La résolution en calcul propositionnel

Résolution

John Alan Robinson : philosophe, mathématicien, informaticien anglais/américain (1928 -)

Résolution

On écrira $\Delta \vdash_R A$ ssi la formule A se déduit à partir de l'ensemble de formules Δ par la méthode de résolution, résumée ainsi :

$$\Delta \vdash_R A \text{ ssi } \Delta \cup \{\neg A\} \text{ est insatisfaisable ssi } \Delta \cup \{\neg A\} \text{ est réfutable}$$

On introduira donc une méthode pour réfuter un ensemble de formules.

Forme Normale Conjonctive (FNC)

Définition :

- Un littéral est une formule de la forme p ou $\neg p$, où p est une lettre propositionnelle quelconque.
- Une clause est une formule de la forme $l_1 \vee \ldots \vee l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral.
- Une formule est en forme normal conjonctive ssi elle est de la forme $D_1 \wedge \ldots \wedge D_k$, $k \geq 0$, où chaque D_i est une clause.

Remarque :

- La clause vide ($n = 0$) s'écrit `False`.
- Un littéral est une clause.
- La forme normal conjonctive vide ($k = 0$) s'écrit `True`.
- Une clause est une FNC.
- Un littéral est une FNC.
- `False` est une FNC.

Algorithme pour calculer une FNC - Rappel

On applique les règles suivantes aussi longtemps que possible :

$$\begin{array}{lcl}
X \to Y & \rightsquigarrow & \neg X \vee Y \\
\neg\neg X & \rightsquigarrow & X \\
\neg(X \vee Y) & \rightsquigarrow & \neg X \wedge \neg Y \\
\neg(X \wedge Y) & \rightsquigarrow & \neg X \vee \neg Y \\
X \vee (Y \wedge Z) & \rightsquigarrow & (X \vee Y) \wedge (X \vee Z) \\
(X \wedge Y) \vee Z & \rightsquigarrow & (X \vee Z) \wedge (Y \vee Z) \\
(X \wedge Y) \wedge Z & \rightsquigarrow & X \wedge (Y \wedge Z) \\
(X \vee Y) \vee Z & \rightsquigarrow & X \vee (Y \vee Z)
\end{array}$$

Exemples

Les formules suivantes sont des FNC :

$$\texttt{True}, \texttt{False}, p, p \vee \neg q, (p \vee \neg q) \wedge (\neg p)$$

Exercice : Mettre la formule $p_1 \vee (\neg(q_1 \wedge q_2) \vee \neg\neg(z_1 \wedge z_2))$ en FNC.

Forme Normale Disjonctive (FND)

Définition :

- Une conjonction élémentaire est une formule de la forme $l_1 \wedge \ldots \wedge l_n$, $n \geq 0$, où chaque l_i est un littéral.
- Une formule est en forme normal disjonctive ssi elle est de la forme $C_1 \vee \ldots \vee C_k$, $k \geq 0$, où chaque C_i est une conjonction élémentaire.

Remarque :

- La conjonction élémentaire vide ($n = 0$) s'écrit `True`.
- Un littéral est une conjonction élémentaire.
- La forme normal disjonctive ($k = 0$) s'écrit `False`.
- Une conjonction élémentaire est une FND.
- Un littéral est une FND.
- `True` est une FND.

Algorithme pour calculer une FND - Rappel

On applique les règles suivantes aussi longtemps que possible :

$$\begin{array}{lcl}
X \to Y & \rightsquigarrow & \neg X \vee Y \\
\neg\neg X & \rightsquigarrow & X \\
\neg(X \vee Y) & \rightsquigarrow & \neg X \wedge \neg Y \\
\neg(X \wedge Y) & \rightsquigarrow & \neg X \vee \neg Y \\
X \wedge (Y \vee Z) & \rightsquigarrow & (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z) \\
(X \vee Y) \wedge Z & \rightsquigarrow & (X \wedge Z) \vee (Y \wedge Z) \\
(X \wedge Y) \wedge Z & \rightsquigarrow & X \wedge (Y \wedge Z) \\
(X \vee Y) \vee Z & \rightsquigarrow & X \vee (Y \vee Z)
\end{array}$$

Exemples

Les formules suivantes sont des FND :

$$\texttt{True}, \texttt{False}, p, p \wedge \neg q, (p \wedge \neg q) \vee (\neg p)$$

Exercice : Mettre la formule $p_1 \wedge (\neg(q_1 \vee q_2) \wedge \neg\neg(z_1 \vee z_2))$ en FND.

Existence de la FND et de la FNC

Théorème : Soit A une formule.

- Il existe une formule A_1 en FND telle que $A_1 \equiv A$.
- Il existe une formule A_2 en FNC telle que $A_2 \equiv A$.

Preuve : Cours 1er semestre.

Remarque : Une formule ne possède pas une unique FND (resp. FNC).

Observation : formes normales et tables de vérité

p	q	r	A
V	**V**	**V**	**F**
V	**V**	**F**	**V**
V	**F**	**V**	**V**
V	**F**	**F**	**F**
F	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**F**
F	**F**	**V**	**F**
F	**F**	**F**	**V**

$$\begin{array}{rcl} A & \equiv & (p \wedge q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg q \wedge r) \vee \\ & & (\neg p \wedge q \wedge r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r) \\ \neg A & \equiv & (p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge \neg q \wedge \neg r) \vee \\ & & (\neg p \wedge q \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg q \wedge r) \end{array}$$

Construction d'un ensemble de clauses

Construction d'un ensemble de clauses C_Δ à partir d'un ensemble de formules Δ :

Soit $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un ensemble de formules. Soit $FNC_\Delta = \{E_1, \ldots, E_n\}$ un ensemble de FNC, où chaque E_i est une FNC de la formule A_i, pour tout $1 \leq i \leq n$. Pour chaque E_i de la forme $D^i_{j_1} \wedge \ldots \wedge D^i_{j_k}$ on construit $C_{E_i} = \{D^i_{j_1}, \ldots, D^i_{j_k}\}$. On calcule ensuite l'union de tous ces ensembles : $C_\Delta = \bigcup_{1 \leq i \leq n} C_{E_i}$.

Lemme : Soit $\Delta = \{A_1, \ldots, A_n\}$ un ensemble de formules et soit C_Δ son ensemble de clauses associé (comme décrit ci-dessus). Alors Δ est satisfaisable ssi C_Δ est satisfaisable.

Règles de la résolution

Soit Δ un ensemble de clauses.

Axiomes :

$$\dfrac{}{C}\ (C \in \Delta)$$

Règles d'inférence :
(D et C sont des clauses)

$$\dfrac{D \vee p \qquad C \vee \neg p}{D \vee C}\ (coupure)$$

$$\dfrac{D \vee p \vee p}{D \vee p}\ (factorisation) \qquad \dfrac{D \vee \neg p \vee \neg p}{D \vee \neg p}\ (factorisation)$$

Cas particulier de la coupure : $\dfrac{p \qquad \neg p}{\texttt{False}}$

Dérivation par résolution

Exemple : Soit $\Delta = \{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\}$. Montrer que la clause p s'obtient à partir de Δ par résolution, *i.e.* que

$$\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r\} \vdash_R p$$

Preuve :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vee r \vee s}(ax) \qquad \dfrac{}{r \vee \neg s}(ax)}{p \vee r \vee r}(c)}{p \vee r}(f) \qquad \dfrac{}{\neg r}(ax)}{p}(c)$$

Réfutation

Définition : Un ensemble de clauses Δ est réfutable ssi $\Delta \vdash_R \texttt{False}$.

Exemple : Soit $\Delta = \{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r, \neg p\}$.

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vee r \vee s}(ax) \qquad \dfrac{}{r \vee \neg s}(ax)}{p \vee r \vee r}(c)}{p \vee r}(f) \qquad \dfrac{}{\neg r}(ax)}{p}(c) \qquad \dfrac{}{\neg p}(ax)}{\texttt{False}}(c)$$

On a $\{p \vee r \vee s, r \vee \neg s, \neg r, \neg p\} \vdash_R \texttt{False}$.

Application de la méthode

Exemple : Montrer que la règle d'élimination de l'implication de la déduction naturelle est correcte.

Ceci équivaut a montrer que la formule $A = ((p \to q) \wedge p) \to q$ est valide.

1. La formule A est valide ssi $\neg A$ est insatisfaisable ssi $\neg A$ est réfutable par la méthode de résolution.
2. On calcule une FNC de $\neg A$. Ca donne $\Delta = \{(\neg p \vee q) \wedge p \wedge (\neg q)\}$.
3. On calcule son ensemble de clauses associé $C_\Delta = \{\neg p \vee q, p, \neg q\}$.
4. On applique la résolution à l'ensemble C_Δ :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg p \vee q}(ax) \qquad \dfrac{}{p}(ax)}{q} \qquad \dfrac{}{\neg q}(c)}{\texttt{False}}(c)$$

5. L'ensemble C_Δ étant réfutable, on conclut que Δ est insatisfaisable, et donc que la formule A est valide.

Application de la méthode

Exemple : Montrer que le raisonnement suivante est correct :

- Hypothèse 1 : Si on fait du sport (s), alors on est en bonne santé (t)
- Hypothèse 2 : On fait du sport
- Conclusion : On fait du sport et on est en bonne santé

Il faut montrer qu'on peut dériver la conclusion à partir des hypothèses, *i.e.* il faut montrer $\{s \to t, s\} \vdash_R s \wedge t$.

1. $\{s \to t, s\} \vdash_R s \wedge t$ ssi $\{s \to t, s, \neg(s \wedge t)\}$ est réfutable.
2. On calcule l'ensemble de FNC associé à $\{s \to t, s, \neg(s \wedge t)\}$. Ca donne $\Delta = \{\neg s \vee t, s, \neg s \vee \neg t\}$. Son ensemble de clauses associé est $C_\Delta = \{\neg s \vee t, s, \neg s \vee \neg t\}$.
3. On applique la résolution à l'ensemble C_Δ pour le réfuter :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\neg s \vee t}\,(ax) \quad \dfrac{}{s}\,(ax)}{t}\,(c) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\neg s \vee \neg t}\,(ax) \quad \dfrac{}{s}\,(ax)}{\neg t}\,(c)}{\texttt{False}}\,(c)$$

Propriétés de la résolution

Théorème : La résolution est correcte, *i.e.* si $\Delta \vdash_R A$, alors $\Delta \models A$ et si $\Delta \vdash_R \texttt{False}$, alors Δ est insatisfaisable.

Théorème : La résolution est complète, *i.e.* si Δ est insatisfaisable, alors $\Delta \vdash_R \texttt{False}$.

Propriétés de la résolution

Remarque : La résolution sans la règle de factorisation n'est pas complète.

Exemple : Appliquer la résolution sans factorisation à la formule $(p \vee p) \wedge (\neg p \vee \neg p)$. Que se passe-t-il ?