Билет № 3

4. Кинематика материальной точки. Траектория, перемещение и путь.

Кинематика – раздел механики, изучающий математическое описание (средствами геометрии, алгебры, математического анализа и т.п) движения идеализированных тел (материальная точка, абсолютно твёрдое тело, идеальная жидкость), без рассмотрения причин движения (массы, сил и т. д.). Исходные понятия кинематики — пространство и время. Например, если тело движется по окружности, то кинематика предсказывает необходимость существования центростремительного ускорения без уточнения того, какую природу имеет сила, его порождающая. Причинами возникновения механического движения занимается другой раздел механики — динамика.

Кинематика материальной точки — раздел кинематики, в котором изучается механическое движение материальных точек.
Движение любого объекта в кинематике изучают по отношению к некоторой системе отсчёта, включающей:

- тело отсчёта;
- систему координат;
- прибор для измерения времени (часы).

Основные понятия

Материальная точка — тело, размерами которого по сравнению с характерными расстояниями данной задачи можно пренебречь

Радиус-вектор — вектор, определяющий положение материальной точки в пространстве: $\vec{r} = \{r_1, r_2, \dots, r_n\}$. Здесь $r_1, r_2, \dots, r_n$ — координаты радиус-вектора. Геометрически изображается вектором, проведённым из начала координат к материальной точке. Зависимость радиус-вектора (или его координат $r_i = r_i(t)$) от времени $\vec{r} = \vec{r}(t)$ называется законом движения.

Траектория — воображаемая линия радиус-вектора, то есть — линия, описываемая концом радиус-вектора в процессе движения. Иными словами, траектория — это линия вдоль которой движется материальная точка. При этом закон движения выступает как уравнение, задающее траекторию параметрически. Длину участка траектории между начальным и конечным моментами времени часто называют пройденным расстоянием (S). При таком описании движения S выступает в качестве **обобщённой координаты**, а законы движения в этом случае записывается в виде $S = S(t)$ и аналогичны соответствующим законам для координат.

Основные кинематические величины

Перемещение — векторная физическая величина, равная разности радиус векторов в конечный и начальный моменты времени: $\Delta\vec{r}(t_2, t_1) = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$.

Иными словами, перемещение — это приращение радиус-вектора за выбранный промежуток времени.

Средняя скорость — векторная физическая величина равная отношению вектора перемещения к промежутку времени, за который происходит это перемещение: $\vec{v}_{cp}(t_1, t_2) = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$.

Средняя путевая скорость — скалярная физическая величина равная отношению модуля вектора перемещения к промежутку времени, за который происходит это перемещение, как правило имеет смысл при описании движения с $\vec{r}(t_2) = \vec{r}(t_1)$:

$$\vec{v}_{cp\,S}(t_1, t_2) = \frac{\Delta|\vec{r}|}{\Delta t} = \frac{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}{t_2 - t_1}.$$

Мгновенная скорость — векторная физическая величина, равная первой производной от радиус-вектора по времени:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}(t).$$

Единица измерения скорости в системе СИ — м/с, в системе СГС — см/с. Мгновенная скорость всегда направлена по касательной к траектории.

Мгновенное ускорение — векторная физическая величина, равная второй производной от радиус-вектора по времени и, соответственно, первой производной от мгновенной скорости по времени:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}.$$

Характеризует быстроту изменения скорости. Единица ускорения в системе СИ — м/с².

Описание в декартовой системе координат

Поскольку базисные векторы ($\overrightarrow{e_i}$) в этой системе
координат ортонормированы и не зависят от времени, то закон движения запишется следующим образом:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z$$

Скорость точки:

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y + \dot{z}(t)\vec{e}_z = v_x(t)\vec{e}_x + v_y(t)\vec{e}_y + v_z(t)\vec{e}_z$$

Модуль скорости может быть найден:

$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} = \dfrac{ds}{dt}$, где ds — дифференциал траектории.

Аналогичным образом определяется ускорение:

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z,\ a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}$$

Полярные координаты

Описание движения ведётся в плоскости. Положение точки определяется r — расстоянием от начала координат и полярным углом φ, отсчитываемым от какой-то фиксированной оси. В качестве базиса вводятся единичный вектор $\vec{e}_r$, направленный из начала координат на движущуюся точку, и
единичный $\overrightarrow{e_\varphi}$ перпендикулярный первому в сторону возрастания угла φ (это направление называется трансверсальным).

Связь с декартовой системой можно выразить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix}$$

Производные базисных векторов по времени: $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi,\ \dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$

Откуда уравнения движения:

$$\vec{r}(t) = r(t)\vec{e}_r$$

$$\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\vec{e}_r + r(t)\dot{\varphi}(t)\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = [\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2]\vec{e}_r + [2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}]\vec{e}_\varphi.$$

Вырезка из фала с формулами:

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\ \mathbf{e}_1 + y(t)\ \mathbf{e}_2 + z(t)\ \mathbf{e}_3\ , \quad \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\ \mathbf{e}_1 + \frac{dy}{dt}\ \mathbf{e}_2 + \frac{dz}{dt}\ \mathbf{e}_3\ ,$$

$$\mathbf{v}(t) = \frac{dx_i}{dt}\ \mathbf{e}_i = \dot{x}_i\ \mathbf{e}_i\ , \quad v^2 = (\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2\ , \quad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\ \mathbf{e}_1 + \frac{d^2y}{dt^2}\ \mathbf{e}_2 + \frac{d^2z}{dt^2}\ \mathbf{e}_3\ ,$$

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{a} : \qquad \int d\mathbf{v} = \int \mathbf{a}\, dt\ , \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\ t\ , \qquad \int d\mathbf{r} = \int (\mathbf{v}_0 + \mathbf{a}\ t) dt\ , \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0\ t + \frac{\mathbf{a}t^2}{2}\ .$$

19. Кинетическая энергия частицы и закон ее изменения.

Кинетическая энергия W^k материальной точки – часть механической энергии, зависящая от скорости движения этой материальной точки:

$$w^k = \frac{mv^2}{2}$$

где m и υ – соответственно масса и скорость материальной точки.

Если система из материальных точек: $E_{\text{kin}} = \sum \frac{m_i v_i^2}{2},$

Если в задаче допускается движение со скоростями, близкими к скорости света, кинетическая энергия материальной точки определяется как:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2$$

Изменение кинетической энергии системы равно работе всех внутренних и внешних сил, действующих на тела системы.

$$T_2 - T_1 = \sum_i A_i,$$