

# Lektion 12: Modellering og simulering af elektromekaniske systemer

Modellering af elektromekaniske systemer

**Christoffer Sloth**

[chsl@mmbi.sdu.dk](mailto:chsl@mmbi.sdu.dk)

SDU Robotics

Mærsk Mc-Kinney Møller Instituttet  
Syddansk Universitet

**SDU** 



Introduktion

Dynamik for robot

- Procedure for modellering
- Egenskaber for robotmodel

Simulering af dynamiske systemer

- Numerisk simulering
- Simscape

Opsummering af kurset

- Beskrivelse af bevægelse i rummet
- Newton's 3 love til modellering af mekaniske systemer
- Arbejde og energi
- Euler-Lagrange Modellering
- Bevægelsesmængde og stød
- Elektromagnetisme



## Viden<sup>1</sup>

Den studerende skal kunne:

- ▶ forklare den grundlæggende fysiks love og begreber
- ▶ beskrive et elektromekanisk system ved hjælp af systemets parametre
- ▶ redegøre for virkemåden af børstede og børsteløse DC motorer
- ▶ opstille overføringsfunktioner for lineære systemer

## Færdigheder

Den studerende skal kunne:

- ▶ udføre fritlegemeanalyse på et mekanisk system
- ▶ anvende Newtons 3 love til modellering af mekaniske systemer
- ▶ **anvende Lagrange D'Alemberts princip til modellering af mekaniske systemer**
- ▶ opstille differentialligninger, der beskriver et elektromekanisk systems bevægelse
- ▶ fortolke lineære systemers bevægelse i frekvensdomæne
- ▶ **modellere og simulere simple serielle manipulatorer**

## Kompetencer

Den studerende skal kunne:

- ▶ **simulere elektromekaniske systemer og fortolke deres bevægelse**

<sup>1</sup> Basseret på <https://odin.sdu.dk/sitecore/index.php?a=fagbesk&id=46418&listid=5027&lang=da>



- ▶ **Lektion 1:** Fourierrækker og Fouriertransformation
- ▶ **Lektion 2:** Laplace transformation
- ▶ **Lektion 3:** Kræfter og bevægelse
- ▶ **Lektion 4:** Arbejde og energi
- ▶ **Lektion 5:** Impulsmoment og stød
- ▶ **Lektion 6:** Relativ bevægelse og fiktive kræfter
- ▶ **Lektion 7:** Plan bevægelse af stive legemer
- ▶ **Lektion 8:** Almen bevægelse af stive legemer
- ▶ **Lektion 9:** Svingninger
- ▶ **Lektion 10:** DC motoren
- ▶ **Lektion 11:** Modellering af robotarm
- ▶ **Lektion 12:** Simulering af mekaniske systemer



## Introduktion

### Dynamik for robot

Procedure for modellering

Egenskaber for robotmodel

### Simulering af dynamiske systemer

Numerisk simulering

Simscape

### Opsummering af kurset

Beskrivelse af bevægelse i rummet

Newton's 3 love til modellering af mekaniske systemer

Arbejde og energi

Euler-Lagrange Modellering

Bevægelsesmængde og stød

Elektromagnetisme

# Procedure for modellering

Overblik



Følgende procedure kan anvendes til dynamisk modellering af en robot med  $n$  frihedsgrader

0. Find robottens DH-parametre  $(a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i)$  for  $i = 1, 2, \dots, n$ .
1. Opstil en kinematisk model  $T_n^0(\mathbf{q})$  for robotten.
2. Udregn koordinaterne  $\mathbf{p}_{ci}^0(q)$  for massemidtpunkterne for hvert link (beskrevet i Base rammen).
3. Udregn vinkelhastighederne  $\omega_i^0(q, \dot{q})$  for hvert link (beskrevet i Base rammen).
4. Udregn hastighederne  $\mathbf{v}_{ci}^0(q, \dot{q})$  for massemidtpunkterne for hvert link (beskrevet i Base rammen).
5. Udregn inertitensor  $I_{l_i}^0(\mathbf{q})$  for hvert link (beskrevet i Base rammen).
6. Udregn systemets potentielle energi  $E_{\text{pot}}(\mathbf{q})$ .
7. Udregn systemets kinetiske energi  $E_{\text{kin}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ .
8. Opstil bevægelsesligningerne for systemet ud fra Lagrange D'Alemberts princip.

# Procedure for modellering

## Punkt 1: Kinematik



Den kinematiske model for robotten opstilles ud fra DH-parametrene  $(a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i)$  for  $i = 1, 2, \dots, n$ . Dette giver en koordinat transformation<sup>2</sup>

$$T_n^0(\mathbf{q}) = A_1(q_1) \cdot A_2(q_2) \cdots \cdots A_n(q_n) = \begin{bmatrix} R_n^0(\mathbf{q}) & \mathbf{o}_n^0(\mathbf{q}) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hvor

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i) \cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \cos(\theta_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i) \cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i) \sin(\alpha_i) & a_i \sin(\theta_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

---

<sup>2</sup>Detaljer findes i bogen "Robotics: Modelling, Planning and Control" af Bruno Siciliano, Lorenzo Sciavicco, Luigi Villani, Giuseppe Oriolo

# Procedure for modellering

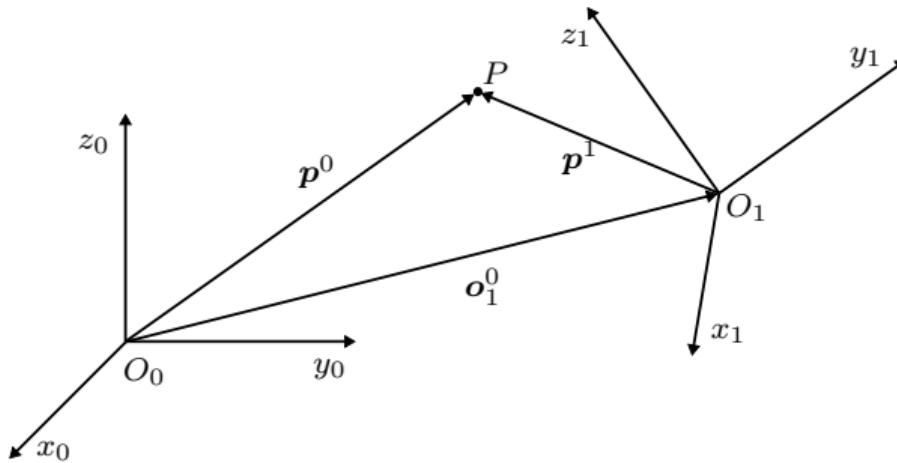
## Punkt 2: Koordinater for massemidtpunkter



Massemidtpunktet for link  $i$  kan udregnes som

$$\begin{bmatrix} p_{ci}^0(q) \\ 1 \end{bmatrix} = T_i^0 \begin{bmatrix} p_{ci}^i \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor  $p_{ci}^i$  er massemidtpunktet i ramme  $i$  og  $p_{ci}^0$  er masse midtpunktet i ramme 0 (Base rammen).



# Procedure for modellering

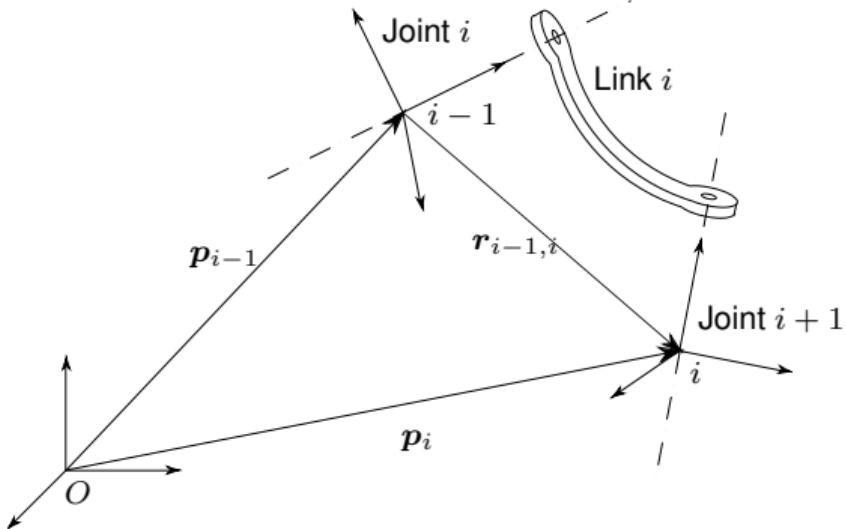
## Punkt 3: Vinkelhastigheder for massecentrumspunkter



Vinkelhastigheden for massecentrumspunktet af Link  $i$  er

$$\omega_i^0 = \omega_{i-1}^0 + R_{i-1}^0(\boldsymbol{q})\omega_{i-1,i}^{i-1} = \omega_{i-1}^0 + \omega_{i-1,i}^0$$

hvor  $\omega_{i-1,i}^{i-1}$  er vinkelhastigheden af Ramme  $i$  med hensyn til Ramme  $i - 1$  udtrykt i Ramme  $i - 1$ .



# Procedure for modellering

## Punkt 3: Vinkelhastigheder for massemidtpunkter



Vinkelhastigheden for massemidtpunktet af Link  $i$  er

$$\omega_i^0 = \omega_{i-1}^0 + R_{i-1}^0(\mathbf{q})\omega_{i-1,i}^{i-1} = \omega_{i-1}^0 + \omega_{i-1,i}^0$$

hvor  $\omega_{i-1,i}^{i-1}$  er vinkelhastigheden af Ramme  $i$  med hensyn til Ramme  $i - 1$  udtrykt i Ramme  $i - 1$ .

Da vi benytter DH parametre, så er rotationen altid omkring  $z$ -aksen (vi antager rotationelle led), i.e.,

$$\omega_{i-1,i}^0 = z_{i-1}\dot{q}_i$$

hvor  $z_{i-1}$  er en enhedsvektor i  $z$ -aksens retning for Ramme  $i - 1$ .

Dette giver Jakobianten for orientering

$$J_O^{l_i} = [z_0 \quad z_1 \quad \cdots \quad z_{i-1} \quad \mathbf{0} \cdots \quad \mathbf{0}]$$

# Procedure for modellering

## Punkt 4: Hastigheder for massecentrumspunkter



Fra Punkt 2 haves koordinaterne for massecentrumspunktet for link  $i$

$$\mathbf{p}_{ci}^0(\mathbf{q}) = R_i^0(\mathbf{q})\mathbf{p}_{ci}^i + \mathbf{o}_i^0(\mathbf{q}).$$

Hastigheden for massecentrumspunktet er dermed (husk at  $\mathbf{p}_{ci}^i$  er konstant)

$$\mathbf{v}_{ci}^0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{d\mathbf{p}_{ci}^0(\mathbf{q})}{dt} = \dot{R}_i^0(\mathbf{q})\mathbf{p}_{ci}^i + \dot{\mathbf{o}}_i^0(\mathbf{q})$$

# Procedure for modellering

## Punkt 4: Hastigheder for massecentrumspunkter



Fra Punkt 2 haves koordinaterne for massecentrumspunktet for link  $i$

$$\mathbf{p}_{ci}^0(\mathbf{q}) = R_i^0(\mathbf{q})\mathbf{p}_{ci}^i + \mathbf{o}_i^0(\mathbf{q}).$$

Hastigheden for massecentrumspunktet er dermed (husk at  $\mathbf{p}_{ci}^i$  er konstant)

$$\mathbf{v}_{ci}^0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{d\mathbf{p}_{ci}^0(\mathbf{q})}{dt} = \dot{R}_i^0(\mathbf{q})\mathbf{p}_{ci}^i + \dot{\mathbf{o}}_i^0(\mathbf{q})$$

Når DH parametre benyttes, så kan hastigheden regnes  $\mathbf{v}_{ci}^0(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = J_P^{l_i}\dot{\mathbf{q}}$  (for rotationelle led)

$$J_P^{l_i} = [z_0 \times (\mathbf{p}_{ci} - \mathbf{p}_0) \quad z_1 \times (\mathbf{p}_{ci} - \mathbf{p}_1) \quad \cdots \quad z_{i-1} \times (\mathbf{p}_{ci} - \mathbf{p}_{i-1}) \quad \mathbf{0} \quad \cdots \quad \mathbf{0}]$$

hvor  $\mathbf{p}_k$  er positionsvektoren for origo af Ramme  $k$ .

# Procedure for modellering

## Punkt 5: Inertitensor i base rammen



Den såkaldte inerti-tensor  $I_{l_i}$  givet i base rammen kan omformuleres ved brug af en inertitensor, der ligger i ledets massecentrum ( $I_{l_i}^i$ )

$$I_{l_i}(\mathbf{q}) = R_i^0(\mathbf{q}) I_{l_i}^i R_i^{0T}(\mathbf{q})$$

# Procedure for modellering

## Punkt 6: Potentiel energi



Den potentielle energi skal udregnes i en inertiel ramme fx base rammen, der ikke bevæges. Dermed kan den potentielle energi udregnes fra

$$E_{\text{pot}}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n E_{\text{pot},l_i}(\mathbf{q}) \quad [\text{J}]$$

hvor  $E_{\text{pot},l_i}$  er den potentielle energi for Link  $i$  [J].

# Procedure for modellering

## Punkt 6: Potentiel energi



Den potentielle energi skal udregnes i en inertiel ramme fx base rammen, der ikke bevæges. Dermed kan den potentielle energi udregnes fra

$$E_{\text{pot}}(\mathbf{q}) = \sum_{i=1}^n E_{\text{pot},l_i}(\mathbf{q}) \quad [\text{J}]$$

hvor  $E_{\text{pot},l_i}$  er den potentielle energi for Link  $i$  [J].

Den samlede potentielle energi bliver således

$$E_{\text{pot}}(\mathbf{q}) = - \sum_{i=1}^n m_{l_i} \mathbf{g}_0^T \mathbf{p}_{ci}(\mathbf{q}) \quad [\text{J}]$$

hvor  $m_{l_i}$  er massen af Link  $i$  [kg],  $\mathbf{g}_0$  er tyngdeaccelerationen i base rammen [m/s<sup>2</sup>] og  $\mathbf{p}_{ci}(\mathbf{q})$  er positionen for massemidtpunktet for Link  $i$  [m].

# Procedure for modellering

## Punkt 7: Kinetisk energi



Den kinetiske energi skal udregnes i en inertiel ramme fx base-rammen, der ikke accelererer. Dermed kan den kinetiske energi udregnes fra

$$E_{\text{kin}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^n E_{\text{kin},l_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad [\text{J}]$$

hvor  $E_{\text{kin},l_i}$  er den kinetiske energi for Link  $i$  [J].

# Procedure for modellering

## Punkt 7: Kinetisk energi



Den kinetiske energi skal udregnes i en inertiel ramme fx base-rammen, der ikke accelererer. Dermed kan den kinetiske energi udregnes fra

$$E_{\text{kin}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \sum_{i=1}^n E_{\text{kin},l_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \quad [\text{J}]$$

hvor  $E_{\text{kin},l_i}$  er den kinetiske energi for Link  $i$  [J].

Den kinetiske energi for Link  $i$  bliver således

$$E_{\text{kin},l_i}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \frac{1}{2} m_{l_i} \dot{\mathbf{q}}^T J_P^{l_i T}(\mathbf{q}) J_P^{l_i}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T J_O^{l_i T}(\mathbf{q}) R_i^0(\mathbf{q}) I_{l_i}^i R_i^{0T}(\mathbf{q}) J_O^{l_i}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

# Procedure for modellering

## Punkt 8: Lagrange–D'Alemberts princip



Lagrange–D'Alemberts princip kan skrives (for  $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ )

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = Q_1$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = Q_2$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_n} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_n} = Q_n$$

hvor  $Q_1, Q_2, \dots, Q_n$  er generaliserede krafter og  $\mathcal{L}$  er Lagrangian givet ved

$$\mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = E_{\text{kin}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) - E_{\text{pot}}(\mathbf{q}) \quad [\text{J}]$$

hvor  $E_{\text{pot}}$  er systemets potentielle energi og  $E_{\text{kin}}$  er systemets kinetiske energi.

# Egenskaber for robotmodel



Introduktion

Dynamik for robot

Procedure for modellering

Egenskaber for robotmodel

Simulering af dynamiske systemer

Numerisk simulering

Simscape

Opsummering af kurset

Beskrivelse af bevægelse i rummet

Newton's 3 love til modellering af mekaniske systemer

Arbejde og energi

Euler-Lagrange Modellering

Bevægelsesmængde og stød

Elektromagnetisme



En dynamisk model for en robot kan skrives på følgende form

$$B(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + g(q) = \tau$$

hvor  $q$  er en vektor af  $n$  generaliserede koordinater,  $B(q)$  er masse-matrix,  $C(q, \dot{q})$  indeholder Coriolis og centrifugal-led,  $g(q)$  er krafter der resulterer fra tyngdekraften, og  $\tau$  er det kontrollerbare kraftmoment på hvert led.

# Egenskaber for robotmodel

Kinetisk energi



Den kinetiske energi for en robot kan skrives på følgende form

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \dot{q}^T B(q) \dot{q}.$$

# Egenskaber for robotmodel

Coriolis og centrifugal-led



Matricen  $C$  har elementer  $c_{ij}$  som er givet som

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n c_{ijk} \dot{q}_k$$

hvor koefficienterne  $c_{ijk}$  kaldes *Christoffel symbols of the first type* og er givet som

$$c_{ijk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial b_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial b_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial b_{jk}}{\partial q_i} \right)$$

hvor  $b_{ij}$  er elementerne af matrix  $B(q)$ .



Introduktion

Dynamik for robot

Procedure for modellering

Egenskaber for robotmodel

Simulering af dynamiske systemer

Numerisk simulering

Simscape

Opsummering af kurset

Beskrivelse af bevægelse i rummet

Newton's 3 love til modellering af mekaniske systemer

Arbejde og energi

Euler-Lagrange Modellering

Bevægelsesmængde og stød

Elektromagnetisme

# Simulering af dynamiske systemer

Formål



Formålet med denne del af lektionen er at

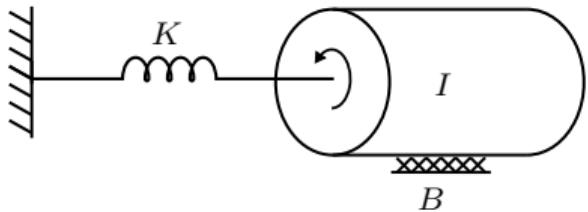
- ▶ give lidt indblik i hvorledes et system simuleres numerisk i software som fx MATLAB.
- ▶ vise at en simuleringssmodel af et mekanisk system let kan opstilles.

# Simulering af dynamiske systemer

Numerisk simulering: Model



Betragt følgende roterende dynamiske system.

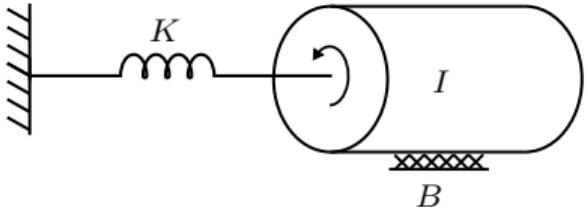


# Simulering af dynamiske systemer

Numerisk simulering: Model



Betragt følgende roterende dynamiske system.



Ved brug af impulsmomentsætningen kan følgende differentialligning opstilles

$$I\ddot{\theta} = -K\theta - B\dot{\theta} + \tau \quad [\text{Nm}]$$

hvor  $\tau$  er et moment, der påvirker inertien.

# Simulering af dynamiske systemer

Numerisk simulering: Fremskrivning af løsning



For at finde bevægelsen af systemet, kan der ses på hvordan  $\theta$  forløber over tid. Følgende approksimation kan give trajektoriet for  $\theta$

$$\theta(t + \Delta t) \approx \theta(t) + \frac{d\theta}{dt}(t)\Delta t$$

# Simulering af dynamiske systemer

Numerisk simulering: Fremskrivning af løsning



For at finde bevægelsen af systemet, kan der ses på hvordan  $\theta$  forløber over tid. Følgende approksimation kan give trajektoriet for  $\theta$

$$\theta(t + \Delta t) \approx \theta(t) + \frac{d\theta}{dt}(t)\Delta t$$

Samme fremgangsmåde kan anvendes på det mekaniske system!

# Simulering af dynamiske systemer

Numerisk simulering: Fremskrivning af løsning



For at finde bevægelsen af systemet, kan der ses på hvordan  $\theta$  forløber over tid. Følgende approksimation kan give trajektoriet for  $\theta$

$$\theta(t + \Delta t) \approx \theta(t) + \frac{d\theta}{dt}(t)\Delta t$$

Samme fremgangsmåde kan anvendes på det mekaniske system!

Vi benytter følgende udtryk for ændringen i  $(\theta, \dot{\theta})$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ -\frac{K}{I}\theta - \frac{B}{I}\dot{\theta}(t) + \frac{1}{I}\tau(t) \end{bmatrix}$$

til at opskrive

$$\begin{bmatrix} \theta(t + \Delta t) \\ \dot{\theta}(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ -\frac{K}{I}\theta - \frac{B}{I}\dot{\theta}(t) + \tau(t) \end{bmatrix} \Delta t$$

# Simulering af dynamiske systemer

Numerisk simulering: Diskret tid



For at simplificere notationen, så defineres

$$\theta_0 = \theta(t)$$

$$\theta_1 = \theta(t + \Delta t)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\theta_i = \theta(t + i\Delta t)$$

# Simulering af dynamiske systemer

Numerisk simulering: Diskret tid



For at simplificere notationen, så defineres

$$\theta_0 = \theta(t)$$

$$\theta_1 = \theta(t + \Delta t)$$

$$\vdots = \vdots$$

$$\theta_i = \theta(t + i\Delta t)$$

Dermed kan udtrykket

$$\begin{bmatrix} \theta(t + \Delta t) \\ \dot{\theta}(t + \Delta t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta(t) \\ \dot{\theta}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\theta}(t) \\ -\frac{K}{I}\theta - \frac{B}{I}\dot{\theta}(t) + \tau(t) \end{bmatrix} \Delta t$$

skrives som

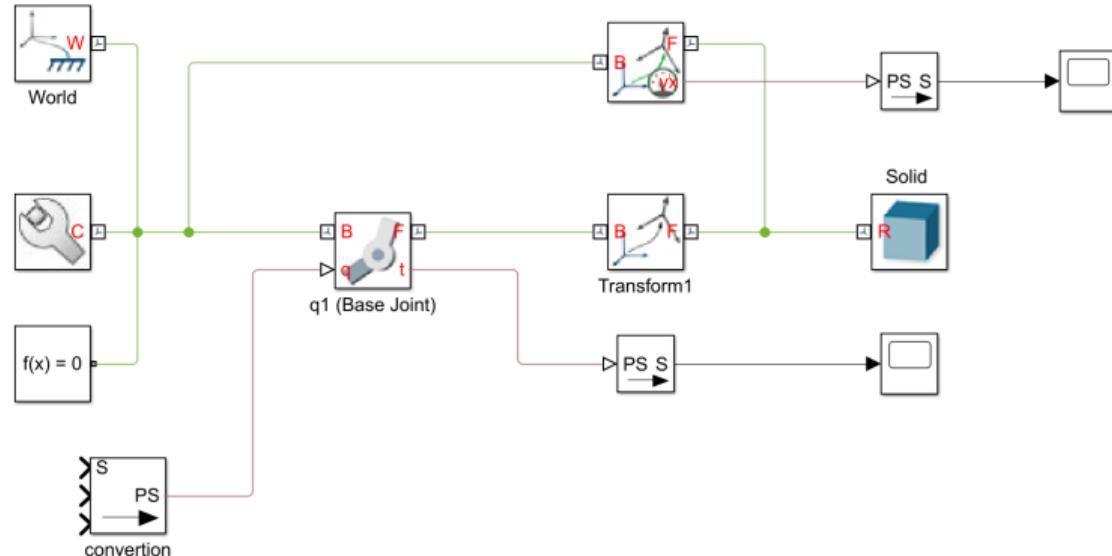
$$\begin{bmatrix} \theta_{k+1} \\ \dot{\theta}_{k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t \\ -\frac{K\Delta t}{I} & 1 - \frac{B\Delta t}{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_k \\ \dot{\theta}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\Delta t}{I} \end{bmatrix} \tau$$

# Simulering af dynamiske systemer

Simscape: Blokke i Simulink



En model i Simscape består primært af blokkene: Transform, Joint, Solid.

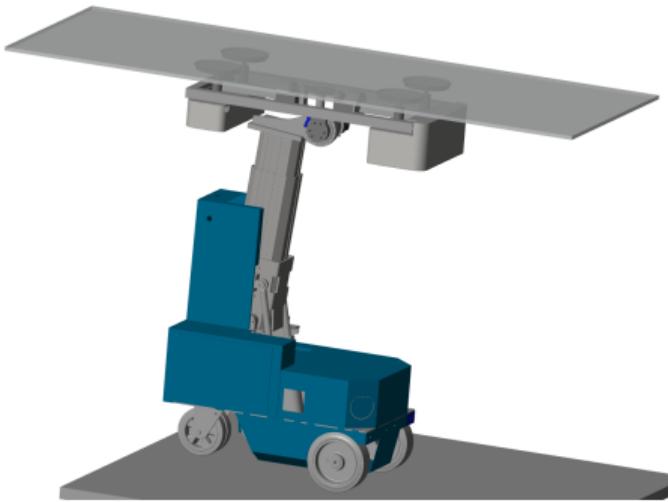


# Simulering af dynamiske systemer

Simscape: Visualisering



Når en model simuleres i Simscape, så kan den vises grafisk.



En animation af robottens bevægelse genereres automatisk ud fra simuleringen.

# Simulering af dynamiske systemer

Simscape: Importer model fra CAD tegning



Det er muligt at generere en model automatisk ud fra CAD tegninger. Her kan programmerne

- ▶ Inventor
- ▶ SolidWorks

benyttes til at generere en *XML Multibody Description File* som kan importeres til Simulink med funktionen `smimport` via MATLAB.



Introduktion

Dynamik for robot

Procedure for modellering

Egenskaber for robotmodel

Simulering af dynamiske systemer

Numerisk simulering

Simscape

Opsummering af kurset

Beskrivelse af bevægelse i rummet

Newton's 3 love til modellering af mekaniske systemer

Arbejde og energi

Euler-Lagrange Modellering

Bevægelsesmængde og stød

Elektromagnetisme

# Opsummering af kurset

Bevægelse af stive legemer



Følgende begreber benyttes til beskrivelse af strive legemers bevægelse

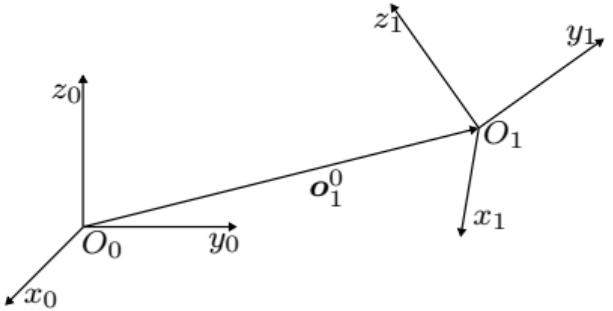
- ▶ **Positur:** position og orientering
- ▶ **Hastighed:** herunder gennemsnitshastighed og øjeblikshastighed
- ▶ **Fart:** udregnes ved brug af længden af bevægelsen
- ▶ **Acceleration:** herunder gennemsnitsacceleration og øjebliksacceleration

# Opsummering af kurset

Bevægelse af stive legemer



Positionen af et objekt beskrives ofte ved at placere et koordinatsystem på objektet, og bestemme dets position og orientering med hensyn til en referenceramme fx placeret på Jorden.

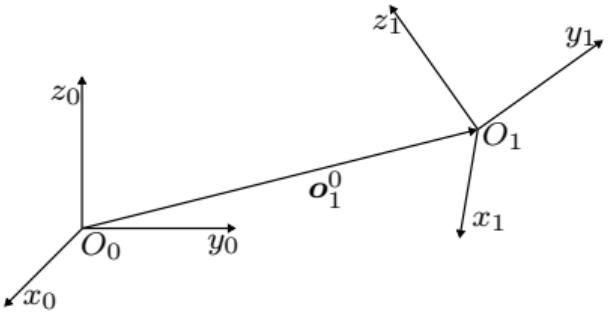


# Opsummering af kurset

Bevægelse af stive legemer



Positionen af et objekt beskrives ofte ved at placere et koordinatsystem på objektet, og bestemme dets position og orientering med hensyn til en referenceramme fx placeret på Jorden.



Relationen mellem to koordinatrammer (0 og 1) beskrives med en homogen transformation

$$T_1^0 = \begin{bmatrix} R_1^0 & o_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

hvor  $R_1^0$  er en  $3 \times 3$  rotationsmatrix og  $o_1^0 \in \mathbb{R}^3$  er en translation.

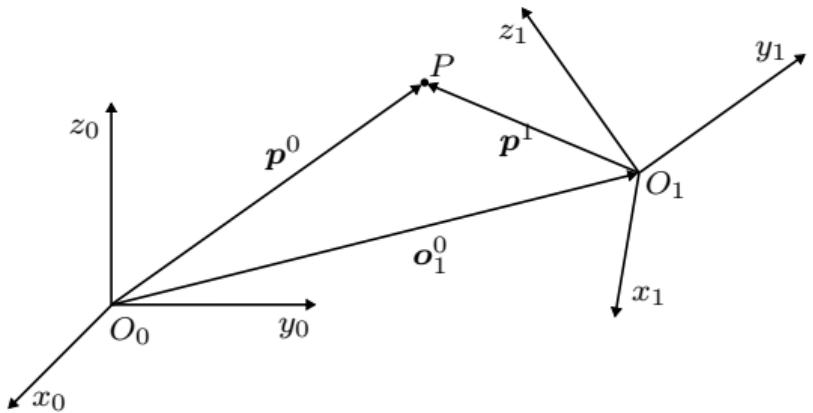
# Opsummering af kurset

Bevægelse af stive legemer



Punktet  $p^1$  beskrives i koordinatramme 0 ( $p^0$ ) ved brug af den homogenetransformation

$$\begin{bmatrix} p^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 & o_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



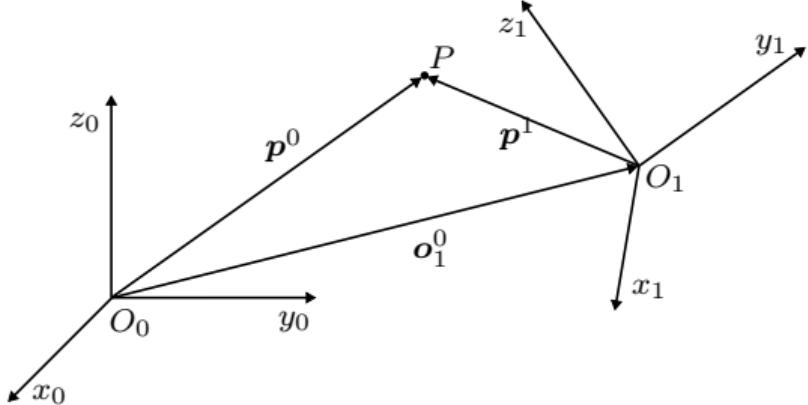
# Opsummering af kurset

Bevægelse af stive legemer



Punktet  $p^1$  beskrives i koordinatramme 0 ( $p^0$ ) ved brug af den homogenetransformation

$$\begin{bmatrix} p^0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1^0 & o_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p^1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



Hastigheden af  $p^1$  i ramme 0 bliver dermed

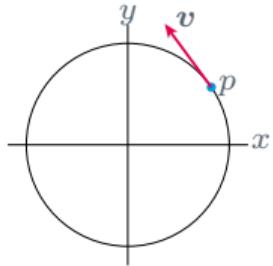
$$\dot{p}^0 = \dot{R}_1^0 p^1 + R_1^0 \dot{p}^1 + \dot{o}_1^0$$

# Opsummering af kurset

## Jævn cirkelbevægelse (I)



En partikel har en jævn cirkelbevægelse, hvis den bevæger sig langs en cirkulær bane med konstant hastighed.

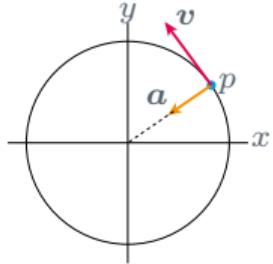


# Opsummering af kurset

## Jævn cirkelbevægelse (I)



En partikel har en jævn cirkelbevægelse, hvis den bevæger sig langs en cirkulær bane med konstant hastighed.



Når partiklen kan bevæge sig i en cirkulær bane, så er der en acceleration imod centrum af cirklen. Denne acceleration kaldes **centripetal accelerationen**.

# Opsummering af kurset

Jævn cirkelbevægelse (II)



Partiklens position kan beskrives ved hjælp af vinklen  $\theta$  som

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos(\theta) \\ r \sin(\theta) \\ 0 \end{bmatrix}$$

Hastigheden for  $p$  er

$$v = \dot{\theta}r$$

Hastigheden for punktet  $p$  kan også udregnes fra krydsproduktet ( $\omega = (0, 0, \dot{\theta})$ )

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \dot{\theta} [r \sin(\theta) \quad r \cos(\theta) \quad 0]^T$$

Centripetal accelerationen er givet som

$$a = \frac{v^2}{r}$$

og periodetiden for cirkelbevægelsen er

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

# Opsummering af kurset

Bevægelse med konstant acceleration



Systemer bevæges ofte med konstant acceleration fx i baneplanlægning for robotter.

## Translatorisk system

Antag at et objekt accelererer med konstant acceleration  $a$ .

Så er objektets hastighed

$$v(t) = \int_0^t ad\tau + v(0) = at + v(0)$$

og objektets position er

$$\begin{aligned} p(t) &= \int_0^t v(\tau)d\tau + p(0) \\ &= \frac{a}{2}t^2 + v(0)t + p(0) \end{aligned}$$

## Rotationelt system

Antag at et objekt accelererer med konstant vinkelacceleration  $\alpha$ .

Så er objektets vinkelhastighed

$$\omega(t) = \int_0^t \alpha d\tau + \omega(0) = \alpha t + \omega(0)$$

og objektets vinkel er

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \int_0^t \omega(\tau)d\tau + \theta(0) \\ &= \frac{\alpha}{2}t^2 + \omega(0)t + \theta(0) \end{aligned}$$

# Opsummering af kurset

Newtons 3 love



## Newton's 1. lov

Påvirkes et legeme ikke af en resulterende kraft, vil det enten ligge stille eller blive ved at bevæge sig med konstant hastighed i samme retning.

## Newton's 2. lov

Den resulterende kraft på et objekt er lig produktet imellem objektets masse og dets acceleration

$$F_{\text{net}} = ma \quad [\text{N}]$$

## Newton's 3. lov

Et legeme der påvirker et anden legeme med en kraft  $F$ , vil blive påvirket af en lige så stor modsatrettet kraft.

# Opsummering af kurset

## Bevægelsesligninger



Vi benytter primært Newtons 2. lov og impulsmomentsætningen til modellering af mekaniske systemer.

### Translatorisk system

Den resulterende kraft på et objekt er lig produktet imellem objektets masse og dets acceleration

$$F_{\text{net}} = ma \quad [\text{N}]$$

hvor  $F_{\text{net}}$  er den resulterende kraft [N],  $m$  er massen af objektet [kg] og  $a$  er accelerationen [ $\text{m/s}^2$ ].

### Rotationelt system

Det resulterende kraftmoment på et objekt er lig produktet mellem objektets inertimoment og dets vinkelacceleration

$$\tau_{\text{net}} = I\alpha \quad [\text{Nm}]$$

hvor  $\tau_{\text{net}}$  er det resulterende kraftmoment [Nm],  $I$  er objektets inertimoment [ $\text{kgm}^2$ ] og  $\alpha$  er vinkelaccelerationen [ $\text{rad/s}^2$ ].

# Opsummering af kurset

Kraftmoment



Hvis en kraft  $F$  påvirker et legeme, så vil den tangentielle kraftkomposant skabe et kraftmoment  $\tau$  omkring rotationsaksen, dvs

$$\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Kraftmomentet vil have størrelsen

$$\tau = r \sin(\phi) F$$

# Opsummering af kurset

Massemidtpunkt og inertি



## Translatorisk system

Massemidtpunktet for en mængde af partikler er

$$\mathbf{r} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$$

hvor  $m_i$  er massen for partikel  $i$ ,  $\mathbf{r}_i$  er positionen for partikel  $i$  og  $m_{\text{tot}}$  er den samlede masse for alle partiklerne.

## Rotationelt system

Inertimomentet for et objekt kan skrives som

$$I = \int r^2 dm$$

hvor  $r$  er afstanden fra omdrejningsaksen [m] og  $m$  er masse fordelingen [kg].

# Opsummering af kurset

Parallelakse sætningen



Udregning af inertimomentet for et objekt omkring en given akse kan simplificeres ved brug af parallelakse sætningen.

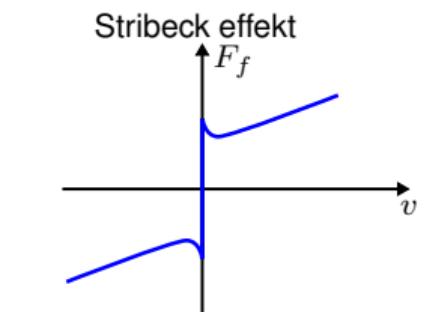
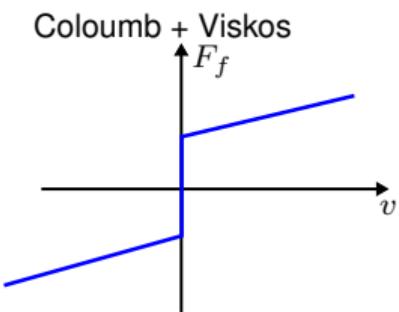
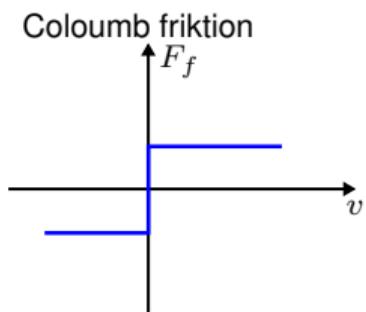
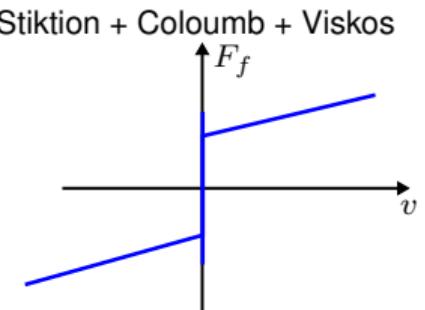
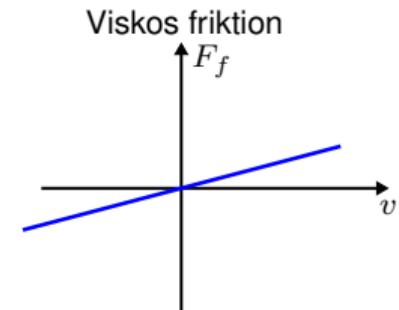
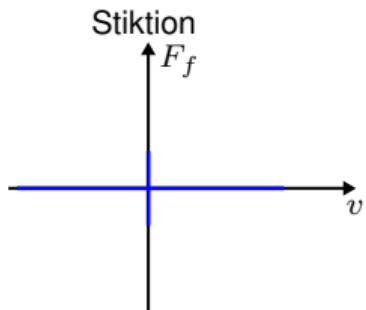
## Parallelakse sætningen (Steiners sætning)

Lad  $I_{\text{com}}$  være inertien omkring en akse, der går igennem massemidtpunktet af et objekt med massen  $m$ . Inertien omkring en akse parallelforskudt en afstand  $h$  i forhold til den for  $I_{\text{com}}$  er

$$I = I_{\text{com}} + mh^2$$

# Opsummering af kurset

Friktion

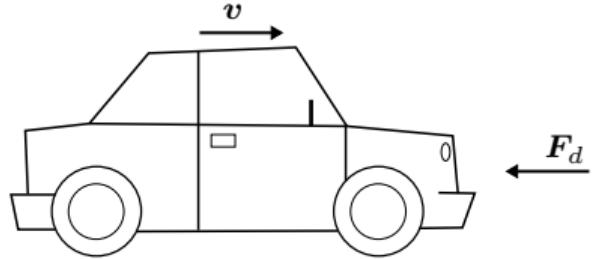


# Opsummering af kurset

Vindmodstand



Vindmodstanden er altid modsatrettet bevægelsesretningen  $v$ .

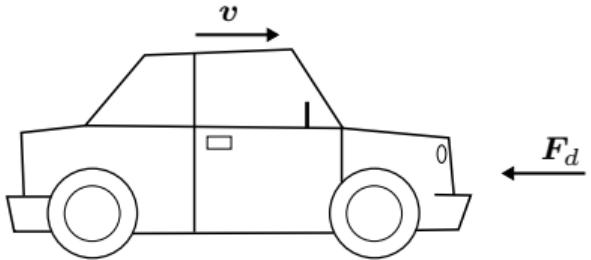


# Opsummering af kurset

## Vindmodstand



Vindmodstanden er altid modsatrettet bevægelsesretningen  $v$ .



Størrelsen af vindmodstanden er

$$F_d = \frac{1}{2} C \rho A v^2 \quad [\text{N}]$$

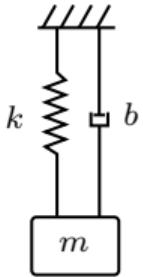
hvor  $C$  er luftmodstandscoeficienten,  $\rho$  er densiteten af luft  $[\text{kg}/\text{m}^3]$  og  $A$  er arealet af det bevægende objekt i retning af bevægelsen  $[\text{m}^2]$ .

# Opsummering af kurset

Fritlegemeanalyse



## Diagram af system

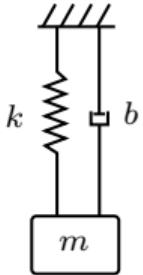


# Opsummering af kurset

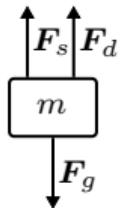
Fritlegemeanalyse



## Diagram af system



Hver komponent (fjeder, dæmper etc.) kan erstattes af en kraft

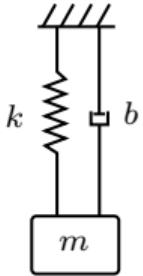


# Opsummering af kurset

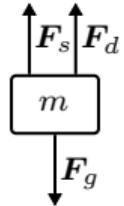
Fritlegemeanalyse



## Diagram af system



Hver komponent (fjeder, dæmper etc.) kan erstattes af en kraft



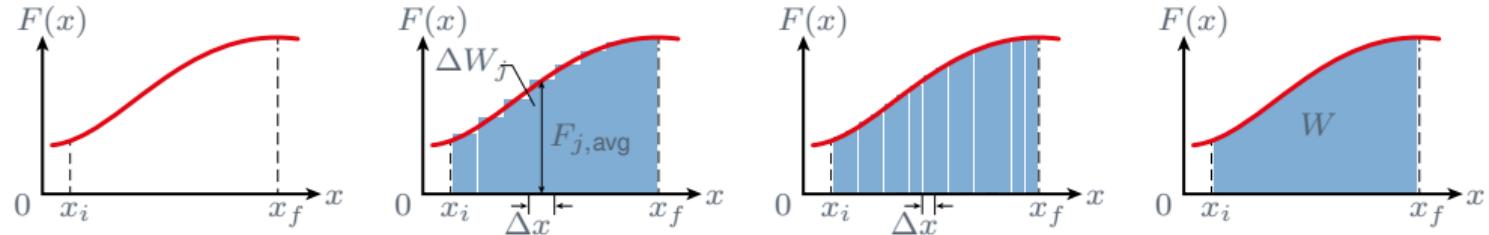
Dette kaldes et **fritlegeme diagram**.

# Opsummering af kurset

Arbejde udført af varierende kraft



For at finde arbejdet udført af en varierende kraft, så opdeles strækningen i små forskydninger  $\Delta x$ . Den varierende kraft tilnærmes med stykvis konstant kraft.



Arbejdet udført af en varierende kraft  $F(x)$  er dermed

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

# Opsummering af kurset

Bevarelse af mekanisk energi



Den totale mekaniske energi af et system er

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \quad [\text{J}]$$

# Opsummering af kurset

Bevarelse af mekanisk energi



Den totale mekaniske energi af et system er

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \quad [\text{J}]$$

Det antages at et mekanisk system ikke påvirkes af eksterne krafter, og at det kun er påvirket af en konservativ kraft (systemet er isoleret). Så gælder

$$\Delta E_{\text{kin}} = W \quad \Delta E_{\text{pot}} = -W$$

# Opsummering af kurset

Bevarelse af mekanisk energi



Den totale mekaniske energi af et system er

$$E_{\text{mec}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \quad [\text{J}]$$

Det antages at et mekanisk system ikke påvirkes af eksterne krafter, og at det kun er påvirket af en konservativ kraft (systemet er isoleret). Så gælder

$$\Delta E_{\text{kin}} = W \quad \Delta E_{\text{pot}} = -W$$

Dermed bevares den mekaniske energi

$$E_{\text{kin}}(t_2) + E_{\text{pot}}(t_2) = E_{\text{kin}}(t_1) + E_{\text{pot}}(t_1)$$

# Opsummering af kurset

Konservativ kraft: Egenskab



En konservativ kraft har følgende egenskab:

*Det resulterende arbejde udført af en konservativ kraft på en partikel der bevæger sig gennem enhver lukket bane er nul.*

*Arbejdet der udføres af en konservativ kraft på en partikel der bevæger sig imellem to punkter er uafhængig af vejen imellem de to punkter.*

# Opsummering af kurset

Potentiel energi af fjeder



Ændringen af potentiel energi for en fjeder kan også bestemmes ud fra

$$\Delta E_{\text{pot}} = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

hvor  $F(x)$  er givet fra Hooks lov som

$$F(x) = -kx$$

# Opsummering af kurset

Potentiel energi af fjeder



Ændringen af potentiel energi for en fjeder kan også bestemmes ud fra

$$\Delta E_{\text{pot}} = - \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

hvor  $F(x)$  er givet fra Hooks lov som

$$F(x) = -kx$$

Vi definerer den potentielle energi til at være nul for  $x = 0$ . Da gælder

$$E_{\text{pot}}(x) = \frac{1}{2} kx^2$$

# Opsummering af kurset

Kinetisk energi



Den kinetiske energi for et system med både translatorisk og rotationel bevægelse er

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}I_{\text{com}}\omega^2 + \frac{1}{2}Mv_{\text{com}}^2$$

hvor  $I_{\text{com}}$  er inertimomentet omkring massemidtpunktet,  $M$  er den totale masse for systemet og  $v_{\text{com}}$  er den translatoriske hastighed af massemidtpunktet.

# Opsummering af kurset

Euler-Lagrange Modellering: Lagrange–D'Alemberts princip



Hvis  $q$  er et trajektorie for et mekanisk system, der er påvirket af en generaliseret kraft  $Q$  så gælder

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = Q$$

hvor  $Q$  er en  $n$ -dimensionel vektor af generaliserede krafter og  $\mathcal{L}$  er Lagrangian givet ved

$$\mathcal{L} = E_{\text{kin}} - E_{\text{pot}} \quad [\text{J}]$$

# Opsummering af kurset

Definition af bevægelsesmængde



Den lineære bevægelsesmængde  $p$  for en partikel er defineret som

$$p = mv$$

hvor  $m$  er partiklens masse [kg] og  $v$  er partiklens hastighed [m/s].

Den angulære bevægelsesmængde  $l$  af en partikel med hensyn til origo  $O$  er defineret som

$$l = r \times p = m(r \times v)$$

hvor  $r$  er partiklens position og  $p$  er partiklens lineære impuls.

# Opsummering af kurset

Definition af bevægelsesmængde



Den lineære bevægelsesmængde  $p$  for en partikel er defineret som

$$p = mv$$

hvor  $m$  er partiklens masse [kg] og  $v$  er partiklens hastighed [m/s].

Den angulære bevægelsesmængde  $l$  af en partikel med hensyn til origo  $O$  er defineret som

$$l = r \times p = m(r \times v)$$

hvor  $r$  er partiklens position og  $p$  er partiklens lineære impuls.

Størrelsen på den angulære bevægelsesmængde er

$$l = rmv \sin \phi$$



Når to partikler kolliderer, så bevares bevægelsesmængden, mens stødet klassificeres ud fra ændringen i systemets totale kinetiske energi.

- ▶ **Elastisk stød:** Hvis den samlede kinetiske energi for to partikler bevares efter et stød, så er stødet elastisk.
- ▶ **Uelastisk stød:** Hvis den samlede kinetiske energi for to partikler forminskes efter et stød, så er stødet uelastisk.



Et stød mellem to partikler kan karakteriseres ud fra **restitutionskoefficienten**, der har en værdi imellem 0 og 1. Restitutionskoefficient for to partikler, der kolliderer til tiden  $t$  er defineret som

$$C_R = \frac{v_b(t^+) - v_a(t^+)}{v_a(t^-) - v_b(t^-)} \quad [1]$$

hvor  $v_a$  er hastigheden af Partikel  $a$  [m/s] og  $v_b$  er hastigheden af Partikel  $b$  [m/s].

Vi kategoriserer stød som følger

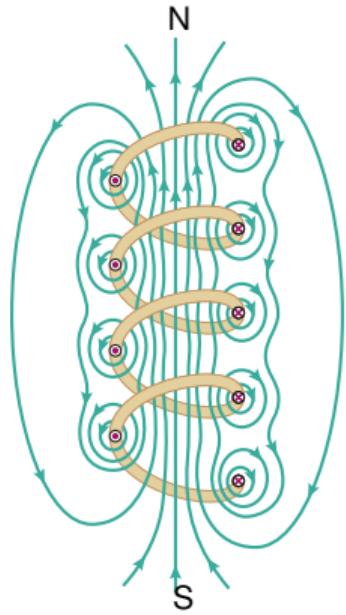
- ▶ Perfekt elastisk stød  $C_R = 1$ :
- ▶ Uelastisk stød  $C_R \in (0, 1)$
- ▶ Perfekt uelastisk stød  $C_R = 0$

# Opsummering af kurset

## Elektromagnetisme (I)



Til modellering af en DC motor benyttes Biot-Savarts lov, Lorentz kraften og Faraday's induktionslov. Vi studerer primært en solenoid som vist på figuren.



# Opsummering af kurset

## Elektromagnetisme (I)

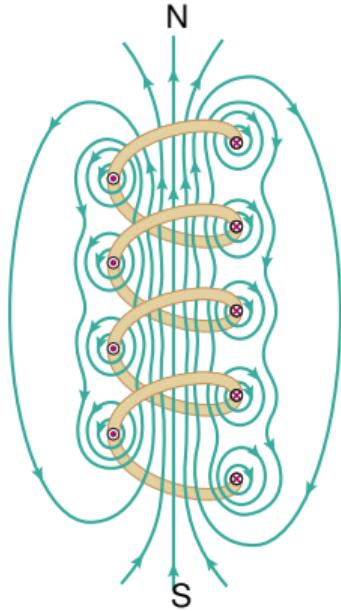


Til modellering af en DC motor benyttes Biot-Savarts lov, Lorentz kraften og Faraday's induktionslov. Vi studerer primært en solenoid som vist på figuren.

Det **magnetiske felt** for en solenoid kan bestemmes til

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

hvor  $N$  er antallet af vindinger og  $l$  er længden af solenoiden.



# Opsummering af kurset

## Elektromagnetisme (I)



Til modellering af en DC motor benyttes Biot-Savarts lov, Lorentz kraften og Faraday's induktionslov. Vi studerer primært en solenoid som vist på figuren.

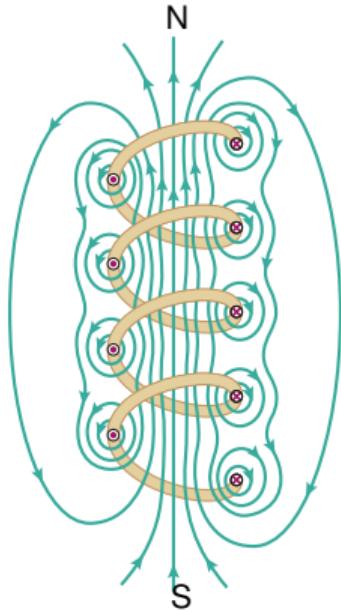
Det **magnetiske felt** for en solenoid kan bestemmes til

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I$$

hvor  $N$  er antallet af vindinger og  $l$  er længden af solenoiden.

Ligeledes kan det **magnetiske fluks** igennem en solenoid udregnes som

$$\Phi = BA = \mu_0 \frac{N}{l} IA$$



# Opsummering af kurset

## Elektromagnetisme (II)



En ladning der bevæger sig med hastighed  $v$  i både et elektrisk felt  $E$  og et magnetisk felt  $B$ , påvirkes af både en elektrisk kraft  $qE$  og en magnetisk kraft  $qv \times B$ . Den totale kraft, kaldet **Lorentz kraft**, er

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

# Opsummering af kurset

Elektromagnetisme (II)



En ladning der bevæger sig med hastighed  $v$  i både et elektrisk felt  $E$  og et magnetisk felt  $B$ , påvirkes af både en elektrisk kraft  $qE$  og en magnetisk kraft  $qv \times B$ . Den totale kraft, kaldet **Lorentz kraft**, er

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

Hvis der er et varierende magnetiske fluks  $\Phi_c$  i nærheden af en lukket leder, så er den **elektro-motoriske kraft**  $e$  induceret i ledningen

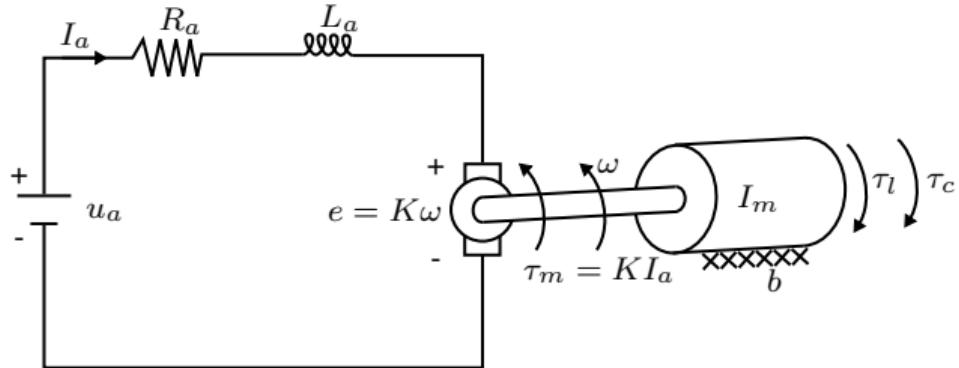
$$e = -\frac{d\Phi_c}{dt} \quad [\text{V}]$$

# Opsummering af kurset

## Børstet DC motoren



En børstet DC motor kan modelleres ved brug af følgende diagram.

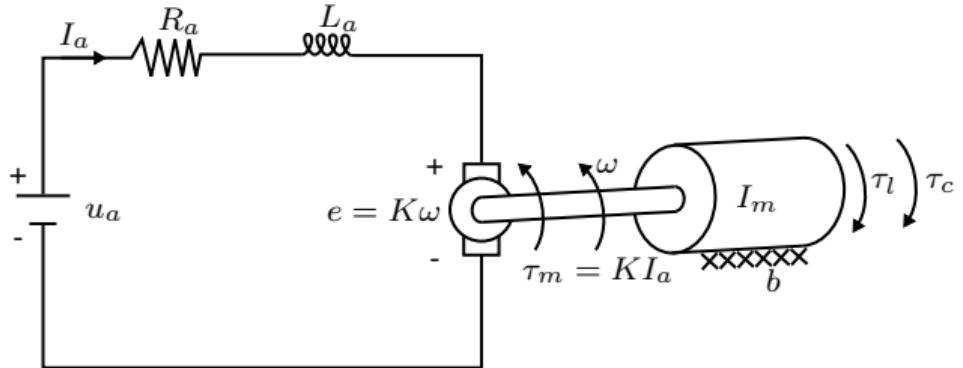


# Opsummering af kurset

Børstet DC motoren



En børstet DC motor kan modelleres ved brug af følgende diagram.



Det elektriske system modelleres som

$$u_a = R_a I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} + K\omega \quad [\text{V}]$$

Det mekaniske system modelleres som

$$I_m \dot{\omega} = K I_a - b\omega - \tau_l - \tau_c \quad [\text{Nm}]$$