Lektion 5: Impulsmoment og stød

Modellering af elektromekaniske systemer

Christoffer Sloth
chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
Mærsk Mc-Kinney Møller Instituttet
Syddansk Universitet

Agenda

Introduktion

Impulsmoment og kraftmoment

Partikelsystemer

Bevægelse af stive legemer

Stød

- Uelastisk stød
- Elastisk stød

Opsummering

Introduktion

Pensum for Modellering af elektromekaniske systemer

Viden[1]

Den studerende skal kunne:

- forklare den grundlæggende fysiks love og begreber
- beskrive et elektromekanisk system ved hjælp af systemets parametre
- redegøre for virkemåden af børstede og børsteløse DC motorer
- opstille overføringsfunktioner for lineære systemer

Færdigheder

Den studerende skal kunne:

- udføre fritlegemeanalyse på et mekanisk system
- anvende Newtons 3 love til modellering af mekaniske systemer
- anvende Lagrange D'Alemberts princip til modellering af mekaniske systemer
- opstille differentialligninger, der beskriver et elektromekanisk systems bevægelse
- fortolke lineære systemers bevægelse i frekvensdomæne
- modellere og simulere simple serielle manipulatorer

Kompetencer

Den studerende skal kunne:

- simulere elektromekaniske systemer og fortolke deres bevægelse

[1] Basseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=46418&listid=5027&lang=da

Introduktion

Oversigt over lektioner

- **Lektion 1**: Fourierrækker og Fouriertransformation
- **Lektion 2**: Laplace transformation
- **Lektion 3**: Kræfter og bevægelse
- **Lektion 4**: Arbejde og energi
- **Lektion 5**: Impulsmoment og stød
- **Lektion 6**: Relativ bevægelse og fiktive kræfter
- **Lektion 7**: Plan bevægelse af stive legemer
- **Lektion 8**: Almen bevægelse af stive legemer
- **Lektion 9**: Svingninger
- **Lektion 10**: DC motoren
- **Lektion 11**: Modellering af robotarm
- **Lektion 12**: Simulering af mekaniske systemer

Impulsmomentet (bevægelsesmængdemomentet) med hensyn til punktet O for en partikel er defineret som

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})$$

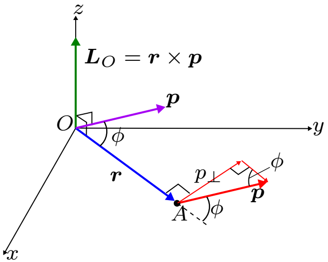
hvor $\boldsymbol{r}$ er partiklens stedvektor og $\boldsymbol{p}$ er partiklens impuls.

Impulsmomentet (bevægelsesmængdemomentet) med hensyn til punktet O for en partikel er defineret som

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v})$$

hvor $\boldsymbol{r}$ er partiklens stedvektor og $\boldsymbol{p}$ er partiklens impuls.

Størrelsen på impulsmomentet er $L_O = mrv\sin\phi$



Stedvektoren $\boldsymbol{r}$ og hastighedsvektoren $\boldsymbol{v}$ er orthogonale under cirkelbevægelse. En partikels fart under cirkelbevægelse er

$$v = r\omega \qquad [\mathrm{m/s}]$$

Stedvektoren $\boldsymbol{r}$ og hastighedsvektoren $\boldsymbol{v}$ er orthogonale under cirkelbevægelse. En partikels fart under cirkelbevægelse er

$$v = r\omega \qquad [\text{m/s}]$$

Dermed er impulsmomentet under en cirkelbevægelse

$$L_O = mr^2\omega$$

For en plan bevægelse er impulsmomentet givet ved

$$\boldsymbol{L}_O = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\theta)$$

hvor $\boldsymbol{v}_\theta$ er hastighedskomposanten vinkelret på $\boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{v}_r$ er hastighedskomposanten i retning af $\boldsymbol{r}$.

For en plan bevægelse er impulsmomentet givet ved

$$\boldsymbol{L}_O = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v} = m\boldsymbol{r} \times (\boldsymbol{v}_r + \boldsymbol{v}_\theta)$$

hvor $\boldsymbol{v}_\theta$ er hastighedskomposanten vinkelret på $\boldsymbol{r}$ og $\boldsymbol{v}_r$ er hastighedskomposanten i retning af $\boldsymbol{r}$.

Ved brug af denne notation fås

$$\boldsymbol{L}_O = m\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}_\theta$$

og

$$L_O = mr^2\omega$$

Ved differentiation af impulsmomentet fås

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

Ved differentiation af impulsmomentet fås

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

Ved at indsætte $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$ og $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$ fås

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

Ved differentiation af impulsmomentet fås

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \times \boldsymbol{p} + \boldsymbol{r} \times \frac{d\boldsymbol{p}}{dt}$$

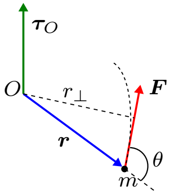
Ved at indsætte $\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \boldsymbol{v}$ og $\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F}$ fås

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{v} \times m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$$

Dette giver **impulsmomentsætningen**

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\tau}_O$$

hvor $\boldsymbol{\tau}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ er **kraftmomentet** med hensyn til O (punktet O skal ligge fast i et inertialsystem).



Størrelsen på kraftmomentet er

$$\tau_O = rF\sin\theta$$

som ofte skrives

$$\tau_O = r_\perp F$$

Det **totale impulsmoment** med hensyn til punktet O for et partikelsystem er

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_i \boldsymbol{L}_{O,i} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

Det **totale impulsmoment** med hensyn til punktet O for et partikelsystem er

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_i \boldsymbol{L}_{O,i} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i$$

Ved differentiation fås

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i$$

Impulsmomentsætningen for et partikelsystem kan skrives som

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \tau_{O,\text{ext}}$$

hvor $\tau_{O,\text{ext}}$ er de ydre kræfters totale kraftmoment med hensyn til O.

Vi betragter et partikelsystem beskrevet i to koordinatrammer

1. **L-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til Jorden
2. **C-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til massemidtpunktet af partikelsystemet

Vi betragter et partikelsystem beskrevet i to koordinatrammer

1. **L-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til Jorden
2. **C-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til massemidtpunktet af partikelsystemet

I C-Systemet er stedvektor $\boldsymbol{r}'$ og hastighedsvektor $\boldsymbol{v}'$. Det gælder således at

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i' = 0 \qquad \text{og} \sum m_i \boldsymbol{v}_i' = 0$$

Vi betragter et partikelsystem beskrevet i to koordinatrammer

1. **L-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til Jorden
2. **C-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til massemidtpunktet af partikelsystemet

I C-Systemet er stedvektor $\boldsymbol{r}'$ og hastighedsvektor $\boldsymbol{v}'$. Det gælder således at

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i' = 0 \qquad \text{og} \sum m_i \boldsymbol{v}_i' = 0$$

Dermed bliver impulsen for den $i$te partikel

$$\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i = m_i(\boldsymbol{v}_i' + \boldsymbol{v}_C) = \boldsymbol{p}_i' + m_i \boldsymbol{v}_C$$

Impulsmomentet omkring O kan skrives

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_C) \times (\boldsymbol{p}'_i + m_i \boldsymbol{v}_C)$$

Impulsmomentet omkring O kan skrives

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{r}_C) \times (\boldsymbol{p}_i' + m_i \boldsymbol{v}_C)$$

Dette udtryk kan opdeles således

$$\boldsymbol{L}_O = \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{p}_i'}_{\boldsymbol{L}_C} + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}_i' \times m_i \boldsymbol{v}_C}_{=0} + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{p}_i'}_{=0} + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}_C \times m_i \boldsymbol{v}_C}_{=\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{P}}$$

Impulsmomentet omkring O kan skrives

$$\boldsymbol{L}_O = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_C) \times (\boldsymbol{p}'_i + m_i \boldsymbol{v}_C)$$

Dette udtryk kan opdeles således

$$\boldsymbol{L}_O = \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{p}'_i}_{\boldsymbol{L}_C} + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}'_i \times m_i \boldsymbol{v}_C}_{=0} + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{p}'_i}_{=0} + \underbrace{\sum_i \boldsymbol{r}_C \times m_i \boldsymbol{v}_C}_{=\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{P}}$$

hvilket er reduceres til

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_C + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{P}$$

hvor $\boldsymbol{L}_C$ er **det indre impulsmoment** og $\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{P}$ kaldes **det ydre impulsmoment**.

Det ydre kraftmoment kan skrives som

$$\boldsymbol{\tau}_{O,\text{ext}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}'_i + \boldsymbol{r}_C) \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{r}'_i \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{r}_C \times \sum_i \boldsymbol{F}_i$$

Det ydre kraftmoment kan skrives som

$$\boldsymbol{\tau}_{O,\text{ext}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{r}_C) \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{r}_C \times \sum_i \boldsymbol{F}_i$$

Det ydre kraftmoment er dermed

$$\boldsymbol{\tau}_{O,\text{ext}} = \boldsymbol{\tau}_{C,\text{ext}} + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_\text{ext}$$

hvor $\boldsymbol{\tau}_{C,\text{ext}}$ er det ydre kraftmoment med hensyn til massemidtpunktet C.

Det ydre kraftmoment kan skrives som

$$\boldsymbol{\tau}_{O,\text{ext}} = \sum_i \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i (\boldsymbol{r}_i' + \boldsymbol{r}_C) \times \boldsymbol{F}_i = \sum_i \boldsymbol{r}_i' \times \boldsymbol{F}_i + \boldsymbol{r}_C \times \sum_i \boldsymbol{F}_i$$

Det ydre kraftmoment er dermed

$$\boldsymbol{\tau}_{O,\text{ext}} = \boldsymbol{\tau}_{C,\text{ext}} + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$$

hvor $\boldsymbol{\tau}_{C,\text{ext}}$ er det ydre kraftmoment med hensyn til massemidtpunktet C.

Udtrykket $\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{L}_C + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{P}$ leder til

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \frac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} + \boldsymbol{r}_C \times \underbrace{\frac{d\boldsymbol{P}}{dt}}_{\boldsymbol{F}_{\text{ext}}} + \underbrace{\boldsymbol{v}_C \times \boldsymbol{P}}_{=0}$$

Ud fra

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \frac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$$

og

$$\boldsymbol{\tau}_{O,\text{ext}} = \boldsymbol{\tau}_{C,\text{ext}} + \boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{F}_{\text{ext}}$$

ses det at

$$\frac{d\boldsymbol{L}_C}{dt} = \boldsymbol{\tau}_{C,\text{ext}}$$

Massemidtpunktssætningen benyttes til at finde massemidtpunktets bevægelse

$$M\frac{d\boldsymbol{v}_C}{dt} = \sum \boldsymbol{F}_{\text{ext}} \qquad [\text{N}]$$

hvor M er legemets samlede masse [kg], $\boldsymbol{v}_C$ er massemidtpunktets hastighed [m/s] og $\boldsymbol{F}_{\text{ext}}$ er en ekstern kraft [N].

Impulsmomentsætningen i z-retningen kan benyttes til beskrivelse af roterende bevægelse i planen, dvs.

$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z \qquad [\mathrm{Nm}]$$

Impulsmomentsætningen i z-retningen kan benyttes til beskrivelse af roterende bevægelse i planen, dvs.

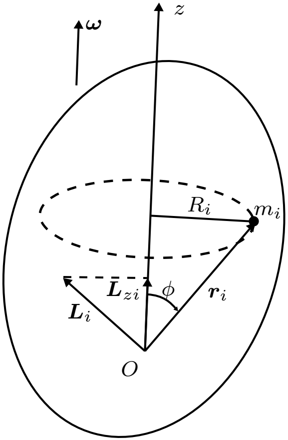
$$\frac{dL_z}{dt} = \tau_z \qquad [\mathrm{Nm}]$$

Ofte benyttes massemidtpunktet C som referencepunkt, og dermed bliver impulsmomentsætningen i z-retningen

$$\frac{dL_{C,z}}{dt} = \tau_{C,z} \qquad [\mathrm{Nm}]$$

Impulsmomentet for m_i om punktet O er

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$



Impulsmomentet for m_i om punktet O er

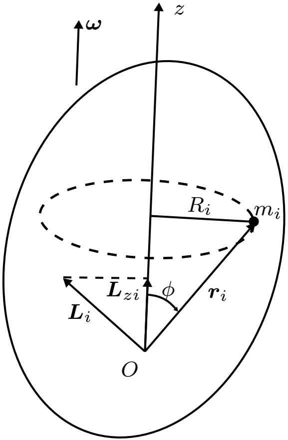
$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$

Af figuren ses det at

$$R_i = r_i \sin\phi$$

Dermed bliver størrelsen af impulsmomentet

$$L_i = |\boldsymbol{L}_i| = m_i r_i (\omega r_i \sin\phi)$$



Impulsmomentet for m_i om punktet O er

$$\boldsymbol{L}_i = \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i)$$

Af figuren ses det at

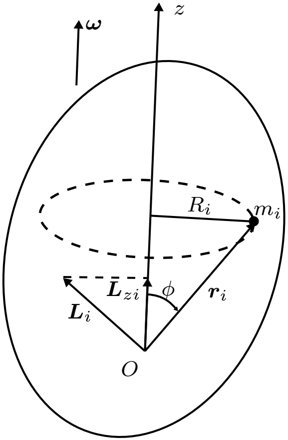
$$R_i = r_i \sin\phi$$

Dermed bliver størrelsen af impulsmomentet

$$L_i = |\boldsymbol{L}_i| = m_i r_i (\omega r_i \sin\phi)$$

I z-retningen er impulsmomentet for masse m_i om punktet O

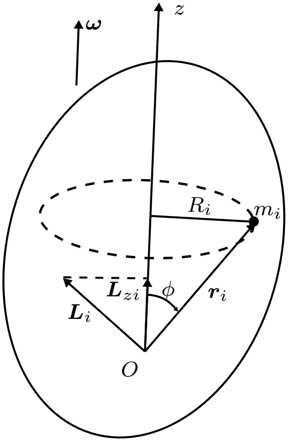
$$L_{zi} = L_i \sin\phi = m_i \omega (r_i \sin\phi)^2 = m_i \omega R_i^2$$



Impulsmomentet om punktet O for hele legemet er dermed

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \omega \underbrace{\sum_i m_i R_i^2}_{=I_z}$$

hvor I_z er legemets **inertimoment** om z-aksen [kgm^2].



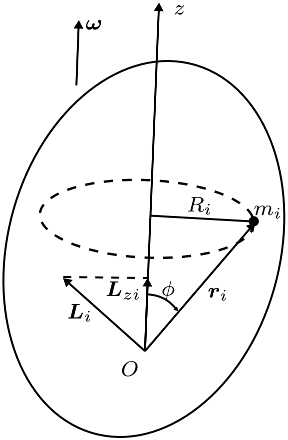
Impulsmomentet om punktet O for hele legemet er dermed

$$L_z = \sum_i L_{zi} = \omega \underbrace{\sum_i m_i R_i^2}_{=I_z}$$

hvor I_z er legemets **inertimoment** om z-aksen [kgm^2].

Inertimomentet for en kontinuert massefordeling kan skrives

$$I_z = \int R^2 dm = \int R^2 \rho dV$$



Impulsmomentet for et stift legeme om et fast punkt i et inertialsystem eller om massemidtpunktet er

$$L_z = I_z \omega$$

hvor I_z er legemets inertimoment om en linje gennem punktet parallel med rotationsaksen.

Impulsmomentet for et stift legeme om et fast punkt i et inertialsystem eller om massemidtpunktet er

$$L_z = I_z \omega$$

hvor I_z er legemets inertimoment om en linje gennem punktet parallel med rotationsaksen.

Den rotationelle dynamik for et stift legeme er således

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \tau_z \qquad \text{eller} \qquad I_{C,z} \frac{d\omega}{dt} = \tau_{C,z}$$

Impulsmomentet for et stift legeme om et fast punkt i et inertialsystem eller om massemidtpunktet er

$$L_z = I_z \omega$$

hvor I_z er legemets inertimoment om en linje gennem punktet parallel med rotationsaksen.

Den rotationelle dynamik for et stift legeme er således

$$I_z \frac{d\omega}{dt} = \tau_z \qquad \text{eller} \qquad I_{C,z} \frac{d\omega}{dt} = \tau_{C,z}$$

Slutteligt kan impulsmomentet også udtrykkes

$$L_z = I_{C,z}\omega + (\boldsymbol{r}_C \times \boldsymbol{P})_z$$

hvor $\boldsymbol{P}$ er systemets samlede impuls.

Når to partikler støder sammen, så studeres systemets totale kinetiske energi for at klassificere stødet.

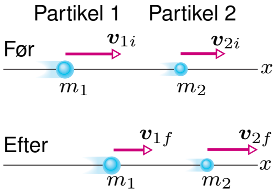
- **Elastisk stød**: Hvis den samlede kinetiske energi for to partikler bevares efter et stød, så er stødet elastisk.
- **Uelastisk stød**: Hvis den samlede kinetiske energi for to partikler forminskes efter et stød, så er stødet uelastisk.

Når to partikler støder sammen, så studeres systemets totale kinetiske energi for at klassificere stødet.

- **Elastisk stød**: Hvis den samlede kinetiske energi for to partikler bevares efter et stød, så er stødet elastisk.
- **Uelastisk stød**: Hvis den samlede kinetiske energi for to partikler forminskes efter et stød, så er stødet uelastisk.

I praksis bliver der genereret varme ved en kollision, dvs. bevægelsesenergi transformeres til termisk energi.

Betragt følgende stødende partikler



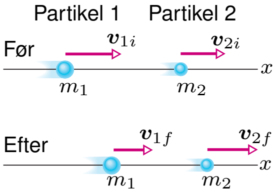
Fra impulsbevarelse haves følgende relation

$$\boldsymbol{p}_{1i} + \boldsymbol{p}_{2i} = \boldsymbol{p}_{1f} + \boldsymbol{p}_{2f}$$

eller

$$m_1\boldsymbol{v}_{1i} + m_2\boldsymbol{v}_{2i} = m_1\boldsymbol{v}_{1f} + m_2\boldsymbol{v}_{2f}$$

Betragt følgende stødende partikler



Fra impulsbevarelse haves følgende relation

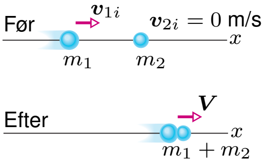
$$\boldsymbol{p}_{1i} + \boldsymbol{p}_{2i} = \boldsymbol{p}_{1f} + \boldsymbol{p}_{2f}$$

eller

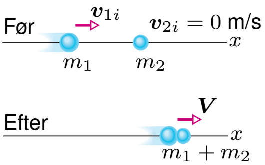
$$m_1\boldsymbol{v}_{1i} + m_2\boldsymbol{v}_{2i} = m_1\boldsymbol{v}_{1f} + m_2\boldsymbol{v}_{2f}$$

Hvis fx tre hastigheder og masserne kendes, så kan den sidste hastighed findes.

Et stød kaldes **fuldstændig uelastisk** hvis de to objekter bevæger sig med den samme hastighed efter stødet.



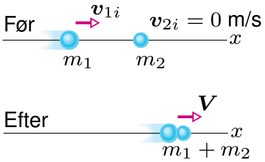
Et stød kaldes **fuldstændig uelastisk** hvis de to objekter bevæger sig med den samme hastighed efter stødet.



I dette tilfælde haves

$$m_1\boldsymbol{v}_{1i} + m_2\boldsymbol{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{V}$$

Et stød kaldes **fuldstændig uelastisk** hvis de to objekter bevæger sig med den samme hastighed efter stødet.



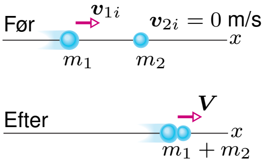
I dette tilfælde haves

$$m_1 \boldsymbol{v}_{1i} + m_2 \boldsymbol{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{V}$$

og dermed er

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_{\text{CoM}} = \frac{1}{M}\sum_j m_j \boldsymbol{v}_{ji}$$

Et stød kaldes **fuldstændig uelastisk** hvis de to objekter bevæger sig med den samme hastighed efter stødet.



I dette tilfælde haves

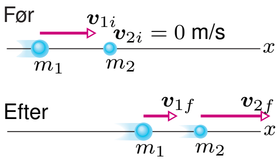
$$m_1 \boldsymbol{v}_{1i} + m_2 \boldsymbol{v}_{2i} = (m_1 + m_2)\boldsymbol{V}$$

og dermed er

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{v}_{\text{CoM}} = \frac{1}{M} \sum_j m_j \boldsymbol{v}_{ji}$$

Hastigheden af massemidtpunktet ændres ikke af stødet.

Betragt følgende stød mellem to partikler



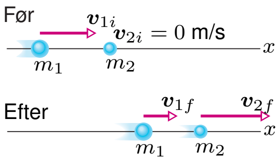
Fra impulsbevarelse haves

$$m_1 \boldsymbol{v}_{1i} = m_1 \boldsymbol{v}_{1f} + m_2 \boldsymbol{v}_{2f}$$

og fra bevarelse af kinetisk energi haves

$$m_1 \boldsymbol{v}_{1i}^2 = m_1 \boldsymbol{v}_{1f}^2 + m_2 \boldsymbol{v}_{2f}^2$$

Betragt følgende stød mellem to partikler



Fra impulsbevarelse haves

$$m_1 \boldsymbol{v}_{1i} = m_1 \boldsymbol{v}_{1f} + m_2 \boldsymbol{v}_{2f}$$

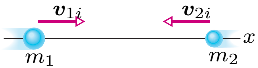
og fra bevarelse af kinetisk energi haves

$$m_1 \boldsymbol{v}_{1i}^2 = m_1 \boldsymbol{v}_{1f}^2 + m_2 \boldsymbol{v}_{2f}^2$$

Dette medfører

$$\boldsymbol{v}_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \boldsymbol{v}_{1i} \qquad \text{og} \qquad \boldsymbol{v}_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \boldsymbol{v}_{1i}$$

Betragt følgende stød mellem to partikler



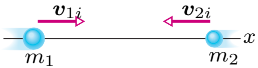
Fra impulsbevarelse haves

$$m_1 \boldsymbol{v}_{1i} + m_2 \boldsymbol{v}_{2i} = m_1 \boldsymbol{v}_{1f} + m_2 \boldsymbol{v}_{2f}$$

og fra bevarelse af kinetisk energi haves

$$m_1 \boldsymbol{v}_{1i}^2 + m_2 \boldsymbol{v}_{2i}^2 = m_1 \boldsymbol{v}_{1f}^2 + m_2 \boldsymbol{v}_{2f}^2$$

Betragt følgende stød mellem to partikler



Fra impulsbevarelse haves

$$m_1 \boldsymbol{v}_{1i} + m_2 \boldsymbol{v}_{2i} = m_1 \boldsymbol{v}_{1f} + m_2 \boldsymbol{v}_{2f}$$

og fra bevarelse af kinetisk energi haves

$$m_1 \boldsymbol{v}_{1i}^2 + m_2 \boldsymbol{v}_{2i}^2 = m_1 \boldsymbol{v}_{1f}^2 + m_2 \boldsymbol{v}_{2f}^2$$

Dette medfører

$$\boldsymbol{v}_{1f} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \boldsymbol{v}_{1i} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} \boldsymbol{v}_{2i} \qquad \text{[m/s]}$$

$$\boldsymbol{v}_{2f} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \boldsymbol{v}_{1i} + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} \boldsymbol{v}_{2i} \qquad \text{[m/s]}$$

Til klassificering af stød benyttes **restitutionskoefficienten**, der er defineret fra

$$v_{1f} - v_{2f} = -e(v_{1i} - v_{2i})$$

hvor $e \in [0,1]$ er restitutionskoefficienten.

Stød
Restitutionskoefficient

Til klassificering af stød benyttes **restitutionskoefficienten**, der er defineret fra

$$v_{1f} - v_{2f} = -e(v_{1i} - v_{2i})$$

hvor $e \in [0, 1]$ er restitutionskoefficienten.

Det ses at $e = 1$ svarer til elastisk stød og $e = 0$ svarer til at fuldstændig uelastisk stød.

Til klassificering af stød benyttes **restitutionskoefficienten**, der er defineret fra

$$v_{1f} - v_{2f} = -e(v_{1i} - v_{2i})$$

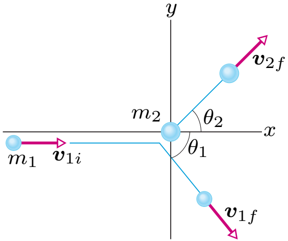
hvor $e \in [0, 1]$ er restitutionskoefficienten.

Det ses at $e = 1$ svarer til elastisk stød og $e = 0$ svarer til at fuldstændig uelastisk stød.

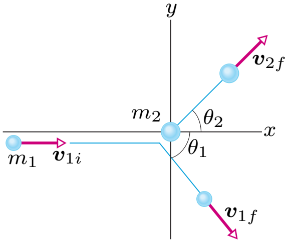
Sluthastighederne kan findes som

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - em_2)v_{1i} + (1+e)m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}$$
$$v_{2f} = \frac{(1+e)m_1 v_{1i} + (m_2 - em_1)v_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Betragt et stød mellem partikler i dimension 2 (m_1 rammer ikke m_2 lige på)



Betragt et stød mellem partikler i dimension 2 (m_1 rammer ikke m_2 lige på)



Fra impulsbevarelse haves

$$m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos\theta_1 + m_2 v_{2f} \cos\theta_2$$
$$0 = -m_1 v_{1f} \sin\theta_1 + m_2 v_{2f} \sin\theta_2$$

og fra bevarelse af kinetisk energi haves

$$m_1 v_{1i}^2 + m_2 v_{2i}^2 = m_1 v_{1f}^2 + m_2 v_{2f}^2$$

Opsummering

Impulsmomentet (bevægelsesmængdemomentet) med hensyn til punktet O for en partikel er defineret som

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \qquad [\text{kgm}^2/\text{s}]$$

hvor $\boldsymbol{r}$ er partiklens stedvektor [m] og $\boldsymbol{p}$ er partiklens impuls [kgm/s].

Impulsmomentet (bevægelsesmængdemomentet) med hensyn til punktet O for en partikel er defineret som

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = m(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{v}) \qquad [\text{kgm}^2/\text{s}]$$

hvor $\boldsymbol{r}$ er partiklens stedvektor [m] og $\boldsymbol{p}$ er partiklens impuls [kgm/s].

Størrelsen på impulsmomentet er $L_O = mrv\sin\phi$ [kgm^2/s].

Led $\boldsymbol{L}_O$ være impulsmomentet med hensyn til punktet O (punktet O skal ligge fast i et inertialsystem). Så gælder det at

$$\frac{d\boldsymbol{L}_O}{dt} = \boldsymbol{\tau}_O$$

hvor $\boldsymbol{\tau}_O = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}$ er **kraftmomentet** med hensyn til O.

Impulsmomentsætningen
Lad $L_{C,z}$ være *Impulsmomentet* i z-aksens retning med hensyn til massemidtpunktet C for et stift legeme, så gælder det at

$$\frac{dL_{C,z}}{dt} = I_C \frac{d\omega}{dt} = \tau_z \qquad \text{[Nm]}$$

hvor I_C er *inertimomentet* med hensyn til massemidtpunktet C.

Restitutionskoefficienten $e \in [0, 1]$ klassificerer stød, og er defineret fra

$$v_{1f} - v_{2f} = -e(v_{1i} - v_{2i})$$

hvor v_{1i} (v_{1f}) er starthastigheden (sluthastigheden) for partikel 1 [m/s].

Restitutionskoefficienten $e \in [0, 1]$ klassificerer stød, og er defineret fra

$$v_{1f} - v_{2f} = -e(v_{1i} - v_{2i})$$

hvor v_{1i} (v_{1f}) er starthastigheden (sluthastigheden) for partikel 1 [m/s].

Det ses at $e = 1$ svarer til elastisk stød og $e = 0$ svarer til at fuldstændig uelastisk stød.

- **Elastisk stød**: Hvis den samlede kinetiske energi for to partikler bevares efter et stød, så er stødet elastisk.
- **Uelastisk stød**: Hvis den samlede kinetiske energi for to partikler forminskes efter et stød, så er stødet uelastisk.