Lektion 4: Arbejde og energi

Modellering af elektromekaniske systemer

Christoffer Sloth

chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
Mærsk Mc-Kinney Møller Instituttet
Syddansk Universitet

SDU

Agenda

Introduktion

Kinetisk energi og arbejde

Potentiel energi og energibevarelse

Partikelsystemer

Numerisk simulering af dynamiske systemer

Opsummering

Introduktion

Pensum for Modellering af elektromekaniske systemer

Viden[1]

Den studerende skal kunne:

- forklare den grundlæggende fysiks love og begreber
- beskrive et elektromekanisk system ved hjælp af systemets parametre
- redegøre for virkemåden af børstede og børsteløse DC motorer
- opstille overføringsfunktioner for lineære systemer

Færdigheder

Den studerende skal kunne:

- udføre fritlegemeanalyse på et mekanisk system
- anvende Newtons 3 love til modellering af mekaniske systemer
- anvende Lagrange D'Alemberts princip til modellering af mekaniske systemer
- opstille differentialligninger, der beskriver et elektromekanisk systems bevægelse
- fortolke lineære systemers bevægelse i frekvensdomæne
- modellere og simulere simple serielle manipulatorer

Kompetencer

Den studerende skal kunne:

- simulere elektromekaniske systemer og fortolke deres bevægelse

[1] Basseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=46418&listid=5027&lang=da

Introduktion
Oversigt over lektioner

- **Lektion 1**: Bevægelse i flere dimensioner
- **Lektion 2**: Kræfter og bevægelse
- **Lektion 3**: Analyse i frekvensdomæne
- **Lektion 4**: Arbejde og energi
- **Lektion 5**: Impulsmoment og stød
- **Lektion 6**: Relativ bevægelse og fiktive kræfter
- **Lektion 7**: Plan bevægelse af stive legemer
- **Lektion 8**: Almen bevægelse af stive legemer
- **Lektion 9**: Svingninger
- **Lektion 10**: DC motoren
- **Lektion 11**: Modellering af robotarm
- **Lektion 12**: Simulering af mekaniske systemer

Kinetisk energi og arbejde

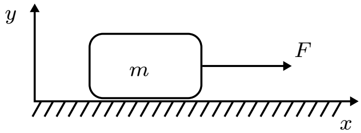
Arbejde (I)

En kraft siges at have udført arbejde W på et objekt, hvis kraften enten accelerer eller decelerer objektet.

Arbejde
Arbejde W er energi overført til eller fra et objekt via en kraft, der virker på objektet. Energi der overføres til objektet er positivt arbejde og energi der overføres fra objektet er negativ energi.

Kinetisk energi og arbejde
Eksempel

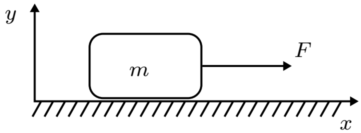
Betragt følgende masse, der påvirkes af kraften F.



Vi antager at

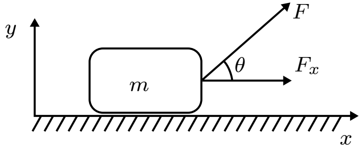
- Kraften F er konstant.
- Legemet er stivt.

Betragt følgende masse, der påvirkes af kraften F.

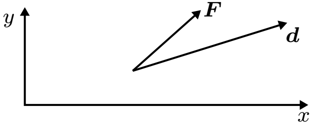


Vi antager at

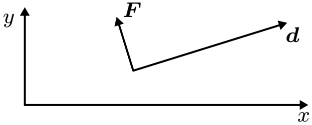
- Kraften F er konstant.
- Legemet er stivt.



En kraft $\boldsymbol{F}$ gør et positivt stykke arbejde, når den peger i den samme retning som bevægelsen af legemet (forskydningen kaldes $\boldsymbol{d}$).



En kraft $\boldsymbol{F}$ gør et positivt stykke arbejde, når den peger i den samme retning som bevægelsen af legemet (forskydningen kaldes $\boldsymbol{d}$).



En kraft $\boldsymbol{F}$ gør et positivt stykke arbejde, når den peger i den samme retning som bevægelsen af legemet (forskydningen kaldes $\boldsymbol{d}$).

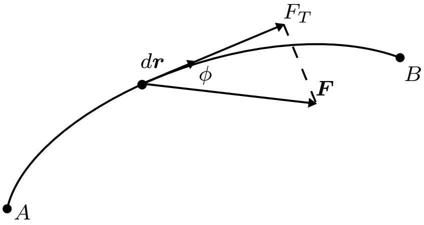
En kraft $\boldsymbol{F}$ gør et positivt stykke arbejde, når den peger i den samme retning som bevægelsen af legemet (forskydningen kaldes $\boldsymbol{d}$).

Arbejdet udført af en konstant kraft $\boldsymbol{F}$ på en partikel, der forskydes $\boldsymbol{d}$ er

$$W = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{d} \qquad [\mathrm{J}]$$

Enhed
Enheden for arbejde er Joule

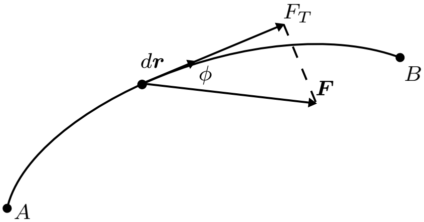
$$1\ \mathrm{J} = 1\ \mathrm{kgm}^2/\mathrm{s}^2 = 1\ \mathrm{Nm}$$



Det arbejde som $\boldsymbol{F}$ udfører på partiklen i tiden dt er

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F dr \cos\phi = F_T dr = F_T ds \qquad \text{[J]}$$

hvor F_T er kraftens komposant langs banekurven.



Det arbejde som $\boldsymbol{F}$ udfører på partiklen i tiden dt er

$$dW = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = F dr \cos\phi = F_T dr = F_T ds \qquad \text{[J]}$$

hvor F_T er kraftens komposant langs banekurven.

Arbejdet udført på partiklen af kraften $\boldsymbol{F}$, når partiklen bevæger sig fra A til B er

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad \text{[J]}$$

Den gennemsnitlige effekt ydet af en kraft F, der gør arbejde W i tidsrummet Δt er

$$P_{\text{avg}} = \frac{W}{\Delta t} \qquad [\text{W}]$$

Den gennemsnitlige effekt ydet af en kraft F, der gør arbejde W i tidsrummet Δt er

$$P_{\text{avg}} = \frac{W}{\Delta t} \qquad [\text{W}]$$

Den øjeblikkelige effekt ydet af en kraft F til tiden t er givet ved

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad [\text{W}]$$

Kinetisk energi og arbejde

Gennemsnits- og øjebliks-effekt

Den gennemsnitlige effekt ydet af en kraft F, der gør arbejde W i tidsrummet Δt er

$$P_{\text{avg}} = \frac{W}{\Delta t} \qquad [\text{W}]$$

Den øjeblikkelige effekt ydet af en kraft F til tiden t er givet ved

$$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t} = \frac{dW}{dt} \qquad [\text{W}]$$

Den øjeblikkelige effekt er også givet som

$$P = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} \qquad [\text{W}]$$

Et objekt med masse m, der bevæger sig med hastigheden v har kinetisk energi

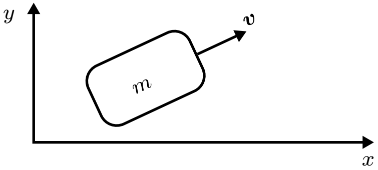
$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad [\mathrm{J}]$$

(Vi antager at v er betydelig mindre end lysets hastighed)

Et objekt med masse m, der bevæger sig med hastigheden v har kinetisk energi

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \qquad [\text{J}]$$

(Vi antager at v er betydelig mindre end lysets hastighed)



Arbejdet W_{AB} udført på en partikel af kraften $\boldsymbol{F}$, når partiklen bevæger sig fra A til B kan omskrives som

$$W_{AB} = \int_A^B F_T \cdot ds = \int_A^B m\frac{dv}{dt}ds = \int_A^B m\frac{ds}{dt}dv = \int_A^B mvdv = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \qquad \text{[J]}$$

Heraf fås **arbejdssætningen**:

Arbejdssætningen
Kræfternes arbejde på en partikel er lig tilvæksten i partiklens kinetiske energi.

Arbejdet W_{AB} udført på en partikel af kraften $\boldsymbol{F}$, når partiklen bevæger sig fra A til B kan omskrives som

$$W_{AB} = \int_A^B F_T \cdot ds = \int_A^B m \frac{dv}{dt} ds = \int_A^B m \frac{ds}{dt} dv = \int_A^B mv dv = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 \qquad [\mathrm{J}]$$

Heraf fås **arbejdssætningen**:

Arbejdssætningen
Kræfternes arbejde på en partikel er lig tilvæksten i partiklens kinetiske energi.

Arbejdssætningen skrives også

$$W_{AB} = \Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},B} - E_{\text{kin},A} \qquad [\mathrm{J}]$$

hvor E_{kin} er den kinetiske energi [J].

Tyngdekraften er en konstant kraft, der virker på alle objekter, og har retning imod jordens centrum. Arbejdet udført af tyngdekraften på et objekt med masse m der er forskudt $\boldsymbol{d}$ er

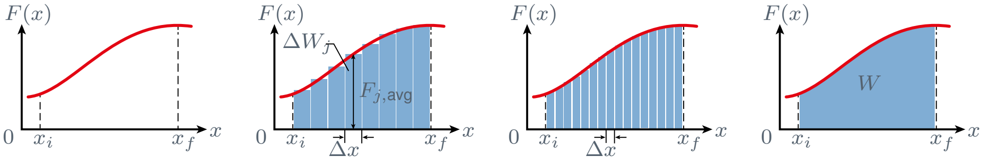
$$W_g = mgd\cos(\theta)$$

hvor θ er vinklen imellem $\boldsymbol{F}_g$ og $\boldsymbol{d}$.

Kinetisk energi og arbejde

Eksempel: Arbejde udført af varierende kraft

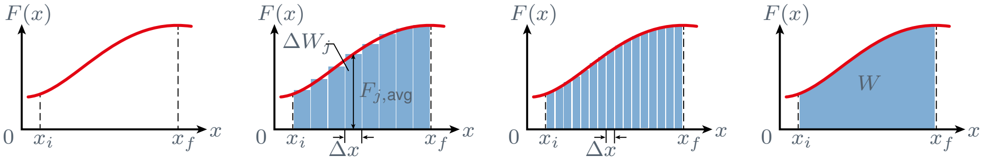
For at finde arbejdet udført af en varierende kraft, så opdeles strækningen i små forskydninger Δx. Den varierende kraft tilnærmes med stykvis konstant kraft.



Kinetisk energi og arbejde

Eksempel: Arbejde udført af varierende kraft

For at finde arbejdet udført af en varierende kraft, så opdeles strækningen i små forskydninger Δx. Den varierende kraft tilnærmes med stykvis konstant kraft.



Arbejdet udført af en varierende kraft $F(x)$ er dermed

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F dx$$

Fjederkraften er en varierende kraft, da dens amplitude afhænger af deformationen af fjederen, dvs.

$$F_s = -kx$$

Fjederkraften er en varierende kraft, da dens amplitude afhænger af deformationen af fjederen, dvs.

$$F_s = -kx$$

Arbejdet udført af en fjeder med start deformation x_i og slut deformation x_f er givet ved

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s dx = -\frac{k}{2}\left(x_f^2 - x_i^2\right)$$

Potentiel energi og energibevarelse

*En kraft kaldes **konservativ**, hvis dens arbejde alene afhænger af bevægelsens start- og slutposition, og ikke af den mellemliggende vej.*

*En kraft kaldes **konservativ**, hvis dens arbejde alene afhænger af bevægelsens start- og slutposition, og ikke af den mellemliggende vej.*

En konservativ kraft har følgende egenskab:
Det resulterende arbejde udført af en konservativ kraft på en partikel der bevæger sig gennem enhver lukket bane er nul.

Dette skrives også

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

En *konservativ krafts arbejde* kan skrives

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = E_{\text{pot},A} - E_{\text{pot},B}$$

En *konservativ krafts arbejde* kan skrives

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = E_{\text{pot},A} - E_{\text{pot},B}$$

Ændringen i arbejde er dermed

$$d\boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = -dE_{\text{pot}}$$

Tyngdekraften virker i z-aksens retning, og er dermed

$$\boldsymbol{F}_t = -mg\boldsymbol{e}_z \qquad [\mathrm{N}]$$

Tyngdekraften virker i z-aksens retning, og er dermed

$$\boldsymbol{F}_t = -mg\boldsymbol{e}_z \qquad \text{[N]}$$

Dermed ar arbejdet udført af $\boldsymbol{F}_t$

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F}_t \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B (0dx + 0dy - mgdz) = -mg\int_A^B dz$$

Tyngdekraften virker i z-aksens retning, og er dermed

$$\boldsymbol{F}_t = -mg\boldsymbol{e}_z \qquad \text{[N]}$$

Dermed ar arbejdet udført af $\boldsymbol{F}_t$

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F}_t \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B (0dx + 0dy - mgdz) = -mg\int_A^B dz$$

Det ses at arbejdet er uafhængig af vejen, og at arbejdet er nul, hvis punkterne A og B har samme z-koordinat.

En **centralkraft** er rettet mod et fast punkt og størrelsen af kraften afhænger kun af afstanden til punktet, dvs.

$$\boldsymbol{F} = F(r)\boldsymbol{e}_r$$

En **centralkraft** er rettet mod et fast punkt og størrelsen af kraften afhænger kun af afstanden til punktet, dvs.

$$\boldsymbol{F} = F(r)\boldsymbol{e}_r$$

Kraftens arbejde er ($d\boldsymbol{r} = dr\boldsymbol{e}_r + rd\theta\boldsymbol{e}_\theta$)

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B F(r)\boldsymbol{e}_r \cdot (dr\boldsymbol{e}_r + rd\theta\boldsymbol{e}_\theta)$$

Da $\boldsymbol{e}_\theta$ og $\boldsymbol{e}_r$ er ortogonale, får vi

$$W_{AB} = \int_A^B F(r)dr$$

Potentiel energi og energibevarelse

Eksempel: Er en centralkraft konservativ?

En **centralkraft** er rettet mod et fast punkt og størrelsen af kraften afhænger kun af afstanden til punktet, dvs.

$$\boldsymbol{F} = F(r)\boldsymbol{e}_r$$

Kraftens arbejde er ($d\boldsymbol{r} = dr\boldsymbol{e}_r + rd\theta\boldsymbol{e}_\theta$)

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_A^B F(r)\boldsymbol{e}_r \cdot (dr\boldsymbol{e}_r + rd\theta\boldsymbol{e}_\theta)$$

Da $\boldsymbol{e}_\theta$ og $\boldsymbol{e}_r$ er ortogonale, får vi

$$W_{AB} = \int_A^B F(r)dr$$

Dermed afhænger arbejdet kun af start- og slutværdien af r.

Ændringen af potentiel energi for en fjeder kan også bestemmes ud fra

$$\Delta E_{\text{pot}} = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

hvor $F(x)$ er givet fra Hooks lov som

$$F(x) = -kx$$

Ændringen af potentiel energi for en fjeder kan også bestemmes ud fra

$$\Delta E_{\text{pot}} = -\int_{x_i}^{x_f} F(x)dx$$

hvor $F(x)$ er givet fra Hooks lov som

$$F(x) = -kx$$

Vi definerer den potentielle energi til at være nul for $x = 0$. Da gælder

$$E_{\text{pot}}(x) = \frac{1}{2}kx^2$$

Hvis en partikel kun påvirkes af konservative kræfter, så kan arbejdet udtrykkes som

$$W_{AB} = E_{\text{kin},B} - E_{\text{kin},A} = E_{\text{pot},A} - E_{\text{pot},B} \qquad [\text{J}]$$

Potentiel energi og energibevarelse
Princippet om energibevarelse: Konservative kræfter

Hvis en partikel kun påvirkes af konservative kræfter, så kan arbejdet udtrykkes som

$$W_{AB} = E_{\text{kin},B} - E_{\text{kin},A} = E_{\text{pot},A} - E_{\text{pot},B} \qquad [\text{J}]$$

fra ovenstående ligning ses det at

$$E_{\text{kin},A} + E_{\text{pot},A} = E_{\text{kin},B} + E_{\text{pot},B} = E_T \qquad [\text{J}]$$

hvor E_T er den **totale mekaniske energi** [J].

Hvis en partikel kun påvirkes af både konservative kræfter $\boldsymbol{F}^K$ og ikke-konservative kræfter $\boldsymbol{F}^{iK}$, så kan arbejdet udtrykkes som

$$W_{AB} = \int_A^B \left(\boldsymbol{F}^K + \boldsymbol{F}^{iK}\right) \cdot d\boldsymbol{r} = E_{\mathsf{kin},B} - E_{\mathsf{kin},A} \qquad [\mathrm{J}]$$

Hvis en partikel kun påvirkes af både konservative kræfter $\boldsymbol{F}^K$ og ikke-konservative kræfter $\boldsymbol{F}^{iK}$, så kan arbejdet udtrykkes som

$$W_{AB} = \int_A^B \left(\boldsymbol{F}^K + \boldsymbol{F}^{iK}\right) \cdot d\boldsymbol{r} = E_{\text{kin},B} - E_{\text{kin},A} \qquad [\text{J}]$$

Arbejdet kan også udtrykkes

$$W_{AB} = W_{AB}^K + W_{AB}^{iK} = E_{\text{pot},A} - E_{\text{pot},B} + W_{AB}^{iK} \qquad [\text{J}]$$

Hvis en partikel kun påvirkes af både konservative kræfter $\boldsymbol{F}^K$ og ikke-konservative kræfter $\boldsymbol{F}^{iK}$, så kan arbejdet udtrykkes som

$$W_{AB} = \int_A^B \left(\boldsymbol{F}^K + \boldsymbol{F}^{iK}\right) \cdot d\boldsymbol{r} = E_{\text{kin},B} - E_{\text{kin},A} \qquad [\text{J}]$$

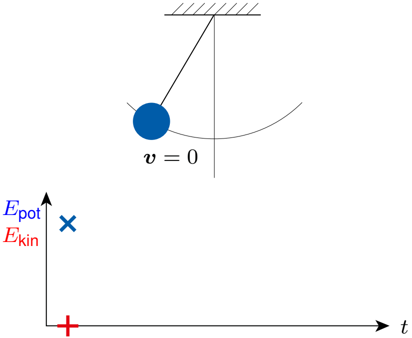
Arbejdet kan også udtrykkes

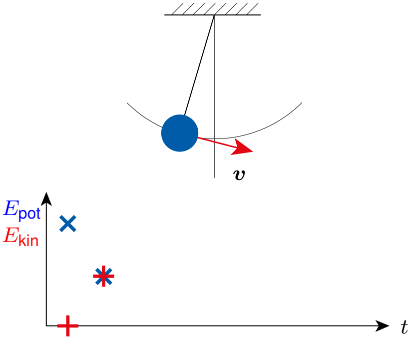
$$W_{AB} = W_{AB}^K + W_{AB}^{iK} = E_{\text{pot},A} - E_{\text{pot},B} + W_{AB}^{iK} \qquad [\text{J}]$$

Fra ovenstående ligning ses det at

$$E_{\text{kin},A} + E_{\text{pot},A} = E_{\text{kin},B} + E_{\text{pot},B} - W_{AB}^{iK} \qquad [\text{J}]$$

Da arbejdet af ikke-konservative kræfter W_{AB}^{iK} ofte er negativt, så vil den mekaniske energi mindskes.

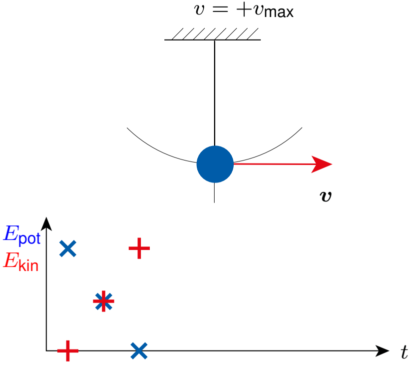

$\boldsymbol{v} = 0$
E_{pot}
E_{kin}
t



$\boldsymbol{v}$
E_{pot}
E_{kin}
t

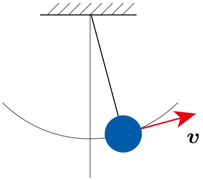
Potentiel energi og energibevarelse

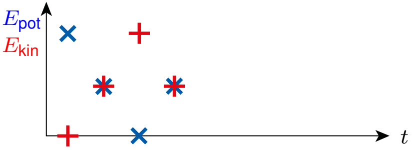
Eksempel: Bevarelse af mekanisk energi



Potentiel energi og energibevarelse

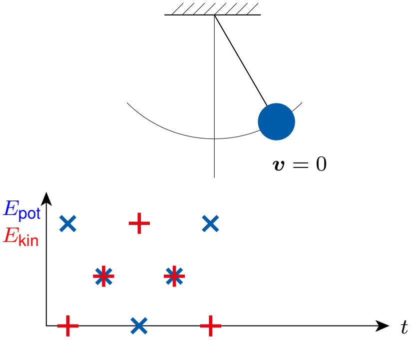
Eksempel: Bevarelse af mekanisk energi





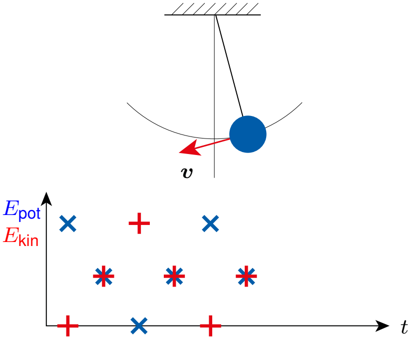
Potentiel energi og energibevarelse

Eksempel: Bevarelse af mekanisk energi



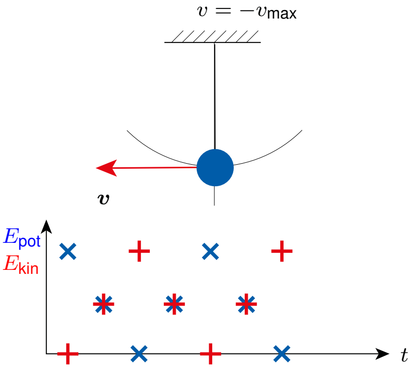
Potentiel energi og energibevarelse

Eksempel: Bevarelse af mekanisk energi



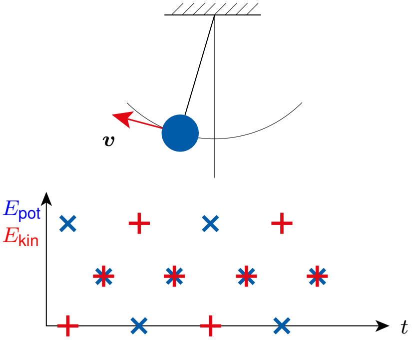
Potentiel energi og energibevarelse

Eksempel: Bevarelse af mekanisk energi



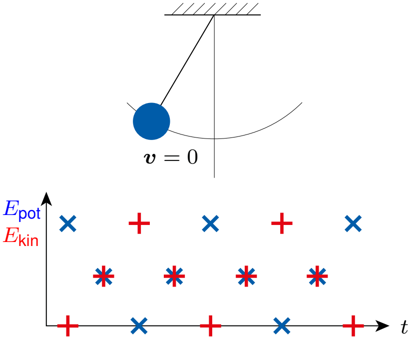
Potentiel energi og energibevarelse

Eksempel: Bevarelse af mekanisk energi



Potentiel energi og energibevarelse

Eksempel: Bevarelse af mekanisk energi



Partikelsystemer
Arbejdssætningen (I)

Vi betragter et partikelsystem beskrevet i to koordinatrammer

1. **L-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til Jorden
2. **C-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til massemidtpunktet af partikelsystemet

Partikelsystemer
Arbejdssætningen (I)

Vi betragter et partikelsystem beskrevet i to koordinatrammer

1. **L-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til Jorden
2. **C-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til massemidtpunktet af partikelsystemet

I C-Systemet er stedvektor $\boldsymbol{r}'$ og hastighedsvektor $\boldsymbol{v}'$. Det gælder således at

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i' = 0 \qquad \text{og} \quad \sum m_i \boldsymbol{v}_i' = 0$$

Vi betragter et partikelsystem beskrevet i to koordinatrammer

1. **L-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til Jorden
2. **C-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til massemidtpunktet af partikelsystemet

I C-Systemet er stedvektor $\boldsymbol{r}'$ og hastighedsvektor $\boldsymbol{v}'$. Det gælder således at

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i' = 0 \qquad \text{og} \; \sum m_i \boldsymbol{v}_i' = 0$$

Arbejdssætningen for den $i$te partikel giver

$$\Delta E_{\text{kin},i} = W_{\text{ext},i} + W_{\text{int},i}$$

hvor $W_{\text{ext},i}$ ($W_{\text{int},i}$) er arbejde udført på partikel i af eksterne (interne) kræfter.

Vi betragter et partikelsystem beskrevet i to koordinatrammer

1. **L-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til Jorden
2. **C-Systemet**: Koordinatramme der er fast i forhold til massemidtpunktet af partikelsystemet

I C-Systemet er stedvektor $\boldsymbol{r}'$ og hastighedsvektor $\boldsymbol{v}'$. Det gælder således at

$$\sum m_i \boldsymbol{r}_i' = 0 \qquad \text{og} \sum m_i \boldsymbol{v}_i' = 0$$

Arbejdssætningen for den $i$te partikel giver

$$\Delta E_{\text{kin},i} = W_{\text{ext},i} + W_{\text{int},i}$$

hvor $W_{\text{ext},i}$ ($W_{\text{int},i}$) er arbejde udført på partikel i af eksterne (interne) kræfter.

For partikelsystemet gælder således

$$\Delta E_{\text{kin}} = W_{\text{ext}} + W_{\text{int}}$$

Hvis partikelsystemet er et stiftlegeme, så vil de indbyrdes afstande være konstante, hvilket medfører at $W_{\text{int}} = 0$ J. Dermed vil ændringen i kinetisk energi være

$$\Delta E_{\text{kin}} = W_{\text{ext}} \qquad [\text{J}]$$

Hvis partikelsystemet er et stiftlegeme, så vil de indbyrdes afstande være konstante, hvilket medfører at $W_{\text{int}} = 0$ J. Dermed vil ændringen i kinetisk energi være

$$\Delta E_{\text{kin}} = W_{\text{ext}} \qquad [\text{J}]$$

Hvis både interne og eksterne kræfter er konservative, så gælder det at

$$W_{\text{ext}} + W_{\text{int}} = E_{\text{pot,ext},A} + E_{\text{pot,int},A} - E_{\text{pot,ext},B} - E_{\text{pot,int},B} \qquad [\text{J}]$$

Hastigheden af partikel i i L-Systemet kan skrives

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}'_i$$

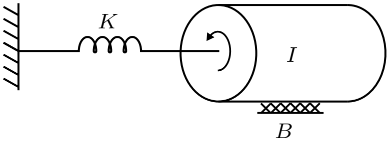
Hastigheden af partikel i i L-Systemet kan skrives

$$\boldsymbol{v}_i = \boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}'_i$$

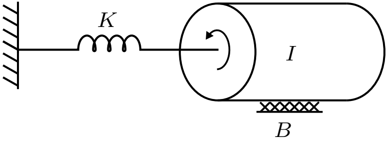
Den kinetiske energi af partikelsystemet udtrykt i L-Systemet er

$$\begin{aligned}
E_{\text{kin}} &= \sum_i \frac{1}{2} m_i (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}'_i) \cdot (\boldsymbol{v}_C + \boldsymbol{v}'_i) \\
&= \sum_i \frac{1}{2} m_i (v_C^2 + {v'_i}^2 + 2\boldsymbol{v}_C \cdot \boldsymbol{v}'_i) \\
&= \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i m_i v_C^2}_{E_{\text{kin,ext}}} + \underbrace{\sum_i \frac{1}{2} m_i {v'_i}^2}_{E_{\text{kin,int}}} + \boldsymbol{v}_C \cdot \underbrace{\sum_i m_i \boldsymbol{v}'_i}_{=\mathbf{0}}
\end{aligned}$$

Betragt følgende roterende dynamiske system.



Betragt følgende roterende dynamiske system.



Ved brug af impulsmomentsætningen kan følgende differentialligning opstilles

$$I\ddot{\theta} = -K\theta - B\dot{\theta} + \tau \qquad \text{[Nm]}$$

hvor τ er et moment, der påvirker inertien.

For at finde bevægelsen af systemet, kan der ses på hvordan θ forløber over tid. Følgende approksimation kan give trajektoriet for θ

$$\theta(t + \Delta t) \approx \theta(t) + \frac{d\theta}{dt}(t)\Delta t$$

For at finde bevægelsen af systemet, kan der ses på hvordan θ forløber over tid. Følgende approksimation kan give trajektoriet for θ

$$\theta(t + \Delta t) \approx \theta(t) + \frac{d\theta}{dt}(t)\Delta t$$

Samme fremgangsmåde kan anvendes på det mekaniske system!

For at finde bevægelsen af systemet, kan der ses på hvordan θ forløber over tid. Følgende approksimation kan give trajektoriet for θ

$$\theta(t+\Delta t) \approx \theta(t) + \frac{d\theta}{dt}(t)\Delta t$$

Samme fremgangsmåde kan anvendes på det mekaniske system!
Vi benytter følgende udtryk for ændringen i $(\theta, \dot{\theta})$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix}\theta(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\dot{\theta}(t)\\ -\frac{K}{I}\theta - \frac{B}{I}\dot{\theta}(t) + \frac{1}{I}\tau(t)\end{bmatrix}$$

til at opskrive

$$\begin{bmatrix}\theta(t+\Delta t)\\ \dot{\theta}(t+\Delta t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\theta(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dot{\theta}(t)\\ -\frac{K}{I}\theta - \frac{B}{I}\dot{\theta}(t) + \tau(t)\end{bmatrix}\Delta t$$

For at simplificere notationen, så defineres

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \theta(t) \\
\theta_1 &= \theta(t + \Delta t) \\
\vdots &= \vdots \\
\theta_i &= \theta(t + i\Delta t)
\end{aligned}$$

For at simplificere notationen, så defineres

$$\begin{aligned}\theta_0 &= \theta(t)\\ \theta_1 &= \theta(t+\Delta t)\\ \vdots &= \vdots\\ \theta_i &= \theta(t+i\Delta t)\end{aligned}$$

Dermed kan udtrykket

$$\begin{bmatrix}\theta(t+\Delta t)\\ \dot{\theta}(t+\Delta t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\theta(t)\\ \dot{\theta}(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\dot{\theta}(t)\\ -\frac{K}{I}\theta - \frac{B}{I}\dot{\theta}(t) + \tau(t)\end{bmatrix}\Delta t$$

skrives som

$$\begin{bmatrix}\theta_{k+1}\\ \dot{\theta}_{k+1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & \Delta t\\ -\frac{K\Delta t}{I} & 1-\frac{B\Delta t}{I}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\theta_k\\ \dot{\theta}_k\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ \frac{\Delta t}{I}\end{bmatrix}\tau$$

Når et system skal simuleres i MATLAB, så skal det omskrives til et **system af 1. ordens differentialligninger**.

Eksempel
Denne 2. ordens differentialligning

$$ma = -kx - sign(v)\alpha v^2 + F$$

kan skrives som en anden ordens differentialligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \mathrm{sign}(v)\frac{\alpha}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{m}F$$

Når et system skal simuleres i MATLAB, så skal det omskrives til et **system af 1. ordens differentialligninger**.

Eksempel
Denne 2. ordens differentialligning

$$ma = -kx - sign(v)\alpha v^2 + F$$

kan skrives som en anden ordens differentialligning

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x - \mathrm{sign}(v)\frac{\alpha}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{m}F$$

Hvordan findes $x(t)$ ud fra differentialligningen?

Differentialligningen

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x - sign(\dot{x})\frac{\alpha}{m}\dot{x}^2 + \frac{1}{m}F$$

kan omskrives til to første ordens differentialligninger

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v \\ -\frac{k}{m}x - \mathrm{sign}(v)\frac{\alpha}{m}v^2 + \frac{1}{m}F \end{bmatrix}$$

hvor $a = \ddot{x}$ og $v = \dot{x}$.

```
function dxi = vectorField(t,xi,u,param)
    F = interp1(u(:,1),u(:,2),t); % determine u by linear interpolation
    x = xi(1);
    v = xi(2);
    m = param.m;
    k = param.k;
    alpha = param.alpha;
    dxi = [v;
        -k/m*x-sign(v)*alpha/m*v^2+1/m*F];
end
```

Opsummering

Arbejde W er energi overført til eller fra et objekt via en kraft, der virker på objektet. Energi der overføres til objektet er positivt arbejde og energi der overføres fra objektet er negativ energi.
Arbejdet udført på en partikel af en kraft $\boldsymbol{F}$, når partiklen bevæger sig fra A til B er

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \qquad \text{[J]}$$

Kræfternes arbejde på en partikel er lig tilvæksten i partiklens kinetiske energi, dvs.

$$W_{AB} = \Delta E_{\text{kin}} = E_{\text{kin},B} - E_{\text{kin},A} \qquad [\text{J}]$$

hvor E_{kin} er den kinetiske energi [J].

Det resulterende arbejde udført af en konservativ kraft på en partikel der bevæger sig gennem enhver lukket bane er nul.

En *konservativ krafts arbejde* kan skrives

$$W_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = E_{\text{pot},A} - E_{\text{pot},B}$$

Hvis en partikel kun påvirkes af *konservative kræfter*, så gælder følgende

$$E_{\text{kin},A} + E_{\text{pot},A} = E_{\text{kin},B} + E_{\text{pot},B} = E_T \qquad [\text{J}]$$

hvor E_T er den **totale mekaniske energi** [J].

Hvis en partikel påvirkes af både konservative kræfter og ikke-konservative kræfter, så gælder følgende

$$E_{\text{kin},A} + E_{\text{pot},A} = E_{\text{kin},B} + E_{\text{pot},B} - W_{AB}^{iK} \qquad [\text{J}]$$