

Kapitel 2

DC motoren

Elektromotorer findes i et utal af typer til forskellige anvendelser. Formålet med dette kapitel er som et eksempel at opstille en dynamisk model for en DC-motor med permanent magnet og vise eksempler på hvorledes de vigtigste parametre kan bestemmes dels ud fra datablad-soplysninger og dels ud fra forsøg. Vægten vil blive lagt på at bestemme parametre ud fra dedikerede forsøg. I kurset 'Eksperimentel modeldannelse og simulering' bestemmes parametre ud fra en anden type forsøg hvor man ved et enkelt eksperiment søger at excitere systemet på en sådan måde at alle parametre i den dynamiske model kan bestemmes.

2.1 Model af DC motoren

Fra kurset 'Elektriske maskiner' kender de fleste af jer modellen for en permanent magnet DC-motor. For D-studerende gives her en kort introduktion til modellen.

De kræfter der genererer motorens moment fremkommer ved at man bevæger en leder i et magnetisk felt

$$d\mathbf{f} = i(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (2.1)$$

hvor $d\mathbf{f}$ er kraften på det infinitesimale lederstykke $d\mathbf{l}$ der befinder sig i et magnetfelt med fluxtætheden \mathbf{B} og gennemløbes af strømmen i . For en roterende DC-motor vil ledernes orientering overalt være tilnærmelsesvis vinkelret på magnetfeltet. Det samlede moment (engelsk: torque, symbol ofte τ) udviklet i motoren der gennemløbes af strømmen i_a vil derfor være givet ved

$$\tau_m = i_a l B r = K i_a \quad (2.2)$$

hvor l er den samlede længde af vindingerne i magnetfeltet (ankervindingen) og r er den (middel)radius hvor vindingerne er placeret. K benævnes ofte momentkonstanten. Når rotoren har drejet 180° vil lederne møde magnetfeltet i modsat retning og vil derfor yde moment i modsat omdrejningsretning. For at få motoren til at rotere rundt i samme retning bruger man derfor en kommutator som sørger for at omkoble vindinger så de her møder magnetfeltet med modsat strømretning. Kommutatoren bruges samtidig til at overføre strømmen fra stator til rotor.

Når en leder bevæges i et magnetfelt fremkommer der en elektromotorisk kraft givet ved

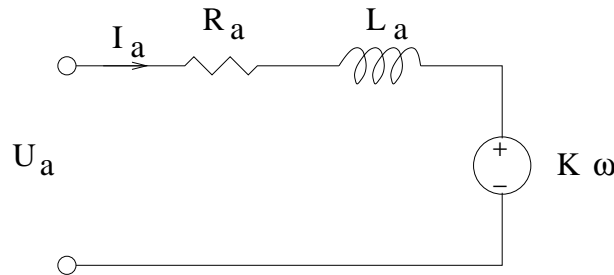
$$de = (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \quad (2.3)$$

hvor de er den elektromotoriske kraft introduceret i $d\mathbf{l}$ og \mathbf{v} er hastighedsvektoren. For hele DC-motoren kan dette integreres op til

$$e_m = \omega r B l = K \omega \quad (2.4)$$

hvor ω er motorakslens vinkelhastighed. K som er den samme konstant som introduceredes i momentligningen.

For DC-motoren kan følgende elektriske ækvivalent opstilles:

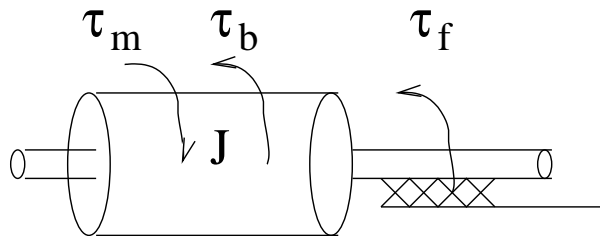


Figur 2.1: Elektrisk ækvivalent af DC-motor.

På figur 2.1 er R_a den Ohmske modstand i viklingen. L_a er viklingens selvinduktion. U_a er den påtrykte ankerspænding. Dette giver ligningen

$$U_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + K \omega \quad (2.5)$$

Den mekaniske del af DC-motoren kan ækvivaleres med



Figur 2.2: Ækvivalent for rotation af motorens aksel.

På figuren er J motorakslens inertimoment, τ_f er det samlede friktionsmoment og τ_b er momentet fra den ydre belastning. Ved at anvende impulsmomentsætningen fås ligningen

$$J \frac{d\omega}{dt} = \tau_m - \tau_b - \tau_f(\omega, \tau_m - \tau_b) \quad (2.6)$$

Friktionen τ_f er en kompliceret funktion, som der stadig forskes i. Ofte bruges en enkel model bestående af tre led: Et lineært led proportionalt med ω . Dette er ækvivalent med den friktion der forekommer i væsker med laminar flow og kaldes væskefriktion eller viskos friktion. Et led kaldet tørfriktion eller Coulomb friktion er bestemt af normalkraften i lejerne og er ved rotation kun afhængigt af omdrejningshastighedens fortegn. Et sidste led er stiktion som kun

optræder når motoren står stille og ved meget små hastigheder, og tager højde for at der skal et større moment til at starte rotationen end til at køre med en hastighed der nærmer sig nul. Denne model er en statisk model og skal anvendes med forsigtighed da fænomenerne omkring hastigheden nul i realiteten er dynamiske af natur. Det samlede udtryk for friktionsmomentet bliver nu

$$\tau_f = \begin{cases} b\omega + \text{sign}(\omega)\tau_c & \text{if } \omega \neq 0 \\ \tau_m - \tau_b & \text{if } (\omega = 0) \& (\text{abs}(\tau_m - \tau_b) \leq (\tau_c + \tau_s)) \\ (\tau_c + \tau_s)\text{sign}(\tau_m - \tau_b) & \text{if } (\omega = 0) \& (\text{abs}(\tau_m - \tau_b) > (\tau_c + \tau_s)) \end{cases} \quad (2.7)$$

hvor τ_s er stiktionsmomentet. τ_s kan forklare det ekstra startmoment der skal til for at få motoren til at dreje når den har holdt stille, men er vanskeligt at bruge i reguleringsmodeller og simuleringssmodeller.

2.2 Bestemmelse af parametre

Den model der blev opstillet for DC-motoren ovenfor har parametrene R_a , L_a , K , J , b , τ_c og τ_s . Spørgsmålet er nu om disse parametre kan bestemmes ved laboratorieforsøg. Typisk er R_a , L_a , K og J opgivet i databladet for motoren. En del af parametrene kan f.eks. være opgivet i form af belastningskarakteristikker hvor omdrejningshastigheden og ankerstrømmen angives som funktion af belastningsmomentet (hvilke parametre vil man kunne bestemme fra en sådan karakteristisk ?)

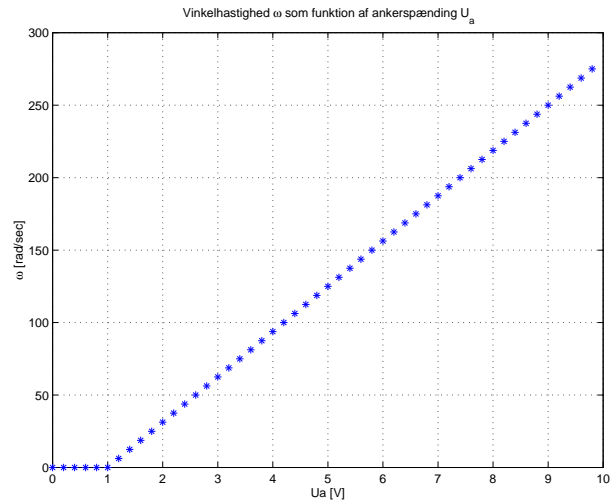
2.2.1 Eksperimentel bestemmelse af K , R_a , τ_c og b

Som alternativ, kontrol eller supplement til databladsoplysninger kan motordata bestemmes ved eksperimenter. Man kan eksempelvis selv måle belastningskarakteristikker med varierende belastningsmoment. Man kan dog også bestemme parametre uden at skulle have en kontrolleret belastning. Vi vil her beskrive en metode hvor parametrene bestemmes ud fra et eksperiment hvor den stationære vinkelhastighed og ankerstrøm måles ved forskellige anker-spændinger. Med den model der er udledt ovenfor vil kurverne få et forløb som vist på figur 2.3 og 2.4

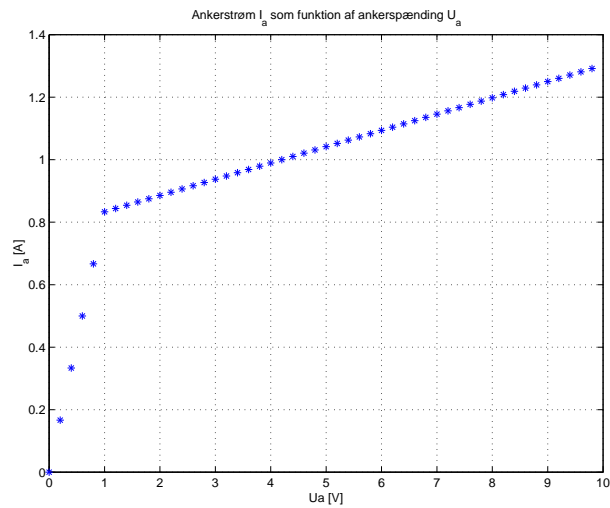
Det ses at når spændingen er stor nok til at overvinde Coulomb friktionen beskriver ω og i_a rette linier som funktioner af u_a . I praksis vil der naturligvis være afvigelser herfra og for at få en anvendelig model kan man lægge en ret linie ind i det spændingsområde modellen (motoren) skal bruges. Man kan bruge to sæt sammenhørende værdier af u_a , ω i_a τ_b og skrive den stationære model op

$$\begin{aligned} \omega_1 K + i_{a1} R_a &= u_{a1} \\ i_{a1} K - \tau_c - \omega_1 b &= \tau_{b1} \\ \omega_2 K + i_{a2} R_a &= u_{a2} \\ i_{a2} K - \tau_c - \omega_2 b &= \tau_{b2} \end{aligned}$$

Disse ligninger kan løses med hensyn til de 4 parametre K , R_a , τ_c og b idet de udgør et lineært ligningssystem. Når motoren ikke belastes men spændingen varieres bliver $\tau_{b1} = \tau_{b2} = 0$. I



Figur 2.3: Motorens vinkelhastighed som funktion af ankerspænding.



Figur 2.4: Motorens ankerstrøm som funktion af ankerspænding.

et belastningsforsøg hvor spændingen fastholdes men belastningsmomentet varieres kan man bruge samme ligninger men med $\tau_b \neq 0$

2.2.2 Bestemmelse af R_a og L_a

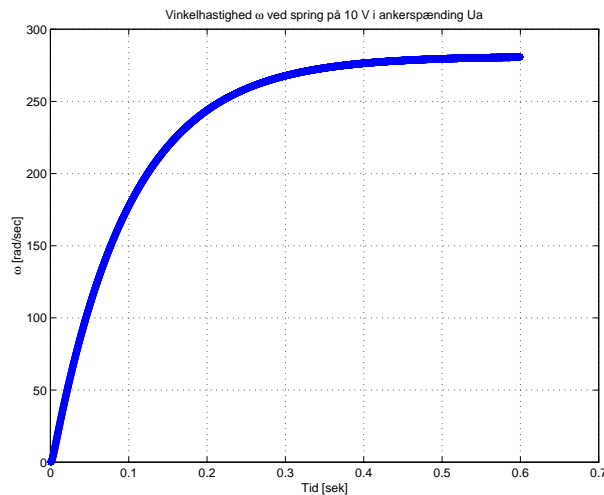
Fastholdes rotoren giver ligning 2.5 en ligning til bestemmelse af R_a og L_a . Ved at påtrykke et spring i ankerspændingen U_a fås et opvoksningsforløb for strømmen med en tidskonstant på L_a/R_a og en stationær værdi på $i_a = U_a/R_a$ herved bestemmes R_a og L_a . bemærk at R_a på grund af spændingsfald i kommutatoren kan være ulineær. Der kan derfor være grund til at måle ved flere spændingsniveauer. Ligeledes kan spændingsfaldet ved kommutering være afhængigt af om motoren roterer eller ikke. Da motoren skal bruges kørende kan det også være en mulighed kun at bruge dette eksperiment til at bestemme L_a

2.2.3 Bestemmelse af motorens inertimoment J

Ved at lave spring i u_a vil man kunne registrere responserne på ω og i_a . Sådanne spring vil se ud som vist på figurerne 2.5 og 2.6 (beregnet med $J = 8.0 \cdot 10^{-5} \text{ kgm}$, $L_a = 2.4 \text{ mH}$). Selv om vores model er af orden 2 (en orden for selvinduktionen og en orden for inertimomentet) kan det ses at de er domineret af en tidskonstant. Det skyldes at den elektriske tidskonstant L_a/R_a i dette tilfælde (som mange andre) er meget mindre end den mekaniske så man med god tilnærmelse kan se bort fra L_a i modellen. Fra begge kurver vil man kunne aflæse den kombinerede tidskonstant man får, hvis man regner overføringsfunktionen uden L_a .

$$\tau = \frac{R_a J}{R_a b + K^2} \quad (2.8)$$

Herudfra kan man bestemme J når de andre parametre er kendt



Figur 2.5: Motorens vinkelhastighed efter spring i ankerspænding.

En alternativ måde at beregne J er at udføre forsøg hvor motorens terminaler er afbrudt kan man måle egenskaberne af motorens roterende system, som så er bestemt af følgende differentialligning

$$J \frac{d\omega}{dt} = -\tau_f(\omega, \tau_m - \tau_b) \quad (2.9)$$

Hvis man nu sætter rotoren til at rotere med positivt omløbstal vil friktionen være bestemt så differentialligningen bliver

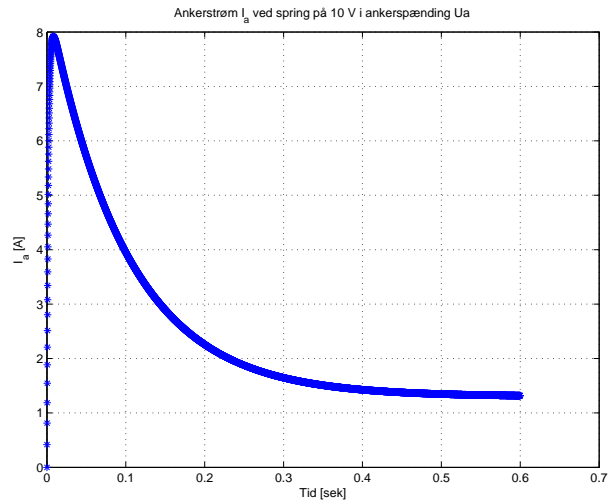
$$J \frac{d\omega}{dt} = b\omega - \tau_c \quad (2.10)$$

Man kan nu måle den mekaniske tidskonstant ved at betragte udløbskurven se fig 2.7:

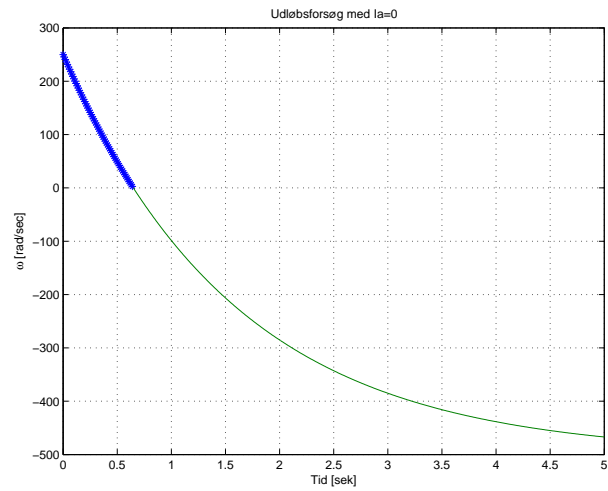
$$\omega(t) = (\omega_0 + \frac{\tau_c}{b}) \exp(-\frac{t}{\tau_{mek}}) - \frac{\tau_c}{b} \quad (2.11)$$

hvor

$$\tau_{mek} = \frac{J}{b} \quad (2.12)$$



Figur 2.6: *Motorens ankerstrøm efter spring i ankerspænding.*



Figur 2.7: *Motorens vinkelhastighed ved udløb når motorstrømmen er afbrudt.*

Ligning 2.11 vil selvfølgelig kun gælde for $\omega > 0$, når omløbshastigheden bliver nul stopper motoren. Hvis man gentager udløbsforsøget hvor inertimomentet er forøget med en kendt størrelse J_1 vil det være muligt at bestemme flere af de indgående konstanter

$$\tau_1 = \frac{J + J_1}{b} \quad (2.13)$$

eller

$$J = J_1 \frac{\tau_{mek}}{\tau_1 - \tau_{mek}} \quad (2.14)$$

$$b = \frac{J_1}{\tau_1 - \tau_{mek}} \quad (2.15)$$

Kapitel 3

Den børsteløse DC-motor

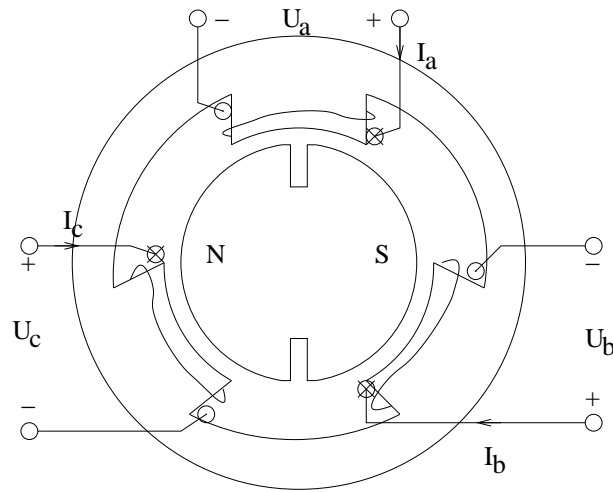
I en DC-motor leverer en permanent magnet eller en vikling på stator et konstant felt. På rotoren sidder der viklinger, som påvirkes af et moment når de i magnetfeltet gennemløbes af en strøm. For at overføre strømmen til rotoren og for at kunne opretholde et moment og en rotation i en bestemt omdrejningsretning bruges en kommutator med slæbesko på motorakslen til at koble viklingerne ind med den rigtige strømretning ved rotorvinkler, hvor magnetfeltets orientering kombineret med en given strømretning giver et moment i den ønskede retning. Kommutteringen sker her mekanisk og giver sammtidig en overføring af strøm til en roterende aksel. DC-motoren er simpel at anvende i servostyringer, idet der ydes et moment der tilnærmelsesvis er proportionalt med den strøm der føres til kommutatoren. Momentets retning ændres helt enkelt ved at ændre strømretningen. Til gengæld er kommutatoren en sårbar og veligholdelseskrevende komponent, idet strømmen overføres via kul/børster som slides, og et alternativ kan være en børsteløs DC-motor, hvor kommutteringen sker elektronisk. Når man skal lave elektronisk kommuttering er det en fordel, hvis man samtidig kan slippe for det problem at skulle overføre strømmen til en roterende aksel.

3.0.4 Princip for den børsteløse DC-motor

En børsteløs DC-motor er motor hvor viklingen er placeret på stator. Rotor er en permanent magnet. Man har altså i forhold til en permanent magnet DC-motor ombyttet placeringen af vikling og permanent magnet. Se principskitsen figur 3.1

Motoren fungerer ved at man påtrykker en spænding på en vinding der kan give rotoren et moment. På figur 3.1 vil der i den viste rotorposition fås et moment med uret ved at sætte en positiv strøm på vikling a, idet der så vil være sydpol mod rotoren som tiltrækker rotorens nordpol. Denne tiltrækning vil være tilstede indtil rotorens nordpol dækker hele statorpol a (idet statorens tappe og mellemrum hver fylder $\pi/3$ vil det ske ved en vinkeldrejning på $\pi/6$ regnet fra den viste position). I den viste vinkel vil der ikke fås noget moment ved at sende strøm gennem de andre viklinger. Fra vinklen $\pi/6$ til $3\pi/6$ vil sydpolen tiltrækkes og nordpolen frastødes pol c når der sendes negativ strøm gennem vikling c. Fra $3\pi/6$ til $5\pi/6$ opnås positivt moment med positiv strøm gennem vikling b o.s.v. Bemærk at rotoren er udformet så nordpol og sydpol udgør tilnærmelsesvis hver sin halvcylinder. Der vil også kunne laves en udformning med 6 viklinger på stator og en rotor hvor sydpol og nordpol hver fylder $\pi/2$.

For at påvirke motoren med et kontinuerligt moment skal man koble strømme ind på de



Figur 3.1: *Principskitse af en børsteløs dc-motor.*

enkelte viklinger i et mønster som funktion af rotorens vinkel. Man har derfor behov for at måle rotorens position for at kunne foretage denne styring af strømmene korrekt. Der kan anvendes flere principper for denne måling. Nogle fabrikanter måler positionen ved hjælp af et Hall-element, som påvirkes af magnetfeltet fra rotoren. Andre anvender en optisk måling af rotorvinklen.

3.0.5 Idealiseret model for den børsteløse DC-motor

Modellen for motoren kan tage udgangspunkt i samme formler som DC-motoren, nemlig

$$d\mathbf{f} = i(d\mathbf{l} \times \mathbf{B}) \quad (3.1)$$

Når lederne i højre side af vikling a som vist på figur 3.1 befinder sig ud for rotorens sydpol og viklingerne i venstre side befinder sig ud for rotorens nordpol vil de kræfter der virker på de to spolehalvdele understøtte hinanden da strømretningen er modsat i de to sider. Hvis B-feltets størrelse er den samme på de to sider bliver den samlede kraft

$$F_a = 2i_a n l B \quad (3.2)$$

hvor B er B-feltets styrke, l er længden af den del af viklingen der ligger i feltet n er antallet af viklinger. Denne kraft vil virke mod venstre på spolerne, svarende til at (reaktions)kraften på rotoren virker mod højre, så det giver et moment på

$$\tau_a = 2i_a n l B r \quad (3.3)$$

hvor r er den afstand viklingen sidder fra omdrejningspunktet.

Ofte udtrykker man kræfter og momenter ved hjælp af ændringen i magnetisk flux Φ gennem viklingen eller ændringen i fluxvindingstallet λ . Fluxvindingstallet for vikling a kan udtrykkes

$$\lambda_a \simeq n\Phi_a = n \int_{flade_a} B dA \simeq 0 \quad (3.4)$$

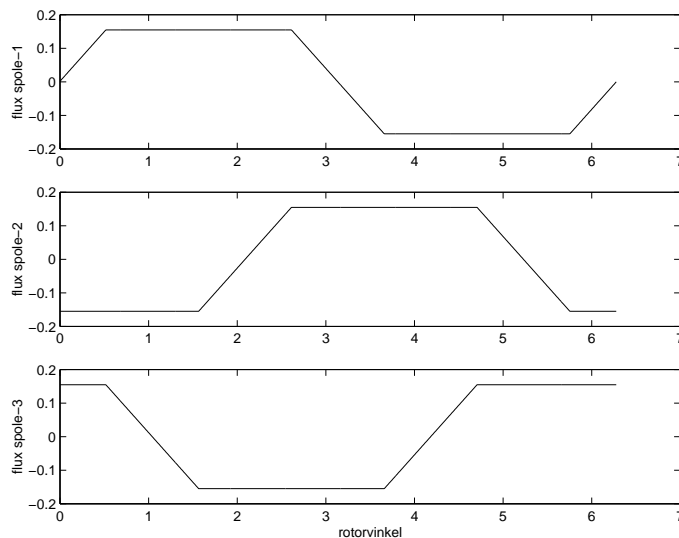
Grunden til \simeq er at de enkelte vindinger er forskudt lidt for hinanden og derfor kan have forskellig flux. Når rotoren drejes ændres fluxen og vi får i situationen på figur 3.1

$$\frac{d\lambda_a}{d\theta} \simeq 2nlBr \quad (3.5)$$

Momentet kan nu (lidt mere generelt) udtrykkes ved

$$\tau_a = \frac{d\lambda_a}{d\theta} i_a \quad (3.6)$$

Rotoren er vist udformet så det tilstræbes at B-feltet er homogent og vinkelret på overfladen af de to rotorhalvdele. Tilnærmet får vi derfor at for en vikling vil λ ændres stykkevis lineært med θ således at den vokser i det vinkelinterval hvor sydpolen forlader viklingen og nordpolen glider ind over viklingen. Tilsvarende aftager λ med voksende θ i det vinkelinterval hvor nordpolen forlader viklingen og sydpolen glider ind over viklingen. Sammenfattende får vi et forløb for λ som funktion af θ for de tre vindinger som vist på figur 3.2



Figur 3.2: Idealiseret forløb af λ som funktion af θ for de 3 viklinger.

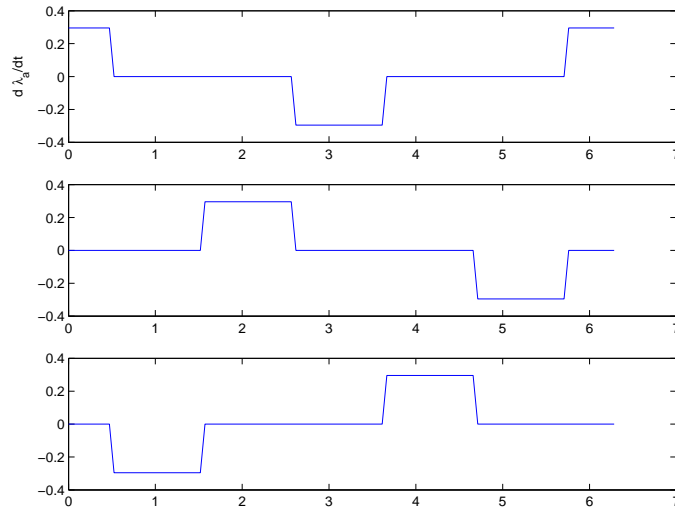
Tilsvarende forløb for $\frac{d\lambda}{d\theta}$ er vist på figur 3.3

I den børsteløse dc-motor optræder også en modelektromotorisk kraft. Denne kan opstilles på vektorform med en komponent for hver vikling. Denne kan bestemmes ved

$$e = \begin{bmatrix} \frac{d\lambda_a(\theta(t))}{dt} \\ \frac{d\lambda_b(\theta(t))}{dt} \\ \frac{d\lambda_c(\theta(t))}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\lambda_a}{d\theta} \\ \frac{d\lambda_b}{d\theta} \\ \frac{d\lambda_c}{d\theta} \end{bmatrix} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\lambda}{d\theta} \omega(t) \quad (3.7)$$

hvor $\frac{d\lambda}{d\theta} = [\frac{d\lambda}{d\theta} \frac{d\lambda}{d\theta} \frac{d\lambda}{d\theta}]^T$ I kredsløbet optræder ligeledes selvinduktion. Når en vikling gennemløbes af en strøm vil de magnetiske feltlinier fra viklingen gå gennem de andre viklinger, og der vil derfor induceres spændinger i disse viklinger. Dette kan beskrives som gensidige induktioner og resulterer i en induktionsmatrix

$$L = \begin{bmatrix} L_s + L_m & -0.5L_m & -0.5L_m \\ -0.5L_m & L_s + L_m & -0.5L_m \\ -0.5L_m & -0.5L_m & L_s + L_m \end{bmatrix} \quad (3.8)$$



Figur 3.3: *Idealiseret forløb af $\frac{d\lambda}{d\theta}$ som funktion af θ for de 3 viklinger.*

hvor de offdiagonale elementer har en faktor -0.5 da feltlinierne og det deraf følgende fluxvindingstal fra en spole deler sig lige mellem de to andre spoler med modsat retning. Hver spole har ligeledes en resistans

$$R = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & R & 0 \\ 0 & 0 & R \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Der kan nu opskrives kredsløbsligninger ligeledes på matrixform

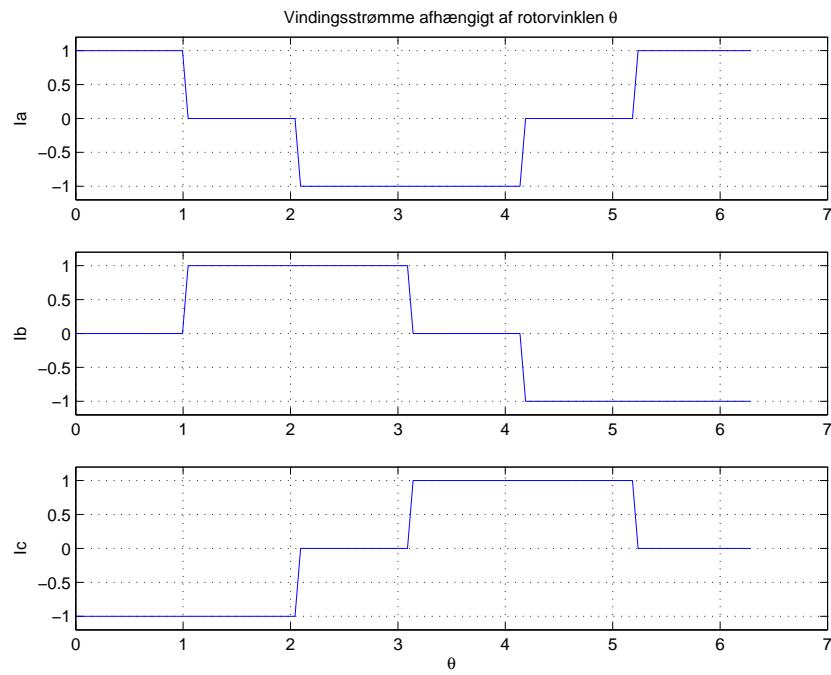
$$U_v = RI_v + L \frac{dI_v}{dt} + \frac{d\lambda}{d\theta} \omega(t) \quad (3.10)$$

$$U_v = \begin{bmatrix} U_a(t) \\ U_b(t) \\ U_c(t) \end{bmatrix} \quad I_v = \begin{bmatrix} I_a(t) \\ I_b(t) \\ I_c(t) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

3.0.6 Styling af den børsteløse DC-motor

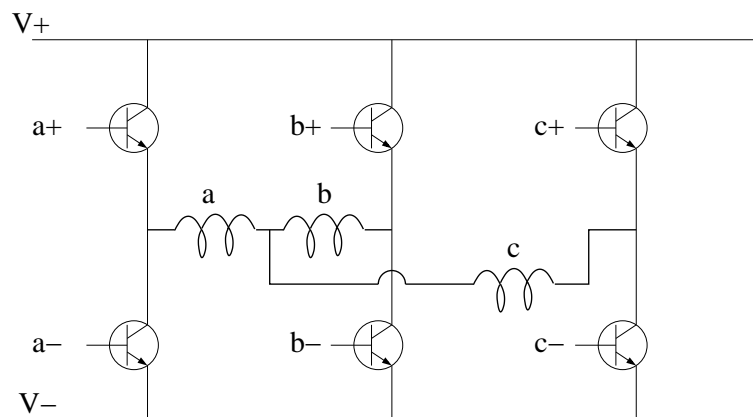
Betrakter man figur 3.3 ses at hvis man ønsker at påtrykke et positivt moment kan dette gøres ved at sende strøm gennem den tre viklinger i et sådant mønster at der går en positiv strøm gennem en vikling med en positiv $\frac{d\lambda}{d\theta}$ eller en negativ strøm gennem en vikling med negativ $\frac{d\lambda}{d\theta}$. Gennem viklinger hvor $\frac{d\lambda}{d\theta} = 0$ kan man lede en vilkårlig strøm uden at det påvirker momentet, disse kan altså bruges til at lukke et kredsløb, så man undgår at skulle have 4 transistorer pr vikling. for hele tiden at påtrykke positivt moment kan man altså bruge den på figur 3.4 viste sammenhæng mellem vinkeldrejning og viklingsstrøm. Bemærk at hvor de enkelte viklinger bliver koblet ind og ud yder de ingen moment, hvorved der ikke kommer afbrydelser af momenter. I praksis skal indkobling af næste vikling ske lidt tidligere end den forriges udkobling. Ønskes der et negativt moment ganges alle sammenhængene med -1.

For at styre momentets størrelse kan man to muligheder. Enten kan størrelsen af $V+$ $V-$ varieres hvilket giver kontinuert moment, eller også kan man anvende konstante $V+$ $V-$ og



Figur 3.4: *Stømmens afhængighed af θ når positivt moment ønskes.*

anvende pulsbreddemoduleret indkoblingssignal som kombineres med ovennævnte indkoblingsbetingelse



Figur 3.5: *Principskitse for transistorkobling til styring af den børsteløse dc-motor.*