tyngdekraft. Derfor siges partiklerne i S' at være påvirket af en effektiv tyngdekraft

$$\boldsymbol{F}_{\text{eff}} = m\boldsymbol{g}_{\text{eff}} = m(\boldsymbol{g} - \boldsymbol{a}_O) \qquad [\text{N}]$$

hvor $\boldsymbol{F}_{\text{eff}}$ er den effektive tyngdekraft [N] og $\boldsymbol{g}_{\text{eff}}$ er det effektive tyngdefelt [m/s^2].

I inertialsystemet S gælder Newtons 2. lov

$$ma = F_{\text{net}} \qquad [\text{N}]$$

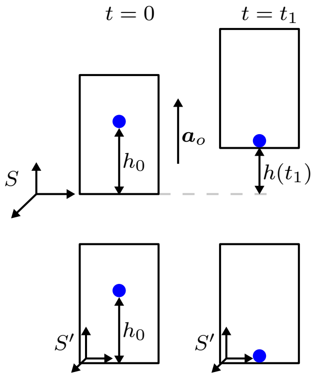


I inertialsystemet S gælder Newtons 2. lov

$$ma = F_{\text{net}} \qquad [\text{N}]$$

I eksemplet virker kun tyngdekraften på massen.
Dermed bliver massens højde

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \qquad [\text{m}]$$



I inertialsystemet S gælder Newtons 2. lov

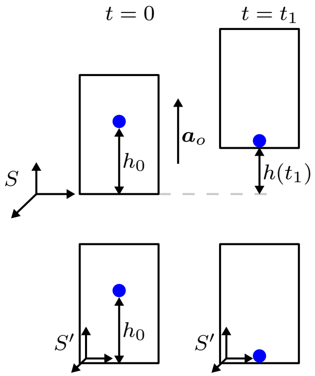
$$ma = F_{\text{net}} \qquad [\text{N}]$$

I eksemplet virker kun tyngdekraften på massen.
Dermed bliver massens højde

$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2} g t^2 \qquad [\text{m}]$$

og elevatorgulvets højde er (konstant acceleration a_0)

$$h_{\text{ev}}(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 \qquad [\text{m}]$$



I inertialsystemet S gælder Newtons 2. lov

$$ma = F_{\text{net}} \qquad [\text{N}]$$

I eksemplet virker kun tyngdekraften på massen.
Dermed bliver massens højde

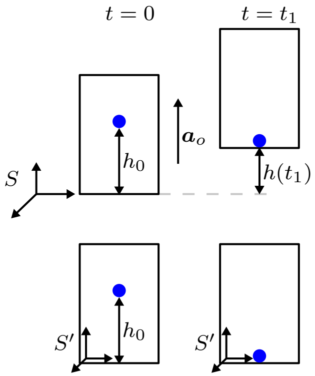
$$h(t) = h_0 - \frac{1}{2}gt^2 \qquad [\text{m}]$$

og elevatorgulvets højde er (konstant acceleration a_0)

$$h_{\text{ev}}(t) = \frac{1}{2}a_0 t^2 \qquad [\text{m}]$$

Massen vil derfor ramme gulvet til tiden

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g + a_0}} \qquad [\text{s}]$$



I henførelsessystemet S' **gælder Newtons 2. lov ikke**. En fiktiv kraft skal derfor tilføjes for at beskrive bevægelsen

$$ma' = F_{\text{natur}} \underbrace{-ma_0}_{=F_{\text{ev}}} \qquad [\text{N}]$$

Relativ bevægelse

Eksempel: Effektiv tyngdekraft (II)

I henførelsessystemet S' **gælder Newtons 2. lov ikke**. En fiktiv kraft skal derfor tilføjes for at beskrive bevægelsen

$$ma' = F_{\text{natur}} \underbrace{-ma_0}_{=F_{\text{ev}}} \qquad [\text{N}]$$

Da F_{natur} er tyngdekraften ($F_{\text{natur}} = mg$), så er massens acceleration i S'

$$a' = g + a_0 \qquad [\text{m/s}^2]$$

I henførelsessystemet S' **gælder Newtons 2. lov ikke**. En fiktiv kraft skal derfor tilføjes for at beskrive bevægelsen

$$ma' = F_{\text{natur}} \underbrace{-ma_0}_{=F_{\text{ev}}} \qquad [\text{N}]$$

Da F_{natur} er tyngdekraften ($F_{\text{natur}} = mg$), så er massens acceleration i S'

$$a' = g + a_0 \qquad [\text{m/s}^2]$$

Massens højde over elevatorgulvet er dermed (konstant acceleration $g + a_0$)

$$h(t) = \frac{1}{2}(g + a_0)t^2 \qquad [\text{m}]$$

I henførelsessystemet S' **gælder Newtons 2. lov ikke**. En fiktiv kraft skal derfor tilføjes for at beskrive bevægelsen

$$ma' = F_{\text{natur}} \underbrace{-ma_0}_{=F_{\text{ev}}} \qquad [\text{N}]$$

Da F_{natur} er tyngdekraften ($F_{\text{natur}} = mg$), så er massens acceleration i S'

$$a' = g + a_0 \qquad [\text{m/s}^2]$$

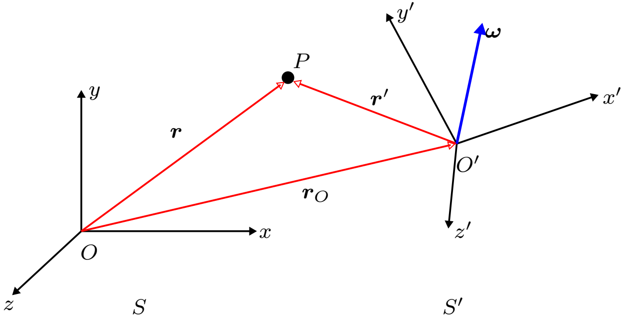
Massens højde over elevatorgulvet er dermed (konstant acceleration $g + a_0$)

$$h(t) = \frac{1}{2}(g + a_0)t^2 \qquad [\text{m}]$$

Massen vil derfor ramme gulvet til tiden

$$t_1 = \sqrt{\frac{2h_0}{g + a_0}} \qquad [\text{s}]$$

Vi betragter følgende henførelsessystemer, hvor O' har en acceleration $\boldsymbol{a}_O$ i forhold til S. Desuden roterer S' med vinkelhastigheden ω i forhold til S.



Bevægelsen af partiklen P i henførelsessystemet S er

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{e}_x + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{e}_y + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{a} = \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{e}_z$$

Bevægelsen af partiklen P i henførelsessystemet S er

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{v} = \frac{dx}{dt}\boldsymbol{e}_x + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{e}_y + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{e}_z$$
$$\boldsymbol{a} = \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{e}_z$$

Bevægelsen af partiklen P i henførelsessystemet S' er

$$\boldsymbol{r}' = x'\boldsymbol{e}'_x + y'\boldsymbol{e}'_y + z'\boldsymbol{e}'_z$$
$$\boldsymbol{v}' = \frac{dx'}{dt}\boldsymbol{e}'_x + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{e}'_y + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{e}'_z$$
$$\boldsymbol{a}' = \frac{d^2x'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_x + \frac{d^2y'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_y + \frac{d^2z'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_z$$

Bevægelsen af partiklen P i henførelsessystemet S er

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{e}_x + y\boldsymbol{e}_y + z\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{v} &= \frac{dx}{dt}\boldsymbol{e}_x + \frac{dy}{dt}\boldsymbol{e}_y + \frac{dz}{dt}\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{a} &= \frac{dv_x}{dt}\boldsymbol{e}_x + \frac{dv_y}{dt}\boldsymbol{e}_y + \frac{dv_z}{dt}\boldsymbol{e}_z \end{aligned}$$

Bevægelsen af partiklen P i henførelsessystemet S' er

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= x'\boldsymbol{e}'_x + y'\boldsymbol{e}'_y + z'\boldsymbol{e}'_z \\ \boldsymbol{v}' &= \frac{dx'}{dt}\boldsymbol{e}'_x + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{e}'_y + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{e}'_z \\ \boldsymbol{a}' &= \frac{d^2x'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_x + \frac{d^2y'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_y + \frac{d^2z'}{dt^2}\boldsymbol{e}'_z \end{aligned}$$

Bemærk at $\boldsymbol{v}' \neq \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$ og $\boldsymbol{a}' \neq \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}$.

Vi forsøger nu at udlede et udtryk for $d\boldsymbol{r}/dt$ ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}'$), der leder til

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_O}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$$

hvor $d\boldsymbol{r}_O/dt = \boldsymbol{v}_O$, mens $d\boldsymbol{r}'/dt$ er givet ved

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \underbrace{\frac{dx'}{dt}\boldsymbol{e}'_x + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{e}'_y + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{e}'_z}_{=\boldsymbol{v}'} + x'\frac{d\boldsymbol{e}'_x}{dt} + y'\frac{d\boldsymbol{e}'_y}{dt} + z'\frac{d\boldsymbol{e}'_z}{dt}$$

Vi forsøger nu at udlede et udtryk for $d\boldsymbol{r}/dt$ ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}'$), der leder til

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_O}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$$

hvor $d\boldsymbol{r}_O/dt = \boldsymbol{v}_O$, mens $d\boldsymbol{r}'/dt$ er givet ved

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \underbrace{\frac{dx'}{dt}\boldsymbol{e}'_x + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{e}'_y + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{e}'_z}_{=\boldsymbol{v}'} + x'\frac{d\boldsymbol{e}'_x}{dt} + y'\frac{d\boldsymbol{e}'_y}{dt} + z'\frac{d\boldsymbol{e}'_z}{dt}$$

Da $d\boldsymbol{e}'_i/dt = \omega \times \boldsymbol{e}'_i$ for $i = x, y, z$ fås

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{(x'\boldsymbol{e}'_x + y'\boldsymbol{e}'_y + z'\boldsymbol{e}'_z)}_{=\boldsymbol{r}'}$$

Vi forsøger nu at udlede et udtryk for $d\boldsymbol{r}/dt$ ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_O + \boldsymbol{r}'$), der leder til

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}_O}{dt} + \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt}$$

hvor $d\boldsymbol{r}_O/dt = \boldsymbol{v}_O$, mens $d\boldsymbol{r}'/dt$ er givet ved

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \underbrace{\frac{dx'}{dt}\boldsymbol{e}'_x + \frac{dy'}{dt}\boldsymbol{e}'_y + \frac{dz'}{dt}\boldsymbol{e}'_z}_{=\boldsymbol{v}'} + x'\frac{d\boldsymbol{e}'_x}{dt} + y'\frac{d\boldsymbol{e}'_y}{dt} + z'\frac{d\boldsymbol{e}'_z}{dt}$$

Da $d\boldsymbol{e}'_i/dt = \omega \times \boldsymbol{e}'_i$ for $i = x, y, z$ fås

$$\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{(x'\boldsymbol{e}'_x + y'\boldsymbol{e}'_y + z'\boldsymbol{e}'_z)}_{=\boldsymbol{r}'}$$

Slutteligt fås

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{v}'$$

Relativ bevægelse

Acceleration af partikel i henførelsessystemer (I)

Vi differentierer hastigheden

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{v}'$$

for at finde det generelle udtryk for accelerationen af partiklen P

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_O}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}$$

Vi differentierer hastigheden

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{v}_O + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{v}'$$

for at finde det generelle udtryk for accelerationen af partiklen P

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{v}_O}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}$$

Vi kigger på de to ikke-trivielle led

$$\begin{aligned} \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} \\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') \end{aligned}$$

Vi kigger på de to ikke-trivielle led

$$\begin{aligned}\frac{d(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}\times\frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} \\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')\end{aligned}$$

og

$$\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \underbrace{\frac{dv'_x}{dt}\boldsymbol{e}'_x + \frac{dv'_y}{dt}\boldsymbol{e}'_y + \frac{dv'_z}{dt}\boldsymbol{e}'_z}_{=\boldsymbol{a}'} + v'_x\frac{d\boldsymbol{e}'_x}{dt} + v'_y\frac{d\boldsymbol{e}'_y}{dt} + v'_z\frac{d\boldsymbol{e}'_z}{dt}$$

Vi kigger på de to ikke-trivielle led

$$\begin{aligned}\frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\boldsymbol{r}'}{dt} \\ &= \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')\end{aligned}$$

og

$$\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \underbrace{\frac{dv'_x}{dt}\boldsymbol{e}'_x + \frac{dv'_y}{dt}\boldsymbol{e}'_y + \frac{dv'_z}{dt}\boldsymbol{e}'_z}_{=\boldsymbol{a}'} + v'_x \frac{d\boldsymbol{e}'_x}{dt} + v'_y \frac{d\boldsymbol{e}'_y}{dt} + v'_z \frac{d\boldsymbol{e}'_z}{dt}$$

Da $de'_i/dt = \omega \times \boldsymbol{e}'_i$ for $i = x, y, z$ fås

$$\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \underbrace{(v'_x\boldsymbol{e}'_x + v'_y\boldsymbol{e}'_y + v'_z\boldsymbol{e}'_z)}_{=\boldsymbol{v}'}$$

Fra

$$\boldsymbol{a} = \frac{d\boldsymbol{v}_O}{dt} + \frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}{dt} + \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$$

$$\frac{d(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')$$

kan accelerationen skrives

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$$

Lad S og S' være to henførelsessystemer. Antag at O' har en acceleration $\boldsymbol{a}_O$ i forhold til S og at S' roterer med vinkelhastigheden ω i forhold til S. Lad $\boldsymbol{a}'$ være accelerationen af partiklen P i henførelsessystem S'. Så er accelerationen af P i henførelsessystem S

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \qquad [\text{m/s}^2]$$

Newtons 2. lov kan anvendes i S, da det er et inertialsystem. Derfor kan accelerationen

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'$$

benyttes til opskrivning af Newtons 2. lov ved brug af relativ bevægelse

$$m\boldsymbol{a} = m\boldsymbol{a}_O + m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + m\boldsymbol{a}' + m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{F}_{\text{natur}}$$

hvor $\boldsymbol{F}_{\text{natur}}$ er den resulterende kraft, der virker på P.

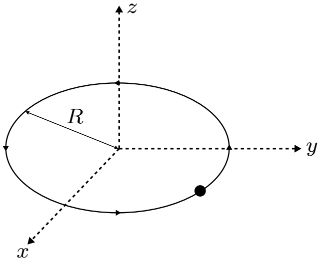
Beskrives bevægelsen af partikel P i S', så fås følgende

$$m\boldsymbol{a}' = F_{\text{natur}} \underbrace{-m\boldsymbol{a}_O}_{=\boldsymbol{F}_{\text{el}}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}_{=\boldsymbol{F}_{\text{cf}}} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{co}}} \underbrace{-m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{va}}}$$

hvor

- $\boldsymbol{F}_{\text{el}}$ er elevatorkraften [N]
- $\boldsymbol{F}_{\text{cf}}$ er centrifugalkraften [N]
- $\boldsymbol{F}_{\text{co}}$ er Corioliskraften [N]
- $\boldsymbol{F}_{\text{va}}$ er vinkelaccelerationskraften [N]

Betragt en partikel med massen m, der udfører en jævn cirkelbevægelse i xy-planen med centrum i origo og radius R.

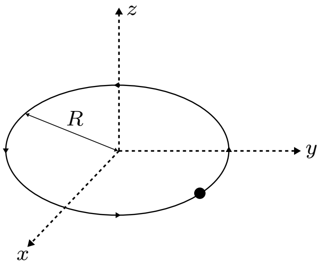


Betragt en partikel med massen m, der udfører en jævn cirkelbevægelse i xy-planen med centrum i origo og radius R.

Ved jævn cirkelbevægelse er centripetal-accelerationen

$$\boldsymbol{a}_N = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_N \qquad [\text{m/s}^2]$$

hvor v er partiklens hastighed [m/s] og $\boldsymbol{e}_N$ er en enhedsvektor med retning fra partiklen mod origo.



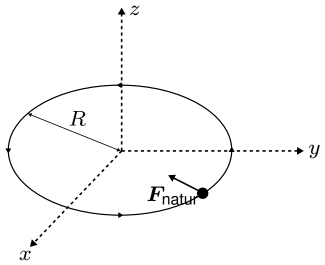
Betragt en partikel med massen m, der udfører en jævn cirkelbevægelse i xy-planen med centrum i origo og radius R.

Ved jævn cirkelbevægelse er centripetal-accelerationen

$$\boldsymbol{a}_N = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_N \qquad [\mathrm{m/s^2}]$$

hvor v er partiklens hastighed [m/s] og $\boldsymbol{e}_N$ er en enhedsvektor med retning fra partiklen mod origo. Dermed er centripetalkraften

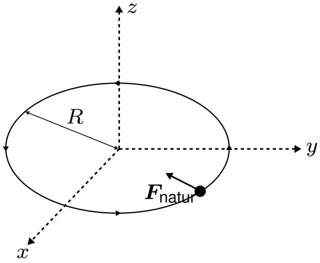
$$\boldsymbol{F}_{\text{natur}} = m\boldsymbol{a}_N = m\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_N \qquad [\mathrm{N}]$$



Betragt en partikel med massen m, der udfører en jævn cirkelbevægelse i xy-planen med centrum i origo og radius R.

Ved jævn cirkelbevægelse er centripetal-accelerationen

$$\boldsymbol{a}_N = \frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_N \qquad [\mathrm{m/s^2}]$$



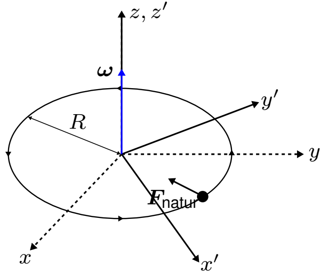
hvor v er partiklens hastighed [m/s] og $\boldsymbol{e}_N$ er en enhedsvektor med retning fra partiklen mod origo. Dermed er centripetalkraften

$$\boldsymbol{F}_{\text{natur}} = m\boldsymbol{a}_N = m\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_N \qquad [\mathrm{N}]$$

Lad os beskrive den samme bevægelse i et roterende henførelsessystem S', der har samme vinkelhastighed som partiklen, dvs.

$$\omega = \frac{v}{R}$$

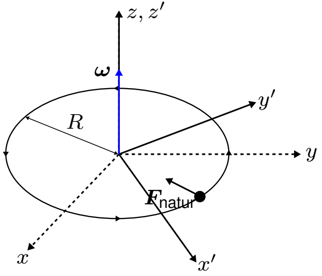
Henførelsessystem S' roterer med en vinkelhastighed ω så z-akserne for S og S' er identiske.



Henførelsessystem S' roterer med en vinkelhastighed ω så z-akserne for S og S' er identiske.

For at beskrive en bevægelse i det roterende henførelsessystem S' benyttes

$$m\boldsymbol{a}' = F_{\text{natur}} \underbrace{-m\boldsymbol{a}_O}_{=\boldsymbol{F}_{\text{el}}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}_{=\boldsymbol{F}_{\text{cf}}} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{co}}} \underbrace{-m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{va}}}$$



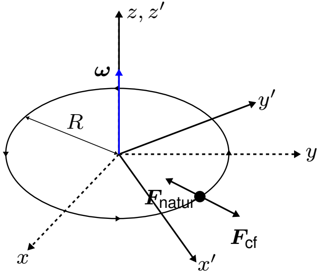
Henførelsessystem S' roterer med en vinkelhastighed ω så z-akserne for S og S' er identiske.

For at beskrive en bevægelse i det roterende henførelsessystem S' benyttes

$$m\boldsymbol{a}' = F_{\text{natur}} \underbrace{-m\boldsymbol{a}_O}_{=\boldsymbol{F}_{\text{el}}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}')}_{=\boldsymbol{F}_{\text{cf}}} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{v}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{co}}} \underbrace{-m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt}\times\boldsymbol{r}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{va}}}$$

Det ses at den eneste fiktive kraft, der ikke er nul er centrifugalkraften

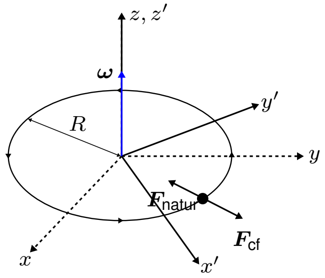
$$\boldsymbol{F}_{\text{cf}} = -m\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r}') \qquad [\text{N}]$$



Henførelsessystem S' roterer med en vinkelhastighed ω så z-akserne for S og S' er identiske.

For at beskrive en bevægelse i det roterende henførelsessystem S' benyttes

$$m\boldsymbol{a}' = F_{\text{natur}} \underbrace{-m\boldsymbol{a}_O}_{=\boldsymbol{F}_{\text{el}}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}_{=\boldsymbol{F}_{\text{cf}}} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{co}}} \underbrace{-m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{va}}}$$



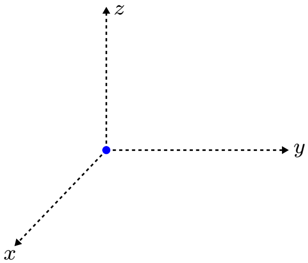
Det ses at den eneste fiktive kraft, der ikke er nul er centrifugalkraften

$$\boldsymbol{F}_{\text{cf}} = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') \qquad [\text{N}]$$

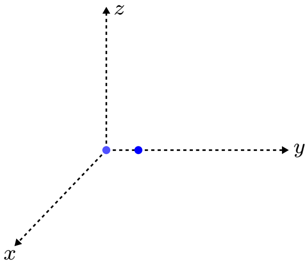
Bevægelsen for partiklen i S' er dermed beskrevet ved

$$m\boldsymbol{a}' = m\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_N - m\frac{v^2}{R}\boldsymbol{e}_N = \boldsymbol{0}\ \text{N}$$

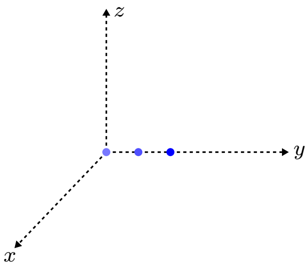
Betragt en kugle der bevæger sig med konstant hastighed i et inertialsystem S.



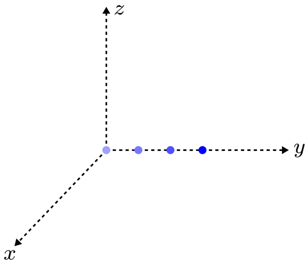
Betragt en kugle der bevæger sig med konstant hastighed i et inertialsystem S.



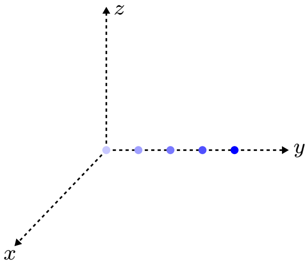
Betragt en kugle der bevæger sig med konstant hastighed i et inertialsystem S.



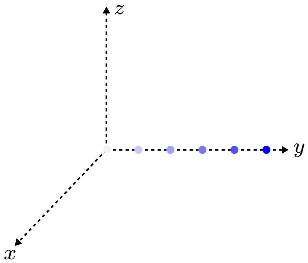
Betragt en kugle der bevæger sig med konstant hastighed i et inertialsystem S.



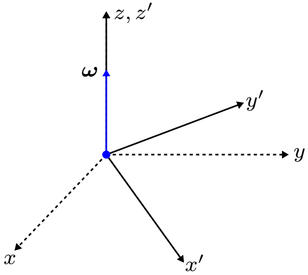
Betragt en kugle der bevæger sig med konstant hastighed i et inertialsystem S.



Betragt en kugle der bevæger sig med konstant hastighed i et inertialsystem S.



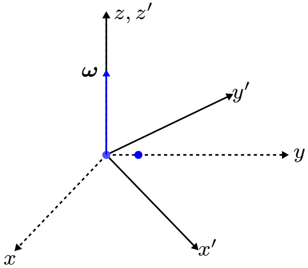
Betragt en kugle der bevæger sig med konstant hastighed i et inertialsystem S.



Den samme bevægelse ønskes beskrevet i et roterende henførelsessystem S', der roterer med vinkelhastighed ω.

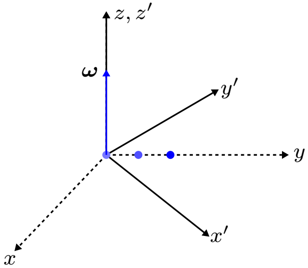
Relativ bevægelse
Eksempel: Corioliskraften (I)

Betragt en kugle der bevæger sig med konstant hastighed i et inertialsystem S.



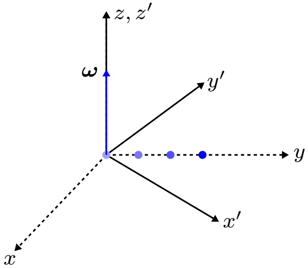
Den samme bevægelse ønskes beskrevet i et roterende henførelsessystem S', der roterer med vinkelhastighed ω.

Betragt en kugle der bevæger sig med konstant hastighed i et inertialsystem S.



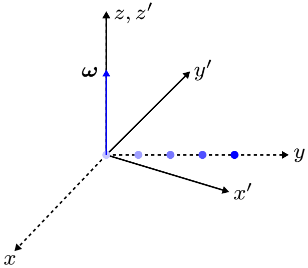
Den samme bevægelse ønskes beskrevet i et roterende henførelsessystem S', der roterer med vinkelhastighed ω.

Betragt en kugle der bevæger sig med konstant hastighed i et inertialsystem S.



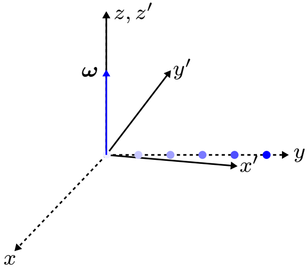
Den samme bevægelse ønskes beskrevet i et roterende henførelsessystem S', der roterer med vinkelhastighed ω.

Betragt en kugle der bevæger sig med konstant hastighed i et inertialsystem S.



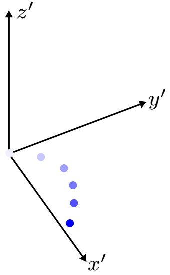
Den samme bevægelse ønskes beskrevet i et roterende henførelsessystem S', der roterer med vinkelhastighed ω.

Betragt en kugle der bevæger sig med konstant hastighed i et inertialsystem S.



Den samme bevægelse ønskes beskrevet i et roterende henførelsessystem S', der roterer med vinkelhastighed ω.

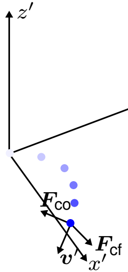
Bevægelsen af kuglen i henførelsessystem S' ser ud som følger.



Bevægelsen af kuglen i henførelsessystem S' ser ud som følger.

For at beskrive bevægelsen i det roterende henførelsessystem S' benyttes

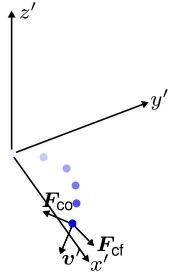
$$m\boldsymbol{a}' = F_{\text{natur}} \underbrace{-m\boldsymbol{a}_O}_{=\boldsymbol{F}_{\text{el}}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}_{=\boldsymbol{F}_{\text{cf}}} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{co}}} \underbrace{-m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{va}}}$$



Bevægelsen af kuglen i henførelsessystem S' ser ud som følger.

For at beskrive bevægelsen i det roterende henførelsessystem S' benyttes

$$m\boldsymbol{a}' = F_{\text{natur}} \underbrace{-m\boldsymbol{a}_O}_{=\boldsymbol{F}_{\text{el}}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}_{=\boldsymbol{F}_{\text{cf}}} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{co}}} \underbrace{-m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{va}}}$$



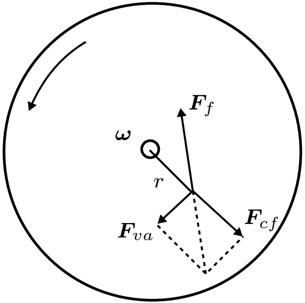
I eksemplet fås

$$m\boldsymbol{a}' = -m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') - 2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \qquad \text{[N]}$$

hvor Corioliskraften er

$$\boldsymbol{F}_{\text{co}} = -2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \qquad \text{[N]}$$

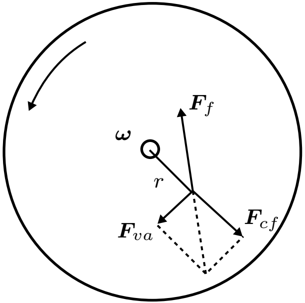
Betragt en klods der ligger på en accelererende karusel, og hvor friktionskraften $\boldsymbol{F}_f$ er så stor at klodsen ikke bevæger sig relativt til karusellen.



Betragt en klods der ligger på en accelererende karusel, og hvor friktionskraften $\boldsymbol{F}_f$ er så stor at klodsen ikke bevæger sig relativt til karusellen.

For at beskrive bevægelsen i et henførelsessystem S' der sidder fast på karusellen benyttes

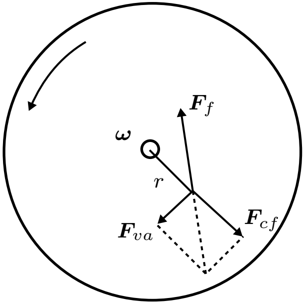
$$m\boldsymbol{a}' = F_{\text{natur}} \underbrace{-m\boldsymbol{a}_O}_{=\boldsymbol{F}_{\text{el}}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}_{=\boldsymbol{F}_{\text{cf}}} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{co}}} \underbrace{-m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{va}}}$$



Betragt en klods der ligger på en accelererende karusel, og hvor friktionskraften $\boldsymbol{F}_f$ er så stor at klodsen ikke bevæger sig relativt til karusellen.

For at beskrive bevægelsen i et henførelsessystem S' der sidder fast på karusellen benyttes

$$m\boldsymbol{a}' = F_{\text{natur}} \underbrace{-m\boldsymbol{a}_O}_{=\boldsymbol{F}_{\text{el}}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}_{=\boldsymbol{F}_{\text{cf}}} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{co}}} \underbrace{-m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{va}}}$$



I eksemplet fås

$$m\boldsymbol{a}' = F_{\text{natur}} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') - m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'$$

hvor $F_{\text{natur}} = F_f$ og vinkelaccelerationskraften er

$$\boldsymbol{F}_{\text{va}} = -m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' \qquad \text{[N]}$$

Opsummering

Lad S og S' være to henførelsessystemer. Antag at O' har en acceleration $\boldsymbol{a}_O$ i forhold til S og at S' roterer med vinkelhastigheden ω i forhold til S. Lad $\boldsymbol{a}'$ være accelerationen af partiklen P i henførelsessystem S'. Så er accelerationen af P i henførelsessystem S

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_O + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}' + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{v}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}' \qquad [\mathrm{m/s}^2]$$

Beskrives bevægelsen af partikel P i S', så fås følgende

$$m\boldsymbol{a}' = F_{\text{natur}} \underbrace{-m\boldsymbol{a}_O}_{=\boldsymbol{F}_{\text{el}}} \underbrace{-m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}')}_{=\boldsymbol{F}_{\text{cf}}} \underbrace{-2m\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{co}}} \underbrace{-m\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \boldsymbol{r}'}_{=\boldsymbol{F}_{\text{va}}}$$

hvor

- $\boldsymbol{F}_{\text{el}}$ er elevatorkraften [N]
- $\boldsymbol{F}_{\text{cf}}$ er centrifugalkraften [N]
- $\boldsymbol{F}_{\text{co}}$ er Corioliskraften [N]
- $\boldsymbol{F}_{\text{va}}$ er vinkelaccelerationskraften [N]