# Diskrete Mathematik
# — Aufgaben —

Unterlagen zur Veranstaltung im
Fachbereich MNI und Fachbereich GES

Sommersemester 2022

Prof. Dr. Hans-Rudolf Metz
Technische Hochschule Mittelhessen

Letzte Änderung: 15. März 2022

# Inhaltsverzeichnis

# Teil I

# Aufgaben

Kapitel 1

# Logik

## 1.1 Aussagenlogische Formeln und Wahrheitstafeln

**Aufgabe 1.**
Schreiben Sie für die folgenden zusammengesetzten Aussagen (aussagenlogischen Fomeln) $\phi_1$ bis $\phi_4$ die Wahrheitstafeln auf. Welche der Formeln sind erfüllbar? Gibt es Tautologien oder Kontradiktionen?

$$\begin{aligned}\phi_1 &= (A \vee (\neg B)) \wedge A \\ \phi_2 &= A \vee (\neg(A \wedge B)) \\ \phi_3 &= (A \vee (\neg B)) \wedge (\neg A) \\ \phi_4 &= (A \wedge B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))\end{aligned}$$

**Aufgabe 2.**
Beweisen Sie mit Wahrheitstafeln die folgenden logischen Äquivalenzen.

1. $(A \leftrightarrow B) \equiv ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

2. $(A \rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$

3. $(A \vee B) \equiv (\neg(\neg A \wedge \neg B))$

Also kann man jede zusammengesetzte Aussage nur mit den beiden Junktoren $\neg$ und $\wedge$ formulieren. Denn falls die Junktoren $\vee$, $\rightarrow$ oder $\leftrightarrow$ vorkommen, ersetzt man zunächst $\leftrightarrow$, dann $\rightarrow$ und schließlich $\vee$ entsprechend den obigen logischen Äquivalenzen.

Ist es mögliche, jede zusammengesetzte Aussage nur unter Verwendung der beiden Junktoren $\neg$ und $\vee$ zu formulieren?

**Aufgabe 3.**
Zeigen Sie mit Hilfe von Wahrheitstafeln, daß es sich bei den folgenden aussagenlogischen Formeln um Tautologien handelt.

1. $A \vee (\neg A)$
   Satz vom ausgeschlossenen Dritten.

2. $\neg(A \wedge (\neg A))$
   Satz vom Widerspruch.

3. $(\neg(\neg A)) \leftrightarrow A$
   Satz von der doppelten Verneinung.

4. $(\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
   $(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$
   Sätze von De Morgan.

5. $((A \to B) \wedge A) \to B$
   Abtrennungsregel.

6. $((A \to B) \wedge (\neg B)) \to (\neg A)$
   Widerlegungsregel.

7. $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$
   Kettenschlußregel.

**Aufgabe 4.**
In einem technischen Dokument stehen die folgenden[1] Aussagen.

1. If the file system is not locked, then
   (a) new messages will be queued;
   (b) new messages will be sent to the message buffer;
   (c) the system is functioning normally, and conversely.

2. If new messages are not queued, then they will be sent to the message buffer.

3. New messages will not be sent to the message buffer.

Sind diese Spezifikationen konsistent, oder gibt es einen inneren Widerspruch?

1. Übersetzen Sie zunächst die einzelnen Teile der Spezifikation in Formeln der Aussagenlogik. Verwenden Sie die folgenden vier Aussagen:
   $L$ für „file system locked";
   $Q$ für „new messages are queued";
   $B$ für „new messages are sent to the message buffer";
   $N$ für „system functioning normally".

2. Die Spezifikation ist konsistent, wenn es eine Zuweisung von Wahrheitswerten zu den Aussagen gibt, so daß jeder der logischen Ausdrücke wahr ist. Verwenden Sie eine Wahrheitstabelle um festzustellen, ob die Spezifikation konsistent ist.

3. Kann man auch ohne eine Wahrheitstabelle herausfinden, ob die Spezifikation konsistent ist? Nehmen Sie dazu die aufgestellten Formeln, und versuchen Sie, mit einer geschickten Argumentation ohne Tabelle zum Ergebnis zu kommen.

[1] Rosen: Discrete Mathematics and Its Applications (Fifth Edition), Seite 19, Aufgabe 1.1.48.

## 1.2 Junktoren, Normalformen

**Aufgabe 5.**
Finden Sie eine Formel, die logisch äquivalent zu $A \oplus B$ ist und nur die Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$ enthält. (Hierbei ist $\oplus$ das exklusive Oder.) Hinweis: Arbeiten Sie mit einer Wahrheitstafel.

**Aufgabe 6.**
Stellen Sie zunächst den Junktor $\neg$ und anschließend den Junktor $\wedge$ mit dem Sheffer-Operator $|$ (NAND-Operator) dar.

**Aufgabe 7.**
Stellen Sie zu der folgenden Wahrheitstafel eine aussagenlogische Formel $\phi$ in disjunktiver und eine in konjunktiver Normalform auf.

| x | y | z | $\phi$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

## 1.3 Prädikate und Quantoren

**Aufgabe 8.**
Es sei $P(x)$ ein Prädikat und $M = \{a, b, c\}$ die Grundmenge zu $x$. Zu den folgenden Aussagen sollen logisch äquivalente Aussagen angegeben werden, die keine Quantoren enthalten.

a) $\forall x P(x)$ b) $\exists x P(x)$ c) $\neg \forall x P(x)$

d)$\neg \exists x P(x)$ e) $\forall x \neg P(x)$ f) $\exists x \neg P(x)$

**Aufgabe 9.**
Es sei $P(x)$ das Prädikat „$x + 1 > 2x$“. Welche Wahrheitswerte haben die folgenden Aussagen, wenn die Grundmenge aus allen ganzen Zahlen besteht?

a) $P(0)$ b) $P(-1)$ c) $P(1)$ d) $\exists x P(x)$

e) $\forall x P(x)$ f) $\exists x \neg P(x)$ g) $\forall x \neg P(x)$ h) $\neg \forall x P(x)$

**Aufgabe 10.**
Das Prädikat $P(x, y)$ stehe für „Student/Studentin $x$ hat die Vorlesung $y$ besucht“. Die Grundmenge zu $x$ seien alle Studierenden und die Grundmenge zu $y$ seien alle Vorlesungen des Fachbereichs MNI. Schreiben Sie die folgenden Aussagen als deutsche Sätzen auf.

a) $\exists x \exists y P(x, y)$ b) $\exists x \forall y P(x, y)$ c) $\exists y \forall x P(x, y)$

d) $\forall x \exists y P(x, y)$ e) $\forall y \exists x P(x, y)$ f) $\forall x \forall y P(x, y)$

**Aufgabe 11.**
Es sei $P(x, y)$ das Prädikat „$x$ ist ein Teiler von $y$“. Die Grundmengen für $x$ und für $y$ sei die Menge der natürlichen Zahlen $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Welcher der folgenden Ausdrücke ist eine Aussage? Welche der Aussagen ist wahr, welche ist falsch?

a) $P(10, y)$ b) $P(x, 100)$ c) $\forall x P(x, y)$ d) $\exists x P(x, 7)$

e) $\forall x \exists y P(x, y)$ f) $P(3, 9)$ g) $P(3, 7)$ h) $\exists x P(x, 9)$

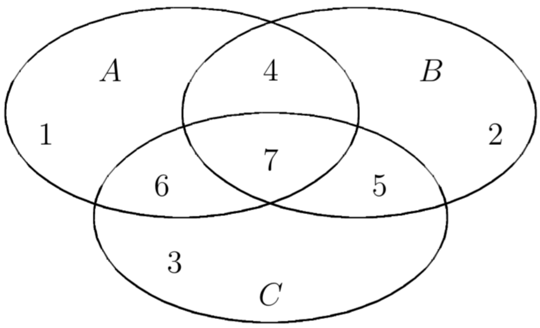
i) $\forall x P(x, 9)$ j) $\exists x \forall y P(x, y)$ k) $\forall x P(x, x)$ l) $\forall y P(1, y)$

Kapitel 2

# Mengenlehre

## 2.1 Mengen

**Aufgabe 12.**
Gegeben seien die folgenden drei sich überschneidenden Teilmengen $A$, $B$ und $C$ in der Ebene:




Wie erhält man die mit 1 bis 7 gekennzeichneten sich **nicht** überschneidenden Teilmengen der Ebene durch Mengenoperationen aus $A$, $B$ und $C$?

**Aufgabe 13.**
Welche Ergebnisse liefern die folgenden Mengenoperationen?

1. $\{1, 2, 3\} \cup \{1, 3, 5, 7\}$
2. $\{1, 2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 5, 7, 9\}$
3. $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 3, 5, 7\}$
4. $\{1, 2, 4, 8\} \cap \{x, y, z\}$
5. $\big(\{1, 2, 3\} \cap \{1, 3, 5\}\big) \cup \{x, y, z\}$

6. $\big(\{1,2,3\} \cup \{1,3,5\}\big) \cap \{x,y,z\}$

7. $\{1,5,10\} \setminus \{x,y,z\}$

8. $\{1,2,3,4,5\} \setminus \big(\{1,2,3,4,5\} \cap \{2,4,6\}\big)$

**Aufgabe 14.**
Es sei $A = \{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$ und $B = \{-4,-2,2,4\}$. Welche Mächtigkeiten haben die Mengen: $A$, $B$, $A \cup B$, $A \cap B$, $(A \cap B) \cup A$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \cup A \cup A$, $A \times A$, $B \times B$, $A \times B$, $B \times A$ ?

**Aufgabe 15.**
Geben Sie zu $A = \{1,2,3\}$, $B = \{x,y\}$ und $C = \{0\}$ die Menge $M = A \times B^2 \times C$ in der aufzählenden Darstellung an.

**Aufgabe 16.**
Es sei $A_i = \{1,2,3,\dots,i\} = \{m \in \mathbb{N} \,|\, m \leq i\}$ für ein beliebiges $i \in \mathbb{N}$. Welche Elemente sind in den folgenden Mengen enthalten?

$$M_1 = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \qquad M_2 = \bigcap_{i=1}^{n} A_i \qquad M_3 = \bigcup_{i=1}^{20} (A_{2i} \setminus A_{2i-1})$$

**Aufgabe 17.**
Schreiben Sie die Potenzmengen von $M_1 = \{a,b\}$ und $M_2 = \{x,y,z\}$ auf.

**Aufgabe 18.**
Wenn $A$ und $B$ zwei endliche Mengen sind, dann gilt für die Mächtigkeit der Vereinigungsmenge

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Jetzt seien drei endliche Mengen $A$, $B$ und $C$ gegeben. Können Sie eine Formel für die Mächtigkeit der Vereinigung aller drei Mengen $|A \cup B \cup C|$ aufstellen? Es genügt eine anschauliche Argumentation mit einer Graphik.

**Aufgabe 19.**
Es seien $A$, $B$ und $C$ Mengen. Beweisen Sie die Distributivgesetze

1. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,

2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

## 2.2 Zahlen

**Aufgabe 20.**
Rechnen Sie die periodischen Dezimalzahlen $0{,}\overline{12}$ und $5{,}\overline{47}$ sowie $0{,}3\overline{7}$ und $7{,}5\overline{26}$ in Brüche um.

**Aufgabe 21.**
Berechnen Sie die kartesischen Darstellungen der folgenden komplexen Zahlen.

a) $(7-3i)+(3+9i)$ b) $(-17+4i)-(8-7i)$ c) $(3-5i)\cdot(2+3i)$

d) $(3{,}5-i)\cdot(7+2{,}5i)$ e) $(4{,}5-1{,}5i)^2$ f) $i\cdot(2{,}5-i)^2$

g) $\dfrac{1}{7-3i}$ h) $\dfrac{-5+3i}{7+2i}$

**Aufgabe 22.**
Berechnen Sie die Primfaktorzerlegung von 30723 und von 112200.

Kapitel 3

# Funktionen

## 3.1 Grundlagen des Funktionsbegriffs

**Aufgabe 23.**
Welche der folgenden Abbildungen sind injektiv, surjektiv oder bijektiv?

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^3$

(b) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ f(x) = x^3$

(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

(d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\geq 0},\ f(x) = x^2$

(e) $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R},\ f(x) = x^2$

(f) $f : \mathbb{R}^{\geq 0} \to \mathbb{R}^{\geq 0},\ f(x) = x^2$

(g) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N} \cup \{0\},\ f(x) = x^2$

(h) $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \cup \{0\},\ f(x) = x^2$

Hierbei sei $\mathbb{R}^{\geq 0} = \{x |\ x \in \mathbb{R} \text{ und } x \geq 0\}$.

**Aufgabe 24.**
Geben Sie Beispiele für Abbildungen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ an, die

1. surjektiv aber nicht injektiv,
2. nicht surjektiv aber injektiv,
3. bijektiv aber ungleich der Identität,
4. weder surjektiv noch injektiv

sind.

**Aufgabe 25.**
Gegeben seien die Mengen $M = \{a, b, c, d\}$ und $\Delta_2 = \{0, 1\}$.

1. Geben Sie $M \times M$, $\Delta_2 \times \Delta_2$, $M \times \Delta_2$ und $\Delta_2 \times M$ an.
2. Gibt es injektive, surjektive oder bijektive Abbildungen

(a) von $M$ nach $\Delta_2 \times \Delta_2$,
(b) von $\Delta_2 \times M$ nach $M$,
(c) von $M \times M$ nach $M \times \Delta_2$,
(d) von $M \times \Delta_2$ nach $M \times M$ ?

Es müssen keine Abbildungen explizit angegeben werden, es geht nur um ihre Existenz.

3. Wieviele injektive, surjektive und bijektive Abbildungen gibt es von $M$ nach $\Delta_2$ ?

**Aufgabe 26.**
Gesucht ist die Umkehrfunktion zu $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3 + 5x/2$. Skizzieren Sie die beiden Graphen.

## 3.2 Folgen und Reihen

**Aufgabe 27.**
Von einer Folge sind die beiden Glieder $a_k = 40$ und $a_{k+2} = 90$ bekannt. Welchen Wert müssen die Folgenglieder $a_{k+1}$ und $a_{k+3}$ haben, wenn es sich

1. um eine arithmetische Folge (konstanter Zuwachs),
2. um eine geometrische Folge (gleicher prozentualer Zuwachs) handelt?

**Aufgabe 28.**
Gesucht ist die Summe aller durch 7 teilbaren positiven ganzen Zahlen, die kleiner als 1000 sind.

**Aufgabe 29.**
Berechnen Sie mit der Formel für abbrechende geometrische Reihen

$$\sum_{n=0}^{9} 2^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{9} (-2)^n.$$

## 3.3 Beispiele von Funktionen

**Aufgabe 30.**
Wird eine reelle Zahl $x$ auf die nächste ganze Zahl kleiner oder gleich $x$ abgerundet, so schreibt man das Ergebnis mit der sogenannten „Gauß-Klammer“ als $[x]$.

Die Gauß-Klammer ist also eine Funktion, die der reellen Zahl $x$ die größte ganze Zahl zuordnet, die kleiner oder gleich $x$ ist, d.h. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = [x] := n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $n \leq x < n + 1$.

In einigen Programmiersprachen wird diese Funktion als Floor-Funktion bezeichnet. Die folgenden Schreibweisen sind gebräuchlich: $f(x) = [x] = \text{floor}(x) = \lfloor x \rfloor$.

Analog ordnet die Ceiling-Funktion der reellen Zahl $x$ die kleinste ganze Zahl zu, die größer oder gleich $x$ ist. Man schreibt $f(x) = \text{ceil}(x) = \lceil x \rceil$. Es ist dann $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, $f(x) = \lceil x \rceil := n$ mit $n \in \mathbb{Z}$ und $n - 1 < x \leq n$.

Kurz gesagt: $x$ wird auf eine ganze Zahl gerundet; Abrunden gibt $\lfloor x \rfloor$ und Aufrunden gibt $\lceil x \rceil$.

1. Welche Werte ergeben sich für $\lfloor 1/2 \rfloor$, $\lceil 1/2 \rceil$, $\lfloor -1/2 \rfloor$, $\lceil -1/2 \rceil$, $\lfloor 3,7 \rfloor$, $\lceil 3,7 \rceil$, $\lfloor 14 \rfloor$ und $\lceil 14 \rceil$ ?
2. Zeichnen Sie die Graphen von $y = \lfloor x \rfloor$ und $y = \lceil x \rceil$.
3. Skizzieren Sie $y = \lfloor -x \rfloor$ und $y = \lceil -x \rceil$. Welche Zusammenhänge kann man erkennen?
4. Welche Werte ergeben sich für $x - \lfloor x \rfloor$ und für $x - \lceil x \rceil$ (sowohl bei positivem als auch bei negativem $x$)?
5. Skizzieren Sie den Graph der Funktion $f(x) = x - 4 \cdot [x/4]$.

Kapitel 4

# Vollständige Induktion

**Aufgabe 31.**
Beweisen Sie durch vollständige Induktion, daß die Summe der ersten $n$ natürlichen Zahlen gleich $n(n+1)/2$ ist, also

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

**Aufgabe 32.**
Beweisen Sie durch vollständige Induktion:

$$1 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**Aufgabe 33.**
Beweisen Sie durch vollständige Induktion nach $n$, daß für alle reellen $q \neq 1$ und alle ganzen Zahlen $n \geq 0$ die Gleichung

$$1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

gilt.

**Aufgabe 34.**
Beweisen Sie durch vollständige Induktion die Summenformel

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu \cdot \nu! = (n+1)! - 1.$$

Kapitel 5

# Kombinatorik

**Aufgabe 35.**
Vereinfachen Sie die folgenden Ausdrücke, indem Sie so weit wie möglich kürzen. (Im zweiten und dritten Fall ist mit „:“ eine Division gemeint.)

(a) $\dfrac{(n-1)!\,(n+1)!}{(n!)^2}$

(b) $\dbinom{n}{k} : \dbinom{n+1}{k} \qquad (0 \leq k \leq n).$

(c) $\dbinom{n}{k} : \dbinom{n}{k+1} \qquad (0 \leq k \leq n-1).$

**Aufgabe 36.**
Vier verschiedene Mathematikbücher, sechs verschiedene Informatikbücher und zwei verschiedene Physikbücher sollen auf einem Regal angeordnet werden. Wie viele verschiedene Anordnungen sind möglich, wenn

(a) die Bücher aus einem Fachgebiet alle zusammenstehen sollen;

(b) nur die Mathematikbücher zusammenstehen sollen?

**Aufgabe 37.**
Es nehmen 600 Personen mit jeweils einem Los an einer Lotterie teil, bei der drei Preise ausgespielt werden: 1000 Euro, 500 Euro und 100 Euro. Wieviele verschiedene Möglichkeiten gibt es für den Ausgang der Verlosung?

**Aufgabe 38.**
Ein Computersystem sei durch ein Passwort geschützt, das aus 8 Zeichen besteht.

(a) Jedes Zeichen kann einer der 26 Buchstaben oder eine der 10 Ziffern sein. Wie viele Passwörter sind möglich?

(b) Jedes Zeichen kann einer der 26 Buchstaben oder eine der 10 Ziffern sein, wobei unter den 8 Zeichen mindestens eine Ziffer und mindestens ein Buchstabe vorkommen muß. Wie viele Passwörter sind möglich?

(c) Um wieviel Prozent reduziert sich die Anzahl der Passwörter in (b) gegenüber denen, die in (a) möglich sind?

Hinweis: Es wird nicht zwischen Groß- und Kleinbuchstaben unterschieden.

**Aufgabe 39.**
In einer Klausur wird eine Multiple-Choice-Aufgabe mit 6 Antwortmöglichkeiten gestellt. Wieviel unterscheidbare Möglichkeiten gibt es, 3 Antworten anzukreuzen?

**Aufgabe 40.**
Ein portables Gerät zur Messung von Luftschadstoffen kann mit bis zu vier Zusatzmodulen (Drucker für Meßwerteprotokoll, Positionsbestimmung über Satelliten, Datenübertragung per Funk, Statistik-Software) ausgerüstet werden, die unabhängig voneinander eingebaut werden können, d.h. beliebig miteinander kombinierbar sind. Wieviele verschiedene Ausstattungsvarianten gibt es (einschließlich der Basisversion ohne Zusatzmodule)?

**Aufgabe 41.**
In einer Cafeteria kann man 5 verschiedene Sorten von belegten Brötchen bekommen, von jeder Sorte sind 6 Stück vorhanden. Ein Student will für eine Arbeitsgruppe, die sich auf eine Mathematikprüfung vorbereitet, 3 belegte Brötchen kaufen. Dabei ist es egal, welche Sorten er nimmt, und in welcher Reihenfolge die Brötchen eingepackt werden. Wieviele verschiedene Zusammenstellungen sind möglich?

**Aufgabe 42.**
In einem Gerät sind versehentlich 8 Steckverbindungen geöffnet worden, wodurch 5 rote und 3 blaue Drähte unterbrochen sind. Jeder der 8 Drähte hat eine spezielle Funktion, d.h. jeder Stecker gehört eindeutig in eine der Buchsen, wobei zu einem roten Stecker eine der roten Buchsen und zu einem blauen Stecker eine der blauen Buchsen gehört.

Wieviel Möglichkeiten gibt es, die 8 Steckverbindungen zu schließen, wenn nur die farbliche Zusammengehörigkeit eingehalten wird?

**Aufgabe 43.**
Ein DNA-Strang besteht aus hintereinander aufgereihten Nukleotidmolekülen. Es gibt vier verschiedene Nukleotide. Wieviel verschiedene DNA-Stränge der Länge 260 sind möglich? Stellen Sie das Ergebnis in der Zehnerpotenz-Schreibweise dar.

**Aufgabe 44.**
Wie groß muß die Mindestlänge eines DNA-Strangs, d.h. die Mindestanzahl hintereinander aufgereihter Nukleotide sein, damit mindestens $10^{100}$ unterschiedliche Kodierungen möglich sind?

**Aufgabe 45.**
Zur Kennzeichnung der verschiedenen Varianten eines elektronischen Bauteils soll ein Code benutzt werden, der aus 4 nebeneinanderliegenden verschiedenfarbigen Balken besteht, die auf das Bauteil aufgedruckt werden. Der erste Balken ist immer schwarz, für die anderen werden die Farben Rot, Grün, Gelb, Braun, Orange, Cyan, Magenta und Blau verwendet.

Wieviel Codierungen sind möglich, wenn keine Farbe mehrfach vorkommen darf?

**Aufgabe 46.**
Wieviele Gruppen können aus 7 Männern und 5 Frauen gebildet werden, wobei die Gruppen sich zusammensetzen aus

(a) 3 Männern und 5 Frauen;

(b) 5 Personen, von denen mindestens 3 Männer sind?

**Aufgabe 47.**
Es sollen 5 Männer und 4 Frauen in einer Reihe sitzen, und zwar so, daß die Frauen die geraden Plätze einnehmen. Wie viele solcher Anordnungen sind möglich?

**Aufgabe 48.**
In einem Gremium einer Hochschule haben die Studierenden 4 Sitze. Bei der Wahl zu diesem Gremium kandidieren aus jedem der 9 Fachbereiche mindestens 4 Studierende, so daß ein Ergebnis möglich ist, bei dem alle studentischen Mitglieder aus nur einem Fachbereich kommen. Numerieren wir die Fachbereiche von 1 bis 9, können z.B. alle aus FB 6 oder alle aus FB 8 sein. Es können aber auch zwei aus FB 7, einer aus FB 3 und einer aus FB 1 sein.

Wieviele verschiedene solcher Verteilungen der 4 Sitze auf die 9 Fachbereiche sind insgesamt möglich?

**Aufgabe 49.**
Ein Ausschuß der Fachhochschule soll aus 10 Studierenden bestehen, wobei 4 Studierende aus dem Fachbereich KMUB, 3 Studierende aus dem FB E1 und ebenfalls 3 Studierende aus dem FB MNI sein sollen.

Es stellen sich 6 KMUB-, 8 E1-, und 5 MNI-Studierende zur Verfügung. Wieviele Möglichkeiten zur Bildung des Ausschusses gibt es?

**Aufgabe 50.**
Wieviel vierstellige Zahlen können mit den Ziffern 1, 3, 5, 7, 8 und 9 gebildet werden, wenn keine dieser Ziffern mehr als einmal in jeder Zahl auftreten darf?

Kapitel 6

# Relationen

## 6.1 Grundlegende Eigenschaften

**Aufgabe 51.**
Welche der folgenden Relationen $R$ auf der Menge der Menschen ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv? Es sei $(x, y) \in R$ genau dann, wenn

1. $x$ ist größer als $y$,
2. $x$ und $y$ wurden am selben Tag geboren,
3. $x$ hat denselben Vornamen wie $y$,
4. $x$ und $y$ haben eine gemeinsame Großmutter.

**Aufgabe 52.**
Welche der folgenden Relationen auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$ ist reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv? Schreiben Sie die Booleschen Matrizen der Relationen auf, und zeichnen Sie die gerichteten Graphen.

1. $R_1 = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$
2. $R_2 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
3. $R_3 = \{(2, 4), (4, 2)\}$
4. $R_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4)\}$
5. $R_5 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$
6. $R_6 = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 1), (3, 4)\}$

**Aufgabe 53.**
In der Vorlesung wurde hergeleitet, daß es auf einer endlichen Menge mit $n$ Elementen genau $2^{n^2}$ voneinander verschiedene Relationen gibt.

1. Ändern Sie die den Beweis ab, und finden Sie heraus, wieviele reflexive und wieviele symmetrische Relationen auf einer Menge mit $n$ Elementen existieren.

2. Wieviel Prozent aller Relationen auf einer Menge mit $n$ Elementen sind reflexiv? Wie groß ist der Prozentsatz für $n = 1$, 2, 3 und 4? Wie groß ist er ungefähr, wenn $n = 100$ ist?

**Aufgabe 54.**
(Warnung: Die Aufgabe ist sehr umfangreich! Sie muß nicht komplett bearbeitet werden.)
Stellen Sie fest, ob die folgenden Relationen auf der Menge der ganzen Zahlen reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch oder transitiv sind, wobei $(x, y) \in R$ genau dann, wenn

1. $x \neq y$,

2. $xy \geq 1$,

3. $x = y + 1$ oder $x = y - 1$,

4. $x \equiv y \bmod 7$,

5. $x$ ist ein Vielfaches von $y$,

6. $x$ und $y$ sind beide negativ oder beide nichtnegativ,

7. $x = y^2$,

8. $x \geq y^2$.

## 6.2 Verkettungen, Wege, Hüllen

**Aufgabe 55.**
Es bezeichne $R$ die Relation $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}$ und $S$ die Relation $\{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}$. Geben Sie $S \circ R$ an. Skizzieren Sie die Verknüpfung mit Hilfe gerichteter Graphen. Berechnen Sie die Boolesche Matrix der Relation $S \circ R$ aus den Booleschen Matrizen von $S$ und $R$.

**Aufgabe 56.**
Es sei die Relation $R = \{(a, c), (a, d), (b, b), (c, d), (d, a), (d, b)\}$ auf der Menge $M = \{a, b, c, d\}$ gegeben. Zeichnen Sie den gerichteten Graphen von $R$, und bestimmen Sie mit dessen Hilfe die Relationen $R^2$ und $R^3$.

**Aufgabe 57.**
Es sei $R$ die Relation $\{(1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (4, 4)\}$ auf der Menge $\{1, 2, 3, 4\}$. Geben Sie $R^{-1}$ an. Schreiben Sie zu $R$ und $R^{-1}$ die Booleschen Matrizen auf, und zeichnen Sie die gerichteten Graphen.

**Aufgabe 58.**
Bestimmen Sie zu den folgenden Relationen auf der Menge $\{a, b, c, d, e\}$ die reflexive, die symmetrische und die transitive Hülle. Zeichnen Sie zu jeder Relation den gerichteten Graphen.

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b),(e,d)\} \\ R_2 &= \{(b,c),(b,e),(c,e),(d,a),(e,b),(e,c)\} \\ R_3 &= \{(a,b),(a,c),(a,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(d,a),(e,d)\} \end{aligned}$$

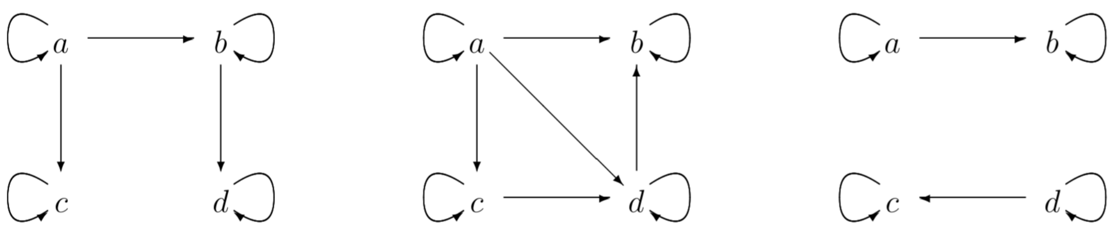
## 6.3 Äquivalenzrelationen, Ordnungsrelationen

**Aufgabe 59.**
Welche der folgenden Relationen auf der Menge $\{0, 1, 2, 3\}$ sind Äquivalenzrelationen? Welches sind in diesen Fällen die Äquivalenzklassen?

$$\begin{aligned} R_1 &= \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\} \\ R_2 &= \{(0,0),(0,2),(2,0),(2,2),(2,3),(3,2),(3,3)\} \\ R_3 &= \{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\} \\ R_4 &= \{(0,0),(1,1),(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\} \\ R_5 &= \{(0,0),(0,1),(0,2),(1,0),(1,1),(1,2),(2,0),(2,2),(3,3)\} \end{aligned}$$

**Aufgabe 60.**
Gesucht ist die kleinste Äquivalenzrelation auf der Menge $\{a, b, c, d, e\}$, die die Relation $\{(a, b), (a, c), (d, e)\}$ enthält.

**Aufgabe 61.**
Im folgenden sind drei Relationen durch ihre gerichteten Graphen gegeben. Stellen Sie fest, ob es sich um Ordnungen handelt. Sind diese partiell oder total?




**Aufgabe 62.**
Auf jeder der folgenden Mengen ist durch die Teilbarkeitsrelation eine partielle Ordnung gegeben. Zeichnen Sie die zugehörigen Hasse-Diagramme.

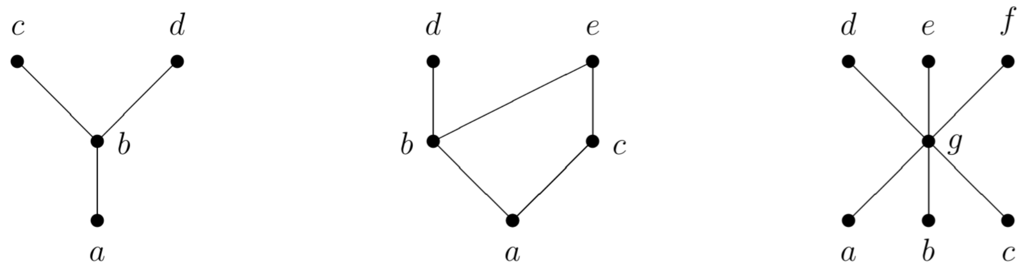
(a) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$

(b) $\{1, 2, 3, 5, 7, 11, 13\}$

(c) $\{1, 2, 3, 6, 12, 24, 36, 48\}$

(d) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64\}$

**Aufgabe 63.**
Zu den folgenden Hasse-Diagrammen sollen die zugehörigen partiellen Ordnungen als Mengen von geordneten Paaren angegeben werden.




**Aufgabe 64.**
Auf der Menge $\{1, 2, 3, 6, 8, 12, 24, 36\}$ ist durch die Teilbarkeitsrelation eine partielle Ordnung gegeben. Finden Sie eine dazu kompatible totale Ordnung.

**Aufgabe 65.**
Es sei $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und $R \subseteq A \times A$, d.h. $R$ sei eine Relation auf der Menge der geordneten Paare von positiven ganzen Zahlen. Dabei sei $((a, b), (c, d)) \in R$ genau dann, wenn $ad = bc$ ist.

Zeigen Sie, daß $R$ eine Äquivalenzrelation ist. Welche Elemente sind in der Äquivalenzklasse $[(1, 2)]$ enthalten? Wie kann man die Äquivalenzklassen von $R$ interpretieren?

Kapitel 7

# Graphen

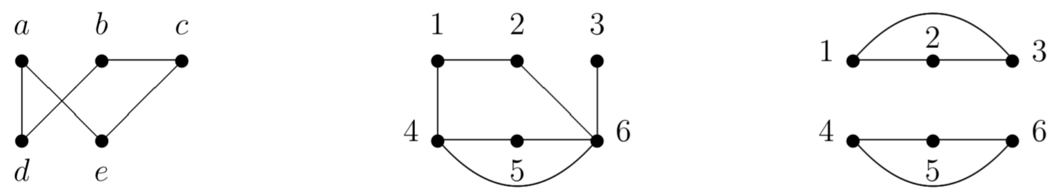
## 7.1 Darstellungen, Isomorphie, Knotenfärbung

**Aufgabe 66.**
Zeichnen Sie die Graphen $G = (V, E)$ mit:

1. $V = \{a, b, c, d, e\}$,
   $E = \{\{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, e\}\}$,

2. $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
   $E = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{1, 6\}, \{2, 3\}, \{3, 5\}, \{3, 7\}, \{4, 6\}\}$.

**Aufgabe 67.**
Es sind die folgenden drei schlichten Graphen gegeben.

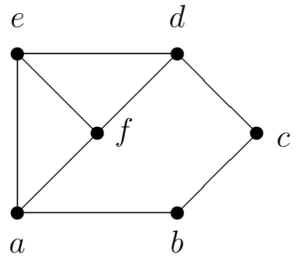


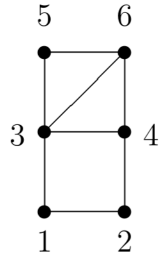

1. Schreiben Sie zu jedem Graphen die aufzählende Darstellung $G = (V, E)$ mit Knotenmenge $V$ und Kantenmenge $E$ auf.

2. Ein schlichter Graph $G = (V, E)$ mit $n$ Knoten kann durch die zugehörige Adjazenzmatrix beschrieben werden: eine $(n \times n)$–Matrix $A = (a_{ij})$ mit $a_{ij} = 1$, falls die Kante $\{v_i, v_j\}$ zur Kantenmenge $E$ gehört und $a_{ij} = 0$ sonst.

   Geben Sie die Adjazenzmatrizen der Graphen an.

**Aufgabe 68.**
Sind die beiden folgenden Graphen isomorph? Geben Sie entweder einen Isomorphismus an, oder begründen Sie, warum keiner existiert.






**Aufgabe 69.**
Bei dem Graphen $G_1 = (V_1, E_1)$ mit $V_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ sollen zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sein, wenn sie beide Primzahlen sind oder beide nicht Primzahlen sind. Bei dem Graphen $G_2 = (V_2, E_2)$ mit $V_2 = \{0, -1, -2, -3, -4, -5, -6\}$ sollen zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden sein, wenn sie beide gerade oder beide ungerade sind. Gesucht ist ein Isomorphismus zwischen $G_1$ und $G_2$.

**Aufgabe 70.**
Existiert ein schlichter Graph mit fünf Knoten und den folgenden Knotengraden? Wenn ja, wie groß ist die Anzahl der Kanten? Falls möglich, zeichnen Sie einen Graphen mit den gegebenen Eigenschaften.

(a) 1, 2, 3, 4, 5
(b) 3, 3, 3, 3, 2
(c) 1, 2, 3, 4, 4
(d) 3, 4, 3, 4, 3
(e) 0, 1, 2, 2, 3
(f) 4, 3, 3, 2, 2

**Aufgabe 71.**
Gesucht sind die chromatischen Zahlen der Graphen $C_n$, $K_n$ und $W_n$.

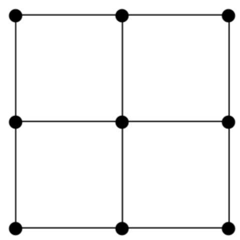
**Aufgabe 72.**
Angenommen, der Fachbereich MNI hat sechs Gremien, die in diesem Semester alle noch einmal tagen sollen. Wie viele verschiedene Sitzungstermine sind notwendig, damit kein Gremienmitglied zur gleichen Zeit zwei Verpflichtungen hat? Die Gremien sind:
$G_1 = \{\text{Henrich, Kügler, Letschert}\}$,
$G_2 = \{\text{Kaufmann, Kügler, Metz, Müller, Renz}\}$,
$G_3 = \{\text{Henrich, Jäger, Kneisel, Letschert}\}$,
$G_4 = \{\text{Kaufmann, Lauwerth, Letschert, Müller, Schneider}\}$,
$G_5 = \{\text{Henrich, Kügler}\}$,
$G_6 = \{\text{Jäger, Kaufmann, Kügler, Letschert}\}$.
Modellieren Sie die Problemstellung mit einem Graphen, und verwenden Sie Knotenfärbung zur Lösung.

**Aufgabe 73.**
In Nord-Amerika werden bestimmte Fernsehkanäle den Fernsehstationen so zugeteilt, daß niemals zwei Stationen, die weniger als 150 Meilen voneinander entfernt sind, denselben Kanal verwenden. Wieviele verschiedene Kanäle werden dann für die sechs Stationen benötigt, deren Entfernungen voneinander in der folgenden Tabelle gegeben sind?

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | — | 85 | 175 | 200 | 50 | 100 |
| 2 | 85 | — | 125 | 175 | 100 | 160 |
| 3 | 175 | 125 | — | 100 | 200 | 250 |
| 4 | 200 | 175 | 100 | — | 210 | 220 |
| 5 | 50 | 100 | 200 | 210 | — | 100 |
| 6 | 100 | 160 | 250 | 220 | 100 | — |

## 7.2 Rundtouren

**Aufgabe 74.**
Gibt es in dem folgenden Graphen eine Euler-Rundtour? Gibt es eine Hamilton-Rundtour?



**Aufgabe 75.**
Welche der Graphen $C_n$, $K_n$ und $W_n$ sind Euler-Graphen? Welche sind Hamilton-Graphen?

**Aufgabe 76.**
Gibt es in $G = (V, E)$ bei den folgenden Knoten- und Kantenmengen einen Hamiltonkreis? Falls ja, geben Sie einen an.

1. $V = \{a, b, c, d, e\}$
   $E = \{\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, e\}, \{c, d\}, \{d, e\}\}$

2. $V = \{a, b, c, d, e, f\}$
   $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, e\}, \{c, e\}, \{d, e\}, \{e, f\}\}$

# Teil II

# Lösungen

**Lösung zu Aufgabe 1.**

$\phi_1 = (A \vee (\neg B)) \wedge A$

| $A$ | $B$ | $\neg B$ | $A \vee (\neg B)$ | $\phi_1$ |
|---|---|---|---|---|
| f | f | w | w | f |
| f | w | f | f | f |
| w | f | w | w | w |
| w | w | f | w | w |

Die Formel $\phi_1$ ist erfüllbar. Da sich in zwei Zeilen der Wahrheitstafel der Wahrheitswert w ergibt, ist die Formel sogar für zwei unterschiedliche Belegungen der atomaren Variablen erfüllbar. Da $\phi_1$ sowohl wahr als auch falsch sein kann, ist die Formel weder eine Tautologie noch eine Kontradiktion.

$\phi_2 = A \vee (\neg(A \wedge B))$

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $\neg(A \wedge B)$ | $\phi_2$ |
|---|---|---|---|---|
| f | f | f | w | w |
| f | w | f | w | w |
| w | f | f | w | w |
| w | w | w | f | w |

Die Formel $\phi_2$ ist stets wahr und damit nicht nur erfüllbar, sondern sogar eine Tautologie.

$\phi_3 = (A \vee (\neg B)) \wedge (\neg A)$

| $A$ | $B$ | $\neg B$ | $A \vee (\neg B)$ | $\neg A$ | $\phi_3$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f | f | w | w | w | w |
| f | w | f | f | w | f |
| w | f | w | w | f | f |
| w | w | f | w | f | f |

Die Formel $\phi_3$ ist erfüllbar und somit keine Kontradiktion. Da sie aber auch den Wahrheitswert f annehmen kann, ist sie auch keine Tautologie.

$\phi_4 = (A \wedge B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))$

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $(\neg A) \vee (\neg B)$ | $A \wedge B$ | $\phi_4$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f | f | w | w | w | f | f |
| f | w | w | f | w | f | f |
| w | f | f | w | w | f | f |
| w | w | f | f | f | w | f |

Die Formel $\phi_4$ ist nicht erfüllbar, d.h. es ist eine Kontradiktion. Für keine Belegung der atomaren Aussagen mit Wahrheitswerten bekommt die Formel den Wahrheitswert w.

**Lösung zu Aufgabe 2.**

1.

| $A$ | $B$ | $A \to B$ | $B \to A$ | $(A \to B) \land (B \to A)$ | $A \leftrightarrow B$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f | f | w | w | w | w |
| f | w | w | f | f | f |
| w | f | f | w | f | f |
| w | w | w | w | w | w |

2.

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg A \lor B$ | $A \to B$ |
|---|---|---|---|---|
| f | f | w | w | w |
| f | w | w | w | w |
| w | f | f | f | f |
| w | w | f | w | w |

3.

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $\neg A \land \neg B$ | $\neg(\neg A \land \neg B)$ | $A \lor B$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f | f | w | w | w | f | f |
| f | w | w | f | f | w | w |
| w | f | f | w | f | w | w |
| w | w | f | f | f | w | w |

Mit Regeln der Aussagenlogik (siehe Skript zur Vorlesung) folgt

$$\neg(\neg A \land \neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg A) \lor \neg(\neg B) \Leftrightarrow A \lor B,$$

man kann also die logische Äquivalenz aus dem dritten Teil der Aufgabe auch auf diesem Weg herleiten.

Die logischen Äquivalenzen zeigen, daß jede Aussage nur unter Verwendung der Junktoren $\neg$ und $\land$ geschrieben werden kann. In der Zusatzfrage geht es nun darum, ob es entsprechend möglich ist, jede zusammengesetzte Aussage ausschließlich mit den beiden Junktoren $\neg$ und $\lor$ zu formulieren. Um dies zu zeigen, genügt es, den Junktor $\land$ mit $\neg$ und $\lor$ auszudrücken. Wie kommt man auf eine solche Formulierung? Wir können z.B. mit den Regeln der Aussagenlogik arbeiten und ein Umformung ähnlich wie oben aufschreiben (nur jetzt „von rechts nach links“):

$$A \land B \Leftrightarrow \neg(\neg A) \land \neg(\neg B) \Leftrightarrow \neg(\neg A \lor \neg B).$$

Es ist sogar möglich, mit nur einem einzigen Junktor auszukommen (siehe Literatur).

**Lösung zu Aufgabe 3.**

1.

| $A$ | $\neg A$ | $A \lor (\neg A)$ |
|---|---|---|
| f | w | w |
| w | f | w |

2.

| $A$ | $\neg A$ | $A \wedge (\neg A)$ | $\neg(A \wedge (\neg A))$ |
|---|---|---|---|
| f | w | f | w |
| w | f | f | w |

3.

| $A$ | $\neg A$ | $\neg(\neg A)$ | $\neg(\neg A) \leftrightarrow A$ |
|---|---|---|---|
| f | w | f | w |
| w | f | w | w |

4.

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \wedge B$ | $\neg(A \wedge B)$ | $(\neg A) \vee (\neg B)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f | f | w | w | f | w | w |
| f | w | w | f | f | w | w |
| w | f | f | w | f | w | w |
| w | w | f | f | w | f | f |

Das Muster der Wahrheitswerte in den letzten beiden Spalten stimmt überein, d.h die betreffenden Aussagen sind logisch äquivalent. Mit einer entsprechenden Tabelle folgt, daß der Ausdruck $(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$ ebenfalls eine Tautologie ist.

5.

| $A$ | $B$ | $A \to B$ | $(A \to B) \wedge A$ | $((A \to B) \wedge A) \to B$ |
|---|---|---|---|---|
| f | f | w | f | w |
| f | w | w | f | w |
| w | f | f | f | w |
| w | w | w | w | w |

6.

| $A$ | $B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $A \to B$ | $(A \to B) \wedge (\neg B)$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| f | f | w | w | w | w | w |
| f | w | w | f | w | f | w |
| w | f | f | w | f | f | w |
| w | w | f | f | w | f | w |

Hierbei steht $\phi$ für $((A \to B) \wedge (\neg B)) \to (\neg A)$.

7.

| $A$ | $B$ | $C$ | $A \to B$ | $B \to C$ | $(A \to B) \wedge (B \to C)$ | $A \to C$ | $\phi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f | f | f | w | w | w | w | w |
| f | f | w | w | w | w | w | w |
| f | w | f | w | f | f | w | w |
| f | w | w | w | w | w | w | w |
| w | f | f | f | w | f | f | w |
| w | f | w | f | w | f | w | w |
| w | w | f | w | f | f | f | w |
| w | w | w | w | w | w | w | w |

Hierbei steht $\phi$ für $((A \to B) \wedge (B \to C)) \to (A \to C)$.

**Lösung zu Aufgabe 4.**

1. Die fünf zusammengesetzten Aussagen unter 1.(a), 1.(b), 1.(c), 2. und 3. werden mit den vier atomaren Aussagen $L$, $Q$, $B$ und $N$ formuliert.

   - 1.(a) wird zu: $\neg L \to Q$
   - 1.(b) wird zu: $\neg L \to B$
   - 1.(c) wird zu: $\neg L \leftrightarrow N$
   - 2. wird zu: $\neg Q \to B$
   - 3. wird zu: $\neg B$

2. Wir haben vier atomare Aussagen. Eine Wahrheitstafel muß also 16 Zeilen haben, damit alle möglichen Belegungen der atomaren Aussagen mit Wahrheitswerten enthalten sind. Für jede der 16 Zeilen müssen wir die Wahrheitswerte der obigen 5 Aussagen bestimmen. Wenn es mindestens eine Zeile gibt, in der die 5 Aussagen alle wahr sind, dann sind die Spezifikationen konsistent. Ist aber in jeder Zeile der Wahrheitstafel mindestens eine der obigen Aussagen falsch, dann enthalten die Spezifikationen einen inneren Widerspruch, da sie nicht alle gleichzeitig erfüllbar sind, d.h. die Spezifikationen sind inkonsistent.

   Stellt man die Wahrheitstafel auf, so zeigt sich, daß bei genau einer Belegung von $L$, $Q$, $B$ und $N$ mit Wahrheitswerten alle Spezifikationen erfüllt werden können, d.h. die Spezifikationen sind konsistent.

   (Das Aufstellen einer Wahrheitstabelle dieser Größe ist mühsam. Kann man das nicht per Programm machen? Ja! Das ist eine interessante Programmieraufgabe als Ergänzung.)

3. Fallunterscheidung

   *Fall 1*: $B$ ist wahr.
   Dann ist die letzte Formel ($\neg B$) falsch. Eine konsistente Spezifikation ist damit nicht möglich, so daß wir Fall 1 nicht weiter zu untersuchen brauchen.

   *Fall 2*: $B$ ist falsch.
   Die Aussagen 1.(b) und 2. können nur dann wahr sein, wenn $\neg L$ und $\neg Q$ falsch, d.h. $L$ und $Q$ wahr sind.

   Wenn $L$ wahr ist, d.h. $\neg L$ falsch, dann kann Aussage 1.(c) nur wahr sein, wenn $N$ falsch ist. Die Spezifikationen können also nur konsistent sein, wenn $L$ wahr, $Q$ wahr, $B$ falsch und $N$ falsch ist.

   Wir sind noch nicht fertig!

   Wir wissen: die Aussagen 1.(b), 1.(c), 2. und 3. sind wahr. Aber 1.(a) muß noch überprüft werden! Bei der hergeleiteten Belegung von $L$, $Q$, $B$ und $N$ ist aber auch 1.(a) wahr.

   Also ist das System konsistent, und darüberhinaus ist die Belegung der atomaren Aussagen eindeutig.

**Lösung zu Aufgabe 5.**
Es gibt verschiedene Formeln, die logisch äquivalent zu $A \oplus B$ sind. In der folgenden Wahrheitstafel wird gezeigt, daß

$$A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))$$

gilt. Man kann aber sehr ähnlich auch

$$A \oplus B \equiv (A \vee B) \wedge (\neg (A \wedge B))$$

bekommen. Die Gleichwertigkeit der beiden Formeln sieht man auch unmittelbar mit einer Regel von de Morgan, nach der

$$\neg (A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B)$$

gilt. Die anschauliche Bedeutung des exklusiven Oder kommt in der Formel aus der zweiten Äquivalenz $(A \vee B) \wedge (\neg (A \wedge B))$ deutlich zum Ausdruck: ein Oder und gleichzeitig Nicht ein Und.

| $A$ | $B$ | $A \oplus B$ | $A \vee B$ | $\neg A$ | $\neg B$ | $(\neg A) \vee (\neg B)$ | $(A \vee B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f | f | f | f | w | w | w | f |
| f | w | w | w | w | f | w | w |
| w | f | w | w | f | w | w | w |
| w | w | f | w | f | f | f | f |

**Lösung zu Aufgabe 6.**
Die Bedeutung des Sheffer-Operators ist Nicht-Und, daher ja auch der Name NAND-Operator, d.h. es gilt die logische Äquivalenz

$$A \mid B \equiv \neg (A \wedge B).$$

Setzen wir speziell $B = A$ ein, bekommen wir, weil $(A \wedge A) \equiv A$ ist,

$$A \mid A \equiv \neg (A \wedge A) \equiv \neg A.$$

Der Junktor $\neg$ wird also mit dem Sheffer-Operator durch

$$\neg A \equiv A \mid A$$

dargestellt. Zur Verdeutlichung geben wir noch zwei Wahrheitstafeln an.

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \mid B$ |
|---|---|---|---|
| f | f | f | w |
| f | w | f | w |
| w | f | f | w |
| w | w | w | f |

| $A$ | $\neg A$ | $A \wedge A$ | $A \mid A$ |
|---|---|---|---|
| f | w | f | w |
| w | f | w | f |

Als nächstes wollen wir den Junktor $\wedge$ mit dem Sheffer-Operator darstellen. Dazu berücksichtigen wir, daß – mit einer doppelten Verneinung – der Ausdruck $A \wedge B$ die Negation von $\neg(A \wedge B)$ ist, also die Negation des Sheffer-Operators, so daß wir

$$A \wedge B \equiv \neg(\neg(A \wedge B)) \equiv \neg(A \mid B)$$

haben. Oben haben wir aber gesehen, wie man eine Negation mit Hilfe des Sheffer-Operators darstellt, und können deshalb

$$\neg(A \mid B) \equiv (A \mid B) \mid (A \mid B)$$

schreiben. Damit gilt insgesamt die Darstellung

$$A \wedge B \equiv (A \mid B) \mid (A \mid B).$$

Zur Verdeutlichung wird auch noch die folgende Wahrheitstafel angegeben.

| $A$ | $B$ | $A \wedge B$ | $A \mid B$ | $\neg(A \mid B)$ | $(A \mid B) \mid (A \mid B)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f | f | f | w | f | f |
| f | w | f | w | f | f |
| w | f | f | w | f | f |
| w | w | w | f | w | w |

**Lösung zu Aufgabe 7.**
Für die disjunktive Normalform von $\phi$ ergibt sich

$$\phi = (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z).$$

Wir konstruieren die DNF von $\phi$, indem wir diejenigen Zeilen der Wahrheitstafel betrachten, für die $\phi$ den Wahrheitswert 1 annimmt.

Für jede dieser Zeilen schreiben wir eine Klammer auf, die genau dann wahr wird, wenn die atomaren Variablen $x$, $y$ und $z$ die Werte aus dieser speziellen Zeile haben.

Die Klammern werden mit Oder verknüpft, so daß der Gesamtausdruck wahr ist, wenn die Variablen die speziellen Werte aus einer der 1-er Zeilen haben.

Mit einer entsprechenden Überlegung für die 0-Zeilen bekommen wir die konjunktive Normalform

$$\phi = (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}).$$

Die Klammern der KNF heißen Klauseln. Sie werden mit Und verknüpft, damit die Formel nur dann wahr wird, wenn die Belegung der Variablen mit Wahrheitswerten keiner der 0-Zeilen entspricht. Jede Klausel gehört zu einer 0-Zeile und wird für genau diese 0-Zeile falsch und für alle anderen Zeilen wahr. Hat man eine 1-er Zeile, sind alle Klauseln wahr, und die Formel ist insgesamt wahr.

Man kann die KNF von $\phi$ auch herleiten, indem man die DNF des negierten Ausdrucks $\neg\phi$ aufstellt, diese dann negiert und mit den Regeln von de Morgan umformt; dies wird im folgenden durchgeführt.

$$\begin{aligned}
\phi &= \neg\Big((\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z)\Big) \\
&= \big(\neg(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})\big) \wedge \big(\neg(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z)\big) \wedge \big(\neg(x \wedge \bar{y} \wedge z)\big) \\
&= (x \vee y \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z})
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 8.**
Da die Grundmenge endlich ist, kann man den Allquantor durch endlich viele Konjunktionen und den Existenzquantor durch endlich viele Disjunktionen ersetzen. Damit ergeben sich die folgenden logischenÄquivalenzen.

a) $\forall x P(x) \equiv P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)$

b) $\exists x P(x) \equiv P(a) \vee P(b) \vee P(c)$

c) $\neg \forall x P(x) \equiv \neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c)) \equiv (\neg P(a)) \vee (\neg P(b)) \vee (\neg P(c))$

d) $\neg \exists x P(x) \equiv \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(c)) \equiv (\neg P(a)) \wedge (\neg P(b)) \wedge (\neg P(c))$

e) $\forall x \neg P(x) \equiv (\neg P(a)) \wedge (\neg P(b)) \wedge (\neg P(c)) \equiv \neg(P(a) \vee P(b) \vee P(c))$

f) $\exists x \neg P(x) \equiv (\neg P(a)) \vee (\neg P(b)) \vee (\neg P(c)) \equiv \neg(P(a) \wedge P(b) \wedge P(c))$

**Lösung zu Aufgabe 9.**

a) Die Aussage $P(0)$ bedeutet „$1 > 0$“, ist also wahr.

b) $P(-1)$ steht für „$0 > -2$“, ist also wahr.

c) $P(1)$ bedeutet „$2 > 2$“, ist also falsch.

d) $\exists x P(x)$ ist wahr, da z.B. $P(0)$ wahr ist.

e) $\forall x P(x)$ ist falsch, da z.B. $P(1)$ nicht wahr ist.

f) $\exists x \neg P(x)$ ist wahr, z.B. ist $P(x)$ für $x = 1$ falsch, so daß $\neg P(1)$ wahr ist.

g) $\forall x \neg P(x)$ ist falsch, z.B. ist $P(0)$ wahr, also $\neg P(0)$ falsch.

h) $\neg \forall x P(x)$ ist wahr, weil $\forall x P(x)$ falsch ist.

**Lösung zu Aufgabe 10.**
Um einen lesbaren Text zu bekommen verzichten wir auf die Schreibweise Student/Studentin u.s.w. und verwenden durchgehend den Begriff „Student“, der somit als neutral aufzufassen ist. Ferner schreiben wir einfach nur „Vorlesung“ und verweisen nicht mehr auf den Fachbereich MNI.

a) Es gibt einen Studenten, der mindestens eine Vorlesung besucht hat.

b) Es gibt einen Studenten, der alle Vorlesungen besucht hat.

c) Es gibt eine Vorlesung, die von allen Studenten besucht wurde.

d) Jeder Student hat mindestens eine Vorlesung besucht.

e) Jede Vorlesung wurde von mindestens einem Studenten besucht.

f) Jeder Student hat alle Vorlesungen besucht.

**Lösung zu Aufgabe 11.**

| | Aussage/keine Aussage | wahr/falsch | Begründung |
|---|---|---|---|
| a) | keine Aussage | — | freie Variable $y$ |
| b) | keine Aussage | — | freie Variable $x$ |
| c) | keine Aussage | — | freie Variable $y$ |
| d) | Aussage | wahr | 1 teilt 7 und 7 teilt 7 |
| e) | Aussage | wahr | z.B. jedes $x$ teilt $x$ |
| f) | Aussage | wahr | 3 teilt 9 |
| g) | Aussage | falsch | 3 teilt nicht 7 |
| h) | Aussage | wahr | z.B. 1 teilt 9 |
| i) | Aussage | falsch | z.B. 2 teilt nicht 9 |
| j) | Aussage | wahr | 1 teilt jede natürliche Zahl |
| k) | Aussage | wahr | jede Zahl teilt sich selbst |
| l) | Aussage | wahr | 1 teilt jede natürliche Zahl |

**Lösung zu Aufgabe 12.**
Wir bezeichnen die sieben Mengen im folgenden mit $M_1, \ldots, M_7$. Man kann diese Mengen auf mehrere Arten durch Mengenoperationen mit den Mengen $A$, $B$ und $C$ bekommen. Zum Beispiel ist:

$$\begin{aligned}
M_1 &= (A \setminus B) \setminus C \quad \text{oder} \quad M_1 = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C) \\
M_2 &= (B \setminus A) \setminus C \\
M_3 &= (C \setminus A) \setminus B \\
M_4 &= (A \cap B) \setminus C \\
M_5 &= (B \cap C) \setminus A \\
M_6 &= (A \cap C) \setminus B \\
M_7 &= A \cap B \cap C
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 13.**

1. $\{1,2,3\} \cup \{1,3,5,7\} = \{1,2,3,5,7\}$
2. $\{1,2,3,4\} \cap \{1,3,5,7,9\} = \{1,3\}$
3. $\{1,2,3,4,5\} \setminus \{1,3,5,7\} = \{2,4\}$
4. $\{1,2,4,8\} \cap \{x,y,z\} = \emptyset$
5. $\big(\{1,2,3\} \cap \{1,3,5\}\big) \cup \{x,y,z\} = \{1,3,x,y,z\}$

6. $\big(\{1,2,3\} \cup \{1,3,5\}\big) \cap \{x,y,z\} = \emptyset$

7. $\{1,5,10\} \setminus \{x,y,z\} = \{1,5,10\}$

8. $\{1,2,3,4,5\} \setminus \big(\{1,2,3,4,5\} \cap \{2,4,6\}\big) = \{1,3,5\}$

**Lösung zu Aufgabe 14.**
Die Mächtigkeit einer endlichen Menge ist gleich der Anzahl ihrer Elemente. Es ist $|A| = 7$ und $|B| = 4$.

Weil $A \cup B = \{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}$ ist, gilt $|A \cup B| = 9$. Man beachte, daß in diesem Fall $|A \cup B| \neq |A| + |B|$ ist, weil es Elemente gibt, die in beiden Mengen enthalten sind. Die Anzahl dieser Elemente ist $|A \cap B| = 2$. Wir haben hier ein Beispiel für

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

mit den speziellen Werten $9 = 7 + 4 - 2$.

Es ist $(A \cap B) \cup A = A$ und deshalb $|(A \cap B) \cup A| = 7$. Ferner ist $|A \setminus B| = 5$ und $|B \setminus A| = 2$ sowie $|A \cup A \cup A| = 7$.

Man muß die kartesischen Produkte nicht explizit aufschreiben, um ihre Mächtigkeiten angeben zu können. Es ist $|A \times A| = |A| \cdot |A| = 7 \cdot 7 = 49$. Entsprechend ergibt sich $|B \times B| = 16$ sowie $|A \times B| = 28$ und $|B \times A| = 28$.

**Lösung zu Aufgabe 15.**
$M = A \times B^2 \times C = A \times B \times B \times C$ ist ein kartesisches Produkt aus vier Mengen; also ist $M$ eine Menge von 4-Tupeln.

$$\begin{aligned} M \;=\; \{ & (1,x,x,0),(1,x,y,0),(1,y,x,0),(1,y,y,0), \\ & (2,x,x,0),(2,x,y,0),(2,y,x,0),(2,y,y,0), \\ & (3,x,x,0),(3,x,y,0),(3,y,x,0),(3,y,y,0) \} \end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 16.**
Zur Verdeutlichung kann man sich die Mengen $A_i$ für einige Werte von $i$ aufschreiben:

$$\begin{aligned} A_1 &= \{1\} \\ A_2 &= \{1,2\} \\ A_3 &= \{1,2,3\} \\ A_4 &= \{1,2,3,4\} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Damit gilt offensichtlich

$$
\begin{aligned}
M_1 &= \bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\} = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq n\} = A_n, \\
M_2 &= \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \{1\} = A_1, \\
M_3 &= \bigcup_{i=1}^{20} (A_{2i} \setminus A_{2i-1}) = (A_2 \setminus A_1) \cup (A_4 \setminus A_3) \cup \ldots \cup (A_{40} \setminus A_{39}) \\
&= \{2\} \cup \{4\} \cup \ldots \cup \{40\} = \{2, 4, 6, \ldots, 38, 40\} \\
&= \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq 40 \text{ und } m \text{ gerade}\}.
\end{aligned}
$$

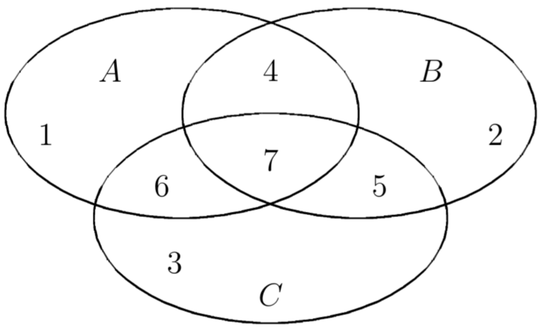
**Lösung zu Aufgabe 17.**
Es ist

$$\mathcal{P}(M_1) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

und

$$\mathcal{P}(M_2) = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}.$$

**Lösung zu Aufgabe 18.**
Wir betrachten drei sich überschneidende Mengen $A$, $B$ und $C$ in der Ebene. Damit haben wir eine bildliche Veranschaulichung der allgemeinen Situation.




Unser Ziel ist es, eine Formel für $|A \cup B \cup C|$ zu finden. Wenn wir die Summe $|A| + |B| + |C|$ bilden, zählen wir offenbar einige Elemente mehrfach, da sich die Mengen überlappen. Diesen Fehler werden wir im folgenden schrittweise korrigieren.

Durch die Summe $|A| + |B| + |C|$ werden die Elemente in den Teilflächen 1, 2 und 3 korrekt gezählt. Aber die Elemente in 4 werden doppelt gezählt, da sie sowohl in $|A|$ als auch in $|B|$ vorkommen. Entsprechend werden die Elemente in 5 und 6 doppelt gezählt.

Um den Fehler bei 4 zu korrigieren, subtrahieren wir $|A \cap B|$. Die richtige Zählung bei 1, 2 und 3 wird davon nicht betroffen. Entsprechend bringen wir die Situation bei 5 bzw. 6 in Ordnung, indem wir $|B \cap C|$ bzw. $|A \cap C|$ abziehen. Insgesamt bekommen wir damit $|A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |A \cap C|$.

Damit haben wir eine Formel, die für die Teilflächen 1 bis 6 richtig ist. Aber was ist mit der Teilfläche 7 ? In der Summe $|A|+|B|+|C|$ werden die Elemente aus 7 dreimal gezählt. Durch das Subtrahieren von $|A\cap B|$ sowie $|B\cap C|$ und $|A\cap C|$ werden die Elemente aus 7 aber auch dreimal abgezogen, so daß sie am Ende überhaupt nicht mitgezählt werden.

Um das zu korrigieren, addieren wir noch $|A\cap B\cap C|$. Die Teilflächen 1 bis 6 sind davon nicht betroffen, aber die Elemente aus 7 werden jetzt genau einmal gezählt. Somit erhalten wir als Endergebnis die Formel

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|B\cap C|-|A\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

**Lösung zu Aufgabe 19.**

Vereinigung und Durchschnitt von Mengen wurden mit Hilfe von Junktoren der Aussagenlogik definiert. Deshalb lassen sich die beiden Distributivgesetze auf entsprechende Gesetze für Aussagen zurückführen.

Wir schreiben die Distributivgesetze in Formeln der Ausssagenlogik um, wenden darauf die bekannten (mit Wahrheitstafeln bewiesenen) Gesetze der Aussagenlogik an und schreiben die so erhaltenen Formeln wieder um in die Darstellung mit der Mengenvereinigung und dem Mengendurchschnitt.

$$\begin{aligned}
A\cap(B\cup C) &= \{x|\,(x\in A)\wedge(x\in(B\cup C))\}\\
&= \{x|\,(x\in A)\wedge[(x\in B)\vee(x\in C)]\}\\
&= \{x|\,[(x\in A)\wedge(x\in B)]\vee[(x\in A)\wedge(x\in C)]\}\\
&= \{x|\,[x\in(A\cap B)]\vee[x\in(A\cap C)]\}\\
&= (A\cap B)\cup(A\cap C)
\end{aligned}$$

Die Herleitung des zweiten Distributivgesetzes verläuft völlig analog.

**Lösung zu Aufgabe 20.**

a) $x = 0{,}\overline{12}$

Aus der Differenz $100x - x = 12{,}\overline{12} - 0{,}\overline{12} = 12$ ergibt sich $99x = 12$ und daraus $x = 12/99 = 4/33$. Also ist

$$0{,}\overline{12} = \frac{4}{33}\,.$$

b) $x = 5{,}\overline{47}$

Aus $100x - x = 547{,}\overline{47} - 5{,}\overline{47} = 542$ bekommen wir $99x = 542$, das ergibt $x = 542/99$, also haben wir

$$5{,}\overline{47} = \frac{542}{99}\,.$$

c) $x = 0{,}3\overline{7}$

Aus $100x - 10x = 37{,}\overline{7} - 3{,}\overline{7} = 34$ folgt $90x = 34$, d.h. $x = 34/90 = 17/45$. Also ist

$$0{,}3\overline{7} = \frac{17}{45}\,.$$

d) $x = 7{,}5\overline{26}$

Aus $1000x - 10x = 7526{,}\overline{26} - 75{,}\overline{26} = 7451$ folgt schließlich $990x = 7451$, das ergibt $x = 7451/990$, und wir haben somit

$$7{,}5\overline{26} = \frac{7451}{990}\,.$$

**Lösung zu Aufgabe 21.**

a) $(7-3i)+(3+9i) = 10+6i$
Die Klammern sind nicht notwendig und sollen nur veranschaulichen, daß hier zwei komplexe Zahlen addiert werden.

b) $(-17+4i)-(8-7i) = -25+11i$
Das erste Klammernpaar ist nicht notwendig, das zweite kann wegen des Minuszeichens nicht weggelassen werden.

c) $(3-5i)\cdot(2+3i) = 6-15i^2+9i-10i = 21-i$
Hier sind beide Klammernpaare notwendig.

d) $(3{,}5-i)\cdot(7+2{,}5i) = \left(\frac{7}{2}-i\right)\left(7+\frac{5}{2}i\right) = \frac{49}{2}-\frac{5}{2}i^2+\frac{35}{4}i-7i = 27+\frac{7}{4}i$
$= 27+1{,}75i$

e) $(4{,}5-1{,}5i)^2 = \left(\frac{9}{2}-\frac{3}{2}i\right)^2 = \frac{81}{4}-\frac{27}{2}i+\frac{9}{4}i^2 = 18-\frac{27}{2}i = 18-13{,}5i$

f) $i\cdot(2{,}5-i)^2 = i\left(\frac{5}{2}-i\right)^2 = i\left(\frac{25}{4}-5i+i^2\right) = 5+\frac{21}{4}i = 5+5{,}25i$

g) $\dfrac{1}{7-3i} = \dfrac{7+3i}{(7-3i)(7+3i)} = \dfrac{7+3i}{49+9} = \dfrac{7}{58}+\dfrac{3}{58}i$

h) $\dfrac{-5+3i}{7+2i} = \dfrac{(-5+3i)(7-2i)}{(7+2i)(7-2i)} = \dfrac{-35+10i+21i-6i^2}{49+4} = \dfrac{-29+31i}{53}$
$= -\dfrac{29}{53}+\dfrac{31}{53}i$

**Lösung zu Aufgabe 22.**
Es ist

$$30723 = 3\cdot 7^2\cdot 11\cdot 19$$

und

$$112200 = 2^3\cdot 3\cdot 5^2\cdot 11\cdot 17.$$

**Lösung zu Aufgabe 23.**
Die komplette Aufgabe kann anschaulich mit Hilfe der Funktionsgraphen gelöst werden.

| | injektiv | surjektiv | bijektiv |
|---|---|---|---|
| (a) | ja | ja | ja |
| (b) | ja | nein | nein |
| (c) | nein | nein | nein |
| (d) | nein | ja | nein |
| (e) | ja | nein | nein |
| (f) | ja | ja | ja |
| (g) | nein | nein | nein |
| (h) | ja | nein | nein |

**Lösung zu Aufgabe 24.**
Es gibt beliebig viele Beispiele, die folgenden wurden aufgrund ihrer Einfachheit ausgewählt. Veranschaulichen kann man die Funktionen z.B. in einem kartesischen Koordinatensystem, der Graph besteht dann aus Punkten der Ebene. In einer andere Darstellung werden Elemente des Definitions- und des Bildbereichs aufgeschrieben, und die Abbildung wird durch Pfeile symbolisiert. Beide Veranschaulichungen zeigen natürlich nur endliche Ausschnitte der Funktionen. Vollständig gegeben sind die Funktionen durch die folgenden Definitionen.

1. $f(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ n-1 & \text{sonst} \end{cases}$
2. $f(n) = n + 1$
3. $f(n) = \begin{cases} 2 & \text{für} & n = 1 \\ 1 & \text{für} & n = 2 \\ n & \text{sonst} \end{cases}$
4. $f(n) = 1$

**Lösung zu Aufgabe 25.**

1. Die Anzahl der Elemente in den Produktmengen ergibt sich als $|M \times M| = |M| \cdot |M| = 4 \cdot 4 = 16$, als $|M \times \Delta_2| = |M| \cdot |\Delta_2| = 4 \cdot 2 = 8$ u.s.w.

$$\begin{aligned} M \times M &= \{ (a,a),(a,b),(a,c),(a,d), \\ &\quad (b,a),(b,b),(b,c),(b,d), \\ &\quad (c,a),(c,b),(c,c),(c,d), \\ &\quad (d,a),(d,b),(d,c),(d,d) \} \\ \\ \Delta_2 \times \Delta_2 &= \{ (0,0),(0,1),(1,0),(1,1) \} \\ \\ M \times \Delta_2 &= \{ (a,0),(a,1),(b,0),(b,1), \\ &\quad (c,0),(c,1),(d,0),(d,1) \} \\ \\ \Delta_2 \times M &= \{ (0,a),(0,b),(0,c),(0,d), \\ &\quad (1,a),(1,b),(1,c),(1,d) \} \end{aligned}$$

2. Existieren Abbildungen, die injektiv, surjektiv oder bijektiv sind?

| | injektiv | surjektiv | bijektiv |
|---|---|---|---|
| von $M$ in $\Delta_2 \times \Delta_2$ | ja | ja | ja |
| von $\Delta_2 \times M$ in $M$ | nein | ja | nein |
| von $M \times M$ in $M \times \Delta_2$ | nein | ja | nein |
| von $M \times \Delta_2$ in $M \times M$ | ja | nein | nein |

Begründung: Über die Anzahl der Elemente in den verschiedenen Mengen.

Haben zwei endliche Mengen $A$ und $B$ gleich viele Elemente, so kann man jedem Element von $A$ eindeutig ein Element von $B$ zuordnen und umgekehrt. Man kann z.B. die Elemente von $A$ in einer bestimmten Reihenfolge anordnen, ebenso die Elemente von $B$; dann bildet man das erste Element von $A$ auf das erste Element von $B$ ab, das zweite Element von $A$ auf das zweite Element von $B$, u.s.w. Diese Abbildung ist bijektiv (eineindeutig), d.h. injektiv und surjektiv. Den Fall $|A| = |B|$ haben wir bei $A = M$ und $B = \Delta_2 \times \Delta_2$. Selbstverständlich gibt es auch Abbildungen von $M$ in $\Delta_2 \times \Delta_2$, die nicht injektiv und nicht surjektiv sind, z.B. kann man alle Elemente von $M$ auf $(0, 0) \in \Delta_2 \times \Delta_2$ abbilden.

Hat die endliche Menge $A$ mehr Elemente als $B$, gilt also $|A| > |B|$, so existieren surjektive Abbildungen, denn es gibt ja „genügend“ Elemente in $A$, so daß jedes Element aus $B$ als Funktionswert eines Elementes aus $A$ angenommen werden kann. Aber es kann keine injektive Abbildung geben, da die Elemente von $B$ „nicht ausreichen“, damit jedes Element von $A$ einen anderen Funktionswert hat[1]. Die Situation $|A| > |B|$ haben wir sowohl bei $A = \Delta_2 \times M$, $B = M$, als auch bei $A = M \times M$, $B = M \times \Delta_2$.

Gilt schließlich $|A| < |B|$ für die endlichen Mengen $A$ und $B$, so kann man zwar jedem Element von $A$ ein anderes Element von $B$ zuordnen, d.h. es gibt eine injektive Abbildung, aber eine surjektive Abbildung ist nicht möglich, da jedem Element aus $A$ nur genau ein Element aus $B$ zugeordnet werden darf, so daß Elemente aus $B$ „übrig bleiben“. $|A| < |B|$ haben wir bei $A = M \times \Delta_2$ und $B = M \times M$.

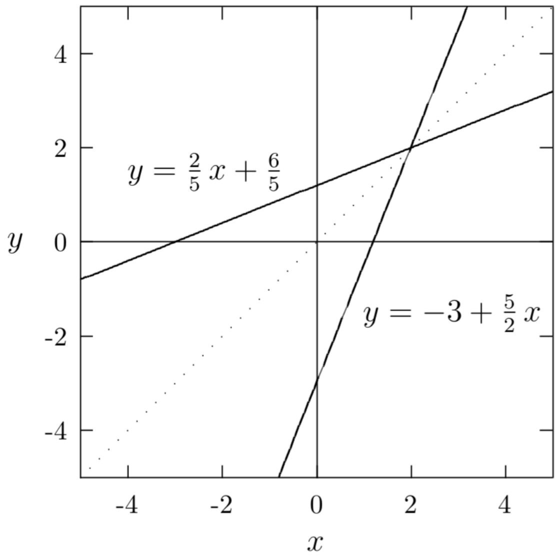
3. Da $|M| = 4 > 2 = |\Delta_2|$ ist, gibt es keine injektive Abbildung (Begründung s.o.). Also existiert auch keine bijektive Abbildung. Aber wieviele surjektive Abbildungen gibt es? Eine Abbildung $f : M \to \Delta_2$ wird vollständig durch das 4-Tupel $(f(a), f(b), f(c), f(d))$ beschrieben. Als Funktionswerte können die Elemente von $\Delta_2$ angenommen werden, d.h. 0 und 1. Also ist z.B. $(1, 0, 1, 1)$ eine mögliche Abbildung, oder $(0, 0, 1, 0)$. Die 4-Tupel können als Bitstrings der Länge 4 aufgefasst werden. Davon gibt es 16. Bei einer surjektiven Abbildung muß mindestens einmal die 0 und mindestens einmal die 1 vorkommen. Dies ist bei $(0, 0, 0, 0)$ und $(1, 1, 1, 1)$ nicht der Fall. Also gibt es $16 - 2 = 14$ surjektive Abbildungen von $M$ auf $\Delta_2$.

[1] Dies ist eine Anwendung des Schubfachprinzips (engl.: pigeonhole principle). Gibt es mehr Tauben als Taubenschläge, so halten sich in mindestens einem Taubenschlag mehrere Tauben auf. Mit „mehrere“ ist dabei „mindestens zwei“ gemeint.

**Lösung zu Aufgabe 26.**
Die Umkehrfunktion zu $y = -3 + 5x/2$ wird in zwei Schritten berechnet.

*1. Schritt:* Auflösen der Gleichung nach $x$. Es folgt $y + 3 = \frac{5}{2}\,x$ und daraus $x = \frac{2}{5}\,y + \frac{6}{5}$.

*2. Schritt:* Vertauschen von $x$ und $y$ liefert dann die gesuchte Umkehrfunktion $y = \frac{2}{5}\,x + \frac{6}{5}$.




**Lösung zu Aufgabe 27.**

1. Bei einer arithmetischen Folge, also einer Folge mit dem gleichen konstanten Zuwachs $d$ von einem Folgenglied zum nächsten, ist
$$a_k + d = a_{k+1}$$
und
$$a_k + 2d = a_{k+2}.$$
Daraus folgt
$$2d = a_{k+2} - a_k = 90 - 40 = 50,$$
also
$$d = 25.$$
Damit ist
$$a_{k+1} = a_k + d = 40 + 25 = 65$$
und
$$a_{k+3} = a_{k+2} + d = 90 + 25 = 115.$$

2. Bei einer geometrischen Folge, d. h. einer Folge mit dem gleichen prozentualen Zuwachs $q$ von einem Folgenglied zum nächsten, gilt
$$a_k \cdot q = a_{k+1}$$

und

$$a_k \cdot q^2 = a_{k+2}.$$

Also folgt

$$q^2 = \frac{a_{k+2}}{a_k} = \frac{90}{40} = \frac{9}{4}$$

und

$$q = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}.$$

Damit ist

$$a_{k+1} = a_k \cdot q = 40 \cdot \frac{3}{2} = 60$$

und

$$a_{k+3} = a_{k+2} \cdot q = 90 \cdot \frac{3}{2} = 135.$$

**Lösung zu Aufgabe 28.**
Wir können die Summe mit Hilfe der Gaußschen Summenformel

$$\sum_{n=1}^{k} n = \frac{k(k+1)}{2}$$

berechnen, aber auch direkt die Idee verwenden, die der Gaußschen Formel zugrunde liegt.

Die größte durch 7 teilbare Zahl kleiner als 1000 ist 994. Also ist die Summe gleich

$$\begin{aligned} 7 + 14 + \ldots + 994 &= 7 \cdot (1 + 2 + \ldots + 142) \\ &= 7 \cdot \sum_{n=1}^{142} n = 7 \cdot \frac{142 \cdot 143}{2} \\ &= 7 \cdot 71 \cdot 143 = 71071. \end{aligned}$$

Oder man überlegt, daß der erste plus der letzte Summand gleich 1001 ist, ebenso der zweite und der vorletzte Summand u.s.w. Da wir insgesamt 142 Summanden haben, bekommen wir 71 mal 1001, erhalten also 71071 als Gesamtsumme.

**Lösung zu Aufgabe 29.**
In der Vorlesung wurde gezeigt, daß

$$\sum_{n=0}^{m} q^n = \frac{1 - q^{m+1}}{1 - q}$$

mit beliebigem $m \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$, $q \neq 1$ gilt. Damit bekommen wir die Summenwerte

$$\sum_{n=0}^{9} 2^n = \frac{1 - 2^{10}}{1 - 2} = \frac{1 - 1024}{-1} = 1023$$

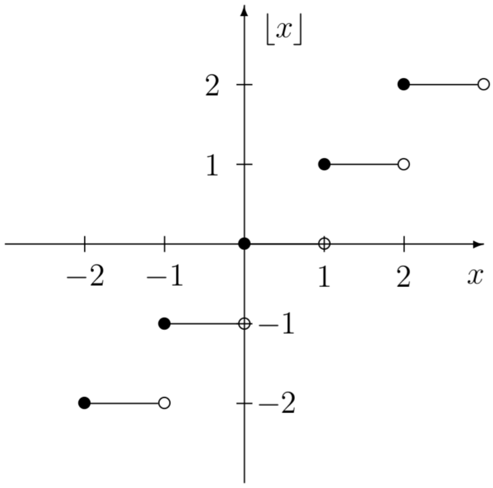
und

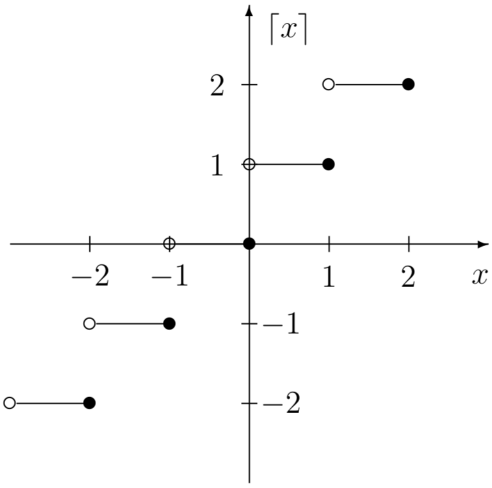
$$\sum_{n=0}^{9} (-2)^n = \frac{1 - (-2)^{10}}{1 - (-2)} = \frac{1 - 1024}{3} = -\frac{1023}{3} = -341.$$

**Lösung zu Aufgabe 30.**

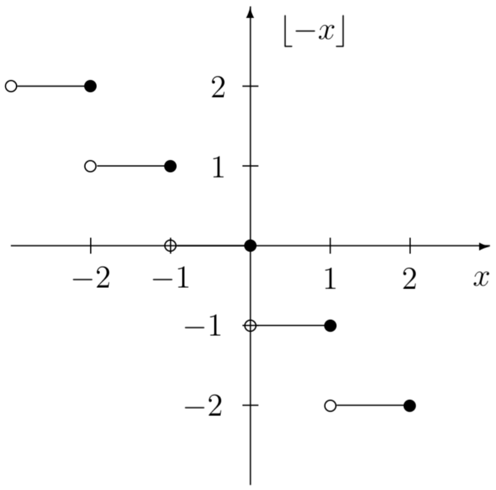
1. Es ist $\lfloor 1/2 \rfloor = 0$, $\lceil 1/2 \rceil = 1$, $\lfloor -1/2 \rfloor = -1$, $\lceil -1/2 \rceil = 0$, $\lfloor 3,7 \rfloor = 3$, $\lceil 3,7 \rceil = 4$, $\lfloor 14 \rfloor = 14$ und $\lceil 14 \rceil = 14$.

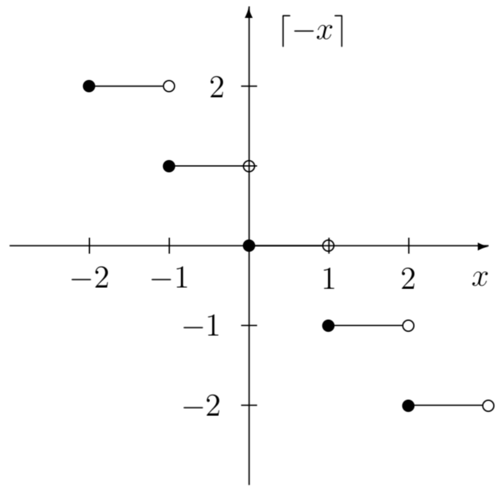
2. Die folgenden Graphen stellen die Funktionen $f(x) = \lfloor x \rfloor$ und $f(x) = \lceil x \rceil$ dar.




3. Die folgenden Graphen stellen die Funktionen $f(x) = \lfloor -x \rfloor$ und $f(x) = \lceil -x \rceil$ dar.




Ein Vergleich zeigt, daß die Kurve von $y = \lfloor -x \rfloor$ gleich der Spiegelung von $y = \lceil x \rceil$ an der $x$-Achse ist, d.h. daß

$$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$$

gilt. Ferner sieht man, daß die Kurve von $y = \lceil -x \rceil$ gleich der Spiegelung von $y = \lfloor x \rfloor$ an der $x$-Achse ist, so daß

$$\lceil -x \rceil = -\lfloor x \rfloor$$

gilt.

4. *1. Fall:* $x - \lfloor x \rfloor$.

   Für $x \geq 0$ erhält man die Nachkommastellen von $x$, zum Beispiel ist

$$3,81 - \lfloor 3,81 \rfloor = 3,81 - 3 = 0,81.$$

   Für $x < 0$ ergibt sich $1-$ (Nachkommastellen von $x$), wenn die Nachkommastellen positiv gerechnet werden, zum Beispiel

$$-3,81 - \lfloor -3,81 \rfloor = -3,81 - (-4) = -3,81 + 4 = 0,19.$$

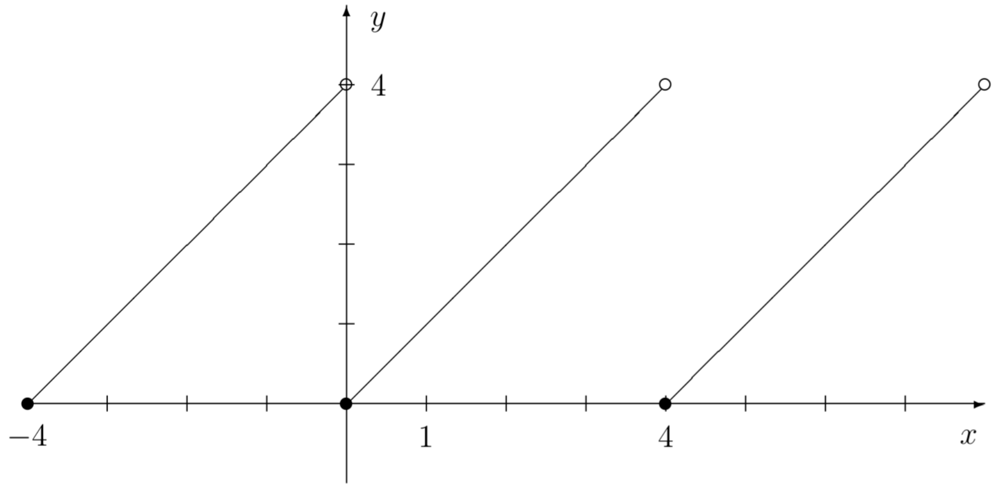
   *2. Fall:* $x - \lceil x \rceil$. Für $x \geq 0$ bekommt man (Nachkommastellen von $x$)$-1$, zum Beispiel

$$3,81 - \lceil 3,81 \rceil = 3,81 - 4 = 0,81 - 1 = -0,19.$$

   Für $x < 0$ ist das Resultat gleich den Nachkommastellen von $x$, einschließlich des negativen Vorzeichens, zum Beispiel

$$-3,81 - \lceil -3,81 \rceil = -3,81 - (-3) = -3,81 + 3 = -0,81.$$

5. Die Funktion $f(x) = x - 4 \cdot [x/4]$ ist periodisch.




   Hierbei ist zu beachten, daß sich für den Ausdruck $[x/4]$ die folgenden Werte ergeben:

$$\left[\frac{x}{4}\right] = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad 0 \leq x < 4 \\ 1 & \text{für} \quad 4 \leq x < 8 \\ -1 & \text{für} \quad -4 \leq x < 0 \\ & \text{u.s.w.} \end{cases}$$

**Lösung zu Aufgabe 31.**
Für $n = 1$ ist die Formel gültig, wie man sofort durch Einsetzen sieht:

$$1 = \frac{1(1+1)}{2}.$$

Damit haben wir die Induktionsbasis.

Im Induktionsschritt zeigen wir, daß aus der Gültigkeit der Summenformel für $n = k$, also der Induktionsannahme, die Gültigkeit für $n = k + 1$ folgt. Dazu werden in dem Ausdruck

$$1 + 2 + \ldots + k + k + 1$$

die ersten $k$ Summanden aufgrund der Induktionsannahme zusammengefaßt. Anschließend erhält man mit einer einfachen Umformung die Summenformel für den Fall $n = k + 1$.

$$\begin{aligned}
1 + 2 + \ldots + k + k + 1 &= \Big(1 + 2 + \ldots + k\Big) + k + 1 \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + k + 1 \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)}{2}
\end{aligned}$$

Damit haben wir sowohl die Induktionsbasis als auch den Induktionsschritt, so daß die Gültigkeit der Summenformel für alle natürlichen Zahlen bewiesen ist.

**Lösung zu Aufgabe 32.**
Es sei $A(n)$ die Aussageform $1 + 2^3 + \ldots + n^3 = n^2(n+1)^2/4$.
*1. Induktionsbasis*

Es muß gezeigt werden, daß die Aussage A(1) wahr ist. Dies sieht man sofort durch Einsetzen von $n = 1$ in $A(n)$:

$$1 = \frac{1(1+1)^2}{4}\,.$$

*2. Induktionsschritt*

Es sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig gegeben. Dann ist zu zeigen: Aus der Induktionsannahme $A(k)$ folgt $A(k+1)$. Es gilt

$$\begin{aligned}
1 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)^3}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2 \cdot [k^2 + 4(k+1)]}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2 \cdot [k^2 + 4k + 4)]}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2 \cdot (k+2)^2}{4}\,,
\end{aligned}$$

also gilt $A(k+1)$. (In der ersten Zeile der Umformung wurde die Induktionsannahme verwendet.)

Aus 1. und 2. folgt $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

**Lösung zu Aufgabe 33.**
Die Aussageform $A(n)$ sei $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = (1 - q^{n+1})/(1 - q)$.
*1. Induktionsbasis*
Die Aussage $A(0)$ ist wahr, da

$$1 = \frac{1-q}{1-q}$$

ist.
*2. Induktionsschritt*
Es sei $k \in \mathbb{N}$. Wir nehmen $A(k)$ an und zeigen, daß $A(k+1)$ folgt:

$$\begin{aligned} 1 + q + q^2 + \ldots + q^k + q^{k+1} &= \frac{1-q^{k+1}}{1-q} + q^{k+1} \\ &= \frac{1-q^{k+1} + (1-q)q^{k+1}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{k+1} + q^{k+1} - q^{k+2}}{1-q} \\ &= \frac{1-q^{k+2}}{1-q}. \end{aligned}$$

Aus 1. und 2. folgt $A(n)$ für jede ganze Zahl $n \geq 0$.

**Lösung zu Aufgabe 34.**
Die Aussageform $A(n)$ sei $\sum_{\nu=1}^{n} \nu \cdot \nu! = (n+1)! - 1$.
*1. Induktionsbasis*
Es gilt $1 \cdot 1! = 1$ und andererseits

$$(1+1)! - 1 = 2! - 1 = 2 - 1 = 1,$$

so daß die Aussage $A(1)$ wahr ist.
*2. Induktionsschritt*
Es sei $k \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir nehmen $A(k)$ an und zeigen $A(k+1)$. Es ist

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{k+1} \nu \cdot \nu! &= \sum_{\nu=1}^{k} \nu \cdot \nu! + (k+1)(k+1)! \\ &= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)!, \end{aligned}$$

wobei in der letzten Umformung die Induktionsannahme verwendet wurde. Wegen

$$\begin{aligned} (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! &= (k+1)! + (k+1)!(k+1) - 1 \\ &= (k+1)! \cdot [1 + (k+1)] - 1 \\ &= (k+1)! \cdot (k+2) - 1 \\ &= (k+2)! - 1 \end{aligned}$$

erhalten wir

$$\sum_{\nu=1}^{k+1} \nu \cdot \nu! = (k+2)! - 1,$$

und der Induktionsschritt ist komplett.
Insgesamt folgt aus 1. und 2., daß $A(n)$ für jede natürliche Zahl $n$ gilt.

**Lösung zu Aufgabe 35.**
Die Aufgabe wird durch algebraische Umformungen gelöst. Dabei werden die Definitionen von Fakultät und Binomialkoeffizient verwendet.

1. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{(n-1)!\,(n+1)!}{(n!)^2} &= \frac{(n-1)!}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{n!}\\ &= \frac{1}{n}\cdot(n+1) = \frac{n+1}{n} = 1+\frac{1}{n}\,.\end{aligned}$$

   Im Rechenschritt von der ersten zur zweiten Zeile wird gekürzt. Dabei wird verwendet, daß $n! = (n-1)!\cdot n$ und $(n+1)! = n!\cdot(n+1)$ ist, was unmittelbar aus der Definition der Fakultät folgt.

   Die Umformungen innerhalb der ersten und der zweiten Zeile sind einfache Bruchrechnung.

2. Ausschreiben der Binomialkoeffizienten, Division durch einen Bruch als Multiplikation mit dem Kehrbruch schreiben, sowie anschließendes Kürzen unter Beachtung der Eigenschaften der Fakultät gibt

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} : \binom{n+1}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} : \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!\,k!}\\ &= \frac{n!\,(n+1-k)!\,k!}{(n-k)!\,k!\,(n+1)!}\\ &= \frac{n+1-k}{n+1} = 1-\frac{k}{n+1}\,.\end{aligned}$$

3. Analog zum vorherigen Teil der Aufgabe folgt durch Umschreiben und algebraische Umformungen

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} : \binom{n}{k+1} &= \frac{n!}{(n-k)!\,k!} : \frac{n!}{(n-k-1)!\,(k+1)!}\\ &= \frac{n!\,(n-k-1)!\,(k+1)!}{(n-k)!\,k!\,n!}\\ &= \frac{k+1}{n-k}\,.\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 36.**

1. Die Anzahl der Permutationen (Anordnungsmöglichkeiten) für die vier Mathematikbücher ist 4!. Entsprechend gibt es für die Informatikbücher 6! Permutationen und für die Physikbücher 2!. Nun können aber auch die drei Büchergruppen untereinander vertauscht werden, d. h. es können zum Beispiel alle Mathematikbücher am Anfang stehen, dann kommen die Informatik- und dann die Physikbücher; oder aber die Informatikbücher stehen am Anfang u.s.w. Die Anzahl der Permutationen für die drei Büchergruppen beträgt 3!.

Insgesamt erhält man

$$4! \cdot 6! \cdot 2! \cdot 3! = 24 \cdot 720 \cdot 2 \cdot 6 = 207360$$

Möglichkeiten der Anordnung.

2. Die vier Mathematikbücher können auf 4! Arten angeordnet werden. Die Informatik- und Physikbücher können in beliebiger Reihenfolge stehen. Aber auch die Gruppe der vier Mathematikbücher kann an unterschiedlichen Positionen sein: sie kann am Anfang vor allen Informatik- und Physikbüchern kommen, es kann ein Informatikbuch vor der Gruppe der vier Mathematikbücher stehen, zwei Informatikbücher können vor der Gruppe stehen u.s.w.

   Wir haben also neun Objekte, die unterschiedlich angeordnet werden können: acht Bücher (sechs zur Informatik, zwei zur Physik) und eine Büchergruppe. Neun Objeklte kann man aber auf 9! Arten anordnen.

   Insgesamt ergeben sich

$$4! \cdot 9! = 24 \cdot 362880 = 8709120$$

   Möglichkeiten der Anordnung.

**Lösung zu Aufgabe 37.**
Hier haben wir eine Aufgabe vom Typ „3 aus 600“, denn es soll natürlich ausgeschlossen werden, daß eine Person zwei oder gar alle drei Preise bekommt. Bei der Ziehung der drei Preisträger spielt die Reihenfolge eine Rolle, da sich die drei Preise unterscheiden. Also geht es darum, „3 aus 600 mit Berücksichtigung der Reihenfolge“ zu bestimmen. Das ist eine Variation ohne Wiederholung. Es ergibt sich

$$v(600,3) = \frac{600!}{(600-3)!} = 600 \cdot 599 \cdot 598 = 214921200.$$

Zunächst hat man 600 Möglichkeiten (Personen, die gezogen werden können). Nachdem Person 1 bestimmt ist, hat man noch 599 Möglichkeiten. Schließlich bleiben noch 598 Möglichkeiten für die letzte Ziehung. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist das Produkt der drei Zahlen.

Arbeitet man mit der Formel

$$v(600,3) = \frac{600!}{(600-3)!} = \frac{600!}{(597)!},$$

so kommt man ohne Umformung, d.h. ohne Kürzen, nicht weiter, da die Fakultäten zu groß für Taschenrechner sind. (Gute Mathematik-Software wertet solche Ausdrücke richtig aus. Testen Sie das bei Gelegenheit.)

**Lösung zu Aufgabe 38.**
Es stehen 36 unterschiedliche Zeichen zur Verfügung.

1. Aus den 36 Zeichen werden 8 ausgewählt, wobei es keinerlei Einschränkungen gibt. Ein Zeichen kann also mehrfach vorkommen. Da die Reihenfolge eine Rolle spielt, haben wir eine Variation mit Wiederholung, so daß

$$\underbrace{36 \cdot \ldots \cdot 36}_{\text{8 Faktoren}} = 36^8 \approx 2,82 \cdot 10^{12}$$

Passwörter möglich sind.

2. Hier gibt es einen geschickten kurzen Lösungsweg, bei dem man mit der Anzahl der nicht erlaubten Wörter arbeitet. Versucht man die erlaubten Wörter zu zählen, kommt man erst nach einer längeren Überlegung zum Ziel.

   *1. Weg:* Erlaubt sind alle Passwörter aus Teil (a) ohne diejenigen, bei denen nur Buchstaben vorkommen (das sind $26^8$) und ohne diejenigen, bei denen nur Zahlen vorkommen (das sind $10^8$). Also sind

$$36^8 - 26^8 - 10^8 \approx 2,61 \cdot 10^{12}$$

   Passwörter zulässig.

   *2. Weg:* Die Anzahl der Buchstaben in einem Passwort ist mindestens 1 und höchstens 7.

   Passwörter mit genau einem Buchstaben: Für den Buchstaben gibt es 26 Möglichkeiten. Für die sieben Ziffern gibt es $10^7$ Möglichkeiten. Ferner ist noch zu unterscheiden, an welcher Stelle der Buchstabe steht. Es gibt $26 \cdot 10^7$ Passwörter, bei denen der Buchstabe an der 1. Position ist, ebenso $26 \cdot 10^7$ Passwörter mit dem Buchstaben an der 2. Position u.s.w. Also gibt es insgesamt $8 \cdot 26 \cdot 10^7$ Passwörter mit genau einem Buchstaben.

   Passwörter mit genau zwei Buchstaben: Für die beiden Buchstaben gibt es $26^2$ und für die sechs Ziffern $10^6$ Möglichkeiten. Aber wieviele unterschiedliche Fälle gibt es aufgrund der verschiedenen Positionen der beiden Buchstaben? Hier hilft eine Überlegung analog zum Zahlenlotto; wir ziehen 2 aus 8 Positionen ohne Berücksichtigung der Ziehungsreihenfolge und ohne Wiederholung der Position. Der Binomialkoeffizient

$$\binom{8}{2}$$

   liefert die Anzahl der möglichen Ziehungen bzw. der möglichen Buchstabenpositionen. Es gibt somit

$$\binom{8}{2} 26^2 \, 10^6$$

   Passwörter mit genau zwei Buchstaben.

   Entsprechend überlegt man sich, daß es

$$\binom{8}{3} 26^3 \, 10^5$$

Passwörter mit genau drei Buchstaben gibt u.s.w.

Addiert man alle erlaubten Fälle, so ergibt sich als Gesamtzahl der erlaubten Passwörter

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{7} \binom{8}{k} 26^k\, 10^{8-k} && (7.1)\\
=\ &\sum_{k=0}^{8} \binom{8}{k} 26^k\, 10^{8-k} - \binom{8}{0} 26^0\, 10^8 - \binom{8}{8} 26^8\, 10^0 && (7.2)\\
=\ &(26+10)^8 - 10^8 - 26^8 && (7.3)\\
=\ &36^8 - 10^8 - 26^8. && (7.4)
\end{aligned}$$

In (7.1) werden die Fälle „genau ein Buchstabe“, ..., „genau sieben Buchstaben“ addiert. In (7.2) wird statt von $k = 1$ von $k = 0$ an summiert; damit die Gleichung stimmt, wird der Summand für $k = 0$ nach der Summation subtrahiert. Entsprechend für $k = 8$. Auf den Ausdruck (7.3) kommt man ausgehend von (7.2) mit der binomischen Formel. In (7.4) erhält man dann das selbe Ergebnis wie bei dem ersten Rechenweg.

3. Aus der Gleichung

$$\frac{2,61 \cdot 10^{12}}{2,82 \cdot 10^{12}} = \frac{x}{100}$$

folgt

$$x = \frac{261}{2,82} \approx 92,6.$$

Die Anzahl der Passwörter reduziert sich um circa 7,4%.

**Lösung zu Aufgabe 39.**
In welcher Reihenfolge die Antworten angekreuzt werden spielt keine Rolle und ist ja auch gar nicht feststellbar. Also haben wir eine Aufgabe vom Typ „3 aus 6 ohne Berücksichtigung der Reihenfolge“. Das entspricht der Situation beim Zahlenlotto 6 aus 49 und ist eine Kombination (die Reihenfolge ist egal) ohne Wiederholung (keine Antwort wird mehrfach angekreuzt). Es ergeben sich

$$\binom{6}{3} = \frac{6!}{(6-3)!\,3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$$

Möglichkeiten.

**Lösung zu Aufgabe 40.**
Wir betrachten zwei Lösungswege.

*1. Weg:* Aus den vier Zusatzmodulen kann entweder keines, oder genau eines, oder genau zwei, oder genau drei oder genau vier ausgewählt und eingebaut werden. Also werden aus 4 unterschiedlichen Elementen $k$ herausgegriffen, wobei die Reihenfolge keine Rolle spielt, da es egal ist, welches Zusatzgerät zuerst und welches danach eingebaut wird.

Wir haben also eine Situation entsprechend dem Zahlenlotto, wir ziehen statt 6 aus 49 jetzt $k$ aus 4. Es handelt sich um Kombinationen ohne Wiederholung; die Anzahl der Möglichkeiten wird mit Binomialkoeffizienten berechnet. Wollen wir z. B. zwei Zusatzmodule einbauen, so ist die Anzahl unserer Wahlmöglichkeiten gleich dem Wert des Binomialkoeffizienten

$$\binom{4}{2}.$$

Die Gesamtzahl der Ausstattungsvarianten ist die Summe der Möglichkeiten bei keinem Zusatzmodul, genau einem Zusatzmodul u.s.w., also

$$\underbrace{\binom{4}{0}}_{\text{Grundgerät}} + \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{ein Zusatzmodul}} + \binom{4}{2} + \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 1+4+6+4+1 = 16.$$

*2. Weg:* Für jedes der Zusatzmodule gibt es zwei Möglichkeiten: entweder es ist eingebaut oder es ist nicht eingebaut. Die Anzahl der Ausstattungsvarianten ist damit

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^4 = 16.$$

Man könnte den „Ausstattungszustand“ eines Gerätes auch mit einer Zeichenkette aus vier Bits beschreiben: ein Bit ist gesetzt, wenn das entsprechende Modul vorhanden ist. Zum Beispiel würde dann die Zeichenkette $(1,0,1,1)$ bedeuten, daß die Module 1, 3 und 4 vorhanden sind und Modul 2 fehlt. Bei 4 Bits gibt es aber $2^4 = 16$ Kodierungsmöglichkeiten, also gibt es 16 Konfigurationen für das Meßgerät.

**Lösung zu Aufgabe 41.**
Da die Reihenfolge egal ist, handelt es sich um eine Kombination. Weil es außerdem keine Rolle spielt, welche Sorten von Brötchen genommen werden, darf eine Sorte auch mehrfach vorkommen, d.h. Wiederholung ist erlaubt.

Wir haben also eine Kombination mit Wiederholung. Da 3 Brötchen aus 5 Sorten herausgegriffen werden, ist es eine Kombination dritter Ordnung von fünf Elementen mit Wiederholung.

Somit müssen wir die Formel

$$c^*(n,k) = \binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k-1}{n-1}$$

mit $k = 3$ und $n = 5$ verwenden. Der erste Binomialkoeffizient liefert

$$c^*(5,3) = \binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 35.$$

Das selbe Ergebnis muß auch der zweite Binomialkoeffizient liefern; die Berechnung ist deshalb eigentlich überflüssig, wird der Deutlichkeit halber aber trotzdem noch zusätzlich angegeben:

$$c^*(5,3) = \binom{5+3-1}{5-1} = \binom{7}{4} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 35.$$

Also gibt es für den Einkauf der Brötchen insgesamt 35 verschiedene Zusammenstellungen.

Um die Situation zusätzlich zu veranschaulichen, verwenden wir ein Bild, das auch bei der Herleitung der allgemeinen Formel die zentrale Rolle spielt.

Es gibt fünf Sorten von Brötchen. Wir stellen uns vor, daß diese in fünf Fächern nebeneinander liegen, so daß wir zwischen den Fächern vier Abtrennungen brauchen.

$$\ldots|\ldots|\ldots|\ldots|\ldots$$

Die drei Brötchen, die wir herausgreifen, kennzeichnen wir durch drei Sterne, zum Beispiel

$$|\ \ast\ \ast\ |\qquad|\ \ast\ |$$

oder

$$\ast\ |\qquad|\ \ast\ |\ \ast\ |$$

oder auf eine andere Art, und wir fragen: Wieviele solcher Möglichkeiten gibt es?

Die beiden Bilder legen die Antwort nahe: Es gibt soviele Möglichkeiten, wie es Anordnungen der vier Striche und drei Sterne gibt.

Stellen wir uns sieben Plätze vor, auf die wir die Striche und Sterne verteilen. Dann ist klar, daß es reicht, die Plätze für die Striche festzulegen; der Rest sind dann automatisch die Plätze für die Sterne. Wir müssen also vier aus sieben ohne Wiederholung herausgreifen. Oder wir legen die Plätze für die Sterne fest und müssen drei aus sieben ohne Wiederholung herausgreifen. Beides liefert das selbe Ergebnis

$$\binom{7}{4} = \binom{7}{3} = 35.$$

**Lösung zu Aufgabe 42.**
Wir ordnen die Buchsen in einer beliebigen Reihenfolge an und halten diese dann fest. Stellen Sie sich zum Beispiel vor, daß Sie die Drähte nebeneinanderlegen, links die roten und rechts die blauen.

$$\underbrace{1\quad 2\quad 3\quad 3\quad 5}_{\text{rot}}\qquad\underbrace{6\quad 7\quad 8}_{\text{blau}}$$

Sind die Buchsen in einer festen Reihenfolge, dann reduziert sich die Aufgabe auf das Durchprobieren aller Permutationen (Möglichkeiten der Anordnung) der roten Stecker und aller Permutationen der blauen Stecker, wobei jede rote Permutation mit jeder blauen kombiniert werden kann.

Für die 5 roten Stecker gibt es 5! Permutationen, für die blauen 3!. Insgesamt haben wir damit

$$5! \cdot 3! = 120 \cdot 6 = 720$$

Möglichkeiten.

**Lösung zu Aufgabe 43.**
Bei einem DNA-Strang ist die Reihenfolge der Nukleotidmoleküle wesentlich. Ferner

kann das gleiche Molekül mehrfach auftreten. Dies ist eine Variation mit Wiederholung. Es ergeben sich

$$\underbrace{4 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 4}_{260 \text{ Faktoren}} = 4^{260}$$

Möglichkeiten.

Bei der Umformung in eine Zehnerpotenz muß das $x$ mit

$$10^x = 4^{260}$$

bestimmt werden. Eine Gleichung, bei der die Unbekannte im Exponenten steht, wird durch Logarithmieren gelöst. Es folgt

$$\log_{10} 10^x = x = \log_{10} 4^{260} = 260 \log_{10} 4.$$

also ist

$$x \approx 0,60206 \cdot 260 = 156,536.$$

Damit ergibt sich

$$4^{260} \approx 10^{156,536} = 10^{156} \cdot 10^{0,536} \approx 3,436 \cdot 10^{156} \approx 10^{156}.$$

Bei der Rundung auf eine Zehnerpotenz mit ganzzahligem Exponenten ist ein interessantes Detail zu beachten: Man darf nicht $156,536$ auf $157$ aufrunden. Vielmehr darf erst am Schluß gerundet werden; es ergibt sich dann 156 als Exponent. Das erscheint zunächst verblüffend, kann aber anschaulich mit der Krümmung der Kurve von $y = 10^x$ erklärt werden. (Die Kurve ist konvex; deshalb wird die Mitte des Intervalls $[0;1]$ nicht auf die Mitte des Intervalls [1;10] abgebildet.)

**Lösung zu Aufgabe 44.**

Besteht ein DNA-Strang aus $x$ Nukleotiden, sind $4^x$ Kodierungen möglich. Wir lösen also die Gleichung

$$4^x = 10^{100}.$$

Die gesuchte Mindestlänge ist dann $\lceil x \rceil$, der nächstgrößere ganzzahlige Wert. Logarithmieren der Gleichung liefert

$$\log_{10} 4^x = \log_{10} 10^{100} = 100.$$

Mit dem Logarithmengesetz $\log(a^b) = b \log(a)$ (für $a > 0$) folgt

$$x \log_{10} 4 = 100,$$

und daraus

$$x = \frac{100}{\log_{10} 4} \approx 166,096.$$

Die gesuchte Mindestlänge ist also $\lceil 166,096 \rceil = 167$.

**Lösung zu Aufgabe 45.**
Abgesehen von Schwarz haben wir 8 Farben zur Auswahl. Bei der ersten Färbung gibt es dann 8 Wahlmöglichkeiten, bei der zweiten nur noch 7, da eine Farbe bereits verwendet wurde. Schließlich haben wir bei der dritten Färbung noch 6 Möglichkeiten, da zwei der 8 Farben schon benutzt wurden und nicht mehr verwendet werden dürfen. Insgesamt gibt es damit

$$8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$$

Kodierungen.

Mit anderen Worten: Wir haben eine Variation dritter Ordnung von acht Elementen ohne Wiederholung

$$v(n,k) = v(8,3) = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336.$$

**Lösung zu Aufgabe 46.**

1. Aus einer Gruppe von 7 Männern werden 3 ausgewählt. Die Reihenfolge spielt keine Rolle. Gehören Donald, Linus und Bill zum Klub, dann ist es egal, ob zuerst Donald, dann Bill und zuletzt Linus Mitglied wurde oder erst Bill, dann Linus und schließlich Donald. Das ist die Situation des Zahlenlottos, es wird gezogen, und die Reihenfolge der Ziehung spielt keine Rolle. Also gibt es bei den Männern

   $$\binom{7}{3}$$

   Möglichkeiten. Alle 5 Frauen müssen Mitglieder der Gruppe sein, hier gibt es keine Auswahl. Will man das unbedingt mit einem Binomialkoeffizienten schreiben, hat man

   $$\binom{5}{5} = 1.$$

   Insgesamt gibt es also

   $$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{5} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 1 = 35$$

   Möglichkeiten für die Zusammensetzung der Gruppe.

2. „Mindestens 3 Männer“ heißt bei einer Gesamtzahl von 5 Personen: entweder genau 3 Männer, oder genau 4 Männer, oder genau 5 Männer.

   Sind genau 3 Männer in der Gruppe, gibt es

   $$\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 350$$

   Möglichkeiten für die Zusammensetzung.

   Bei genau 4 Männern haben wir

   $$\binom{7}{4} \cdot \binom{5}{1} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot 5 = 175$$

unterschiedliche Gruppen.

Schließlich gibt es bei genau 5 Männern

$$\binom{7}{5} \cdot \binom{5}{0} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 21$$

Gruppen.

Die Gesamtzahl der Gruppen ergibt sich als Summe

$$350 + 175 + 21 = 546.$$

**Lösung zu Aufgabe 47.**
Die Anzahl der Permutationen (Möglichkeiten der Anordnung) der Frauen ist 4!. Die Anzahl der Permutationen der Männer ist 5!.

Jede Anordnung der Frauen ist mit jeder Anordnung der Männer kombinierbar. Also gibt es insgesamt

$$4! \cdot 5! = 24 \cdot 120 = 2880$$

Anordnungen.

Da die Plätze der Frauen und der Männer festgelegt sind, gibt es keine weiteren Möglichkeiten durch einen Platztausch der Frauen und Männer untereinander.

**Lösung zu Aufgabe 48.**
Die Reihenfolge bzw. die Stimmenzahl, mit der die vier studentischen Mitglieder des Gremiums gewählt wurden, spielt für unsere Betrachtung keine Rolle. Es kommt nur darauf an, ob man Mitglied ist oder nicht. Sind z.B. drei der Studierenden aus FB 7 und einer aus FB 4, ist es egal, wer mit den meisten Stimmen gewählt wurde. Wir haben also eine Kombination.

Da aus jedem Fachbereich genügend Personen kandidieren, könnten die Sitze komplett mit Mitgliedern jedes beliebigen Fachbereichs besetzt werden. Es sind also bei den Zugehörigkeiten zu den Fachbereichen uneingeschränkt Wiederholungen möglich. Also haben wir eine Kombination mit Wiederholung.

Wir wählen aus der Menge $M$ der Fachbereiche aus, $M$ hat $n = 9$ Elemente. Da wir $k = 4$ Personen auswählen, gibt es

$$c^*(n, k) = \binom{n + k - 1}{k}$$

also

$$c^*(9, 4) = \binom{9 + 4 - 1}{4} = \binom{12}{4} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 495$$

Möglichkeiten, nämlich die Anzahl der Kombinationen 4. Ordnung von 9 Elementen mit Wiederholung.

**Lösung zu Aufgabe 49.**
Für KMUB werden 4 Personen aus 6 ausgewählt, für E1 sind es 3 Personen aus 8 und für MNI werden 3 Personen aus 5 bestimmt. Bei der Auswahl kommt es nicht auf

die Reihenfolge an, nur die Mitgliedschaft in dem Gremium ist relevant. Also wird die Anzahl der Möglichkeiten jeweils mit einem Binomialkoeffizienten berechnet.

Da jede Auswahl des einen Fachbereichs mit jeder Auswahl der anderen Fachbereiche verknüpft werden kann, müssen die drei Binomialkoeffizienten miteinander multipliziert werden. Insgesamt gibt es damit

$$\underbrace{\binom{6}{4}}_{\text{KMUB}} \cdot \underbrace{\binom{8}{3}}_{\text{E1}} \cdot \underbrace{\binom{5}{3}}_{\text{MNI}} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 15 \cdot 56 \cdot 10 = 8400$$

Möglichkeiten zur Bildung des Ausschusses.

**Lösung zu Aufgabe 50.**
Wir haben sechs unterschiedliche Ziffern, aus denen vier gezogen werden sollen; die Reihenfolge ist dabei zu beachten, da $1357 \neq 7315$ ist. Also haben wir eine Variation (Reihenfolge beachten) ohne Wiederholung (keine Ziffer mehrfach).

Bei der 1. Ziehung gibt es 6 Möglichkeiten, bei der 2. Ziehung 5 Möglichkeiten u.s.w. Die Gesamtzahl der Möglichkeiten ist das Produkt

$$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360.$$

**Lösung zu Aufgabe 51.**
Von den Relationen sind

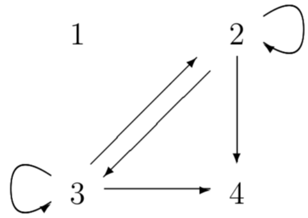
- reflexiv: (b), (c), (d),
- symmetrisch: (b), (c), (d),
- antisymmetrisch: (a),
- asymmetrisch: (a),
- transitiv: (a), (b), unklar bei (c).

Ob die Relation (c) transitiv ist, kann nicht klar gesagt werden, da es bei mehreren Vornamen einen Spielraum bei der Interpretation gibt. Sollen alle einzelnen Vornamen zusammen als ein „Gesamtvorname“ interpretiert werden?

**Lösung zu Aufgabe 52.**

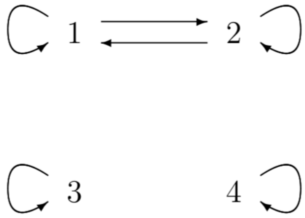
1. Die Relation ist: nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, transitiv.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 3 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |



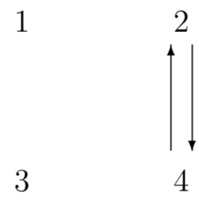
2. Die Relation ist: reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, transitiv.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 |



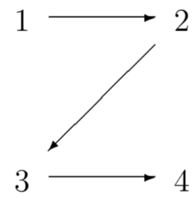

3. Die Relation ist: nicht reflexiv, symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, nicht transitiv (Schlingen bei 2 und 4 fehlen).

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 |



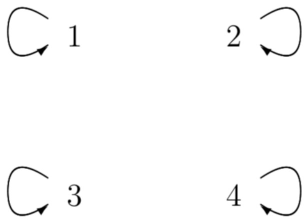

4. Die Relation ist: nicht reflexiv, nicht symmetrisch, antisymmetrisch, asymmetrisch, nicht transitiv.

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |



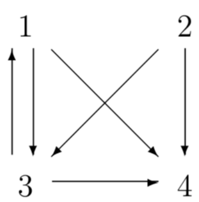

5. Die Relation ist: reflexiv, symmetrisch, antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, transitiv. Wie uns dieses Beispiel zeigt, schließen sich Symmetrie und Antisymmetrie nicht gegenseitig aus!

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 |




6. Die Relation ist: nicht reflexiv, nicht symmetrisch, nicht antisymmetrisch, nicht asymmetrisch, nicht transitiv ($2\,R\,3$ und $3\,R\,1$, aber nicht $2\,R\,1$).

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |



**Lösung zu Aufgabe 53.**

1. Bei einer reflexiven Relation sind alle Elemente auf der Hauptdiagonalen der zugehörigen Booleschen Matrix gleich 1. Für die restlichen $n^2 - n$ Elemente gibt es keine Beschränkungen, jedes kann 0 oder 1 sein. Also gibt es

   $$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n^2 - n \text{ Faktoren}} = 2^{n^2-n}$$

   verschiedene Möglichkeiten für die Boolesche Matrix, d.h. es gibt

   $$2^{n^2-n}$$

   reflexive Relationen.

   Bei einer symmetrischen Relation sind alle Elemente der Hauptdiagonalen und alle Elemente oberhalb (oder unterhalb) frei wählbar; die Symmetrie legt dann zwingend die Werte unterhalb (bzw. oberhalb) fest. Die Anzahl der frei wählbaren Elemente ist

   $$n + (n^2 - n)/2 = \frac{2n + n^2 - n}{2} = \frac{n + n^2}{2} = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

   Dabei ist

   $$\begin{aligned} n &: \text{ die Anzahl der Hauptdiagonalelemente,} \\ n^2 - n &: \text{ die Anzahl aller Matrixelemente mit Ausnahme der} \\ &\phantom{:}\ \text{ Hauptdiagonalelemente,} \\ (n^2 - n)/2 &: \text{ die Anzahl aller Elemente oberhalb der Hauptdiagonalen.} \end{aligned}$$

   Man beachte, daß $n(n+1)/2$ immer eine ganze Zahl ist, entweder $n$ oder $n+1$ ist gerade.

   Also gibt es

   $$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}_{n(n+1)/2 \text{ Faktoren}} = 2^{n(n+1)/2}$$

   symmetrische Relationen.

2. Bei einer Menge mit $n$ Elementen verhält sich die Anzahl reflexiver Relationen zur Anzahl aller Relationen wie

   $$\frac{2^{n^2-n}}{2^{n^2}} = \frac{2^{n^2} \cdot 2^{-n}}{2^{n^2}} = 2^{-n} = \frac{1}{2^n}\,.$$

   Also sind

   $$\frac{1}{2^n} \cdot 100\%$$

   aller Relationen reflexiv.

Für die speziellen Werte von $n$ ergibt sich

$$\begin{aligned}
n = 1 &\ : \ 50\% \\
n = 2 &\ : \ 25\% \\
n = 3 &\ : \ 12,5\% \\
n = 4 &\ : \ 6,25\% \\
n = 100 &\ : \ \frac{1}{2^{100}} = \left(\frac{1}{2^{10}}\right)^{10} \approx \left(10^{-3}\right)^{10} = 10^{-30} = 10^{-28}\,\%.
\end{aligned}$$

**Lösung zu Aufgabe 54.**
Von den Relationen sind

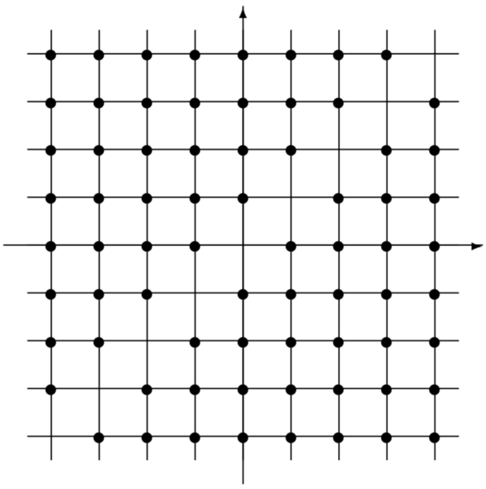
- reflexiv: (d), (e), (f),
- symmetrisch: (a), (b), (c), (d), (f),
- antisymmetrisch: (g), (h),
- asymmetrisch: keine,
- transitiv: (b), (d), (e), (f), (h).

Eine Relation auf der Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist eine Teilmenge des kartesischen Produktes $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ und kann ausschnittsweise dargestellt werden, indem in der Ebene von den Punkten mit ganzzahligen Koordinaten diejenigen markiert werden, die zur Relation gehören. Wir werden einen Ausschnitt betrachten, der den Ursprung des Koordinatensystems enthält. Bei unseren Beispielen wird durch diese Veranschaulichung klar werden, ob Reflexivität, Symmetrie, Antisymmetrie oder Asymmetrie vorliegt. Lediglich die Transitivität ist nicht erkennbar.

Wenn im folgenden von *der Diagonalen* die Rede ist, so meinen wir die Diagonale im ersten und dritten Quadranten.

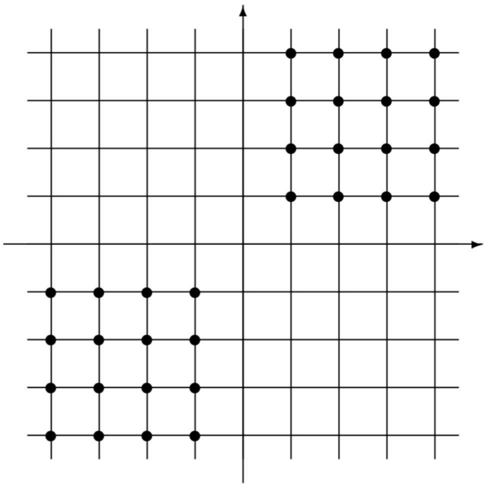
1. $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x \neq y$

    - nicht reflexiv: zum Beispiel $(1, 1) \notin R$, da nicht $1 \neq 1$ gilt. Die Punkte auf der Diagonalen gehören nicht zur Relation.
    - symmetrisch: ist $x \neq y$, dann ist auch $y \neq x$. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
    - nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $3\,R\,1$ als auch $1\,R\,3$, aber es ist $1 \neq 3$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
    - nicht asymmetrisch: zum Beispiel gilt sowohl $3\,R\,1$ als auch $1\,R\,3$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
    - nicht transitiv: es gilt $3\,R\,7$ und $7\,R\,3$, aber aus $3 \neq 7$ und $7 \neq 3$ folgt nicht $3 \neq 3$.



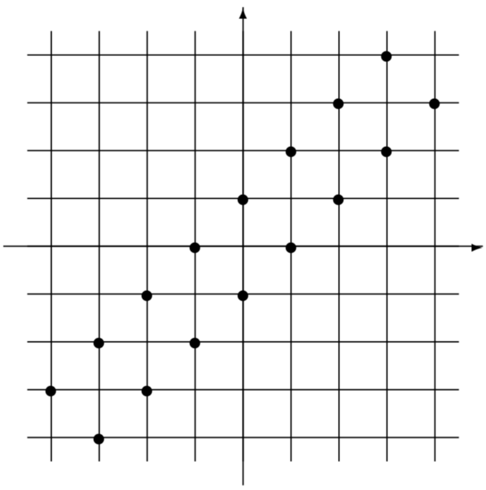
2. $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; xy \geq 1$

- nicht reflexiv: denn es gilt $(0,0) \notin R$, da $0 \cdot 0 = 0 < 1$ ist. Die Diagonale gehört nicht vollständig zur Relation, der Ursprung fehlt.
- symmetrisch: ist $x \cdot y \geq 1$, dann ist auch $y \cdot x \geq 1$. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $3\,R\,1$ als auch $1\,R\,3$, aber es ist $1 \neq 3$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Beispiel gilt $1\,R\,1$. Es gibt Punkte auf der Diagonalen, die zur Relation gehören.
- transitiv: aus $xy \geq 1$ folgt $x, y \geq 1$ oder $x, y \leq -1$. Somit folgt aus $xy \geq 1$ und $yz \geq 1$, daß $x, y, z \geq 1$ oder $x, y, z \leq -1$ gilt, also folgt $xz \geq 1$.



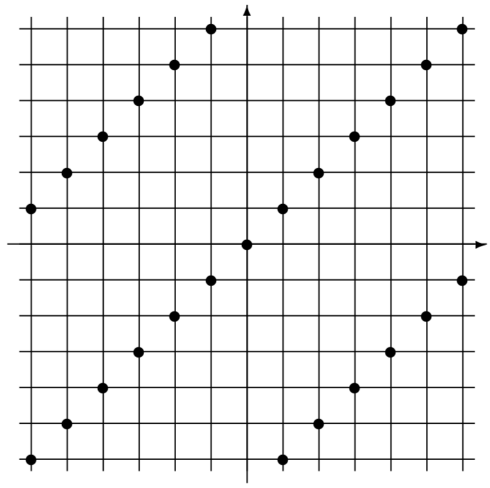
3. $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x = y + 1$ oder $x = y - 1$

- nicht reflexiv: wenn $x$ und $y$ übereinstimmen, kann keine der beiden Gleichungen gelten. Die Punkte auf der Diagonalen gehören nicht zur Relation.
- symmetrisch: $x = y + 1$ und $x = y - 1$ gehen durch Vertauschung von $x$ und $y$ ineinander über. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $2\,R\,1$ als auch $1\,R\,2$, aber es ist $1 \neq 2$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Beispiel gilt sowohl $2\,R\,1$ als auch $1\,R\,2$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht transitiv: es gilt $1\,R\,2$ und $2\,R\,1$, aber nicht $1\,R\,1$.



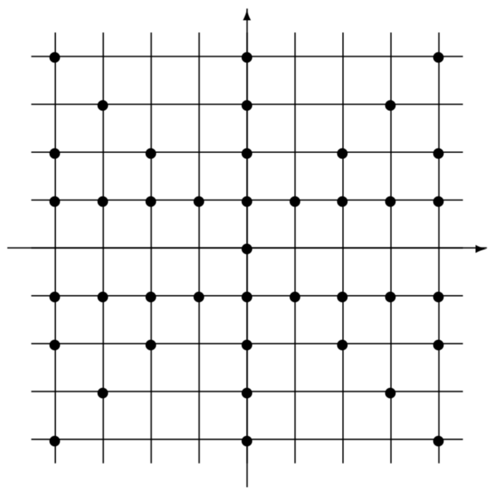
4. $(x,y) \in R \;\Leftrightarrow\; x \equiv y \bmod 7$

- reflexiv: $(x,x) \in R$, denn 7 teilt $x - x = 0$. Alle Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- symmetrisch: wenn 7 die Differenz $x-y$ teilt, dann teilt 7 auch $y-x$. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $1\,R\,(-6)$ als auch $(-6)\,R\,1$, aber es ist $1 \neq -6$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Bsp. gilt $1\,R\,1$. Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- transitiv: $7\,|\,(x-y) \Rightarrow n \cdot 7 = x - y$ und $7\,|\,(y-z) \Rightarrow m \cdot 7 = y - z$. Addition liefert $(n+m)7 = x - z$, d.h. 7 teilt $x - z$.



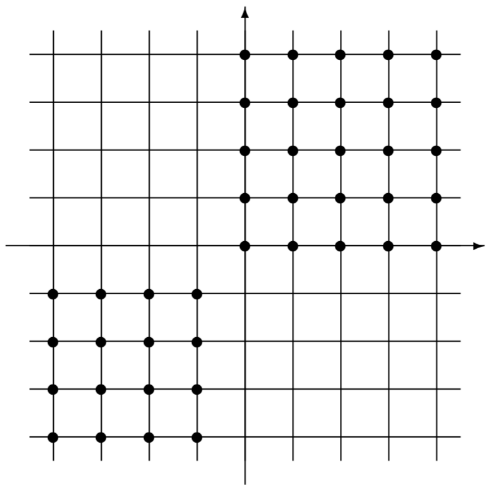
5. $(x,y) \in R \;\Leftrightarrow\; x$ ist ein Vielfaches von $y$

- reflexiv: denn $x$ ist ein Vielfaches von $x$, da $x = 1 \cdot x$. Alle Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- nicht symmetrisch: $x = 3$ ist ein Vielfaches von $y = 1$, aber $x = 1$ ist nicht ein Vielfaches von $y = 3$. Die Punkte liegen nicht symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $1\,R\,(-1)$ als auch $(-1)\,R\,1$, aber es ist $1 \neq (-1)$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Beispiel gilt $1\,R\,1$. Es gibt Punkte auf der Diagonalen, die zur Relation gehören.
- transitiv: $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$ bedeutet, daß $y$ ein Vielfaches von $z$ und $x$ ein Vielfaches von $y$ ist. Dann ist auch $x$ ein Vielfaches von $z$, d.h. $x\,R\,z$.



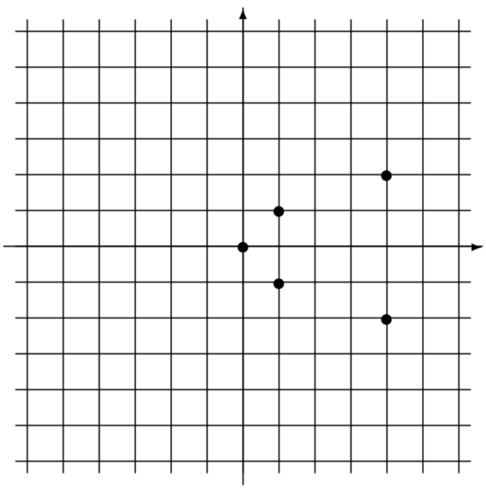
6. $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x$ und $y$ sind beide negativ oder beide nichtnegativ

- reflexiv: $(x, x) \in R$, da $x$ entweder negativ oder nichtnegativ ist. Alle Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- symmetrisch: ist unmittelbar klar. Die Punkte liegen symmetrisch zur Diagonalen.
- nicht antisymmetrisch: es gilt zum Beispiel sowohl $3\,R\,1$ als auch $1\,R\,3$, aber es ist $1 \neq 3$. Es gibt Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: zum Bsp. gilt $1\,R\,1$. Punkte auf der Diagonalen gehören zur Relation.
- transitiv: aus $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$ folgt entweder $x, y, z < 0$ oder $x, y, z \geq 0$. In beiden Fällen gilt $x\,R\,z$.



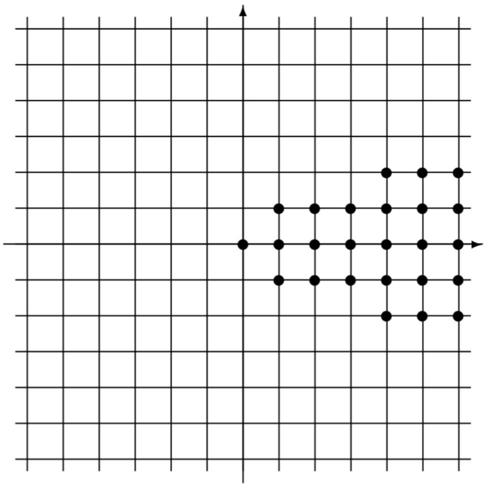
7. $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x = y^2$

- nicht reflexiv: zum Beispiel $(2, 2) \notin R$, da $2 \neq 2^2$ ist. Nicht alle Punkte der Diagonalen gehören zur Relation.
- nicht symmetrisch: $4 = 2^2$, aber $2 \neq 4^2$. Die Punkte liegen nicht symmetrisch zur Diagonalen.
- antisymmetrisch: aus $x = y^2$ und $y = x^2$ folgt $x = x^4$, wegen $x = y^2 \geq 0$ also nur $x = y = 0$ oder $x = y = 1$. Es gibt keine Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: $0\,R\,0$ und $1\,R\,1$. Zwei Punkte der Diagonalen gehören zur Relation.
- nicht transitiv: es gilt $16\,R\,4$ und $4\,R\,2$, aber nicht $16\,R\,2$.



8. $(x, y) \in R \;\Leftrightarrow\; x \geq y^2$

- nicht reflexiv: zum Beispiel $(2, 2) \notin R$, da $2 < 2^2$ ist. Nicht alle Punkte der Diagonalen gehören zur Relation.
- nicht symmetrisch: $4 \geq 2^2$, aber $2 < 4^2$. Die Punkte liegen nicht symmetrisch zur Diagonalen.
- antisymmetrisch: aus $x \geq y^2$ und $y \geq x^2$ folgt $x, y \geq 0$ und $x \geq x^4$, also $x = y = 0$ oder $x = y = 1$. Es gibt keine Punkte, die symmetrisch zur Diagonalen liegen, und beide zur Relation gehören.
- nicht asymmetrisch: $0\,R\,0$ und $1\,R\,1$. Zwei Punkte der Diagonalen gehören zur Relation.
- transitiv: aus $x \geq y^2$ und $y \geq z^2$ folgt $x \geq z^4$, also gilt erst recht $x \geq z^2$. D.h. $x\,R\,y$ und $y\,R\,z$ impliziert $x\,R\,z$.



**Lösung zu Aufgabe 55.**
Schreibweise: Zu $R_1 \subseteq A \times B$ und $R_2 \subseteq B \times C$ ist

$$R_2 \circ R_1 = \{(a, c) | \, (\exists b) \, ((a, b) \in R_1) \wedge ((b, c) \in R_2)\}.$$

Die Relationen $R$ und $S$ sind vorgegeben als

$$\begin{aligned} R &= \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (2, 4), (3, 1)\}, \\ S &= \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 2)\}. \end{aligned}$$

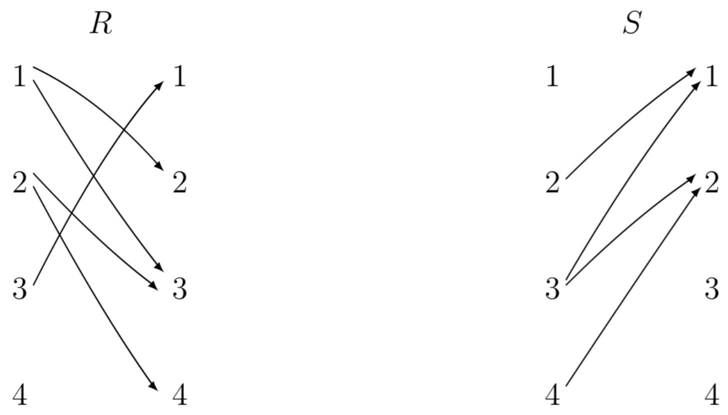
Entsprechend der Definition für die Verknüpfung von Relationen können wir nun feststellen, welche Paare in $S \circ R$ liegen.

$$\begin{array}{lll} (1, 2) \in R \;\wedge\; (2, 1) \in S & \Rightarrow & (1, 1) \in S \circ R \\ (1, 3) \in R \;\wedge\; (3, 1) \in S & \Rightarrow & (1, 1) \in S \circ R \\ (1, 3) \in R \;\wedge\; (3, 2) \in S & \Rightarrow & (1, 2) \in S \circ R \\ (2, 3) \in R \;\wedge\; (3, 1) \in S & \Rightarrow & (2, 1) \in S \circ R \\ (2, 3) \in R \;\wedge\; (3, 2) \in S & \Rightarrow & (2, 2) \in S \circ R \\ (2, 4) \in R \;\wedge\; (4, 2) \in S & \Rightarrow & (2, 2) \in S \circ R \end{array}$$

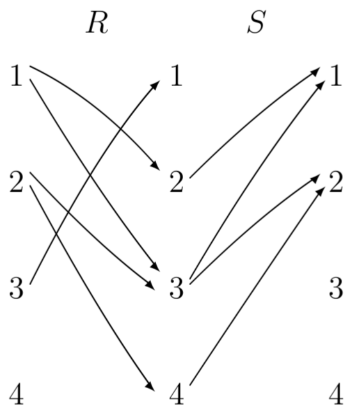
Zwar ist $(3, 1) \in R$, aber in $S$ ist kein Paar mit der 1 an der ersten Position, d.h. über $(3, 1) \in R$ wird kein Beitrag zu $S \circ R$ geliefert. Insgesamt habe wir damit

$$S \circ R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}.$$

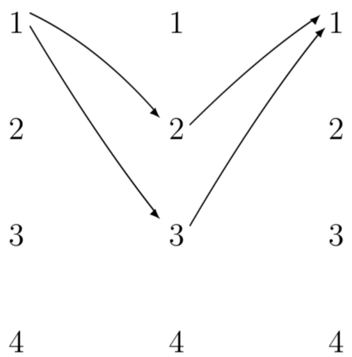
Die Verknüpfung von $R$ und $S$ läßt sich anschaulich sehr schön darstellen, wenn man $R$ und $S$ nicht wie üblich zeichnet, sondern die Ecken zweimal nebeneinander auflistet.



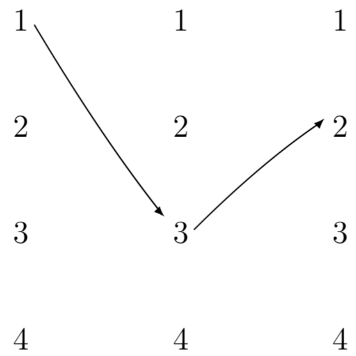

Werden jetzt die Endpunkte von $R$ und die Anfangspunkte von $S$ zusammengelegt, so besteht $S \circ R$ aus allen Paaren, für die es mindestens einen Weg von links nach rechts über ein „verbindendes“ Element in der Mitte gibt.




Zum Beispiel sieht man auf zwei Arten, daß $(1, 1)$ in $S \circ R$ liegt:




Ferner gehört zum Beispiel das Paar $(1, 2)$ wegen des folgenden Weges zu $S \circ R$:



Um die Boolesche Matrix der Relation $S \circ R$ aus den Booleschen Matrizen von $R$ und $S$ berechnen zu können, schreiben wir diese Matrizen zunächst auf.

| $R$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 2 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 3 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 |

| $S$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Die Boolesche Matrix der Relation $S \circ R$ wird mit einer abgeänderten Matrizenmultiplikation berechnet, bei der „$\vee$“ (das logische Oder) anstelle von „$+$“ verwendet wird, und „$\wedge$“ (das logische Und) anstelle von „ $\cdot$ “.

Wir schreiben die Multiplikation in einem Rechenschema auf:

$$
\begin{array}{c|c}
 & S \\
\hline
R & S \circ R
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc|cccc}
 & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & 1 & 1 & 0 & 0 \\
 & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

Zum Beispiel entsteht das Element in der zweiten Zeile und der ersten Spalte durch

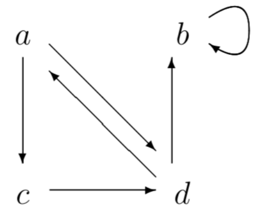
$$(0 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) \vee (1 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0) = 0 \vee 0 \vee 1 \vee 0 = 1.$$

Im folgenden Schema werden diejenigen Elemente der Booleschen Matrizen dargestellt, die an dieser Berechnung beteiligt sind.

$$
\begin{array}{cccc|c}
 & & & & 0 \\
 & & & & 1 \\
 & & & & 1 \\
 & & & & 0 \\
\hline
 & & & & \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & 
\end{array}
$$

**Lösung zu Aufgabe 56.**
Es gibt zwei Möglichkeiten, die Relation graphisch zu veranschaulichen.

- 1. Darstellung




Der gerichtete Graph mit den Ecken $a$, $b$, $c$ und $d$ und den gerichteten Kanten entsprechend der Relation wird gezeichnet. Man erhält $R^2$ und $R^3$ durch

$$\begin{aligned} R^2 &= \{(x,y) \,|\, \text{es existiert ein Weg der Länge 2 von } x \text{ nach } y\}, \\ R^3 &: \text{ analog mit Länge 3.} \end{aligned}$$

Konkret kann man zum Beispiel systematisch durchprobieren, ob $(a,a)$ in $R^2$ ist, $(a,b)$ in $R^2$ ist, $(a,c)$ in $R^2$ ist, u.s.w., wobei Tabellen praktisch sind.

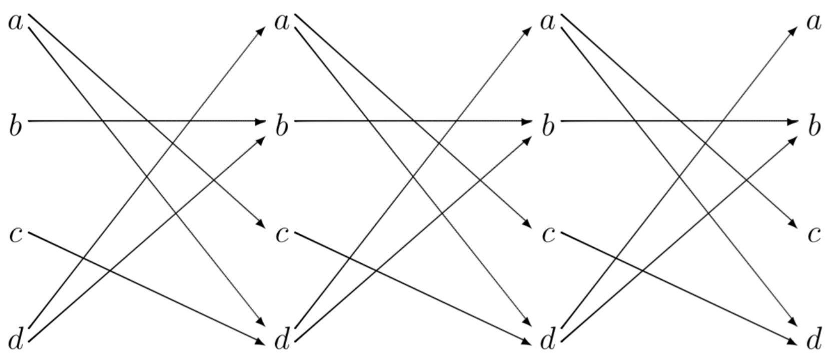
| | in $R^2$ | in $R^3$ |
|---|---|---|
| $(a,a)$ | ja | ja |
| $(a,b)$ | ja | ja |
| $(a,c)$ | nein | ja |
| $(a,d)$ | ja | ja |

| | in $R^2$ | in $R^3$ |
|---|---|---|
| $(b,a)$ | nein | nein |
| $(b,b)$ | ja | ja |
| $(b,c)$ | nein | nein |
| $(b,d)$ | nein | nein |

| | in $R^2$ | in $R^3$ |
|---|---|---|
| $(c,a)$ | ja | nein |
| $(c,b)$ | ja | ja |
| $(c,c)$ | nein | ja |
| $(c,d)$ | nein | ja |

| | in $R^2$ | in $R^3$ |
|---|---|---|
| $(d,a)$ | nein | ja |
| $(d,b)$ | ja | ja |
| $(d,c)$ | ja | nein |
| $(d,d)$ | ja | ja |

- 2. Darstellung

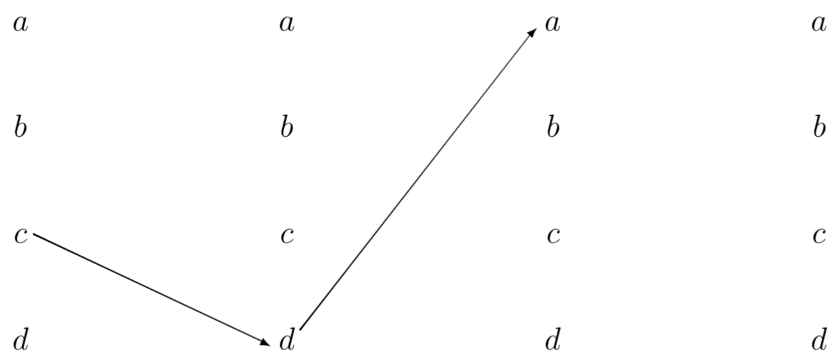


Die Spalte mit den Ecken $a$, $b$, $c$ und $d$ wird viermal nebeneinander geschrieben. Von einer Spalte zur nächsten werden gerichtete Kanten entsprechend der Relation gezeichnet. Hier bekommt man $R^2$ und $R^3$ durch

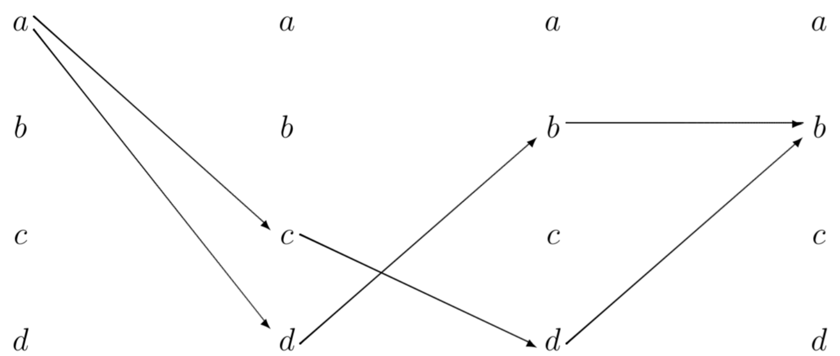
$R^2$: besteht aus allen Paaren $(x, y)$, für die ein Weg der Länge 2 von dem Element $x$ in der linken Spalte zu dem Element $y$ zwei Spalten weiter existiert;

$R^3$: besteht aus allen Paaren $(x, y)$, für die ein Weg der Länge 3 von $x$ in der linken Spalte zu $y$ in der rechten Spalte existiert.

Diese Darstellung ist zwar aufwendiger als die erste, aber die Wege sind leicht zu erkennen. Im folgenden ist zum Beispiel ein Weg der Länge 2 von $c$ nach $a$ herausgestellt, der zeigt, daß $(c, a) \in R^2$ gilt.




Im folgenden sehen wir, daß es zwei Wege der Länge 3 von $a$ nach $b$ gibt. Also gilt $(a, b) \in R^3$. (Selbstverständlich hätte schon ein Weg genügt.)




Insgesamt kann man also unmittelbar ablesen, daß sich

$$R^2 = \{(a, a), (a, b), (a, d), (b, b), (c, a), (c, b), (d, b), (d, c), (d, d)\}$$

und

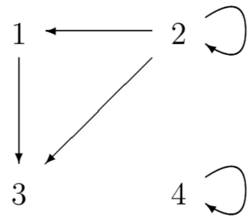
$$R^3 = \{(a, a), (a, b), (a, c), (a, d), (b, b), (c, b), (c, c), (c, d), (d, a), (d, b), (d, d)\}$$

für die gesuchten Relationen ergibt.

**Lösung zu Aufgabe 57.**

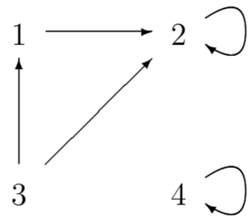
- $R = \{(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(4,4)\}$

| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 2 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 |




- $R^{-1} = \{(3,1),(1,2),(2,2),(3,2),(4,4)\} = \{(1,2),(2,2),(3,1),(3,2),(4,4)\}$

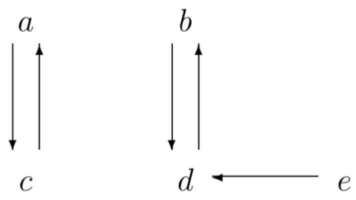
| | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 1 |




Matrix: Spiegelung an der Hauptdiagonalen.
Graph: Richtungen der Pfeile umdrehen.

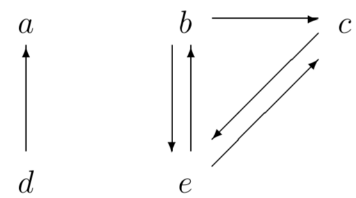
**Lösung zu Aufgabe 58.**

1. $R_1 = \{(a,c),(b,d),(c,a),(d,b),(e,d)\}$



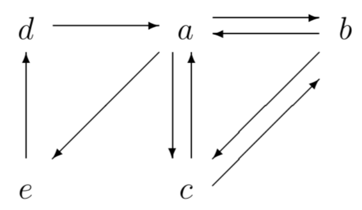

   - reflexive Hülle: $R_1 \cup \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$
   - symmetrische Hülle: $R_1 \cup \{(d,e)\}$
   - transitive Hülle: $R_1 \cup \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,b)\}$

2. $R_2 = \{(b,c),(b,e),(c,e),(d,a),(e,b),(e,c)\}$



- reflexive Hülle: $R_2 \cup \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$
- symmetrische Hülle: $R_2 \cup \{(a,d),(c,b)\}$
- transitive Hülle: $R_2 \cup \{(b,b),(c,b),(c,c),(e,e)\}$

3. $R_3 = \{(a,b),(a,c),(a,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(d,a),(e,d)\}$




- reflexive Hülle: $R_3 \cup \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$
- symmetrische Hülle: $R_3 \cup \{(a,d),(d,e),(e,a)\}$
- transitive Hülle: $\{a,b,c,d,e\} \times \{a,b,c,d,e\}$, d.h. die transitive Hülle besteht aus allen Paaren, die überhaupt möglich sind.

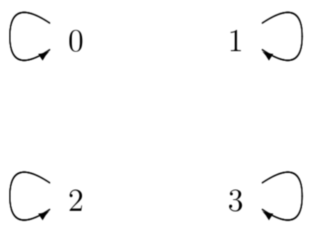
Zur Bestimmung der transitiven Hülle ist ein Satz aus der Vorlesung hilfreich: Das Paar $(x,y)$ liegt in der transitiven Hülle von $R$, wenn es in $R$ einen Weg von $x$ nach $y$ gibt.

**Lösung zu Aufgabe 59.**
Eine Äquivalenzrelation ist eine Relation, die reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.

| | reflexiv | symmetrisch | transitiv |
|---|---|---|---|
| $R_1$ | ja | ja | ja |
| $R_2$ | nein | ja | nein |
| $R_3$ | ja | ja | ja |
| $R_4$ | ja | ja | nein |
| $R_5$ | ja | nein | nein |

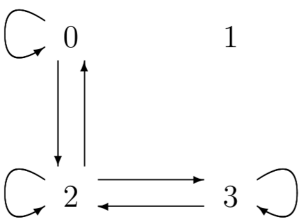
Bei einer Relation auf einer Menge mit wenig Elementen lassen sich die Eigenschaften leicht an dem Graphen ablesen.

$R_1$: Äquivalenzrelation.

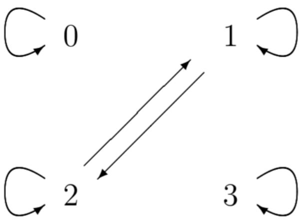



Äquivalenzklassen: $[0] = \{0\}$, $[1] = \{1\}$, $[2] = \{2\}$ und $[3] = \{3\}$.

$R_2$: Keine Äquivalenzrelation.

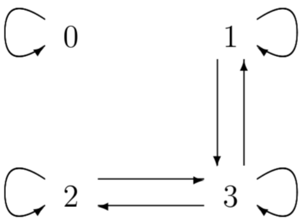



$R_3$: Äquivalenzrelation.

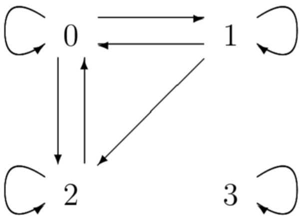



Äquivalenzklassen: $[0] = \{0\}$, $[1] = [2] = \{1, 2\}$ und $[3] = \{3\}$.

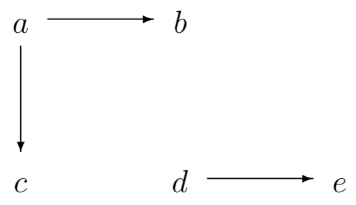
$R_4$: Keine Äquivalenzrelation.




$R_5$: Keine Äquivalenzrelation.

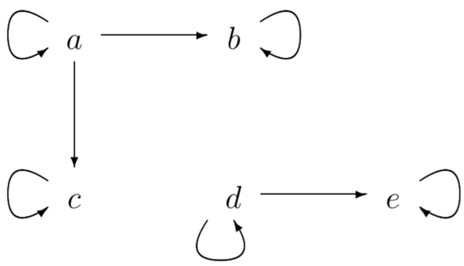



**Lösung zu Aufgabe 60.**
Zunächst stellen wir den Graphen der Relation $R = \{(a, b), (a, c), (d, e)\}$ dar.



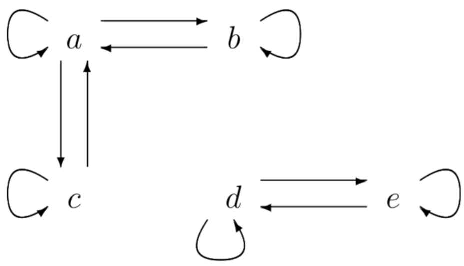


Die kleinste Äquivalenzrelation, die $R$ umfaßt, muß aufgrund der Reflexivität Schlingen an allen Ecken haben; also nehmen wir diese hinzu.



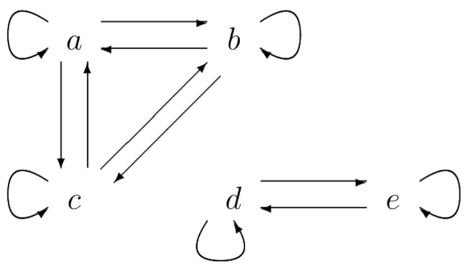


Da eine Äquivalenzrelation symmetrisch ist, müssen wir bei Ecken, die durch Pfeile verbunden sind, Pfeile in beiden Richtungen haben; also nehmen wir die entsprechenden Pfeile hinzu.



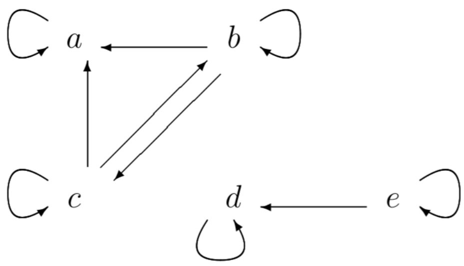


Damit wir schließlich auch noch Transitivität haben, muß $b\,R\,c$ und $c\,R\,b$ gelten. Damit bekommen wir den Graphen der kleinsten Äquivalenzrelation, die unsere ursprüngliche Relation $R$ umfaßt.





Hinzugekommen sind also insgesamt die folgenden Pfeile:




Wenn wir die Paare aufschreiben, die zu $R$ hinzukommen, erhalten wir als kleinste Äquivalenzrelation, die $R$ enthält,

$$R \cup \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e),(b,a),(b,c),(c,a),(c,b),(e,d)\}.$$

Besser schreiben, so daß die einzelnen Schritte nachvollziehbar sind, kann man das mit

$$R \cup \Delta_R \cup R^{-1} \cup \{(b,c),(c,b)\},$$

wobei mit $\Delta_R$ die Diagonalrelation

$$\Delta_R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(e,e)\}$$

gemeint ist.

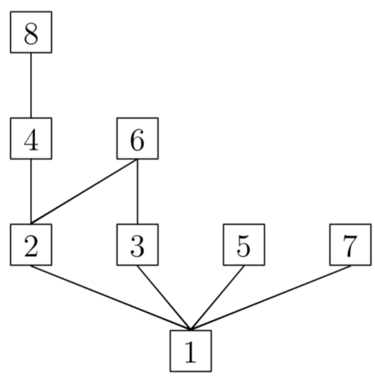
**Lösung zu Aufgabe 61.**
Eine Ordnung ist eine Relation, die reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

| | reflexiv | antisymmetrisch | transitiv |
|---|---|---|---|
| linker Graph | ja | ja | nein |
| mittlerer Graph | ja | ja | nein |
| rechter Graph | ja | ja | ja |

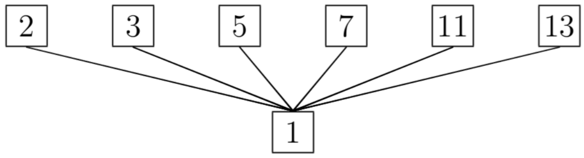
Nur der Graph rechts stellt eine Ordnung dar. Da es Elemente gibt, die nicht vergleichbar sind (zum Beispiel steht weder $a$ in Relation zu $c$ noch steht $c$ in Relation zu $a$), ist es eine partielle Ordnung.

**Lösung zu Aufgabe 62.**

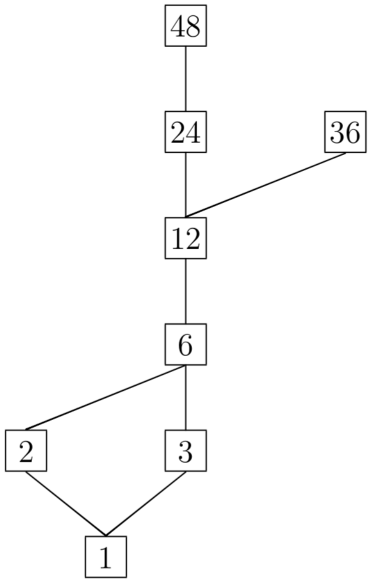
(a)



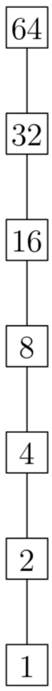
(b)




(c)




(d)



**Lösung zu Aufgabe 63.**

1. Linker Graph:

$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(b,b),(b,c),(b,d),(c,c),(d,d)\}.$$

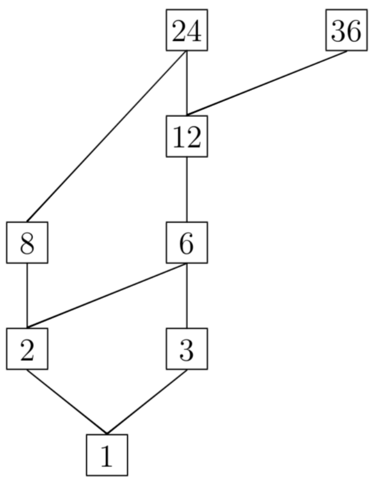
2. Mittlerer Graph:

$$R = \{(a,a),(a,b),(a,c),(a,d),(a,e),(b,b),(b,d),(b,e),(c,c),(c,e),\\ (d,d),(e,e)\}.$$

3. Rechter Graph:

$$R = \{(a,a),(a,d),(a,e),(a,f),(a,g),(b,b),(b,d),(b,e),(b,f),(b,g),\\ (c,c),(c,d),(c,e),(c,f),(c,g),(d,d),(e,e),(f,f),(g,d),(g,e),\\ (g,f),(g,g)\}.$$

**Lösung zu Aufgabe 64.**
Zunächst wird das Hasse-Diagramm gezeichnet.




Topologisches Sortieren liefert eine totale Ordnung (von mehreren möglichen), zum Beispiel

$$1 \preceq 2 \preceq 8 \preceq 3 \preceq 6 \preceq 12 \preceq 24 \preceq 36.$$

**Lösung zu Aufgabe 65.**
Das Paar $(a,b)$ steht genau dann in Relation zu dem Paar $(c,d)$, wenn $ad = bc$ ist,

$$(a,b)\,R\,(c,d) \quad \Longleftrightarrow \quad ad = bc.$$

Damit eine Relation eine Äquivalenzrelation ist, muß sie reflexiv, symmetrisch und transitiv sein.

1. Reflexivität

   Zu zeigen: Für alle Paare $(a,b)$ aus $A$ gilt $(a,b)\,R\,(a,b)$.

   Es ist $(a,b)\,R\,(a,b) \iff ab = ba$, und diese Gleichung gilt für beliebige $a$, $b \in \mathbb{N}$.

2. Symmetrie

   Zu zeigen: $(a,b)\,R\,(c,d) \iff (c,d)\,R\,(a,b)$ für beliebige Paare $(a,b)$ und $(c,d)$ aus $A$.

   Es gilt

   $$(a,b)\,R\,(c,d) \iff ad = bc \iff cb = da \iff (c,d)\,R\,(a,b).$$

3. Transitivität

   Zu zeigen: $(a,b)\,R\,(c,d)$ und $(c,d)\,R\,(e,f)$ impliziert $(a,b)\,R\,(e,f)$ für beliebige Paare $(a,b)$, $(c,d)$ und $(e,f)$ aus $A$.

   Es gilt

   $$\begin{aligned}(a,b)\,R\,(c,d) &\iff ad = bc,\\ (c,d)\,R\,(e,f) &\iff cf = de.\end{aligned}$$

   Durch Multiplikation folgt
   $$adcf = bcde.$$
   Wird diese Gleichung durch $dc$ geteilt, ergibt sich

   $$af = be.$$

   Die Division ist zulässig, da $dc \neq 0$ ist, weil $d$ und $c$ natürliche Zahlen (also ungleich Null) sind.

   Nun ist aber
   $$af = be \iff (a,b)\,R\,(e,f),$$
   womit wir die Gültigkeit der Implikation hergeleitet haben.

Insgesamt haben wir damit gezeigt, daß $R$ eine Äquivalenzrelation ist. Die Äquivalenzklasse $[(1,2)]$ besteht aus allen Paaren $(a,b)$, die in Relation zu $(1,2)$ stehen. Wegen

$$\begin{aligned}(1,2)\,R\,(a,b) &\iff 1\cdot b = 2\cdot a\\ &\iff \frac{1}{2} = \frac{a}{b}\end{aligned}$$

sind dies alle Paare, die Zähler und Nenner eines Bruches bilden, der gleich $1/2$ ist. Die Äquivalenzklasse $[(1,2)]$ ist also

$$\begin{aligned}[(1,2)] &= \left\{(a,b) \,|\, a,b \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{1}{2}\right\}\\ &= \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),\ldots\}.\end{aligned}$$

Wie kann man die Äquivalenzklassen von $R$ allgemein interpretieren? Da

$$(x,y)\,R\,(a,b) \iff xb = ya \iff \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

gilt, ist die von $(x, y)$ erzeugte Äquivalenzklasse gleich der Menge aller Paare $(a, b)$, so daß die Brüche $x/y$ und $a/b$ den gleichen Wert haben, also

$$[(x, y)] = \left\{ (a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \text{ und } \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \right\}.$$

Zu jeder positiven rationalen Zahl $r$ gibt es eine Äquivalenzklasse, in der alle Darstellungen von $r$ (mit positivem Zähler und Nenner) enthalten sind. Die Darstellungen sind als Paare geschrieben. Umgekehrt gibt es zu jeder Äquivalenzklasse eine entsprechende positive rationale Zahl.

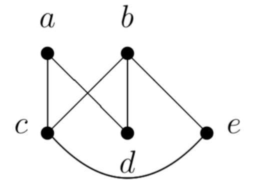
D.h. es gibt eine bijektive Abbildung zwischen der Menge der Äquivalenzklassen und der Menge der positiven rationalen Zahlen so, daß

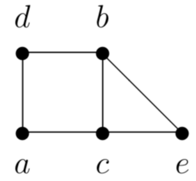
$$[(a, b)] \longmapsto r \quad \Longleftrightarrow \quad r = \frac{a}{b}.$$

Definiert man Rechenoperationen auf der Menge der Äquivalenzklassen, kann man die rationalen Zahlen „konstruieren“ (Details siehe Literatur).

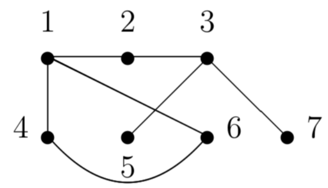
**Lösung zu Aufgabe 66.**

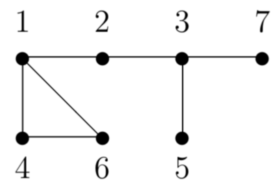
1. Im folgenden ist der Graph auf zwei Arten dargestellt; zunächst sind die Knoten in alphabetischer Reihenfolge gezeichnet und mit den Kanten entsprechend der Kantenmenge verbunden. Wie man sieht, gibt es Kanten, die sich überschneiden. Schöner ist eine Darstellung, in der es keine überschneidenden Kanten gibt, das ist aber keineswegs bei allen sondern nur bei planaren (plättbaren) Graphen möglich. Wie man an der zweiten Darstellung sieht, ist unser Graph plättbar und kann ohne sich überschneidende Kanten gezeichnet werden, wenn die Knoten passend angeordnet werden.




2. Hier haben wir ebenfalls einen plättbaren Graphen.



**Lösung zu Aufgabe 67.**

1. Aufzählende Darstellungen.

   - Linker Graph:

$$\begin{aligned} V &= \{a, b, c, d, e\}, \\ E &= \{\{a, d\}, \{a, e\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, e\}\}. \end{aligned}$$

   - Mittlerer Graph:

$$\begin{aligned} V &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ E &= \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 6\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}. \end{aligned}$$

   - Rechter Graph:

$$\begin{aligned} V &= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \\ E &= \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{4, 5\}, \{4, 6\}, \{5, 6\}\}. \end{aligned}$$

2. Adjazenzmatrizen.

   - Linker Graph:

| | $a$ | $b$ | $c$ | $d$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| $b$ | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| $c$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| $d$ | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| $e$ | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

   - Mittlerer Graph:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 4 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |

   - Rechter Graph:

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 2 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 3 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 5 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 6 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |

**Lösung zu Aufgabe 68.**
Die Graphen sind *nicht* isomorph. Eine Begründung ist zum Beispiel, daß im rechten Graphen der Knotengrad 4 vorkommt, der im linken Graphen nicht existiert.

Genauer: Bei einem Isomorphismus gibt es *Invarianten*, d.h. Größen, die bei den isomorphen Graphen übereinstimmen. In der Vorlesung wurden drei Invarianten erwähnt: Anzahl der Knoten, Anzahl der Kanten, „Verteilung“ der Knotengrade. Stimmen zwei Graphen nicht in allen diesen Größen überein, können sie nicht isomorph sein.

**Linker Graph**

Knoten: 6
Kanten: 8
Knotengrade:

| Grad | Anzahl |
|---|---|
| 2 | 2 |
| 3 | 4 |
| 4 | 0 |

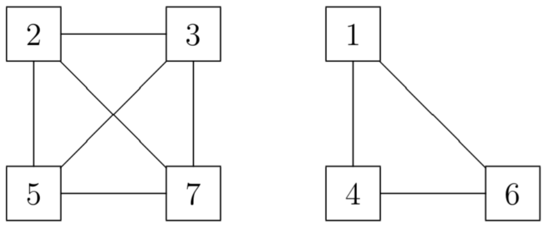
**Rechter Graph**

Knoten: 6
Kanten: 8
Knotengrade:

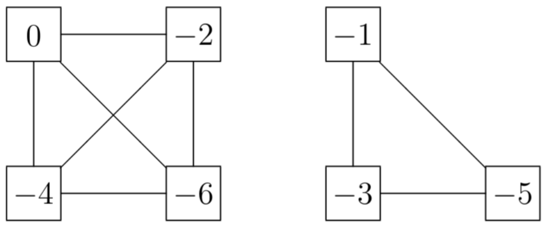
| Grad | Anzahl |
|---|---|
| 2 | 3 |
| 3 | 2 |
| 4 | 1 |

**Lösung zu Aufgabe 69.**

- Graph $G_1$:




- Graph $G_2$:




Ein Isomorphismus zwischen $G_1$ und $G_2$ ist eine bijektive Abbildung $f : V_1 \to V_2$ mit

$$\{u, v\} \in E_1 \iff \{f(u), f(v)\} \in E_2.$$

Es gibt mehrere Möglichkeiten für einen Isomorphismus zwischen $G_1$ und $G_2$. Die folgende Zuordnung bietet sich aufgrund der beiden gezeichneten Graphen an.

$$\begin{array}{lll} 2 \longleftrightarrow 0 & 7 \longleftrightarrow -6 & 6 \longleftrightarrow -5 \\ 3 \longleftrightarrow -2 & 1 \longleftrightarrow -1 & \\ 5 \longleftrightarrow -4 & 4 \longleftrightarrow -3 & \end{array}$$

**Lösung zu Aufgabe 70.**
Bei dieser Aufgabe ist der folgende Satz (siehe Vorlesung) nützlich: Die Summe aller Knotengrade ist doppelt so groß wie die Anzahl der Kanten,

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2 \cdot |E|.$$

Hierbei ist $V$ die Knotenmenge, $E$ die Kantenmenge, und $d(v)$ ist der Grad des Knotens $v$.

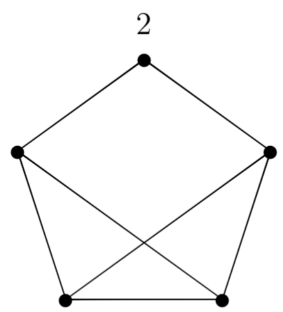
Speziell folgt aus diesem Satz: Die Summe der Knotengrade muß eine gerade Zahl sein.

(a) 1, 2, 3, 4, 5

Einen Graphen mit diesen Knotengraden gibt es nicht, da die Summe der Knotengrade ungerade wäre, was unmöglich ist.

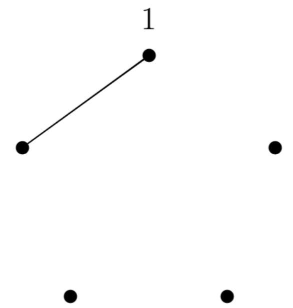
(b) 3, 3, 3, 3, 2

Der folgende Graph ergibt sich zwangsläufig. Die Anzahl der Kanten ist $|E| = 7$. Der Knoten mit dem Knotengrad 2 ist gekennzeichnet.




(c) 1, 2, 3, 4, 4

1. Wir wählen einen der fünf Knoten für den Knotengrad 1 aus und zeichnen die zugehörige Kante.
2. Zwei der verbleibenden vier Knoten sollen den Knotengrad 4 haben, also auch einer der drei Knoten, die in der Skizze noch keine inzidente Kante haben. Das ist *nicht möglich*, der Knotengrad 1 würde zerstört.

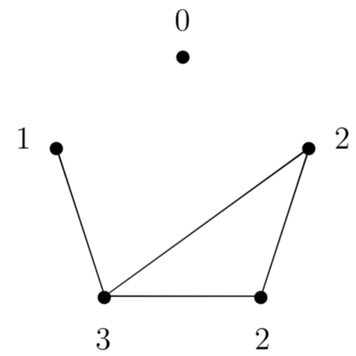



(d) 3, 4, 3, 4, 3

Einen Graphen mit diesen Knotengraden kann es nicht geben, weil die Summe der Knotengrade ungerade wäre.

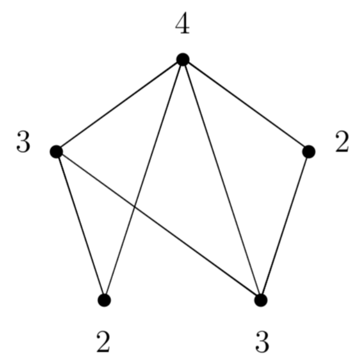
(e) 0, 1, 2, 2, 3

Der folgende Graph hat die geforderten Knotengrade. Die Anzahl der Kanten ist $|E| = 4$. Die Knotengrade sind an die Knoten geschrieben.




(f) 4, 3, 3, 2, 2

Der folgende Graph hat die geforderten Knotengrade. Die Anzahl der Kanten ist $|E| = 7$. Die Knotengrade sind an die Knoten geschrieben.



**Lösung zu Aufgabe 71.**

- $C_n$: Kreis (circle) mit $n$ Knoten.

  Zeichnet man die Graphen $C_n$ für $n = 3, 4, 5$ und $6$ und färbt sie mit kleinstmöglicher Farbanzahl ein, so sieht man, daß $\chi(C_3) = 3$, $\chi(C_4) = 2$, $\chi(C_5) = 3$ und $\chi(C_6) = 2$ ist.

  Man beginnt mit einem beliebigen Knoten, geht im Kreise herum und kommt dabei bis zum letzten Knoten mit zwei Farben aus, die man abwechselnd verwendet. Bei dem letzten Knoten benötigt man eventuell eine dritte Farbe, denn der letzte Knoten ist sowohl zum vorletzten als auch zum Startknoten benachbart, und diese beiden können unterschiedliche Farben haben. Dies ist genau dann der Fall, wenn die Knotenzahl ungerade ist, wie an den Beispielen unmittelbar klar wird.

  Somit gilt allgemein:

$$\chi(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 3 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \geq 3).$$

- $K_n$: vollständiger Graph mit $n$ Knoten.

  Da jeder Knoten benachbart zu jedem anderen Knoten ist, muß jeder Knoten mit einer anderen Farbe gefärbt werden. Also ist

$$\chi(K_n) = n.$$

- $W_n$: Rad (wheel) mit $n$ Knoten außen und einem Knoten als Radnabe.

  Der Knoten in der Mitte ist benachbart zu allen anderen Knoten, muß also eine eigene Farbe haben, die für keinen anderen Knoten mehr verwendet werden kann.

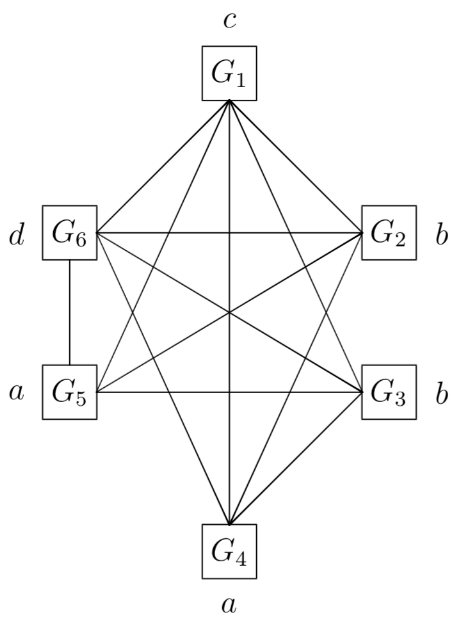
  Bei den äußeren Knoten verhält es sich wie bei den Kreisen $C_n$.

  Für den Graphen $W_n$ benötigt man also eine Farbe mehr als für $C_n$:

$$\chi(W_n) = \begin{cases} 3 & \text{für } n \text{ gerade} \\ 4 & \text{für } n \text{ ungerade} \end{cases} \qquad (n \geq 3).$$

**Lösung zu Aufgabe 72.**
Zur Modellierung der Problemstellung wird ein Graph mit 6 Knoten verwendet; jeder Knoten entspricht einem Gremium. Zwei Knoten werden genau dann durch eine Kante verbunden, wenn die beiden entsprechenden Gremien mindestens ein gemeinsames Mitglied haben.

Gremien, die benachbarten Knoten entsprechen, dürfen also nicht zur gleichen Zeit tagen. Werden die verschiedenen Sitzungstermine durch unterschiedliche Farben dargestellt, dann ist die chromatische Zahl des Graphen gleich der kleinstmöglichen Anzahl an Terminen.

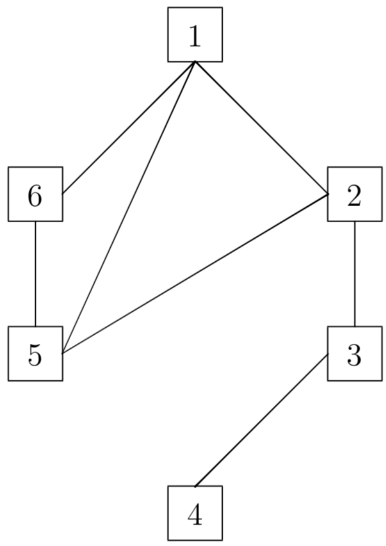



Als „Farben“ werden in dem Graphen die Buchstaben $a$, $b$, $c$ und $d$ verwendet. Die chromatische Zahl ist gleich 4.

Man kommt also mit vier Sitzungsterminen aus.

**Lösung zu Aufgabe 73.**
Wir modellieren die Situation mit einem Graphen; Knotenfärbung mit minimaler Farbanzahl liefert die Lösung.

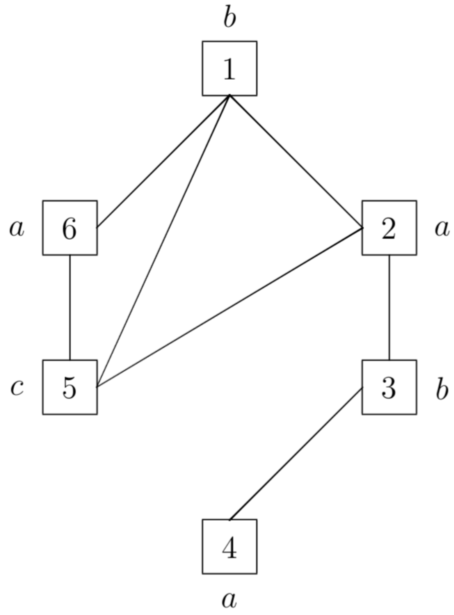
- **Knoten**[2] entsprechen den *Fernsehstationen*.
- **Kanten** verbinden Knoten genau dann, wenn die betreffenden Fernsehstationen *weniger als 150 Meilen voneinander entfernt* sind.




[2]Die Bestandteile des Modells sind fett gedruckt, die Objekte und Gegebenheiten der Realität kursiv.

Nach der Modellierung der Ausgangssituation wird in dem Modell gearbeitet; es wird eine Knotenfärbung durchgeführt. Das Ergebnis dieser Färbung wird bezüglich der realen Problemstellung interpretiert und liefert die Lösung.

- **Farben** entsprechen den *Fernsehkanälen*.
- Die **chromatische Zahl** entspricht der *Mindestanzahl benötigter Kanäle*.




Als Ersatz für Farben haben wir in der Graphik die Buchstaben $a$, $b$ und $c$ verwendet. Die chromatische Zahl des Graphen ist gleich 3. Also sind drei Kanäle ausreichend.

**Lösung zu Aufgabe 74.**
Es gilt:

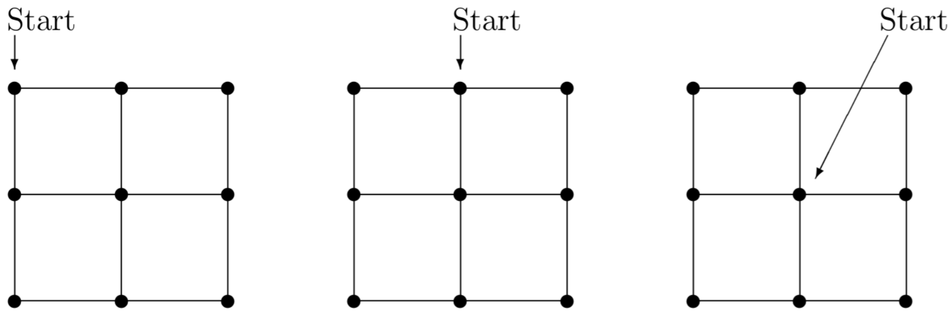
$$\text{Eine Euler-Rundtour ist möglich.} \quad \Longrightarrow \quad \text{Alle Knoten haben geraden Grad.}$$

Daraus folgt mit Kontraposition:

$$\begin{gathered}\text{Es existiert ein Knoten mit ungeradem Grad.}\\ \Longrightarrow \\ \text{Eine Euler-Rundtour ist nicht möglich.}\end{gathered}$$

Da der Graph Knoten mit ungeradem Grad enthält, ist *keine* Euler-Rundtour möglich.

Um zu untersuchen, ob eine Hamilton-Rundtour möglich ist, führen wir eine Fallunterscheidung durch; wir starten mit der Tour an drei verschiedenen Knoten. Aus Symmetriegründen haben wir damit alle neun möglichen Fälle für einen Startknoten abgedeckt.




In allen Fällen zeigt sich: In dem Graphen ist *keine* Hamilton-Rundtour möglich.

In den beiden ersten Fällen läuft man entweder außen herum und verpaßt die Mitte, oder man geht zur Mitte und kommt dann nicht mehr durch einen der Eckpunkte.

Im dritten Fall kommt man nicht mehr zur Mitte zurück, wenn man alle äußeren Knoten durchläuft.

**Lösung zu Aufgabe 75.**
Bezüglich Euler-Graphen gilt (siehe Vorlesung):

1. Existiert in einem Graphen ein Knoten mit ungeradem Grad, dann gibt es keine Euler-Rundtour.

2. Ist ein Graph zusammenhängend, und haben alle Knoten geraden Grad, dann existiert eine Euler-Rundtour.

Die Graphen $C_n$, $K_n$ und $W_n$ sind alle zusammenhängend.

- $C_n$ $(n \geq 3)$:

  Alle Knoten haben den Grad 2. Damit sind alle $C_n$ eulersch.

- $K_n$ $(n \geq 3)$:

  Alle Knoten haben den Grad $n - 1$. Also sind die Graphen $K_n$ eulersch für $n$ ungerade und nicht eulersch für $n$ gerade.

- $W_n$ $(n \geq 3)$:

  Alle „äußeren" Knoten eines Rades haben den Grad 3. Somit ist keiner der Graphen $W_n$ eulersch.

Bezüglich Hamilton-Graphen können wir zeigen: Alle Graphen $C_n$, $K_n$ und $W_n$ mit beliebigem $n \geq 3$ sind Hamilton-Graphen. Wir geben im folgenden die Begründungen an.

- $C_n$ $(n \geq 3)$:

  Man startet an einem beliebigen Knoten und läuft „außen auf dem Rad herum". Dadurch wird jeder Knoten genau einmal besucht, und man kommt zum Ausgangsknoten zurück.

- $K_n$ $(n \geq 3)$:

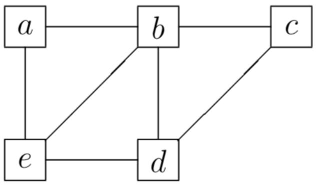
  Man startet bei einem beliebigen Knoten und besucht dann Schritt für Schritt Knoten, die bis dahin noch nicht durchlaufen wurden. Hat man alle Knoten besucht, geht man zum Ausgangsknoten zurück. Das alles ist möglich, da bei einem vollständigen Graphen alle überhaupt möglichen Kanten vorhanden sind, so daß man von jedem Knoten zu jedem beliebigen anderen Knoten gehen kann.

- $W_n$ $(n \geq 3)$:

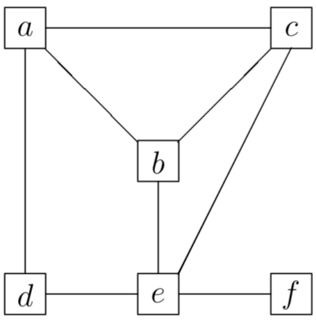
  Man startet zum Beispiel bei der Radnabe, geht dann zu einem beliebigen „äußeren“ Knoten des Rades und läuft dann „außenherum“ bis zum letzten noch nicht besuchten Knoten. Von dort geht man zurück zur Radnabe und hat damit einen geschlossenen Rundweg, bei dem jeder Knoten exakt einmal besucht wurde.

**Lösung zu Aufgabe 76.**

1. Eine Hamilton-Rundtour ist möglich, zum Beispiel durch $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $a$.




2. Eine Hamilton-Rundtour ist nicht möglich.




   - Fall 1: Startet man bei $f$, kommt man nicht mehr zu $f$ zurück.
   - Fall 2: Startet man nicht bei $f$, muß man irgendwann $f$ besuchen und kommt nicht mehr weg.