Diskrete Mathematik Übungen

Studiengang Informatik

verfasst von
Steven H. G. Fleischer

Mai 2022

Eidesstattliche Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Arbeit selbstständig und unter ausschließlicher Verwendung der angegebenen Literatur und Hilfsmittel erstellt zu haben. Die Arbeit wurde bisher in gleicher oder ähnlicher Form keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch nicht veröffentlicht.

Gießen, 07.05.2022

Inhaltsverzeichnis

1 Logik **1**

1.1 Ausagenlogische Formeln und Wharheitstafeln 1

1.1.1 Erfüllbarkeit 1

1.1.2 logische Äquivalenzen 2

1.1.3 Tautologien 2

1.1.4 technische Dokumente 3

1.2 Junktoren, Normalformen 3

1.2.1 logische Äquivalenzen mit Junktoren 3

1.2.2 Sheffer-Operator 4

1.2.3 DNF und KNF 4

1.3 Prädikate und Quantoren 4

1.3.1 Prädikatübersetzung 4

1.3.2 x+1>2 Wahrheit 5

1.3.3 Studenten 5

1.3.4 x ein Teiler y 5

2 Logik **7**

2.1 Mengen 7

2.1.1 Teilmengen 7

2.1.2 Mengenoperationen 7

2.1.3 Mächtigkeit 8

2.1.4 Mengenangabe 8

2.1.5 Elemente von Mengen 8

3 Funktionen **9**

3.1 Grundlagen des Funktionsbegriffs 9

3.1.1 injektiv,surjektiv und Bijektiv 9

3.1.2 Abbildungen 10

3.1.3 M = a,b,c,d und $\triangle_2$ = 0,1 10

1 Logik

1.1 Ausagenlogische Formeln und Wharheitstafeln

1.1.1 Erfüllbarkeit

Schreiben Sie für die folgenden zusammengesetzten Aussagen (aussagenlogische Formeln) Φ_1 bis Φ_4 die Wahrheitstafeln auf. Welche der Formeln sind erfüllbar? Gibt es es Tautologien oder Kontradiktionen?

$\Phi_1 =$ $(A \vee (\neg B)) \wedge A$

AB	$(\neg B)$	$A \vee (\neg B)$	$(A \vee (\neg B)) \wedge A$
00	1	1	0
01	0	0	0
10	1	1	1
11	0	1	1

Die Formal ist Erfüllbar, da sich in zwei Zeilen der Wahrheitstafel w ergibt, ist die Formel sogar für zwei unterschiedliche Belegungen der atomaren Variablen erfüllbar.

$\Phi_2 =$ $A \vee (\neg(A \wedge B))$

AB	$(\neg(A \wedge B))$	$A \vee (\neg(A \wedge B))$
00	1	1
01	1	1
10	1	1
11	1	1

Erfüllbar und Tautologie, da die Formel für jede Belegung Wahr ist

$\Phi_3 =$ $(A \vee (\neg B)) \wedge (\neg A)$

AB	$(A \vee (\neg B))$	$(A \vee (\neg B)) \wedge (\neg A)$
00	1	1
01	0	0
10	1	0
11	1	0

Erfüllbar, da die Formel für eine Belegung der Atomaren Aussagen ein wahr ist.

$\Phi_4 =$ $(A \wedge B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))$

AB	$(A \wedge B) \wedge ((\neg A) \vee (\neg B))$
00	0
01	0
10	0
11	0

Kontradiktion, da die Formel für keine der atomaren Aussagen wahr ist

1.1.2 logische Äquivalenzen

Beweisen Sie mit Wahrheitstafeln die folgenden logischen Äquivalenzen

1. $(A \leftrightarrow B) = ((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$

AB	$(A \leftrightarrow B)$	$((A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A))$
00	1	1
01	0	0
10	0	0
11	1	1

2. $(A \rightarrow B) = (\neg A \vee B)$

AB	$(A \rightarrow B)$	$(\neg A \vee B)$	$(A \rightarrow B) = (\neg A \vee B)$
00	1	1	1
01	1	1	1
10	0	0	0
11	1	1	1

3. $(A \vee B) = (\neg(\neg A \wedge \neg B))$

AB	$(A \vee B)$	$(\neg(\neg A \wedge \neg B))$
00	0	0
01	1	1
10	1	1
11	1	1

1.1.3 Tautologien

1. $A \vee (\neg A)$
   Satz vom ausgeschlossenen Dritten

A	$A \vee (\neg A)$	
0	1	Tautologie, weil Formel für jede Aussage wahr ist
1	1	

2. $\neg(A \wedge (\neg A))$
   Satz vom Widerspruch

A	$\neg(A \wedge (\neg A))$	
0	1	Tautologie, weil Formel für jede Aussage wahr ist
1	1	

3. $(\neg(\neg A)) \leftrightarrow A$
   Satz von der doppelten Verneinung

A	$(\neg(\neg A)) \leftrightarrow A$	
0	1	Tautologie, weil Formel für jede Aussage wahr ist
1	1	

4. $(\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$

AB	$(\neg(A \wedge B))$	$\leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$	$(\neg(A \wedge B)) \leftrightarrow ((\neg A) \vee (\neg B))$
00	1	1	1
01	1	1	1
10	1	1	1
11	0	0	1

Tautologie, da die Teilaussagen immer zueinander equivalente Aussagen liefern

$(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$

AB	$(\neg(A \vee B))$	$((\neg A) \wedge (\neg B))$	$(\neg(A \vee B)) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge (\neg B))$
00	1	1	1
01	0	0	1
10	0	0	1
11	0	0	1

Tautologie, da die Teilaussagen immer zueinander equivalente Aussagen liefern

Sätze von De Morgan

5. $((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B$
   Abtrennungsregel

AB	(A→B)	((A→B)∧A)	((A→B)∧A)→B
00	1	0	1
01	0	0	0
10	1	1	1
11	1	1	1

Keine Tautologie, da die Formel nicht für jede Eingabe wahr ist

6. ((A→B)∧(¬B))→(¬A)
   Widerlegungsregel

AB	(¬B)	(A→B)	((A→B)∧(¬B))	((A→B)∧(¬B))→(¬A)
00	1	1	1	1
01	0	1	0	1
10	1	0	0	1
11	0	1	0	1

Ist eine Tautologie, da die Formel für jede Eingabe wahr ist

7. ((A→B)∧(B→C))→(A→B)
   Kettenschlußregel

ABC	(A→B)	(B→C)	((A→B)∧(B→C))	((A→B)∧(B→C))→(A→B)
000	1	1	1	1
001	1	1	1	1
010	1	0	0	1
011	1	1	1	1
100	0	1	0	0
101	0	1	0	1
110	1	0	0	0
111	1	1	1	1

Erfüllbar und keine Tautologie, da die Formel nicht für jede Eingabe wahr ist

1.1.4 technische Dokumente

LQBN	a	b	c	Φ
0000	0	0	0	0
0001	0	0	1	0
0010	0	1	0	0
0011	0	1	1	0
0100	1	0	0	0
0101	1	0	1	0
0110	1	1	0	0
0111	1	1	1	0
1000	0	0	0	0
1001	0	0	1	0
1010	0	1	0	0
1011	0	1	1	0
1100	1	0	0	0
1101	1	0	1	0
1110	1	1	0	0
1111	1	1	1	1

1.2 Junktoren, Normalformen

1.2.1 logische Äquivalenzen mit Junktoren

Finden Sie eine Formel, die logisch äquivalent zu A $\oplus$ B ist und nur die Junktoren ¬, ∧, ∨ enthält. (Hierbei ist $\oplus$ das exklusive Oder.) Hinweis: Arbeiten Sie mit einer Wahrheitstafel.

AB	A ⊕ B	(¬A)∧B	A∧(¬B)	((¬A)∧B)∨(A∧(¬B))
00	0	0	0	0
01	1	1	0	1
10	1	0	1	1
11	0	0	0	0

1.2.2 Sheffer-Operator

Stellen Sie zunächst den Junktor ¬ und anschließend den Junktor ∧ mit dem Sheffer-Operator | NAND-Operator dar.

			AB	$(A \vert B) \vert (A \vert B)$	$A \land B$
A	$A \vert A$	$(\neg A)$	00	0	0
0	1	1	01	0	0
1	0	0	10	0	0
			11	1	1

1.2.3 DNF und KNF

Stellen Sie zu der folgenden Wahrheitstafel eine aussagenlogische Formel ϕ in disjunktiver und eine in konjunktiver Normalform auf.

xyz	ϕ	$min_1: (\neg a) \land y \land (\neg z)$	$min_2: (\neg a) \land y \land z$	$min_3: x \land (\neg y) \land (\neg z)$	$min_4: x \land y \land (\neg x)$	$min_5: x \land y \land z$	$min_1 \lor min_2 \lor min_3 \lor min_4 \lor min_5$
000	0	0	0	0	0	0	0
001	0	0	0	0	0	0	0
010	1	1	0	0	0	0	1
011	1	0	1	0	0	0	1
100	1	0	0	1	0	0	1
101	0	0	0	0	0	0	0
110	1	0	0	0	1	0	1
111	1	0	0	0	0	1	1

->	$max_1: (\neg x) \lor y \lor (\neg z)$	$max_2: (\neg x) \lor y \lor z$	$max_3: x \lor (\neg y) \lor (\neg z)$	$max_4: x \lor y \lor (\neg z)$	$max_5: x \lor y \lor x$	$max_1 \land max_2 \land max_3 \land max_4 \land max_5$
$\vert$	1	1	1	1	0	0
$\vert$	1	1	1	0	1	0
$\vert$	1	1	1	1	1	1
$\vert$	1	1	0	1	1	1
$\vert$	1	0	1	1	1	1
$\vert$	0	1	1	1	1	0
$\vert$	1	1	1	1	1	1
$\vert$	1	1	1	1	1	1

1.3 Prädikate und Quantoren

1.3.1 Prädikatübersetzung

es sei P(x) ein Prädikat und M = a, b, c die Grundmenge zu x. Zu den folgenden Aussagen sollen logisch äquivalente aussagen angegeben werden, die keine Quantoren enthalten.

a $\forall x P(x) = P(a) \land P(b) \land P(c)$

b $\exists x P(x) = P(a) \lor P(b) \lor P(c)$

c $\neg \forall P(x) = P(a) \lor P(b) \lor P(c)$

d $\neg \exists x P(x) = P(a) \land P(b) \land P(c)$

e $\forall X \neg P(x) = P(a) \lor P(b) \lor P(c)$

f $\exists x \neg P(x) = P(a) \lor P(b) \lor P(c)$

1.3.2 x+1>2 Wahrheit

a P(0) = Wahr, da 0+1>2*0

b P(-1) = Wahr, weil -1 > -2

c P(1) = falsch, weil 1+1 > 2*1 unwahr ist.

d ∃xP(x) = Wahr, weil es ein x gibt, für dass diese Aussage zutrifft.

e ∀xP(x) = Falsch, weil es mindestens ein x gibt, für dass diese Aussage nicht zutrifft.

f ∃x¬P(x) = Wahr, weil es mindestens ein x gibt, für dass diese Aussage zutrifft.

g ∀x¬P(x) = Falsch, weil es mindestens ein x gibt, für dass diese Aussage nicht zutrifft.

h ¬∀xP(x) = Wahr, weil es mindestens ein x gibt, für dass diese Aussage zutrifft.

1.3.3 Studenten

Das Prädikat P(x,y) stehe für SStudent/Studentin"x hat die Vorlesung y besucht."Die Grundmenge zu x seien alle Studierenden und die Grundmenge zu y seien alle Vorlesungen des Fachbereichs MNI. Schreiben Sie die folgenden Aussagen in deutschen Sätzen auf.

a ∃x∃yP(x,y) = Es existieren Studenten, die zu bestimmten Vorlesungen gegangen sind.

b ∃x∀yP(x,y) = Es existieren Studenten, die zu allen Vorlesungen gegangen sind.

c ∃y∀xP(x,y) = Es existieren Vorlesungen, zu denen alle Studenten gegangen sind.

d ∀x∃yP(x,y) = Alle Studenten sind zu bestimmten Vorlesungen gegangen.

e ∀y∃xP(x,y) = Zu allen Vorlesungen existieren Studenten, die diese besucht haben.

f ∀x∀yP(x,y) = Alle Studenten sind zu allen Vorlesungen gegangen.

1.3.4 x ein Teiler y

Es sei Px,y das Prädikat "x ist ein Teiler von y". Die Grundmengen für x und y sei die Menge der natürlichen Zahlen ℕ=1,2,3,.... Welcher der folgenden Ausdrücke ist eine Aussage? Welche der Aussagen ist wahr, welche falsch

Aufgabe	Aussage?	Wahr?	Erläuterung(keine Aussage oder nicht wahr)
P(10,y)	nein	-	freie Variable y
P(x,100)	nein	-	freie Variable x
∀xP(x,y)	nein	-	freie Variable y
∃xP(x,7)	ja	wahr	-
∀x∃yP(x,y)	ja	wahr	-
P(3,9)	ja	wahr	-
P(3,7)	ja	falsch	7 ist durch 3 nicht ohne Rest teilbar
∃xP(x,9)	ja	wahr	-
∀P(x,9)	ja	falsch	Es existieren für x werte, durch die nicht ohne Rest geteilt werden kann
∃x∀yP(x,y)	ja	wahr	-
∀xP(x,x)	ja	wahr	-
∀yP(1,y)	ja	wahr	-

2 Logik

2.1 Mengen

2.1.1 Teilmengen

1 = A \ B∪C

2 = B \ A∪C

3 = C \ A∪B

4 = A∩B \ C

5 = B∩C \ A

6 = A∩C \ B

7 = 7 A∩B∩C

2.1.2 Mengenoperationen

1. 1,2,3∪1,3,5,7 = 1,2,3,5,7
2. 1,2,3,4∩1,3,5,7,9 = 1,3
3. 1,2,3,4,5 \1,3,5,7 = 2,4
4. 1,2,4,8∩x,y,z= 0
5. (1,2,3∩1,3,5)∪x,y,z = 1,3,x,y
6. (1,2,3∪1,3,5)∩x,y,z = 0
7. 1,5,10 \ x,y,z = 1,5,10
8. 1,2,3,4,5\ (1,2,3,4,5∩2,4,6) = 1,3,5

2.1.3 Mächtigkeit

Es sei A = -3,-2,-1,0,1,2,3 und B = -4,-2,2,4. Welche Mächtigkeiten haben die Mengen:

- $|A| = 7$
- $|B| = 4$
- $|A \cup B|$ = |-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4|=9
- $|A \cap B|$ = |-2,2| = 2
- $|(A \cap B) \cup A| = |A|$
- $|A \setminus B|$ = |-3,-1,0,1,3|=5
- $|B \setminus A|$ = |-4,4| =2
- $|A \cup A \cup A| = |A|$
- |AxA| = 49
- |BxB| = 16
- |AxB| = 28
- |BxA| = 28

2.1.4 Mengenangabe

- A = 1,2,3
- B = x,y
- C = 0
- M = AxB^{2}xC = 1,2,3xxx,yy,xyx0 =
  (1,x,x,0),(1,x,y,0),(1,y,x,0),(1,y,y,0),
  (2,x,x,0),(2,x,y,0),(2,y,x,0),(2,y,y,0),
  (3,x,x,0),(3,x,y,0),(3,y,x,0),(3,y,y,0),

2.1.5 Elemente von Mengen

3 Funktionen

3.1 Grundlagen des Funktionsbegriffs

3.1.1 injektiv,surjektiv und Bijektiv

1. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ f(x) = x^3

   injektiv, weil jeder Wert der Wertemenge mindestens einmal getroffen wird. Surjektiv, weil jeder Wert der Wertemenge höchstens einmal getroffen wird. Bijektiv, weil injektiv und Surjektiv

2. f: $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, f(x) = x^3

   injektiv, weil jeder Wert der Wertemenge mindestens einmal getroffen wird. Surjektiv, weil jeder Wert der Wertemenge höchstens einmal getroffen wird. Bijektiv, weil injektiv und Surjektiv

3. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, f(x) = x^2

   nicht injektiv, weil nicht jeder Wert der Wertemenge mindestens einmal getroffen wird. Surjektiv, weil jeder Wertemenge höchstens einmal getroffen wird. Nicht Bijektiv, weil nicht injektiv und Surjektiv.

4. f: $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, f(x) = x^2

   injektiv, weil jeder Wert der Wertemenge mindestens einmal getroffen wird. Surjektiv, weil jeder Wert der Wertemenge höchstens einmal getroffen wird. Bijektiv, weil injektiv und surjektiv.

5. f : $\mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}$, f(x)= x^2

   Surjektiv, weil jeder Wert der Wertemenge höchstens einmal getroffen wird. Nicht injektiv, weil nicht jeder Wert der Wertemenge getroffen wird. Nicht Bijektiv, weil nicht Injektiv und Surjektiv.

6. f : $\mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$, f(x) = x^2

   Injektiv, weil jeder Wert der Wertemenge mindestens einmal getroffen wird. Surjektiv, weil jeder Wert der Wertemenge höchstens einmal getroffen wird. Bijektiv, weil injektiv und surjektiv.

7. f : $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup 0$, f(x) = x^2

   Surjektiv, weil jeder Wert der Wertemenge höchstens einmal getroffen wird. Injektiv, wei jeder Wert der Wertemenge mindestens einmal getroffen wird. Bijektiv, weil injektiv und Surjektiv.

8. f : R

   Surjektiv, weil jeder Wert der Wertemenge höchstens einmal getroffen wird. Injektiv, wei jeder Wert der Wertemenge mindestens einmal getroffen wird. Bijektiv, weil injektiv und Surjektiv.

3.1.2 Abbildungen

1. f: $\mathbb{N}^{\leq 500} \rightarrow \mathbb{N}$, f(x) = x^2

2. f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, f(x) = x^5
3. f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, f(x) = x^3
4. f: $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, f(x) = x^4

3.1.3 M = a,b,c,d und $\triangle_2$ = 0,1

1. M*M = aa,b,c,d, ba,b,c,d, ca,b,c,d, da,b,c,d,
   $\triangle_2 * \triangle_2$ = 00,01,11 M*$\triangle_2$ = a0,a1,b0,b1,c0,c1,d0,d1, $\triangle_2$*M = 0a,0b,0c,0d,1a,1b,1c,1d,
2. Ja
3. ja,
4. ja,
5. ja,
6. ja,