Laboratorijske vježbe

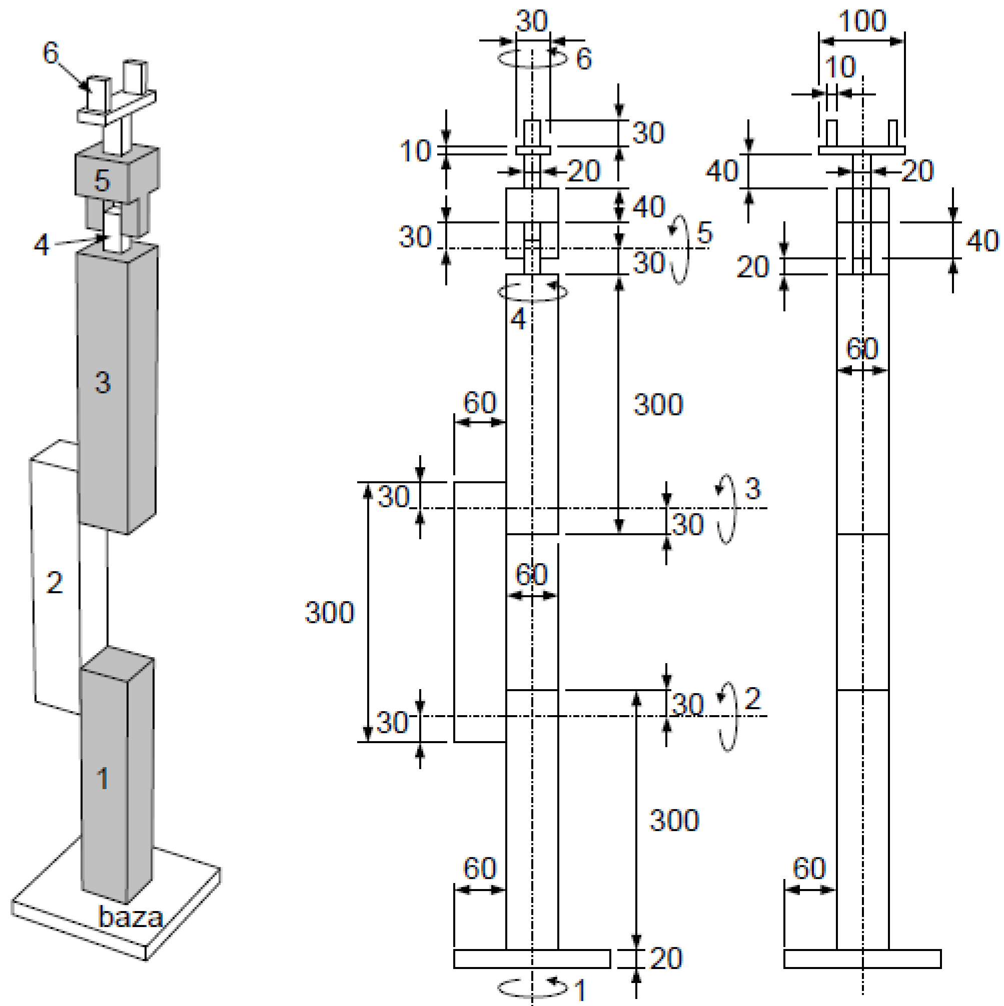
Inverzna kinematika

Inverzna kinematika

– Ako je zadan položaj i orijentacija alata u odnosu prema baznom koordinatnom sustavu, treba odrediti vektor varijabli zglobova.

Inverzna kinematika

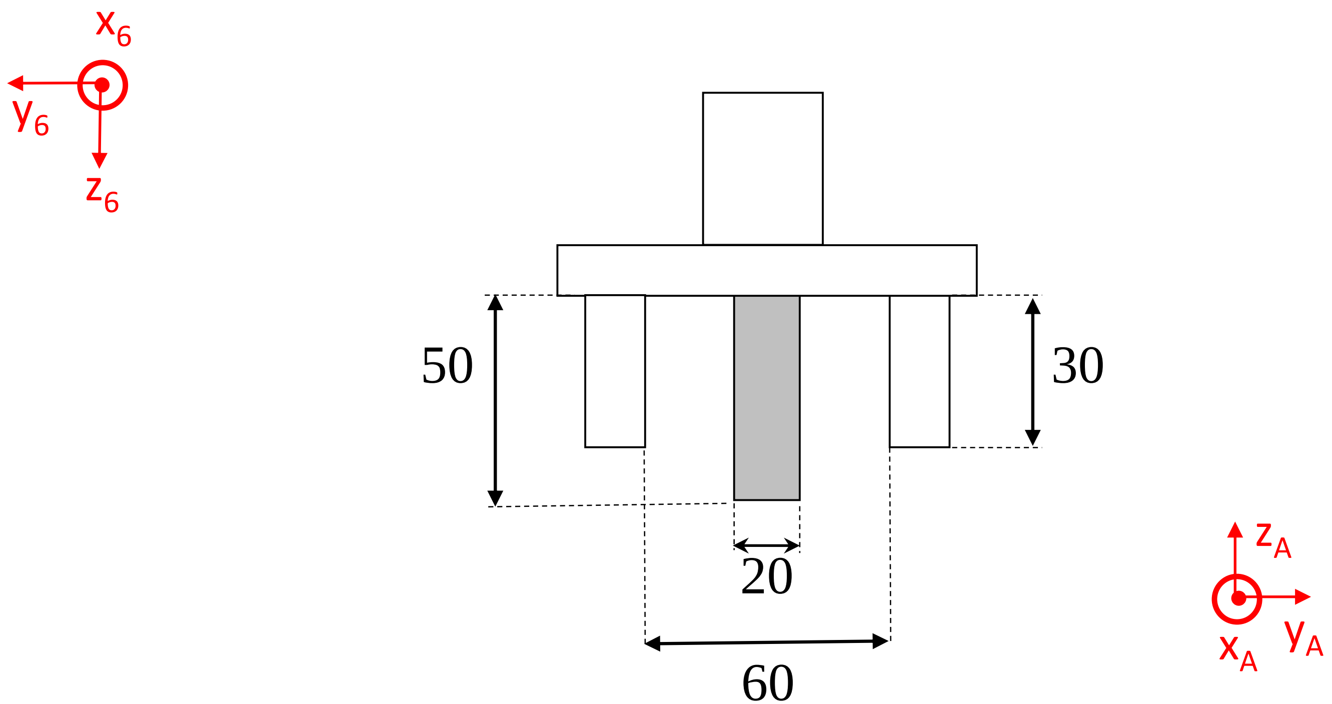
- Šestoosni robotski manipulator razmatran u prvoj AV konstruiran je tako da mu se osi četvrtog, petog i šestog zgloba sijeku u jednoj točki. Problem inverzne kinematike za takav manipulator moguće je riješiti primjenom **Pieperovog rješenja**.



Sl. 1: *Robotski manipulator.*

Inverzna kinematika

- Treba odrediti varijable zglobova koje omogućuju postavljanje alata u položaj prikladan za hvatanje kvadra A dimenzija 40 × 20 × 50, položenog na površinu na kojoj je postavljen i robotski manipulator pri čemu su $[p_A]_1^0 = 300$ $[p_A]_2^0 = -120$ koordinate središta kvadra u odnosu na bazni koordinatni sustav robota. Položaj alata prikladan za hvatanje kvadra A prikazan je na slici 2.



Sl. 2

Inverzna kinematika

- Kinematički parametri razmatranog robotskog manipulatora određeni metodom Denavit-Hartenberga za položaj prikazan na slici 1 dani su u tablici 1.

Tab. 1

Članak (*i*)	θ	d	a	α
1	Π/2	0	0	-Π/2
2	-Π/2	0	240	0
3	Π/2	0	0	Π/2
4	0	300	0	-Π/2
5	0	0	0	Π/2
6	-Π/2	150	0	0

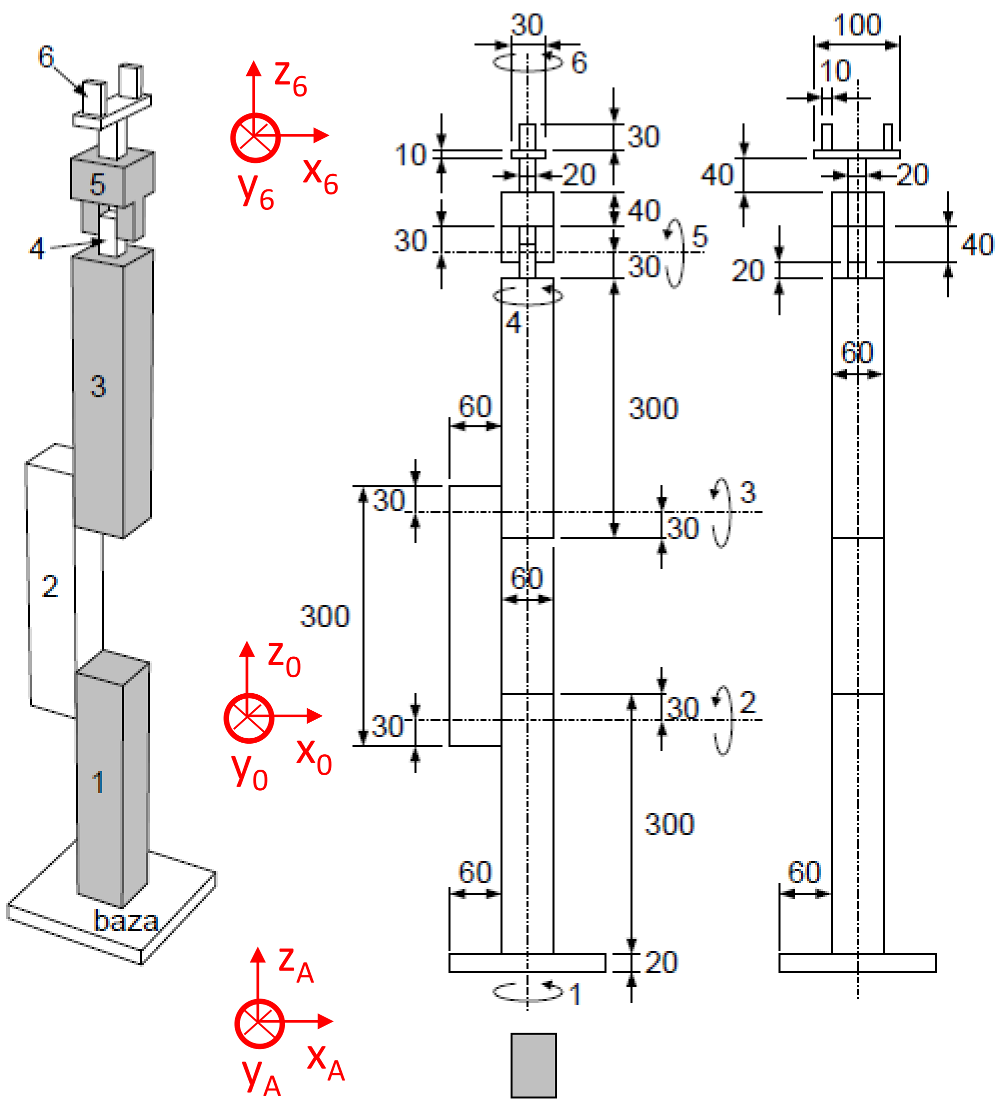
Inverzna kinematika

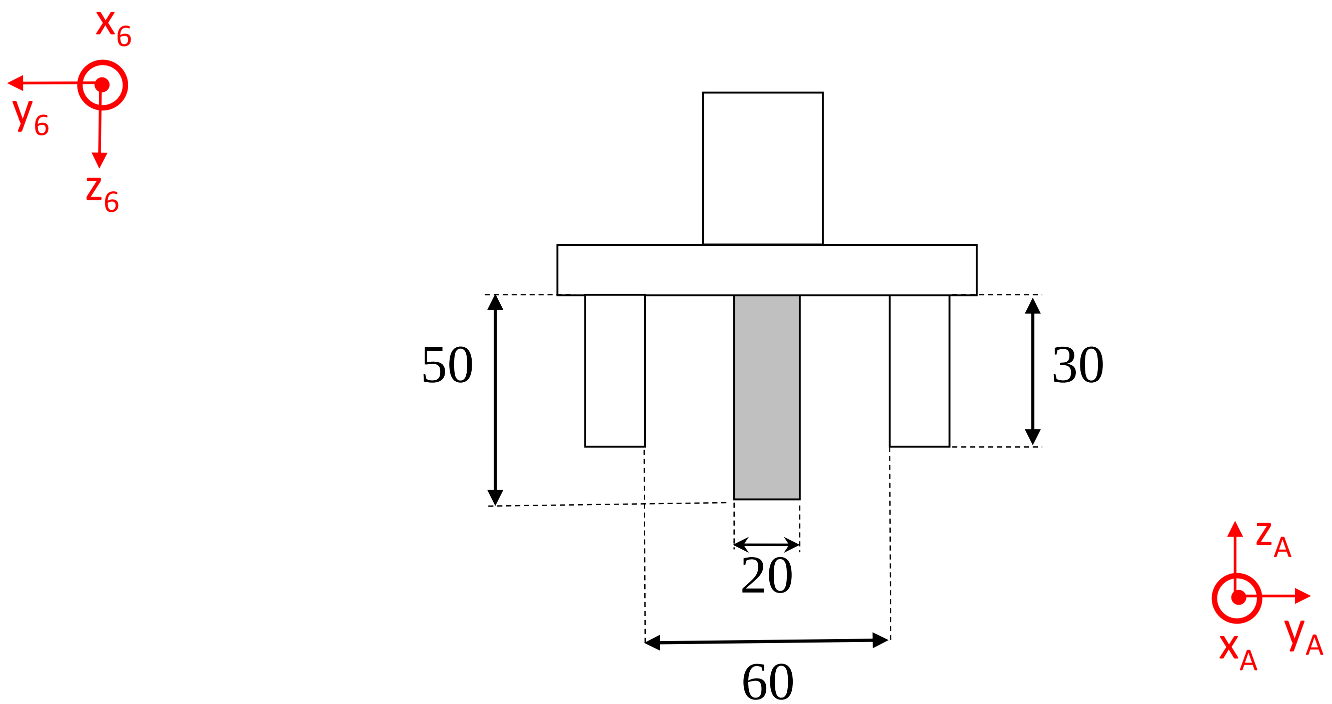
- Pozicija kocke u baznom koordinatnom sustavu

$$^{0}\mathrm{t}_{\mathrm{A}} = [300\ \text{-}120\ \text{-}265]$$

- Položaj kocke *A* u odnosu na bazni k.s:

$$^{0}T_{\mathrm{A}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 1 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & -265 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$


6
5
4
3
2
1
baza
z_6
x_6
y_6
z_0
x_0
y_0
z_A
x_A
y_A
30
100
10
30
10
20
40
30
30
300
60
30
30
300
60
300
30
30
60
20
40
20
40
60
60



Sl. 2

Inverzna kinematika

- Položaj alata u odnosu na kocku *A*:

$$ {}^{\mathrm{A}}T_6 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} $$

(rotacija oko osi x_6 za 180 stupnjeva + translacija po z)

Inverzna kinematika

- Položaj alata u odnosu na bazni k.s :

$$
{}^{0}T_{6} = {}^{0}T_{\mathrm{A}} \cdot {}^{\mathrm{A}}T_{6} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & -1 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & -1 & -270 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

Inverzna kinematika

Pieperovo rješenje

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = {}^{0}T_{6} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -d_6 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 \\ -120 \\ -120 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{(A)}$$

Inverzna kinematika

Pieperovo rješenje

$$f_1 = d_4 s\alpha_3 s_3 + a_3 c_3 + a_2$$

$$\Rightarrow f_1 = 300 s_3 + 240 \qquad (1)$$

$$f_2 = a_3 c\alpha_2 s_3 - d_4 c\alpha_2 s\alpha_3 c_3 - d_4 s\alpha_2 c\alpha_3 - s\alpha_2 d_3$$

$$\Rightarrow f_2 = -300 c_3 \qquad (2)$$

$$f_3 = a_3 s\alpha_2 s_3 - d_4 s\alpha_2 s\alpha_3 c_3 + d_4 c\alpha_2 c\alpha_3 + c\alpha_2 d_3$$

$$\Rightarrow f_3 = 0 \qquad (3)$$

Članak (*i*)	θ	d	a	α
1	Π/2	0	0	-Π/2
2	-Π/2	0	240	0
3	Π/2	0	0	Π/2
4	0	300	0	-Π/2
5	0	0	0	Π/2
6	-Π/2	150	0	0

Inverzna kinematika

Pieperovo rješenje

Pošto je $a_1 = 0$, do θ_3 se dolazi rješavanjem jednadžbe

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2d_1 z + k_1 \,,$$

gdje je

$$k_1 = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 + a_1^2 - d_1^2 + d_2^2 + 2d_2 f_3 = f_1^2 + f_2^2$$

Inverzna kinematika

Pieperovo rješenje

Rješavanje ove jednadžbe pomoću MATLAB Symbolic Toolboxa može se izvesti pomoću sljedećih naredbi

```
syms u3 'real';
c3 = (1-u3^2)/(1+u3^2);
s3 = 2 * u3 / (1+u3^2);
f1 = 300*s3 + 240;
f2 = -300*c3;
u3 = double(solve(x^2+y^2+z^2-f1^2-f2^2));
```

Inverzna kinematika

Pieperovo rješenje

Dobivaju se 2 rješenja. Uvrštavanjem jednog rješenja u

$$\theta_3 = 2\arctan(u_3)$$

dobije se

$$\boldsymbol{\theta_3 = -2.9402\mathrm{rad}}$$

Uvrštavanjem ove vrijednosti u izraze za f_1 i f_2 te rješavanjem jednadžbu

$$z = s\alpha_1(f_1 s_2 + f_2 c_2) + k_2 \,,$$

gdje je

$$k_2 = c\alpha_1(f_3 + d_2\,) + d_1 \,,$$

po θ_2 dobivaju se također 2 rješenja.
Uvrštavanjem jednog rješenja u

$$\theta_2 = 2\arctan(u_2)$$

dobije se

$$\boldsymbol{\theta_2 = -0.6657\mathrm{rad}}$$

Inverzna kinematika

Pieperovo rješenje

Uvrštavanjem ove vrijednosti u izraze

$$g_1 = c_2 f_1 - s_2 f_2 + a_1$$

i

$$g_2 = c\alpha_1(f_1 s_2 + f_2 c_2) - s\alpha_1(f_3 + d_2)$$

te rješavanjem sustava jednadžbi

$$x = c_1 g_1 - s_1 g_2$$

$$y = s_1 g_1 + c_1 g_2$$

po c_1 i s_1, dobiva se

$$\boldsymbol{\theta_1 = -0.3805\,\mathrm{rad}}$$

Inverzna kinematika

Pieperovo rješenje

$$ {}^{0}R_3 = {}^{0}R_1 \cdot {}^{1}R_2 \cdot {}^{2}R_3 = $$
$$ \begin{bmatrix} -0.8302 & 0.3714 & 0.4158 \\ 0.3321 & 0.9285 & -0.1663 \\ -0.4479 & 0.0000 & -0.8941 \end{bmatrix} $$

$$ {}^{3}R_6 = {}^{0}R_3{}^{T} \cdot {}^{0}R_6 = $$
$$ \begin{bmatrix} -0.8302 & -0.3321 & 0.4479 \\ 0.3714 & -0.9285 & -0.0000 \\ -0.4158 & 0.1663 & 0.8941 \end{bmatrix} \quad (4) $$

Inverzna kinematika

Pieperovo rješenje

Inače $^{3}R_{6} =$

$$\begin{bmatrix} c_4c_5c_6 - s_4s_6 & -c_4c_5s_6 - s_4c_6 & -c_4s_5 \\ s_4c_5c_6 - c_4s_6 & -s_4c_5s_6 + c_4c_6 & -s_4s_5 \\ s_5c_6 & -s_5s_6 & c_5 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Izjednačavanjem 3. elementa 3. retka matrice (4) s odgovarajućim elementom matrice (5) dobiva se

$$\boldsymbol{\theta_5 = \pm 0.4644\mathrm{rad}}$$

Inverzna kinematika

Pieperovo rješenje

Za pozitivnu vrijednost kuta θ_5 , izjednačavanjem 1. i 2. elementa 3. stupca matrice (5) s odgovarajućim elementima matrice (4) dobiva se

$$\boldsymbol{\theta_4 = 0}$$

a izjednačavanjem 1. i 2. elementa 3. reda matrice (5) s odgovarajućim elementima matrice (4) dobiva se

$$\boldsymbol{\theta_6 = 2.7611\mathrm{rad}}$$

Inverzna kinematika

Provjera rezultata

Ispravnost izračunatih vrijednosti kuteva θ_1, θ_2 i θ_3 može se provjeriti tako da se na temelju njih izračuna matrica homogene transformacije ${}^0T_3$, a pomoću nje se izračuna vektor

$$ {}^0\boldsymbol{p}_\mathrm{A} = {}^0T_3 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ d_4 \\ 1 \end{bmatrix} $$

čije prve 3 komponente trebaju biti jednake vrijednostima x, y i z izračunatim pomoću izraza (A).

Ispravnost izračunatih vrijednosti kuteva θ_4, θ_5 i θ_6 može se provjeriti tako da se na temelju njih izračuna matrica homogene transformacije ${}^3R_6$ koja se usporedi s matricom (4).

Cjelokupno se rješenje može provjeriti tako da se na temelju svih izračunatih vrijednosti varijabli zglobova odredi matrica ${}^0T_6$.