Lektion 9: Svingninger

Modellering af elektromekaniske systemer

Christoffer Sloth

chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics
Mærsk Mc-Kinney Møller Instituttet
Syddansk Universitet

Dagsorden

Introduktion

Svingninger

- Simpel harmonisk bevægelse
- Dæmpet simpel harmonisk bevægelse
- Tvunget harmonisk bevægelse

Frekvensdomæne-beskrivelse af svingninger

Opsummering

Viden[1]

Den studerende skal kunne:

- forklare den grundlæggende fysiks love og begreber
- beskrive et elektromekanisk system ved hjælp af systemets parametre
- redegøre for virkemåden af børstede og børsteløse DC motorer
- opstille overføringsfunktioner for lineære systemer

Færdigheder

Den studerende skal kunne:

- udføre fritlegemeanalyse på et mekanisk system
- anvende Newtons 3 love til modellering af mekaniske systemer
- anvende Lagrange D'Alemberts princip til modellering af mekaniske systemer
- opstille differentialligninger, der beskriver et elektromekanisk systems bevægelse
- fortolke lineære systemers bevægelse i frekvensdomæne
- modellere og simulere simple serielle manipulatorer

Kompetencer

Den studerende skal kunne:

- simulere elektromekaniske systemer og fortolke deres bevægelse

[1] Basseret på https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=46418&listid=5027&lang=da

Introduktion

Oversigt over lektioner

- **Lektion 1**: Bevægelse i flere dimensioner
- **Lektion 2**: Kræfter og bevægelse
- **Lektion 3**: Analyse i frekvensdomæne
- **Lektion 4**: Arbejde og energi
- **Lektion 5**: Impulsmoment og stød
- **Lektion 6**: Relativ bevægelse og fiktive kræfter
- **Lektion 7**: Plan bevægelse af stive legemer
- **Lektion 8**: Almen bevægelse af stive legemer
- **Lektion 9**: Svingninger
- **Lektion 10**: DC motoren
- **Lektion 11**: Modellering af robotarm
- **Lektion 12**: Simulering af mekaniske systemer

Vi betragter systemer med periodiske bevægelser, dvs. bevægelsen gentages hver T sekund

$$T = \frac{1}{f} \qquad \text{[s]}$$

hvor T er periodetiden [s] og f er frekvensen [Hz].

Vi betragter systemer med periodiske bevægelser, dvs. bevægelsen gentages hver T sekund

$$T = \frac{1}{f} \qquad \text{[s]}$$

hvor T er periodetiden [s] og f er frekvensen [Hz].

Fra periodetiden kan vinkelfrekvensen ω_0 udregnes fra relationen $T\omega_0 = 2\pi$, dvs.

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad \text{[rad/s]}$$

Simpel harmonisk bevægelse

En partikel siges at have en ***simpel harmonisk bevægelse***, hvis dens position er givet som

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

hvor A er amplituden, ω_0 er vinkelfrekvensen [rad/s] og ϕ er fasekonstanten [rad].

En simpel harmonisk bevægelse

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

har en hastighed

$$v(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

En simpel harmonisk bevægelse

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

har en hastighed

$$v(t) = -\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \phi)$$

og en acceleration

$$a(t) = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x(t)$$

Simpel harmonisk bevægelse

Hastighed og acceleration

En simpel harmonisk bevægelse

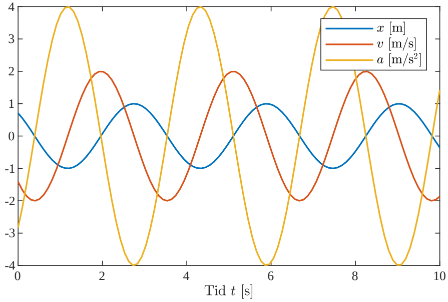
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

har en hastighed

$$v(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t + \phi)$$

og en acceleration

$$a(t) = -\omega_0^2 A\cos(\omega_0 t + \phi) = -\omega_0^2 x(t)$$



Simpel harmonisk bevægelse

Translatorisk mekanisk system

Fra Newtons 2. lov haves (når $a(t) = -\omega_0^2 x(t)$)

$$F(t) = ma(t) = -m\omega_0^2 x(t) \qquad \text{[N]}$$

Denne ligning er på samme form som Hooks lov

$$F(t) = -kx(t) \qquad \text{[N]}$$

hvor $k = m\omega_0^2$.

Simpel harmonisk bevægelse
Translatorisk mekanisk system

Fra Newtons 2. lov haves (når $a(t) = -\omega_0^2 x(t)$)

$$F(t) = ma(t) = -m\omega_0^2 x(t) \qquad \text{[N]}$$

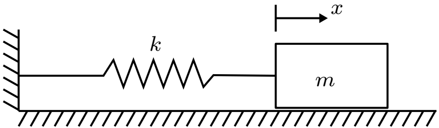
Denne ligning er på samme form som Hooks lov

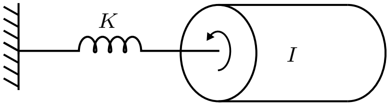
$$F(t) = -kx(t) \qquad \text{[N]}$$

hvor $k = m\omega_0^2$.

Dermed bliver vinkelfrekvensen for svingningen

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{[rad/s]}$$





Ovenstående masse-fjeder system har dynamik givet ved

$$m\ddot{x} = -kx \qquad [\mathrm{N}]$$

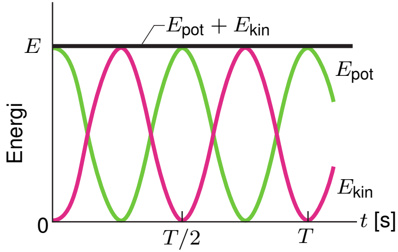
hvor m er massen [kg], k er stivheden [N/m].

Ovenstående roterende masse-fjeder system har dynamik givet ved

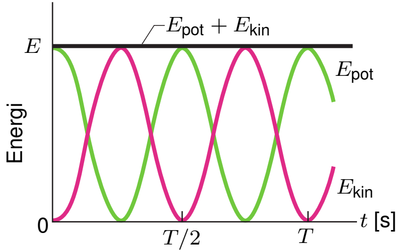
$$I\ddot{\theta} = -K\theta \qquad [\mathrm{Nm}]$$

hvor I er inertimomentet [kgm^2], K er stivheden [N/rad].

Den samlede energi for et system, der har en harmonisk svingning er konstant.



Den samlede energi for et system, der har en harmonisk svingning er konstant.



Den totale energi for et masse-fjeder system er

$$
\begin{aligned}
E &= E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} \\
&= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad [\text{J}]
\end{aligned}
$$

Simpel harmonisk bevægelse
Energi (II)

For en simpel harmonisk svingning ($x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$) er den totale energi

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}k(A\cos(\omega_0 t + \phi))^2 + \frac{1}{2}m(-\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \phi))^2 \\ &= \frac{1}{2}A^2\left(k\cos^2(\omega_0 t + \phi) + m\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \phi)\right) \end{aligned}$$

For en simpel harmonisk svingning ($x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$) er den totale energi

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}k(A\cos(\omega_0 t + \phi))^2 + \frac{1}{2}m(-\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \phi))^2 \\ &= \frac{1}{2}A^2\left(k\cos^2(\omega_0 t + \phi) + m\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \phi)\right) \end{aligned}$$

Da $\omega_0^2 = k/m$ fås

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \qquad \text{[J]}$$

For en simpel harmonisk svingning ($x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$) er den totale energi

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}k(A\cos(\omega_0 t + \phi))^2 + \frac{1}{2}m(-\omega_0 A\sin(\omega_0 t + \phi))^2 \\ &= \frac{1}{2}A^2\left(k\cos^2(\omega_0 t + \phi) + m\omega_0^2\sin^2(\omega_0 t + \phi)\right) \end{aligned}$$

Da $\omega_0^2 = k/m$ fås

$$E = \frac{1}{2}m\omega_0^2 A^2 \qquad [\text{J}]$$

Heraf ses det at den totale energi E er konstant.

En bevægelsesligning på formen

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\Phi z$$

hvor $\Phi \in \mathbb{R}_+$ har en løsning der er en *simpel harmonisk bevægelse*

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

med vinkelfrekvens og svingningstid

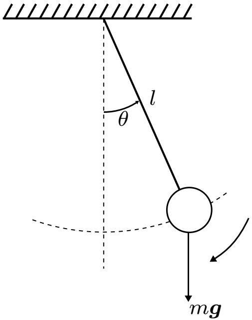
$$\omega_0 = \sqrt{\Phi} \qquad \text{og} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\Phi}}$$

Antag at vinklen θ er meget lille, så $\sin\theta \approx \theta$.
Bevægelsen langs tangent retningen fås via Newtons 2. lov til

$$ma_T = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -mg\theta$$

Denne differentialligning kan skrives

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{l}\theta$$



Simpel harmonisk bevægelse

Eksempel: Pendul (I)

Antag at vinklen θ er meget lille, så $\sin\theta \approx \theta$.
Bevægelsen langs tangent retningen fås via Newtons 2. lov til

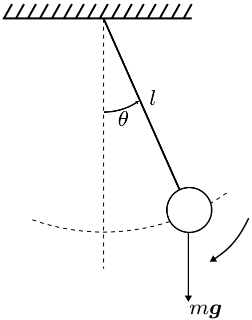
$$ma_T = ml\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -mg\theta$$

Denne differentialligning kan skrives

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{g}{l}\theta$$

Løsningen er en harmonisk svingning med vinkelfrekvens og svingningstid

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} \qquad \text{og} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

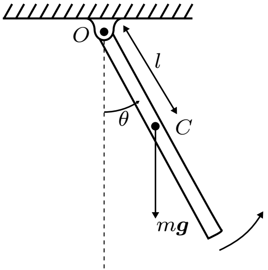


Antag at vinklen θ er meget lille, så $\sin\theta \approx \theta$. Bevægelsen om punktet O via impulsmoment-sætningen til

$$I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} =\approx -mgl\theta$$

Denne differentialligning kan skrives

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{mgl}{I_O}\theta$$

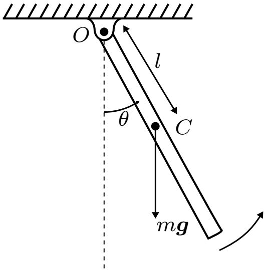


Antag at vinklen θ er meget lille, så $\sin\theta \approx \theta$. Bevægelsen om punktet O via impulsmoment-sætningen til

$$I_O \frac{d^2\theta}{dt^2} =\approx -mgl\theta$$

Denne differentialligning kan skrives

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} \approx -\frac{mgl}{I_O}\theta$$



Løsningen er en harmonisk svingning med vinkelfrekvens og svingningstid

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I_O}} \qquad \text{og} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{mgl}}$$

Dæmpet simpel harmonisk bevægelse

Definition

Tilføjes der en dæmpning til den tidligere beskrevne harmoniske bevægelse, så kaldes den en ***dæmpet simpel harmonisk bevægelse***.

Dæmpet simpel harmonisk bevægelse
Definition

Tilføjes der en dæmpning til den tidligere beskrevne harmoniske bevægelse, så kaldes den en ***dæmpet simpel harmonisk bevægelse***.

Vi har set ligningen for sådan en bevægelse flere gange

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

Tilføjes der en dæmpning til den tidligere beskrevne harmoniske bevægelse, så kaldes den en ***dæmpet simpel harmonisk bevægelse***.

Vi har set ligningen for sådan en bevægelse flere gange

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$

Ovenstående differentialligning kan også skrives ($\gamma = b/m$ og $\omega_0^2 = k/m$)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

som har en karakterligning med rødderne

$$R = -\frac{\gamma}{2} \pm j\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{4}}}_{=\omega_d}$$

Dæmpet simpel harmonisk bevægelse

Løsninger til 2. ordens differentialligning

Differentialligningen

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

har tre typer løsninger

1. **Dæmpet svingning:** Når $\omega_0^2 > \gamma^2/4$ (underdæmpet)
2. **Aperiodisk grænsetilfælde:** Når $\omega_0^2 = \gamma^2/4$ (kritisk dæmpet)
3. **Aperiodisk svingning:** Når $\omega_0^2 < \gamma^2/4$ (overdæmpet)

Dæmpet simpel harmonisk bevægelse

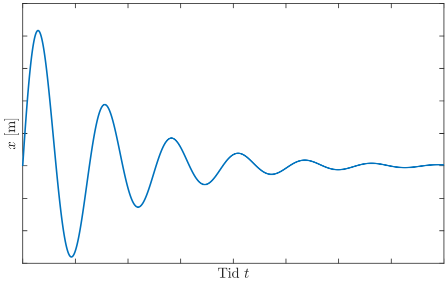
Dæmpet svingning (I)

Løsningen til differentialligningen

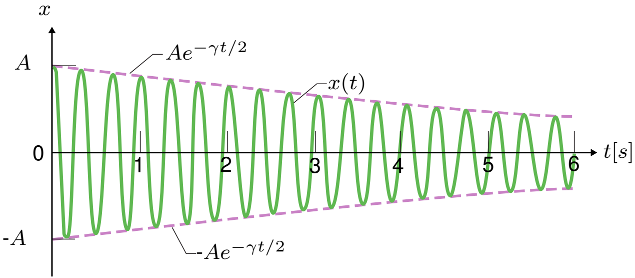
$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

når $\omega_0^2 > \gamma^2/4$ er

$$x(t) = A e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_d t + \phi)$$



Frekvensen af svingningen er ω_d, mens amplituden falder eksponentielt med eksponent $-\gamma/2$.

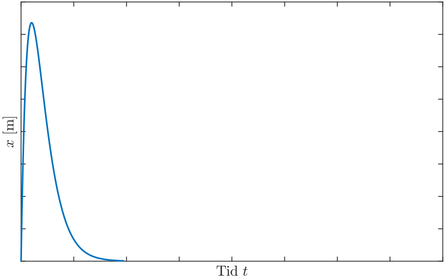


Løsningen til differentialligningen

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

når $\omega_0^2 = \gamma^2/4$ er

$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2} + Bte^{-\gamma t/2}$$

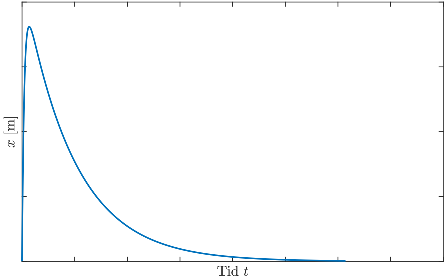


Løsningen til differentialligningen

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

når $\omega_0^2 < \gamma^2/4$ er

$$x(t) = Ae^{t\left(-\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\right)} + Be^{t\left(-\frac{\gamma}{2}-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\right)}$$



Den homogene differentialligning

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

har tre typer løsninger

1. **Dæmpet svingning:** Når $\omega_0^2 > \gamma^2/4$ (underdæmpet)

$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega_d t + \phi)$$

2. **Aperiodisk grænsetilfælde:** Når $\omega_0^2 = \gamma^2/4$ (kritisk dæmpet)

$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2} + Bte^{-\gamma t/2}$$

3. **Aperiodisk svingning:** Når $\omega_0^2 < \gamma^2/4$ (overdæmpet)

$$x(t) = Ae^{t\left(-\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\right)} + Be^{t\left(-\frac{\gamma}{2}-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\right)}$$

Tvunget harmonisk bevægelse

Tvunget harmonisk bevægelse
Definition

En kraft kan påvirke et system, og dermed fremtvinge en svingning. For en dæmpet simpel harmonisk svingning kan dette udtrykkes således

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F$$

hvor $F = F_0 \cos(\omega_t t)$ er en ekstern kraft med vinkelfrekvens ω_t.

En kraft kan påvirke et system, og dermed fremtvinge en svingning. For en dæmpet simpel harmonisk svingning kan dette udtrykkes således

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F$$

hvor $F = F_0 \cos(\omega_t t)$ er en ekstern kraft med vinkelfrekvens ω_t.

Ovenstående differentialligning kan også skrives ($\gamma = b/m$ og $\omega_0^2 = k/m$)

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_t t)$$

Løsningen til bevægelsesligningen

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_t t)$$

er

$$x(t) = A_0\cos(\omega_t t - \alpha) + Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega_d t + \phi)$$

hvor

$$A_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_t^2)^2 + \gamma^2\omega_t^2}} \qquad \text{og} \qquad \tan\alpha = \frac{\gamma\omega_t}{\omega_0^2 - \omega_t^2}$$

Løsningens to led er dominerende på forskellige tidspunkter

$$x(t) = \underbrace{A_0 \cos(\omega_t t - \alpha)}_{\text{Stationær bevægelse}} + \underbrace{A e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_d t + \phi)}_{\text{Transient bevægelse}}$$

Løsningens to led er dominerende på forskellige tidspunkter

$$x(t) = \underbrace{A_0 \cos(\omega_t t - \alpha)}_{\text{Stationær bevægelse}} + \underbrace{Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega_d t + \phi)}_{\text{Transient bevægelse}}$$

I starten ($t = 0$ s) kan den transiente bevægelse have en stor amplitude, men denne vil mindskes eksponentielt (hvis $\gamma > 0$).

Løsningens to led er dominerende på forskellige tidspunkter

$$x(t) = \underbrace{A_0 \cos(\omega_t t - \alpha)}_{\text{Stationær bevægelse}} + \underbrace{A e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_d t + \phi)}_{\text{Transient bevægelse}}$$

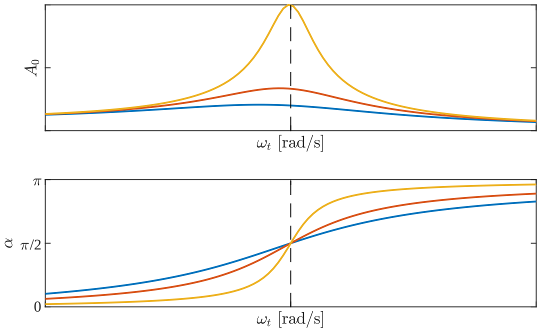
I starten ($t = 0$ s) kan den transiente bevægelse have en stor amplitude, men denne vil mindskes eksponentielt (hvis $\gamma > 0$). Når tiden t er stor er

$$x(t) \approx A_0 \cos(\omega_t t - \alpha)$$

Amplituden og fasen for løsningen

$$x(t) = A_0 \cos(\omega_t t - \alpha) + Ae^{-\gamma t/2} \cos(\omega_d t + \phi)$$

afhænger at inputtets vinkelfrekvens ω_t.



Det ses at størrelsen på A_0 afhænger af ω_t, og at denne er maksimal for

$$\omega_{t,r} = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}} \qquad \text{[rad/s]}$$

Denne frekvens kaldes **resonansfrekvensen**.

En bevægelsesligning på formen

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\Phi z$$

hvor $\Phi \in \mathbb{R}_+$ har en løsning der er en *simpel harmonisk bevægelse*

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

med vinkelfrekvens og svingningstid

$$\omega_0 = \sqrt{\Phi} \qquad \text{og} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\Phi}}$$

Laplace transformation af

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\Phi z$$

giver

$$s^2 Z(s) - sz(0) - \frac{dz}{dt}(0) = -\Phi Z(s)$$

Laplace transformation af

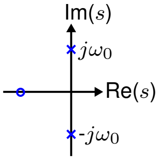
$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\Phi z$$

giver

$$s^2Z(s) - sz(0) - \frac{dz}{dt}(0) = -\Phi Z(s)$$

Dette medfører ($\Phi = \omega_0^2$)

$$Z(s) = \frac{sz(0) + \frac{dz}{dt}(0)}{s^2 + \omega_0^2}$$



Laplace transformation af

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\Phi z$$

giver

$$s^2Z(s) - sz(0) - \frac{dz}{dt}(0) = -\Phi Z(s)$$

Dette medfører ($\Phi = \omega_0^2$)

$$Z(s) = \frac{sz(0) + \frac{dz}{dt}(0)}{s^2 + \omega_0^2}$$

Frekvensdomæne-beskrivelse af svingninger

Simpel harmonisk bevægelse

Laplace transformation af

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\Phi z$$

giver

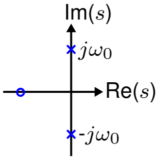
$$s^2 Z(s) - s z(0) - \frac{dz}{dt}(0) = -\Phi Z(s)$$

Dette medfører ($\Phi = \omega_0^2$)

$$Z(s) = \frac{s z(0) + \frac{dz}{dt}(0)}{s^2 + \omega_0^2}$$

Ved invers Laplace transformation fås

$$z(t) = z(0)\cos(\omega_0 t) + \frac{\frac{dz}{dt}(0)}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$$



$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$

Frekvensdomæne-beskrivelse af svingninger

Dæmpet simpel harmonisk bevægelse

Den Laplace transformerede af den homogene differentialligning

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

er

$$X(s) = \frac{sx(0) + \frac{dx}{dt}(0) + \gamma x(0)}{s^2 + \gamma s + \omega_0^2}$$

Overføringsfunktionen har tre typer løsninger

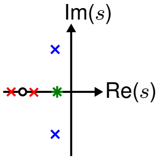
1. **Dæmpet svingning:** Når de to poler er komplekse $p_1 = p_2^*$ (underdæmpet)
$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega_d t + \phi)$$
2. **Aperiodisk grænsetilfælde:** Når de to poler er ens $p_1 = p_2$ (kritisk dæmpet)
$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2} + Bte^{-\gamma t/2}$$
3. **Aperiodisk svingning:** Når de to poler er reelle og forskellige $p_1 \neq p_2$ (overdæmpet)
$$x(t) = Ae^{t\left(-\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\right)} + Be^{t\left(-\frac{\gamma}{2}-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\right)}$$

Betragt følgende overføringsfunktion og antag at de to poler er reelle og forskellige $p_1 \neq p_2$ (rød)

$$X(s) = \frac{sx(0) + \frac{dx}{dt}(0) + \gamma x(0)}{s^2 + \gamma s + \omega_0^2}$$

Betragt følgende overføringsfunktion og antag at de to poler er reelle og forskellige $p_1 \neq p_2$ (rød)

$$X(s) = \frac{sx(0) + \frac{dx}{dt}(0) + \gamma x(0)}{s^2 + \gamma s + \omega_0^2}$$



Lad $a = \frac{\gamma}{2} + \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$, $b = \frac{\gamma}{2} - \sqrt{\frac{\gamma^2}{4} - \omega_0^2}$ og $\alpha = \frac{dx}{dt}(0) + \gamma x(0)$ så haves

$$X(s) = \frac{sx(0) + \alpha}{(s+a)(s+b)}$$

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
$e^{-at} - e^{-bt}$	$\frac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
$be^{-bt} - ae^{-at}$	$\frac{(b-a)s}{(s+a)(s+b)}$
te^{-at}	$\frac{1}{(s+a)^2}$
$(1-at)e^{-at}$	$\frac{s}{(s+a)^2}$

Ved invers Laplace transformation fås

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x(0)}{b-a}(be^{-bt} - ae^{-at}) + \frac{\alpha}{b-a}(e^{-at} - e^{-bt}) \\ &= \frac{\alpha - ax(0)}{b-a}e^{-at} + \frac{bx(0) - \alpha}{b-a}e^{-bt} \end{aligned}$$

Vi tager udgangspunkt i eksemplet

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 15y = 2\sin(3t), \qquad q(0) = -1,\ \dot{y}(0) = -4$$

Vi tager udgangspunkt i eksemplet

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 15y = 2\sin(3t), \qquad q(0) = -1,\ \dot{y}(0) = -4$$

Ved Laplace transformation fås

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 15Y(s) = 2\frac{3}{s^2+9}$$

der kan skrives

$$Y(s) = \frac{-s^3 + 2s^2 - 9s + 24}{(s^2 - 6s + 15)(s^2 + 9)}$$

Vi tager udgangspunkt i eksemplet

$$\ddot{y} - 6\dot{y} + 15y = 2\sin(3t), \qquad q(0) = -1,\ \dot{y}(0) = -4$$

Ved Laplace transformation fås

$$s^2Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0) - 6(sY(s) - y(0)) + 15Y(s) = 2\frac{3}{s^2+9}$$

der kan skrives

$$Y(s) = \frac{-s^3 + 2s^2 - 9s + 24}{(s^2 - 6s + 15)(s^2 + 9)}$$

Ved partialbrøksopløsning fås

$$Y(s) = \frac{As + B}{s^2 + 9} + \frac{Cs + D}{s^2 - 6s + 15}$$

der giver koefficienter $A = 1/10$, $B = 1/10$, $C = -11/10$, $D = 5/2$.

Ved partialbrøksopløsning fås

$$Y(s) = \frac{As + B}{s^2 + 9} + \frac{Cs + D}{s^2 - 6s + 15}$$

der giver koefficienter $A = 1/10$, $B = 1/10$, $C = -11/10$, $D = 5/2$.
Dette giver

$$Y(s) = \frac{1}{10}\left(\frac{s}{s^2 + 9} + \frac{1}{s^2 + 9} - \frac{11(s-3)}{(s-3)^2 + 6} - \frac{8}{(s-3)^2 + 6}\right)$$

og ved invers Laplace transformation

$$y(t) = \frac{1}{10}\left(\cos(3t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - 11e^{3t}\cos(\sqrt{6}t) - \frac{8}{\sqrt{6}}e^{3t}\sin(\sqrt{6}t)\right)$$

En bevægelsesligning på formen

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\Phi z$$

hvor $\Phi \in \mathbb{R}_+$ har en løsning der er en *simpel harmonisk bevægelse*

$$z(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

med vinkelfrekvens og svingningstid

$$\omega_0 = \sqrt{\Phi} \qquad \text{og} \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{1}{\Phi}}$$

Den homogene differentialligning

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

har tre typer løsninger

1. **Dæmpet svingning:** Når $\omega_0^2 > \gamma^2/4$ (underdæmpet)

$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2}\cos(\omega_d t + \phi)$$

2. **Aperiodisk grænsetilfælde:** Når $\omega_0^2 = \gamma^2/4$ (kritisk dæmpet)

$$x(t) = Ae^{-\gamma t/2} + Bte^{-\gamma t/2}$$

3. **Aperiodisk svingning:** Når $\omega_0^2 < \gamma^2/4$ (overdæmpet)

$$x(t) = Ae^{t\left(-\frac{\gamma}{2}+\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\right)} + Be^{t\left(-\frac{\gamma}{2}-\sqrt{\frac{\gamma^2}{4}-\omega_0^2}\right)}$$

Opsummering
Tvunget harmonisk svingning

En kraft kan påvirke et system, og dermed fremtvinge en svingning. For en dæmpet simpel harmonisk svingning kan dette udtrykkes således

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega_t t)$$

hvor $F = F_0 \cos(\omega_t t)$ er en ekstern kraft med vinkelfrekvens ω_t.

Løsningen til bevægelsesligningen er

$$x(t) = \underbrace{A_0 \cos(\omega_t t - \alpha)}_{\text{Stationær bevægelse}} + \underbrace{A e^{-\gamma t/2} \cos(\omega_d t + \phi)}_{\text{Transient bevægelse}}$$

hvor

$$A_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_t^2)^2 + \gamma^2 \omega_t^2}} \qquad \text{og} \qquad \tan\alpha = \frac{\gamma \omega_t}{\omega_0^2 - \omega_t^2}$$