Haute école d'ingénierie et d'architecture de Fribourg

Génie Électrique

Dispositifs à Semiconducteurs

TP1 - Phase B : Annexe

Version corrigée 1.1

Auteur : Armando Bourgknecht

Dernière mise à jour : 31 mars 2022

Table des matières

1 Dérivation de la réponse en fréquence

La réponse en fréquence du filtre analogique passe-bas du premier ordre étudié durant ce TP s'écrit comme:

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} \tag{1.1}$$

Cette expression se déduit avec un peu de méthode à partir du circuit électrique du filtre RC.

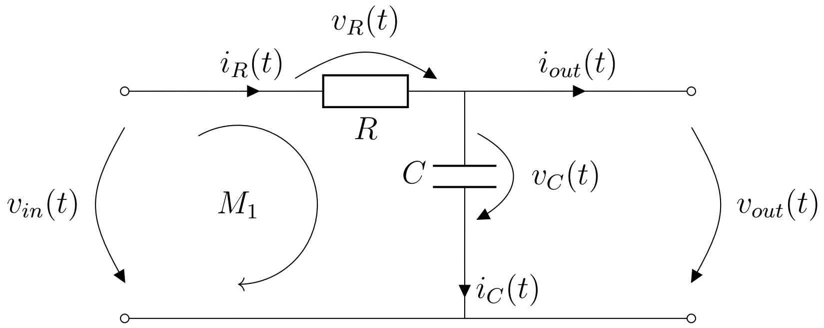

Figure 1: Circuit du filtre RC.

À l'aide de la première loi de Kirchhoff, nous posons dans la maille M_1 :

$$v_{in}(t) = v_R(t) + v_C(t) \tag{1.2}$$

Nous exprimons ensuite $v_R(t) = Ri_R(t)$ par la loi d'Ohm, et $i_C(t) = C\frac{d}{dt}v_C(t)$ par la relation du courant traversant une capacité.

De plus, nous supposons que le courant de sortie est nul, ce qui ramène le circuit à une seule branche, nous permettant d'écrire $i_R(t) = i_C(t) = i(t)$:

$$v_{in}(t) = Ri(t) + v_C(t) = RC\frac{d}{dt}v_C(t) + v_C(t) \tag{1.3}$$

Comme nous nous intéressons à la "tension de sortie" du filtre, nous pouvons écrire $v_{out}(t)$ à la place de $v_C(t)$, puisque nous prenons la tension de sortie sur la capacité:

$$v_{in}(t) = RC\frac{d}{dt}v_{out}(t) + v_{out}(t) \tag{1.4}$$

La résolution de l'équation différentielle ne nous intéresse pas ici. On cherche plutôt à obtenir la réponse en fréquence du système, ce qui nous amène à passer par une transformée.

On passe à l'analyse du circuit dans le domaine des fréquences par l'application de la transformée de Fourier sur les deux termes :

$$v_{in}(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} V_{in}(\omega) \tag{1.5}$$

$$RC\frac{d}{dt}v_{out}(t) + v_{out}(t) \xrightarrow{\mathscr{F}} j\omega RCV_{out}(\omega) + V_{out}(\omega) \tag{1.6}$$

Pour souligner la différence entre les domaines du temps et des fréquences, on note par une minuscule les grandeurs temporelles ($v_{in}(t)$) et par une majuscule les grandeurs fréquentielles ($V_{in}(\omega)$).

De plus, on voit que les tensions V_{in} et V_{out} ne sont plus fonctions du temps t mais de la pulsation (ou vitesse angulaire) $\omega = 2\pi f$; nous exprimons bien les grandeurs en fonction de leur fréquence.

L'égalité des équations précédentes aboutit à:

$$V_{in}(\omega) = j\omega RCV_{out}(\omega) + V_{out}(\omega) = (1 + j\omega RC)V_{out}(\omega) \tag{1.7}$$

Les termes d'entrée et de sortie sont mis en évidence, et il suffit d'exprimer leur rapport pour obtenir la réponse en fréquence du système:

$$H(\omega) = \frac{V_{out}(\omega)}{V_{in}(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} \tag{1.8}$$

Il convient de souligner que les grandeurs transformées dans le domaine des fréquences sont généralement à valeur complexe (ici, présence du j dans l'expression de la réponse en fréquence).

2 Magnitude de la réponse en fréquence

La magnitude de la réponse en fréquence est utilisée pour tracer le premier graphe du diagramme de Bode; on propose ici de la calculer analytiquement.

On se souvient que la magnitude d'un nombre complexe z peut être obtenue en prenant la racine de son conjugué complexe :

$$|z| = \sqrt{zz^*} \tag{2.1}$$

Puisque $H(\omega)$ est complexe, on procède de la même façon:

$$|H(\omega)| = \sqrt{H(\omega)H^*(\omega)} = \sqrt{\frac{1}{1 + j\omega RC} \cdot \frac{1}{1 - j\omega RC}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \tag{2.2}$$

Cette dernière expression nous donne une information très intéressante sur la façon dont "l'intensité" du signal est modifiée au travers du filtre.

Puisqu'il s'agit d'une comparaison de l'intensité du signal de sortie avec l'intensité du signal d'entrée, on peut conclure que **cette expression nous donne la valeur du gain (ou de l'atténuation) en tension que le signal subit en sortant du filtre**: si la valeur de $|H(\omega)| > 1$, le système aura amplifié le signal d'entrée en tension, alors que si $|H(\omega)| < 1$, le signal subit une atténuation en tension.

Le circuit en question étant un filtre passif, on s'attend bien sûr à une atténuation de la puissance du signal, donc le deuxième cas de figure où $|H(\omega)| < 1$.

3 Phase de la réponse en fréquence

La phase de la réponse en fréquence est utilisée pour tracer le second graphe composant le diagramme de Bode.

On se souvient que la phase ϕ d'un nombre complexe z correspond à l'arc tangente du rapport des parties imaginaire et réelle:

$$\phi = \arctan \frac{\Im\{z\}}{\Re\{z\}} \tag{3.1}$$

On peut décomposer $H(\omega)$ pour faire apparaître ses parties réelle et imaginaire:

$$H(\omega) = \frac{1}{1+j\omega RC} = \frac{1-j\omega RC}{1+(wRC)^2} = \frac{1}{1+(\omega RC)^2} - j\frac{\omega RC}{1+(\omega RC)^2} \tag{3.2}$$

On voit que $\Re\{H(\omega)\} = \frac{1}{1+(\omega RC)^2}$ et que $\Im\{H(\omega)\} = \frac{-\omega RC}{1+(\omega RC)^2}$, que l'on utilise pour calculer la phase:

$$\phi(\omega) = \arctan \frac{\Im\{H(\omega)\}}{\Re\{H(\omega)\}} = \arctan \left(\frac{-\omega RC}{1+(\omega RC)^2} \cdot \frac{1+(\omega RC)^2}{1} \right) = \arctan(-\omega RC) \tag{3.3}$$

4 Diagramme de Bode

Le diagramme de Bode est un outil de représentation graphique de la réponse en fréquence d'un système sous la forme de deux graphes : la magnitude et la phase, données en fonction de la pulsation.

Il permet de montrer le comportement d'un signal traversant un système (un filtre dans notre cas) en fonction de sa fréquence et de comprendre en un clin d'œil comment un signal est atténué ou amplifié, et à quelles fréquences surviennent ces changements.

Dans le cadre du TP (et la plupart du temps d'ailleurs) nous nous concentrons sur le gain du signal G, soit la magnitude de la réponse en fréquence, que l'on exprime toujours en dB. Pour rappel, selon que l'on travaille avec des tensions ou des puissances, on utilisera l'une ou l'autre des formules suivantes:

Pour des puissances :

$$G_{dB} = 10\log_{10}(\frac{P_{out}}{P_{in}}) \tag{4.1}$$

Pour des tensions :

$$G_{dB} = 20\log_{10}(\frac{V_{out}}{V_{in}}) \tag{4.2}$$

Pour éviter de se tromper, on peut retenir que le décibel a été créé pour caractériser des **rapports de puissances**, et que le préfixe "**déci**" se réfère à la valeur **10** qui multiplie le logarithme. Dans ce cas, on utilisera toujours la première expression.

Lorsque l'on souhaite travailler avec des tensions, il suffit simplement de prendre la définition de la puissance $P = \frac{V^2}{R}$ que l'on remplace dans la première expression :

$$G_{dB} = 10\log_{10}(\frac{V_{out}^2/R}{V_{in}^2/R}) = 10\log_{10}(\frac{V_{out}^2}{V_{in}^2}) = 10\log_{10}((\frac{V_{out}}{V_{in}})^2) = 20\log_{10}(\frac{V_{out}}{V_{in}}) \quad (4.3)$$

En partant de la définition originelle, on ne se trompe plus, et on passe très facilement à la comparaison en tension.

En appliquant alors la définition du décibel pour les tensions à la réponse en fréquence, on obtient:

$$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}(|H(\omega)|) = 20\log_{10}(\frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}}) \quad (4.4)$$

Avec les propriétés des logarithmes, on simplifie comme suit:

$$G_{dB}(\omega) = 20\log_{10}(1) - 20\log_{10}(\sqrt{1+(\omega RC)^2}) = -10\log_{10}(1+(\omega RC)^2) \quad (4.5)$$

5 Magnitude à $-3dB$

La valeur $-3dB$ est bien connue des électroniciens car elle correspond à l'atténuation obtenue lorsque la fréquence du signal d'entrée atteint la fréquence de coupure d'un filtre.

Dans notre cas, regardons ce qui se produit lorsque ω est exactement égale à $\frac{1}{RC}$:

$$G_{dB}(\omega = \frac{1}{RC}) = -10\log_{10}(1+(\frac{1}{RC}RC)^2) = -10\log_{10}(1+(1)^2) = -10\log_{10}(2) \quad (5.1)$$

La calculatrice nous donne une valeur approchée :

$$-10\log_{10}(2) \approx -3.0103 \quad (5.2)$$

5.1 Interprétation en puissance

On arrive bien sur la fameuse valeur de $-3dB$, mais pourquoi s'y intéresser ? Observons:

$$G_{dB} = 10\log_{10}(\frac{P_{out}}{P_{in}}) = -10\log_{10}(2) = 10\log_{10}(\frac{1}{2}) \quad (5.3)$$

En regardant l'argument du logarithme de cette dernière expression, on voit que la fraction $\frac{1}{2}$ correspond exactement au rapport de puissance $\frac{P_{out}}{P_{in}}$: en conclusion, l'atténuation de $-3dB$ se produit lorsque **la puissance du signal de sortie vaut la moitié de la puissance du signal d'entrée**, donc lorsque le système a divisé la puissance par deux.

5.2 Interprétation en tension

À la fréquence de coupure f_c, nous avons vu que la puissance du signal de sortie est divisée de moitié par rapport à la puissance du signal d'entrée.

Toutefois, **la tension du signal de sortie n'est pas divisée par deux** ! Regardons ce qui se passe si l'atténuation est de $-3dB$.

On connaît la formule de passage pour les puissances et les tensions en dB:

$$G_{dB} = 10\log_{10}(\frac{P_{out}}{P_{in}}) = 20\log_{10}(\frac{V_{out}}{V_{in}}) \tag{5.4}$$

Calculons le rapport de tension $\frac{V_{out}}{V_{in}}$ à $-3dB$:

$$-3dB = 20\log_{10}(\frac{V_{out}}{V_{in}}) \implies \frac{V_{out}}{V_{in}} = 10^{-\frac{3}{20}} \approx 0.707 \approx \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \tag{5.5}$$

On voit cette fois que le rapport n'est plus de $\frac{1}{2}$ mais bien de $\frac{\sqrt{2}}{2}$. En conclusion, l'atténuation de $-3dB$ se produit lorsque **l'amplitude du signal de sortie par rapport au signal d'entrée est divisée par $\sqrt{2}$**.

6 Phase à $-3dB$

Observons la valeur de la phase lorsque le signal d'entrée atteint la fréquence de coupure du système.

Lorsque ω est exactement égale à $\frac{1}{RC}$ nous aurons:

$$\phi(\omega = \frac{1}{RC}) = \arctan\left(-\frac{1}{RC}\cdot RC\right) = \arctan(-1) = -45° = -\frac{\pi}{4}rad \tag{6.1}$$

Nous retrouvons bien le déphase de $-45°$ à la fréquence de coupure, comme observé durant les travaux pratiques.

À noter que la phase correspond bien au déphasage du signal de sortie par rapport au signal d'entrée : $\phi = \phi_{out} - \phi_{in}$. Attention aux erreurs de signe!

7 Fréquence de coupure

Maintenant que nous avons compris le comportement en magnitude et en phase de la réponse en fréquence, nous pouvons justifier notre formule pour la fréquence de coupure du filtre.

En effet, en rappelant le lien entre la pulsation (vitesse angulaire) et la fréquence d'un signal :

$$\omega = 2\pi f \tag{7.1}$$

Nous voyons que la fréquence de coupure survient lorsque :

$$\omega = \frac{1}{RC} = 2\pi f_{c,-3dB} \iff f_{c,-3dB} = \frac{1}{2\pi RC} \tag{7.2}$$

Il s'agit bien de l'équation utilisée lors du travail pratique pour dimensionner le filtre passe-bas selon une fréquence de coupure.

8 Pente de la réponse en fréquence

Une autre analyse pertinente concerne la pente de la fonction $|H(\omega)|$.

En reprenant l'expression du gain en dB :

$$G_{dB}(\omega) = -10\log_{10}(1 + (\omega RC)^2) \tag{8.1}$$

On peut montrer que la présence de la constante 1 dans l'argument du logarithme devient vite négligeable lorsque la pulsation augmente, de sorte que l'on simplifie comme suit lorsque $\omega >> \frac{1}{RC}$:

$$G_{dB}(\omega) = -10\log_{10}(1 + (\omega RC)^2) \approx -10\log_{10}((\omega RC)^2) = -20\log_{10}(\omega RC) \tag{8.2}$$

Une dernière simplification mène à :

$$G_{dB}(\omega) \approx -20\log_{10}(\omega RC) = -20\log_{10}(\omega) - 20\log_{10}(RC) \tag{8.3}$$

Puisque le diagramme de Bode est tracé sur une échelle semi-logarithmique sur l'axe des abscisses, cette dernière expression se ramène à une fonction linéaire de la forme $a\omega + b$ à pente négative de -20.

La graduation sous forme de puissance de dix sur l'axe des abscisses conduit à une diminution linéaire de $-20dB$ par décade, et il est possible de montrer que la diminution est proportionnelle à l'ordre du filtre.

On conclut sur un résultat intéressant : **un filtre d'ordre n possède une pente négative caractéristique de $-20ndB$ par décade** et on peut déterminer l'ordre d'un filtre en analysant graphiquement la pente de son diagramme de Bode.

9 Illustration du diagramme de Bode

Le diagramme suivant résume les développements précédents:

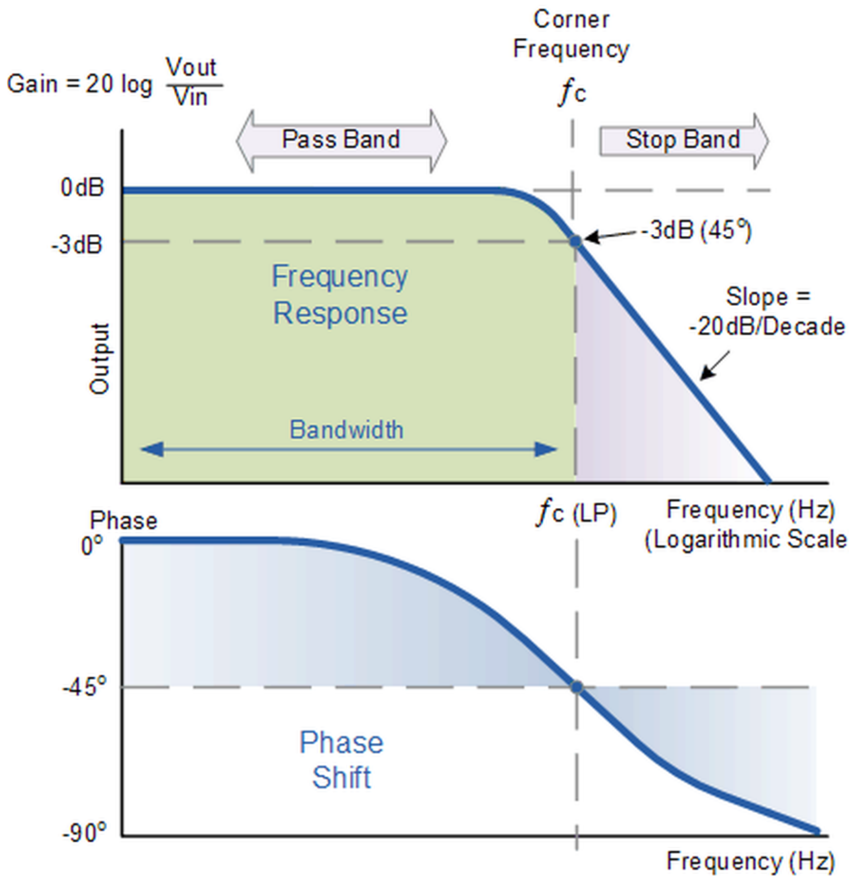

Figure 2: Diagramme de Bode complet pour un filtre analogique passe-bas du premier ordre.

Magnitude

- $f << f_c$ Gain à $0dB$
- $f = f_c$ Gain à $-3dB$
- $f >> f_c$ Gain négatif linéaire avec perte de $20dB$ par décade

Phase

- $f << f_c$ Phase à $0°$
- $f = f_c$ Phase à $-45°$
- $f >> f_c$ Phase tend vers $-90°$