

# Lektion 2: Laplacetransformation

Modellering af elektromekaniske systemer

Multivariable Mathematics in Robotics

**Christoffer Sloth**

chsl@mmmi.sdu.dk

SDU Robotics

Mærsk Mc-Kinney Møller Institutet  
Syddansk Universitet



Introduktion

Lineære tidsinvariante systemer

Egenskaber

Respons af lineære systemer

Laplacetransformation

Overføringsfunktion

Frekvensrespons

Egenskaber

Invers Laplacetransformation

Bestemmelse af udgangssignal ved partialbrøksopspaltning

Opsummering



### Viden<sup>1</sup>

Den studerende skal kunne:

- ▶ forklare den grundlæggende fysiks love og begreber
- ▶ beskrive et elektromekanisk system ved hjælp af systemets parametre
- ▶ redegøre for virkemåden af børstede og børsteløse DC motorer
- ▶ **opstille overføringsfunktioner for lineære systemer**

### Færdigheder

Den studerende skal kunne:

- ▶ udføre fritlegemeanalyse på et mekanisk system
- ▶ anvende Newtons 3 love til modellering af mekaniske systemer
- ▶ anvende Lagrange D'Alemberts princip til modellering af mekaniske systemer
- ▶ opstille differentiaalligninger, der beskriver et elektromekanisk systems bevægelse
- ▶ **fortolke lineære systemers bevægelse i frekvensdomæne**
- ▶ modellere og simulere simple serielle manipulatorer

### Kompetencer

Den studerende skal kunne:

- ▶ simulere elektromekaniske systemer og fortolke deres bevægelse

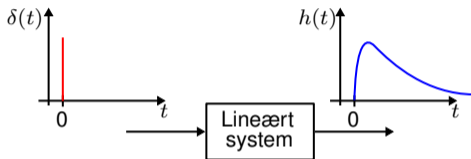
<sup>1</sup> Baseret på <https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=46418&listid=5027&lang=da>



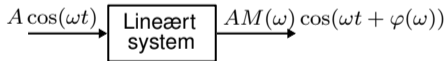
- ▶ **Lektion 1:** Fourierrækker og Fouriertransformation
- ▶ **Lektion 2:** Laplace transformation
- ▶ **Lektion 3:** Kræfter og bevægelse
- ▶ **Lektion 4:** Arbejde og energi
- ▶ **Lektion 5:** Impulsmoment og stød
- ▶ **Lektion 6:** Relativ bevægelse og fiktive kræfter
- ▶ **Lektion 7:** Plan bevægelse af stive legemer
- ▶ **Lektion 8:** Almen bevægelse af stive legemer
- ▶ **Lektion 9:** Svingninger
- ▶ **Lektion 10:** DC motoren
- ▶ **Lektion 11:** Modelling af robotarm
- ▶ **Lektion 12:** Simulering af mekaniske systemer



## Impulsrespons



## Frekvensrespons



# Lineære tidsinvariante systemer



Introduktion

Lineære tidsinvariante systemer

Egenskaber

Respons af lineære systemer

Laplacetransformation

Overføringsfunktion

Frekvensrespons

Egenskaber

Invers Laplacetransformation

Bestemmelse af udgangssignal ved partialbrøksopspaltning

Opsummering



Introduktion

Lineære tidsinvariante systemer

Egenskaber

Respons af lineære systemer

Laplacetransformation

Overføringsfunktion

Frekvensrespons

Egenskaber

Invers Laplacetransformation

Bestemmelse af udgangssignal ved partialbrøksopspaltning

Opsummering

# Lineære tidsinvariante systemer

Lineær afbildning



Afbildningen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  siges at være **lineær** hvis følgende betingelser er opfyldt for enhver  $x, y \in \mathbb{R}^n$  og  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

Superposition

Homogenitet

# Lineære tidsinvariante systemer

Lineær afbildning



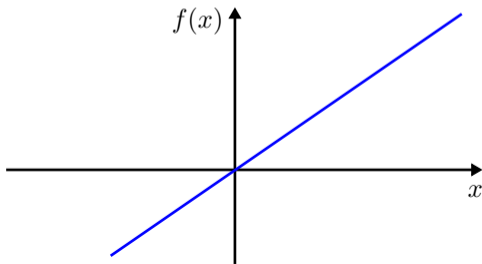
Afbildningen  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  siges at være **lineær** hvis følgende betingelser er opfyldt for enhver  $x, y \in \mathbb{R}^n$  og  $\alpha \in \mathbb{R}$

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

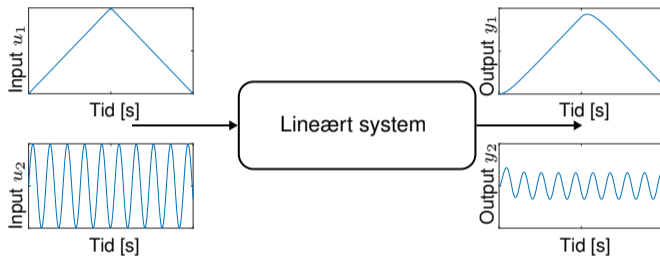
Superposition

Homogenitet



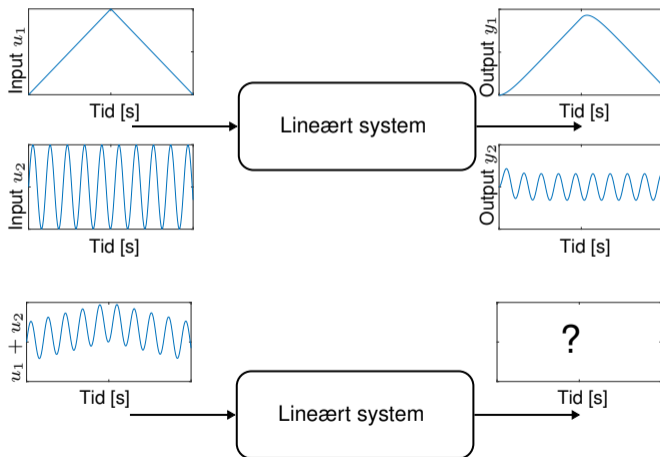
# Lineære tidsinvariante systemer

Lineært system



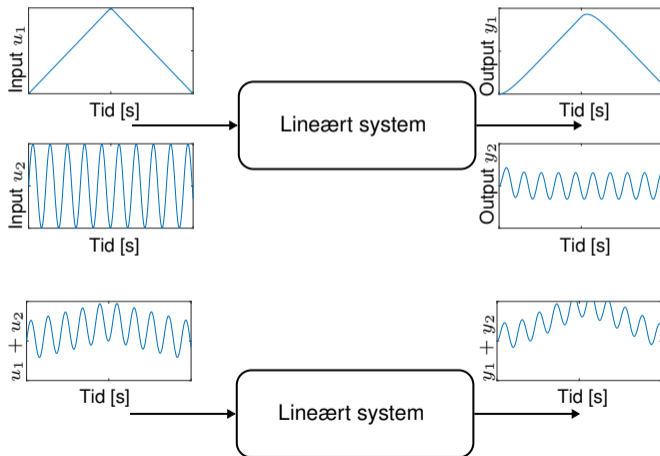
# Lineære tidsinvariante systemer

Lineært system



# Lineære tidsinvariante systemer

Lineært system



# Lineære tidsinvariante systemer

Tidsinvariant system



Lad  $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  definere input-output opførslen af en system model  $\Sigma$ . Systemet  $\Sigma$  er ***tids-invariant*** hvis følgende betingelser er opfyldt for ethvert indgangssignal  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  og enhver forsinkelse  $\tau \in \mathbb{R}$

$$y(t - \tau) = \sigma(t, u(t - \tau))$$

for alle tider  $t \in \mathbb{R}$ , hvor  $y$  betegner udgangssignal for systemet.

# Lineære tidsinvariante systemer

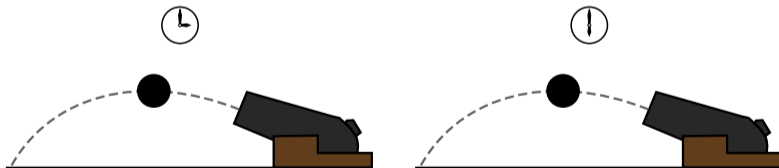
## Tidsinvariant system



Lad  $\sigma : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  definere input-output opførslen af en system model  $\Sigma$ . Systemet  $\Sigma$  er **tids-invariant** hvis følgende betingelser er opfyldt for ethvert indgangssignal  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$  og enhver forsinkelse  $\tau \in \mathbb{R}$

$$y(t - \tau) = \sigma(t, u(t - \tau))$$

for alle tider  $t \in \mathbb{R}$ , hvor  $y$  betegner udgangssignal for systemet.



# Lineære tidsinvariante systemer

Eksempel: Masse-fjeder-dæmper



Betragt følgende masse-fjeder-dæmper system

$$\ddot{p} = -\frac{k}{m} \cdot p - \frac{b}{m} \cdot \dot{p} + \frac{1}{m} F$$

# Lineære tidsinvariante systemer

Eksempel: Masse-fjeder-dæmper



Betragt følgende masse-fjeder-dæmper system

$$\ddot{p} = -\frac{k}{m} \cdot p - \frac{b}{m} \cdot \dot{p} + \frac{1}{m} F$$

## Linearitet af løsning

- ▶ Lad  $p_1(t)$  være løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen  $(p_1(t_0), \dot{p}_1(t_0)) = (p_{1,0}, \dot{p}_{1,0})$  og indgangssignal  $F_1(t)$ .
- ▶ Lad  $p_2(t)$  være løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen  $(p_2(t_0), \dot{p}_2(t_0)) = (p_{2,0}, \dot{p}_{2,0})$  og indgangssignal  $F_2(t)$ .

# Lineære tidsinvariante systemer

Eksempel: Masse-fjeder-dæmper



Betragt følgende masse-fjeder-dæmper system

$$\ddot{p} = -\frac{k}{m} \cdot p - \frac{b}{m} \cdot \dot{p} + \frac{1}{m} F$$

## Linearitet af løsning

- ▶ Lad  $p_1(t)$  være løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen  $(p_1(t_0), \dot{p}_1(t_0)) = (p_{1,0}, \dot{p}_{1,0})$  og indgangssignal  $F_1(t)$ .
- ▶ Lad  $p_2(t)$  være løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen  $(p_2(t_0), \dot{p}_2(t_0)) = (p_{2,0}, \dot{p}_{2,0})$  og indgangssignal  $F_2(t)$ .

Systemet er lineært hvis  $\alpha p_1(t) + \beta p_2(t)$  er løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen  $(\alpha p_{1,0} + \beta p_{2,0}, \alpha \dot{p}_{1,0} + \beta \dot{p}_{2,0})$  og indgangssignal  $\alpha F_1(t) + \beta F_2(t)$ .

# Lineære tidsinvariante systemer

Eksempel: Masse-fjeder-dæmper



Betragt følgende masse-fjeder-dæmper system

$$\ddot{p} = -\frac{k}{m} \cdot p - \frac{b}{m} \cdot \dot{p} + \frac{1}{m} F$$

## Linearitet af løsning

- ▶ Lad  $p_1(t)$  være løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen  $(p_1(t_0), \dot{p}_1(t_0)) = (p_{1,0}, \dot{p}_{1,0})$  og indgangssignal  $F_1(t)$ .
- ▶ Lad  $p_2(t)$  være løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen  $(p_2(t_0), \dot{p}_2(t_0)) = (p_{2,0}, \dot{p}_{2,0})$  og indgangssignal  $F_2(t)$ .

Systemet er lineært hvis  $\alpha p_1(t) + \beta p_2(t)$  er løsningen til differentialligningen for begyndelsesbetingelsen  $(\alpha p_{1,0} + \beta p_{2,0}, \alpha \dot{p}_{1,0} + \beta \dot{p}_{2,0})$  og indgangssignal  $\alpha F_1(t) + \beta F_2(t)$ .

Dette kaldes **superpositionsprincippet**.

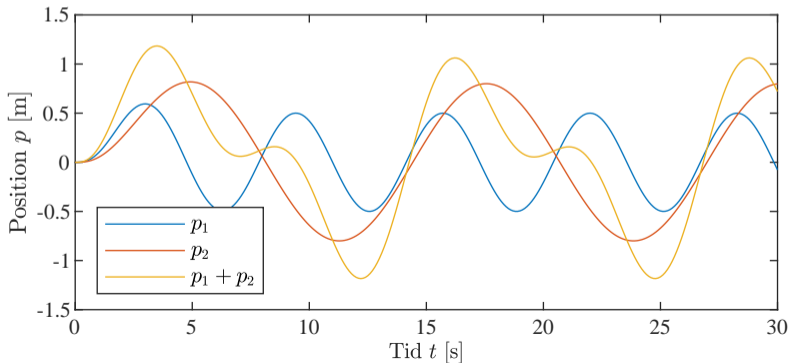
# Lineære tidsinvariante systemer

Eksempel: Masse-fjeder-dæmper



Betragt følgende masse-fjeder-dæmper system

$$\ddot{p} = -\frac{k}{m} \cdot p - \frac{b}{m} \cdot \dot{p} + \frac{1}{m} F$$



# Respons af lineære systemer



Introduktion

Lineære tidsinvariante systemer

Egenskaber

Respons af lineære systemer

Laplacetransformation

Overføringsfunktion

Frekvensrespons

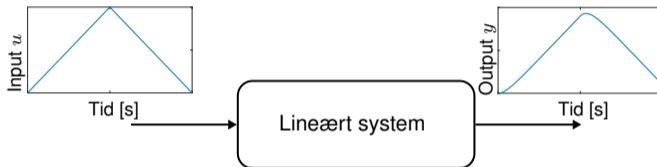
Egenskaber

Invers Laplacetransformation

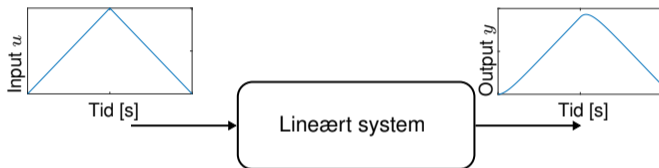
Bestemmelse af udgangssignal ved partialbrøksopspaltning

Opsummering

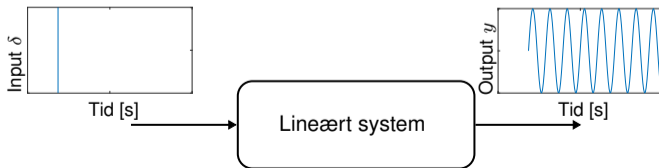
Det ønskes at finde en metode til bestemmelse af et lineært systems input-output opførsel.



Det ønskes at finde en metode til bestemmelse af et lineært systems input-output opførsel.



Det er muligt at bestemme et lineært systems respons til ethvert input  $u$  ud fra kendskab til systemets impulsrespons.



# Respons af lineære systemer

## Impulsrespons (I)



Vi introducerer konceptet af en **impuls**  $\delta(t)$ , som er et meget kort og kraftigt signal, der har følgende egenskab

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = u(t)$$

hvor  $u$  er en kontinuierlig funktion og  $\delta$  er en Dirac delta-funktion.

# Respons af lineære systemer

## Impulsrespons (I)



Vi introducerer konceptet af en **impuls**  $\delta(t)$ , som er et meget kort og kraftigt signal, der har følgende egenskab

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = u(t)$$

hvor  $u$  er en kontinuierlig funktion og  $\delta$  er en Dirac delta-funktion.

Udtrykket kan tolkes som en vægtet sum af impulser, der giver funktionen  $u(t)$ , dvs. hvis systemets respons til en impuls kendes, så kan systemets respons til  $u(t)$  findes som en sum af impulser, grundet superpositionsprincippet.

# Respons af lineære systemer

## Impulsrespons (II)



**Impulsresponsen**  $h(t, \tau)$  for et lineært system defineres som responset (outputtet) til tiden  $t$  når en impuls er tilføjet som input til tiden  $\tau$ .

Hvis et system er tidsinvariant kan impulsresponsen defineres ud fra  $t - \tau$ . I dette tilfælde skrives  $h(t - \tau)$ .

# Respons af lineære systemer

## Impulsrespons (II)



Da superpositionsprincippet gælder for lineære systemer kan det samlede respons udtrykkes

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t, \tau)d\tau$$

Dette kaldes **superpositionsintegralet**.

# Respons af lineære systemer

## Impulsrespons (II)



Da superpositionsprincippet gælder for lineære systemer kan det samlede respons udtrykkes

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t, \tau)d\tau$$

Dette kaldes **superpositionsintegralet**.

For lineære tidsinvariante systemer gælder det at

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t - \tau)h(\tau)d\tau \end{aligned}$$

Den sidste ligning kaldes **foldningsintegralet**.

# Respons af lineære systemer

Eksempel: impulsrespons



Vi bestemmer impulsresponset for differentiaalligningen

$$\dot{y} + ky = u = \delta(t)$$

med begyndelsesbetingelse  $y(0) = 0$ .

# Respons af lineære systemer

Eksempel: impulsrespons



Vi bestemmer impulsresponsen for differentialligningen

$$\dot{y} + ky = u = \delta(t)$$

med begyndelsesbetingelse  $y(0) = 0$ .

Funktionen  $\delta(t)$  har kun betydning omkring tid  $t = 0$  s. Derfor udregnes integralet

$$\int_{0^-}^{0^+} \dot{y} dt + k \int_{0^-}^{0^+} y dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

# Respons af lineære systemer

Eksempel: impulsrespons



Vi bestemmer impulsresponsen for differentialligningen

$$\dot{y} + ky = u = \delta(t)$$

med begyndelsesbetingelse  $y(0) = 0$ .

Funktionen  $\delta(t)$  har kun betydning omkring tid  $t = 0$  s. Derfor udregnes integralet

$$\int_{0^-}^{0^+} \dot{y} dt + k \int_{0^-}^{0^+} y dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

Da værdien for integralet af  $y$  er nul i et lille tidsinterval fås

$$y(0^+) - y(0^-) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(0^+) = 1$$

# Respons af lineære systemer

Eksempel: impulsrespons



Funktionen  $\delta(t)$  har kun betydning omkring tid  $t = 0$  s. Derfor udregnes integralet

$$\int_{0^-}^{0^+} \dot{y} dt + k \int_{0^-}^{0^+} y dt = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t) dt$$

Da værdien for integralet af  $y$  er nul i et lille tidsinterval fås

$$y(0^+) - y(0^-) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(0^+) = 1$$

Antag at løsningen til differentialligningen (for  $t > 0$ )

$$\dot{y} + ky = 0 \quad y(0^+) = 1$$

er

$$y(t) = Ae^{st}$$

# Respons af lineære systemer

Eksempel: impulsrespons



Da værdien for integralet af  $y$  er nul i et lille tidsinterval fås

$$y(0^+) - y(0^-) = 1 \quad \Rightarrow \quad y(0^+) = 1$$

Antag at løsningen til differentialligningen (for  $t > 0$ )

$$\dot{y} + ky = 0 \quad y(0^+) = 1$$

er

$$y(t) = Ae^{st}$$

Så gælder det at

$$sAe^{st} + kAe^{st} = 0$$

$$(s + k)Ae^{st} = 0$$

og dermed er  $s = -k$  og  $A = 1$ .

# Respons af lineære systemer

Eksempel: impulsrespons



Antag at løsningen til differentialligningen (for  $t > 0$ )

$$\dot{y} + ky = 0 \quad y(0^+) = 1$$

er

$$y(t) = Ae^{st}$$

Så gælder det at

$$sAe^{st} + kAe^{st} = 0$$

$$(s + k)Ae^{st} = 0$$

og dermed er  $s = -k$  og  $A = 1$ .

Impulsresponset er således

$$y(t) = h(t) = e^{-kt}$$

for  $t > 0$ .

# Respons af lineære systemer

## Enheds step funktion



Enheds step funktionen er defineret som

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

# Respons af lineære systemer

## Enheds step funktion



Enheds step funktionen er defineret som

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Ved brug af enheds step funktionen bliver impulsresponset for første ordens systemet

$$h(t) = e^{-kt} 1(t)$$

# Respons af lineære systemer

## Enheds step funktion



Enheds step funktionen er defineret som

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Ved brug af enheds step funktionen bliver impulsresponset for første ordens systemet

$$h(t) = e^{-kt}1(t)$$

Systemets respons til et generelt input  $u$  er

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\tau}1(\tau)u(t - \tau)d\tau \\ &= \int_0^{\infty} e^{-k\tau}u(t - \tau)d\tau \end{aligned}$$

# Respons af lineære systemer

Respons ved input  $e^{st}$



Betragt et systems respons ved input  $u(t) = e^{st}$ , hvor  $s = \sigma + j\omega$ . Dette er givet af foldningsintegralet som

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau$$

# Respons af lineære systemer

Respons ved input  $e^{st}$



Betragt et systems respons ved input  $u(t) = e^{st}$ , hvor  $s = \sigma + j\omega$ . Dette er givet af foldningsintegralet som

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \end{aligned}$$

# Respons af lineære systemer

Respons ved input  $e^{st}$



Betragt et systems respons ved input  $u(t) = e^{st}$ , hvor  $s = \sigma + j\omega$ . Dette er givet af foldningsintegralet som

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{st} e^{-s\tau} d\tau \end{aligned}$$

# Respons af lineære systemer

Respons ved input  $e^{st}$



Betragt et systems respons ved input  $u(t) = e^{st}$ , hvor  $s = \sigma + j\omega$ . Dette er givet af foldningsintegralet som

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) u(t - \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{s(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{st} e^{-s\tau} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau e^{st} \end{aligned}$$

# Respons af lineære systemer

Respons ved input  $e^{st}$



Betragt et systems respons ved input  $u(t) = e^{st}$ , hvor  $s = \sigma + j\omega$ . Dette er givet af foldningsintegralet som

$$\begin{aligned}y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)u(t - \tau)d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{st}e^{-s\tau}d\tau \\&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau e^{st} \\&= H(s)e^{st}\end{aligned}$$

hvor

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

# Laplacetransformation



Introduktion

Lineære tidsinvariante systemer

Egenskaber

Respons af lineære systemer

**Laplacetransformation**

Overføringsfunktion

Frekvensrespons

Egenskaber

Invers Laplacetransformation

Bestemmelse af udgangssignal ved partialbrøksopspaltning

Opsummering

Laplace transformation er en generalisering af Fouriertransformation og er defineret som

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

hvor  $s \in \mathbb{C}$ .

Bemærk at  $s$  er et komplekst tal  $s = \sigma + j\omega$ , og at Laplace transform er identisk med Fouriertransform, hvis  $s$  vælges til  $j\omega$ .

Introduktion

Lineære tidsinvariante systemer

Egenskaber

Respons af lineære systemer

Laplacetransformation

Overføringsfunktion

Frekvensrespons

Egenskaber

Invers Laplacetransformation

Bestemmelse af udgangssignal ved partialbrøksopspaltning

Opsummering

# Overføringsfunktion

## Definition



Funktionen  $H(s)$  defineret som

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

hvor  $h(t)$  er impulsresponset for systemet  $\Sigma$  er **overføringsfunktionen** for  $\Sigma$ .

# Overføringsfunktion

## Definition



Funktionen  $H(s)$  defineret som

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

hvor  $h(t)$  er impulsresponset for systemet  $\Sigma$  er **overføringsfunktionen** for  $\Sigma$ .

En overføringsfunktion er forholdet mellem det Laplacetransformerede input  $u$  og det Laplacetransformerede output  $y$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s)$$

hvor det antages at systemets begyndelsbetingelser er nul.

# Overføringsfunktion

Eksempel



Betragt systemet

$$\dot{y} + ky = u$$

hvor  $u$  er input og  $y$  er output. Find  $y(t)$  når  $u(t) = e^{st}$ .



Betragt systemet

$$\dot{y} + ky = u$$

hvor  $u$  er input og  $y$  er output. Find  $y(t)$  når  $u(t) = e^{st}$ .

Antag at  $y$  kan udtrykkes som  $H(s)e^{st}$ , så er  $\dot{y} = sH(s)e^{st}$  og

$$sH(s)e^{st} + kH(s)e^{st} = e^{st}$$

Betragt systemet

$$\dot{y} + ky = u$$

hvor  $u$  er input og  $y$  er output. Find  $y(t)$  når  $u(t) = e^{st}$ .

Antag at  $y$  kan udtrykkes som  $H(s)e^{st}$ , så er  $\dot{y} = sH(s)e^{st}$  og

$$sH(s)e^{st} + kH(s)e^{st} = e^{st}$$

Udtrykkes omskrives til

$$(s + k)H(s)e^{st} = e^{st}$$

Betragt systemet

$$\dot{y} + ky = u$$

hvor  $u$  er input og  $y$  er output. Find  $y(t)$  når  $u(t) = e^{st}$ .

Antag at  $y$  kan udtrykkes som  $H(s)e^{st}$ , så er  $\dot{y} = sH(s)e^{st}$  og

$$sH(s)e^{st} + kH(s)e^{st} = e^{st}$$

Udtrykkes omskrives til

$$(s + k)H(s)e^{st} = e^{st}$$

og overføringsfunktionen bliver

$$H(s) = \frac{1}{s + k}$$

Betragt systemet

$$\dot{y} + ky = u$$

hvor  $u$  er input og  $y$  er output. Find  $y(t)$  når  $u(t) = e^{st}$ .

Antag at  $y$  kan udtrykkes som  $H(s)e^{st}$ , så er  $\dot{y} = sH(s)e^{st}$  og

$$sH(s)e^{st} + kH(s)e^{st} = e^{st}$$

Udtrykkes omskrives til

$$(s + k)H(s)e^{st} = e^{st}$$

og overføringsfunktionen bliver

$$H(s) = \frac{1}{s + k}$$

Da  $y(t) = H(s)e^{st}$  fås

$$y(t) = \frac{e^{st}}{s + k}$$

En overføringsfunktion for et system med et input og et output er givet som

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

hvor tælleren  $Q(s)$  og nævneren  $P(s)$  er polynomier i variabelen  $s$ .

En overføringsfunktion for et system med et input og et output er givet som

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

hvor tælleren  $Q(s)$  og nævneren  $P(s)$  er polynomier i variabelen  $s$ .

- ▶ Rødderne af  $Q(s)$  kaldes for **nulpunkterne af**  $G(s)$ .
- ▶ Rødderne af  $P(s)$  kaldes for **polerne af**  $G(s)$ .

En overføringsfunktion for et system med et input og et output er givet som

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

hvor tælleren  $Q(s)$  og nævneren  $P(s)$  er polynomier i variabelen  $s$ .

- ▶ Rødderne af  $Q(s)$  kaldes for **nulpunkterne af**  $G(s)$ .
- ▶ Rødderne af  $P(s)$  kaldes for **polerne af**  $G(s)$ .

Det antages at graden af  $P(s)$  er højere end graden af  $Q(s)$ .

Introduktion

Lineære tidsinvariante systemer

Egenskaber

Respons af lineære systemer

Laplacetransformation

Overføringsfunktion

Frekvensrespons

Egenskaber

Invers Laplacetransformation

Bestemmelse af udgangssignal ved partialbrøksopspaltning

Opsummering

# Frekvensrespons

## Definition



Et systems **frekvensrespons** er responset (outputtet) når et sinudialt input påtrykkes et system.

# Frekvensrespons

## Definition



Et systems **frekvensrespons** er responset (outputtet) når et sinudialt input påtrykkes et system.

Fra tidligere har vi udtrykt outputtet af et system med input  $e^{st}$  ved brug af overføringsfunktionen  $H(s)$  som

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

# Frekvensrespons

## Definition



Et systems **frekvensrespons** er responset (outputtet) når et sinudialt input påtrykkes et system.

Fra tidligere har vi udtrykt outputtet af et system med input  $e^{st}$  ved brug af overføringsfunktionen  $H(s)$  som

$$y(t) = H(s)e^{st}$$

Da

$$A \cos(\omega t) = \frac{A}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

kan responset skrives (grundet superposition)

$$y(t) = \frac{A}{2} (H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t})$$



Da

$$A \cos(\omega t) = \frac{A}{2}(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t})$$

kan responset skrives (grundet superposition)

$$y(t) = \frac{A}{2} (H(j\omega)e^{j\omega t} + H(-j\omega)e^{-j\omega t})$$

På polær form er  $H(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$ , så

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{A}{2} M(\omega) \left( e^{j(\omega t + \varphi(\omega))} + e^{-j(\omega t + \varphi(\omega))} \right) \\ &= AM(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \end{aligned}$$

hvor

$$M(\omega) = |H(j\omega)| \quad \text{og} \quad \varphi(\omega) = \angle H(j\omega)$$

# Frekvensrespons

Eksempel: Frekvensrespons



I det tidligere eksempel blev overføringsfunktionen bestemt til

$$H(s) = \frac{1}{s + k}$$

# Frekvensrespons

Eksempel: Frekvensrespons



I det tidligere eksempel blev overføringsfunktionen bestemt til

$$H(s) = \frac{1}{s + k}$$

For at bestemme frekvensresponsen findes amplituden og fasen

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \quad \text{og} \quad \varphi(\omega) = -\tan^{-1} \left( \frac{\omega}{k} \right)$$

# Frekvensrespons

Eksempel: Frekvensrespons



I det tidligere eksempel blev overføringsfunktionen bestemt til

$$H(s) = \frac{1}{s + k}$$

For at bestemme frekvensresponsen findes amplituden og fasen

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \quad \text{og} \quad \varphi(\omega) = -\tan^{-1} \left( \frac{\omega}{k} \right)$$

Dermed er systemets respons til et sinudialt input

$$y(t) = AM(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

# Frekvensrespons

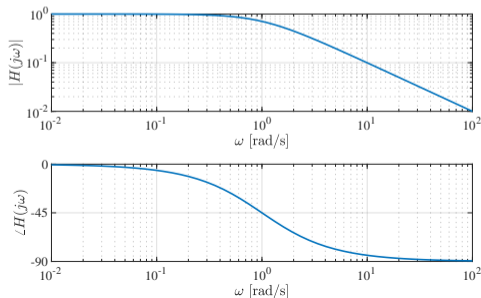
Eksempel: Bode plot (1)



Et **Bode plot** benyttes til at visualisere frekvensresponsen. For dette eksempel er amplituden og fasen

$$M(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 + k^2}} \quad \text{og} \quad \varphi(\omega) = -\tan^{-1} \left( \frac{\omega}{k} \right)$$

Bode plottet tegnes normalt i logaritmisk skala.



# Frekvensrespons

Eksempel: Bode plot (2)



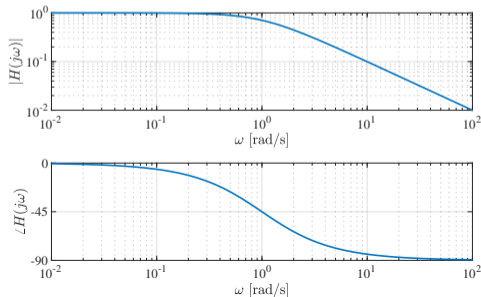
Vi betragter forskellige værdier for  $\omega$  ( $k = 1$ )

$$M(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$M(10) = \frac{1}{\sqrt{101}} \approx \frac{1}{10}$$

$$\varphi(1) = -\tan^{-1}(1) = -45^\circ$$

$$\varphi(10) = -\tan^{-1}(10) \approx -84^\circ$$





Introduktion

Lineære tidsinvariante systemer

Egenskaber

Respons af lineære systemer

Laplacetransformation

Overføringsfunktion

Frekvensrespons

Egenskaber

Invers Laplacetransformation

Bestemmelse af udgangssignal ved partialbrøksopspaltning

Opsummering



Lad  $f(t)$  og  $df(t)/dt$  være kontinuerlige funktioner. Så gælder det at

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$

hvor  $F(s) = \mathcal{L}(f)$ .

Lad  $f(t)$  og  $df(t)/dt$  være kontinuerlige funktioner. Så gælder det at

$$\mathcal{L}\left(\frac{df}{dt}\right) = sF(s) - f(0)$$

hvor  $F(s) = \mathcal{L}(f)$ .

Lad  $f(t)$  være en kontinuerlig funktion og  $F(s) = \mathcal{L}(f)$ . Så gælder det at

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau)d\tau\right) = \frac{F(s)}{s}$$

# Lapacetransformation

Egenskaber (II)



Signal $h(t)$	Fouriertransform $H(s)$
1	$\frac{1}{s}$
$e^{at}$	$\frac{1}{s-a}$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}$
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}$

# Laplacetransformation

Eksempel: Tvunget harmonisk bevægelse (I)



Den simple harmoniske bevægelse kan Laplacetransformeres på baggrund af differentialligningen

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F$$

Dermed fås (begyndelsbetingelser antages at være nul)

$$s^2 X(s) = -\frac{k}{m} X(s) - s \frac{b}{m} X(s) + \frac{1}{m} F(s)$$

# Laplacetransformation

Eksempel: Tvunget harmonisk bevægelse (I)



Den simple harmoniske bevægelse kan Laplacetransformeres på baggrund af differentialligningen

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x} + F$$

Dermed fås (begyndelsbetingelser antages at være nul)

$$s^2 X(s) = -\frac{k}{m} X(s) - s \frac{b}{m} X(s) + \frac{1}{m} F(s)$$

Overføringsfunktionen fra  $F(s)$  til  $X(s)$  bliver dermed

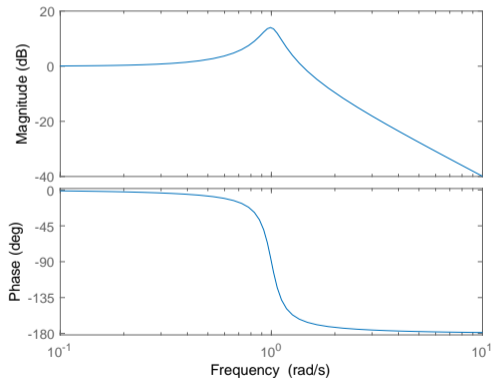
$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1/m}{s^2 + b/ms + k/m}$$

# Laplace transformation

Eksempel: Tvunget harmonisk bevægelse (II)

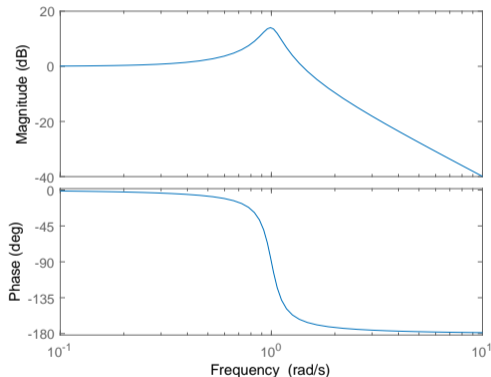


Lad  $m = 1$  kg,  $b = 0.2$  N/(m/s) og  $k = 1$  N/m, så er følgende Bode diagrammet for systemet.



# Laplace transformation

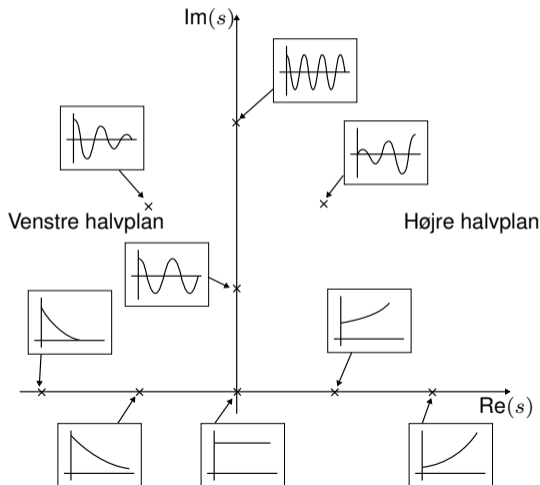
Eksempel: Tvunget harmonisk bevægelse (II)



Den største amplitude af svingningen opnås når  $\omega_t$  er tæt på  $\omega_0$ , hvor  $\omega_t$  er frekvensen af den eksterne kraft og  $\omega_0$  er systemets naturlige vinkelfrekvens.

# Laplace transformation

Relation mellem Impulsrespons og polplacering



# Invers Laplacetransformation



Introduktion

Lineære tidsinvariante systemer

Egenskaber

Respons af lineære systemer

Laplacetransformation

Overføringsfunktion

Frekvensrespons

Egenskaber

**Invers Laplacetransformation**

Bestemmelse af udgangssignal ved partialbrøksopspaltning

Opsummering

# Invers Laplacetransformation

Motivation



Ud fra overføringsfunktionen

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s)$$

er det muligt at udregne det Laplacetransformerede output

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

# Invers Laplacetransformation

Motivation



Ud fra overføringsfunktionen

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s)$$

er det muligt at udregne det Laplacetransformerede output

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

Det er derfor relevant at lave invers Laplacetransformation for at finde  $y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$ .

# Invers Laplacetransformation

Definition



Den inverse Laplacetransformation er defineret som

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_c - j\infty}^{\sigma_c + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

# Invers Laplacetransformation

## Definition



Den inverse Laplacetransformation er defineret som

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_c - j\infty}^{\sigma_c + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Denne relation benyttes sjældent - tabeller benyttes i stedet. I denne lektion benyttes at  $\mathcal{L}\{\alpha e^{-at} 1(t)\} = \frac{\alpha}{s+a}$ .



Introduktion

Lineære tidsinvariante systemer

Egenskaber

Respons af lineære systemer

Laplacetransformation

Overføringsfunktion

Frekvensrespons

Egenskaber

Invers Laplacetransformation

Bestemmelse af udgangssignal ved partialbrøksopspaltning

Opsummering

# Invers Laplacetransformation

## Partialbrøksopspaltning (I)



Vi betragter en overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \dots + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

# Invers Laplacetransformation

## Partialbrøksopspaltning (I)



Vi betragter en overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \dots + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

En sådan overføringsfunktion kan faktorerises således

$$H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

hvor  $s = z_i$  er et nulpunkt og  $s = p_i$  er en pol.



Vi betragter en overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{b_1 s^m + b_2 s^{m-1} + \dots + b_{m+1}}{s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}$$

En sådan overføringsfunktion kan faktorerises således

$$H(s) = K \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}$$

hvor  $s = z_i$  er et nulpunkt og  $s = p_i$  er en pol.

Antag at alle poler er forskellige, så skrives overføringsfunktionen

$$H(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \dots + \frac{C_n}{s - p_n}$$

# Invers Laplacetransformation

## Partialbrøksopspaltning (II)



For at finde koefficienterne  $C_i$  i ligningen

$$H(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{C_n}{s - p_n}$$

multipliseres der med  $(s - p_1)$  på begge sider

$$(s - p_1)H(s) = C_1 + \frac{s - p_1}{s - p_2}C_2 + \cdots + \frac{s - p_1}{s - p_n}C_n$$

# Invers Laplacetransformation

## Partialbrøksopspaltning (II)



For at finde koefficienterne  $C_i$  i ligningen

$$H(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{C_n}{s - p_n}$$

multipliseres der med  $(s - p_1)$  på begge sider

$$(s - p_1)H(s) = C_1 + \frac{s - p_1}{s - p_2}C_2 + \cdots + \frac{s - p_1}{s - p_n}C_n$$

Lad  $s = p_1$  så gælder det at

$$C_1 = (s - p_1)H(s)|_{s=p_1}$$

For at finde koefficienterne  $C_i$  i ligningen

$$H(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{C_n}{s - p_n}$$

multipliseres der med  $(s - p_1)$  på begge sider

$$(s - p_1)H(s) = C_1 + \frac{s - p_1}{s - p_2}C_2 + \cdots + \frac{s - p_1}{s - p_n}C_n$$

Lad  $s = p_1$  så gælder det at

$$C_1 = (s - p_1)H(s)|_{s=p_1}$$

Proceduren gentages for alle poler, dvs.

$$C_i = (s - p_i)H(s)|_{s=p_i}$$

# Invers Laplacetransformation

## Partialbrøksopspaltning (II)



Når koefficienterne  $C_i$  kendes for

$$H(s) = \frac{C_1}{s - p_1} + \frac{C_2}{s - p_2} + \cdots + \frac{C_n}{s - p_n}$$

kan invers Laplacetransformation anvendes, så

$$h(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{p_i t} 1(t)$$

# Invers Laplacetransformation

Eksempel (I)



Betragt et system med overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{s + 1}$$

og bestem  $y(t)$  når  $u(t) = \sin(10t)$ .

# Invers Laplacetransformation

Eksempel (I)



Betragt et system med overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

og bestem  $y(t)$  når  $u(t) = \sin(10t)$ .

Ud fra

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

og tabelopslag ( $\mathcal{L}\{\sin(10t)\} = 10/(s^2 + 100)$ ) fås

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} \frac{10}{s^2 + 100}$$



Betragt et system med overføringsfunktion

$$H(s) = \frac{1}{s + 1}$$

og bestem  $y(t)$  når  $u(t) = \sin(10t)$ .

Ud fra

$$Y(s) = H(s)U(s)$$

og tabelopslag ( $\mathcal{L}\{\sin(10t)\} = 10/(s^2 + 100)$ ) fås

$$Y(s) = \frac{1}{s + 1} \frac{10}{s^2 + 100}$$

Det ses at  $p_1 = -1$ ,  $p_2 = -j10$  og  $p_3 = j10$ .

# Invers Laplacetransformation

Eksempel (II)



De tre koefficienter kan nu udregnes

$$C_1 = (s + 1)H(-1) = \frac{10}{(-1)^2 + 100} = \frac{10}{101}$$

$$C_2 = (s + j10)H(-j10) = \frac{10}{(-j10 + 1)(-j10 - j10)} = \frac{j}{2(-j10 + 1)}$$

$$C_3 = (s - j10)H(j10) = \frac{10}{(j10 + 1)(j10 + j10)} = \frac{-j}{2(j10 + 1)}$$

# Invers Laplacetransformation

Eksempel (II)



De tre koefficienter kan nu udregnes

$$C_1 = (s + 1)H(-1) = \frac{10}{(-1)^2 + 100} = \frac{10}{101}$$

$$C_2 = (s + j10)H(-j10) = \frac{10}{(-j10 + 1)(-j10 - j10)} = \frac{j}{2(-j10 + 1)}$$

$$C_3 = (s - j10)H(j10) = \frac{10}{(j10 + 1)(j10 + j10)} = \frac{-j}{2(j10 + 1)}$$

Dermed bliver outputtet

$$Y(s) = \frac{\frac{10}{101}}{s + 1} + \frac{\frac{j}{2(-j10+1)}}{s + j10} + \frac{\frac{-j}{2(j10+1)}}{s - j10}$$



De tre koefficienter kan nu udregnes

$$C_1 = (s + 1)H(-1) = \frac{10}{(-1)^2 + 100} = \frac{10}{101}$$

$$C_2 = (s + j10)H(-j10) = \frac{10}{(-j10 + 1)(-j10 - j10)} = \frac{j}{2(-j10 + 1)}$$

$$C_3 = (s - j10)H(j10) = \frac{10}{(j10 + 1)(j10 + j10)} = \frac{-j}{2(j10 + 1)}$$

Dermed bliver outputtet

$$Y(s) = \frac{\frac{10}{101}}{s + 1} + \frac{\frac{j}{2(-j10+1)}}{s + j10} + \frac{\frac{-j}{2(j10+1)}}{s - j10}$$

Dette medfører at

$$y(t) = \frac{10}{101}e^{-t} + \frac{1}{\sqrt{101}}\sin(10t + \phi), \quad \phi = \tan^{-1}(-10)$$

Introduktion

Lineære tidsinvariante systemer

Egenskaber

Respons af lineære systemer

Laplacetransformation

Overføringsfunktion

Frekvensrespons

Egenskaber

Invers Laplacetransformation

Bestemmelse af udgangssignal ved partialbrøksopspaltning

Opsummering



En **impuls**  $\delta(t)$  er et meget kort og kraftigt signal, der har følgende egenskab

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = u(t)$$

hvor  $u$  er en kontinuierlig funktion og  $\delta$  er en Dirac delta-funktion.

En **impuls**  $\delta(t)$  er et meget kort og kraftigt signal, der har følgende egenskab

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t - \tau)d\tau = u(t)$$

hvor  $u$  er en kontinuierlig funktion og  $\delta$  er en Dirac delta-funktion.

Udtrykket kan tolkes som en vægtet sum af impulser, der giver funktionen  $u(t)$ , dvs. hvis systemets respons til en impuls kendes, så kan systemets respons til  $u(t)$  findes som en sum af impulser, grundet superpositionsprincippet.

**Impulsresponsen**  $h(t - \tau)$  for et lineært tidsinvariant system defineres som responset (outputtet) til tiden  $t$  når en impuls er tilføjet som input til tiden  $\tau$ .



Enheds step funktionen er defineret som

$$1(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \geq 0 \end{cases}$$

Laplacetransformation er defineret som

$$H(s) = \mathcal{L}\{h(t)\} = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st} dt$$

hvor  $s \in \mathbb{C}$ .

Funktionen  $H(s)$  defineret som

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) e^{-s\tau} d\tau$$

hvor  $h(t)$  er impulsresponset for systemet  $\Sigma$  er **overføringsfunktionen** for  $\Sigma$ .

En overføringsfunktion er forholdet mellem det Laplacetransformerede input  $u$  og det Laplacetransformerede output  $y$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = H(s)$$

hvor det antages at systemets begyndelsbetingelser er nul.

En overføringsfunktion for et system med et input og et output er givet som

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

hvor tælleren  $Q(s)$  og nævneren  $P(s)$  er polynomier i variabelen  $s$ .

En overføringsfunktion for et system med et input og et output er givet som

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

hvor tælleren  $Q(s)$  og nævneren  $P(s)$  er polynomier i variabelen  $s$ .

- ▶ Rødderne af  $Q(s)$  kaldes for **nulpunkterne af**  $G(s)$ .
- ▶ Rødderne af  $P(s)$  kaldes for **polerne af**  $G(s)$ .

En overføringsfunktion for et system med et input og et output er givet som

$$G(s) = \frac{Q(s)}{P(s)}$$

hvor tælleren  $Q(s)$  og nævneren  $P(s)$  er polynomier i variabelen  $s$ .

- ▶ Rødderne af  $Q(s)$  kaldes for **nulpunkterne af**  $G(s)$ .
- ▶ Rødderne af  $P(s)$  kaldes for **polerne af**  $G(s)$ .

Det antages at graden af  $P(s)$  er højere end graden af  $Q(s)$ .

# Opsummering

Relation mellem Impulsrespons og polplacering

