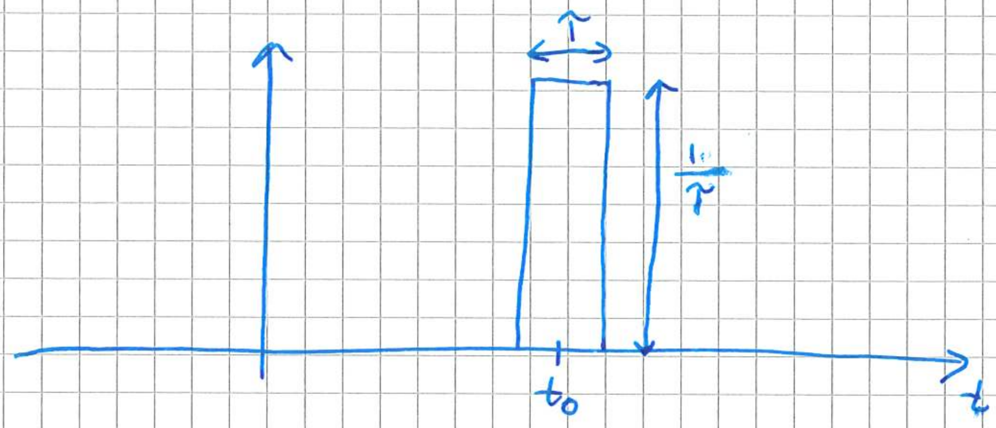
Fouriertransformation – Eksempler

I det følgende anvendes en dirac delta funktion, der er defineret så

$$\int_a^b f(t)\,\delta(t-t_0)\,dt = f(t_0)$$

hvor $f(t)$ er en kontinuerlig funktion og δ er dirac delta funktionen.

Vi kan tænke på $\delta(t-t_0)$ som en høj smal funktion med graf som vist herunder, når τ går imod nul.

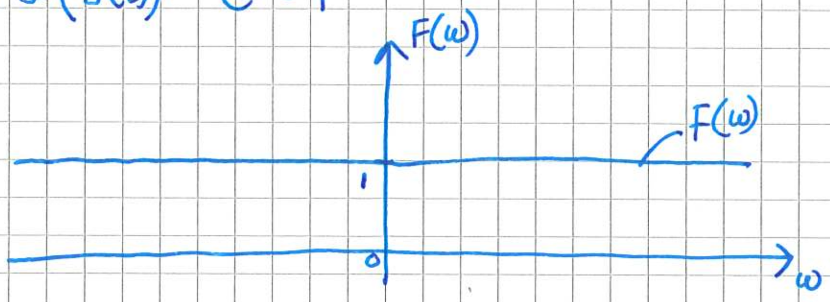


Vi Fouriertransformerer $\delta(t-t_0)$. Fra definition af transformation fås

$$F(\omega) = \mathfrak{F}(\delta(t-t_0)) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)\,e^{-j\omega t}\,dt = e^{-j\omega t_0}$$

Lad $t_0 = 0$, så ses det at

$$F(\omega) = \mathfrak{F}(\delta(t)) = e^0 = 1$$



Fouriertransformation – Eksempler

I det følgende invers-Fouriertransformeres $F(\omega) = 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)$
Vi anvender transformationen som

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\,\delta(\omega-\omega_0)\,e^{j\omega t}\,d\omega \qquad (1)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega-\omega_0)\,e^{j\omega t}\,d\omega \qquad \text{(Definitionen af } \delta \text{ anvendes)}$$

$$= \underline{e^{j\omega_0 t}}$$

Vi Fouriertransformerer $f(t) = \cos(\omega_0 t)$. Fra definitionen af transformationen fås

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right) e^{-j\omega t}\,dt$$

(Euler's identitet er anvendt, dvs. $\cos(\omega_0 t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}\right)$)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t}\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} e^{j(-\omega_0)t} e^{-j\omega t}\,dt$$

(Anvend (1))

$$= \pi\,\delta(\omega-\omega_0) + \pi\,\delta(\omega+\omega_0)$$