REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

MATHÉMATIQUES

3ème année de l'enseignement secondaire

Section : Sciences expérimentales

TOME 1

Hikma Smida
Professeur universitaire

Ridha Ben Saad
Inspecteur

Néjiba Mhamdi
Inspecteur

Leila Ben Youssef
Professeur du secondaire

Imène Ghedamsi
Assistante universitaire

Ali Béji Hammas
Inspecteur

Béchir Labidi
Inspecteur

Evaluateurs

Belhassen Dahman
Professeur universitaire

Khédija Ben Messaoud
Inspectrice Principale

Ali Rahmouni
Inspecteur Principal

Centre National Pédagogique

Remerciements

Madame Khédija BEN MASSOUD, Messieurs Abdennebi ACHOUR, Belhassen DAHMEN et Ali RAHMOUNI ont évalué ce manuel. Nous remercions tous les membres de cette équipe pour leurs critiques, leurs conseils pertinents et leurs modifications judicieuses.

Messieurs Taoufik CHARRADA, Ali AZIZI, Nebil MZIOU et Mourad ARBI ont lu ce manuel. Nous remercions tous les membres de cette équipe pour leurs remarques judicieuses.

Monsieur Abderrazek BERREZIGUE a contribué à l'élaboration des figures proposées dans ce manuel. Nous remercions Monsieur BERREZIGUE pour sa gentillesse et sa disponibilité.

La mise en page de ce manuel est l'œuvre de l'équipe d'édition du CNP. Nous remercions tous les membres de cette équipe pour leur grande compétence et leur patience.

Les auteurs

Préface

Ce manuel comprend douze chapitres. Chaque chapitre comprend six rubriques.

Pour commencer

Cette rubrique vise à permettre aux élèves de consolider leurs acquis antérieurs.

Cours

Cette rubrique comprend :

- *des activités visant à permettre aux élèves de développer leur capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à démontrer,*
- *les résultats du cours à retenir.*

QCM - Vrai ou faux

La rubrique QCM vise à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation.
La rubrique Vrai ou Faux vise à l'apprentissage progressif des règles logiques.

Mobiliser ses compétences

Cette rubrique est consacrée à la résolution de problèmes, pour la plupart intégratifs, dans des situations mathématiques ou en rapport avec l'environnement.

Exercices et problèmes

Cette rubrique comprend deux parties.

- *Une partie qui comporte des exercices et problèmes visant à permettre aux élèves de mobiliser leurs compétences de façon autonome.*
- *Une partie Avec l'ordinateur, qui vise à permettre aux élèves d'utiliser un logiciel numérique ou géométrique pour chercher, expérimenter ou contrôler un résultat.*

Math-culture

Cette rubrique propose des éléments d'histoire des mathématiques et des éléments sur la contribution des mathématiques à la compréhension des phénomènes.

Sommaire

Chapitre 1

Généralités sur les fonctions

« Le livre de la nature est écrit dans un langage mathématique. »

Galilée

Chapitre 1

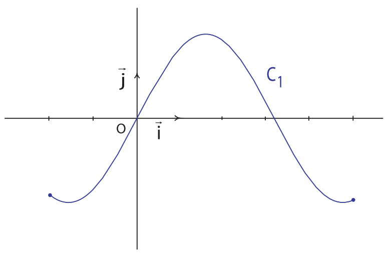
Généralités sur les fonctions

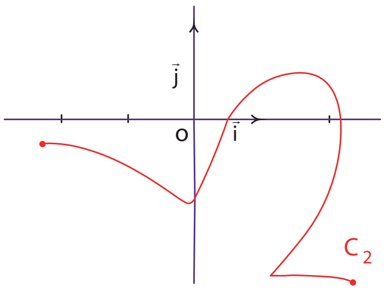
Pour commencer

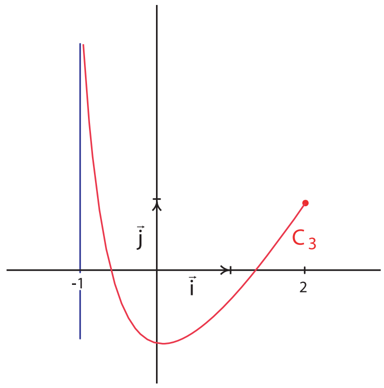
Activité 1

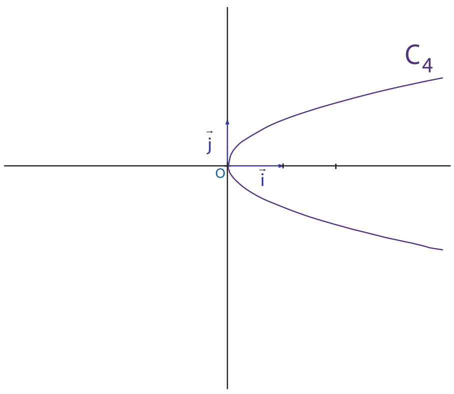
Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

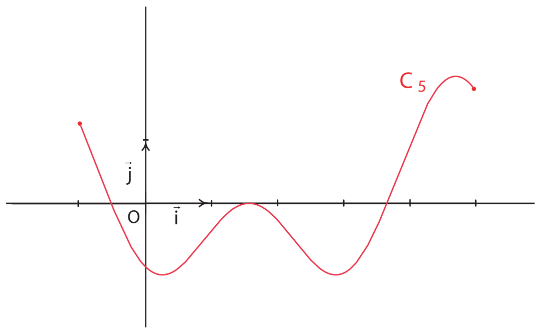
Parmi les courbes C_1, C_2, C_3, C_4 et C_5 tracées ci-dessous, préciser celles qui représentent graphiquement une fonction et préciser l'ensemble de définition de la fonction en question.











Activité 2

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

a. $f : x \mapsto \dfrac{5x-1}{x+3}$;

b. $g : x \mapsto \sqrt{1-x}$;

c. $h : x \mapsto \dfrac{4}{6-x} - \dfrac{1}{x}$;

d. $k : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}} + \dfrac{1}{x-1}$.

Cours

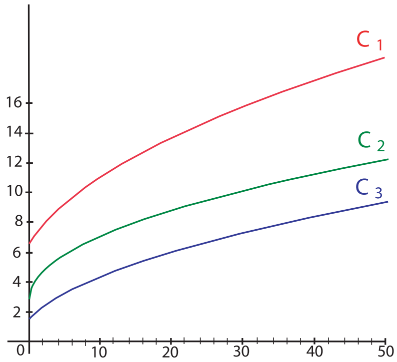
1. Rappels

1. 1 Représentation graphique

Activité 1

1. Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter les courbes C et C' d'équations repectives $y = \frac{1}{x-2}$ et $y = x^2 - 2x$.
2. Déterminer graphiquement le nombre de points d'intersection de C et C'.
3. a. Montrer que si $x^2 - 2x = \frac{1}{x-2}$ alors $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$.
   b. En déduire que le polynôme P défini par $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ admet au moins deux racines.
4. a. Vérifier que 1 est une racine de P.
   b. En déduire les autres racines de P.

Activité 2



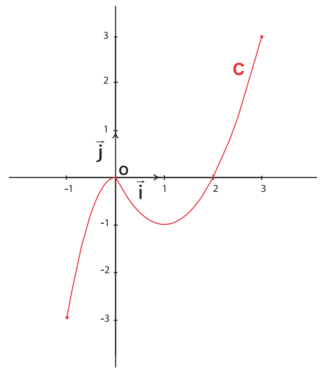
On a représenté dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes des fonctions f, g et h définies sur $[0, +\infty[$ par

$f : x \mapsto \sqrt{x+3}$; $g : x \mapsto \sqrt{x} + 3$; $h : x \mapsto 2\sqrt{x+3} + 3$.

Identifier chacune d'entre-elles.

1. 2 Sens de variation d'une fonction

Activité 1



Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La courbe C tracée ci-contre, est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-1, 3]$.

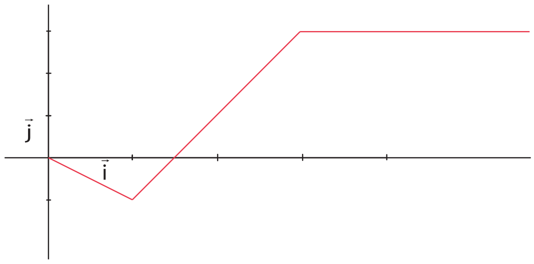
1. Lire graphiquement les variations de la fonction f.
2. Construire les courbes représentatives des fonctions
   $-f : x \mapsto -f(x)$; $|f| : x \mapsto |f(x)|$; $h : x \mapsto 2f(x)$.
   Expliquer le procédé de construction.
3. Lire graphiquement les variations de chacune des fonctions $-f$, $|f|$ et h.

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
– La fonction f est croissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a \le b$, $f(a) \le f(b)$.
– La fonction f est décroissante sur I si pour tous réels a et b de I tels que $a \le b$, $f(a) \ge f(b)$.
– La fonction f est constante sur I si pour tous réels a et b de I, $f(a) = f(b)$.
Une fonction est dite monotone sur un intervalle I lorsqu'elle est croissante sur I ou décroissante sur I.

1. 3 Fonctions paires – Fonctions impaires

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$.
On a représenté ci-dessous l'ensemble {M(x, f(x)) tels que $x \geq 0$}

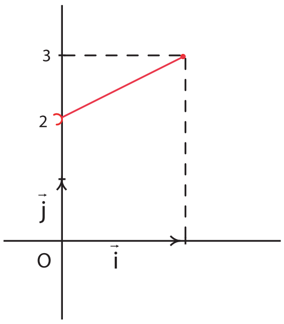


> Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
> Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
> On dit que f est une fonction paire si pour tout x appartenant à D, –x appartient à D et f(–x) = f(x).
> La fonction f est paire, si et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Reproduire la courbe donnée et achever le tracé de la courbe représentative de f.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit g une fonction impaire définie sur [–1,1].
On a représenté ci-dessous l'ensemble {M(x, g(x)) tel que $0 < x \leq 1$}.



> Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
> Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
> On dit que f est une fonction impaire si pour tout x appartenant à D, –x appartient à D et f(–x) = –f(x).
> La fonction f est impaire, si et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.

1. Reproduire la courbe donnée et achever le tracé de la courbe représentative de g.
2. Quelle est l'image de 0 par g ?
3. Donner l'expression de g(x) pour tout $x \in [-1, 1]$.

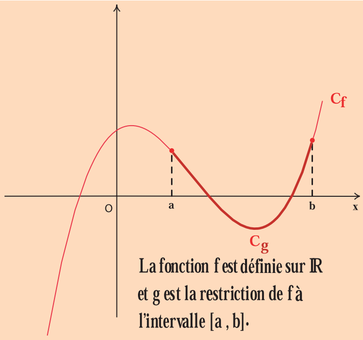
2. Restriction d'une fonction

Activité 1

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Représenter la parabole C, représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 5$.
2. On désigne par C' l'ensemble des points de C d'abscisses appartenant à l'intervalle [–3, 0] et par g la fonction dont la représentation graphique est la courbe C'.
   Colorier C' et donner l'expression de g.

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et C sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit D une partie de E. On appelle restriction de la fonction f à D, la fonction g définie sur D par
g(x) = f(x), pour tout x de D.
La représentation graphique de g est l'ensemble des points de C ayant pour coordonnées (x, f(x)), x appartenant à D.



La fonction f est définie sur IR et g est la restriction de f à l'intervalle [a , b].

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2|x-2| - |x+3| - x^2$.
1. Donner l'expression de la fonction g, restriction de f à l'intervalle $[2, +\infty[$.
2. Représenter graphiquement g.

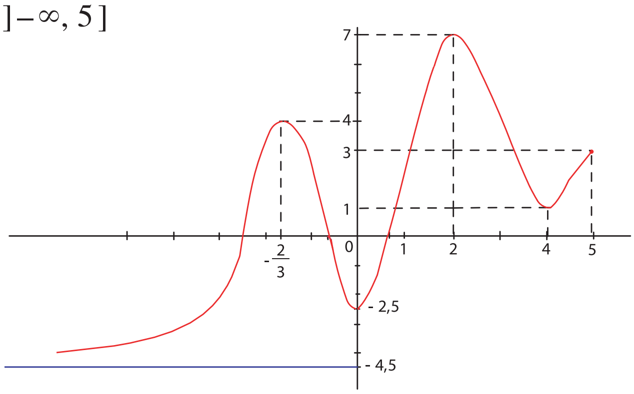
Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Pour tout x > 0, on désigne par P le point de $(O, \vec{i})$ d'abscisse x.
   a. Montrer qu'il existe un unique point M d'ordonnée positive, tel que le triangle OPM soit rectangle en P et d'aire égale à 1.
   b. Sur quelle courbe varie le point M lorsque le point P varie ?
   c. On désigne par g la fonction qui à x associe l'ordonnée de M. Donner l'expression de g.
   d. Pour quelles valeurs de x, a-t-on $2 \le g(x) \le 10$?
2. Pour tout x > 0, on désigne par N le point de coordonnées (0, g(x)).
   Existe-t-il une valeur de x pour laquelle le périmètre du rectangle OPMN est égal à 2 ?

3. Majorant – Minorant

Activité 1

On a représenté dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ci-dessous, la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-\infty, 5]$



Répondre par vrai ou faux.

1. La fonction f admet un maximum sur $]-\infty, 5]$ en $-\frac{2}{3}$.
2. La restriction de f à $]-\infty, 0]$ admet un maximum en $-\frac{2}{3}$.
3. La fonction f admet un maximum sur $]-\infty, 5]$ en 2.
4. Le réel -4.5 est un minimum de la fonction f sur $]-\infty, 5]$.
5. La restriction de f à $]-2 , 2]$ admet un minimum en 0.
6. Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $f(x) \leq 4$.
7. Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $f(x) \leq 10$.
8. Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $-4.5 \leq f(x)$.
9. Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $-6 \leq f(x)$.
10. Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $-5 \leq f(x) \leq 3$.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x) \leq f(x_0)$, on dit que la fonction f admet sur D un maximum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un maximum de f sur D.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
S'il existe un réel x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D, $f(x_0) \leq f(x)$, on dit que la fonction f admet sur D un minimum en x_0 ou encore que $f(x_0)$ est un minimum de f sur D.

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble D.
- La fonction f est dite majorée sur D s'il existe un réel M tel que pour tout x de D, $f(x) \leq M$.
- La fonction f est dite minorée sur D s'il existe un réel m tel que pour tout x de D, $m \leq f(x)$.
- La fonction f est dite bornée sur D s'il existe deux réels m et M tels que pour tout x de D, $m \leq f(x) \leq M$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+1}{|x|+1}$.

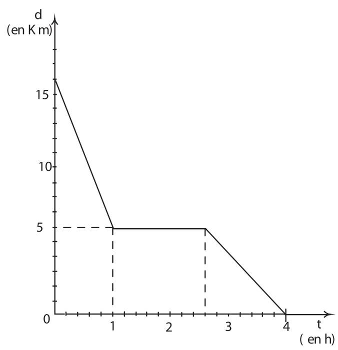
Montrer que tous les points de la courbe C de f se trouvent dans la région du plan délimitée par les droites $y = -1$ et $y = 1$.

4. Fonctions affines par intervalles

4. 1 Définition d'une fonction affine par intervalles

Activité 1

Un cycliste se dirige de la ville B vers la ville A.
On désigne par d(t) la distance (en km) qui à l'instant t (en heure) le sépare de la ville A.
Soit d la fonction qui à t associe d(t).
Dans le graphique ci-contre, la courbe C est la représentation graphique de la fonction d.



1. Quelle est la distance qui sépare les deux villes ?
2. Au bout de combien de temps le cycliste arrivera-t-il à la ville A ?
3. Donner l'expression de d(t) pour tout $t \in [0, 4]$.

Définition

On appelle fonction affine par intervalles toute fonction définie sur une réunion d'intervalles et telle que sa restriction à chacun de ces intervalles soit affine.

Activité 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points A(0, 4), B(3, 0), C(–3, 0) sont fixes et M est un point variable de la droite (BC), d'abscisse x.
On désigne par H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) et par K le projeté orthogonal de M sur la droite (AC).

1. On considère la fonction $f : x \mapsto MH + MK$.
   Donner l'expression de f(x) pour tout réel x.
2. Montrer que la restriction de f à l'intervalle [–3,3] est une fonction constante.
3. Déterminer les valeurs de x pour lesquelles MH + MK = 6.
4. Existe-t-il des points M tels que MH = MK ?

4. 2 Fonction partie entière

Activité 1

1. Pour chacun des réels suivants, donner un encadrement entre deux entiers consécutifs.
   -1.2 ; -1.99999999 ; $\frac{56}{49}$; $-\sqrt{3}$; $5\sqrt{13}$; π ; -2π.
2. Pour chacun des réels suivants, déterminer le plus grand entier qui lui est inférieur.
   5.1 ; -5.000002 ; $\sqrt{26}$; $-\frac{76}{15}$; $4+\sqrt{3}$.

Définition

- On appelle partie entière d'un réel x et on note E(x), le plus grand entier inférieur ou égal à x.
- On appelle fonction partie entière la fonction qui à tout réel associe sa partie entière.

Soit E la fonction partie entière.
Pour tout réel x, il existe un entier n tel que x appartient à [n, n+1[. On a alors E(x) = n.

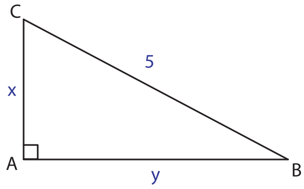
Activité 2

Déterminer et représenter graphiquement la restriction de la fonction partie entière à l'intervalle [–3, 2].

5. La fonction $x \mapsto \sqrt{g(x)}$

Activité 1

Dans la figure ci-contre le triangle ABC est rectangle en A.
On pose AC = x et AB = y.
1. Exprimer y en fonction de x.
2. En déduire l'aire de ABC.



Activité 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$.

1. Pour quelles valeurs de x, les réels $f(x^2)$, $f(x + 2)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ existent-ils ?
2. En déduire l'ensemble de définition de chacune des fonctions
   $k : x \mapsto f(x^2)$, $m : x \mapsto f(x + 2)$ et $s : x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Activité 3

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions

$f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1}$; $g : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 2}$;

$h : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x - 1}}$; $k : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x - 1|}}$.

Activité 4

1. Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I.
   a. Montrer les propriétés ci-dessous
   Si f est croissante sur I alors $\sqrt{f}$ est croissante sur I.
   Si f est décroissante sur I alors $\sqrt{f}$ est décroissante sur I.
   b. Montrer que si f est majorée sur I alors $\sqrt{f}$ est majorée sur I.
2. Pour chacune des fonctions ci-dessous, préciser son ensemble de définition et étudier ses variations.

$m : x \mapsto \sqrt{x - 3}$; $h : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}}$; $k : x \mapsto \sqrt{x(1 - x)}$.

Théorème

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I.
• Si f est croissante sur I alors $\sqrt{f}$ est croissante sur I.
• Si f est décroissante sur I alors $\sqrt{f}$ est décroissante sur I.
• Si f est majorée sur I alors $\sqrt{f}$ est majorée sur I.

6. Opérations sur les fonctions

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. Nous pouvons munir l'ensemble des fonctions définies sur D et à valeurs dans $\mathbb{R}$ d'une addition, d'une multiplication et de la multiplication par un réel de la manière suivante :
• La fonction f + g est la fonction définie sur D par (f + g)(x) = f(x) + g(x).
• La fonction f g est la fonction définie sur D par (fg)(x) = f(x).g(x).
• Pour tout réel λ, la fonction λf est la fonction définie sur D par $(\lambda f)(x) = \lambda.f(x)$.

Activité 1

1. Vérifier que pour toutes fonctions f et g définies sur un même ensemble D, on a
f + g =g + f ; fg = gf.

2. Soit les fonctions f, g et h définies pour tout réel x par
$f(x) = (x-1)^2 - 2$; $g(x) = x - 1$ et $h(x) = 2|x-2| - |x+3|$.

Donner les expressions des fonctions f + h ; f g ; h^2 ; $2f + 3g^3$.

3. a. Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations f(x) = 0 et h(x) = 0.
b. Donner l'ensemble de définition des fonctions :

$x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$; $x \mapsto \dfrac{1}{h(x)}$; $x \mapsto \dfrac{1}{h^2(x)}$;

$x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$; $x \mapsto \dfrac{h(x)}{g(x)}$.

Soit f et g deux fonctions définies sur un ensemble D telles que $g(x) \neq 0$ pour tout $x \in D$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{g(x)}$ est notée $\dfrac{1}{g}$.

La fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ est notée $\dfrac{f}{g}$.

Activité 2

1. Montrer que si f et g sont croissantes, alors f+g est croissante.
2. Montrer que si f et g sont décroissantes, alors f+g est décroissante.
3. Donner les variations de chacune des fonctions ci-dessous.

$f : x \mapsto -x + 5 + \dfrac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

$g : x \mapsto x^2 - 1 + \sqrt{x+3}$ sur $[1, +\infty[$.

QCM – VRAI – FAUX

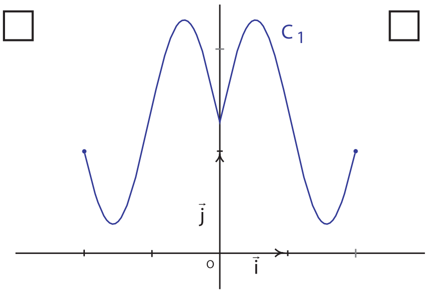
QCM

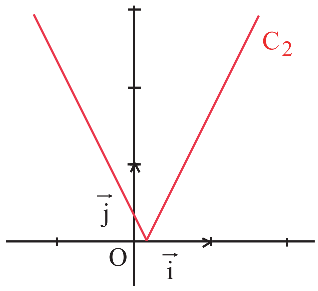
Cocher la réponse exacte.

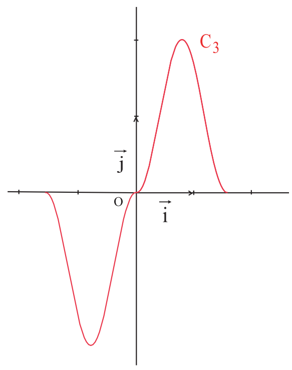
1. La fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x}{1+|x|}$

☐ est paire ☐ est impaire ☐ n'est ni paire, ni impaire.

2. Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Une des courbes suivantes ne représente ni une fonction paire ni une fonction impaire. Laquelle ?

☐ 

☐ 

☐ 

3. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^2+4}$.

☐ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$ ☐ n'est pas minorée sur $\mathbb{R}$ ☐ est bornée sur $\mathbb{R}$.

4. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{|4-2x|}$ est

☐ $]-\infty, 2]$ ☐ $[2, +\infty[$ ☐ $\mathbb{R}$.

5. L'ensemble de définition de la fonction $x \mapsto \dfrac{2x^3-1}{1-|x|}$ est

☐ $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ ☐ $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ☐ $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.

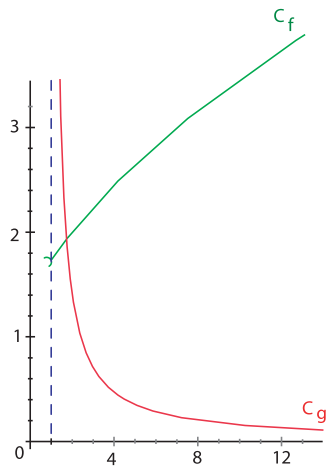
VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$, alors $f(0) = 0$.
2. Si f est bornée sur D, alors f admet un minimum sur D.
3. Si f admet un maximum sur D, alors f est bornée sur D.
4. Si f n'est pas bornée sur D, alors elle n'admet ni un minimum ni un maximum sur D.
5. Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$.
Si la restriction de f à $[1, 3]$ est bornée sur $[1, 3]$, alors f est bornée sur $[0, +\infty[$.

Mobiliser ses compétences

Situation



Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté les fonctions f et g définies sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+2}$ et $g(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{x-1}$.

1. Résoudre graphiquement l'équation f(x) = g(x).
2. On se propose de déterminer par le calcul la solution de l'équation f(x) = g(x).
   a. Vérifier que si α est une solution de l'équation f(x) = g(x), alors α est une solution de l'équation $(x-1)^2(x+2) = 2$.
   b. Résoudre l'équation $(x-1)^2(x+2) = 2$.
   c. En déduire la solution de l'équation f(x) = g(x).
3. Résoudre graphiquement les inéquations f(x) > g(x) et f(x) < g(x).
4. Représenter graphiquement la fonction h définie sur $]1, +\infty[$ par

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{x-1} & \text{si } x \in \,]1, \alpha], \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$$

Exercices et problèmes

Exercice 1

Déterminer l'ensemble de définition et étudier la parité de chacune des fonctions suivantes.

$f : x \mapsto \dfrac{x}{1+x^2}$; $g : x \mapsto \sqrt{x}$;

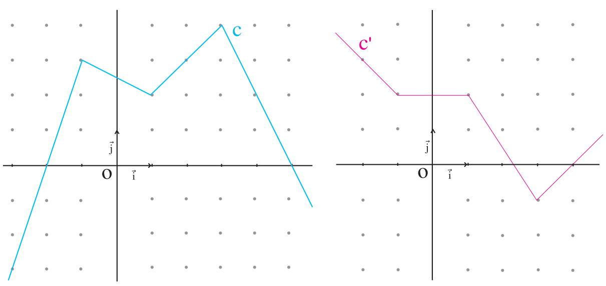
$h : x \mapsto \sqrt{|x|}$; $k : x \mapsto x^2 - x + 1$.

Exercice 2

Soit f et g deux fonctions définies sur un même ensemble D, a et b deux réels.
1. Que peut-on dire des fonctions fg et af+bg lorsque les fonctions f et g sont paires ?
2. Que peut-on dire des fonctions fg et af+bg lorsque les fonctions f et g sont impaires ?

Exercice 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On a tracé ci-dessous les courbes représentatives respectives C et C' des fonctions f et g.



Dans chacun des cas suivants préciser si f et g admettent un maximum ou un minimum sur I. Dans l'affirmative préciser leurs valeurs et en quel(s) réel(s) ils sont atteints.
a. I = [– 1, 1] ; b. I = [1, 3] ; c. I = [–2, 4].

Exercice 4

1. Déterminer le minimum sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous.

a. $f : x \mapsto 1 + |x| + 2x^2$.

b. $g : x \mapsto |x+1| - 4$.

2. Déterminer le maximum sur $\mathbb{R}$ des fonctions ci-dessous.

a. $h : x \mapsto \dfrac{1}{|x|+3} + 1$.

b. $k : x \mapsto \dfrac{2}{1+x^2} - 3$.

Exercice 5

1. Donner les variations sur]0, 1[de la fonction

$f : x \mapsto \left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}$.

2. En déduire celles de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2}{x^2 - x}$ sur]0, 1[.

3. Quel est le maximum de g sur]0, 1[?

Exercice 6

1. Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{x^2+1}$.

2. a. Montrer que pour tout réel x, $|2x| \leq x^2 + 1$.

b. Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction $x \mapsto \dfrac{x^2 - 2x}{x^2+1}$

Exercice 7

1. Majorer et minorer sur [0, +∞[la fonction

$x \mapsto \dfrac{1}{1+\sqrt{x}} - 2$.

2. Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction

$x \mapsto \dfrac{1}{1+(2+x)^2} + 1$.

3. Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction

$x \mapsto \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{2+x^2}}$.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit P, Q et R les trinômes définis par

$P(x) = 2x^2 - 5x - 3$; $Q(x) = -x^2 + 2x - 1$;

$R(x) = -2x^2 + x - 5$.

1. Déterminer les zéros éventuels de P, Q et R.
2. En déduire, pour chaque trinôme, la position relative de sa courbe représentative et de l'axe des abscisses.
3. Résoudre alors les inéquations $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$; $\dfrac{R(x)}{Q(x)} < 0$.

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Tracer la représentation graphique d'une fonction f qui a les caractéristiques suivantes
- la fonction f est définie sur [– 4, 4],
- la fonction f est paire,
- f(0) = 1,

• la fonction f est majorée par 5 sur [– 4, 4],
• la fonction f est croissante sur [0, 1] et décroissante sur [1 , 4],
• la restriction de f à [–4, 0] admet un minimum égal à –3.
A-t-on une unique fonction qui vérifie ces conditions ?

Exercice 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Tracer les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = |2x-1| - 3x$ et $g(x) = 2 - 2|x|$.

2. Résoudre graphiquement dans $\mathbb{R}$, l'inéquation

$|2x-1| + 2|x| > 3x + 2$.

Exercice 11

Soit f le trinôme défini sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 4x$.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Tracer C_f.
2. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^2 - 4|x|$.
a. Etudier la parité de g.
b. Vérifier que les restrictions de f et g à $[0, +\infty[$ sont égales.
c. Tracer alors C_g la courbe représentative de g.

Exercice 12

En utilisant des considérations sur la somme de fonctions, donner le sens de variation des fonctions suivantes.

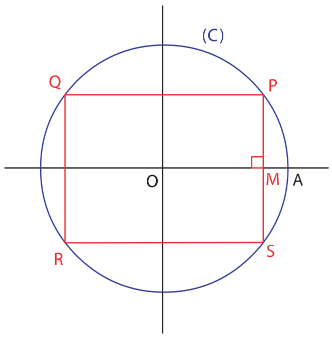
a. $f(x) = -\frac{1}{2}x + 3 + \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

b. $g(x) = x^2 + 1 + \sqrt{x}$ sur $]0, +\infty[$.

c. $h(x) = 1 - x^2 - \sqrt{x+3}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 13

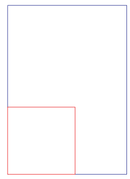
On considère la figure ci-dessous où (C) est un cercle de centre O et de rayon 1 et M est un point variable sur le segment [OA] distinct de O et de A. On note OM = x.



1. Exprimer l'aire S(x) du rectangle PQRS en fonction de x.
2. On désigne par S la fonction qui à x associe S(x).
a. Quel est l'ensemble de définition de S ?
b. Donner un majorant et un minorant de S.
3. a. Montrer que pour tout réel x, $4x^2(1-x^2) \leq 1$.
b. En déduire que la fonction S est majorée par 2.
4. Pour quelle valeur de x, le quadrilatère PQRS est-il un carré ?
Montrer que la fonction S admet un maximum en cette valeur.

Exercice 14

Dans une feuille rectangulaire de dimension 21cm x 30cm on découpe un carré suivant le schéma ci-dessous.
Avec ce carré on réalise un cylindre de révolution.



1. Quelle est la longueur du côté du plus grand carré que l'on puisse obtenir ?
Calculer le volume du cylindre que ce carré permet de réaliser ?
2. On découpe un carré de côté x.
a. A quel intervalle appartient x ?
b. Exprimer le volume V(x) du cylindre obtenu en fonction de x.
c. Déterminer une valeur approchée de x à 1cm près pour laquelle on obtient un cylindre de volume 400 cm^3.

Exercice 15

1. Soit la fonction $f : t \mapsto -20t^2 + 880t + 100$.
a. Etudier le signe de f.
b. Etudier les variations de f.
Le comptable d'une entreprise, créée en janvier 1995, estime que les bénéfices annuels bruts de l'entreprise sont de $B(t) = \sqrt{-20t^2 + 880t + 100}$ en milliers de dinars, t années après sa création.
On note B la fonction qui modélise la situation.
2. Quel est l'ensemble de définition de B ?
3. Donner une estimation des bénéfices annuels bruts en janvier 2000 ?
4. a. A partir des variations de la fonction f, déterminer celles de la fonction B.
b. En quelle année A_m les bénéfices annuels bruts atteindront-ils leur valeur maximale ? Donner une estimation de ce maximum ?
c. Quelles prédictions peut-on faire pour l'entreprise après l'année A_m ?

Exercice 16

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Tracer les représentations graphiques des fonctions f et g définies sur $[0, +\infty[$ par
$f(x) = \sqrt{x+1} - 1$ et $g(x) = 2x$.

2. Résoudre graphiquement sur $[0, +\infty[$, l'inéquation
$\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}} \le 2\sqrt{x}$.

Exercice 17

Soit f le trinôme défini par $f(x) = x^2 - 6x + 6$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Donner la forme canonique de f, c'est à dire trouver les réels a, b et c tels que pour tout réel x, $f(x) = a(x + b)^2 + c$.
2. Déterminer les variations de f.
3. Préciser par quelle transformation géométrique obtient-on la courbe C à partir de la parabole d'équation $y = x^2$.
4. Tracer la courbe C.
5. Résoudre graphiquement, puis par le calcul, les inéquations $f(x) \le 0$, $f(x) < 2$ et $f(x) \ge -4$.

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $[-2, +\infty[$ par
$f(x) = \sqrt{x+2} - 3$.
On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Déterminer les variations de f.
2. Préciser par quelle transformation géométrique obtient-on la courbe C_f à partir de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$.
On considère la fonction h définie sur $[-2, +\infty[$ par $h(x) = -\sqrt{x+2} + 3$ et on désigne par C_h sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Préciser la position relative de C_f et C_h.
3. Tracer C_f et C_h.
4. Soit Q le demi-plan d'inéquation $y \ge 0$ et C la courbe $(C_f \cup C_h) \cap Q$.

a. Mettre en évidence C sur un second graphique.
b. De quelle fonction k, C est-elle la représentation graphique ?

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel x différent de -3, $f(x) = \dfrac{a}{x+b} + c$.
2. Déterminer les variations de f .
3. Tracer la courbe C.
4. Déterminer graphiquement le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\dfrac{x-1}{x+3} = x^2 - 4$.

Exercice 20

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Résoudre graphiquement le système

$$S : \begin{cases} y = \dfrac{3}{x}, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

Exercice 21

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Résoudre graphiquement l'inéquation
$\dfrac{x-1}{x-3} \le 2$.

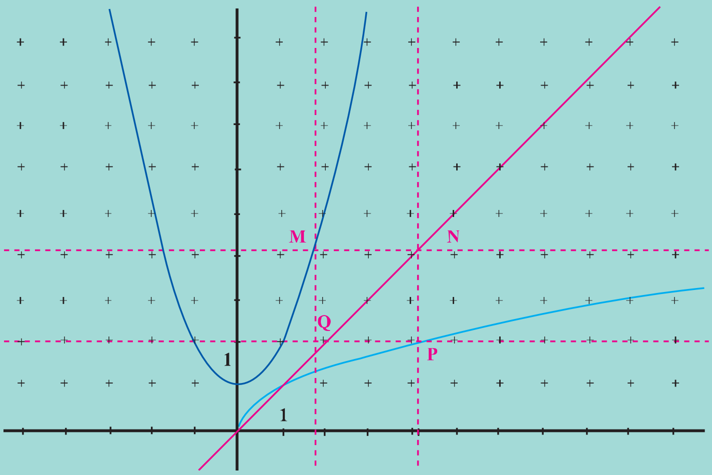
Exercice 22

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Résoudre graphiquement l'inéquation
$\sqrt{x-3} \le x^2$.

Avec l'ordinateur

On considère les fonctions f et g définies par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = \sqrt{x}$.
On désigne par C_f et C_g leurs représentations graphiques respectives dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit D la droite d'équation $y = x$.
On se propose dans cette séquence, de construire la courbe représentative de la fonction définie sur R par $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.

1. Ouvrir un nouveau fichier CABRI.
2. Montrer les axes, ainsi que la grille.
3. a. Afficher l'expression x ^ 2 + 1.
   b. Appliquer l'expression x ^ 2 + 1 (la courbe C_f est alors tracée).
4. a. Afficher l'expression $\sqrt{x}$ en tapant x ^ 0.5.
   b. Appliquer cette expression (la courbe Cg est alors tracée).
5. a. Afficher l'expression x.
   b. Appliquer cette expression (la droite D d'équation y = x est alors tracée).
6. Sélectionner un point sur C_f que l'on nommera M.
7. Construire le point N de D ayant la même ordonnée que celle de M.
   Expliquer la construction.
8. Construire le point P de Cg ayant la même abscisse que celle de N.
9. Construire le point Q tel que le quadrilatère MNPQ soit un rectangle.



10. Avec l'outil « Lieu », tracer le lieu des points Q lorsque M varie sur C_f.
    Montrer qu'une équation de ce lieu est $y = \sqrt{x^2 + 1}$.

Augustin Cauchy publia en 1821 ses *Cours d'analyse*, qui eurent très grande audience et constituèrent le premier exposé rigoureux sur les fonctions numériques. Rénovant l'analyse fonctionnelle, il formalise, en particulier, les notions de limite, de fonction et de continuité sur un intervalle.

Math – culture

Chapitre 2

Continuité

« Quelque fois on a besoin de dire des choses difficiles, mais on devrait tâcher de les dire aussi simplement que l'on peut. »

Hardy

Pour commencer

Activité 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes.

1) $|x-1| < \frac{1}{2}$; 2) $\left|x+\frac{1}{2}\right| < 0.1$; 3) $|x-2| > 0.2$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Représenter sur l'axe des ordonnées l'ensemble des réels y tels que $|y-2| < \frac{1}{2}$.
2. Représenter sur l'axe des abscisses l'ensemble des réels x tels que $|x+1| < 0.2$.
3. En déduire l'ensemble des points M(x, y) du plan tels que

$$\begin{cases} |x+1| < 0.2, \\ |y-2| < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer la parabole d'équation $y = x^2$.
2. a. Représenter l'ensemble des points M(x, y) de la courbe, tels que $y \in]0.5\ , 1.5[$.
   b. Déterminer graphiquement l'ensemble des abscisses de ces points.

Cours

1. Continuité en un réel

Activité 1

Soit f la fonction définie pour tout réel x par

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 & \text{si } x>1\ ,\\ 3 & \text{si } x=1\ ,\\ 3x & \text{si } x<1\ .\end{cases}$$

1. Représenter la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. a. Représenter sur l'axe des ordonnées, l'ensemble des réels y tels que $|y-3|<0.1$.

   b. En déduire graphiquement, une condition suffisante sur x pour que $|f(x)-3|<0.1$.

3. Donner graphiquement une condition suffisante sur x pour que $|f(x)-3|<0.01$.

L'activité précédente suggère que f(x) peut être rendu aussi proche que l'on veut de f(1), dès que x est suffisamment proche de 1.
On dit que f est continue en 1.

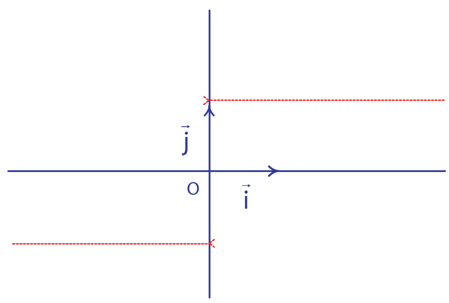
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
On dit que la fonction f est continue en a si pour tout nombre $\beta > 0$, il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $|x-a| < \alpha$, alors $|f(x)-f(a)| < \beta$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a représenté la fonction f définie par

$$f(x)=\begin{cases}1 & \text{si} \quad x>0\ ,\\ 0 & \text{si} \quad x=0\ ,\\ -1 & \text{si} \quad x<0\ .\end{cases}$$



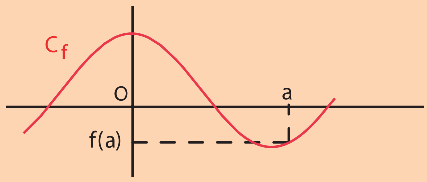
1. Reproduire la figure.
2. Calculer $|f(x)-f(0)|$.
3. Peut-on rendre la quantité $|f(x)-f(0)|$ aussi petite que l'on veut, en rapprochant x de 0 ?

L'activité précédente illustre le cas d'une fonction non continue en 0.

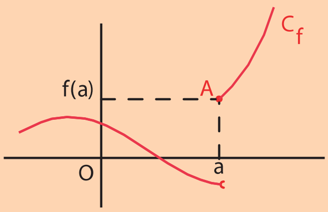
Vocabulaire

Une fonction non continue en a est dite discontinue en a.

Conséquence



Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I, met en évidence un tracé continu de la courbe la fonction f est continue en tout réel a de I.



Lorsque la représentation graphique de f sur un intervalle ouvert I met en évidence un saut du tracé de part et d'autre du point A (a, f(a)), la fonction f est discontinue en a.

2. Continuité de certaines fonctions usuelles

Activité 1

Dans chacun des cas ci-dessous, représenter la fonction et vérifier, en utilisant le graphique, qu'elle est continue en a.

a. La fonction $x \mapsto \sqrt{3}$; $a = -0.5$.
b. La fonction $x \mapsto 2x$; $a = -1$.
c. La fonction $x \mapsto |x|$; $a = -3$.
d. La fonction $x \mapsto -3x + 4$; $a = 2$.

Le théorème suivant concerne la continuité de certaines fonctions usuelles, déjà rencontrées dans les années précédentes.

Théorème (admis)

Toute fonction constante est continue en tout réel a.
La fonction $x \mapsto x$ est continue en tout réel a.
Toute fonction linéaire est continue en tout réel a.
Toute fonction affine est continue en tout réel a.
La fonction $x \mapsto x^2$ est continue en tout réel a.
La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue en tout réel non nul a.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en tout réel strictement positif a.
Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
Toute fonction rationnelle est continue en tout réel où elle est définie.

Activité 2

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a.

1. $f(x) = -2x^3 + 4x^2 - 1$; $a = 0$.
2. $f(x) = x^{30} - 3(x^2 + 2x + 1)^2 + \frac{1}{100}$; $a = \sqrt{2}$.

1. $f(x)=\dfrac{1}{-2x\ +1}$; $a = 0.3$.

2. $f(x)=\dfrac{x^3-1}{(-x^2+3)^2}$; $a = 1$.

3. Continuité de la fonction |f|

Activité 1

1 Montrer que pour tous réels c et d, on a $\left||c|-|d|\right| \leq |c-d|$.

2. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.
   Montrer que si f est continue en a, alors |f| est continue en a.

On a donc obtenu le théorème ci-dessous.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f est continue en a, alors $|f|$ est continue en a.

Activité 2

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a.

1. $f : x \mapsto |2x - 1|$; $a = -3$.

2. $f : x \mapsto \dfrac{1}{|x|}$; $a = 2$.

3. $f : x \mapsto \left|\dfrac{x^3-x+1}{x-1}\right|$; $a = 1986$.

4. Opérations algébriques sur les fonctions continues

Le théorème ci-dessous que nous admettrons, concerne la somme, le produit et le quotient de fonctions continues en un réel.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I. Soit a un réel de I et k un réel.
Si f et g sont continues en a alors les fonctions f + g, fg et kf sont continues en a.
Si f est continue en a et si $f(a) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{1}{f}$ est continue en a.
Si f et g sont continues en a et si $g(a) \neq 0$ alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.

Activité 1

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a.

1. $f(x)=x^2-\dfrac{1}{x}+|x|$; $a=-\dfrac{3}{2}$.

2. $f(x)=\dfrac{|x|}{x^2+1}$; $a=-1$.

3. $f(x)=\dfrac{|x|(x-5)}{(x^2+1)(x-3)}$; $a=0.31$.

5. Continuité de la fonction $\sqrt{f}$

Activité 1

1. Représenter la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$, dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. a. Montrer que $\sqrt{1+x}-\sqrt{2}=\dfrac{x-1}{\sqrt{1+x}+\sqrt{2}}$.

   b. En déduire que $\left|\sqrt{1+x}-\sqrt{2}\right| \le \dfrac{|x-1|}{\sqrt{2}}$.

   c. La fonction f est-elle continue en 1 ?

Activité 2

Soit f une fonction positive sur un intervalle ouvert I. Soit a un réel de I tel que f soit continue en a.

1. On suppose que $f(a)>0$.

   a. Montrer que pour tout réel x de I, $\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}=\dfrac{f(x)-f(a)}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{f(a)}}$.

   b. En déduire que pour tout réel x de I, $\left|\sqrt{f(x)}-\sqrt{f(a)}\right| \le \dfrac{|f(x)-f(a)|}{\sqrt{f(a)}}$.

   c. En déduire que $\sqrt{f}$ est continue en a.

2. On suppose que $f(a)=0$.

   a. Ecrire la définition de la continuité de f en a.

   b. En déduire que $\sqrt{f}$ est continue en a.

On a donc obtenu le théorème ci-dessous.

Théorème

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f est continue en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

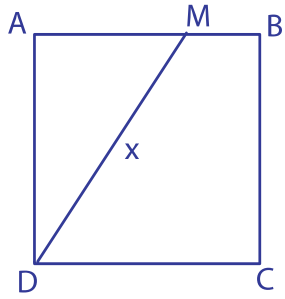
Activité 3

Dans chacun des cas suivants, étudier la continuité de la fonction f en a.

1. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+1}}$; $a=3$. 2. $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-2x+1}{x+1}}$; $a=1$. 3. $f(x)=\sqrt{\dfrac{|x-3|}{x+2}}$; $a=2$.

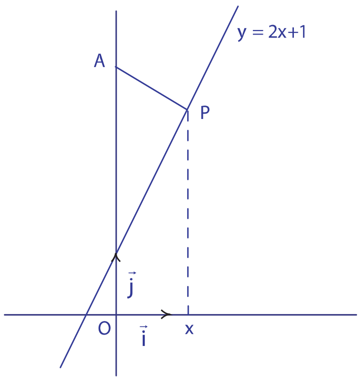
Activité 4

Dans la figure ci-contre ABCD est un carré de côté 1, M est un point du segment [AB], distinct de A et B et tel que DM = x.
On désigne par f la fonction $x \mapsto AM$.
1. Donner l'ensemble de définition I de f.
2. Montrer que f est continue en tout point de I.



Activité 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on on considère la droite D d'équation $y = 2x + 1$ et le point A(0, 4).
A tout réel x, on associe le point P appartenant à la droite D, d'abscisse x.
1. Calculer AP en fonction de x.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par f(x) = AP.
   a. Montrer que la fonction f est continue pour tout réel x.
   b. Montrer que la fonction f admet un minimum sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera.



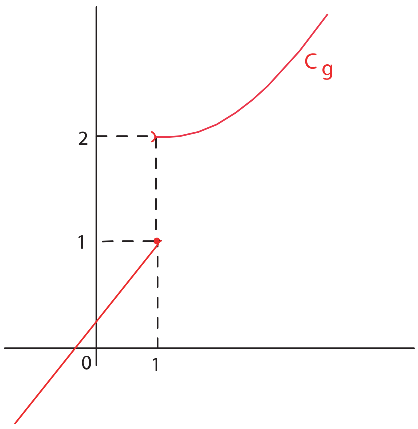
6. Continuité à droite. Continuité à gauche

Activité 1

Soit f la restriction à l'intervalle]0, 3[de la fonction partie entière $x \mapsto E(x)$.
1. Représenter graphiquement f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. La fonction f est-elle continue en 2 ? Justifier graphiquement.
3. Que peut-on dire de $|E(x) - 2|$, lorsque que x est suffisamment proche de 2 en restant supérieur à 2 ?
4. Que peut-on dire de $|E(x) - 2|$ lorsque x se rapproche de 2 en restant inférieur à 2 ?

Activité 2

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a représenté ci-contre, une fonction g définie sur $\mathbb{R}$.
1 La fonction g est-elle continue en 1 ?
2. Déterminer graphiquement g(1).
3. Donner graphiquement une condition suffisante sur les réels x inférieurs à1, pour que $|g(x) - g(1)| \leq 0.1$.
4. Que peut-on conjecturer sur $|g(x) - g(1)|$ lorsque x se rapproche de 1 en restant supérieur à 1 ?



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
On dit que la fonction f est continue à droite en a si, pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 \leq x - a < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$.

On dit que la fonction f est continue à gauche en a si, pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 \leq a - x < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$.

Le théorème qui suit, établit le lien entre la continuité en un réel a et la continuité à droite et à gauche en a et se déduit des définitions.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant a.
f est continue en a, si et seulement si, f est continue à droite et à gauche en a.

Activité 3

1. Soit la fonction $f : x \mapsto |x^2 + x|$. Etudier la continuité à droite (respectivement à gauche) de f en -1.

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x^2 + 4}$. Etudier la continuité à droite de f en 2.

3. Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\dfrac{5x^3 - 2}{x + 1}}$. Etudier la continuité à gauche de f en 3.

Activité 4

Soit f la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.
1. Représenter graphiquement f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Montrer que f est continue à droite en 0.

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I et a un réel de I.
- Si f est continue à droite en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue à droite en a.
- Si f est continue à gauche en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue à gauche en a.

Activité 5

1. Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-2x+1}$. Justifier que f est continue à gauche en 0.5.

2. Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{(3x+5)(1-x)}$. Justifier que f est continue à droite en $-\dfrac{5}{3}$.

7. Continuité sur un intervalle

Définition

- Soit a et b finis ou infinis.
  Une fonction définie sur un intervalle]a, b[est dite continue sur]a,b[si elle est continue en tout réel de]a, b[.
- Soit a fini ou infini et b un réel.
  Une fonction définie sur un intervalle]a, b] est dite continue sur]a,b] si elle est continue sur]a, b[et continue à gauche en b.
- Soit a un réel et b fini ou infini.
  Une fonction définie sur un intervalle [a, b[est dite continue sur [a,b[si elle est continue sur]a, b[et continue à droite en a.
- Soit a et b deux réels.
  Une fonction définie sur un intervalle [a, b] est dite continue sur [a,b] si elle est continue sur]a, b[, continue à droite en a et continue à gauche en b.

Conséquence

Si une fonction est continue sur un intervalle I, alors elle est continue sur tout intervalle inclus dans I.

Conséquence

Toute fonction polynôme est continue sur tout intervalle contenu dans $\mathbb{R}$.
Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle contenu dans son ensemble de définition.

Activité 1

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$, telle que
- $g(x) = (x-1)^2 + 0.5$ si $x \geq 1$,
- la restriction de g à $]-\infty, 1[$ est une fonction linéaire,
- la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$.

1. Représenter la fonction g dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Donner l'expression de g(x) pour tout x de $\mathbb{R}$.

Activité 2

Justifier les affirmations suivantes.

1. La fonction $x \mapsto |x|+1$ est continue sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \mapsto \sqrt{x+1}$ est continue sur [0,1].
3. La fonction $x \mapsto -3x+5$ est continue sur l'intervalle $]-0.1\ , 10]$.
4. La fonction $x \mapsto \dfrac{2x+3}{x-1}$ est continue sur l'intervalle $[-1, 0]$.

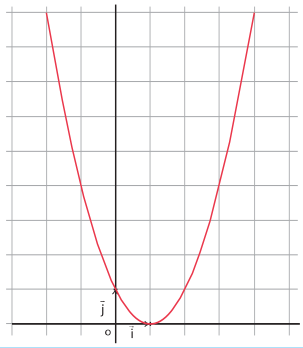
5. La fonction $x \mapsto \sqrt{-2x+1}$ est continue sur l'intervalle $]-0.1, 0.3]$.

6. La fonction $x \mapsto \sqrt{-3x+6}$ est continue sur $]-\infty, 2]$.

7. La fonction $x \mapsto \dfrac{2x+1}{x-2}$ est continue sur $]-2, 0[$.

8. Image d'un intervalle par une fonction continue

Activité 1

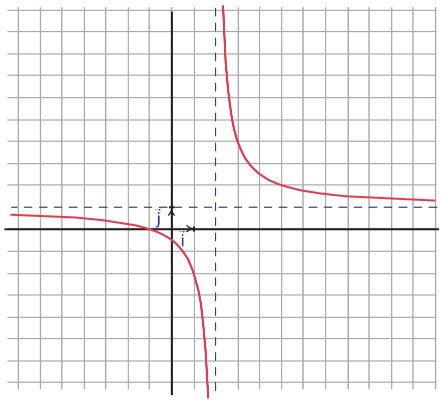


On a représenté ci-contre la fonction $f : x \mapsto (x-1)^2$.

1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. Reproduire le graphique ci-contre et représenter chacun des ensembles de réels suivants :
   $f([2,+\infty[)$; $f(]-0.2,0])$; $\{f(x) ; -0.5 \leq x \text{ et } x \neq 2\}$.
   Lequel de ces ensembles n'est pas un intervalle ?
3. Montrer que $f([3, 4]) = [4, 9]$.
4. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 5$.

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et A une partie de D. L'ensemble des réels f(x) tels que x appartient à A est noté f(A).
On écrit alors $f(A) = \{f(x) \ ; \ x \in A\}$.

Activité 2



On a représenté ci-contre la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$.

1. Justifier la continuité de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2,+\infty[$.
2. Reproduire le graphique ci-contre et représenter les ensembles ci-dessous.
   a. $f(]-1, 2[)$.   b. $f(]-3, 5[\setminus \{2\})$.

Activité 3

1. Représenter dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x < 0, \\ 3 & \text{si } x = 0, \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

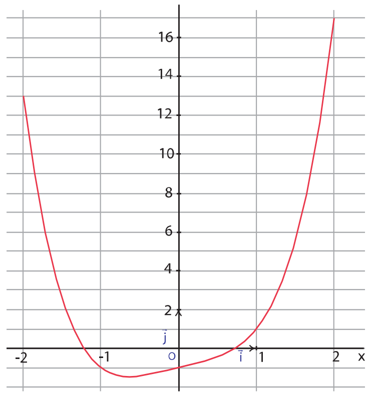
2. Montrer graphiquement que f n'est pas continue en 0.
3. Déterminer $f(\mathbb{R})$. Cet ensemble est-il un intervalle ?
4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ ne possède pas de solution.
5. Que peut-on dire de l'équation $f(x) = a$; $a \neq 0$?

Théorème (admis)

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

9. Résolution d'équations de la forme f(x) = k

Activité 1



On a représenté dans le graphique ci-contre la fonction $x \mapsto x^4 + x - 1$.
Donner un encadrement d'amplitude 0.5 des solutions de chacune des équations f(x) = 2 ; f(x) = 8.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x^3 - 3$.
1. Montrer que f est croissante sur $[0, +\infty[$.
2. Déterminer l'intervalle f([0, 2]).
3. En déduire que l'équation $x^3 - 3 = 0$ possède une solution dans l'intervalle [0, 2].

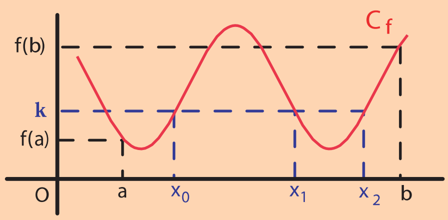
Activité 3

1. a. Représenter les fonctions $f : x \mapsto 5\sqrt{x}$ et $g : x \mapsto x^2 + 1$.
   b. Résoudre graphiquement l'équation (E): $5\sqrt{x} - x^2 - 1 = 0$.
   c. Donner un encadrement d'amplitude 0.1 de la solution de l'équation (E).
2. On considère la fonction $h : x \mapsto 5\sqrt{x} - x^2 - 1$.
   a. Calculer h(0) et h(1).
   b. Justifier que 0 appartient à l'intervalle h([0, 1]).
   c. En déduire que l'équation (E) possède au moins une solution dans l'intervalle [0, 1].

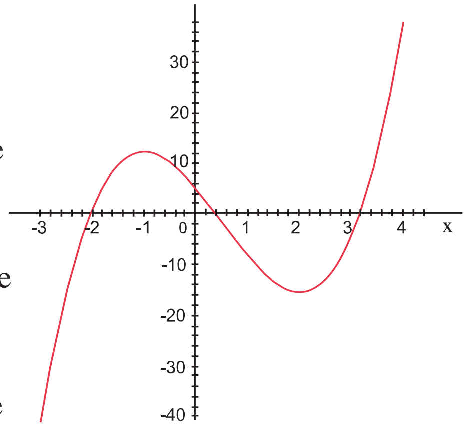
Le théorème suivant, que nous admettons, nous donne une condition suffisante pour qu'une équation de la forme f(x) = k possède une solution.

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I.
Soit a et b deux réels de I tels que a < b.
Pour tout réel k compris entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = k possède au moins une solution dans l'intervalle [a, b].



Activité 4



Dans le plan muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

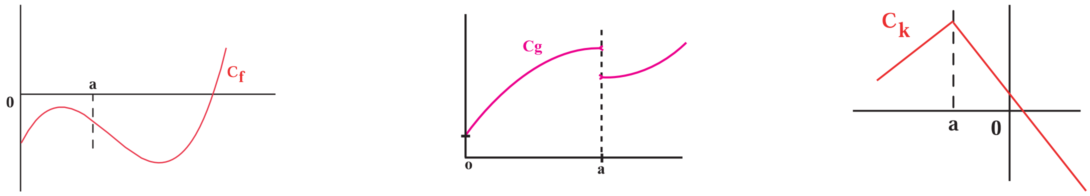
1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Calculer $f(-3)$ et $f(-2)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3, -2]$.
   b. Calculer $f(0)$ et $f(1)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[0, 1]$.
   c. Calculer $f(3)$ et $f(4)$. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[3, 4]$.
   d. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions réelles distinctes.
3. On désigne par α la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[0, 1]$.
   a. Donner une valeur approchée à l'unité près par défaut de α .
   b. Calculer $f(0.1)$, $f(0.2)$, $f(0.3)$, $f(0.4)$, $f(0.5)$, $f(0.6)$, $f(0.7)$, $f(0.8)$, $f(0.9)$.
   et en déduire une valeur approchée à 0.1 près par défaut de α .
   c. Donner une valeur approchée à 0.01 près par défaut de α .
4. On désigne par β la solution de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $[-3, -2]$.
   Donner une valeur approchée, à 0.1 près par défaut, de β.
5. On désigne par λ la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[3, 4]$.
   Donner une valeur approchée, à 0.1 près par excès, de λ.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, C_f, C_g et C_k sont les courbes représentatives de trois fonctions f, g et k.



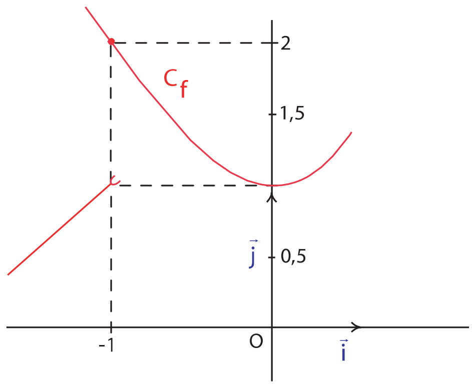
Une seulement parmi ces fonctions est discontinue en a, laquelle ?

☐ f ☐ g ☐ h.

2. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ est continue en

☐ 0 ☐ –2 ☐ $-\frac{1}{2}$.

3. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
C_f est la courbe représentative de la fonction f.
Alors f est continue



☐ en –1 ☐ à droite en –1 ☐ à gauche en –1.

4. L'équation $4\sqrt{x+1} - x^2 - 3 = 0$ possède une solution dans

☐ [0, 1] ☐ [–1, 0] ☐ [2, 3].

5. La fonction $E : x \mapsto E(x)$ est continue sur

☐ [1, 2[☐ [1, 2] ☐]1, 2].

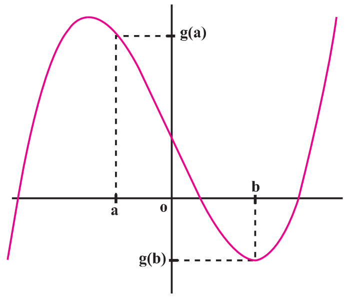
VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f est continue en a, alors f est continue à droite en a.
2. Si f n'est pas continue en a, alors f n'est pas continue à droite en a.
3. Si f n'est pas continue à gauche en a, alors f n'est pas continue à droite en a.
4. f n'est pas continue en a, si et seulement si, f n'est pas continue à droite en a ou à gauche en a.
5. Si $|f|$ est continue en a alors f est continue en a.

Mobiliser ses compétences

Situation 1



Le plan est muni d'un repère $(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$.
On a représenté ci-contre la courbe représentative d'une fonction g définie sur un intervalle ouvert.

1. Soit un réel a tel que la fonction g est continue en a et $g(a) > 0$.
   a. Représenter l'ensemble des points $M(x, g(x))$ tels que $\frac{1}{2}g(a) < g(x) < \frac{3}{2}g(a)$.
   b. Montrer qu'il existe un intervalle $]a-h, a+h[$ tel que
   pour tout $x \in\ ]a-h, a+h[$, on a $g(x) \in \left]\frac{1}{2}g(a),\ \frac{3}{2}g(a)\right[$.
   c. En déduire que la fonction g reste strictement positive sur cet intervalle.
2. Soit un réel b tel que la fonction g est continue en b et $g(b) < 0$.
   Montrer qu' il existe un intervalle $]b-h, b+h[$ sur lequel g reste strictement négative.

Situation 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^3 - 10x^2 - 8x + 10$.

1. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans chacun des intervalles $[-2, -1]$, $[0, 1]$ et $[2, 3]$.
   b. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement trois solutions distinctes.
2. Soit α la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0, 1]$.
   On se propose de donner encadrement plus précis de α.
   a. Calculer $f\left(\frac{1}{2}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{1}{2},\ 1\right]$.
   b. Calculer $f\left(\frac{3}{4}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{3}{4},\ 1\right]$.
   c. Calculer $f\left(\frac{7}{8}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{3}{4},\ \frac{7}{8}\right]$.
   d. Calculer $f\left(\frac{13}{16}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{3}{4},\ \frac{13}{16}\right]$.
   e. Calculer $f\left(\frac{25}{32}\right)$ et en déduire que $\alpha \in \left[\frac{25}{32},\ \frac{13}{16}\right]$.
3. Soit β la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[-2, -1]$.
   Déterminer un intervalle de longueur 0.04 contenant β.
4. Soit λ la solution de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[2, 3]$.
   Déterminer un intervalle de longueur 0.04 contenant λ.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a.

$f(x)=\sqrt{3}x^8-\sqrt{2}x^3+3x+1$; $a=-\sqrt{3}$.

$f(x)=\dfrac{2x^5-2x+1}{x^3-x+1}$; $a=0.2$.

$f(x)=\sqrt{6}(2x-5)^3$; $a=-2.8$.

$f(x)=2x^4-3x(x+1)+5x^5-4$; $a=-\sqrt{3}$.

$f(x)=\dfrac{x}{10^2}-10x^4+\sqrt{3}x-1$; $a=-1000500$.

$f(x)=\dfrac{-10^{-3}x^4+2}{3x+10}$; $a=-\dfrac{1}{2}$.

$f(x)=\dfrac{x-5}{x^4+10x^2+3}$; $a=-0.000251$.

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a.

$f(x)=\dfrac{-|x|+5}{(x-10)^4}$; $a=201$.

$f(x)=\left|\dfrac{x^2-8}{2x+1}\right|$; $a=2$.

$f(x)=\dfrac{|x-1||x+2|}{x-2}$; $a=51$.

$f(x)=\dfrac{|x|}{4}-|x|^3-5\left|x^5\right|$; $a=11$.

$f(x)=\dfrac{|x|^3+2}{|x|-2}$; $a=-5$.

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, justifier la continuité de la fonction f en a.

$f(x)=\sqrt{3x+5}$; $a=\dfrac{2}{3}$.

$f(x)=\sqrt{-2x+3}$; $a=0.01$.

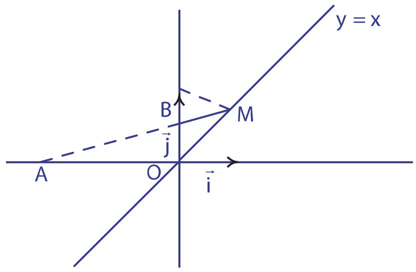
$f(x)=\sqrt{4x^2+x+1}$; $a=1.25$.

$f(x)=(x-4)\sqrt{2x^2+3x+5}$; $a=10$.

$f(x)=\sqrt{x^2+3}-5\dfrac{x^2+2x+2}{x^4+5x+3}$; $a=-1$.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$. Dans la figure ci-dessous, les points A(–2, 0) et B(0, 1) sont fixés et le point M d'abscisse x, varie sur la droite d'équation y = x.



Soit la fonction $f : x \mapsto AM+BM$.
1. Donner l'expression de f(x).
2. Justifier que f est continue en tout réel .
3. Déterminer x, pour que le trajet AM+BM soit minimal.

Exercice 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x-4} & \text{si } x\geq 2,\\ x & \text{si } x<2.\end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2. Justifier la continuité de la fonction f sur $[2,+\infty[$.
3. Justifier la continuité de la fonction f sur $]-\infty,2[$.
4. Vérifier, à l'aide du graphique, que la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{si } x>0,\\ -1 & \text{si } x\leq 0.\end{cases}$$

1. Tracer la courbe représentative de f dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.
2. Justifier la continuité de la fonction f sur $]0,+\infty[$.
3. Justifier la continuité de la fonction f sur $]-\infty,0[$.

4. Vérifier, à l'aide du graphique, que la fonction f n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

5. Pour chacune des équations ci-dessous, déterminer, à l'aide du graphique, le nombre de solutions de l'équation.

$f(x)=1$; $f(x)=\frac{2}{5}$; $f(x)=-\frac{1}{2}$; $f(x)=0.$

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que

- la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$,
- f est impaire,
- $f(x) = -x^2 + 3$ si $x \geq 2$,
- la restriction de f à $]-2, 0[$ est une fonction affine.

1. Représenter la fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Donner l'expression de f(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 8

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x}{2x - |x+1|}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.

Exercice 9

Soit f le trinôme défini par $f(x)=\frac{1}{2}x^2+5$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer la courbe C.
2. Quelles sont les images par f de 2 ; -2 ; 0 ; $\sqrt{3}$ et $-\sqrt{2}$?
3. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [1, 3]$, $J =]-2, 2[$ et $K =]-\infty, 0]$?
4. Quels sont les antécédents éventuels par f de 0, 7 et 9 ?
5. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[7, 13]$.

Exercice 10

Soit f le trinôme défini par $f(x) = x^2 - 4x + 1$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer la courbe C.
2. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [2, 3]$, $J = [0, 3]$ et $K = [0, +\infty[$?
3. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[-2, 6]$.

Exercice 11

Soit $f : x \mapsto \sqrt{x+3} - 2$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Tracer la courbe C.
3. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [2, 3]$, $J = [0, 5]$ et $K =]-1, +\infty[$.
4. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $[-1, +\infty[$.

Exercice 12

Soit $f : x \mapsto -\dfrac{2}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2. Tracer la courbe C.
3. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [2, 4]$, $J = [-1, 0]$ et $K =]-\infty, -3[$?
4. Déterminer l'ensemble des antécédents par f des réels de l'intervalle $]-\infty, 0[$.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [1, 3]$, $J = [2, 5]$ et $K =]-6, -1]$?

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 - 3x$.

1. Etudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Quelles sont les images par f des intervalles $I = [2, 3]$, $J = [-5, -3]$ et $K =]3, 4]$?

Exercice 15

Soit $f : x \mapsto -\frac{1}{2}x + \sqrt{2x-1}$.

1.Déterminer l'ensemble de définition de f.

2.Etudier la continuité de f sur son ensemble de définition.

3.Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution α dans $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

4.Donner une valeur approchée par défaut à 0.1 près de α.

Exercice 16

Soit f : $x \mapsto x^3 + 4x + 1$.
1. Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution α dans $[-1, 0]$.
3. Donner une valeur approchée par défaut à 0.1 près de α.

Exercice 17

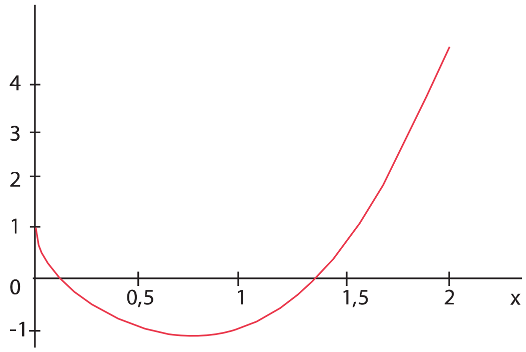
Soit f : $x \mapsto -2x^3 - 7x + 4$.
1. Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution α dans $[0, 1]$.
3. Donner une valeur approchée par défaut à 0.1 près de α.

Exercice 18

Soit f : $x \mapsto -2x^3 + 2x + 10$.
1. Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet une solution α dans $[1, 2]$.
3. Donner une valeur approchée par défaut à 0.1 près de α.

Exercice 19

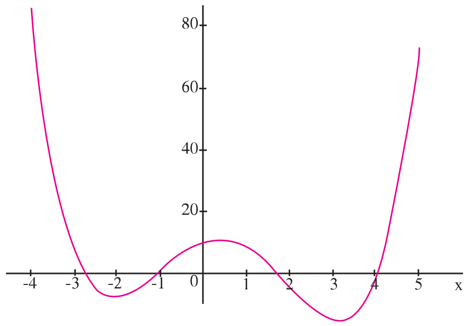
1. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = x^3 - 3\sqrt{x} + 1$.



1. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation f(x) = 0.
2. Déterminer graphiquement une valeur approchée à 0.5 près de chacune des solutions de l'équation f(x) = 0.
3. Donner une valeur approchée à 0.1 près par défaut de chacune de ces solutions.

Exercice 20

Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \frac{1}{2}x^4 - x^3 - 6x^2 + 5x + 10$.



1. Justifier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer f(–3) et f(– 2). En déduire que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle $[-3, -2]$.
3. Calculer f(–1.5) et f(– 1). En déduire que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle $[-1.5, -1]$.
4. Calculer f(1) et f(2). En déduire que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle $[1, 2]$.
5. Calculer f(4) et f(4.5). En déduire que l'équation f(x) = 0 admet au moins une solution dans l'intervalle $[4, 4.5]$.
6. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ exactement quatre solutions distinctes.
7. Donner une valeur rapprochée à 0.1 près par défaut de chacune des solutions de l'équation f(x) = 0.

Avec l'ordinateur

Soit f la fonction définie sur l'intervalle [1, 2] par $f(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.
On considère l'équation (E) : f(x) = 0. Comme f(1).f(2) < 0, il existe au moins une solution α dans [1, 2] de l'équation (E).
Le but de la séquence, est de donner un encadrement de la racine α en utilisant la dichotomie.

I20

	A	B	C	D	E	F
1	Dichotomie			α =	1,83928657	
2	f(x)=	x^3-x^2-x-1			Epsilon=	0,0001
3	a	m	b	f(a)	f(m)	f(b)
4	1	1,5	2	-2	-1,375	1
5	1,5	1,75	2	-1,375	-0,453125	1
6	1,75	1,875	2	-0,453125	0,20117188	1
7	1,75	1,8125	1,875	-0,453125	-0,14331055	0,20117188
8	1,8125	1,84375	1,875	-0,14331055	0,02450562	0,20117188
9	1,8125	1,828125	1,84375	-0,14331055	-0,06049728	0,02450562
10	1,828125	1,8359375	1,84375	-0,06049728	-0,01827097	0,02450562
11	1,8359375	1,83984375	1,84375	-0,01827097	0,00304836	0,02450562
12	1,8359375	1,837890625	1,83984375	-0,01827097	-0,00762852	0,00304836
13	1,83789063	1,838867188	1,83984375	-0,00762852	-0,00229439	0,00304836
14	1,83886719	1,839355469	1,83984375	-0,00229439	0,00037591	0,00304836
15	1,83886719	1,839111328	1,839355469	-0,00229439	-0,00095951	0,00037591
16	1,83911133	1,839233398	1,839355469	-0,00095951	-0,00029187	0,00037591
17	1,8392334	1,839294434	1,839355469	-0,00029187	4,2004E-05	0,00037591
18	1,8392334	1,839263916	1,839294434	-0,00029187	-0,00012494	4,2004E-05
19	1,83926392	1,839279175	1,839294434	-0,00012494	-4,1467E-05	4,2004E-05
20	1,83927917	1,839286804	1,839294434	-4,1467E-05	2,6797E-07	4,2004E-05
21	1,83927917	1,83928299	1,839286804	-4,1467E-05	-2,06E-05	2,6797E-07
22	1,83928299	1,839284897	1,839286804	-2,06E-05	-1,0166E-05	2,6797E-07
23	1,8392849	1,839285851	1,839286804	-1,0166E-05	-4,949E-06	2,6797E-07
24	1,83928585	1,839286327	1,839286804	-4,949E-06	-2,3405E-06	2,6797E-07
25	1,83928633	1,839286566	1,839286804	-2,3405E-06	-1,0363E-06	2,6797E-07
26						

Après avoir tapé a, m, b, f(a), f(m) et f(b) respectivement dans les cellules A2, B2, C2, D2, E2 et F2, on donne la valeur 1 au réel a et 2 au réel b.

- Dans la cellule B4, on inscrit la formule : =(A4+C4)/2.
- Dans la cellule D4, on écrit la formule : =A4^3-A4^2-A4-1.
- Dans la cellule F4, on écrit la formule : =C4^3-C4^2-C4-1.
- Dans la cellule E4, on écrit la formule : =B4^3-B4^2-B4-1.
- Dans la cellule A5, on écrit la formule : =Si(D4*E4<=0;A4;B4) pour exprimer que si $f(a).f(m) \leq 0$, la borne « a » ne changera pas de valeur, sinon elle prendra pour valeur celle de B4.
- Dans la cellule C5, on écrit la formule : =Si(D4*E4<=0;B4;C4) pour exprimer que si $f(a).f(m) \leq 0$, la borne « b » prendra pour valeur celle de B4, sinon elle ne changera pas de valeur.
- Enfin, sélectionner la plage A5 : F5 et la recopier vers le bas.
- Dans la cellule B25, on trouve une valeur approchée de α.

Lorsque nous lisons, nous n'apercevons qu'un seul point du livre sur toute demi-droite issue de notre œil.
La distance de notre œil à ce point est une fonction, par exemple de l'angle avec l'horizontale. Cette fonction, contrairement à ce que notre intuition suggère, n'est pas continue. Une infirme variation de l'angle peut engendrer un saut qui mesure, par exemple, la distance entre le bord du livre et tout objet opaque situé derrière le livre.

Chapitre 3

Limites et Continuité

« Tout le monde veut vivre au sommet de la montagne, sans soupçonner que le vrai bonheur est dans la manière de gravir la pente. »

Marquez

Pour commencer

Activité 1

Déterminer l'ensemble de définition et représenter la fonction $f : x \mapsto \dfrac{|x|}{x}$.

Activité 2

Déterminer l'ensemble de définition et représenter la fonction g telle que

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x} \text{ si } x<1 , \\ 2x-1 \text{ si } x\geq 1 . \end{cases}$$

Activité 3

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

   a. $0<|y+2|<\dfrac{1}{2}$.

   b. $0<|x-1|<0.2$.

2. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Représenter l'ensemble des points M(x, y) tels que

$$\begin{cases} 0<|x-1|<0.2 , \\ 0<|y+2|<\dfrac{1}{2} . \end{cases}$$

Cours

1. Limite finie en un réel

Activité 1

On considère la fonction f définie, pour tout réel x distinct de 1, par $f(x)=\dfrac{(x-1)^2}{|x-1|}+2$.

La fonction f n'étant pas définie en 1, nous nous intéressons dans cette activité aux réels f(x), lorsque x est proche de 1.

1. Recopier et compléter le tableau suivant.

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
f(x)						

Que peut-on conjecturer sur f(x) lorsque x se rapproche de 1 ?

2. a. Donner l'expression de f(x), sans valeur absolue.
   b. Représenter f dans un repère orthonormé.
3. Déterminer graphiquement une condition suffisante sur x pour que f(x) appartienne à $]1.9\ ,\ 2.1[$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I.
On dit que f(x) tend vers le réel L lorsque x tend vers a, si pour tout $\beta>0$, il existe $\alpha>0$ tel que si x appartient à I et $0<|x-a|<\alpha$, alors $|f(x)-L|<\beta$.

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, sauf peut-être en un réel a de I.
Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

Notation et vocabulaire

Si f(x) tend vers L lorsque x tend vers a, on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ ou $\lim\limits_{a} f=L$ et on dit que f admet pour limite L en a.

2. Limite en un réel a d'une fonction continue en a.

Activité 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

1. On suppose que f est continue en a.
   a. Ecrire la définition de la continuité de f en a.
   b. En déduire que f admet une limite en a, que l'on déterminera.
2. On suppose que f admet pour limite en a le réel f(a).
   Montrer que f est continue en a.

On a donc obtenu le théorème ci-dessous.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
f est continue en a, si et seulement si, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a.

1. $f(x) = 2x^3 - 4x + 1$; $a = 2$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2 + 5x}{x - 1}$; $a = -2$.
3. $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$; $a = 1$.

3. Calcul de limites

Activité 1

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = |x|$.

1. Ecrire la définition de la continuité de g en 0.
2. Soit f la fonction définie pour tout réel non nul x, par $f(x) = \dfrac{x^2}{|x|}$.
   a. Montrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq 0$.
   b. En déduire que f admet une limite en 0, que l'on déterminera.

Activité 2

Soit g une fonction définie sur un intervalle ouvert I et continue en un réel a de I.

1. Ecrire la définition de la continuité de g en a.
2. Soit f une fonction définie sur I, sauf peut-être en a et telle que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \neq a$.
   Montrer que f admet une limite en a, que l'on déterminera.

On a donc obtenu le théorème ci-dessous.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I et soit g une fonction définie sur l'intervalle I.
Si g est continue en a et si $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$.

Activité 3

1. On considère les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x^3 + 1}{x + 1}$ et $g : x \mapsto x^2 - x + 1$.
   a. Déterminer l'ensemble de définition de f ainsi que celui de g.
   b. Montrer que $f(x) = g(x)$, pour tout $x \neq -1$.
   c. En déduire $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$.

2. a. Montrer que pout tout réel $x \neq 2$, $\dfrac{x^3-8}{x^2-4} = \dfrac{x^2+2x+4}{x+2}$.

b. En déduire que la fonction $h : x \mapsto \dfrac{x^3-8}{x^2-4}$ admet une limite en 2. Déterminer cette limite.

3. a. Montrer que pout tout réel $x \neq 0$, $\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}$.

b. En déduire que la fonction $k : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$ admet une limite en 0. Déterminer cette limite.

4. Calculer la limite de la fonction f en a.

$f(x) = \dfrac{x^4 - 16}{-x^2 + 4}$; $a = 2$.

$f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{3}}{x-1}$; $a = 1$.

$f(x) = \left|\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right|$; $a = 1$.

4. Prolongement par continuité

Activité 1

On considère la fonction f définie pour tout réel $x \neq 0$, par $f(x) = \dfrac{x^3-x}{x}$ et la fonction g définie par $g(x) = \begin{cases} f(x) \text{ si } x \neq 0, \\ -1 \text{ si } x = 0. \end{cases}$

1. Vérifier que $g(x) = x^2 - 1$, pour tout réel x.
2. En déduire que g est continue en 0.
3. Déterminer la limite de f en 0.

Activité 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.

On suppose que $\lim\limits_{a} f = L$.

On considère la fonction F définie par $F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a, \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$

Montrer que F est continue en a.

On a donc obtenu le théorème ci-dessous.

Théorème et définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I et admettant une limite L en a.
Alors la fonction F définie par $F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$ est continue en a.

Vocabulaire

On dit que la fonction F est le prolongement par continuité en a de la fonction f.
On dit aussi que f est prolongeable par continuité en a.

5. Opérations sur les limites finies

Activité 1

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I, telles que f et g admettent pour limites respectives L et L' en a.
On désigne par F et G les fonctions définies respectivement par

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a\,, \\ L & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{et} \quad G(x)=\begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq a\,, \\ L' & \text{si } x = a \end{cases}$$

1. Justifier que F et G sont continues en a.
2. En déduire que $\lim\limits_{a} (f + g) = L + L'$.

En utilisant un procédé analogue, on peut démontrer les résultats qui figurent dans le théorème ci-dessous.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I et telles que f et g admettent pour limites respectives L et L' en a. Alors

$\lim\limits_{a} (f+g) = L + L'$; $\lim\limits_{a} kf = kL$, pour tout réel k ; $\lim\limits_{a} (fg) = LL'$; $\lim\limits_{a} |f| = |L|$.

Si $L \neq 0$ alors $\lim\limits_{a} \frac{1}{f} = \frac{1}{L}$. Si $L' \neq 0$ alors $\lim\limits_{a} \frac{f}{g} = \frac{L}{L'}$.

Activité 2

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la fonction f en a.

1. $f(x)=\dfrac{x^3-2\sqrt{2}}{x-\sqrt{2}}+x$; $a=\sqrt{2}$.

2. $f(x)=\left|\dfrac{2x^2+5x-3}{x+3}\right|-\dfrac{1}{5-|x|}$; $a=-3$.

6. Limite et ordre

Activité 1

Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I et admettant une limite L en a.

1. Quelle est la limite de $|f|$ en a ?
2. On suppose que f(x) est positif, pour tout réel x distinct de a et appartenant à I. Déduire de l'unicité de la limite que $L \geq 0$.
3. On suppose que f(x) est négatif, pour tout réel x distinct de a et appartenant à I. Montrer que $L \leq 0$.

On a donc obtenu le théorème ci-dessous.

Théorème

Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I et admettant pour limite L en a.
Si f(x) est positif pour tout réel x distinct de a, alors $L \geq 0$.
Si f(x) est négatif pour tout réel de x distinct de a, alors $L \leq 0$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I et admettant pour limite L en a.
Si f(x) est positif pour tout réel x distinct de a, alors $\lim\limits_{a} \sqrt{f} = \sqrt{L}$.

Activité 2

Déterminer la limite de la fonction f en a.

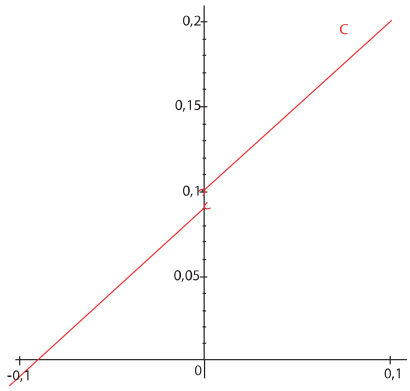
$$f(x) = \sqrt{\frac{x^3 + 2x^2}{x+2}} \quad ; \quad a = -2.$$

7. Limite à droite. Limite à gauche

Activité 1

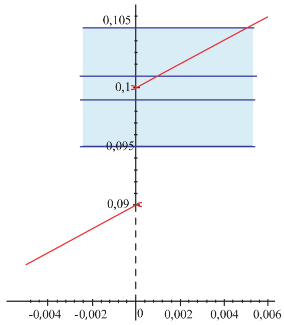
Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, C est la courbe représentative de la fonction h définie sur $[-0.1\ , 0.1] \setminus \{0\}$ par

$$h(x) = \begin{cases} x + 0.09 & \text{si } -0.1 \leq x < 0 \\ x + 0.1 & \text{si } 0 < x \leq 0.1. \end{cases}$$

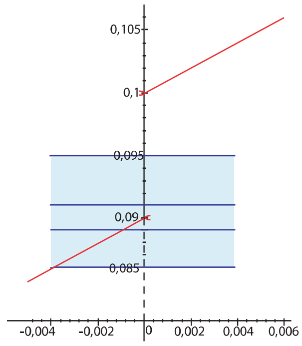


La fonction h n'est pas définie en 0.

Dans cette activité nous nous intéressons aux réels h(x) tels que x soit proche de 0.



1. En observant le graphique ci-contre, donner une condition suffisante sur x pour que h(x) appartienne à]0.095 , 0.105[.



2. En observant le graphique ci-contre, donner une condition suffisante sur x pour que h(x) appartienne à]0.085 , 0.095[.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I.
On dit que la fonction f admet pour limite L à droite en a, si pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 < x - a < \alpha$ alors $|f(x) - L| < \beta$.

On écrit $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{a^+} f = L$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = L$.

On dit que la fonction f admet pour limite le réel L à gauche en a, si pour tout $\beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 < a - x < \alpha$ alors $|f(x) - L| < \beta$.

On écrit $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{a^-} f = L$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = L$.

Le théorème qui suit résulte des définitions.

Théorème (admis)

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I.
$\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, si et seulement si, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = \lim\limits_{x \to a^-} f(x) = L$.

8. Limite à droite (ou à gauche) en a et continuité à droite (ou à gauche) en a.

Activité 1

1. Montrer que si f est continue à droite en a, alors elle admet une limite à droite en a. Que vaut cette limite ?

2. Montrer que si f est continue à gauche en a, alors elle admet une limite à gauche en a. Que vaut cette limite ?

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.
La fonction f est continue à droite en a, si et seulement si, $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = f(a)$.
La fonction f est continue à gauche en a, si et seulement si, $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = f(a)$.

Activité 2

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x \to 2^+} \sqrt{x-2} \quad ; \quad \lim_{x \to -\sqrt{2}^-} 2x+5 \quad ; \quad \lim_{x \to 1^+} \frac{-x-1}{x+1} .$$

Activité 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x < -1 , \\ 1 & \text{si } x > -1 . \end{cases}$$

1. Représenter f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. a. Calculer la limite à gauche en -1 de la fonction $x \mapsto x + 1$.
   b. En déduire la limite de f à gauche en -1.
3. Calculer la limite de f à droite en -1.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle [a, b[sauf peut-être en a et g une fonction définie sur un intervalle contenant [a, b[.
Si g est continue à droite en a et si g(x) = f(x) pour tout x de]a, b[, alors $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = g(a)$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle]a, b] sauf peut-être en b et g une fonction définie sur un intervalle contenant]a, b].
Si g est continue à gauche en b et si g(x) = f(x) pour tout x de]a, b[, alors $\lim\limits_{x \to b^-} f(x) = g(b)$.

Activité 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 9}{\sqrt{(x-3)^2}}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Donner l'expression de f(x) suivant les valeurs de x.
3. a. Calculer la limite de f à droite en 3.
   b. Calculer la limite de f à gauche en 3.
   c. La fonction f admet-elle une limite en 3 ?

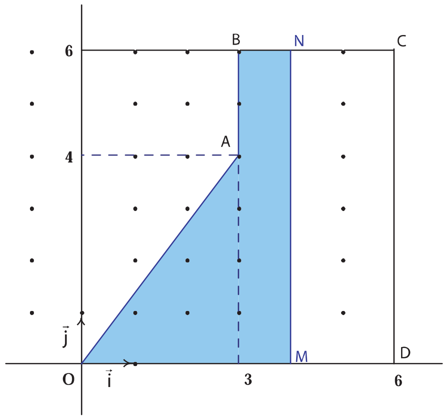
Activité 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{(x+1)^2}}{x+1}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Donner l'expression de f(x) suivant les valeurs de x.
3. a. Calculer la limite de f à droite en -1.
   b. Calculer la limite de f à gauche en -1.
   c. La fonction f admet-elle une limite en -1 ?

Activité 6

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Dans la figure, OABCD est un polygone.
Pour tout réel x appartenant à]0,6],
on désigne par M le point du segment [OD] d'abscisse x.
La droite passant par M et parallèle à l'axe des ordonnées coupe la ligne brisée OABC en un point N.



On désigne alors par R(x) la région du plan délimitée par l'axe des abscisses, la droite (MN) et la ligne brisée OABC.

1. a. Représenter R(x) pour x appartenant à]0, 3].
   b. Représenter R(x) pour x appartenant à]3, 6].
2. On note p(x) et a(x) le périmètre et l'aire de R(x).
   a. Calculer a(3) et p(3).
   b. Montrer que

$$a(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}x^2 & \text{si } 0 < x \leq 3, \\ 6x - 12 & \text{si } 3 < x \leq 6 \end{cases} \quad \text{et} \quad p(x) = \begin{cases} 4x & \text{si } 0 < x \leq 3, \\ 2x + 10 & \text{si } 3 < x \leq 6. \end{cases}$$

   c. Représenter les fonctions a et p.
   d. Etudier la continuité des fonctions a et p en 3.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et f(2) = g(2) = –2, alors $\lim\limits_{x \to 2} (fg)(x) =$

☐ 4 ☐ –2 ☐ 0.

2. Si f et g sont continues sur $\mathbb{R}$ et f(2) = g(2) = –1 alors $\lim\limits_{x \to 2} \frac{f}{g}(x) =$

☐ 1 ☐ –1 ☐ –2.

3. Si f est continue sur $\mathbb{R}$ et f(2) = 0, alors $\lim\limits_{x \to 2} f(x)(x^{100} + 4) =$

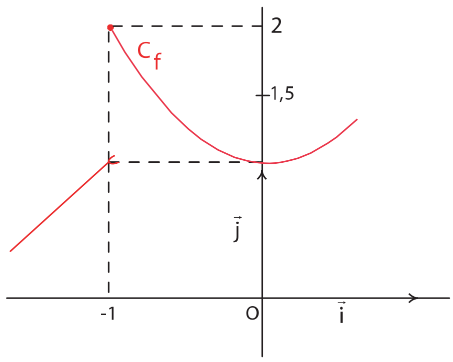
☐ 4 ☐ $2^{100} + 4$ ☐ 0.

4. $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{x^{2006} + 1}{(x+1)^{2005}} \right) =$

☐ 0 ☐ 2006 ☐ 1.

5. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
C_f est la courbe représentative de la fonction f.
Graphiquement on a $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$

☐ 1 ☐ 2 ☐ 1.5.



VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f n'est pas définie en a alors f n'admet pas de limite en a.
2. Si f n'admet pas de limite en a alors f n'est pas continue en a.
3. f admet une limite en a, si et seulement si, f admet une limite à droite en a ou à gauche en a.
4. Si $|f|$ admet une limite en a alors f admet une limite en a.
5. Si $|f|$ admet une limite égale à 0 en a alors f admet une limite égale à 0 en a.

Mobiliser ses compétences

Situation 1

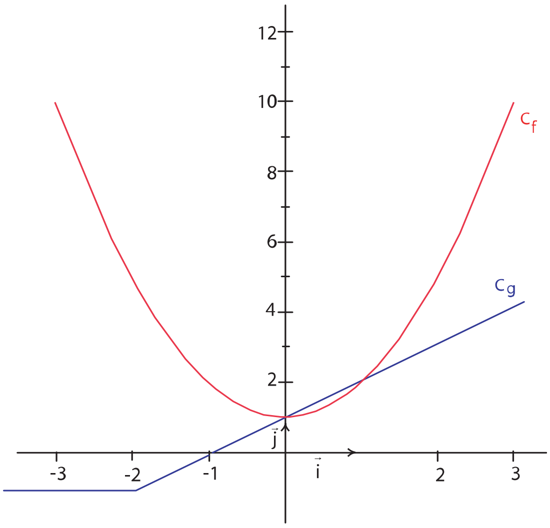
Soit a un réel.

On considère la fonction f définie sur $[-2, +\infty[$ par $f : x \mapsto \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x+2}-1}{x+1} & \text{si } x \neq -1, \\ a & \text{si } x = -1. \end{cases}$

Pour quelle valeur de a, la fonction f est-elle continue sur $[-2, +\infty[$?

Situation 2

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté graphiquement les fonctions $f : x \mapsto x^2 + 1$ et $g : x \mapsto \begin{cases} -1 \text{ si } x \leq -2 & , \\ x+1 \text{ si } x > -2 & . \end{cases}$



1. On considère la fonction $h : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \geq 0 & , \\ g(x) \text{ si } x < 0 & . \end{cases}$

   a. Donner l'expression de h(x) sur $\mathbb{R}$.
   b. Etudier la continuité de la fonction h sur $\mathbb{R}$.

2. On considère la fonction $t : x \mapsto \begin{cases} f(x) \text{ si } x \geq 0 & , \\ |g(x)| \text{ si } x<0 & . \end{cases}$

   a. Représenter graphiquement la fonction t.
   b. Etudier la continuité de la fonction t sur $\mathbb{R}$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a.

$f(x)=x^8-x^3+x+1 \quad ; \quad a=-1.$

$f(x)=\dfrac{6x^4+x+1}{x^2-x+1} \quad ; \quad a=0.1.$

$f(x)=-x^5-2x(x-1)+5x^3-4 \quad ; \quad a=-1.$

$f(x)=\dfrac{x}{10^{10}}-10x^{21}+\dfrac{\sqrt{3}}{25}x-3 \quad ; \quad a=0.$

$f(x)=-3(-2x+1)^5 \quad ; \quad a=1.$

$f(x)=\dfrac{-10x^2}{x+2} \quad ; \quad a=-3.$

$f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3} \quad ; \quad a=0.1.$

Exercice 2

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a.

$f(x)=\left|\dfrac{x^2-\sqrt{2}}{2x+1}\right| \quad ; \quad a=0.$

$f(x)=\dfrac{-|x|+50}{(x-10)^2} \quad ; \quad a=20.$

$f(x)=\dfrac{3|x|+|x-\sqrt{2}|}{|x|^3+\pi} \quad ; \quad a=0.$

$f(x)=\dfrac{|-2x|}{3}-5|x|^3 \quad ; \quad a=-2.$

$f(x)=\dfrac{|x|^5+3}{|x|+1} \quad ; \quad a=-1.$

Exercice 3

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a.

$f(x)=\sqrt{3x-5} \quad ; \quad a=8.$

$f(x)=\sqrt{-2x+1} \quad ; \quad a=0.02.$

$f(x)=\sqrt{2x^2-3x+4} \quad ; \quad a=-1.23.$

$f(x)=(-x+5)^2+\sqrt{2x^2+3x+5} \quad ; \quad a=0.$

$f(x)=\sqrt{3x^2+2}-3\dfrac{x^2-3x+2}{x^4-8x+1} \quad ; \quad a=-1.$

Exercice 4

Dans chacun des cas suivants, calculer la limite de la fonction f en a.

$f(x)=\dfrac{x(x^2-2)}{x-\sqrt{2}} \quad ; \quad a=\sqrt{2}.$

$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x-1} \quad ; \quad a=1.$

$f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-5x+6} \quad ; \quad a=2.$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-1}{x+2} \quad ; \quad a=-2.$

$f(x)=\left|\dfrac{x^3+27}{x+3}\right| \quad ; \quad a=-3.$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{6}}{\sqrt{x}} \quad ; \quad a=0.$

$f(x)=\dfrac{\dfrac{1}{1+x}-1}{x} \quad ; \quad a=0.$

$f(x)=\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} \quad ; \quad a=0.$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $]-2, 1[$ par

$$f(x)=\begin{cases} x^2 \text{ si } x\in\mathbb{Z}, \\ x \text{ si } x\notin\mathbb{Z}. \end{cases}$$

1. Justifier que f est continue sur chacun des intervalles $]-2,-1[$, $]-1,0[$ et $]0,1[$.
2. Déterminer les limites suivantes

$\lim\limits_{x\to-1^-} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x\to-1^+} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x\to0^-} f(x) \quad ; \quad \lim\limits_{x\to0^+} f(x).$

3. En déduire que f est continue sur $]-1, 1[$ et que f n'est pas continue sur $]-2, 0[$.

Exercice 6

Soit f, g et h les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x<1, \\ x^2+1 \text{ si } x\geq1 \end{cases} \quad ; \quad g(x)=x-1$

et $h(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$.

1. Déterminer les fonctions f + g ; fg ; fh.

2. Etudier la continuité de chacune des fonctions f ; $f+g$; fg ; fh sur chacun des intervalles $]-\infty\,,1[$ et $]1,+\infty[$.
3. Etudier la continuité en 1 de chacune des fonctions f ; $f+g$; fg et fh.

Exercice 7

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{(x-3)^2}{|x-3|} & \text{si } x\neq 3,\\ 0 \text{ si } x=3.\end{cases}$$

1. Représenter f dans le plan muni d'un repère.
2. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 3.
3. La fonction f est-elle continue en 3 ?
4. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 8

Soit la fonction f définie $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}x^3-2 & \text{si } x\geq 2,\\ \sqrt{x+2} & \text{si } x<2.\end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 2.
2. La fonction f est-elle continue en 2 ?

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}1+\sqrt{x} & \text{si } x>0,\\ -1-\sqrt{-x} & \text{si } x<0,\\ 0 \text{ si } & x=0.\end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.
2. La fonction f est-elle continue en 0 ?

Exercice 10

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{|x|}{x}\sqrt{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f à droite et à gauche en 0.
2. La fonction f est-elle continue en 0 ?
3. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur

$\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{3}\right\}$ par $f(x)=\dfrac{\sqrt{(3x+1)^2}}{3x+1}$.

1. Déterminer la limite de f à droite en $-\dfrac{1}{3}$.
2. Déterminer la limite de f à gauche en $-\dfrac{1}{3}$.
3. La fonction f admet-elle une limite en $-\dfrac{1}{3}$?

Exercice 12

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-4}{|x-2|}$.

Calculer les limites de f en –2 et en 2.

Exercice 13

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x<2,\\ \dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} & \text{si } x>2.\end{cases}$$

1. Déterminer la limite de f à droite en 2.
2. Déterminer la limite de f à gauche en 2.
3. La fonction f admet-elle une limite en 2 ?
4. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

Exercice 14

On considère la fonction f définie sur $]-1,+\infty[\setminus\{0\}$ par

$f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x^2-x}$.

1. Calculer la limite de f en 0.
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ? Si oui définir ce prolongement.

Exercice 15

Etudier la continuité sur $[-1, 2]$ de la fonction $x \mapsto (x-1)E(x)$, où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

Exercice 16

On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} \text{ si } x\neq 0,\\ 0.5 \text{ si } x=0.\end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $[-1, +\infty[$.

Exercice 17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}2x+1 \text{ si } x\geq 1,\\ x-1 \text{ si } 0\leq x\leq 1,\\ \dfrac{x+1}{x-1} \text{ si } x<0.\end{cases}$$

1. Représenter f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que

- $f(-4) = 4$ et $f(-3) = 3$,
- $f(x) = \sqrt{x+2}$, si $x > -2$,
- la restriction de f à $]-\infty, -2[$ est une fonction affine,
- f est continue à gauche en -2.

1. Représenter f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Donner l'expression de f(x) pour tout réel x.
3. Etudier la continuité de f en -2.

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x-1}-1}{x-2} \text{ si } x\neq 2,\\ a \text{ si } x=2.\end{cases}$$

Pour quelle valeur de a, la fonction f est-elle continue en 2 ?

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3x^3-2x^2-3x+2}{x^2-1} \text{ si } x\neq -1 \text{ et } 1,\\ a \text{ si } x=1,\\ b \text{ si } x=-1.\end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de a pour que f soit continue en 1.
2. Déterminer la valeur de b pour que f soit continue en -1.

Exercice 21

Soit P un polynôme défini par

$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$.

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{P(x)-P(0)}{x}$.
2. Appliquer le résultat précédent pour déterminer chacune des limites suivantes

$$\lim_{x\to 0}\frac{3(x+1)^2-3}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{(x^3+2)(x-1)+2}{x} \quad ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^3-1}{x}.$$

Exercice 22

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

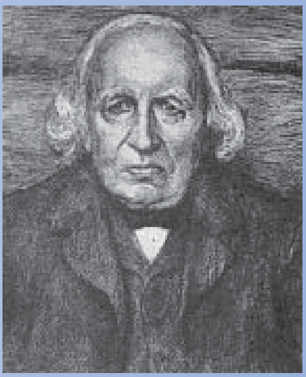
$$f(x)=\frac{1}{x}\left(\sqrt{1+x^2}-1\right).$$

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$.
2. Déterminer $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Math – culture

Tout au long du XVIII ^{ème} siècle, la définition de fonction était un sujet de débat parmi les mathématiciens. Au XIX^{ème} siècle, Cauchy fut le premier à donner une fondation logique stricte du calcul infinitésimal.

Ce n'est qu'en 1850, que le mathématicien allemand **Karl Weierstrass** poursuivant l'effort de rigueur entrepris par Cauchy, donne la définition de la limite d'une fonction en un point. Cette définition marquera la naissance de l'analyse moderne.



Weierstrass

Citation

«Homme toujours debout sur le cap Pensée, à s'écarquiller les yeux sur les limites»

Paul Valéry.

La distance parcourue par une navette spatiale, est déterminée par une expression d(t), où d est une fonction de la variable t qui désigne le temps.
Pour déterminer la distance parcourue par la navette Columbia, depuis sa lancer jusqu'à l'instant t_f du crash, on calcule $\lim\limits_{t \to t_f} d(t)$.

la navette Columbia

Math – culture

Chapitre

4

Limites et comportements asymptotiques

« Seul deux choses sont infinies : l'univers et la bêtise humaine.
Mais je ne suis pas sûr pour l'univers. »

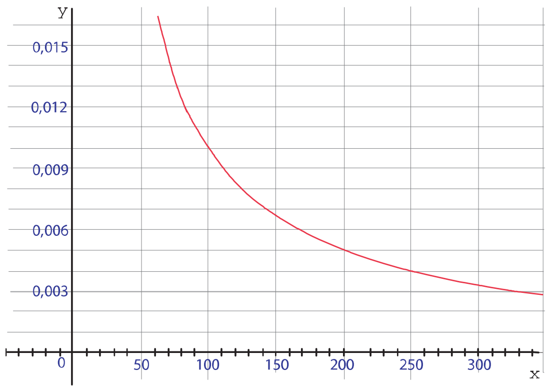
Einstein

Pour commencer

Activité 1

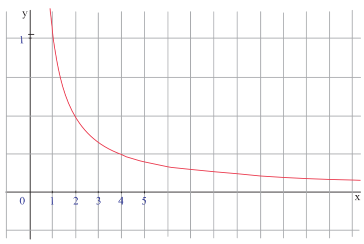
Soit la fonction f définie pour tout réel $x > 0$ par $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

1. Représenter l'ensemble B des points M(x , y) du plan tels que $0 < y < 5.10^{-3}$.
2. Donner une condition suffisante sur x pour qu'un point M(x , f(x)) appartienne à B.

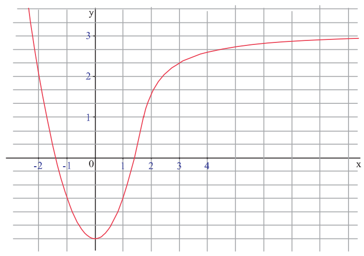


Activité 2

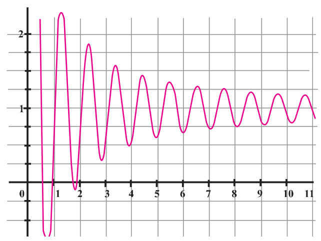
On donne ci-dessous les représentations graphiques C_f, C_g et C_h de trois fonctions f, g et h.



C_f



C_g



C_h

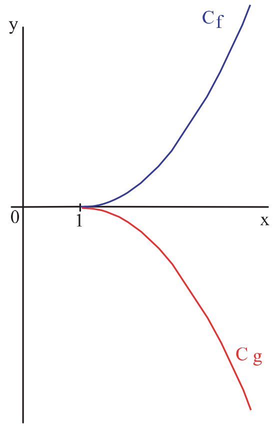
Donner une condition suffisante sur x pour que

a. $0 < f(x) < \dfrac{1}{2}$; b. $-2 < g(x) < 1$; c. $|h(x) - 1| < \dfrac{1}{4}$.

Cours

1. Limites infinies en $+\infty$

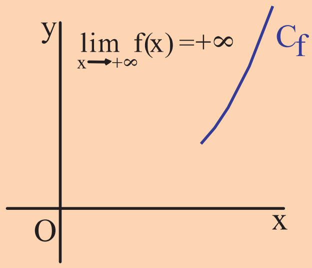
Activité 1



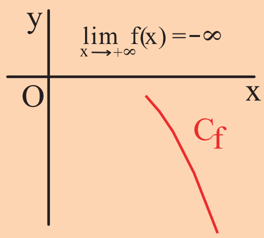
On a représenté ci-contre les fonctions f et g définies sur $[1, +\infty[$ respectivement par $f(x) = (x-1)^2$ et $g(x) = -(x-1)^2$.

1. a. Que peut-on conjecturer sur f(x) lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ?
   b. Donner une condition suffisante sur x, pour que $f(x) > 10^{40}$.
   c. Soit $A > 0$. Donner une condition suffisante sur x, pour que $f(x) > A$.
2. a. Que peut-on conjecturer sur g(x) lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes ?
   b. Donner une condition suffisante sur x, pour que $g(x) < -10^{40}$.
   c. Soit $A > 0$. Donner une condition suffisante sur x, pour que $g(x) < -A$.

Définition



Soit a un réel et f une fonction définie sur $[a, +\infty[$.
On dit que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si, pour tout $A > 0$, il existe $B > 0$ tel que si $x \geq a$ et $x > B$ alors $f(x) > A$.
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.



On dit que f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ si, pour tout $A < 0$, il existe $B > 0$ tel que si $x \geq a$ et $x > B$ alors $f(x) < A$.
On note $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$.

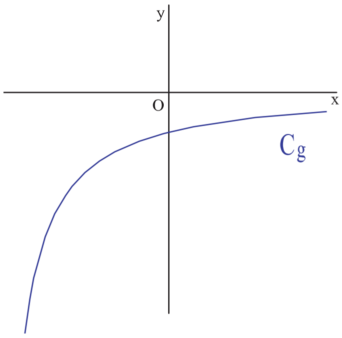
Vocabulaire

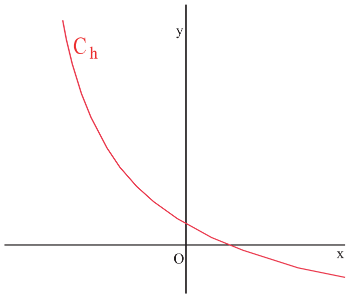
Lorsque $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$, on dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ou f(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ou encore f tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
Lorsque $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$, on dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ou f(x) tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$, ou encore f tend vers $-\infty$ en $+\infty$.

Activité 2

Dans le plan muni d'un repère, on a représenté les courbes C_g et C_h des fonctions g et h.

Vérifier qu'aucune de ces fonctions ne tend vers $+\infty$ en $+\infty$.





Activité 3

On considère les fonctions f, g et h définies sur $[1,+\infty[$ par $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

1. Soit $A > 0$ et $x \geq 1$.
   a. Donner une condition suffisante sur x pour que $f(x) > A$ et $g(x) > A$.
   b. Donner une condition suffisante sur x pour que $h(x) > A$.
2. En déduire le comportement de chacune des fonctions f, g et h au voisinage de $+\infty$.

> Lorsqu'on étudie la limite de f(x) quand x tend vers $+\infty$, il suffit d'étudier le comportement de f(x), lorsque x est positif et prend de grandes valeurs.
> On dit alors que l'on étudie le comportement de f au voisinage de $+\infty$.

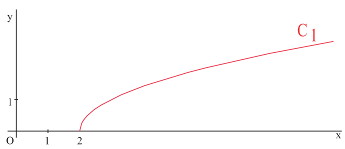
Activité 4

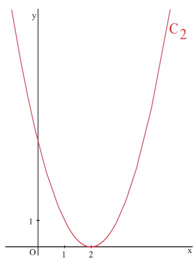
Soit f et g deux fonctions définies sur $[2,+\infty[$ et telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$.
Justifier chacune des affirmations ci-dessous.
– Il existe $B > 2$ tel que $f(x) > 1$, pour tout $x > B$.
– Il existe $B > 2$ tel que $g(x) < -1$, pour tout $x > B$.
– La fonction f n'est pas majorée sur $[2,+\infty[$.
– La fonction g n'est pas minorée sur $[2,+\infty[$.

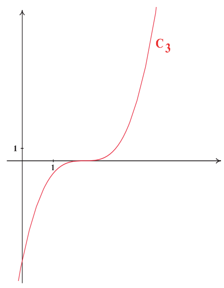
> Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ alors il existe un réel $B > 0$ tel que $f(x) > 0$, pour tout $x > B$.
> Si $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ alors il existe un réel $B > 0$ tel que $f(x) < 0$, pour tout $x > B$.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère.
Les courbes C_1, C_2 et C_3 sont les représentations graphiques respectives des fonctions.
$x \mapsto \sqrt{x-2}$, $x \mapsto (x-2)^2$ et $x \mapsto (x-2)^3$.

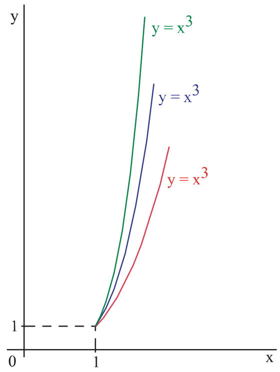






1. Donner l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
2. Déterminer graphiquement les limites de chacune de ces fonctions en $+\infty$.

Activité 6



Soit k la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $k(x) = x^n$, où n est un entier supérieur ou égal à 1.

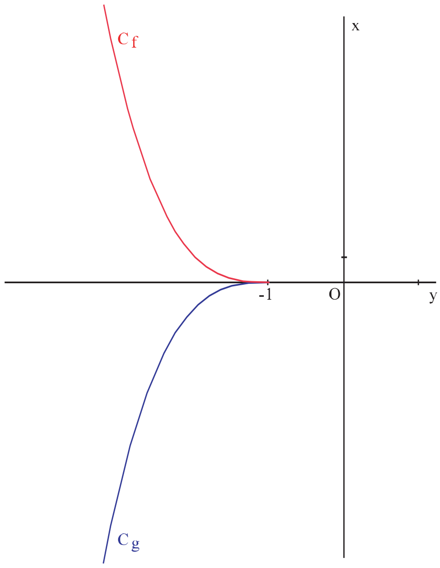
1. Soit $A > 0$ et $x \geq 1$. Donner une condition suffisante sur x, pour que $k(x) > A$.
2. Déterminer la limite de k lorsque x tend vers $+\infty$.

Théorème

Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul, $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x-a} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (x-a)^n = +\infty$.

2. Limites infinies en – ∞

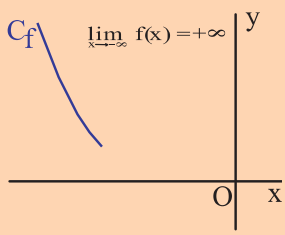
Activité 1



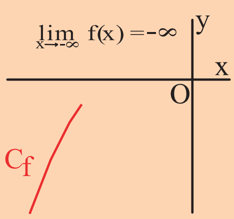
Le plan est muni d'un repère.
On a représenté ci-contre les fonctions f et g définies sur $]-\infty, -1]$ respectivement par $f(x) = (x+1)^2$ et $g(x) = -(x+1)^2$.

1. Soit $A > 0$ et $x \leq -1$. Donner une condition suffisante sur x, pour que $f(x) > A$.
2. Soit $A < 0$ et $x \leq -1$. Donner une condition suffisante sur x, pour que $g(x) < A$.

Définition



Soit a un réel et f une fonction définie sur $]-\infty, a]$.
On dit que f admet pour limite $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si, pour tout $A > 0$, il existe $B < 0$ tel que si $x \leq a$ et $x < B$ alors $f(x) > A$.
On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$.



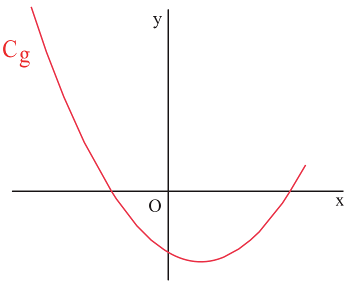
On dit que f admet pour limite $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$ si pour tout $A < 0$, il existe $B < 0$ tel que si $x \leq a$ et $x < B$ alors $f(x) < A$.
On note $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

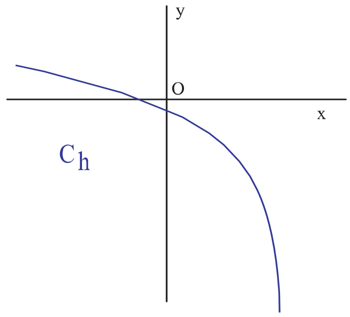
Vocabulaire

Lorsque $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$, on dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, ou f(x) tend vers $+\infty$ quand x tend vers $-\infty$, ou encore f tend vers $+\infty$ en $-\infty$.
Lorsque $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$, on dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, ou f(x) tend vers $-\infty$ quand x tend vers $-\infty$, ou encore f tend vers $-\infty$ en $-\infty$.

Activité 2

Dans le plan muni d'un repère, on a représenté les courbes C_g et C_h des fonctions g et h.
Vérifier qu'aucune de ces fonctions ne tend vers $-\infty$ en $-\infty$.





Activité 3

On considère les fonctions définies sur $]-\infty, -1]$ par
$f : x \mapsto x^2$; $g : x \mapsto x^3$ et $h : x \mapsto \sqrt{-x}$.

1. Soit $A > 0$ et $x \leq -1$.
   a. Donner une condition suffisante sur x pour que $f(x) > A$ et $g(x) < -A$.
   b. Donner une condition suffisante sur x pour que $h(x) > A$.
2. En déduire le comportement de chacune des fonctions f, g et h au voisinage de $-\infty$.

Lorsqu'on étudie la limite de f(x) quand x tend vers $-\infty$, il suffit d'étudier le comportement de f(x), lorsque x est négatif et tel que $|x|$ prend de grandes valeurs.
On dit alors que l'on étudie le comportement de f au voisinage de $-\infty$.

Activité 4

Soit f et g deux fonctions définies sur $]-\infty, -1]$ et telles que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -\infty$.
Justifier chacune des affirmations ci-dessous.
Il existe B<-1 telle que $f(x) > 1$, pour tout $x < B$.
Il existe B<-1 telle que $g(x) < -1$, pour tout $x < B$.
La fonction f n'est pas majorée sur $]-\infty, -1]$.
La fonction g n'est pas minorée sur $]-\infty, -1]$.

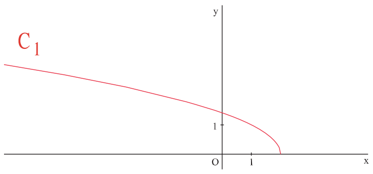
Si $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ alors il existe un réel $B < 0$ tel que $f(x) > 0$, pour tout $x < B$.
Si $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ alors il existe un réel $B < 0$ tel que $f(x) < 0$, pour tout $x < B$.

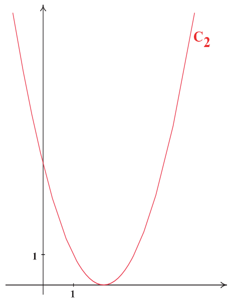
Activité 5

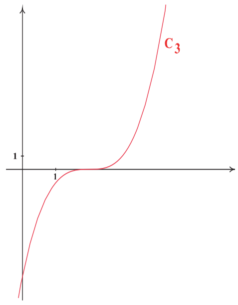
Le plan est muni d'un repère.

Les courbes C_1, C_2 et C_3 sont les représentations graphiques respectives des fonctions

$x \mapsto \sqrt{2-x}$, $x \mapsto (x-2)^2$ et $x \mapsto (x-2)^3$.





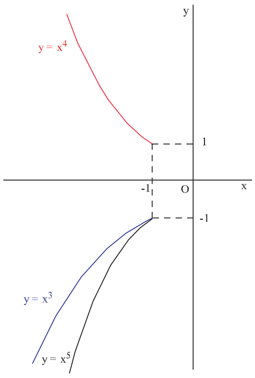


1. Donner l'ensemble de définition de chacune de ces fonctions.
2. Déterminer graphiquement, les limites de chacune de ces fonctions en $-\infty$.

Activité 6

Soit h la fonction définie sur $]-\infty, -1]$ par $h(x) = x^n$, où n est un entier supérieur ou égal à 1.

Discuter suivant la parité de n, la limite de h lorsque x tend vers $-\infty$.



Théorème

Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul,

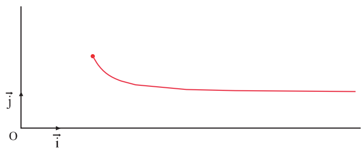
$$\lim_{x\to-\infty} \sqrt{a-x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} (x-a)^{2n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} (x-a)^{2n-1} = -\infty \cdot$$

3. Limites finies en $+\infty$ ou en $-\infty$

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On a représenté ci-contre la fonction f définie sur $[\, 2, +\infty\, [$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^2} + 1$.

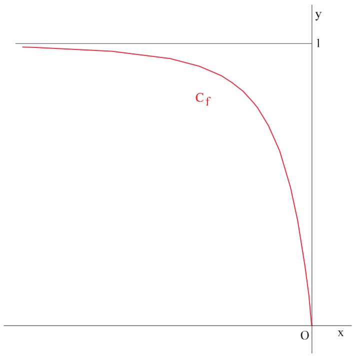


1. Que peut-on conjecturer sur f(x) lorsque x tend vers $+\infty$?
2. a. Donner une condition suffisante sur les réels x, pour que $|f(x) - 1| < 10^{-200}$.

   b. Soit $\beta > 0$. Donner une condition suffisante sur les réels x, pour que $|f(x) - 1| < \beta$.
3. Soit M le point de coordonnées (x, f(x)) et P le point de coordonnées (x, 1). Que peut-on dire de la distance PM lorsque x tend vers $+\infty$?

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Nous avons représenté ci-contre la fonction f définie sur $]-\infty, 0]$ par $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)^3} + 1$.



1. Que peut-on conjecturer sur f(x) lorsque x tend vers $-\infty$?
2. a. Donner une condition suffisante sur x, pour que $|f(x) - 1| < 10^{-300}$.
   b. Soit $\beta > 0$. Donner une condition suffisante sur x, pour que $|f(x) - 1| < \beta$.
3. Soit M le point de coordonnées (x, f(x)) et P le point de coordonnées (x, 1).
   Que peut-on dire de la distance PM lorsque x tend vers $-\infty$?

Définition

Soit a un réel et f une fonction définie sur l'intervalle $[a , +\infty[$.
On dit que f admet pour limite L quand x tend vers $+\infty$, si pour tout $\beta > 0$, il existe un réel $B > 0$, tel que si $x \geq a$ et $x > B$ alors $|f(x) - L| < \beta$.

Définition

Soit a un réel et f une fonction définie sur l'intervalle $]-\infty , a]$.
On dit que f admet pour limite L quand x tend vers $-\infty$, si pour tout $\beta > 0$, il existe un réel $B < 0$, tel que si $x \leq a$ et $x < B$ alors $|f(x) - L| < \beta$.

Théorème (admis)

Si une fonction admet une limite L en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$) alors cette limite est unique.
On note $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{+\infty} f = L$ (respectivement $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{-\infty} f = L$).

Vocabulaire

Lorsque $\lim\limits_{+\infty} f = L$, on dit que f tend vers L quand x tend vers $+\infty$, ou f(x) tend vers L quand x tend vers $+\infty$, ou encore f tend vers L en $+\infty$.
Lorsque $\lim\limits_{-\infty} f = L$, on dit que f tend vers L quand x tend vers $-\infty$, ou f(x) tend vers L quand x tend vers $-\infty$, ou encore f tend vers L en $-\infty$.

Activité 3

1. Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

   Que peut-on dire de la limite de $\frac{1}{f}$ en $+\infty$?

2. Si on suppose que $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ que peut-on dire de limite de $\frac{1}{f}$ en $-\infty$?
3. Que peut-on dire de la limite de $\frac{1}{f}$ dans le cas où f tend vers $-\infty$ en $+\infty$ ou $-\infty$?

Théorème (admis)

Si $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{f} = 0$.

Si $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$ alors $\lim\limits_{+\infty} \frac{1}{f} = 0$.

Si $\lim\limits_{-\infty} f = +\infty$ alors $\lim\limits_{-\infty} \frac{1}{f} = 0$.

Si $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ alors $\lim\limits_{-\infty} \frac{1}{f} = 0$.

Activité 4

Déduire du théorème précédent les résultats ci-dessous

Pour tout réel a et tout entier non nul n,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x-a}} = 0 \; ; \; \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{a-x}} = 0 \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{(x-a)^n} = 0 \; ; \; \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{(x-a)^n} = 0 .$$

4. Asymptotes horizontales

Activité 1

Soit f une fonction telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

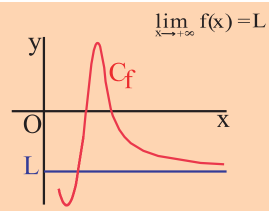
Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
M le point de coordonnées (x, f(x)) et P le point de coordonnées (x , L).
Montrer que la distance PM tend vers 0.

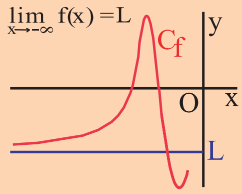
Définition

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère.

Lorsque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$, on dit que la droite d'équation y = L est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

Lorsque $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = L$, on dit que la droite d'équation y = L est une asymptote horizontale à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$.





Activité 2

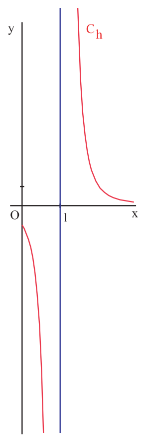
1. Représenter chacune des fonctions $f : x \mapsto 2 + \dfrac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto -\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{x+2}$.

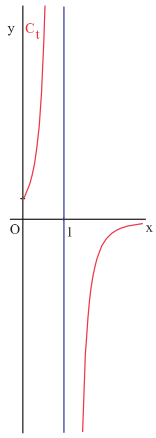
2. On désigne par C_f et C_g les courbes représentatives de f et g dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
   Préciser les asymptotes horizontales à ces courbes, au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

5. Limites infinies en un réel

Activité 1

Le plan est muni d'un repère. On a représenté ci-contre, les fonctions h et t définies sur $[0, 1[\cup]1, +\infty[$ respectivement par $h(x)=\dfrac{1}{(x-1)^3}$ et $t(x)=\dfrac{-1}{(x-1)^3}$.





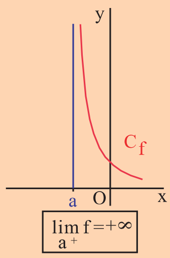
1. Déterminer le signe de chacune des fonctions h et t .
2. a. Que peut-on dire de h(x) lorsque x se rapproche de 1, en restant supérieur à 1 ?
   b. En déduire le comportement de h lorsque x tend vers 1 à droite.
3. a. Que peut-on dire de h(x) lorsque x se rapproche de 1, en restant inférieur à 1?
   b. En déduire le comportement de h lorsque x tend vers 1 à gauche.
4. Etudier le comportement de t lorsque x tend vers 1.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.

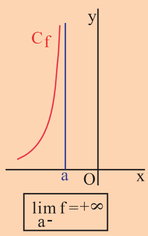
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$, à droite en a si, pour tout $A > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 < x - a < \alpha$ alors $f(x) > A$.

On note $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^+} f = +\infty$.



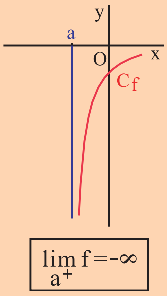
On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$, à gauche en a si, pour tout $A > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que si x appartient à I et $0 < a - x < \alpha$ alors $f(x) > A$.

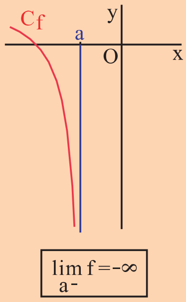
On note $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{a^-} f = +\infty$.



Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.
On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$, à droite en a (respectivement à gauche en a) si la fonction $-f$ a pour limite $+\infty$, à droite en a (respectivement à gauche en a).





Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I.

On dit que la fonction f a pour limite $+\infty$ en a si $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = +\infty$. On note $\lim_{a} f = +\infty$.

On dit que la fonction f a pour limite $-\infty$ en a si $\lim_{a^-} f = \lim_{a^+} f = -\infty$. On note $\lim_{a} f = -\infty$.

Activité 2

Soit une fonction f définie sur un intervalle I, sauf peut être en un réel a de I, telle que $f(x) \neq 0$, $x \neq a$.

1. a. On suppose que f est positive sur I et $\lim_{a^-} f = 0$. Que peut-on conjecturer sur $\lim_{a^-} \frac{1}{f}$?

   b. On suppose que f est négative sur I et $\lim_{a^-} f = 0$. Que peut-on conjecturer sur $\lim_{a^-} \frac{1}{f}$?

2. Reprendre les mêmes questions dans le cas où $\lim_{a^+} f = 0$.

Activité 3

Utiliser l'activité précédente pour justifier les résultats ci-dessous.

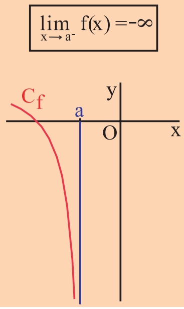
Pour tout réel a et tout entier naturel n non nul, on a

$$\lim_{x \to a} \frac{1}{(x-a)^{2n}} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \to a^-} \frac{1}{(x-a)^{2n-1}} = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \to a^+} \frac{1}{(x-a)^{2n-1}} = +\infty .$$

6. Asymptotes verticales

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf en un réel a de I et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Si la limite de f, à droite en a (respectivement à gauche en a), est infinie, on dit que la droite d'équation x = a est une asymptote verticale à la courbe C_f, à droite en a (respectivement à gauche en a).



Activité 1

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)^2$.

1. a. Que vaut la limite de g à droite en 1 ?
   b. Que vaut la limite de g à gauche en 1 ?
2. Déterminer la limite de $\frac{1}{g}$ à droite et à gauche en 1.
   Que représente la droite d'équation $x = 1$, pour la courbe de $\frac{1}{g}$?

Activité 2

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{(x+4)^4} + 2$ et $g : x \mapsto \frac{1}{(x+4)^5} - 0.75$.

Etudier le comportement de chacune des fonctions aux bornes de son ensemble de définition, en précisant les asymptotes à leurs courbes représentatives.

7. Opérations sur les limites

Nous admettrons les résultats qui suivent et qui concernent les limites en un réel ou en l'infini, de la somme, du produit et du quotient et de la valeur absolue.

lim f	lim g	lim(f+g)
L	L'	L + L'
L	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	L'	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$

lim f	lim g	lim(f x g)
L	L'	L x L'
$+\infty$	L' > 0	$+\infty$
$+\infty$	L' < 0	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

lim f	lim g	lim $\frac{f}{g}$
L	$L' \neq 0$	$\frac{L}{L'}$
$+\infty$	L' > 0	$+\infty$
$+\infty$	L' < 0	$-\infty$
L	$+\infty$	0
L	$-\infty$	0
$L \neq 0$	0	∞ (et on applique la règle des signes).

lim f	lim $\lvert f \rvert$
L	$\lvert L \rvert$
$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$+\infty$

Activité 1

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to 0}\left(x+\frac{1}{x^2}-1\right)\ ;\quad \lim_{x\to +\infty}\left(x+\frac{1}{x^2}-1\right)\ ;\quad \lim_{x\to +\infty}\left(\sqrt{x}+\frac{1}{(x-2)^2}-1\right)\ ;$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(x-\sqrt{1-x}+1\right)\ ;\quad \lim_{x\to 2^-}\left(x+\frac{1}{(x-2)^3}+\frac{3}{(x-2)^2}-1\right)\ ;\quad \lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{1}{(x-1)^3}+\sqrt{x-1}\right).$$

Activité 2

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to +\infty} x\left(\frac{1}{x^2}-1\right)\ ;\quad \lim_{x\to 2} -\sqrt{x+2}\left(\frac{1}{(x-2)^2}-1\right)\ ;$$

$$\lim_{x\to 2^-} x^2\left(\frac{1}{(x-2)^3}-\frac{3}{(x-2)^2}-\sqrt{x-0.5}\right)\ ;\quad \lim_{x\to -1^+}\left(\frac{1}{x+1}-x\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x+1}}+x\right).$$

Activité 3

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{x}}+\frac{1}{x^2}\right)\ ;\quad \lim_{x\to 2^+}\frac{1}{x\sqrt{x-2}}\ ;\quad \lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2\sqrt{x+3}}\ ;$$

$$\lim_{x\to -\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{-x}}+\frac{1}{x^2}+3x\right)\ ;\quad \lim_{x\to +\infty}\left(\frac{1}{x\sqrt{x-100}+1}+x\right)\ ;\quad \lim_{x\to -3^+}\left(\frac{-5}{(x-1)^2\sqrt{x+3}}-1\right);$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt{x+2}}{x-2}\ ;\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{x\sqrt{x}}{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}\ ;\quad \lim_{x\to 0^-}\left|\frac{5}{x^3(x+2)}\right|\ ;\quad \lim_{x\to -3^+}\left|-3+\frac{1+x}{\sqrt{x+3}}\right|\ ;$$

$$\lim_{x\to +\infty}\left|(x-1)\left(\frac{1}{x^2}-2\right)\right|\ ;\quad \lim_{x\to -\infty}\left|x^3+\frac{1}{x^4}+2\right|.$$

8. Limites d'une fonction polynôme ou d'une fonction rationnelle

Activité 1

1. a. Vérifier que pour tout réel non nul x, $x^3-x+1=x^3\left(1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)$.

   b. En déduire que $\lim\limits_{x\to +\infty}(x^3-x+1)=\lim\limits_{x\to +\infty}x^3$.

2. Soit f la fonction polynôme définie par $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ où $a_n\neq 0$.

   On se propose de montrer que $\lim\limits_{x\to +\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}a_nx^n$.

a. Vérifier que $f(x)=a_n x^n\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\cdots+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}\right)$, pour tout réel non nul x.

b. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\cdots+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}\right)$.

c. Conclure.

3. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} a_n x^n$.

La limite d'une fonction polynôme, quand la variable tend vers l'infini, est la même que celle de son terme de plus haut degré.

Activité 2

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-3x^2+2x-1)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3-x^2-4x+1)^6$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\left((5x^2-x-1)^3-125x^6\right)$; $\lim\limits_{x\to-\infty}(5x^{101}-x)^{30}$.

Activité 3

1. Soit f la fonction rationnelle définie par $f(x)=\frac{3x^4-x^3+1}{-2x^2+x}$.

a. Vérifier que $f(x)=-\frac{3}{2}x^2Q(x)$; avec $Q(x)=\frac{1-\frac{1}{3x}+\frac{1}{3x^4}}{1-\frac{1}{2x}}$.

b. En déduire la limite de f en $+\infty$.

2. Soit f la fonction rationnelle définie par

$f(x)=\frac{a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_m x^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0}$; où $a_n\neq 0$ et $b_m\neq 0$.

a. Vérifier que $f(x)=\frac{a_n x^n}{b_m x^m}Q(x)$; avec $Q(x)=\frac{1+\frac{a_{n-1}}{a_n x}+\cdots+\frac{a_1}{a_n x^{n-1}}+\frac{a_0}{a_n x^n}}{1+\frac{b_{m-1}}{b_m x}+\cdots+\frac{b_1}{b_m x^{m-1}}+\frac{b_0}{b_m x^m}}$.

b. En déduire le résultat ci-dessous.

La limite d'une fonction rationnelle, quand la variable tend vers l'infini est la même que celle du quotient des termes de plus haut degré.

Activité 4

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^3-3x^2+2x-1}{(2x+5)^{10}}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x^3-1)^{3000}}{x^2+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x^2-x-1)^{20}}{x^3+x+1}$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(-5x^3-1)^{3000}}{x^2+1}$.

Activité 5

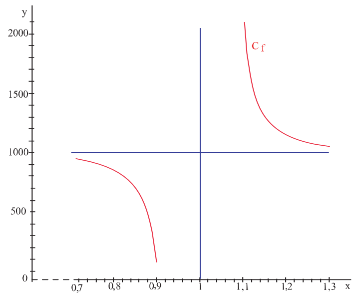
Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

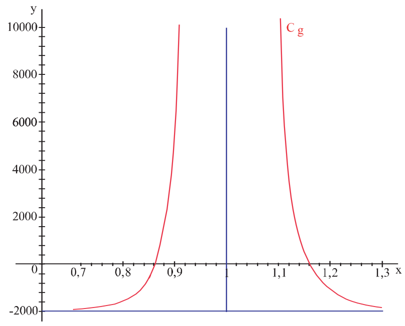
On considère la fonction h définie par $h(x) = \dfrac{2x^2+2}{x^2-1}$.

Etudier les limites de h aux bornes de son ensemble de définition, en précisant les asymptotes à sa courbe représentative.

Activité 6

Dans le plan muni d'un repère, C_f et C_g sont les représentations graphiques respectives des fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x-1)^3}+1000$ et $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{(x-1)^4}-2000$.





1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Donner les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes à C_f.
3. Reprendre les mêmes questions pour la fonction g.

Activité 7

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x|x-1|}$.

1. Donner l'expression de f(x) lorsque $x > 1$, puis lorsque $x < 1$.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et préciser les asymptotes à sa courbe représentative.

Activité 8

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2+5x-3}{x^2-3x-4}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, en précisant les asymptotes à sa courbe représentative.

9. Limites de $\sqrt{f}$

Nous admettrons le théorème ci-dessous qui nous donne la limite de $\sqrt{f}$ lorsqu'on connaît la limite de f.

Soit f une fonction positive, a fini ou infini et L un réel.
Si $\lim_{a} f = L$ alors $\lim_{a} \sqrt{f} = \sqrt{L}$. Si $\lim_{a} f = +\infty$ alors $\lim_{a} \sqrt{f} = +\infty$.

Activité 1

Calculer les limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{-x^3}} - \frac{1}{x^2} \; ; \; \lim_{x\to-\infty} \frac{-1}{\sqrt{-x^3+2x^2}} \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2-x+1}} \; ; \; \lim_{x\to+\infty} \sqrt{5x^4+10x^2+1}.$$

Activité 2

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x(x-1)}$.

1. Donner l'ensemble de définition de f, on le note D.

2 a. Montrer que $f(x) = \dfrac{1}{(x-1)(\sqrt{1+x}+1)}$, pour tout réel x de D.

b. En déduire les limites de f aux bornes de D.

c. Montrer que f admet un prolongement par continuité en 0, que l'on déterminera.

3. Préciser les asymptotes à la courbe représentative de f.

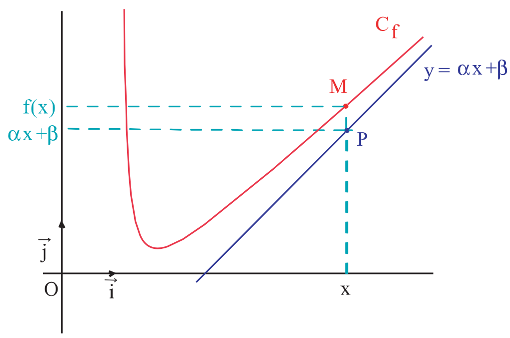
Activité 3

On considère la fonction f définie par $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{1+x} - x - 1$.

1. Montrer que pour tout réel positif x, $f(x) = (x+1)\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} - 1\right)$.
2. En déduire la limite de f en $+\infty$.

10. Asymptotes obliques

Activité 1



Soit f une fonction telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

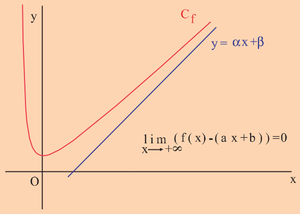
Soit C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère une droite D d'équation $y = \alpha x + \beta$.

On désigne par M le point de coordonnées $(x, f(x))$ et P le point de coordonnées $(x, \alpha x + \beta)$.

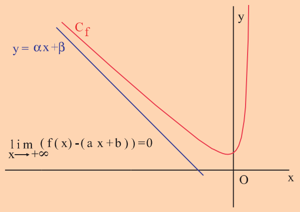
Montrer que si $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$ alors la distance PM tend vers 0.

Définition

Soit f une fonction et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



Lorsque $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$, on dit que la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptote oblique à la courbe C_f de f au voisinage de $+\infty$.



Lorsque $\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (\alpha x + \beta)) = 0$, on dit que la droite d'équation $y = \alpha x + \beta$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $-\infty$.

Activité 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2 - 2x - 3}{x - 2}$ et on note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

1. a. Donner son ensemble de définition D.
   b. Calculer les limites de f aux bornes de D.
2. Vérifier que, pour tout $x \neq 2, f(x) = 3x + 4 + \dfrac{5}{x-2}$.
3. a. Calculer $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - 3x - 4)$.
   b. Expliquer pourquoi la droite Δ d'équation $y = 3x + 4$ est asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
   c. Etudier la position de C par rapport à Δ.

Activité 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4x + 3}$ et on note C sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé.

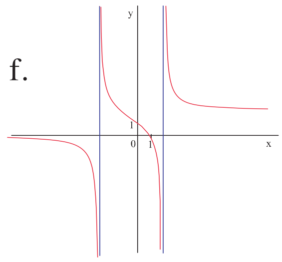
1. a. Donner son ensemble de définition D.
   b. Calculer les limites de f aux bornes de D.
2. a. Déterminer la forme canonique du trinôme $x^2 + 4x + 3$.
   b. Déterminer alors $\lim_{x \to -\infty} (f(x) + (x + 2))$ et $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (x + 2))$.

c. En déduire que C admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et une autre au voisinage de $-\infty$.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.



1. Dans la figure ci-contre on a représentée graphiquement une fonction f.
$\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - x) =$

☐ 0 ☐ $+\infty$ ☐ -3.

2. $\lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{7}{(x-2)^2} =$

☐ $-\infty$ ☐ 0 ☐ $+\infty$.

3. Si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -5$ alors

☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x)+5\right) = 0$ ☐ $x = -5$ est une asymptote à C_f ☐ $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x)+5\right) = 0$.

4. Sachant que pour tout réel x, on a $f(x) \geq x^3 - x$, on peut conclure que

☐ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ☐ $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0$ ☐ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{5}{x^2} =$

☐ $+\infty$ ☐ 0 ☐ 5.

VRAI – FAUX

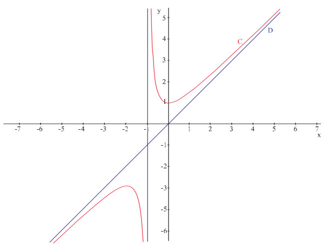
1. Si f est une fonction polynôme de degré supérieur ou égal à 1 alors f tend vers l'infini au voisinage de l'infini.
2. Si f est une fonction strictement positive sur $[1, +\infty[$, alors f tend vers $+\infty$ au voisinage de $+\infty$.
3. Si f est une fonction qui tend vers $-\infty$, au voisinage de $+\infty$ alors f est strictement négative pour les grandes valeurs de x.
4. Si f est une fonction qui tend vers a en $+\infty$ alors f tend vers a en $-\infty$.
5. Si f est une fonction qui tend vers a en $+\infty$ alors $|f|$ tend vers a en $+\infty$.

Mobiliser ses compétences

Situation 1 Asymptote oblique

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

1. a. Déterminer son ensemble de définition D.
   b. Calculer les limites de f aux bornes de D.
2. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que, pour tout $x \neq -1$, on a
   $f(x) = ax + b + \dfrac{1}{x+1}$.
3. On désigne par C la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.



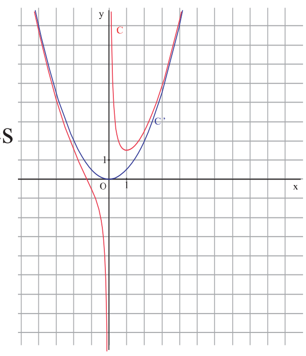
   a. Expliquer pourquoi la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à C au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.
   Etudier la position de C par rapport à Δ.
   b. Soit x un réel différent de -1 ; on désigne par M et P les points respectifs de C et Δ d'abscisse x.
   Si l'on veut que la distance MP soit inférieure 0.001, suffit-il de prendre $|x| > 11$? $|x| > 101$? $|x| > 1001$? Justifier votre réponse.
   c. Déterminer, sans faire de calcul, une approximation de f(3000) et un majorant de l'erreur ainsi commise.

Situation 2 courbe asymptote

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition D.
2. Calculer les limites de f aux bornes de D.
3. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{x^2}{2}$.

   Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(f(x) - g(x)\right)$.



Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on note C et C' les courbes représentatives respectives de f et g.
Soit x un réel non nul ; on désigne par M et N les points respectifs de C et C' d'abscisse x.

4. a. Calculer MN en fonction de x.
   b. Vérifier que cette distance a tend vers zéro quand x tend vers $+\infty$.
   On dit que C' est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.
   On dit aussi que la fonction g est une approximation de f au voisinage de $+\infty$.
   c. Etudier la position de C par rapport à C' sur $]0, +\infty[$.
   d. Expliquer pourquoi C' est asymptote à C au voisinage de $-\infty$.
   e. Etudier la position de C par rapport à C' sur $]-\infty, 0[$.
5. Déterminer, sans faire de calcul, l'erreur commise en remplaçant $f(5.10^{99})$ par $\dfrac{(5.10^{99})^2}{2}$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Calculer dans chacun des cas ci-dessous la limite de la fonction f en $+\infty$.

$f(x)=\dfrac{-5}{(x-1000)^3}$; $f(x)=-2(x+100)^{100}$;

$f(x)=\sqrt{x-2006}$; $f(x)=\dfrac{-3}{\sqrt{x-2006}}$.

Exercice 2

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$f(x)=x^2+|x|$; $f(x)=x^2+x|x|+2$;

$f(x)=-2(x+100)^{100}-3x^5$; $f(x)=(-2x+1)^3+8x^3$;

$f(x)=(-2x+1)^{10}+|x^{11}|$.

Exercice 3

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$f(x)=\dfrac{-5x+1}{(x-1000)^3}$; $f(x)=\dfrac{x^4+3x^2-1}{(2x-5)^{17}}$; $f(x)=\left|\dfrac{2x^2-3x}{x-2}\right|$;

$f(x)=\dfrac{|x|(1-x)}{1+x^2}$; $f(x)=x^3-\dfrac{x^2}{x+1}$; $f(x)=\dfrac{x^2+|x|+1}{|x|-2}$.

Exercice 4

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions f, g, f+g, f–g, fg et $\dfrac{f}{g}$.

a- $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}$; $g(x)=3x^3+2x-1$.

b- $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$; $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^3-1}$.

c- $f(x)=\dfrac{-3x^3+2}{x^2+x^3}$; $g(x)=\dfrac{x^4-6x^3}{1-x^5}$.

Exercice 5

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{3^-}\dfrac{3x}{(x-3)(2x+5)}$; $\lim\limits_{3^+}\dfrac{3x}{(x-3)(2x+5)}$;

$\lim\limits_{-2^-}\dfrac{-3x^2+1}{2x+4}$; $\lim\limits_{-2^+}\dfrac{-3x^2+1}{2x+4}$.

Exercice 6

Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{3^-}\dfrac{-3x+9}{x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{-1}\dfrac{x-1}{x^3+1}$;

$\lim\limits_{1^+}(x-1)\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$; $\lim\limits_{2^+}\dfrac{(x+3)(x-2)}{|x-2|}$.

Exercice 7

Calculer dans chacun des cas ci-dessous, la limite éventuelle de f à gauche respectivement à droite en a.

$f(x)=\dfrac{-4}{(x-2)^3}$; $a=2$.

$f(x)=\dfrac{2}{(3-x)^4}+2\sqrt{x}$; $a=3$.

$f(x)=\dfrac{2x-x^3}{\sqrt{x^2+2x}}$; $a=-2$.

Exercice 8

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

$f(x)=\dfrac{-x-5}{x}$; $f(x)=\dfrac{3x-1}{2-5x}$;

$f(x)=\dfrac{1-x^3}{2x+3}$; $f(x)=\dfrac{-3x^2+x}{-5x+10}$.

Exercice 9

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

$f(x)=\dfrac{-2x+3}{x^2-5}$; $f(x)=\dfrac{-x^4+2x}{x^2+2}$;

$f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+1}{x^2+3x}$; $f(x)=\dfrac{-3x^3+x+1}{x^2+x-2}$.

Exercice 10

Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

$f(x)=\left|\dfrac{x^3-3}{x+2}\right|$; $f(x)=\left|\dfrac{x+2}{x^2-5}\right|$;

$f(x)=\dfrac{|x|(2-x)}{1-|x|}$; $f(x)=\dfrac{x^2-|x|-1}{|-2x|-3}$.

Exercice 11

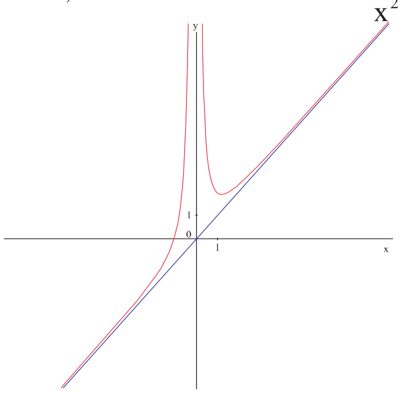
Calculer dans chacun des cas ci-dessous les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$f(x)=\sqrt{x^2+|x|-1} \quad ; \quad f(x)=x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} \quad ;$$

$$f(x)=-\frac{1}{x-4}+\sqrt{\frac{3x}{(x-1)^3}} \quad ; \quad f(x)=x-\frac{1}{\sqrt{(-x+2)^6}}.$$

Exercice 12

Dans le plan muni d'un repère, on a tracé la courbe représentative C, de la fonction $f : x \mapsto x+\dfrac{1}{x^2}$.



1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
3. Montrer que C admet une asymptote verticale dont on donnera une équation.

Exercice 13

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.
2. a-Vérifier que pour tout réel x, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.

 b-En déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

Exercice 14

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2-4x+6}{x^2-3x+2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Factoriser le trinôme x^2-3x+2.
3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, en précisant les asymptotes à C.
4. Déterminer le signe de $f(x)-2$.

En déduire la position de C par rapport à son asymptote en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exercice 15

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par $f(x)=\dfrac{x^2+x-10}{(x-2)^2}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Vérifier que pour tout $x \neq 2$, $f(x)=1+\dfrac{5x-14}{(x-2)^2}$.
3. En déduire les asymptotes à C.
4. Préciser la position de C par rapport à son asymptote en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exercice 16

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.

b. Etudier la parité de f.

2. a. Montrer que pour tout réel x non nul,

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+1}.$$

b. En déduire que f admet un prolongement par continuité en 0.

3. a. Montrer que pour tout réel

$$x>0, \quad f(x)=\sqrt{\frac{1+x^2}{x^2}}-\frac{1}{x}.$$

b. En déduire que f admet une asymptote D d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

c. Etudier la position de C par rapport à D.

4. Etudier la limite de f en $-\infty$ en précisant l'asymptote à C en $-\infty$.

Etudier la position de C par rapport à cette asymptote.

Exercice 17

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier la parité de f.

2. Vérifier que pour tout $x \geq 1$, $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^6}}$.

En déduire $\lim\limits_{+\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}$, puis $\lim\limits_{-\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^3}$.

3. Déterminer les asymptotes à C.

4. Préciser la position de C par rapport à son asymptote en $+\infty$ (respectivement en $-\infty$).

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par

$f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{2x}$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

2. a. Montrer que la droite D d'équation $y = \dfrac{x}{2} - 1$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

b. Etudier la position de C par rapport à D.

Exercice 19

On considère la fonction $f : x \mapsto -x+1+\dfrac{x-1}{(x-2)^2}$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3. Soit Δ la droite d'équation $y = -x + 1$.

a. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C et Δ.

b. Etudier la position de C par rapport à Δ.

4. Soit x un réel différent de 2. On désigne par M et N les points respectifs de C et Δ d'abscisse x.

a. Calculer en fonction de x, la distance MN.

b. Calculer la limite de $f(x) - (-x + 1)$ quand x tend vers l'infini.

c. Interpréter le résultat obtenu.

Exercice 20

Soit la fonction $f : x \mapsto ax+b+\dfrac{1}{3-x}$, où a et b sont deux réels.

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Sachant que $f(2) = 1$ et $f(4) = -3$, déterminer a et b.

3. a. Montrer que C admet une asymptote verticale D, dont on donnera une équation.

b. Soit D' la droite d'équation $y = -x + 2$.

Déterminer les coordonnées du point d'intersection de D et D'.

On note I ce point.

4. On se propose de montrer que I est un centre de symétrie de la courbe C.

Pour tout point $M(x, y)$, on note $N = S_I(M)$.

a. Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M.

b. Soit $M(x, f(x))$ où $x \neq 3$. Vérifier que N est un point de C, si et seulement si, $6 - x \neq 3$ et $f(6 - x) = -2 - f(x)$.

c. Conclure.

Exercice 21

On considère la fonction $f : x \mapsto ax^2+bx+c-\dfrac{1}{x+1}$, où a, b et c sont trois réels.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On suppose que $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{1}{2}$ et $f(2) = \dfrac{8}{3}$.

1. Déterminer les réels a, b et c.

2. On désigne par P la parabole d'équation $y = x^2 - x + 1$.

a. Etudier la position de la parabole P par rapport à la courbe C.

b. Soit x un réel différent de -1, M un point de C et N un point de la parabole P, de même abscisse x.

Calculer en fonction de x, la distance MN.

c. Calculer la limite de $f(x) - (x^2 - x + 1)$ quand x tend vers l'infini.

d. A quelle condition la distance MN est-elle inférieure ou égale à 0.01 ?

Avec l'ordinateur

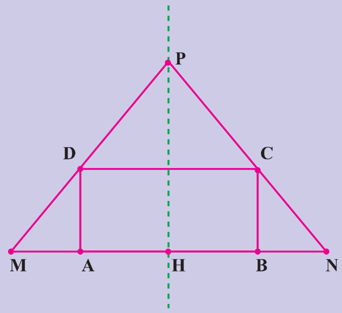
On se donne un rectangle ABCD tel que AB = a et BC = b.

Soit MNP un triangle isocèle de sommet principal P et ABCD un rectangle tels que :

- A et B appartiennent à [MN],
- C appartient [PN]
- D appartient [PM].

Soit H le projeté orthogonal de P sur (MN) et on note PH = x.

On désigne par A(x) l'aire du triangle MNP.

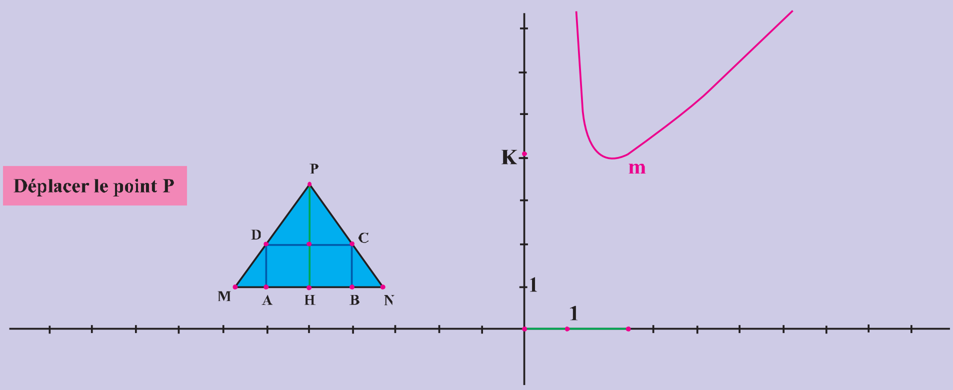


1. Montrer MH = $\dfrac{ax}{2(x-b)}$.

2. En déduire que A(x) = $\dfrac{ax^2}{2(x-b)}$.

On se propose dans cette séquence, d'étudier le comportement de l'aire A(x) du triangle MNP lorsque P varie sur la perpendiculaire à (AB) en H.

- Ouvrir un nouveau fichier cabri et faire apparaître les axes.
- Construire le rectangle ABCD (On pourra prendre AB = 2 et BC = 1)
- La médiatrice de [AB] coupe [CD] en I.
- Placer un point variable P (point sur objet) sur la demi droite opposée à [IH).
- Reporter sur l'axe des abscisses la longueur PH.
- Reporter sur l'axe des ordonnées la longueur MH.
- Placer sur l'axe des ordonnées le point K tel que OK = PH . MH puis le point m de coordonnées (PH, OK).
- Déplacer le point P et conjecturer le comportement de A(x).

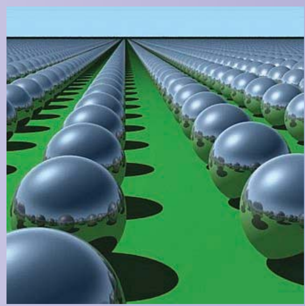


Math – culture

Aborder la notion d'infini en mathématiques peut se faire de plusieurs façons. La première et la plus simple consiste à poser un élément dénommé infini et à le caractériser par certaines de ses propriétés. Un tel élément n'a cependant aucun lien *a priori avec* la notion courante d'infini.
Georg Cantor est le premier à donner une caractérisation de cette notion en termes formels :
Un ensemble est infini s'il est en bijection biunivoque avec l'une de ses parties strictes.
Ainsi l'ensemble Z des entiers relatifs, est infini car l'application le met en bijection avec l'ensemble des entiers pairs.

Georg Cantor

L'image primitive d'infini est l'idée d'un très grand nombre : les étoiles dans le ciel, les gouttes d'eau de la mer.
L'antiquité ne disposait pas de moyen commode d'exprimer les grands nombres, aussi ils pouvaient paraître infinis
Au XIXème siècle, Cauchy(1789-1857) et Weierstrass (1815-1897) ont réussi à donner une définition claire du concept de limite, en abandonnant l'idée de mouvement pour prendre celle d'approximation aussi
fine que l'on veut. Ainsi une fonction qui tend vers l'infini est une fonction qui
peut prendre des valeurs arbitrairement grandes.



Chapitre 5

Nombre dérivé

« Il ne dépend que de nous de suivre la route qui monte et d'éviter celle qui descend. »

Platon

Pour commencer

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit les points A(2, –1), B(5, 2) et C(1, 3).

1. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
2. Déterminer une équation de la droite passant par C et parallèle à la droite (AB).

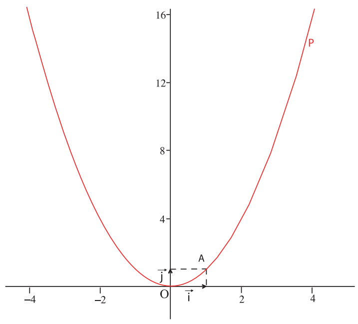
Activité 2

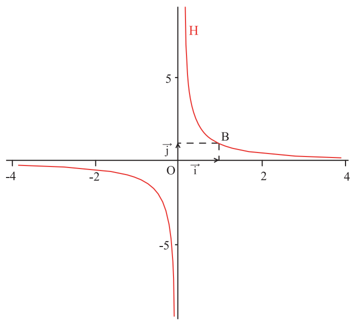
On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x-3}$ et $g : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+3}$.

1. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $f(3.001)$.
2. Déterminer une valeur approchée à 10^{-2} près de $g(-3.001)$.

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté la parabole P d'équation $y = x^2$, l'hyperbole H d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, le point A de P d'abscisse 1 et le point B de H d'abscisse 1.





1. On note E le point de P d'abscisse 1.5.
   a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (AE).
   b. Tracer la droite (AE).
2. On note F le point de H d'abscisse –0.5.
   a. Déterminer une équation cartésienne de la droite (BF).
   b. Tracer la droite (BF).

Cours

1. Nombre dérivé

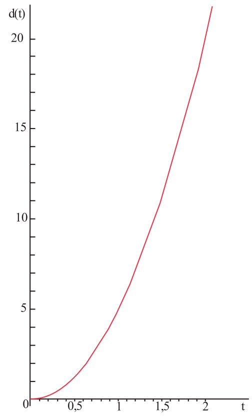
Activité 1

Un mobile se déplace sur un axe (xx') muni d'un repère $(O, \vec{i})$ (1 unité = 1m).
L'abscisse x(t) du mobile est donnée en fonction du temps t (en seconde), par la loi horaire du mouvement $x(t) = 3t - 10$.

1. Déterminer la vitesse moyenne du mobile entre les instants t_0 et $t_0 + h$.
2. Quelle est la vitesse du mobile à l'instant $t_0 = 2$?

La vitesse moyenne entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est le quotient de la distance parcourue par la durée h.

Activité 2

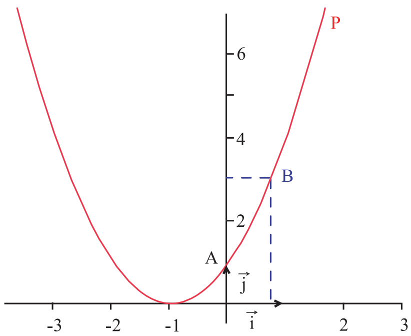


La distance (en mètre) parcourue par un mobile à l'instant t (en seconde) est donnée par la fonction $d : t \mapsto 5t^2$, $t \geq 0$.
On a représenté dans le plan muni d'un repère orthogonal la fonction d.

1. a. Déterminer la distance parcourue par le mobile aux instants t = 1, t = 2 , t = 3, t = 4 et t = 5.
   b. Calculer la vitesse moyenne du mobile sur chacun des intervalles de temps [0, 1], [1, 2], [3, 4] et [4, 5].
2. On se propose de déterminer la valeur exacte de la vitesse instantanée à l'instant $t_0 = 4$.
   a. Soit h un nombre réel. Déterminer la vitesse moyenne entre les instants 4 et 4 + h.
   b. En déduire la valeur exacte de la vitesse instantanée à l'instant $t_0 = 4$.

La vitesse instantanée à l'instant t_0 est la limite lorsque h tend vers zéro de la vitesse moyenne entre les instants t_0 et $t_0 + h$.

Activité 3



Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
La parabole P est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto (1 + x)^2$.
On considère les points A (0, 1) et B (b, $(1+b)^2$), $b \neq 0$.

1. Calculer le coefficient directeur m(b) de la droite (AB).
2. Calculer la limite L de m(b) lorsque b tend vers zéro.
3. Que devient l'équation de la droite (AB) lorsque B se rapproche de A ?
4. On désigne par T la droite d'équation $y = Lx + 1$.

Reproduire le graphique. Tracer la droite T et les droites (AB) pour b = 1 et b = 0.5.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
On dit que f est dérivable en a, s'il existe un nombre réel ℓ tel que

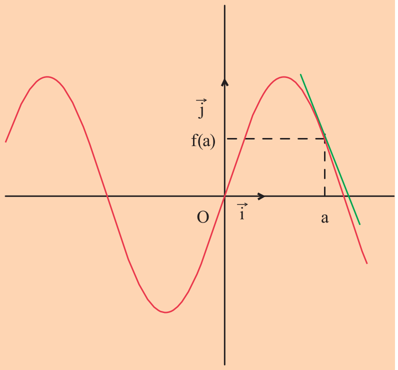
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \quad \text{ou encore} \quad \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell .$$

Le réel ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en a et il est noté f'(a).

Conséquence

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
f est dérivable en a, si et seulement si, la courbe représentative de f admet au point M (a, f(a)) une tangente de pente un nombre réel.
Cette tangente est d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Un vecteur directeur de cette tangente est $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}$.



Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la droite D d'équation $y = -\frac{1}{2}$ et le point $F(0, \frac{1}{2})$.

Soit M(x , y) un point et H son projeté orthogonal sur D.

> La droite D est la directrice de la parabole P et le point F est son foyer.

1. a. Calculer les distances MF et MH.
   b. En déduire que MF = MH, si et seulement si, $y = \frac{1}{2}x^2$.
2. Quel est l'ensemble des points M tels que MF = MH ?
3. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ est dérivable en tout réel a.
4. Soit A(2, 2) un point de la parabole P d'équation $y = \frac{1}{2}x^2$,
   A' son projeté orthogonal sur la droite D et T la tangente à la parabole P en A.
   a. Donner une équation de la tangente T.
   b. Que représente la droite T pour le segment [FA'] ?
5. Soit a un réel et $M(a, \frac{1}{2}a^2)$ un point de la parabole P et H' son projeté orthogonal sur D.
   Que représente la tangente à P en M pour le segment [FH'] ?
6. En déduire un procédé pour construire la tangente à la parabole au point M.

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par H l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ et $M(a, \frac{1}{a})$ un point de H avec $a \neq 0$.

1. Montrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est dérivable en tout réel non nul a.
2. Ecrire une équation de la tangente T à H au point M.
3. La droite T coupe l'axe des abscisses en N et l'axe des ordonnées en N'.
   Déterminer les coordonnées de N et de N' en fonction de a.
4. Calculer l'aire du triangle ONN'.

2. Approximation affine d'une fonction

Activité 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
On suppose que f est dérivable en a.

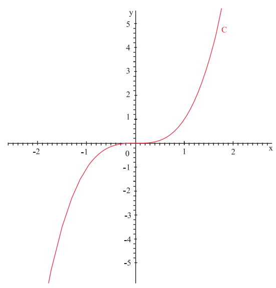
On pose $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$.

1. Montrer que $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.
2. Vérifier que $f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + (x - a)g(x)$ et en déduire que f est continue en a.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors f est continue en a.

Activité 2



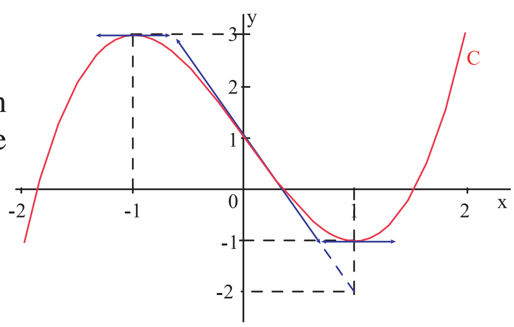
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,
on a représenté la courbe C représentative de la fonction $f : x \mapsto x^3$
On désigne par A le point de la courbe C d'abscisse 1.

1. a. Montrer que la fonction f est dérivable en 1.
   b. Déterminer l'équation de la tangente D à la courbe C au point d'abscisse 1.
2. On désigne par M_1 le point de C d'abscisse 1.1 et par A_1 le point de D d'abscisse 1.1.
   a. Vérifier que $M_1A_1 \leq 10^{-1}$.
   b. En déduire, sans faire de calcul, une valeur approchée à 10^{-1} près de $(1.1)^3$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f est dérivable en a, alors le réel $f(a) = f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$ et on écrit $f(a + h) \simeq f(a) + f'(a)h$, pour h voisin de zéro.

Activité 3



Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé la courbe représentative C d'une fonction f, ainsi que les tangentes à la courbe C en chacun de ses points d'abscisses –1, 0 et 1.

1. Déterminer graphiquement $f'(-1)$, $f'(0)$ et $f'(1)$.
2. Déterminer les équations des tangentes à la courbe C, en chacun de ses points d'abscisses respectives –1, 0 et 1.
3. Donner des approximations affines de $f(-1.001)$, $f(0.0001)$ et $f(1.1)$.

Activité 4

En faisant réagir deux substances chimiques A et B on obtient un produit C dont la quantité en fonction du temps est $q(t) = 2 - \frac{1}{t}$, $t \geq 1$.

1. Tracer, dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative de la fonction $q : t \mapsto q(t)$.
2. Calculer le taux de production moyen entre les instants $t = 1$ et $t = 3$.
3. a. Soit h un réel non nul. Calculer $\frac{q(3+h) - q(3)}{h}$.

   b. En déduire le taux de production instantané à l'instant $t_0 = 3$ et une approximation affine de q(3.001).

> Le taux de production moyen entre les instants t_0 et $t_0 + h$ est le rapport $\frac{q(t_0+h) - q(t_0)}{h}$.
> Le taux de production instantané à l'instant t_0 est la limite, lorsque h tend vers zéro, du taux de production moyen entre les instants t_0 et $t_0 + h$.

3. Nombre dérivé de fonctions usuelles

Activité 1

Soit a un réel.

1. Soit β un réel. Montrer que la fonction constante $f : x \mapsto \beta$ est dérivable en a et calculer f'(a).
2. Montrer que la fonction $g : x \mapsto x$ est dérivable en a et calculer g'(a).
3. Soit α et β deux réels. Montrer que la fonction $h : x \mapsto \alpha x + \beta$ est dérivable en a et calculer h'(a).
4. Soit α et β deux réels. Montrer que la fonction $k : x \mapsto (x - \alpha)^2 + \beta$ est dérivable en a et calculer k'(a).

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \frac{1}{x+1}$.

I. 1. Soit un réel $a > -1$.

a. Calculer $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, $h \neq 0$ et $a + h > -1$.

b. En déduire que f est dérivable en a. Que vaut f'(a) ?

2. Calculer f' (a) pour $a < -1$.

II. Soit α et β deux réels avec α non nul. On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{\alpha x + \beta}$

3. Soit un réel $a > -\frac{\beta}{\alpha}$.

a. Calculer $\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$, $h \neq 0$ et $a + h > -\frac{\beta}{\alpha}$.

b. En déduire que g est dérivable en a. Que vaut g'(a) ?

4. Calculer g'(a) pour $a < -\frac{\beta}{\alpha}$.

Activité 3

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
Soit a un nombre réel strictement positif.

1. Montrer que $\dfrac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{a+h}+\sqrt{a}}$, pour tout réel h tel que $h \neq 0$ et $a + h > 0$.

2. En déduire que f est dérivable en a. Que vaut $f'(a)$?

Dans les activités précédentes, on a établi les résultats suivants.

Théorème

Toute fonction constante est dérivable en tout réel a.
La fonction $x \mapsto x$ est dérivable en tout réel a.
La fonction $x \mapsto \alpha x + \beta$ est dérivable en tout réel a.
La fonction $x \mapsto (x - \alpha)^2 + \beta$ est dérivable en tout réel a.
La fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\alpha x+\beta}$ est dérivable en tout réel $a \neq -\dfrac{\beta}{\alpha}$.
La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable en tout réel $a > 0$.

Le tableau ci-dessous donne les nombres dérivés de quelques fonctions usuelles.

fonction f	f'(a)
$f : x \mapsto \beta$	$f'(a) = 0,\ a \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \alpha x + \beta$	$f'(a) = \alpha,\ a \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto (x - \alpha)^2 + \beta$	$f'(a) = 2(a - \alpha),\ a \in \mathbb{R}$
$f : x \mapsto \dfrac{1}{\alpha x+\beta}$	$f'(a) = \dfrac{-\alpha}{(a\alpha + \beta)^2},\ a \neq -\dfrac{\beta}{\alpha}$
$f : x \mapsto \sqrt{x+\alpha}$	$f'(a) = \dfrac{1}{2\sqrt{a+\alpha}},\ a > -\alpha$
$f : x \mapsto \dfrac{\alpha x+\beta}{\lambda x+\gamma}$	$f'(a) = \dfrac{\alpha\gamma - \lambda\beta}{(\lambda a+\gamma)^2},\ a \neq -\dfrac{\gamma}{\lambda}$

Activité 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$.

1. En utilisant le nombre dérivé de f en 1, estimer $\dfrac{1}{2.5}$, $\dfrac{1}{2.1}$, $\dfrac{1}{2.05}$, $\dfrac{1}{2.001}$, $\dfrac{1}{1.999}$.

2. Comparer les résultats obtenus avec ceux affichés par la calculatrice.

Activité 5

On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

1. En utilisant le nombre dérivé de f en 25, 100, 10 000, estimer $\sqrt{27}$, $\sqrt{24}$, $\sqrt{101}$, $\sqrt{98}$, $\sqrt{10013}$.

2. Comparer les résultats obtenus avec ceux affichés par la calculatrice.

4. Opérations algébriques sur les fonctions dérivables en a

Les règles de dérivation suivantes résultent de la définition du nombre dérivé d'une fonction.

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I , a un réel de I, α et β deux réels.

- Si f et g sont dérivables en a alors les fonctions $f+g$, fg, $\alpha f+\beta g$ sont dérivables en a et on a
  $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
  $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + g'(a)f(a)$,
  $(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$,
- Soit k un entier naturel strictement supérieur à 1.
  Si la fonction f est dérivable en a alors la fonction f^k est dérivable en a et on a
  $(f^k)'(a) = k f'(a) f^{k-1}(a)$.
- Si a est un réel et f est une fonction polynôme définie par
  $f(x) = b_0 + b_1x + b_2 x^2 + ... + b_kx^k$ alors f est dérivable en a et on a
  $f'(a) = b_1 + 2b_2a + \ldots + kb_ka^{k-1}$.

Soit f et g deux fonction définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f et g sont deux fonctions dérivables en a et si f ne s'annule pas en a alors les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{g}{f}$ sont dérivables en a et on a

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = \frac{-f'(a)}{(f(a))^2},$$

$$\left(\frac{g}{f}\right)'(a) = \frac{g'(a)f(a) - g(a)f'(a)}{(f(a))^2}.$$

Activité 1

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$ et $g(x) = x^3 - x^2 - 6x + 4$.
Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le nombre dérivé en 1 .
f, g , f+3g , 5fg, f^4, $\frac{1}{f}$ et $\frac{g}{f}$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - x$ et C sa courbe représentative.
1. Justifier la dérivabilité de f en tout réel a.
2. Déterminer les points de C où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.
3. Déterminer les points de C où la tangente est parallèle à la droite d'équation y = x.

5. Fonction $\sqrt{f}$

Nous admettons le théorème suivant.

Théorème

Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
Si f est une fonction dérivable en a et si $f(a)>0$, alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable en a et on a $\left(\sqrt{f}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}$.

Activité 1

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le nombre dérivé en a.

1. $f(x) = \sqrt{3x+5}$; a = 1. 2. $g(x) = \sqrt{-2x+4}$; a = 0. 3. $h(x) = \sqrt{x^2-2x+2}$; a = 0.

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$.
1. En utilisant le nombre dérivé de f en 0, estimer $\sqrt{1.1}$, $\sqrt{1.01}$, $\sqrt{1.001}$, $\sqrt{1.0001}$.
2. Comparer les résultats obtenus avec ceux affichés par la calculatrice.

6. Nombre dérivé à droite – Nombre dérivé à gauche

Activité 1

On considère la fonction $f : x \mapsto |x|$.

1. Représenter la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
2. Que peut-on conjecturer sur la dérivabilité de la fonction f en zéro ?
3. a. Calculer $\varphi(h) = \dfrac{f(h)-f(0)}{h}$, $h \neq 0$.
   b. Déterminer $\lim\limits_{h \to 0^+} \varphi(h)$.
   c. Déterminer $\lim\limits_{h \to 0^-} \varphi(h)$.
4. Justifier votre conjecture.

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme] b, a].

On dit que f est dérivable à gauche en a, si le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0^-.
Cette limite est alors notée $f'_g(a)$ et est appelée le nombre dérivé de f à gauche en a.

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme [a, b [.

On dit que f est dérivable à droite en a, si le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0^+.
Cette limite est alors notée $f'_d(a)$ et est appelée le nombre dérivé de f à droite en a.

Activité 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

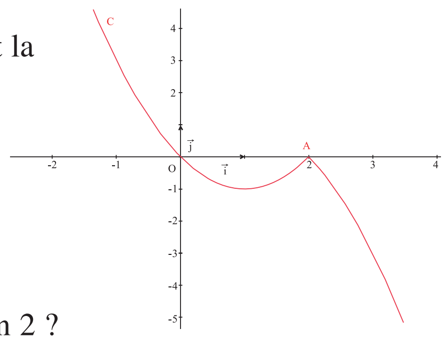
Montrer que f est dérivable en a, si et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.
La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$. On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

7. Demi-tangente à une courbe

Activité 1



Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, C est la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } x \leq 2, \\ 2x - x^2 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

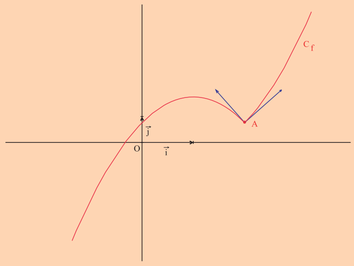
On considère le point A (2, 0).

1. Calculer $f'_g(2)$ et $f'_d(2)$. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?
2. Soit h un réel strictement positif et M un point de C d'abscisse (2+h). Montrer que lorsque M se rapproche de A, les coefficients directeurs des demi-droites [AM) tendent vers le coefficient directeur de la demi-droite [AT_1) où $T_1(3, -2)$.
3. Soit h un réel strictement positif et N un point de la courbe C d'abscisse (2–h). Montrer que lorsque N se rapproche de A, les coefficients directeurs des demi-droites [AN) tendent vers le coefficient directeur de la demi-droite [AT_2) où $T_2(1, -2)$.

Conséquence

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.



- f est dérivable à droite en a, si et seulement si, la courbe représentative de f admet au point A (a, f(a)) une demi-tangente déterminée par $y = f'_d(a)(x-a) + f(a)$, $x \geq a$.

Un vecteur directeur de cette demi-tangente est $\overrightarrow{u_d}\begin{pmatrix} 1 \\ f'_d(a) \end{pmatrix}$.

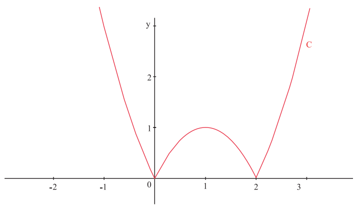
- f est dérivable à gauche en a, si et seulement si, la courbe représentative de f admet au point A (a, f(a)) une demi-tangente déterminée par $y = f'_g(a)(x-a) + f(a)$, $x \leq a$.

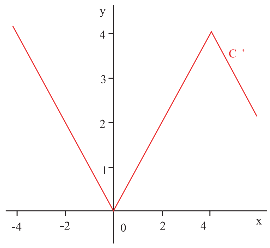
Un vecteur directeur de cette demi-tangente est $\overrightarrow{u_g}\begin{pmatrix} -1 \\ -f'_g(a) \end{pmatrix}$.

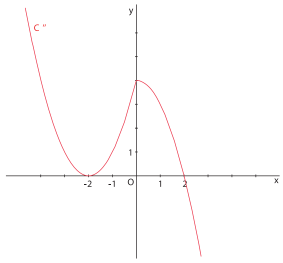
Activité 2

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on a tracé les courbes respectives C, C' et C" des fonctions f, g et h définies sur $\mathbb{R}$, par

$f : x \mapsto |x^2 - 2x|$; $g : x \mapsto \begin{cases} |x| \text{ si } x \leq 4, \\ -x+8 \text{ si } x > 4 \end{cases}$; $h : x \mapsto \begin{cases} (x+2)^2 \text{ si } x \leq 0, \\ -x^2 + 4 \text{ si } x > 0. \end{cases}$







Pour chacune des fonctions f, g et h, identifier les points où elle n'est pas dérivable, donner les équations des demi-tangentes en ces points et les représenter.

8. Dérivabilité d'une fonction sur un intervalle

Définition

- Soit a et b finis ou infinis.
  On dit que la fonction f est dérivable sur]a, b[si f est dérivable en tout réel de]a,b[.
- Soit a un réel et b fini ou infini.
  On dit que la fonction f est dérivable sur [a, b[si f est dérivable sur]a, b[et si elle est dérivable à droite en a.
- Soit a fini ou infini et b un réel.
  On dit que la fonction f est dérivable sur]a, b] si f est dérivable sur]a,b[et si elle est dérivable à gauche en b.
- Soit a et b deux réels.
  On dit que la fonction f est dérivable sur [a, b] si f est dérivable sur]a,b[et si elle est dérivable à droite en a et si elle est dérivable à gauche en b.

Activité 1

Dans chacun des cas suivants, montrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle I.

1. $f : x \mapsto 3x + 1$, $I = \mathbb{R}$.
2. $f : x \mapsto \sqrt{x+1}$, $I =]-1, 1[$.
3. $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x+2}$, $I = \mathbb{R}$.
4. $f : x \mapsto 3x + 5$, $I = [2, 5]$.
5. $f : x \mapsto x\sqrt{x}$, $I = [0, +\infty[$.
6. $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$, $I =]-\infty, 1]$.

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} -x(x+2) & \text{si } x \le 0, \\ x(x+2) & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

1. Etudier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]-\infty, 0]$.
2. Etudier la dérivabilité de f sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
3. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

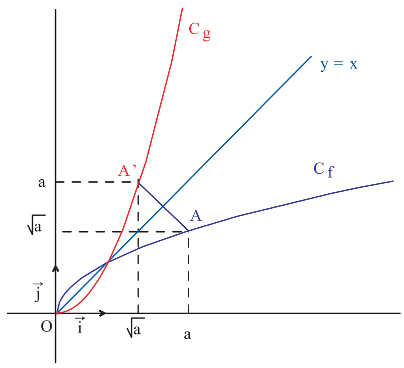
Activité 3

On considère la fonction $f : x \mapsto |2x + 1| + |x - 2|$.

1. Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, -\frac{1}{2}[$; $]-\frac{1}{2}, 2[$ et $]2, +\infty[$.
2. Etudier la dérivabilité de f en $-\frac{1}{2}$ et en 2.

10. Demi-tangente verticale

Activité 1



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a tracé les représentations graphiques C_f et C_g des fonctions f et g définies par $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x^2$.
Soit un réel $a > 0$ et les points $A(a, \sqrt{a})$ et $A'(\sqrt{a}, a)$.

1. Vérifier que A appartient à C_f et que A' appartient à C_g.
2. Soit I le milieu du segment [AA'].
   a. Montrer que I appartient à la première bissectrice d'équation $y = x$.
   b. Montrer que les droites (OI) et (AA') sont perpendiculaires.
   c. En déduire que les points A et A' sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

3. a. Ecrire l'équation de la tangente D à C_f au point A.
   b. Ecrire l'équation de la tangente D' à la courbe de C_g au point A'.
   c. Montrer que D et D' sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

4. a. Montrer que C_g admet une demi-tangente au point O, déterminée par $y = 0, x \geq 0$.
   b. Peut-on tracer une demi-tangente à C_f au point O ?
   c. Calculer la limite de $\dfrac{f(h)-f(0)}{h}$ quand h tend vers 0^+.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

Si $\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$) alors la courbe représentative de f admet au point M (a, f(a)) une demi-tangente verticale.

Si $\lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$) alors la courbe représentative de f admet au point M (a, f(a)) une demi-tangente verticale.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -\sqrt{|x|}$.

1. Tracer C la courbe représentative de g.
2. Etudier la limite de $\dfrac{g(h)-g(0)}{h}$ quand h tend vers 0.
3. Tracer les demi-tangentes à C au point d'abscisse 0.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C, la courbe représentative d'une fonction f dérivable en 1 et telle qu'une équation de la tangente au point d'abscisse 1 est $y = \frac{1}{2}x + 3$. Alors $f'(1) =$

☐ $\frac{7}{2}$ ☐ $\frac{1}{2}$ ☐ 3.

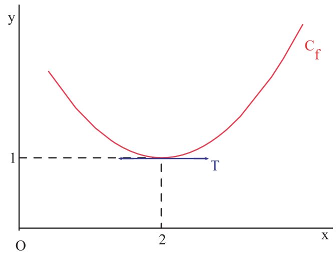
2. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.
Alors la tangente à C au point d'abscisse -1 a pour équation

☐ $y = -3x - 1$ ☐ $y = 3(x+1) - 1$ ☐ $y = (x+1) - 1$.

3. Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentative C de la fonction f définie par $f(x) = x^3 - x$ admet au point d'abscisse 0 une tangente de coefficient directeur

☐ 3 ☐ -1 ☐ 0.

4. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, C_f est la courbe représentative d'une fonction f et T est la tangente à C_f au point d'abscisse 2. Graphiquement on a $f'(2) =$



☐ 0 ☐ 2 ☐ 1.

5. Dans le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. Alors il existe une tangente à C parallèle à

☐ l'axe$(O, \vec{i})$ ☐ la droite $y = 2x + 3$ ☐ la droite $y = -2x + 3$.

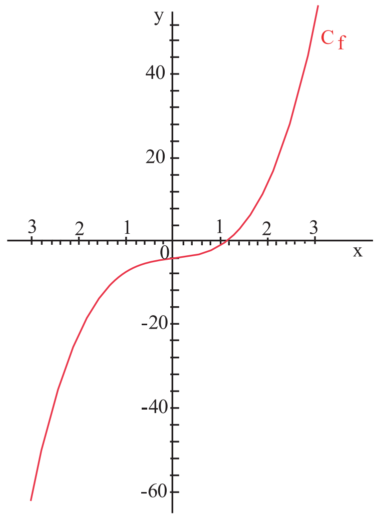
VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si f est une fonction dérivable à droite et à gauche en a, alors f est dérivable en a.
2. La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable en 0.
3. La fonction $x \mapsto \sqrt{2x+3}$ est dérivable à droite en $-\frac{3}{2}$.
4. Si f est continue en a, alors f est dérivable en a.
5. Si f est une fonction impaire dérivable en 0 alors $f'(0) = 0$.

Mobiliser ses compétences

Situation 1



Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on a représenté la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 + x - 4$.

1. Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = 0$.
2. On désigne par α la solution de l'équation $f(x) = 0$.
   Montrer que $\alpha \in [1, 2]$.
3. On se propose de déterminer des valeurs approchées de α par excès en appliquant la méthode de Newton.
   a. Déterminer l'abscisse x_1 du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1.
      Vérifier que $\alpha \in [1, x_1]$.
   b. Déterminer l'abscisse x_2 du point d'intersection de l'axe des abscisses et de la tangente à la courbe au point d'abscisse x_1.
      Vérifier que $\alpha \in [1, x_2]$.
   c. Réitérer le procédé en considérant la tangente au point d'abscisse x_2.
      En déduire un encadrement plus précis de α

Situation 2

Soit f la fonction définie pour tout réel x différent de 1 par $f(x) = \dfrac{1-x^{10}}{1-x}$.

1. Montrer que pour tout réel x différent de 1, $f(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^9$.
2. Soit a un réel différent de 1, calculer de deux manières différentes le réel $f'(a)$.
3. En déduire la somme $1 + 2a + 3a^2 + ... + 9a^8$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Calculer le nombre dérivé de la fonction f en a.

$f(x) = x^4 - 3x^3 + 5$; $a = 1$.

$f(x) = \dfrac{4}{2x+3}$; $a = -1$.

$f(x) = \dfrac{3x+5}{-2x+3}$; $a = \dfrac{1}{3}$.

$f(x) = \dfrac{-3}{x^2+3}$; $a = 2$.

$f(x) = (2x+3)^3$; $a = \dfrac{1}{2}$.

$f(x) = \sqrt{4x+5}$; $a = 0$.

$f(x) = x\sqrt{4x}$; $a = 1$.

$f(x) = \sqrt{-x^2+5x-4}$; $a = 3$.

Exercice 2

Pour chacune des fonctions ci-dessous, étudier la continuité, la dérivabilité à droite, la dérivabilité à gauche et la dérivabilité en a.

$f : x \mapsto |x|\sqrt{x}$; $a = 0$.

$g : x \mapsto |x-1|$; $a = 1$.

Exercice 3

Calculer, dans chaque cas, la limite de f en a, en utilisant le nombre dérivé en a d'une fonction que l'on déterminera.

$f(x) = \dfrac{x^2-16}{x+4}$, $a = -4$.

$f(x) = \dfrac{\dfrac{1}{x+5} - 1}{x+4}$, $a = -4$.

$f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$, $a = 1$.

$f(x) = \dfrac{(x+1)^{2006}-1}{x}$, $a = 0$.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 4x - 7$.

1. Déterminer le nombre dérivé de f en 1.
2. On désigne par C la courbe représentative de f et par T la tangente à C au point d'abscisse 1.

a. Déterminer une équation de T.

b. Tracer T et C.

Exercice 5

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit la fonction f définie sur $[-4, +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+4}$.

1. Déterminer le nombre dérivé de f en 0.
2. On désigne par C la courbe représentative de f et par T la tangente à C au point d'abscisse 0.

a. Déterminer une équation de T.

b. Tracer T et C.

Exercice 6

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-1}$.

1. Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$, $f(x) = 3 + \dfrac{4}{x-1}$.
2. Déterminer le nombre dérivé de f en 3.
3. On désigne par C la courbe représentative de f et par T la tangente à C au point d'abscisse 3.

a. Déterminer une équation de T.

b. Tracer T et C.

Exercice 7

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = ax^2 + bx + c$ et telle que

- la courbe représentative de f passe par le point $A(-1, -8)$,
- la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 3$.

1. Déterminer les réels a, b et c.
2. Représenter la fonction f ainsi que la tangente T.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par P et P' les paraboles d'équations respectives $y = x^2$ et $y = -\dfrac{1}{3}x^2 + 1$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de P et de P', on notera A le point d'abscisse négative et B le point d'abscisse positive.

2. Soient T et T' les tangentes respectives à P et P' au point A.
a. Déterminer une équation de chacune des droites T et T'.
b. En déduire que les droites T et T' sont perpendiculaires.
3. Soient D et D' les tangentes respectives à P et P' au point B.
a. Déterminer une équation de chacune des droites D et D'.
b. En déduire que les droites D et D' sont perpendiculaires.
4. Tracer P, P', T, T', D et D'.

Exercice 9

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, on désigne par C et C', les courbes représentatives respectives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ et $g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$.

1. Vérifier que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer le nombre dérivé de f respectivement de g en tout réel a.
3. Soit a un réel. Montrer que les tangentes respectives à C et à C' au point d'abscisse a sont parallèles.

Exercice 10

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on désigne par C, la courbe représentative de la fonction f définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{5}{2x^2 + 3}$.

1. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer le nombre dérivé de f en tout réel a.
3. En déduire, lorsqu'elles existent
a. les tangentes à C qui sont parallèles à l'axe $(O, \vec{i})$,
b. les tangentes à C qui sont parallèles à l'axe $(O, \vec{j})$.
c. les tangentes à C qui sont parallèles à la première bissectrice d'équation $x = y$.
d. les tangentes à C qui sont parallèles à la deuxième bissectrice d'équation $x = -y$.

Exercice 11

Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C, la courbe représentative de la fontion f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$.

1. Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer le nombre dérivé de f en tout réel a.
3. Soit A et B les points de C d'abscisses respectives -1 et 2.
a. Déterminer le coefficient directeur de la droite (AB).
b. Déterminer les points de C en lesquels la tangente à C est parallèle à la droite (AB).

Exercice 12

Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^5 - 3x^3$.

1. Montrer que f est impaire.
2. a. Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
b. Calculer le nombre dérivé de f en tout réel a.
3. Soit a un réel. Montrer que les tangentes à C respectivement aux points d'abscisses a et $-$ a sont parallèles.

Exercice 13

Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C et C', les courbes représentatives respectives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = x^2 + 2x - 1$ et $g(x) = -x^2 - 6x - 9$.

1. Montrer que C et C' se coupent en un seul point que l'on notera A.
2. Montrer que les courbes C et C' admettent au point A la même tangente T dont on déterminera une équation.
3. Montrer que C est au-dessus de T et que C' est en dessous de T.
4. Tracer C, C' et T.

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^4 + 4x - 5$.

1. Déterminer le nombre dérivé de f en 1.
2. Estimer f(1,0001) et f(0.999999).
3. Comparer les résultats obtenus avec ceux affichés par la calculatrice.

Exercice 15

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x+5}$.

1. Déterminer le nombre dérivé de f en 10.
2. Estimer $\sqrt{25.0002}$, $\sqrt{25.000002}$.
3. Comparer les résultats obtenus avec ceux affichés par la calculatrice.

Exercice 16

Soit la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x} & \text{si } x \leq 0, \\ x^3 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 0 ?
2. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0.
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 17

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

On désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$.

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. a. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en –2.
b. La fonction f est-elle dérivable en –2 ?
c. Déterminer des équations des demi-tangentes à C en –2.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 2.
b. La fonction f est-elle dérivable en 2 ?
c. Déterminer des équations des demi-tangentes à C en 2.
4. Tracer C, ainsi que les demi-tangentes à C respectives au points d'abscisse 2 et –2.

Exercice 18

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{2x-6} & \text{si} \quad x \geq 3 \\ x^2 - 3x & \text{si} \quad x < 3 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue en 3 ?
2. a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 3.
b. Déterminer une équation de la demi-tangente à C en 3.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 3.
b. En déduire que C admet une demi-tangente verticale à droite en 3.
c. La fonction f est-elle dérivable en 3 ?
4. Tracer C, ainsi que les demi-tangentes à C au point d'abscisse 3.

Exercice 19

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

Tracer la représentation graphique d'une fonction f qui a les caractéristiques suivantes

- f est définie et continue sur [–2, 4].
- la courbe de f admet en 1 une tangente d'équation $y = 3$.
- la courbe de f admet en 4 une demi-tangente d'équation $y = -2$.
- la courbe de f admet en -2 une demi-tangente verticale,
- l'équation $f(x) = 0$ admet –2 et 3 pour solutions.
- f est décroissante sur [1, 4].
- f est positive sur [–2, 3].

Exercice 20

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1. Tracer la représentation graphique d'une fonction f qui a les caractéristiques suivantes
- f est définie et continue sur [–1, 1],
- f est paire,
- f est croissante sur [0, 1],
- f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

A-t-on une unique fonction qui vérifie ces conditions ?

2. Vérifier, à l'aide du graphique, que la fonction f est dérivable à gauche en 0. Que vaut $f'_g(0)$?
3. La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

Exercice 21

Soit f la fonction définie sur [–1, 1] par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

1. Montrer que f est paire.
2. Déterminer les équations des demi-tangentes aux points d'abscisses –1 et 1.

On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

3. On se propose de montrer que C_f est le demi-cercle C de centre O et de rayon 1 situé au dessus de l'axe des abscisses.
a. Soit M un point de C_f d'abscisse x.
Déterminer OM et en déduire que M appartient au demi-cercle C.
b. Soit N un point de C d'abscisse x.
Déterminer l'ordonnée de N en fonction de x et en déduire que N appartient à C_f.
c. Conclure.
4. Tracer C_f ainsi que les demi-tangentes aux points d'abscisses –1 et 1.
5. Soit A le point de C_f d'abscisse $\frac{3}{5}$.
a. Déterminer une équation de la tangente T à C_f au point A.
b. La droite T coupe l'axe des abscisses en P.
Déterminer les coordonnées de P puis calculer OP et PA.
c. En déduire que la droite T est perpendiculaire à la droite (OA).

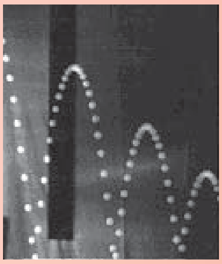
Avec l'ordinateur

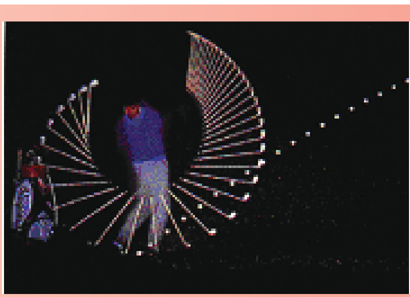
Soit C la parabole représentative de la fonction f : $x \mapsto x^2 + 2x - 3$ et A le point de C d'abscisse 1.
A tout point M de C distinct de A, on désigne par m le coefficient directeur de la sécante (AM).
On se propose dans cette séquence, d'étudier à l'aide d'un tableur, le comportement des réels m lorsque M varie sur la parabole C privée du point A.
Dans la cellule A1, on tape f(x) = x^2 + 2*x – 3 puis on fusionne A1 et B1.
On choisit une valeur initiale de x0, dans B2 (par exemple 1) et dans B3 on calcule f(x0).

	A	B	C	D
1	f(x)=	x^2+2x-3		
2	x0=	1		
3	f(x0)=	0		
4				
5-6	h	x=x0+h	f(x)	$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$
7	0,2	1,2	0,84	4,2
8	0,1	1,1	0,41	4,1
9	0,05	1,05	0,2025	4,05
10	0,025	1,025	0,100625	4,025
11	0,0125	1,0125	0,05015625	4,0125
12	0,00625	1,00625	0,025039063	4,00625
13	0,003125	1,003125	0,012509766	4,003125
14	0,0015625	1,0015625	0,006252441	4,0015625
15	0,00078125	1,00078125	0,00312561	4,00078125
16	0,00039063	1,000390625	0,001562653	4,000390625
17	0,00019531	1,000195313	0,000781288	4,000195313
18	9,7656E-05	1,000097656	0,000390635	4,000097656
19	4,8828E-05	1,000048828	0,000195315	4,000048828
20	2,4414E-05	1,000024414	9,76568E-05	4,000024414
21	1,2207E-05	1,000012207	4,88283E-05	4,000012207
22	6,1035E-06	1,000006104	2,44141E-05	4,000006103
23				

L'écart initial entre x et x0 étant égal à 0,2 ; on le réduit à chaque étape à sa moitié. Ainsi dans la cellule A7, on tape 0,2 et dans la cellule A8 on écrit la formule A7/2, puis on la recopie vers le bas (jusqu'à A22)
Dans la cellule B7 on inscrit la formule =$B$2+A7 puis dans C7, on écrit la formule =B7^2+2*B7-3 et enfin dans D7, on écrit la formule =(C7-B3)/A7.
Recopier la plage A8D8 vers le bas jusqu'à A22D22.
Que peut-on conjecturer sur la limite en x0 de f ?

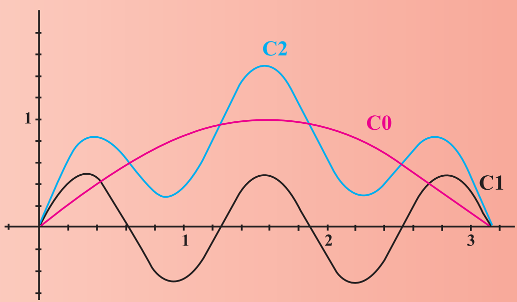
Sur les chronophotographies ci-contre, on repère les positions successives de la balle au cours du temps
Par dérivation numérique, on peut obtenir les différentes valeurs des vitesses.

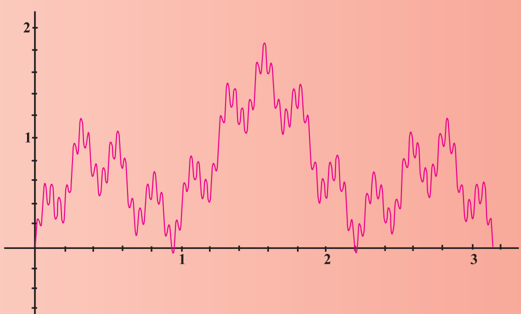




Au XVIIIe siècle, Jean d'Alembert introduit la définition du nombre dérivé en tant que limite du taux d'accroissement sous une forme semblable à celle qui est utilisée et enseignée de nos jours, et c'est seulement avec les travaux de Weierstrass au milieu du XIXe siècle que le concept de nombre dérivé sera entièrement formalisé.

La première fonction continue partout mais dérivable nulle part a été construite par Weierstrass. Cette fonction a aidé à clarifier les notions de continuité et de dérivabilité, et a obligé les mathématiciens a en donner des définitions précises : auparavant, ceux-ci se contentaient des définitions " intuitives ", et pensaient qu'une fonction continue était toujours dérivable sauf éventuellement en quelques points :
la construction de Weierstrass est venue contredire cette idée intuitive.
L'idée de Weierstrass est de partir d'une fonction f_0 qui est parfaitement dérivable, puis on perturbe cette première fonction en lui ajoutant une deuxième fonction, notée f_1, de façon que la courbe de $f_1 + f_0$, zig-zague autour de celle de f_0.
Par itération de ce procédé, on obtient la courbe de Weierstrass, courbe d'une fonction partout continue et nulle part dérivable.





Chapitre

6

Fonction dérivée

" Ne lise pas mes principes qui n'est pas mathématicien "

De Vinci

Fonction dérivée

Pour commencer

Activité 1

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les inéquations ci-dessous.

$x^4 + 2x^2 + 1 > 0$;

$x^2 - 3x + 1 < 0$;

$\dfrac{x^3 - 1}{(x + 2)^2} > 0$.

Activité 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par $f(x) = x^3 + 3x$.

1. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f admet-elle un maximum sur $\mathbb{R}$?
3. La fonction f admet-elle un minimum sur $\mathbb{R}$?

Activité 3

Soit a et b deux réels distincts et f une fonction définie sur [a, b].

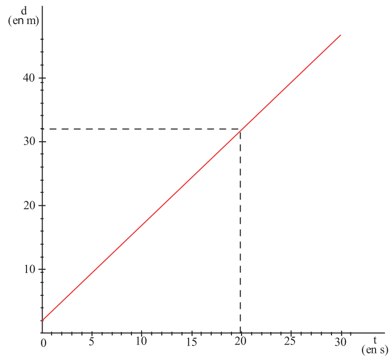
Montrer que si f est monotone sur [a, b] alors elle admet un maximum et un minimum sur [a, b].

Cours

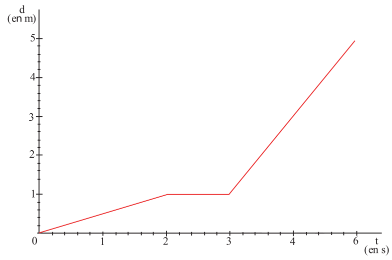
1. Fonction dérivée

Activité 1

1. Le mouvement d'un mobile est décrit par le graphique ci-contre, où d(t) désigne la distance parcourue à l'instant t. Montrer que le mobile se déplace à vitesse constante.



2. Le mouvement d'un mobile est décrit par le graphique ci-contre, où d(t) désigne la distance parcourue à l'instant t.
   a. Quelle est la distance parcourue entre t = 0 et t = 2 ?
   b. Quelle est la vitesse moyenne entre t = 0 et t = 2 ?
   c. Déterminer la vitesse instantanée v(t), sur chacun des intervalles $[0\,,\ 2[$, $]2\,,\ 3[$ et $]3\,,\ 5[$?



Activité 2

Un mobile se déplace sur un axe (xx') muni d'un repère $(O\,,\vec{i})$ (1 unité = 1 m).
L'abscisse x(t) du mobile est donnée en fonction du temps t (en seconde), par la loi horaire du mouvement $x(t) = t^2 - 2t - 3$, $t \in [0\,,\ 5]$.
1. Exprimer la vitesse instantanée v(t) du mobile, à l'instant t.
2. A quel instant t_0, la vitesse instantanée s'annule-t-elle ?
   Quelle est alors la position du mobile ?
3. A quel instant t_1, le mobile passe-t-il par le point O ?
   Quelle est alors sa vitesse instantanée ?
4. Représenter la fonction $v : t \mapsto v(t)$, $t \in [0,\ 5]$.

Définition

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I. On appelle fonction dérivée de f et on note f', la fonction qui à tout réel x appartenant à I, associe le nombre dérivé f'(x), de f en x.

Soit a et b deux réels, f une fonction définie sur [a, b] et dérivable sur]a, b[.
Si f admet un nombre dérivé à droite en a (respectivement à gauche en b), en adoptant ce nombre dérivé pour f'(a) (respectivement f'(b)) on peut définir la fonction dérivée de f sur [a, b[(respectivement]a, b]).

2. Opérations sur les fonctions dérivées

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I, α et β deux réels.
• Les fonctions f+g, fg, $\alpha f + \beta g$ sont dérivables sur I et on a
$(f + g)' = f' + g'$; $(fg)' = f'g + g'f$; $(\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g'$.
• Pour tout entier naturel $k \geq 2$, la fonction f^k est dérivable sur I et on a $(f^k)' = kf'\ f^{k-1}$.

En particulier toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I telles que f ne s'annule pas sur I.
• Les fonctions $\frac{1}{f}$ et $\frac{g}{f}$ sont dérivables sur I et on a

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = \frac{-f'}{f^2} \ ; \ \left(\frac{g}{f}\right)' = \frac{g'f - gf'}{f^2} .$$

• Pour tout entier naturel $k \geq 1$, la fonction $\frac{1}{f^k}$ est dérivable sur I et on a

$$\left(\frac{1}{f^k}\right)' = \frac{-kf'}{f^{k+1}} .$$

Activité 3

Soit les fonctions f et g définies sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2x^2 + 2$ et $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$.
Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes, ainsi que sa fonction dérivée.
$f + g$; fg ; $\frac{1}{2}f - 3g$; f^5 ; $\frac{1}{f}$; $\frac{1}{f} + g$.

3. Dérivée de la fonction $\sqrt{f}$

Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I. Alors la fonction $\sqrt{f}$ est dérivable sur I et on a $\left(\sqrt{f}\right)' = \frac{f'}{2\sqrt{f}}$.

Activité 4

Dans chacun des cas suivants, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$.

1. $f(x) = \sqrt{2x+1}$.
2. $f(x) = \sqrt{3x^2+1}$.
3. $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$.

4. Dérivée de la fonction x $\mapsto$ f(αx + β)

Activité 1

1. Vérifier que la fonction f : $x \mapsto \dfrac{3}{x^2}$ est dérivable en tout réel non nul et calculer f'(x).

2. On considère la fonction g : $x \mapsto f(2x + 3)$.
   Montrer que g est dérivable en tout réel x différent de $-\dfrac{3}{2}$ et que $g'(x) = 2f'(2x+3)$, pour tout x différent de $-\dfrac{3}{2}$.

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit α et β deux réels. Alors la fonction g : $x \mapsto f(\alpha x + \beta)$ est dérivable en tout réel x tel que $\alpha x + \beta$ appartient à I. De plus la fonction g' est définie par $g'(x) = \alpha f'(\alpha x + \beta)$.

5. Sens de variation

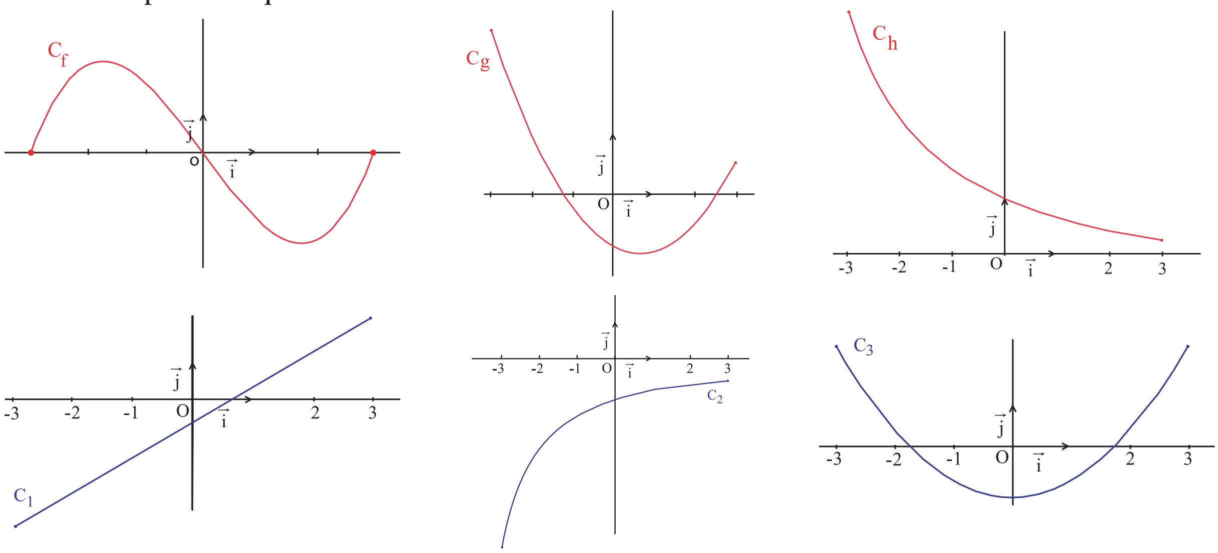
Activité 1

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a un élément de I et φ la fonction définie par $\varphi(h) = \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$, pour tout $h \neq 0$ tel que a + h appartient à I.

1. Montrer que si f est croissante sur I alors $\varphi(h) \geq 0$. En déduire le signe de f'(a).
2. Que peut-on dire du signe de f' lorsque f est croissante sur I ?
3. Donner une condition suffisante sur les variations de f pour que f'(x) soit négatif, pour tout x de I.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère.
On a représenté les fonctions f, g et k ainsi que leurs fonctions dérivées f', g' et k'.
Identifier pour chaque fonction la courbe de sa fonction dérivée.

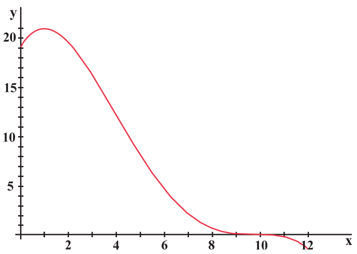


Activité 3

Représenter une fonction f définie et dérivable sur [–1, 3] telle que f' est négative sur [–1, 0[et positive sur [0, 3].

Activité 4

Une météorologiste affirme que, dans sa ville, la température (en °C), une journée de printemps, peut être évaluée approximativement à l'aide de la fonction T définie par $T(x) = -\frac{1}{100}(x-10)^3(x+2)$ où x est le nombre d'heures qui se sont écoulées depuis midi et $0 < x < 12$. On a représenté ci-contre, la fonction T.

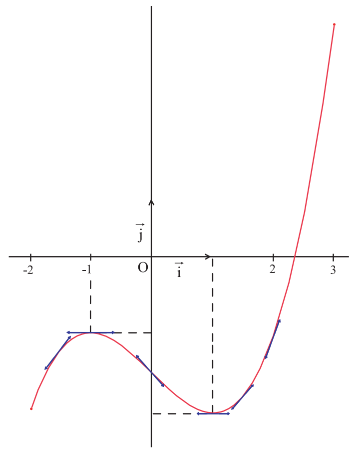


1. Calculer le taux de variation instantané T' de la température.
2. a. Déterminer l'intervalle de temps sur lequel T'(t) est positif.
   b. Lire graphiquement les variations de la température sur cet intervalle.
3. a. Déterminer l'intervalle de temps sur lequel T'(t) est négatif.
   b. Lire graphiquement les variations de la température sur cet intervalle.

Activité 5

On a représenté dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une fonction f définie et dérivable sur [–2, 3].

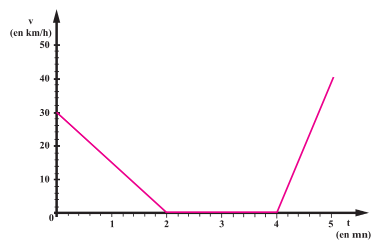
1. Donner les valeurs de f'(-1) et f'(1).
2. a. Déterminer graphiquement les variations de f sur [–2, –1].
   b. Déterminer graphiquement le signe de f'(x), pour x appartenant à [–2, –1].
3. a. Déterminer graphiquement les variations de f sur [–1, 1].
   b. Déterminer graphiquement le signe de f'(x), pour x appartenant à [–1, 1].
4. a. Déterminer graphiquement les variations de f sur [1, 3].
   b. Déterminer graphiquement le signe de f'(x), pour x appartenant à [1, 3].
5. Etablir le lien entre les variations de f et le signe de f'.



Activité 6

On a représenté la variation pendant 5 minutes de la vitesse d'une rame de métro.

1. La rame de métro a marqué un arrêt dans une station. Retrouver graphiquement, la période d'arrêt.
2. Décrire le mouvement de la rame.



Activité 7

1. Tracer la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$, telle que la tangente en chacun de ses points soit de pente nulle.
2. Que peut-on conjecturer sur f ?

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction f est constante sur I, si et seulement si, pour tout x appartenant à I, $f'(x) = 0$.
La fonction f est croissante sur I, si et seulement si, pour tout x appartenant à I, $f'(x) \geq 0$.
La fonction f est décroissante sur I, si et seulement si, pour tout x appartenant à I, $f'(x) \leq 0$.

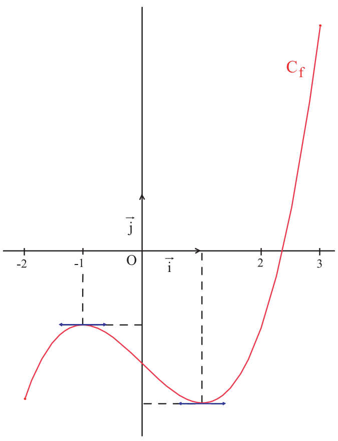
Activité 8

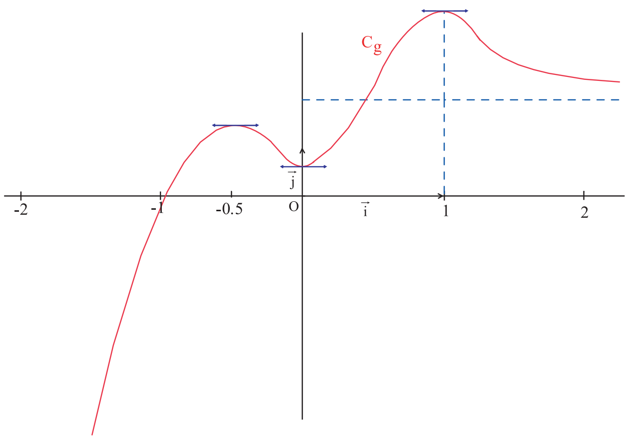
Soit un réel $\alpha > 0$.
Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle $]-\alpha, \alpha[$.
1. Montrer que si f est paire alors f' est impaire.
2. Montrer que si f est impaire alors f' est paire.

6. Extrema

Activité 1

Le plan est muni d'un repère.
Les courbes ci-dessous représentent des fonctions f et g dérivables sur $\mathbb{R}$.





1. On considère la restriction f_1 de f à l'intervalle $]-2, 2[$.
   a. Identifier les réels en lesquels la fonction f_1 admet un maximum ou un minimum.
   b. Donner la valeur de la dérivée de f_1 en ces réels.
   c. Etudier le signe de f_1' à droite et à gauche de chacun de ces réels a.
   d. On désigne par M le maximum de f_1 sur $]-2, 2[$; M est-il un maximum de f sur $\mathbb{R}$?
2. Reprendre les mêmes questions, pour la fonction g_1, restriction de g à $]-1, 1[$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I.

On dit que f admet un maximum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I tel que $f(x) \leq f(a)$, $x \in J$.

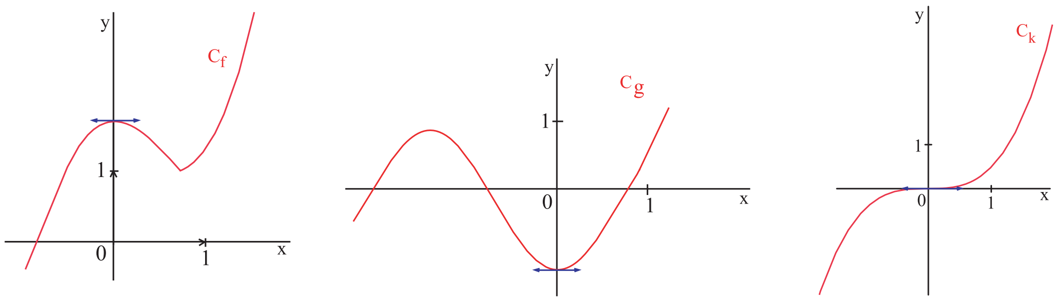
On dit que f admet un minimum local en a, s'il existe un intervalle ouvert J contenant a et inclus dans I, tel que $f(x) \geq f(a)$, $x \in J$.
Lorsque f admet un minimum ou un maximum local en a on dit que f admet un extremum local en a.

Théorème (admis)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, et a un élément de I.
Si f admet un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère.
Les courbes ci-dessous représentent des fonctions f, g et k dérivables sur $\mathbb{R}$.
On a représenté pour chaque fonction la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.



1. Que valent $f'(0)$, $g'(0)$ et $k'(0)$?
2. Quelles sont les courbes qui présentent un extremum local en 0 ?
3. a. Déterminer le signe de $k'(x)$ pour $x > 0$.
   b. Déterminer le signe de $k'(x)$ pour $x < 0$.

Dans l'activité précédente les fonctions proposées ont toutes des dérivées qui s'annulent en zéro. Cependant, une des fonctions ne possèdent pas un extremum local en 0.
Dans ce qui suit on se propose de déterminer une condition suffisante pour qu'une fonction dérivable admette un extremum local.

Activité 3

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et a un réel de I. Soit h un réel strictement positif tel que l'intervalle $]a-h, a+h[$ soit inclus dans I. On désigne par g la restriction de f à l'intervalle $]a-h, a+h[$.

1. On suppose que
   $g'(a) = 0$,
   $g'(x) > 0$, $a-h < x < a$,
   $g'(x) < 0$, $a < x < a+h$.
   a. Montrer que g admet un maximum en a.
   b. Donner une condition suffisante pour que f admette un maximum local.
2. On suppose que
   $g'(a) = 0$,
   $g'(x) < 0$, $a-h < x < a$,
   $g'(x) > 0$, $a < x < a+h$.
   a. Montrer que g admet un minimum en a.
   b. Donner une condition suffisante pour que f admette un minimum local.

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I, a un réel de I et $h > 0$ tel que $]a-h, a+h[\subset I$.
Si f' s'annule en a en changeant de signe alors f admet un extremum local en a.

7. Tableau de variation

Activité 1

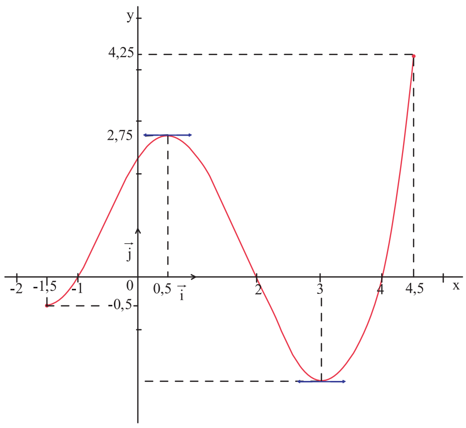
On considère une fonction f définie et dérivable sur $[-2, +\infty[$.
On a synthétisé dans le tableau ci-contre, dit tableau de variation, les limites aux bornes et les variations de la fonction f.

x	-2		0		3		$+\infty$
signe de f'(x)							
f	1	↗	5	↘	-4	↗	$+\infty$

1. Donner les limites de f aux bornes de $[-2, +\infty[$.
2. Décrire les variations de f.
3. Donner le signe de f' et compléter le tableau.
4. Identifier les extrema locaux de f.
5. Déterminer le minimum de f sur $[-2, +\infty[$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère.
On a représenté ci-contre la courbe représentative d'une fonction f définie et dérivable sur $[-1.5, 4.5]$.



1. a. Dresser le tableau de variation de la fonction f.
   b. En déduire le signe de la dérivée f' sur $[-1.5, 4.5]$.
2. On suppose que la fonction f est la fonction dérivée d'une fonction g définie et dérivable sur $[-1.5, 4.5]$.
   a. Donner le signe de la fonction f sur $[-1.5, 4.5]$.
   b. Dresser le tableau de variation de la fonction g.

8. Problèmes

Activité 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$.

1. Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'(x). Etudier le signe de f'.
3. a. Dresser le tableau de variation de f.
   b. Déterminer les extrema locaux de f.
   c. Montrer que l'équation f(x) = 0 admet exactement trois racines.
   d. Donner pour chacune des racines un encadrement à 10^{-1} près.
4. Discuter suivant les valeurs du réel m, le nombre des solutions de l'équation f(x) = m.

Activité 2

1. a. Montrer que $1 - x \leq \dfrac{1}{1+x}$, pour tout $x \geq 0$.
   b. En déduire que $1 - x \leq \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$, pour tout $x \geq 0$.
2. Montrer que $\sqrt{1+x} \leq 1 + \dfrac{1}{2}x$, pour tout $x \geq 0$.
3. Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}x^2 - \sqrt{1+x}$.
   a. Déterminer la dérivée f' de f.
   b. Utiliser la question 1, pour déduire le signe de f'.
   c. En déduire que $1 + \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}x^2 \leq \sqrt{1+x}$, pour tout $x \geq 0$.
4. Vérifier que $1 + \dfrac{10^{-15}}{2}$ est une valeur approchée de $\sqrt{1+10^{-15}}$ à 10^{-30} près.

Activité 3

Soit un entier $k \geq 1$.

1. Montrer que $x^k \geq k(x - 1)$, pour tout $x \geq 1$.
2. En déduire que $x^k \geq k(x - 1)$, pour tout $x \geq 0$.

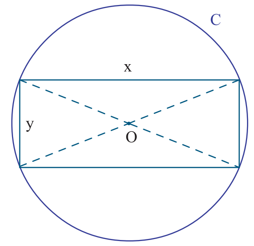
Activité 4

Soit $a_1, a_2, \dots, a_n$ des réels et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = (a_1 - x)^2 + (a_2 - x)^2 + \dots + (a_n - x)^2$.
En quel réel x la fonction f atteint-elle son minimum ?

Activité 5

De tous les rectangles de périmètre 20 cm, quel est celui qui a la plus grande aire ?

Activité 6



Soit C un cercle de rayon 1.
On se propose de construire un rectangle inscrit dans C de périmètre maximal.
On modélise la situation par la figure ci-contre.

1. Exprimer y en fonction de x et en déduire l'expression du périmètre p(x) du rectangle.
2. Etudier sur l'intervalle]0, 2[les variations de la fonction p qui à x associe p(x).
3. En déduire les dimensions du rectangle de périmètre maximal inscrit dans le cercle. Faire une figure dans ce cas.

Activité 7

Une compagnie loue, à des groupes de 15 personnes ou plus, des bus d'excursion dont la capacité est de 80 personnes. Si un groupe compte exactement 15 personnes, chacune d'elles doit payer 90 dinars. Pour les groupes plus nombreux, le tarif par personne est réduit de n dinars lorsque n personnes s'ajoutent aux premières.
On se propose de déterminer l'effectif d'un groupe pour que la location d'un bus rapporte un revenu maximal.
Soit n le nombre de personnes s'ajoutant aux quinze premières d'un groupe. On désigne par R(n) le revenu de la compagnie en fonction de n.

1. Vérifier que $R(n) = (15 + n)(90 - n)$.
2. On désigne par $f : x \mapsto (15 + x)(90 - x)$, la fonction qui modélise la situation.
   a. Etudier les variations de la fonction f sur l'intervalle [0, 65].
   b. En déduire le réel x_0 de l'intervalle [0, 65] en lequel la fonction f atteint son maximum local.
   Que vaut $f(x_0)$?
   c. Donner un encadrement de x_0 entre deux entiers successifs m et m + 1.
   Puis comparer f(m), f(m + 1) et $f(x_0)$.
   d. Conclure.

QCM – VRAI – FAUX

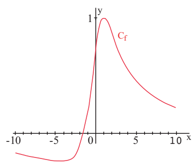
QCM

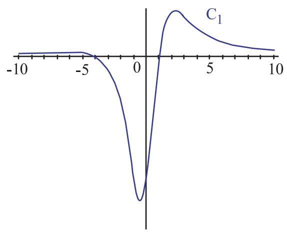
Cocher la réponse exacte.

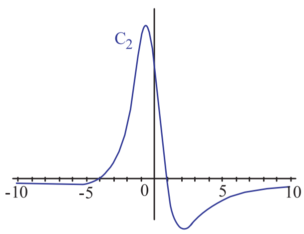
1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 5x^4 - 3x + 1$ a pour dérivée la fonction f' définie par

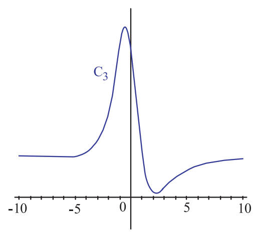
☐ $f'(x) = 5x^4 - 2$ ☐ $f'(x) = 20x^3 - 3$ ☐ $f'(x) = 20x^3$.

2. On a représenté dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
L'une des courbes ci-dessous laquelle est la représentation graphique de la fonction dérivée de f. Laquelle ?

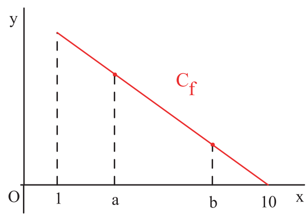


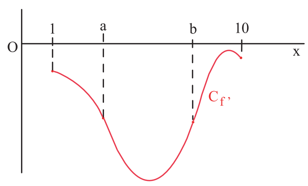
☐ 

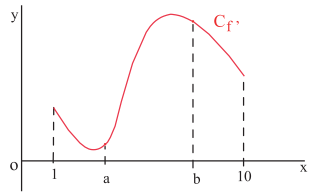
☐ 

☐ 

3. On a représenté dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la fonction dérivée f' d'une fonction dérivable f sur]1, 10[. Dans quel cas a-t-on $f(a) > f(b)$?

☐ 

☐ 

☐ 

4. La fonction $x \mapsto x^4 + 3x^2 + 1$, admet pour minimum

☐ 0 ☐ 1 ☐ −1.

5. La fonction $x \mapsto \dfrac{-1}{x+1}$ est

☐ décroissante sur $]-\infty, -1[$ ☐ décroissante sur $]-1, +\infty[$ ☐ croissante sur $]-\infty, -1[$.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $x \mapsto |x|$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction $x \mapsto \sqrt{-2x+1}$ est dérivable sur $\left]-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$.
3. Si $f'(a) = 0$ alors f admet un minimum en a.
4. Si les fonctions dérivées de deux fonctions f et g sont égales sur un intervalle ouvert I alors f = g sur I.
5. Soit f une fonction définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ et a et b deux réels strictement positifs. Si f' est positive sur [a, b] et $f(b) = 0$ alors f est négative sur [a, b].

Mobiliser ses compétences

Situation 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit le point M(1, 1) et α un réel différent de 0 et de 1.
On désigne par D_α la droite passant par M et de coefficient directeur α.

1. Vérifier que D_α a pour équation $y = \alpha x + (1 - \alpha)$.
2. On désigne par A et B, les points d'intersection de D_α respectivement avec l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées.
   a. Déterminer les coordonnées des points A et B en fonction de α.
   b. Exprimer AB^2 en fonction de α.
   c. Déterminer α pour que la distance AB soit minimale.

Situation 2

1. Soit a un réel, on considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x - a}$.
   a. Vérifier que f est dérivable en tout réel x différent de a.
   b. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x différent de a.
   c. On note f'' la dérivée de f' ; on note $f^{(3)}$ la dérivée de f'' et pour tout entier $k \geq 2$, $f^{(k)}$ la dérivée de $f^{(k-1)}$.
   Calculer $f^{(k)}(x)$, $k \geq 2$.
2. On considère la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

a. Vérifier que $g(x) = -1 + \dfrac{2}{1 - x}$.

b. Montrer que g est dérivable en tout réel x différent de 1 et calculer sa dérivée.

c. Calculer $g^{(k)}(x)$, $k \geq 2$.

Exercices et problèmes

Exercice 1

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition, étudier la dérivabilité puis calculer la dérivée de chacune des fonctions f, f^3, $\frac{1}{f}$, $\frac{1}{f^2}$ et $\sqrt{f}$.

a. $f(x) = x^2 + 2$.

b. $f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$.

c. $f(x) = 1 - x^2$.

d. $f(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 2

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'ensemble de définition, étudier la dérivabilité puis calculer la dérivée de chacune des fonctions f, g, f + g, fg et $\frac{f}{g}$.

a. $f(x) = x^3 - 2$ et $g(x) = \dfrac{1}{x^2+2}$.

b. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ et $g(x) = \dfrac{1-2x}{(x-1)^2}$.

c. $f(x) = \sqrt{x} + 1$ et $g(x) = x\sqrt{x}$.

Exercice 3

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$.

$f(x) = x^5 - 3x^3 + 2x - 1$.

$f(x) = -x^6 + x^4 + \sqrt{2}x$.

$f(x) = (-3x^2 + 1)^3$.

$f(x) = 2x^2(-x^3 + 1)^3$.

$f(x) = \dfrac{x^3 + x}{x+1}$.

$f(x) = \dfrac{-5}{(2x+2)^5}$.

$f(x) = \dfrac{1}{x+3} - (3x+2)^3$.

Exercice 4

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer la fonction dérivée de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$.

$f(x) = \sqrt{2x+3}$.

$f(x) = \sqrt{2x^2+3}$.

$f(x) = 3x\sqrt{2x+1}$.

$f(x) = \dfrac{-4}{\left(\sqrt{3x}\right)^3}$.

Exercice 5

Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer son ensemble de définition, étudier ses limites aux bornes de son ensemble de définition, calculer sa dérivée, puis dresser son tableau de variation et déterminer ses extrema éventuels.

1. $f(x) = 4x - 3 + \dfrac{1}{x-5}$.

2. $g(x) = \dfrac{x^2-1}{4-x^2}$.

3. $h(x) = 2x^4 - x^2 + 5$.

4. $s(x) = \dfrac{4x-1}{2x+3}$.

Exercice 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = ax^3 + 3x$ où a est un réel.
On suppose que la fonction f admet deux extrema locaux en 1 et –1.

1. Calculer la valeur de a.
2. Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature de chacun des extrema de f .

Exercice 7

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = \dfrac{a-x}{x^2-a}$ où a est un réel.
On suppose que la fonction f admet un extremum local en 1.

1. Calculer la valeur de a.
2. Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature de chacun des extrema de f .

Exercice 8

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - ax}{x^2 + 1} & \text{si } x > 1, \\ \dfrac{1 - ax^2}{x - 2} & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

où a est un réel.

On suppose que f est continue en 1.

1. Déterminer la valeur de a.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1.
3. Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature de chacun des extrema de f.

Exercice 9

On se propose de comparer les réels

$A = \dfrac{(5.012013014015016)^2 + 3}{3.012013014015016}$ et

$B = \dfrac{(5.012013014015017)^2 + 3}{3.012013014015017}$

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 + 3}{x - 2}$.

1. Quelles sont les images par f des réels 5.012013014015016 et 5.012013014015017 ?
2. Calculer la dérivée de f.
3. Dresser le tableau de variation de f.
4. Conclure.

Exercice 10

Dans une usine, une étude statistique a montré qu'un ouvrier produit, au cours d'une matinée, $q(t) = -t^3 + 3t^2 + 9t$ unités, où t désigne le nombre d'heures de travail.

Le rendement moyen entre les instants t_0 et t_0+h est le rapport $\dfrac{q(t_0 + h) - q(t_0)}{h}$.

Le rendement instantané à l'instant t_0 est la limite lorsque h tend vers zéro du rendement moyen entre les instants t_0 et t_0+h.

1. On désigne par r la fonction définie sur [0, 4], qui à t associe le rendement instantané r(t) d'un ouvrier. Donner l'expression de r(t).
2. a. A quel instant le rendement instantané s'annule-t-il ?
b. Etudier le signe de la fonction r.
En déduire les variations de la quantité produite.

Exercice 11

Démontrer l'inégalité suivante

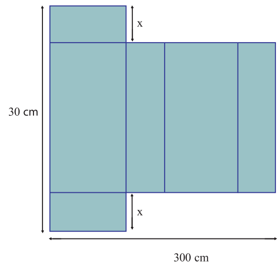
$\sqrt{1 + x^3} \leq 1 + \dfrac{1}{2} x^3$, pour tout $x \geq 0$.

Exercice 12

Montrer que de tous les triangles rectangles d'hypoténuse 4 cm, le triangle isocèle est celui qui a le plus grand périmètre.

Exercice 13

Un fabricant envisage la production de boîtes de lait en carton obtenues selon le patron ci-dessous.

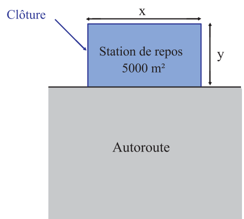


1. Calculer les dimensions de la boîte et son volume lorsque x = 10 cm.
On suppose que $0 < x < 15$ et on désigne par V(x) le volume de la boîte correspondante.
2. Exprimer V(x) en fonction de x.
3. Etudier les variations de la fonction V qui à x associe V(x) sur]0, 15[.
4. En déduire la valeur de x pour laquelle le volume d'une boîte est maximal. Quel est ce volume ?

Exercice 14

On projette d'aménager une station de repos en bordure d'une autoroute. Le terrain devra être rectangulaire, d'aire 5000 m² et clôturé sur trois de ses côtés comme l'indique le schéma ci-dessous.

On se propose de déterminer les dimensions du terrain de sorte que la longueur de la clôture soit minimale.



1. Exprimer y en fonction de x, puis en déduire l'expression de la longueur L(x) de la clôture en fonction de x.
2. Etudier les variations de la fonction L qui à x associe L(x) sur l'intervalle]0 , +∞[.
3. En déduire les dimensions du terrain de sorte que la longueur de la clôture soit minimale. Préciser cette longueur.

Exercice 15

Un fabricant de bicyclettes doit acheter 5000 pneus par année d'un distributeur sachant que toutes les commandes contiennent le même nombre de pneus. Il veut déterminer la taille de chaque commande de sorte que le coût total soit minimal.

Il estime que pour une commande de n pneus, le coût total c(n) (en dinars) est donné par $c(n) = 0.48n + \dfrac{124000}{n} + 1200$.

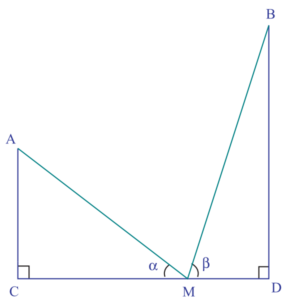
On désigne par $c : x \mapsto 0.48x + \dfrac{124000}{x} + 1200$

la fonction qui modélise la situation.

1. Etudier les variations de la fonction c sur l'intervalle [1, 5000].
2. En déduire pour quelle valeur x_0 de l'intervalle [1, 5000], la fonction c atteint-elle son minimum local. Que vaut $c(x_0)$?
3. Donner un encadrement de x_0 entre deux entiers successifs m et m + 1.
Puis comparer f(m), f(m + 1) et $f(x_0)$.
4. Conclure.

Exercice 16

On considère la figure ci-dessous où CD = 5, AC = 3, BD = 4 et M est un point variable sur le segment [CD].



On se propose de montrer que si la somme des distances AM et BM est minimale alors les angles α et β sont égaux.

On pose x = CM et f(x) = AM + BM.

1. Exprimer f(x) en fonction de x.
2. a. Montrer que la fonction f admet un minimum que l'on déterminera.
b. Montrer que dans ce cas tan α = tan β.
c. Conclure.

Exercice 17

1. Le mouvement d'une particule qui se déplace sur un axe (xx') muni d'un repère $(O, \vec{i})$ est décrit par la loi horaire du mouvement $x(t) = t^3 - 12t + 17,\ t \geq 0$.
a. Déterminer la vitesse instantanée de la particule.
b. Dresser le tableau de variation de la fonction qui à t associe x(t).
c. Répondre aux questions ci-dessous.
• A quel instant la particule s'arrête-t-elle ?
• Sur quel intervalle de temps, la particule s'approche-t-elle de l'origine ?
• Sur quel intervalle de temps, la particule s'éloigne t-elle de l'origine ?
• A quel instant la particule se trouve-t-elle à une distance minimale de l'origine ? Quelle est cette distance ?
2. Le mouvement d'une particule qui se déplace sur un axe (xx') muni d'un repère $(O, \vec{i})$ est décrit par la loi horaire du mouvement $x(t) = t^3 - 8,\ t \geq 0$.
a. Déterminer la vitesse instantanée de la particule.
b. Dresser le tableau de variation de la fonction qui à t associe x(t).
c. Répondre aux questions ci-dessous.
• A quel instant la particule s'arrête-t-elle ?
• Décrire la position de la particule par rapport à l'origine.

Exercice 18

Les compagnies d'électricité doivent-être en mesure de prévoir de façon assez précise la demande puisqu'elles n'ont aucun moyen de stocker l'énergie qu'elles produisent.

Une certaine compagnie utilise la relation suivante pour prévoir la demande d'électricité entre 12:00 et 18:00 pendant une journée d'hiver :

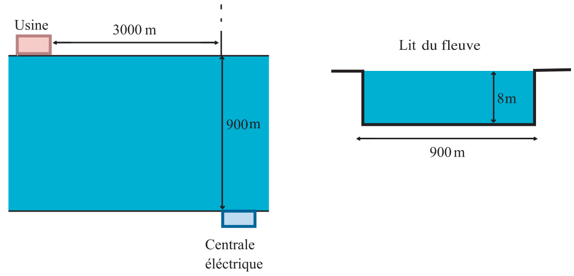
$d(t) = -27t^4 + 252t^3 + 540t^2 + 9400$ mégawatts

où $0 \leq t \leq 6$.

1. Dresser le tableau de variation de la fonction $d : t \mapsto d(t)$.
2. A quel moment la demande d'électricité devrait-elle atteindre son minimum ?
3. A quel moment la demande d'électricité devrait-elle atteindre son maximum ?

Exercice 19

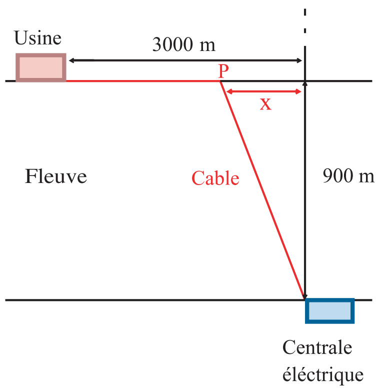
On veut relier une usine en bordure d'un fleuve, de profondeur 8 m et de 900 m de largeur, à une centrale électrique située sur la rive opposée comme l'indique le schéma ci-dessous.



Il en coûte 5^D/m pour installer le câble sous l'eau, et 4^D/m pour l'installer au dessus de l'eau.

On se propose de déterminer le parcours que doit suivre le câble pour que le coût d'installation soit minimal.

On modélise la situation par le schéma ci-dessous.



On désigne par C(x) (en dinars) le coût d'installation du câble en fonction de x.

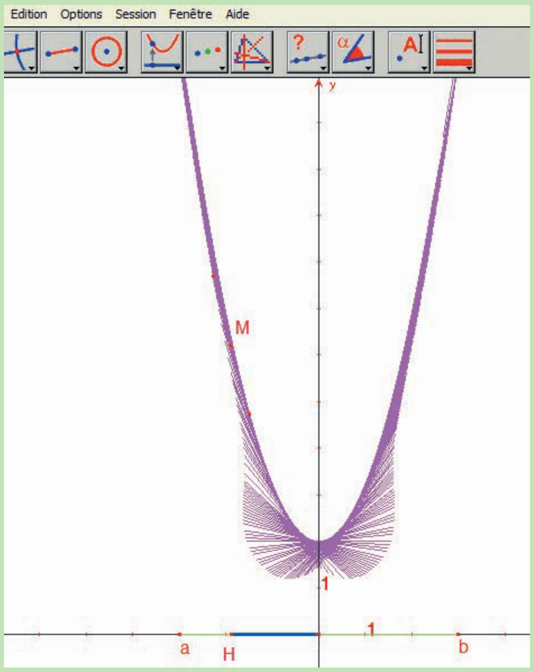
1. Vérifier que $C(x) = 80 + 5\sqrt{900^2+x^2} + 4(3000 - x)$.
2. Etudier les variations de la fonction C qui à x associe C(x) sur l'intervalle [0, 3000].
3. En déduire à quelle distance doit-on placer le piquet P, pour que le coût d'installation du câble soit minimal. Quel est ce coût ?

Avec l'ordinateur

Soit f la fonction définie sur un intervalle [a, b] par $f(x) = x^2 + 2$.

On se propose d'illustrer à l'aide du logiciel CABRI, que lorsque x varie dans l'intervalle [a, b], les droites de coefficients directeurs 2x et passant par M(x, f(x)) enveloppe la parabole C courbe de f .

- Dans une nouvelle figure CABRI, après avoir montré les axes, on trace un segment [a, b], en choisissant deux points a et b sur l'axe des abscisses, puis un point H (point sur objet) de [a, b].
- A l'aide de la calculatrice, on calcule l'image de l'abscisse x du point H, que l'on rapporte (Report de mesure) sur l'axe des ordonnées pour obtenir le point M(x, f(x)).
- A l'aide de la calculatrice, on calcule 2*x et on rapporte le résultat sur l'axe des ordonnées et on place le point N(x, 2x). Le segment [TT'] de milieu M et parallèle à (ON) est tangent à C en M.
- On fait varier le point H pour faire apparaître la courbe décrite par M.
- Avec le mode trace, on illustre comment [TT'] enveloppe C.



Bulles d'air

La bulle de savon est une fine pellicule d'eau et de savon, qui renferme un certain volume d'air. A l'équilibre, le savon doit minimiser sa surface, sous la contrainte de volume fixé. C'est pour ça que la bulle prend une forme sphérique.

Forme	Nombre de faces	Volume	Surface
tétraèdre	4	16 cm^3	46 cm^2
cube	6	16 cm^3	39 cm^2
octaèdre	8	16 cm^3	37 cm^2
dodécaèdre	12	16 cm^3	34 cm^2
sphère	infini	16 cm^3	31 cm^2

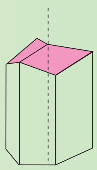
Elyssa et la fondation de Carthage

Lorsque Elyssa arriva en Afrique, elle demande à Iarbas, roi de Numidie une concession de terrain ne couvrant que la peau d'un bœuf, ce qui est royalement accordé. Elle fait alors découper la peau en très fines lanières et le fait mettre bout à bout, délimitant ainsi un territoire assez vaste pour y établir une cité sur une colline, Byrsa (" Peau de bœuf " en grec).

Les alvéoles d'abeilles

Ce qui est vraiment surprenant, c'est la forme plus que singulière de ces alvéoles. Contrairement à ce qu'on pourrait supposer, l'autre extrémité de ces cellules n'est pas un hexagone régulier, mais un emboîtement de trois losanges identiques, appelés rhombes.

Pour un même volume, le raccordement par ces trois losanges minimise la surface de raccordement des prismes.



Chapitre

7

Exemples d'étude de fonctions

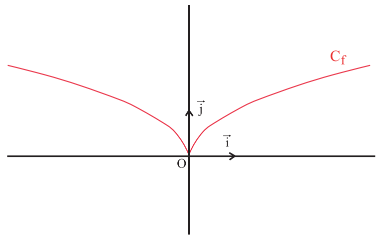
" La connaissance s'acquiert par l'expérience, tout le reste n'est que de l'information. "

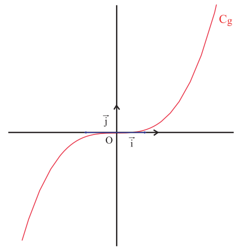
Einstein

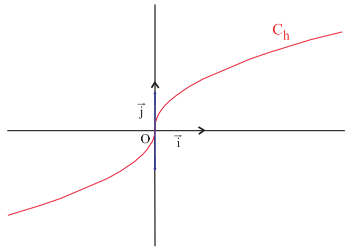
Pour commencer

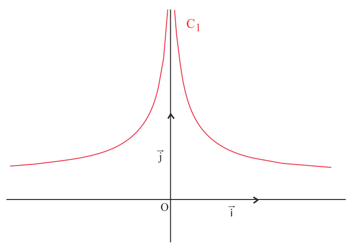
Activité 1

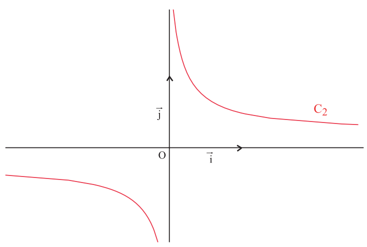
Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On a représenté graphiquement trois fonctions f, g et h ainsi que leurs fonctions dérivées f', g' et h'.
Associer à chaque courbe celle de sa fonction dérivée.

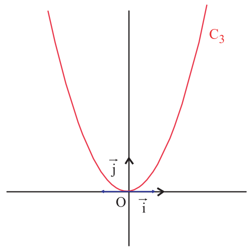




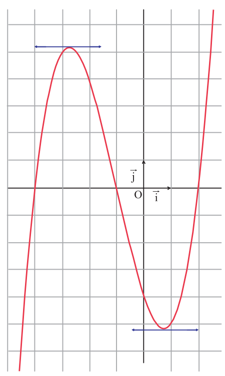




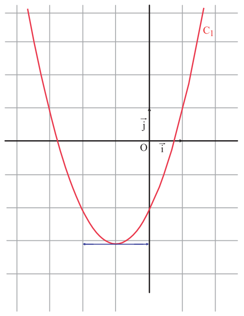


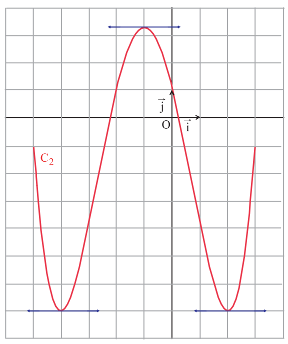


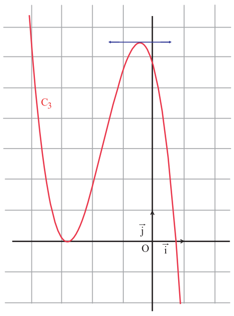
Activité 2



Le plan est muni d’un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f une fonction dérivable sur [–5, 3].
On a tracé ci-contre la courbe représentative de sa fonction dérivée f '.
1. a. Déterminer graphiquement f '(0), f '(–4) et f '(–1).
   b. Interpréter graphiquement ces nombres.
2. Une parmi les courbes ci-dessous, est la représentation graphique de f, laquelle ?







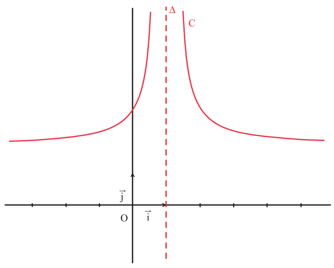
Cours

1. Eléments de symétries d'une courbe

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a tracé la courbe représentative C de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{2x^2 - 4x + 3}{(x-1)^2}.$$



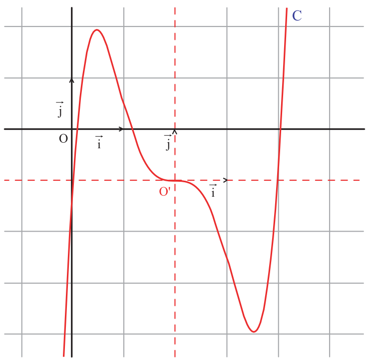
On se propose de montrer que la droite Δ d'équation x =1 est un axe de symétrie de C.
Pour tout point M(x , y), on note $N = S_\Delta(M)$.
1. Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M.
2. Soit M(x , f(x)) où x ≠ 1. Vérifier que
   N est un point de C, si et seulement si, 2 – x ≠ 1 et f(2 – x) = f(x).
3. Conclure.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction définie sur un ensemble D de courbe représentative C et Δ la droite d'équation x = a.
La droite Δ est un axe de symétrie de C, si et seulement si, pour tout x appartenant à D, 2a – x appartient à D et f(2a – x) = f(x).

Activité 2

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a tracé la courbe représentative C de la fonction

$$f : x \mapsto \frac{1}{2}(x-2)^3(x^2-4x) - 1.$$

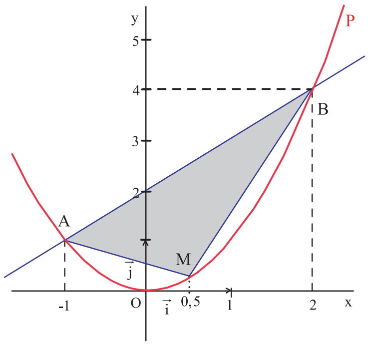


On se propose de montrer que le point O'(2, –1) est un centre de symétrie de C.
Pour tout point M(x , y), on note $N = S_{O'}(M)$.
1. Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M.
2. Soit M(x, f(x)). Vérifier que
   N est un point de C, si et seulement si, f(4 – x) = –2 – f(x).
3. Conclure.

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction définie sur un ensemble D de courbe représentative C et O' le point de coordonnées (a, b).
Le point O' est un centre de symétrie de C, si et seulement si, pour tout x appartenant à D, 2a – x appartient à D et f(2a – x) = 2b – f(x).

2. Exemples de fonctions polynômes

Activité 1



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit P la parabole, d'équation $y = x^2$ et Δ la droite d'équation $y = x + 2$.

1. Déterminer les coordonnées des points d'intersection A et B de Δ et de P.
2. Soit C le point de P d'abscisse 1.
   Déterminer l'aire du triangle ABC.
3. Soit x un réel de $]-1, 2[$ et M le point de P d'abscisse x.
   a. Exprimer l'aire S(x) du triangle AMB.
   b. Représenter dans un repère orthogonal la fonction $S : x \mapsto S(x)$ et déterminer la valeur x_0 en laquelle S atteint son maximum.

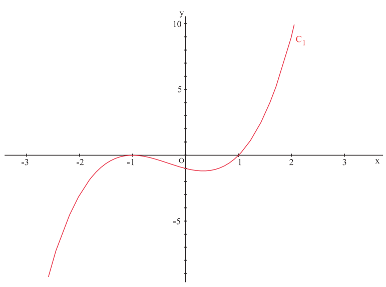
Activité 2

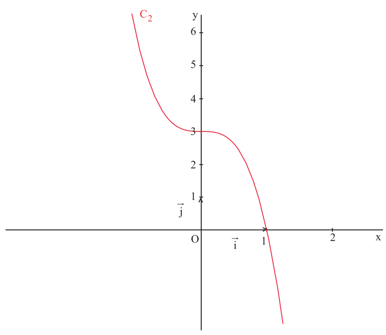
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 4x^2 + 3x + 1$.

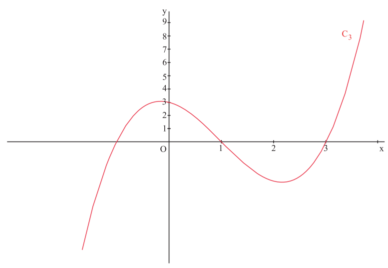
1. Justifier la continuité de f sur $\mathbb{R}$.
2. a. Calculer les réels f(-1), f(0), f(2) et f(3).
   b. En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions. On désigne par α, β et γ ces solutions et on suppose que $\alpha < \beta < \gamma$.
3. Déterminer le signe de f sur chacun des intervalles $]-\infty, \alpha[$, $]\alpha, \beta[$, $]\beta, \gamma[$ et $]\gamma, +\infty[$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On a représenté ci-dessous les fonctions f , g et h définies sur $\mathbb{R}$ par
$f(x) = -3x^3 + 3$, $g(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$ et $h(x) = x^3 + x^2 - x - 1$.
Associer à chacune de ces fonctions, sa courbe représentative.







Activité 4

Soit un entier $n \geq 2$. On considère la fonction $f : x \mapsto x^n$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.
2. Discuter suivant la parité de n, $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Théorème

Soit f une fonction polynôme de degré n, $n \geq 2$. Alors $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers l'infini quand x tend vers l'infini.
On dit que la courbe représentative C de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$, au voisinage de l'infini.

Activité 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On se propose d'étudier f et de représenter C.
   a. Vérifier que O est un centre de symétrie de C.
   b. Déterminer les limites de f aux bornes de $[0, +\infty[$.
   c. Etudier la continuité et la dérivabilité de f et déterminer sa fonction dérivée sur $[0, +\infty[$.
      En déduire le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$.
   d. Vérifier que C admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.
   e. Tracer C.
2. En déduire les représentations graphiques des fonctions
   $|f|$, $g : x \mapsto f(x) - 2$ et $h : x \mapsto f(|x|)$.

Pour l'étude et la représentation graphique d'une fonction f :
- Déterminer son ensemble de définition D.

Il est parfois possible de réduire l'ensemble d'étude de f à une partie de D, c'est le cas par exemple, si f est paire ou impaire, il suffirait d'étudier f pour les réels positifs de D.
- Etudier la continuité et la dérivabilité de f et déterminer sa fonction dérivée ainsi que son signe.
- Dresser alors le tableau de variation de f en effectuant les études de limites nécessaires.
- Tracer la courbe représentative C de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ en étudiant éventuellement les asymptotes ou les branches paraboliques.

Activité 6

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x$.
On désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1. Vérifier que O est un centre de symétrie de C.

2. Etudier f.

3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C et de l'axe des abscisses.

4. a. Déterminer une équation de la tangente T_0 à C en O et étudier la position de C par rapport à T_0.

   b. Tracer T_0 et C.

5. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x^2 - 2$.

   On désigne par C' sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

   a. Montrer que pour tout x réel, $g(x) = f(x + 1)$.

   b. En déduire la construction de C'.

Activité 7

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Représenter les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^2 - 2$ et $g(x) = x^3$.
2. On pose $h(x) = f(x) - g(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

   a. Montrer que $h(x) = 0$ admet exactement trois solutions.

   b. Donner une valeur approchée de chacune de ces solutions à 0.5 près.

   c. Etudier et représenter la fonction h.

   d. Déterminer suivant les valeurs du réel m le nombre de solutions de l'équation $h(x) = m$.

Activité 8

On a montré que le taux de croissance du nombre de bactéries dans une culture donnée, t heures après le début de l'expérience est de $24(t^2 + t - 5)$ bactéries par heure.
On suppose que le nombre de bactéries est de 1000 au début de l'expérience.

1. Vérifier que le nombre de bactéries après t heures est $N(E) = 24t(t^2 + t - 5) + 1000$.
2. Etudier et représenter la fonction $N : t \mapsto N(t)$.
3. Donner une estimation du temps nécessaire pour que le nombre de bactéries atteigne 5000, 10000, 15000 bactéries.

Activité 9

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier et représenter la fonction f.
2. En déduire les représentations graphiques des fonctions $g : x \mapsto f(x) + 1$ et $h : x \mapsto |x|\, x^3$.

Activité 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $ax^4 + bx^2 + c$ où $a \neq 0$.

1. Montrer que si x_0 est solution de l'équation $f(x) = 0$ alors $-x_0$ est aussi solution de cette équation.
2. On suppose que $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions.

   a. Montrer que $c = 0$ et que $ab < 0$.

   b. Déterminer alors en fonction de a et b les solutions de l'équation.

Activité 11

Une équipe de biologistes a effectué plusieurs expériences avec une certaine espèce d'insectes. L'analyse des données a montré que, t semaines après le début des expériences, le nombre d'insectes était de $N(t) = -t^4 + 8t^2 + 9$.

2. Etudier et représenter la fonction $N : t \mapsto N(t)$.
3. La courbe de N passe par les points A(0, 9) et B(3, 0). Qu'est-ce que cela signifie dans le contexte donné ?
4. Estimer le temps nécessaire pour que le nombre d'insectes atteigne son maximum. Donner une valeur approchée à l'unité de ce maximum.

3. Exemples de fonctions rationnelles

Activité 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{2x-2}{x-2}$.

1. On se propose de déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x-2}$, $x \neq 2$.
   a. Calculer $\lim\limits_{x \to 2}(x-2)f(x)$.
   b. Vérifier que $(x-2)f(x) = a(x-2) + b$, $x \neq 2$.
   c. En déduire la valeur de b.
   d. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a.
2. Etudier f.
3. En déduire les variations de chacune des fonctions $-f$, $|f|$ et $g_k : x \mapsto f(x) + k$ où k est un réel.

Activité 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$, par $f(x) = \dfrac{x^2+7x+2}{x^2+x}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On se propose de déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x+1}$, pour tout x différent de 0 et de –1.
   a. Calculer $\lim\limits_{x \to -1}(x+1)f(x)$ et en déduire la valeur de c.
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} xf(x)$ et en déduire la valeur de b.
   c. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a.
2. Etudier f.
3. Tracer C.
4. Pour tout réel m, on considère l'équation $E_m : (1-m)x^2 + (7-m)x + 2 = 0$.
   a. Discuter suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de E_m.
   b. En déduire le nombre de points d'intersection de C avec la droite $y = m$.
5. a. Représenter la fonction $g : x \mapsto f(-|x|)$.
   b. En déduire son tableau de variation.

Activité 3

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{6x - 3}{2x^2 - 2x + 1}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. Soit I le point de C d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

a. Montrer que I est un centre de symétrie de C.

b. Déterminer une équation de la tangente T à C en I.

c. Etudier la position relative de T et de C.

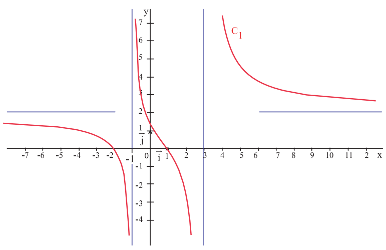
4. Tracer C et T.

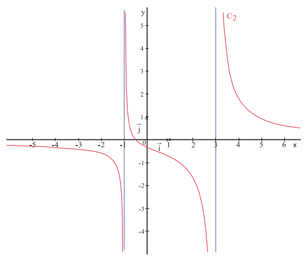
Activité 4

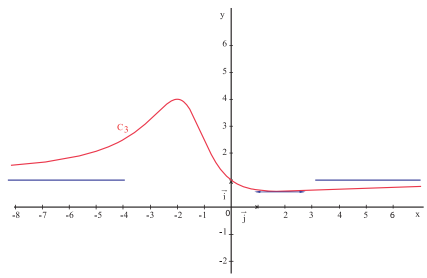
Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On a représenté graphiquement les fonctions

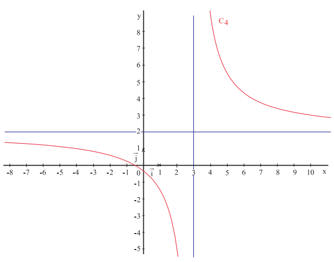
$f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - 4x}$, $g : x \mapsto \dfrac{x^2 + 4}{x^2 + 3x + 4}$, $h : x \mapsto \dfrac{(x-1)^2}{x^2 - 4}$,

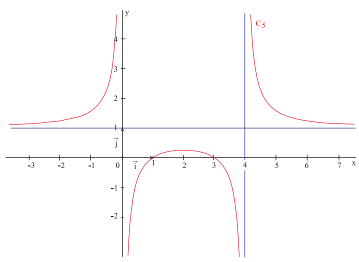
$u : x \mapsto \dfrac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 - 2x - 3}$, $v : x \mapsto \dfrac{2x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x - 3}$ et $w : x \mapsto \dfrac{2x + 1}{x^2 - 2x - 3}$.

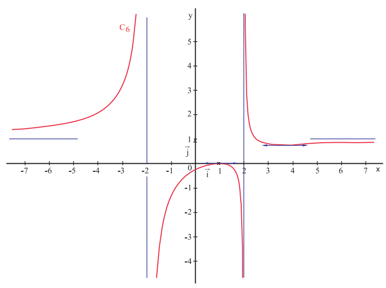












Associer à chaque fonction sa courbe.

Activité 5

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, par $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x+2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On se propose de déterminer les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$, $x \neq -2$.
   a. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et en déduire la valeur de a.
   b. Déterminer la valeur de c.
   c. Calculer f(0) et en déduire la valeur de b.
2. Etudier f.
3. a. Montrer que C admet une asymptote D au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) d'équation $y = x - 1$.
   b. Etudier la position relative de C et de D.
4. Tracer C et D.
5. a. Représenter la fonction $g : x \mapsto f(-x)$.
   b. Dresser son tableau de variation.

Activité 6

Le volume initial d'un ballon est de $1m^3$, on laisse l'air s'en échapper et on estime que, t secondes après, le volume décroît au taux de $\dfrac{5}{4(t+1)^2}m^3/s$.

1. Vérifier que le volume de la balle après t secondes est $v(t)=1-\dfrac{5t}{4(t+1)^2}$.
2. Combien de temps faut-il pour que le ballon soit vide ?
3. Etudier et représenter la fonction $v : t \mapsto v(t)$.
4. Donner une estimation du temps nécessaire pour que le volume du ballon atteigne la moitié du volume initial.

4. Fonction $\sqrt{f}$

Activité 1

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{ax+b}$, $a \neq 0$.

1. On suppose que $a > 0$.

   Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

2. On suppose que $a < 0$.

   Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Théorème

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{ax+b}$, $a \neq 0$. Alors $\dfrac{f(x)}{x}$ tend vers zéro quand x tend vers l'infini.

On dit que la courbe représentative C de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ admet une branche parabolique de direction $(O , \vec{i})$ au voisinage de l'infini.

Activité 2

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-2x+4}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 2.
   b. En déduire que C admet une demi-tangente verticale T au point d'abscisse 2.
4. Tracer C et T.
5. En déduire les représentations graphiques de chacune des fonctions –f et g: $x \mapsto f(x-1) - 2$.

Activité 3

On considère les fonctions

$f : [\,1 , +\infty\,[\; \mapsto \mathbb{R}$ et $g : [\,-4 , +\infty\,[\; \mapsto \mathbb{R}$

$x \mapsto x^2 - 2x - 3$ $\qquad$ $x \mapsto \sqrt{x+4}+1$

On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer C_f et C_g.
2. On se propose de montrer que C_f et C_g sont symétriques par rapport à la première bissectrice Δ d'équation $y = x$.
   Pour tout point $M(x , y)$, on note $N = S_\Delta(M)$.
   a. Exprimer les coordonnées de N en fonction de celles de M.
   b. Soit $M(x , f(x))$ où $x \geq 1$. Vérifier que N est un point de C_g.
   c. Réciproquement, soit $N(x , g(x))$ où $x \geq -4$. Vérifier que M est un point de C_f.
   d. Conclure.

Activité 4

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x - 6}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en –2 et à droite en 3.
   b. En déduire que C admet deux demi-tangentes verticales que l'on précisera.

4. a. Déterminer la forme canonique de $x^2 - x - 6$.

b. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x+\frac{1}{2}\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x-\frac{1}{2}\right)$.

c. En déduire que la courbe C admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et une autre au voisinage de $-\infty$.

5. Tracer C et ses deux asymptotes.

6. En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(|x|)$.

Activité 5

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. Soit Δ la droite d'équation $x = 2$. Montrer que Δ est un axe de symétrie de C.
4. a. Déterminer la forme canonique de $x^2 - 4x + 5$.

b. Déterminer alors $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x+2)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x-2)$.

c. En déduire que la courbe C admet une asymptote oblique D au voisinage de $+\infty$ et une autre D' au voisinage de $-\infty$.

d. Vérifier que D et D' sont symétriques par rapport à Δ.

5. Tracer C, D et D'.

Activité 6

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{1 - x^2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en -1 et à gauche en 1.

b. En déduire que C admet deux demi-tangentes verticales que l'on précisera.

4. Tracer C.
5. En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{-x^2 - 2x}$.

Activité 7

On considère les fonctions f, g et h définies sur [0, 1] par

$f(x) = \sqrt{8x+4}$, $g(x) = 2 + 2x - x^2$ et $h(x) = 2 + 2x - x^2 + x^3$.

On désigne par C_f, C_g et C_h leurs courbes représentatives dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier chacune des fonctions f, g et h.
2. Montrer que $g(x) \le f(x) \le h(x)$, $x \in [0, 1]$.
3. Tracer C_f, C_g et C_h.
4. Déterminer une valeur approchée à 10^{-18} près de $\sqrt{4.000008}$.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

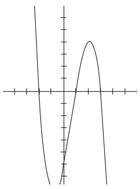
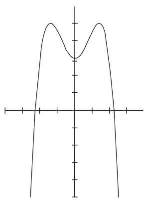
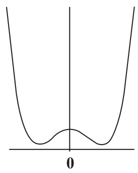
1. Le plan est muni d'un repère. La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1}{x+2} + \dfrac{1}{x-2}$ admet pour centre de symétrie le point

☐ O(0 , 0) ☐ A(–2 , 0) ☐ B(2 , 0).

2. Le plan est muni d'un repère orthogonal. La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^2(1-x)^2$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation

☐ $x = 0$ ☐ $x = \dfrac{1}{2}$ ☐ $x = 1$.

3. Le plan est muni d'un repère. La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto x^4 - 2x^2 + 15$ est

☐  ☐  ☐ 

4. Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-5x+3}{x-1}$ et les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$, $x \neq 1$.

☐ $a = 3$ ☐ $c = -1$ ☐ $a = 0$.

5. Le plan est muni d'un repère. Soit f la fonction définie sur $[0 , +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{4+x^2}$ et D la droite d'équation $y = x$. La courbe représentative de la fonction f

☐ est au dessus de D ☐ est en dessous de D ☐ coupe D.

VRAI – FAUX

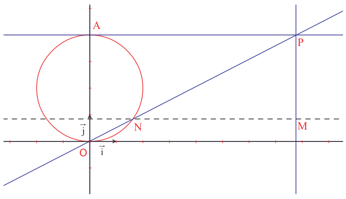
Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D et C sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
1. Si $f(2a - x) = f(x)$ alors la droite d'équation $x = a$ est un axe de symétrie de C.
2. Si f est une fonction impaire alors la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(1 + x)$ admet un centre de symétrie.
3. Si f est une fonction paire alors la courbe représentative de la fonction $x \mapsto f(1 + x)$ admet un axe de symétrie.
4. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto |f(x)|$ s'obtient par une translation de C.
5. La représentation graphique de la fonction $x \mapsto f(|x|)$ s'obtient par une translation de C.

Mobiliser ses compétences

Situation 1 La cubique d'Agnesi

Soit deux points O et A tels que OA=4 et $\mathcal{C}$ le cercle de diamètre [OA]. Soit N un point de $\mathcal{C}$ distinct de O.
La tangente à $\mathcal{C}$ en A, coupe la droite (ON) en un point P.
La parallèle à la droite (AP) passant par N et la perpendiculaire à la droite (AP) passant par P se coupent en M.
On se propose de construire $\mathcal{C}'$ l'ensemble des points M lorsque N varie sur le cercle $\mathcal{C}$.



On considère un repère orthonormé tel que $\overrightarrow{OA} = 4\vec{j}$.

1. a. Déterminer une équation du cercle $\mathcal{C}$.
   b. On désigne par t l'abscisse de N et par (x, y) les coordonnées de M.
   Montrer que $4t = xy$.
   c. En déduire que $y = \dfrac{64}{x^2 + 16}$.
2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{64}{x^2 + 16}$.
   a. Etudier f.
   b. Tracer la courbe $\mathcal{C}'$ et le cercle $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}'$ est appelée, la cubique d'Agnesi, au nom d'une mathématicienne italienne (1718-1799).

Situation 2 courbe asymptote

On considère les fonctions $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3}$, $g : x \mapsto \dfrac{4x+2}{6x-3}$ et on désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. a. Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b. Vérifier que la fonction f est paire.
   c. Etudier f sur $[0 , +\infty[$.
   d. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x)$ et en déduire que C_f admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ que l'on précisera.
2. a. Déterminer l'ensemble de définition de g.
   b. On se propose de déterminer les réels a et b tels que $g(x) = a + \dfrac{b}{6x-3}$.
   Calculer $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} (6x-3)g(x)$ et en déduire la valeur de b.
   Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et en déduire la valeur de a.
   c. Etudier g.
3. Tracer C_f et C_g.
4. a. Vérifier graphiquement que l'équation f(x) = g(x) admet une seule solution que l'on note α.
   b. Donner une valeur approchée de α à 0.1 près.
5. Représenter dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
   la fonction h définie sur $\left]\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$ par $h(x) = \begin{cases} \dfrac{4x+2}{6x-3} & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{2}, \alpha\right], \\ \sqrt{x^2+3} & \text{si } x > \alpha. \end{cases}$

Exercices et problèmes

Exercice 1

On considère les fonctions f et g définies par

$f(x) = x^2 + x + 1$ et $g(x) = -x^2 - 2x + 3$.

On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit m un réel, la droite D_m d'équation $x = m$, coupe C_f et C_g respectivement en M et N.

1. Etudier la position relative de C_f et C_g.
2. Déterminer C l'ensemble des milieux I des segments [MN], lorsque m varie dans $\mathbb{R}$?
3. Tracer C_f , C_g et C.

Exercice 2

Soit la fonction $f : x \mapsto |x^2 - 4| - |x - 2|$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier f.
2. Etudier la dérivabilité de f en –2 et en 2.
3. Tracer C.
4. Discuter graphiquement suivant le réel m, les solutions de l'équation $f(x) = m$.

Exercice 3

1. Tracer dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes représentatives des fonctions $f : x \mapsto x^2 - 1$, $g : x \mapsto x^2 + x + 1$ et $h : x \mapsto 2x + 1$.

Soit un réel $x > 1$.

2. Montrer qu'on peut construire un triangle ABC tel que $AB= h(x)$, $AC = g(x)$ et $BC = f(x)$.
3. En utilisant la formule d'El Kashi : $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \cdot BC \cdot \cos \widehat{ABC}$, montrer que l'angle $\widehat{ABC}$ est indépendant du réel x.
4. Le triangle ABC peut-il être isocèle ?

Exercice 4

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 3x +1$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier f et tracer C.
2. a. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement trois solutions.

b. Donner une valeur approchée à 0.1 près de chacune de ces solutions.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}$ et C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier f.
2. a. Montrer que le point I(1 , 1) est un centre de symétrie de C.

b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C au point I.

c. Etudier la position de C par rapport à T.

3. Tracer C et T.
4. Tracer les représentations graphiques des fonctions $g : x \mapsto f(x) + 1$ et $h : x \mapsto f(x + 1)$.

Exercice 6

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^3 - 4x^2 - 2x + 15$ et $g : x \mapsto - x^2 + 2x + 3$. On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier f.
2. a.Vérifier que $x^3 - 3x^2 - 4x + 12 = (x - 2)(x^2 - x - 6)$.

b. Etudier la position relative de C_f et C_g.

3. Tracer C_f et C_g.

Exercice 7

On considère les fonctions $f : x \mapsto x^4 + 2x^2 - 3$ et $g : x \mapsto x^3 - x$. On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier f.
2. Etudier g.
3. a.Vérifier que pour tout réel x

$x^4 - x^3 + 2x^2 + x -3 = (x^2 - 1)(x^2 - x + 3)$.

b. Etudier la position relative de C_f et C_g.

4. Tracer C_f et C_g.

Exercice 8

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une fonction définie sur [0, 4] par

- $f(x + 2) = f(x)$ pour tout $x \in [0, 2]$,
- $f(x) = x^4 + ax^2$ pour tout $x \in [0, 2[$,
- f est continue à gauche en 2.

1. a. Déterminer f(2).

b. Déterminer la valeur de a.

2. On désigne par f_1 la restriction de f à l'intervalle [0, 2]. Etudier f_1 et tracer sa courbe représentative C_1.
3. On désigne par f_2 la restriction de f à l'intervalle [2, 4] et par C_2 sa courbe représentative.

a. Montrer que C_2 est l'image de C_1 par une translation que l'on précisera.

b. Tracer alors la courbe représentative de f.

Exercice 9

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \dfrac{-2x + 5}{x + 3}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On se propose de déterminer les réels a et b tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x + 3}$, $x \neq -3$.

a. Calculer $\lim\limits_{x \to -3} (x + 3)f(x)$ et déduire la valeur de b.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a.

2. Etudier f et tracer C.

3. En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(-x)$.

4. Dresser le tableau de variation de $k : x \mapsto f(|x|)$.

Exercice 10

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{-2x^2 + x + 2}{x - 1}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On se propose de déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x - 1}$, $x \neq 1$.

a. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a.

b. Déterminer la valeur de c.

c. Calculer f(0) et en déduire la valeur de b.

2. Etudier f.

3. a. Montrer que C admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) d'équation $y = -2x - 1$.

b. Etudier la position relative de C et de D.

4. Tracer C et D.

5. a. Représenter la fonction $|f|$.

b. Dresser son tableau de variation.

Exercice 11

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x - 2}{x + 2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On se propose de déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x + 2}$, $x \neq -2$.

a. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a.

b. Déterminer la valeur de c.

c. Calculer f(0) et en déduire la valeur de b.

2. Etudier f.

3. a. Montrer que C admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$) d'équation $y = x - 4$.

b. Etudier la position relative de C et de D.

4. Vérifier que la courbe C admet une asymptote verticale D' dont on déterminera une équation.

5. Montrer que le point d'intersection des droites D et D' est un centre de symétrie de la courbe C.

6. Tracer C, D et D'.

Exercice 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -4\}$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 - 3x + 2}{x^2 + 4x}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. On se propose de déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x + 4}$, pour tout x différent de 0 et de -4.

a. Calculer $\lim\limits_{x \to -4} (x + 4)f(x)$ et en déduire la valeur de c.

b. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} xf(x)$ et en déduire la valeur de b.

c. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire la valeur de a.

2. Etudier f.

3. Tracer C.

4. Soit m un réel. Discuter suivant les valeurs de m le nombre de points d'intersection de C avec la droite d'équation $y = m$.

5. a. Représenter la fonction $g : x \mapsto f(-|x|)$

b. En déduire son tableau de variation.

Exercice 13

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{-2x + 1}{x^2 - x + 1}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Etudier f.

3. Soit I le point de C d'abscisse $\dfrac{1}{2}$.

a. Montrer que I est un centre de symétrie de C.

b. Déterminer une équation de la tangente T à C en I.

c. Etudier la position relative de T et de C.

4. Tracer C et T.

5. Représenter la fonction $g : x \mapsto f(x + 1) - 3$.

Exercice 14

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{(x-3)^2}{x-2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier f et tracer C.

Soit m un réel et D_m la droite d'équation $y = mx$.

2. a. Etudier l'existence et le nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$.

b. Vérifier graphiquement ces résultats.

On désigne par M et N, lorsqu'ils existent les points d'intersection de C et de D_m puis par K le milieu du segment [MN].

3. a. Déterminer en fonction de m les coordonnées du point K.

b. Montrer que les coordonnées du point K vérifient une équation indépendante de m.

c. Que décrit alors le point K lorsque m varie ?

Exercice 15

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-x+3}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en 3.

b. En déduire que C admet une demi-tangente verticale T au point d'abscisse 3.

4. Tracer C et T.
5. a. En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto f(|x|)$.

b. Dresser son tableau de variation.

Exercice 16

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{-x^2+5x-4}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 1 et à gauche en 4.

b. En déduire que C admet deux demi-tangentes verticales que l'on précisera.

4. Soit Δ la droite d'équation $x = \frac{5}{2}$.

Montrer que Δ est un axe de symétrie de C.

5. Tracer C.

Exercice 17

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{4+x^2}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. a. Déterminer alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x) + x\right)$.

b. En déduire que la courbe C admet une asymptote D au voisinage de $+\infty$ et une autre D' au voisinage de $-\infty$.

c. Vérifier que D et D' sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

4. Tracer C, D et D'.
5. En déduire la représentation graphique de la fonction $g : x \mapsto \sqrt{x^2-4x+8}$.

Exercice 18

On considère les fonctions f, g et h définies sur [0, 2] par $f(x) = \sqrt{-x^2+4x+4}$, $g(x) = 2 + x - \frac{1}{2}x^2$ et $h(x) = 2 + x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x^3$.

On désigne par C_f, C_g et C_h leurs courbes représentatives dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier chacune des fonctions f, g et h.
2. Montrer que $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, $x \in [0, 2]$.
3. Tracer C_f, C_g et C_h.
4. Déterminer une valeur approchée à 10^{-12} près de $\sqrt{4.00039999}$.

Exercice 19

On considère la fonction $f : x \mapsto 1 - \sqrt{x^2+x}$ et on désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Etudier f.
3. a. Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et à gauche en -1.

b. En déduire que C admet deux demi-tangentes verticales que l'on précisera.

4. Soit Δ la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

Montrer que Δ est un axe de symétrie de C.

5. Montrer que la droite D d'équation $y = -x + \frac{1}{2}$ est une asymptote à C au voisinage de $+\infty$.
6. Tracer C, Δ et D.

Exercice 20

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$ et soit $g = -f$.

On désigne par C_f et C_g leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Etudier f.

2. a. Etudier la dérivabilité de f à gauche en -1 et à droite en 4.

b. En déduire que C admet deux demi-tangentes verticales que l'on précisera.

3. a. Déterminer la forme canonique de $x^2 - 3x - 4$.

b. Déterminer alors

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - x + \frac{3}{2} \right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) + x - \frac{3}{2} \right).$$

c. En déduire que la courbe C admet une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et une autre au voisinage de $-\infty$.

4. a. Tracer C_f et C_g.

b. Vérifier que $C_f \cup C_g$ a pour équation $x^2 - y^2 - 3x - 4 = 0$

5. On considère les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} - \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j}$ et le point $O'\left(\frac{3}{2}, 0\right)$.

On se propose de déterminer une équation de $C_f \cup C_g$ dans le repère $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

Soit M un point du plan, on désigne par (x, y) ses coordonnées dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et par (X, Y) celles dans $(O', \vec{u}, \vec{v})$.

a. Exprimer x et y en fonction de X et Y.

b. En déduire que M appartient à $C_f \cup C_g$, si et seulement si, $Y = \frac{25}{16X}$.

c. Conclure.

Avec l'ordinateur

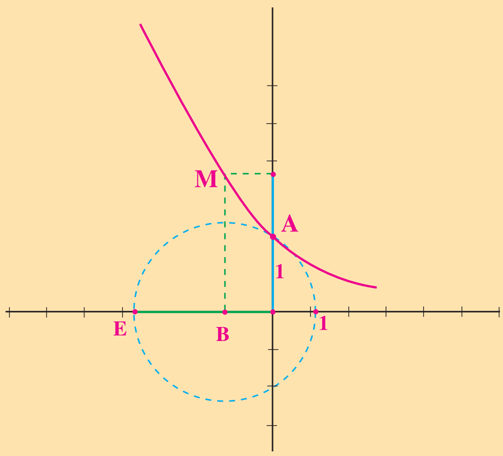
Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point A(0, 2).

A tout réel x, on désigne par B le point de $(O, \vec{i})$ d'abscisse x.

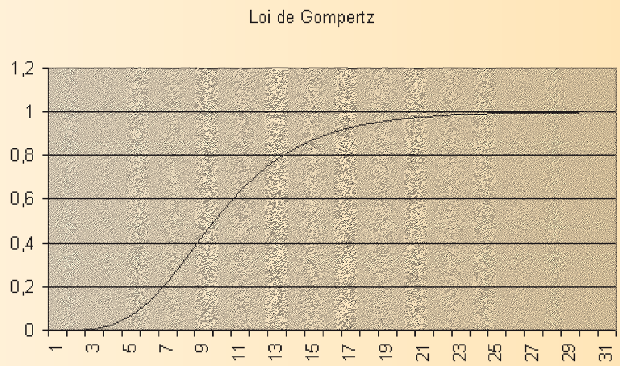
Le cercle de centre B et passant par A, coupe l'axe des abscisses en deux points. On désigne par E le point ayant une abscisse inférieure à celle de B.

On se propose d'étudier à l'aide de CABRI, la fonction f qui à tout réel x, associe la distance OE.

1. Après avoir montré les axes, on crée le point A, puis le point B comme " point sur objet ".
2. On crée le cercle C de centre B et passant par A.
3. A l'aide de l'outil " points sur deux objets " on crée le point E, puis le segment [OE].
4. On mesure OE par l'outil " Distance ou longueur"
5. On reporte cette distance sur l'axe des ordonnées en utilisant l'outil " Report de mesure ".
6. On crée le point M de coordonnées (x, OE).
7. Déplacer le point B sur l'axe des abscisses et conjecturer les positions de M.
8. Créer le lieu des points M lorsque B varie sur $(O, \vec{i})$.



Le lancement d'un nouveau produit sur le marché suit une *loi logistique* :
la courbe est d'abord très ascendante, puis s'infléchit et sa croissance ralentit et enfin elle s'aligne sur une asymptote horizontale. C'est ainsi qu'ont été introduits les produits électroménagers, la machine à laver, la TV en couleurs etc., et aussi les services de télécommunications.
La *fonction logistique* fait partie depuis longtemps de l'arsenal théorique du marketing. L'une de ses expressions est la " loi de Gompertz " :



Une torche qui émet des faisceaux de lumière divergents forme un cône. Lorsqu'on dirige ces faisceaux vers un mur avec un certain angle, leur "intersection" avec ce mur sera une hyperbole.

Chapitre 8

Fonctions trigonométriques

" Les mathématiciens étudient le soleil et la lune et oublient ce qu'ils ont sous les pieds. "

Diogène

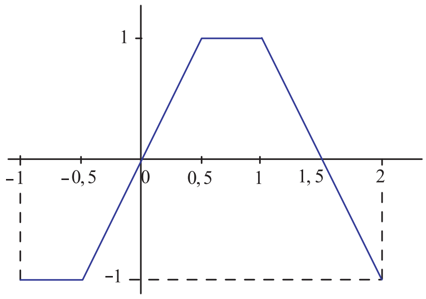
Pour commencer

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les propriétés suivantes :
• pour tout réel x, $f(x+2) = f(x)$,
• pour tout x appartenant à $[-1, 1[$, $f(x) = x$.
Représenter la restriction de f à l'intervalle $[-4, 3]$.

Activité 2

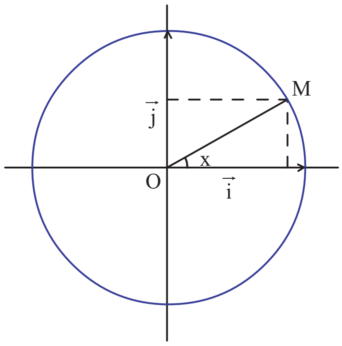
Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+3) = f(x)$, pour tout réel x.
On a représenté ci-contre la restriction de f à l'intervalle $[-1, 2[$.



1. Donner l'expression de f(x) pour x appartenant à $[-1, 2[$.
2. Utiliser le graphique, pour représenter la restriction de f à l'intervalle $[2, 5[$. Expliquer le procédé de construction.

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté ci-contre le cercle trigonométrique de centre O.



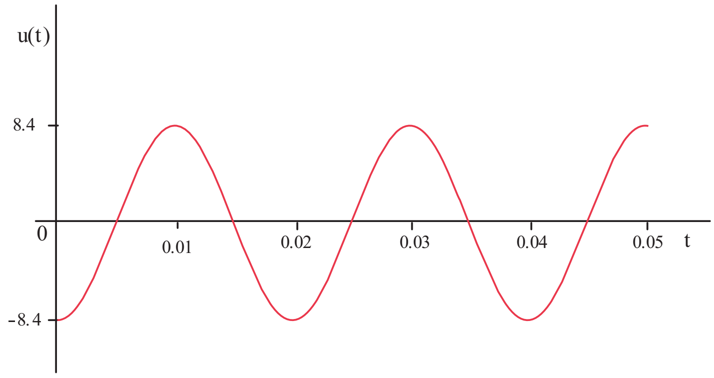
Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique tel que $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM})} \equiv x\,[2\pi]$.
1. Donner les coordonnées cartésiennes de M.
2. Etudier le signe de sinx lorsque x est un réel de $]-\pi, \pi]$.
3. Etudier le signe de cosx lorsque x est un réel de $]-\pi, \pi]$.

Cours

1. Fonctions périodiques

Activité 1

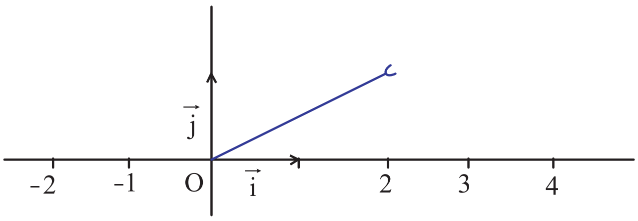
Le graphique ci-dessous représente les variations de la tension alternative u(t) (en volts) aux bornes d'un générateur en fonction du temps t (en secondes).



1. a. Donner la valeur de la tension en chacun des instants $t = 0$, $t = 0.015$ et $t = 0.045$.
   b. La tension est égale à + 8.4 v à l'instant $t = 0.01$. Déterminer d'autres instants pour lesquels la tension est égale à + 8.4 v.
2. On considère la fonction $u : t \mapsto u(t)$.
   a. Colorer la représentation graphique de chacune des restrictions de u à chacun des intervalles [0 , 0.02[et [0.02 , 0.04[. Que remarque-t-on ?
   b. Donner la valeur de la tension à chacun des instants $t = 0.07$ et $t = 0.095$.

Activité 2

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f(x+2) = f(x)$, pour tout réel x.
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a représenté graphiquement sa restriction à l'intervalle [0, 2[.

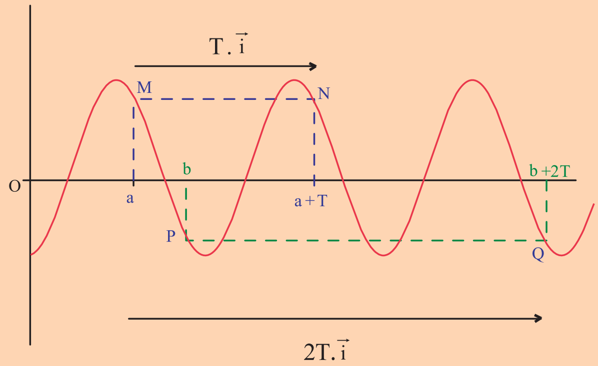


1. Déterminer f(x) pour $x \in [0, 2[$?
2. Déterminer f(2006), f(2007), f(–1997), $f(\sqrt{5})$ et $f(\pi)$?
3. Représenter graphiquement la fonction f sur chacun des intervalles [2, 4[, [4, 6[, [–2, 0[et [5, 7[.
4. Donner l'expression de f(x) lorsque $x \in [2, 4[$, $x \in [4, 6[$.

Définition

Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et T un réel non nul.
On dit que f est périodique de période T, si pour tout $x \in D$, $(x + T)$ appartient à D et $f(x + T) = f(x)$.

Soit f une fonction définie sur D, périodique, de période T et g la restriction de f à un intervalle $[a, a + |T|]$.
La courbe représentative de f se déduit à partir de celle de g par translation de vecteur $kT\vec{i}$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.



2. Fonctions sinus et cosinus

2. 1 Définition

Définition

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.
Soit x un réel et M le point du cercle trigonométrique de coordonnées (cosx, sinx).
La fonction sinus est la fonction périodique, de période 2π, qui au réel x associe le réel sinx.
On la note $\sin : x \mapsto \sin x$.
La fonction cosinus est la fonction périodique, de période 2π, qui au réel x associe le réel cosx. On la note $\cos : x \mapsto \cos x$.

Activité 1

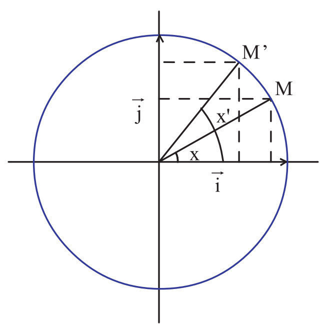
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit x et x' deux réels. On désigne par M et M' les points du cercle trigonométrique tels que $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}}) \equiv x\,[2\pi]$ et $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM'}}) \equiv x'\,[2\pi]$.

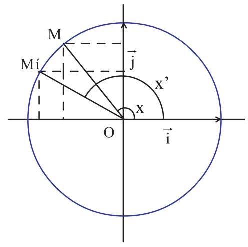
1. Donner les coordonnées cartésiennes des points M et M'.
2. Dans la figure ci-contre, $0 \leq x < x' \leq \frac{\pi}{2}$.

   Comparer cosx et cosx' et en déduire le sens de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

   Comparer sinx et sinx' et en déduire le sens de variation de la fonction sinus sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



3. Dans la figure ci-contre, $\frac{\pi}{2} \leq x < x' \leq \pi$.



a. Comparer cosx et cosx' et en déduire le sens de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

b. Comparer sin x et sin x' et en déduire le sens de variation de la fonction cosinus sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

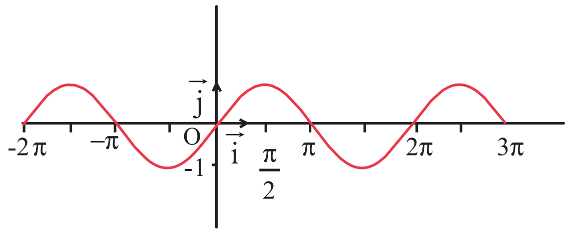
La fonction sinus est impaire et ses variations sur l'intervalle [–π, π] sont

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
sin	0	↘	-1	↗	0	↗	1	↘	0

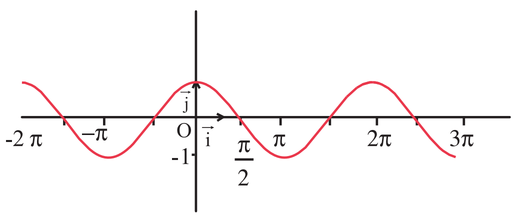
La fonction cosinus est paire et ses variations sur l'intervalle [–π, π] sont

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$		π
cos	-1	↗	0	↗	1	↘	0	↘	1

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé. Les courbes ci-dessous sont les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus sur l'intervalle [–2π, 3π].



Représentation graphique de la fonction sinus sur l'intervalle [–2π, 3π].



Représentation graphique de la fonction cosinus sur l'intervalle [–2π, 3π].

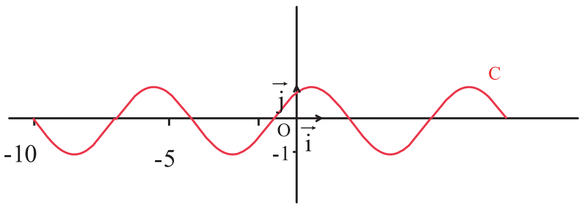
Activité 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne respectivement par C, C_1 et C_2 les courbes représentatives des fonctions $x \mapsto \sin x$; $x \mapsto |\sin x|$ et $x \mapsto \sin|x|$.

1. Tracer la courbe C.
2. Déduire les courbes C_1 et C_2 à partir de la courbe C. Expliquer à chaque fois le procédé de construction.

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a tracé la courbe C représentative de la fonction $f : x \mapsto \sin(x + 1)$.



1. Expliquer comment on peut tracer la courbe représentative de f à partir de celle de la fonction sin.
2. Utiliser le même procédé pour tracer la courbe représentative de $g : x \mapsto \cos(x + 2)$ à partir de celle de la fonction cos.

Soit a un réel.
Les fonctions, $x \mapsto \sin(x + a)$ et $x \mapsto \cos(x + a)$ sont périodiques, de période 2π.

2. 2 Dérivabilité des fonctions sinus et cosinus

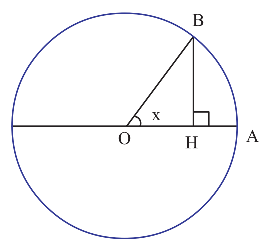
Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit x un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Dans la figure ci-contre A et B sont deux points du cercle trigonométrique tels que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv x\,[2\pi]$.

On désigne par H, le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).



1. a. Montrer que l'aire du triangle OAB vaut $\frac{\sin x}{2}$ et que l'aire du secteur OAB vaut $\frac{x}{2}$.

   b. En déduire que $\sin x < x$, pour tout réel x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.
2. Montrer que $\sin x \leq x$, pour tout réel $x \geq 0$.

3. On se propose de montrer que la fonction sinus est continue en 0.

a. Montrer que $|\sin x| \leq |x|$, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. Utiliser la continuité de $x \mapsto |x|$ en 0 pour déduire que la fonction sinus est continue en 0.

4. a. Montrer que pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$.

b. En déduire que la fonction cosinus est continue en 0.

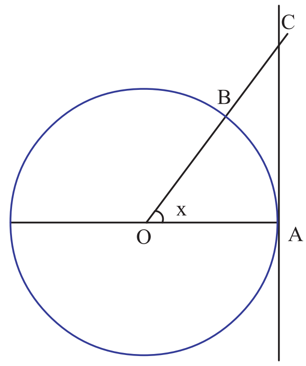
Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit x un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Dans la figure ci contre A et B sont deux points du cercle trigonométrique $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv x\,[2\pi]$.

On désigne par C le point d'intersection de la tangente au cercle en A avec la droite (OB).



1. Montrer que l'aire du triangle OAC vaut $\frac{\sin x}{2\cos x}$.

2. a. En comparant les aires des triangles OAB, OAC et du secteur OAB, montrer que

$$\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x} \text{, pour tout réel x de } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[.$$

b. En déduire que $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, pour tout réel x de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$.

c. Montrer alors que $\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$, pour tout réel x de $\left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[$.

3. a. Montrer que $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| \leq |\cos x - 1|$, pour tout réel non nul x de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Activité 3

1. Vérifier que $\frac{1-\cos x}{x} = x \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2} \cdot \frac{1}{1+\cos x}$, pour tout réel x non nul de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

2. En déduire que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$ et que $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \; ; \; \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0 \; ; \; \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Activité 4

On se propose de montrer que les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\cos)'(x) = -\sin x$ et $(\sin)'(x) = \cos x$.

1. Soit a et h des réels tel que $h \neq 0$.

   a. Montrer que $\dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h} = \sin a \,.\, \dfrac{(\cos h-1)}{h} + \cos a \,.\, \dfrac{\sin h}{h}$.

   b. Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(a+h)-\sin a}{h}$.

   c. En déduire que la fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\sin)'(x) = \cos x$, $x \in \mathbb{R}$.

2. Soit a et h des réels tel que $h \neq 0$.

   a.Montrer que $\dfrac{\cos(a+h)-\cos a}{h} = \cos a \,.\, \dfrac{(\cos h-1)}{h} - \sin a \,.\, \dfrac{\sin h}{h}$.

   b. Calculer $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(a+h)-\cos a}{h}$.

   c. En déduire que la fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $(\cos)'(x) = -\sin x$, $x \in \mathbb{R}$.

Théorème

Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(\sin)'(x) = \cos x$ et $(\cos)'(x) = -\sin x$.

Activité 5

1. Donner une approximation affine de sinh lorsque h est voisin de zéro.
2. Donner une approximation affine de cosh lorsque h est voisin de zéro.
3. Donner une approximation affine de sin(0.001), cos(0.001), sin(–0.002).

Activité 6

Dans chacun des cas ci-dessous, justifier la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ pour tout réel x.

1. $f : x \mapsto \sin x \cos x$.
2. $f : x \mapsto \cos^2 x$.
3. $f : x \mapsto 1 - 2\sin^2 x$.
4. $f : x \mapsto \cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.
5. $f : x \mapsto \cos x \cos(x + 2)$.
6. $f : x \mapsto \sin^3(x + a)$, $a \in \mathbb{R}$.

Activité 7

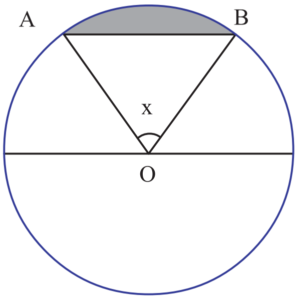
Dans chacun des cas ci-dessous, calculer la limite de $f(x)$ en x_0, en utilisant le nombre dérivé en x_0 d'une fonction que l'on déterminera.

1. $f(x) = \dfrac{\sin x - 0.5}{x - \dfrac{\pi}{6}}$; $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

2. $f(x) = \dfrac{\cos x - 0.5}{x - \frac{\pi}{3}}$; $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$.

3. $f(x) = \dfrac{\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$; $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

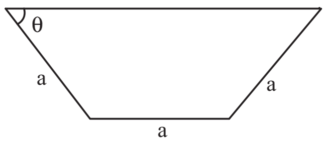
Activité 8



Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit x un réel de $]0, \pi[$.
Dans la figure ci contre A et B sont deux points du cercle trigonométrique tels que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv x\,[2\pi]$.
On se propose de déterminer la valeur de x pour laquelle l'aire de la partie colorée est maximale.

1. Déterminer l'aire de la partie colorée.
2. Déterminer la valeur de x en laquelle l'aire de la partie colorée est maximale.

Activité 9



Soit θ un réel de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On a représenté ci-contre un trapèze dont l'aire varie en fonction de θ (en radian).
On désigne par f la fonction qui modélise la situation.

1. Montrer que $f(\theta) = a^2 \cos\theta \,.\, \sin\theta + a^2 \sin\theta$.
2. Calculer $f'(\theta)$ et vérifier que $f'(\theta) = 2a^2(\cos\theta + 1)\left(\cos\theta - \dfrac{1}{2}\right)$.
3. Déterminer la valeur de θ en laquelle l'aire du trapèze est maximale.

3. Fonction tangente

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé.

On se propose d'étudier et de représenter graphiquement la fonction tan : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

1. Montrer que tan est impaire et périodique, de période π.
2. Montrer que tan est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et calculer $(\tan)'(x)$.
3. Etudier les limites de tan aux bornes de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
4. Dresser le tableau de variation de tan sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
5. Tracer la courbe représentative de tan sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et préciser ses asymptôtes.

Définition

On appelle fonction tangente et on note tan la fonction : $x \mapsto \dfrac{\sin x}{\cos x}$.

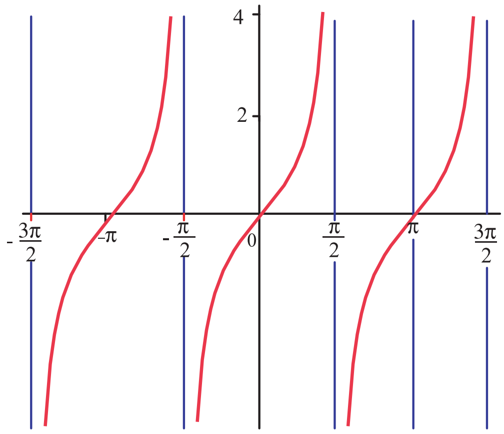
La fonction tangente est impaire et périodique, de période π.

La fonction tangente est dérivable pour tout réel x, différent de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

et on a $(\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x$, pour tout x différent de $\dfrac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Ci-dessous le tableau de variation de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
(tan)'(x)	‖	+	‖
tan	‖ $-\infty$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$ ‖



Représentation graphique de la fonction tangente sur $\left]-\dfrac{3\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$.

Activité 2

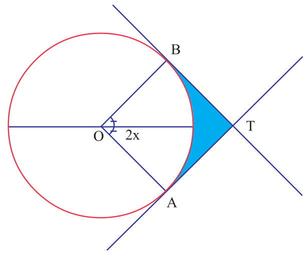
Calculer les limites ci-dessous.

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x}$; $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\tan x - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan^2 x}{x}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x^3}$.

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

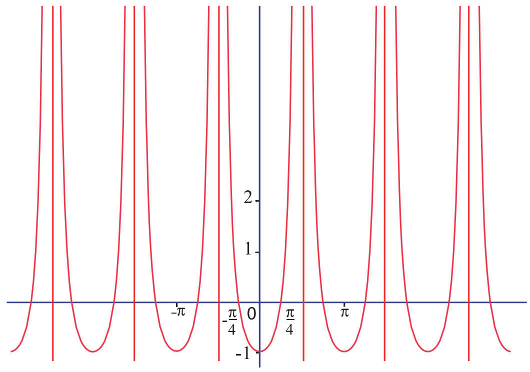
Soit x un réel de $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$.



Dans la figure ci-contre, les points A et B sont deux points du cercle trigonométrique tels que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv 2x\ [2\pi]$, les droites (AT) et (BT) sont tangentes au cercle.

1. Calculer en fonction de x l'aire S(x) du secteur AOB.
2. Calculer en fonction de x l'aire du quadrilatère OBTA.
3. En déduire l'aire C(x) de la partie colorée en fonction de x.
4. Comparer C(x) et S(x).

Activité 4



Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \tan^2 x - 1$.

1. Montrer que la fonction f est périodique et en donner une période.
2. Déterminer les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe de f et de l'axe des abscisses.
3. Résoudre dans l'intervalle $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right[$ l'inéquation $0 \leq \tan^2 x - 1$.

4. Fonctions $x \mapsto \cos(\omega x)$; $x \mapsto \sin(\omega x)$; $x \mapsto \cos(\omega x + a)$; $x \mapsto \sin(\omega x + a)$

Activité 1

On considère les fonctions $f : x \mapsto \cos 2x$ et $g : x \mapsto \sin 2x$.

1. Etudier le signe de cos(2x) et sin(2x), pour x appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa fonction dérivée.
   b. Montrer que f est périodique, de période π.
   c. Etudier la parité de f.
   d. Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
   e. Représenter dans un repère orthonormé, la restriction de la fonction f à $[-\pi, \pi[$.
3. Reprendre la question 2 pour la fonction g.

Soit ω et φ deux réels tels que $\omega \neq 0$.

Les fonctions $f : x \mapsto \sin(\omega x + \varphi)$ et $g : x \mapsto \cos(\omega x + \varphi)$ sont périodiques, de période $\dfrac{2\pi}{\omega}$.

De plus, f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x,

$f'(x) = \omega\cos(\omega x + \varphi)$ et $g'(x) = -\omega \sin(\omega x + \varphi)$.

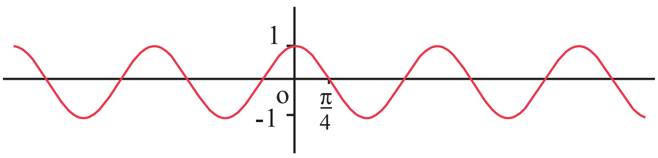
Activité 2

On considère les fonctions $f : x \mapsto \cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)$ et $g : x \mapsto \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

1. a. Donner une période de la fonction f.
   b. Etudier et représenter graphiquement la fonction f.
   c. Déterminer x pour que $f(x) \leq 0$.
2. Reprendre la question 1 pour la fonction g.

Activité 3

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on a représenté la courbe C de la fonction $f : x \mapsto \sin(2x + \varphi)$.



1. Montrer que la fonction f est périodique et en donner une période.
2. Utiliser le graphique pour déterminer une valeur possible de φ.

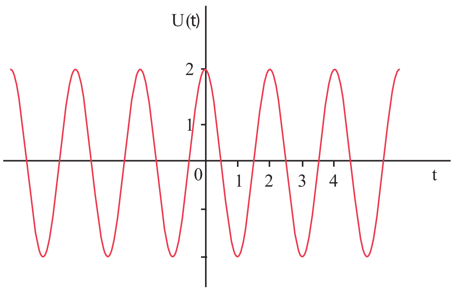
Activité 4

Soit ω et φ deux réels tels que $\omega \neq 0$.

La tension alternative aux bornes d'un circuit est donnée par la formule :

$U(t) = U_m \sin(\omega t + \varphi)$, où U_m est la tension maximale exprimée en volt, t le temps exprimé en seconde.

1. Justifier par le calcul que la fonction U est périodique de période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.
2. Un oscilloscope donne la représentation graphique de la fonction U.

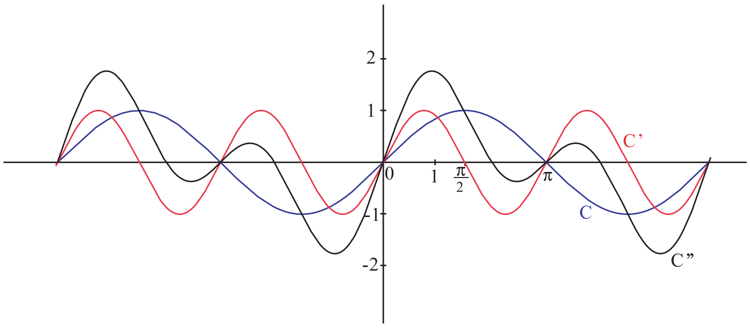


Unités : axe des abscisses 2ms/div ; axe des ordonnées 0,5 V/div.

Déterminer à l'aide du graphique des valeurs possibles des réels T, ω, φ et U_m.

Activité 5

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, C, C' et C'' désignent les courbes respectives des fonctions $f : x \mapsto \sin x$, $g : x \mapsto \sin(2x)$ et $h = f + g$.



1. Montrer que h est périodique et déterminer une période.
2. Résoudre graphiquement, dans $[0, 2\pi]$, l'équation $h(x) = 0$.
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $\sin x = -2 \sin x \cos x$.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. La courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ dans un repère orthonormé admet au point d'abscisse $-\frac{\pi}{6}$ une tangente

☐ horizontale ☐ verticale ☐ d'équation $y = x + \frac{\pi}{6}$.

2. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)}{x - \frac{\pi}{4}} =$

☐ 0 ☐ 1 ☐ $\frac{\pi}{4}$.

3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{3}x - 3\right)$.

Alors f est périodique, de période

☐ $\frac{\pi}{3}$ ☐ -3 ☐ 6 .

4. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$.

On note C et C' les courbes représentatives respectives des restrictions de f aux intervalles $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

C' est obtenue à partir de C par une translation de vecteur

☐ $-\pi\vec{i}$ ☐ $\pi\vec{i}$ ☐ $\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

5. On considère la fonction f définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[\setminus \{\frac{\pi}{2}\}$ par $f(x) = \tan x$.

Alors sa courbe représentative, dans un repère orthonormé, coupe l'axe des abscisses en

☐ deux points ☐ trois points ☐ un point.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. La fonction $x \mapsto \sin(x - 3\pi)$ est impaire.
2. La fonction $x \mapsto \cos(x - 3\pi)$ est paire.
3. Si une fonction est périodique, alors elle est soit paire, soit impaire.
4. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période π.
$f(x - \pi) > 0$, si et seulement si, $f(x + \pi) > 0$.
5. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et périodique, de période 2π.
f admet un minimum en x_0, si et seulement si, f admet un minimum en $x_0 + 2\pi$.

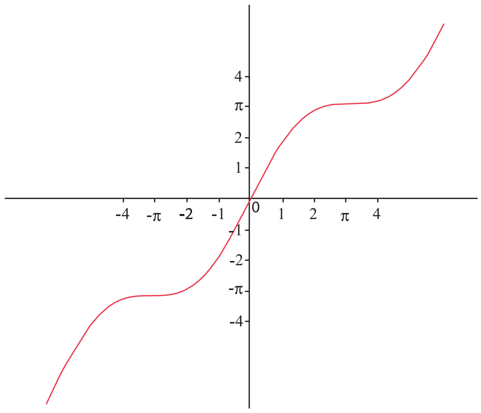
Mobiliser ses compétences

Situation 1

1. Etudier les variations de la fonction $x \mapsto \cos x - \dfrac{2}{\pi}$, sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et en déduire son signe.
2. Montrer que $\sin x \geq \dfrac{2}{\pi}$, pour tout réel x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Situation 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a représenté la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \sin x + x$.



1. a. Vérifier que pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, $f(x + 2\pi) = f(x) + 2\pi$.
   b. Achever la représentation graphique de la restriction de f à chacun des intervalles $[\pi, 3\pi]$ et $[-3\pi, -\pi]$.
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ chacune des inéquations suivantes.
   $\sin x \leq -x$ et $\sin x \geq -x$.
3. a. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x$.
   b. Déterminer graphiquement les coordonnées des points d'intersection éventuels de la courbe de f et de la droite d'équation $y = x - 1$.

Situation 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit E l'ensemble des points M de coordonnées $(2\cos t, \sin 2t)$ où $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
   a. Déterminer et construire les points de E correspondant aux valeurs suivantes :
   $t_0 = 0$, $t_1 = \dfrac{\pi}{4}$ et $t_2 = \dfrac{\pi}{8}$.
   b. Soit $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $M(2\cos t, \sin 2t)$.
   Déterminer un procédé de construction du point M.
2. On considère la fonction f définie sur $[-2, 2]$ par $f(x) = x\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{4}}$.
   Soit $x \in [-2, 2]$ et $M(x, f(x))$.
   On se propose de donner un procédé de construction de M.
   a. Vérifier que si $t \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ alors $\sin 2t = 2\cos t\sqrt{1 - \cos^2 t}$.
   b. Montrer que $M(x, y) \in E$, si et seulement si, $y = f(x)$.
   c. Conclure.

Exercice 1

Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que la fonction f est bornée sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = 5\sin x$.
2. $f(x) = \sin x - \cos x$.
3. $f(x) = \cos x \sin x - 1$.

Exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C_1 et C_2 les courbes représentatives respectives des fonctions f et g définies sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = -3\cos x + 2$ et $g(x) = \cos x$.

1. Tracer les courbes C_1 et C_2.
2. Soit la fonction h définie sur $[-\pi, \pi]$ par $h(x) = |\cos x - 1| + |2\cos x - 1|$ et C sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a. Déterminer l'expression de h(x).

b. En déduire la courbe C à partir des courbes C_1 et C_2.

c. Résoudre graphiquement, $h(x) = \frac{1}{2}$ et $h(x) \geq 7$.

Exercice 3

Déterminer chacune des limites ci-dessous.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{\sin x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0^-}\frac{\cos\left(x+\frac{3\pi}{4}\right)}{\sin x} \quad ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{\sin^3 x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin(-5x)}{x} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{tg(3x)}{x} \quad ;$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(5x)}{\sin(-4x)} \quad ; \quad \lim_{x\to 0}\frac{tg(-3x)}{\sin(2x)} \; .$$

Exercice 4

Calculer la dérivée de chacune des fonctions ci-dessous

$f(x) = 2\sin x$; $g(x) = \frac{3\cos x + 5}{2}$;

$h(x) = \sin x + \cos x$; $s(x) = \frac{1}{\cos x + 2}$;

$v(x) = x\cos x$; $t(x) = \sin x \cos x$;

$w(x) = \sin^2 x$; $r(x) = -3\sin\left(-2x + \frac{\pi}{4}\right)$;

$j(x) = \cos\left(-3x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 5

On considère la fonction $f : \mapsto \cos^3 x - \sin^3 x$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée.
3. Donner une approximation affine de $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 6

On considère la fonction $f : \mapsto \cos x - \frac{1}{x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée.
3. Donner une approximation affine de f(1.00001).

Exercice 7

On considère la fonction $f : x \mapsto \sqrt{\sin^2 x + 1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée.
3. Donner une approximation affine de $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $f(10^{-4})$.

Exercice 8

On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{\tan x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Etudier sa dérivabilité puis calculer sa dérivée.
3. Donner une approximation affine de $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

Exercice 9

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par $f(x) = \sin x$.

Soit a un réel.

1. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse a.
2. Etudier suivant les valeurs du réel a, la position de C et T.

Exercice 10

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on désigne par C et C' les courbes représentatives respectives des fonctions sin et – sin.

1. Déterminer l'ensemble E des points d'intersections des courbes C et C'.
2. On désigne par M un point de E d'abscisse x.

Montrer que les tangentes en M à chacune des courbes C et C' sont perpendiculaires.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$f(x)=-3\sin\left(2x+\frac{2\pi}{3}\right)$.

1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f.
2. Calculer $f'(x)$ et résoudre dans l' intervalle $[0, \pi]$ l'équation $f'(x) = 0$.
3. Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.
4. Représenter dans un repère orthonormé la restriction de f à l'intervalle $[-\pi, 2\pi]$.
5. Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du réel k, le nombre de solutions sur $[-\pi, 2\pi]$ de l'équation $f(x) = k$.

Exercice 12

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction $f : x \mapsto \cos^2 x - 1$.

1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f.
2. Etudier et représenter f sur un intervalle période.

Exercice 13

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction $f : x \mapsto -\frac{3}{2}\sin 2x$.

1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f.
2. Etudier et représenter f sur un intervalle période.

Exercice 14

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction $f : x \mapsto 2\cos\left(-3x + \frac{\pi}{2}\right)$.

1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f.
2. Etudier et représenter f sur un intervalle période.

Exercice 15

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère la fonction $f\ x \mapsto \tan x + \sin 4x$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
1. Montrer que f est périodique et préciser une période de f.
2. Etudier et représenter f sur un intervalle période.

Exercice 16

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \tan x$.

1. Représenter f et $-f$.
2. On considère la fonction g définie sur $\left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$ par $g(x) = \frac{\cos x}{\sin x}$ et on désigne par C' sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

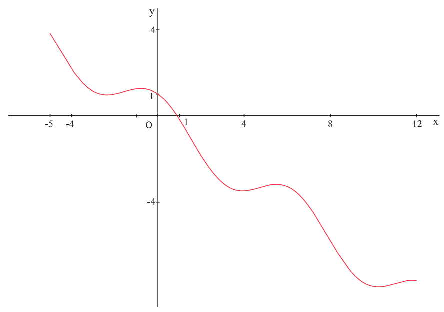
a. Vérifier que $g(x) = -\tan\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$.

b. Tracer alors la courbe C'.

c. En déduire le tableau de variation de g.

Exercice 17

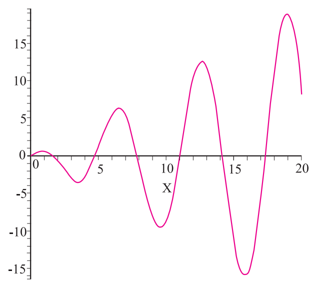
Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a tracé la courbe représentative de la fonction définie sur $[-5, 12]$ et par $f(x) = \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}x$.



Déterminer les extréma de f.

Exercice 18

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par C la courbe représentative de la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x\cos x$.

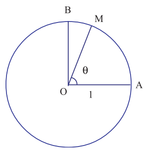


Déterminer par le calcul, le plus petit extremum local de la courbe C à 10^{-1} près.

Exercice 19

Le plan est muni d'un repère ortonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit A et B deux points du cercle trigonométrique de centre O tels que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.



Soit θ un réel un réel de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$,

on désigne par M le point du cercle

tel que $(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}}) \equiv \theta [2\pi]$.

1. a. Montrer que $AM = 2 \sin \frac{\theta}{2}$.

b. Montrer que $BM = 2 \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$.

2. Dresser le tableau de variation de la fonction

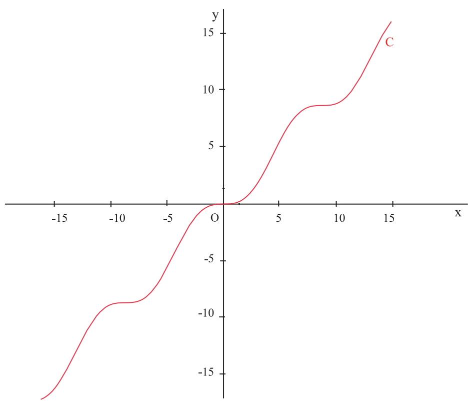
$f : x \mapsto 2\sin x + 2\sin \left(\frac{\pi}{4} - x\right)$ sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{4}\right[$.

3. En déduire la valeur de θ pour laquelle la somme AM + BM est maximale.

Exercice 20

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on a tracé ci-dessous la courbe C représentative de la fonction`

$f : x \mapsto x - \sin x$.



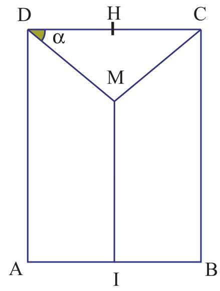
1. Montrer que pour tout réel x, $x-1 \leq f(x) \leq x+1$.

2. a. Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec la droite D : $y = x-1$.

b. Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec la droite D' : $y = x+1$.

3. Montrer que les droites D et D' sont tangentes à C en ces points d'intersection.

Exercice 21



On veut placer un tuyau en forme de Y contre un mur rectangulaire afin d'évacuer les eaux de pluies recueillies sur le toit. On modélise la situation par la figure ci-contre.

On désigne par I et H les milieux respectifs de [AB] et [DC].

On désigne par M un point du segment [IH] distinct de I et H et on note $\widehat{CDM} = \alpha$ (en radians).

On se propose de trouver la valeur de α pour laquelle la longueur du tuyau est minimale.

On note f(α) la longueur du tuyau.

1. Montrer que $f(\alpha) = \frac{AB}{\cos \alpha} - \frac{AB}{2} \tan \alpha + AD$.

2. a. Etudier sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ les variations de la fonction $f : \alpha \mapsto f(\alpha)$.

b. Conclure.

Exercice 22

On considère un triangle ABC isocèle de sommet principal A, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1. On désigne par H le pied de la hauteur issue de A.

On note α la mesure en radians de l'angle $\widehat{HOC}$

et on suppose que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

1. a. Calculer BC et AH en fonction de α.

b. En déduire l'aire du triangle ABC en fonction de α.

2. On considère la fonction f définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

par $f(\alpha) = \sin \alpha(1 + \cos\alpha)$.

a. Montrer que $f'(\alpha) = (2 \cos\alpha - 1)(\cos\alpha + 1)$.

b. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

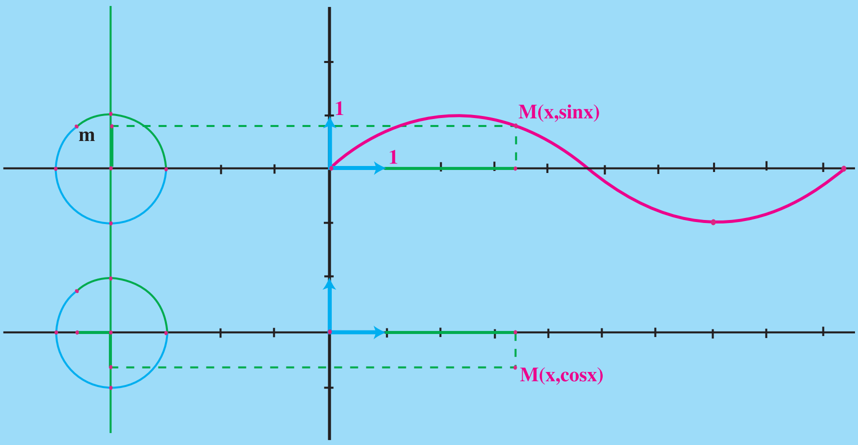
3. Déterminer la valeur de α pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale.

Préciser ce maximum et la nature du triangle ABC.

Avec l'ordinateur

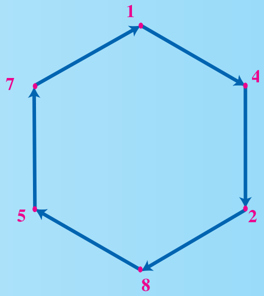
On se propose dans cette séquence d'illustrer le tracé des fonctions sinus et cosinus.

1. On trace un cercle centré sur l'axe des abscisses, puis on y place un point m.
2. On construit l'arc de C d'origine le point A(a, 0) et passant par m.
3. On mesure la longueur de l'arc $\overset{\frown}{AM}$ qu'on reporte sur l'axe des abscisses à l'aide de l'outil "report de mesure"
4. On construit le point M comme intersection de la parallèle à l'axe des abscisses en m et la perpendiculaire à cet axe et passant par le point représentant la mesure reporté.
5. On fait varier le point m sur C et à l'aide de l'outil trace, on observe le déplacement du point M.
6. Utiliser ce procédé pour illustrer le tracé de la fonction cosinus et la fonction tangente.



Math – culture

Le quotient $\frac{1}{7}$ a pour période le nombre 142 857.
Multiplié par 2, 3, 4, 5 et 6, on obtient respectivement d’autres nombres cycliques : 285 714, 428 571, 571 428, 714 285 et 857 142.
Faites de même pour les quotients $\frac{1}{17}$; $\frac{1}{19}$ et $\frac{1}{23}$.

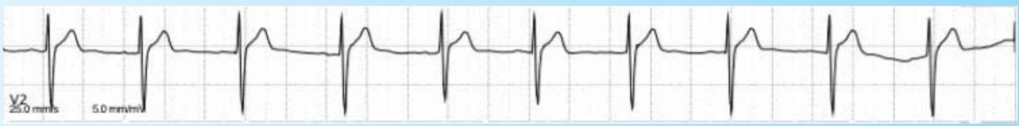


Le *Boléro* de Maurice Ravel est un immense ostinato construit à partir d'un couple de thèmes qui se répètent une dizaine de fois dans des combinaisons instrumentales sans cesse renouvelées, depuis la configuration initiale (tambour, clarinette, flûte) jusqu'au "tutti final". Une insistante formule rythmique récurrente, énoncée dans un tempo immuable.

L'électrocardiographie (ECG) est la représentation graphique du potentiel électrique généré par l'activité musculaire du cœur et recueillie par des électrodes à la surface de la peau.

On donne ci-dessous le tracé papier de cette activité, appelé un électrocardio
L’électrocardiographe est l'appareil permettant de faire un électrocardiogramme.

L’électrocardiographie d’un patient sain est périodique.



Math – culture

Chapitre 9

Suites réelles

" Il peut n'y avoir aucun intérêt pratique à savoir que π est irrationnel, mais s'il est possible de le savoir,
il serait intolérable de ne pas le savoir. "

Titschmarsh

Suites réelles

Pour commencer

Activité 1

Calculer chacune des sommes ci-dessous.

a. $100 + 102 + \ldots + 1004$.

b. $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - 2 + \ldots - 2^{10}$.

c. $\cos\frac{\pi}{4} + \cos\frac{2\pi}{4} + \ldots + \cos\frac{73\pi}{4}$.

d. $\cos\pi + \cos(2\pi) + \ldots + \cos(3000\pi)$.

Activité 2

1. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \sin n\pi$.
   Calculer u_n.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \cos\frac{(2n+1)\pi}{2}$.
   Calculer v_n.

Activité 3

Représenter graphiquement chacun des ensembles ci-dessous.

a. L'ensemble des points $A(n, n^2)$, $0 \leq n \leq 6$.

b. L'ensemble des points $A\left(n, \frac{n^2+1}{n^2+3}\right)$, $0 \leq n \leq 10$.

c. L'ensemble des points $A(n, \sin n)$, $0 \leq n \leq 10$.

Cours

1. Le principe de récurrence

Activité 1

Soit A un ensemble d'entiers naturels vérifiant les hypothèses suivantes :

• 1 appartient à A,

• si n appartient à A alors n – 1 appartient à A,

• si n appartient à A alors 2n appartient à A.

Montrer que 10 appartient à A, 100 appartient à A.

Activité 2

Soit A un ensemble d'entiers naturels vérifiant les hypothèses suivantes :

• 0 appartient à A,

• si n appartient à A alors n + 1 appartient à A,

1. Montrer que 10 appartient à A, 100 appartient à A, 1000 appartient à A.
2. On se propose de déterminer l'ensemble A.
   a. Supposons qu'il existe des entiers naturels n qui n'appartiennent pas à A et soit q le plus petit de ces entiers. Que peut-on dire de q – 1 ?
   b. Conclure.

Activité 3

On se propose de montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'entier $4^n + 2$ est divisible par 3

On note pour tout entier $n \geq 1$, P_n la propriété « $4^n + 2$ est divisible par 3 ».

1. Vérifier que P_1 est vraie.
2. a. Vérifier que $4^{n+1} + 2 = 4(4^n + 2) - 6$.
   b. En déduire que si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie.
3. a. Supposons qu'il existe des entiers naturels n pour lesquels P_n n'est pas vraie. Soit q le plus petit de ces entiers. Que peut-on dire de P_{q-1} ?
   b. Conclure.

Principe de récurrence

Soit n_0 un entier naturel et P_n une propriété dépendant d'un entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

• P_{n_0} est vraie,

• si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie,

alors P_n est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à n_0.

2. Définition et représentation graphique d'une suite

Activité 1

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$u : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $s : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $t : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $v : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $w : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

$n \mapsto n^2 - 1$ $\quad n \mapsto \dfrac{1}{n}$ $\quad n \mapsto \sqrt{n^2 - 5}$ $\quad n \mapsto \dfrac{2n + 1}{n^2 - n + 1}$ $\quad n \mapsto \cos(2n)$

Définition

Une suite numérique u est une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, définie à partir d'un certain rang n_0.
L'image u(n) de l'entier n est notée u_n.
Le terme u_{n_0} est le premier terme de la suite.
Le terme u_n est le terme d'indice n de la suite.

Activité 2

On considère l'ensemble des entiers naturels dont le reste dans la division euclidienne par 5 est égal à 4, que l'on range dans l'ordre croissant.
A tout entier n, on associe le $n^{ème}$ entier ainsi obtenu que l'on note u_n.

1. Donner les valeurs de u_1, u_2, u_3, u_{50} et u_{100}.
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Exprimer u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de n.
4. Représenter dans un repère les points $A_n(n, u_n)$, $1 \leq n \leq 5$.
5. Calculer la somme $S = 4 + 9 + 14 + \ldots + 604$.

Activité 3

Une étude écologique effectuée dans une banlieue donnée, indique que dans n années, le niveau moyen (en parties par million) de monoxyde de carbone présent dans l'air sera $g_n = 0.05\,n^2 + 0.1\,n + 3.4$.

1. Quel sera le niveau moyen de monoxyde de carbone présent dans l'air cette année, dans un an, deux ans, dix ans ?
2. Représenter les points $A_n(n, g_n)$, pour $1 \leq n \leq 6$.
3. Sur quelle courbe se trouvent les points $A_n(n, g_n)$, $n \geq 0$?

Activité 4

A tout entier $n \geq 1$, on associe u_n, le $n^{ème}$ chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de $\dfrac{9}{11}$

1. Calculer u_1, u_2, u_{100} et u_{101}.
2. Déterminer pour tout entier n, u_{2n} et u_{2n+1}.
3. Représenter dans un repère les points $A_n(n , u_n)$, $1 \leq n \leq 10$.

Activité 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $n \geq 0$.

1. Calculer u_0, u_1, u_3. et u_4.
2. Donner en fonction de n l'expression de u_{4n}, u_{4n+1}, u_{4n+2} et u_{4n+3}.
3. Représenter dans un repère les points $A_n(n , u_n)$, $0 \leq n \leq 10$.

3. Variation d'une suite

Activité 1

Une équipe de biologistes a effectué plusieurs expériences avec une certaine espèce d'insectes. L'analyse des données a montré que n semaines après le début des expériences, le nombre d'insectes (en centaines) est $v_n = 20 - \frac{6}{n+1}$.

1. Quel est le nombre initial d'insectes ?
2. Quel sera le nombre d'insectes au bout d'une semaine, deux semaines, 49 semaines d'expériences ?
3. Représenter dans un repère orthonormé les points $A_n(n , v_n)$, $0 \leq n \leq 10$.
4. Décrire l'évolution de la population d'insectes au cours d'expériences successives.

Activité 2

Un fabricant doit payer des frais de manutention et de transport pour chaque commande de matières premières, et après réception, il doit payer des frais d'entreposage jusqu'à ce que les matières premières soient utilisées. Le fabricant estime que si chaque commande contient n unités, le coût total annuel c_n (exprimé en dinars) de manutention, de transport et d'entreposage des matières premières sera de $c_n = n + \frac{1600}{n}$.

1. Représenter dans un repère orthonormé les points $A_k(10k , c_{10k})$, $1 \leq k \leq 8$.
   Sur quelle courbe se trouvent les points A_k ?
2. Décrire l'évolution du coût total annuel de ce fabricant.
3. Pour quelle valeur de n, le coût total annuel c_n est-il minimum ?

Activité 3

On considère les suites (u_n), (v_n) (w_n) et (t_n) définies par

$u_n = n^2 + 1$, $n \geq 0$; $v_n = \frac{1}{n}$, $n \geq 1$; $w_n = n + 1 + (-1)^n$, $n \geq 0$; $t_n = \cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right)$, $n \geq 0$.

1. Dans quel ordre sont rangés les termes de la suite (u_n) ?
2. Dans quel ordre sont rangés les termes de la suite (v_n)?
3. Peut-on ranger les termes de la suite (w_n) dans l'ordre croissant ou décroissant ?
4. Peut-on ranger les termes de la suite (t_n) dans l'ordre croissant ou décroissant ?

Définition

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq n_0 \geq 0$.
La suite (u_n) est dite croissante si $u_{n+1} \geq u_n$ pour tout $n \geq n_0$. Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre croissant : $u_{n_0} \leq u_{n_0+1} \leq ... \leq u_n \leq u_{n+1} \leq ...$
La suite (u_n) est dite décroissante si $u_{n+1} \leq u_n$ pour tout $n \geq n_0$. Dans ce cas les termes de la suite sont rangés dans l'ordre décroissant : $u_{n_0} \geq u_{n_0+1} \geq ... \geq u_n \geq u_{n+1} \geq ...$
Une suite est dite monotone lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.

Activité 4

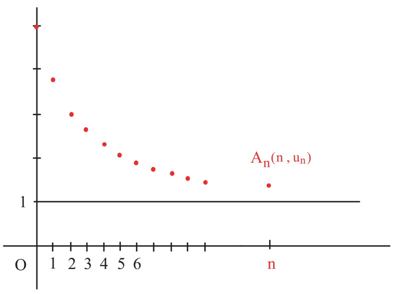
Soit f une fonction définie sur $[0\ ,+\infty[$ et u la suite définie par $u_n = f(n)$.
1. Montrer que si f est croissante sur $[0\ ,+\infty[$ alors la suite u est croissante.
2. Montrer que si f est décroissante sur $[0\ ,+\infty[$ alors la suite u est décroissante.
3. Appliquer les résultats précédents pour étudier la monotonie des suites (u_n), (v_n),(t_n), (k_n) et (w_n) définies par
   $u_n = 2n^2 - 3n + 5,\ n \geq 1$; $v_n = \sqrt{n-3},\ n \geq 3$; $v_n = \dfrac{n-1}{2n},\ n \geq 1$;
   $k_n = \sin\dfrac{1}{n},\ n \geq 1$; $t_n = \cos\dfrac{1}{n},\ n \geq 1$.

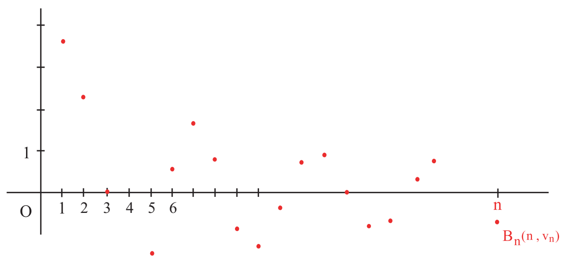
Activité 5

Etudier les variations d'une suite arithmétique de raison r (on discutera suivant le signe de r).

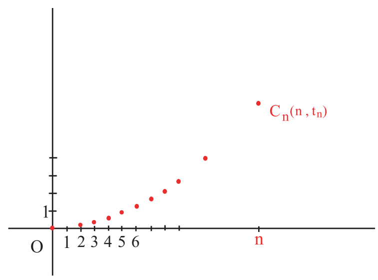
Activité 6

Le plan est muni d'un repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.
On considère trois suites (u_n), (v_n) et (t_n).
Sur chacun des graphiques ci-dessous, on a représenté les points $A_n(n, u_n)$, $B_n(n, v_n)$ et $C_n(n, t_n)$.





1. Donner un encadrement de u_n, $n \in \mathbb{N}$.
2. Donner un encadrement de v_n, $n \in \mathbb{N}$.
3. Peut-on trouver un encadrement de t_n, $n \in \mathbb{N}$?



Définition

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$.
La suite (u_n) est dite majorée s'il existe un réel M tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \leq M$.
La suite (u_n) est dite minorée s'il existe un réel m tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \leq m$.
La suite (u_n) est dite bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

Activité 7

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et u la suite définie par $u_n = f(n)$.

1. Montrer que si f est majorée sur $[0, +\infty[$ alors la suite u est majorée.
2. Montrer que si f est minorée sur $[0, +\infty[$ alors la suite u est minorée.
3. Appliquer les résultats précédents pour montrer que chacune des suites (u_n), (v_n) et (t_n) définie ci-dessous est bornée.

$$u_n = 2 - \frac{3}{2+n},\ n \geq 0\ ;\ v_n = \sin(2n),\ n \geq 0\ ;\ t_n = \cos\left(\frac{3n\pi}{4}\right) - 3,\ n \geq 0.$$

Activité 8

On considère la suite (w_n) définie par $w_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que $0 < w_n \leq 1$, $n \geq 0$.
2. Etudier les variations de la suite (w_n).

Activité 9

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n}{2^n}$, $n \geq 1$.

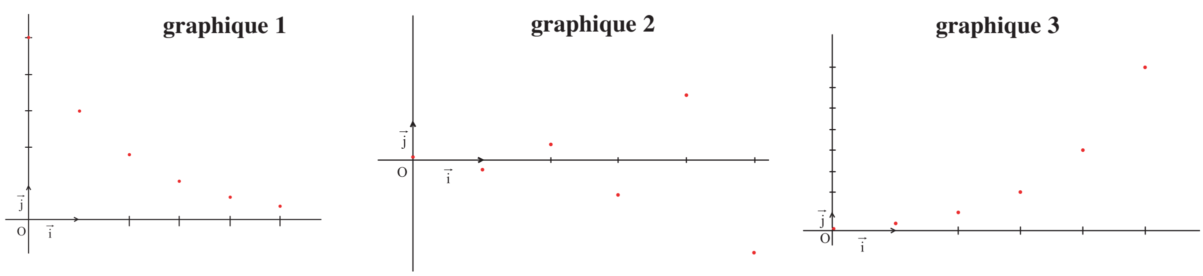
1. a. Comparer le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1.

   b. En déduire les variations de la suite (u_n).
2. Montrer que la suite (u_n) est majorée.
3. Montrer que $2^n \geq n$, $n \geq 1$.

3. Suites géométriques

Activité 1

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On considère trois suites géométriques (u_n), (v_n) et (w_n) de raisons respectives $q < 0$, $0 < q' < 1$ et $q'' > 1$.
Sur chacun des graphiques ci-dessous, on a représenté les points $A_n(n, u_n)$, $B_n(n, v_n)$ et $C_n(n, w_n)$ $n \leq 5$. Identifier ces points.



Activité 2

1. Soit (u_n) une suite géométrique de raison $q > 0$ et de premier terme $u_0 > 0$.
   Etudier les variations de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants :
   a. $q > 1$.
   b. $0 < q < 1$.
2. Que peut-on dire des variations d'une suite géométrique de raison strictement négative ? de raison égale à 1 ?

Activité 3

Montrer qu'une suite géométrique de raison q telle que $|q| \leq 1$, est bornée.

Activité 4

Selon la théorie de Tibby, publiée en 1947, le pourcentage de carbone 14 est le même dans l'atmosphère. Lorsqu'un animal ou une plante meurt, le carbone 14 qu'il contient se désintègre et le pourcentage de cette substance dans l'organisme inerte décroît de 1.24% en 100 ans.

1. Quel est le pourcentage de carbone initial contenu dans un tissu mort depuis 1000 ans, 2000 ans, 10000 ans ?
2. Exprimer en fonction de l'entier naturel k, le pourcentage u_k de carbone initial contenu dans un tissu mort depuis $k.10^3$ années.
3. Donner une estimation de l'âge d'un fossile qui ne contient que 10% de ce qu'il contenait en carbone 14.
4. Etudier les variations de la suite (u_k).

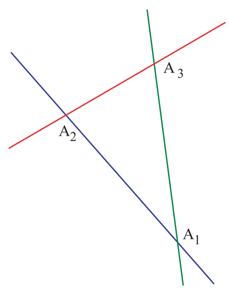
Activité 5

Une population de 100 bactéries prolifère en se multipliant par deux toutes les heures.

1. Quel sera le nombre de bactéries au bout d'une heure, deux heures, cinq heures ?
2. Exprimer en fonction de n, le nombre b_n de bactéries au bout de n heures.
3. Donner une estimation du temps nécessaire pour que le nombre de bactéries soit supérieur à un million.
4. Etudier les variations de la suite (b_n). La suite (b_n) est-elle bornée ?

5. Suites récurrentes

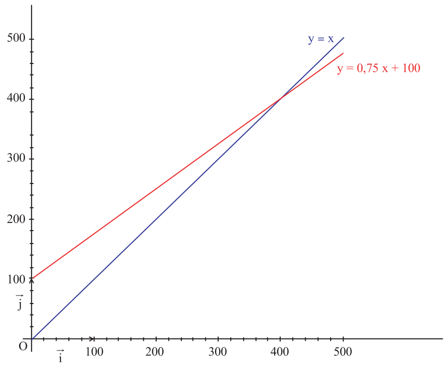
Activité 1



1. On considère trois points non alignés et on désigne par d_3 le nombre de droites passant par deux de ces points. Calculer d_3.
2. On considère à présent quatre points, trois quelconques d'entre eux n'étant pas alignés, et on désigne par d_4 le nombre de droites passant par deux de ces points. Calculer d_4.
3. On considère à présent n points, $(n \geq 4)$, trois quelconques d'entre eux n'étant pas alignés, et on désigne par d_n le nombre de droites passant par deux de ces points.
   a. Donner une relation entre d_{n-1} et d_n en fonction de n.
   b. En déduire l'expression de d_n en fonction de n.
4. Etudier les variations de la suite (d_n). La suite (d_n) est-elle majorée ?

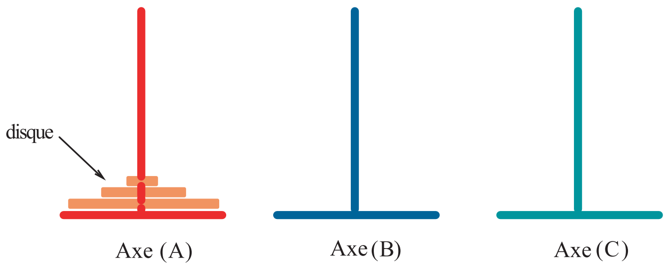
Activité 2

Le président d'une association sportive constate que chaque année, l'association garde 75% de ses anciens adhérents et qu'il y a 100 nouveaux adhérents.
On suppose que l'évolution du nombre des adhérents reste la même au fil des ans.
On note u_n le nombre d'adhérents au bout de n années.
On sait qu'au démarrage de l'association, il y avait 40 adhérents, soit $u_0 = 40$.
1. Calculer u_1 et u_2.
2. Donner une relation entre u_n et u_{n+1}.
3. Dans le graphique ci-contre, on a représenté la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 0.75\,x + 100$ et la droite d'équation $y = x$.



   a. Reproduire ce graphique et placer sur l'axe des abscisses le réel $u_0 = 40$.
   b. Placer alors sur l'axe des ordonnées le réel $u_1 = f(u_0)$.
   Reporter u_1 sur l'axe des abscisses.
   c. En réitérant le procédé décrit précédemment, placer sur l'axe des abscisses les réels $u_2 = f(u_1)$ et $u_3 = f(u_2)$.
4. On pose pour tout entier n, $v_n = 400 - u_n$.
   a. Calculer v_0 et vérifier que pour tout entier n, $v_{n+1} = 0.75\, v_n$.
   b. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?
   c. En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.
   d. Quel sera le nombre d'adhérents au bout de 15 années ? 100 années ?
   e. Donner un encadrement de u_n, $n \geq 0$.

Activité 3 (La tour de Hanoi)



Il s'agit de déplacer tous les disques de l'axe (A) soit vers l'axe (B) soit vers l'axe (C) sachant que
• à chaque fois, on ne déplace qu'un seul disque,
• on ne peut pas mettre un disque sur un disque plus petit.
S'il y a n disques, on notera x_n le nombre minimum de coups nécessaires.
1. Vérifier que $x_1 = 1$, $x_2 = 3$ et $x_3 = 7$.
2. Prouver que $x_{n+1} = 2x_n + 1$.
3. En déduire que $x_n = 2^n - 1$.
4. Donner une estimation du temps nécessaire pour placer 20 disques sachant que chaque coup nécessite 1 seconde.

Activité 4

Le but de cette activité est de construire une suite de nombres rationnels qui approximent $\sqrt{37}$.

1. En utilisant l'égalité $\left(\sqrt{37}-6\right)\left(\sqrt{37}+6\right)=1$, déterminer l'unique solution positive de l'équation $x = 6 + \dfrac{1}{6+x}$.
2. Tracer la courbe représentative de la fonction $h : x \mapsto 6 + \dfrac{1}{6+x}$ et la droite d'équation $y = x$.
3. On pose $x_1 = 6$; placer sur l'axe des abscisses les points $x_2 = 6 + \dfrac{1}{6+x_1}$, $x_3 = 6 + \dfrac{1}{6+x_2}$, $x_4 = 6 + \dfrac{1}{6+x_3}$ et vérifier que $x_1 \leq x_3 \leq \sqrt{37} \leq x_4 \leq x_2$.
4. Donner la valeur exacte de x_2, x_3 et x_4 et prouver que $\dfrac{882}{145}$ est une valeur approchée de $\sqrt{37}$ à 10^{-4} près.
5. En considérant la suite (x_n) définie par $\begin{cases} x_1 = 6, \\ x_{n+1} = 6 + \dfrac{1}{6+x_n} \end{cases}$

   encadrer $\sqrt{37}$ entre deux rationnels dont la différence est inférieure à 10^{-13}.
6. Utiliser un procédé analogue pour déterminer une suite de nombres rationnels qui approximent $\sqrt{10}$.

Activité 5

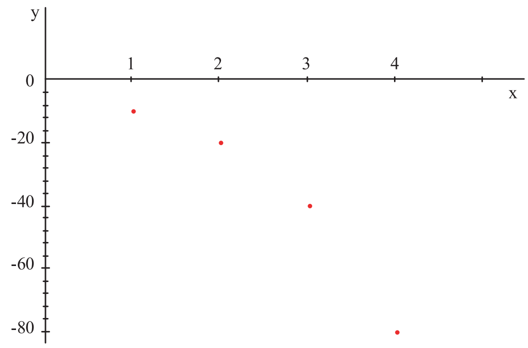
Soit un réel $a > 0$ et la suite (x_n) définie par

$$\begin{cases} x_0 \\ x_{n+1} = ax_n + b \end{cases}$$

1. Montrer que si $x_n \geq x_{n-1}$, $n \geq 1$ alors $x_{n+1} \geq x_n$.
2. Discuter suivant le signe du réel $x_1 - x_0$, les variations de la suite (x_n).

QCM – VRAI – FAUX

QCM



Cocher la réponse exacte.

1. Sur le graphique ci-contre, on a représenté les points $A_n(n\ ,\ u_n)$, $1 \le n \le 4$, où (u_n) est une suite géométrique de raison q. Graphiquement on a

☐ $q < 0$ ☐ $q > 1$ ☐ $q < -1$.

2. La suite (u_n) définie par $u_n = \sin n$, $n \ge 0$,

☐ est majorée ☐ n'est pas bornée ☐ est positive.

3. La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{-2}{n^2+1}$, $n \ge 0$,

☐ n'est pas majorée ☐ n'est pas minorée ☐ est bornée.

4. La suite (u_n) définie par $u_n = -2\left(\dfrac{5}{3}\right)^n$, $n \ge 0$,

☐ est croissante ☐ est décroissante ☐ n'est ni croissante ni décroissante.

5. La suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{n}\cos\left(\dfrac{1}{n}\right)$, $n > 0$,

☐ croissante ☐ décroissante ☐ n'est ni croissante ni décroissante.

VRAI – FAUX

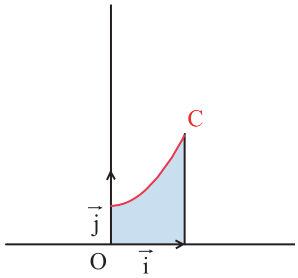
Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si une suite n'est pas bornée alors elle n'est pas majorée.
2. Si une suite n'est pas minorée, alors elle n'est pas bornée.
3. Si une suite n'est pas croissante, alors elle est décroissante.
4. Si une suite est arithmétique, alors elle est monotone.
5. Si une suite est géométrique, alors elle est monotone.

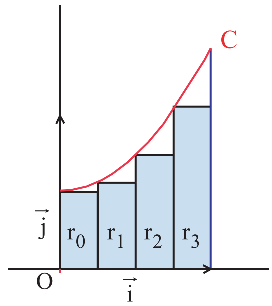
Mobiliser ses compétences

Situation 1

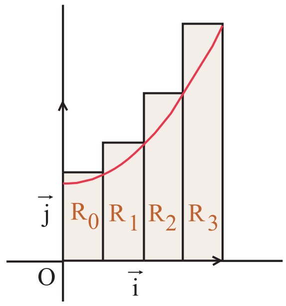
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Soit f la fonction définie sur [0, 1] par $f(x) = x^2 + 0.5$.
On a tracé ci-contre sa courbe C.
On se propose de donner un encadrement de l'aire A délimitée par les axes du repère, la courbe C et la droite d'équation $x = 1$.



1. On partage l'intervalle [0, 1] en quatre intervalles de longueur $\frac{1}{4}$.

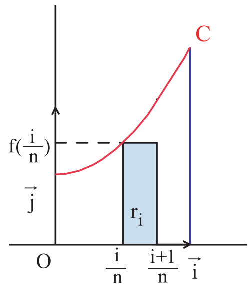


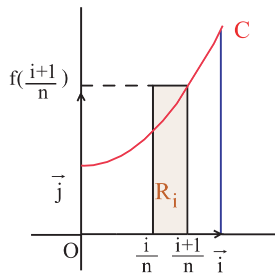
   a. On trace les rectangles r_i, $0 \leq i \leq 3$, comme l'indique la figure ci-contre et on désigne par s_4 la somme des aires des rectangles r_i, $0 \leq i \leq 3$.
   Calculer s_4.



   b. On trace les rectangles R_i, $0 \leq i \leq 3$, comme l'indique la figure ci-contre et on désigne par S_4 la somme des aires des rectangles R_i, $0 \leq i \leq 3$.
   Calculer S_4.

   c. En déduire un encadrement de A.
   Plus généralement, soit un entier $n \geq 1$, on partage l'intervalle [0, 1] en n intervalles, de longueur $\frac{1}{n}$.
   On trace les rectangles r_i et les rectangles R_i, $0 \leq i \leq n - 1$, comme l'indique la figure ci-contre.
   On désigne par s_n respectivement S_n la somme des aires des rectangles r_i, respectivement R_i, $0 \leq i \leq n-1$.

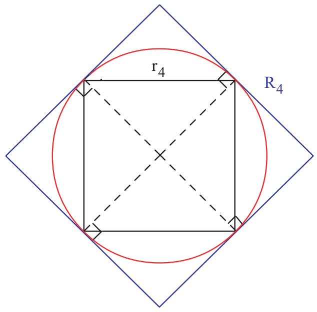




2. a. Faire une figure dans le cas où $n = 10$.
   b. Déduire un nouvel encadrement de A.
3. a. Exprimer s_n et S_n en fonction de n.
   b. En utilisant l'égalité $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $n \geq 1$,
   montrer que $s_n = \frac{5}{6} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ et que $S_n = \frac{5}{6} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$.
   c. Déduire un encadrement de A à 10^{-20} près.

Situation 2

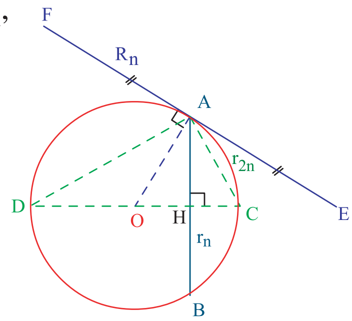
On se propose de donner des encadrements de π en encadrant le périmètre d'un cercle de diamètre 1.



I. Dans la figure ci-contre on considère un carré r_4 inscrit dans le cercle. Le carré R_4 circonscrit est obtenu en traçant les tangentes au cercle en les sommets du carré r_4.

1. a. Calculer les périmètres p_4 et P_4 respectifs des carrées r_4 et R_4.
   b. En déduire un encadrement de π.
2. Soit [AB] un côté de r_4. La médiatrice de [AB] coupe le cercle en un point C.
   a. Vérifier que A, C et B sont trois sommets consécutifs d'un octogone régulier r_8 inscrit dans le cercle.
   b. Construire r_8.
   On désigne par p_8 le périmètre de r_8.
   c. Comparer graphiquement p_4 et p_8 .
3. a. Tracer à partir de r_8 un octogone régulier R_8 circonscrit au cercle.
   On désigne par P_8 le périmètre de R_8.
   b. Comparer graphiquement R_4 et P_4 .
4. En déduire un nouvel encadrement de π.

II. Plus généralement, soit un entier $n \geq 3$. On considère un polygone régulier r_n à n côtés, inscrit dans un cercle de diamètre 1.



En appliquant le même procédé décrit en I, au polygone régulier r_n, il vient que si [AB] désigne un côté du polygone régulier r_n, (voir figure ci-contre), alors [AC] désigne un côté d'un polygone régulier r_{2n} à 2n côtés inscrit dans le cercle et [EF] désigne un côté d'un polygone régulier R_n à n côtés circonscrit au cercle.
Si on note pour tout $n \geq 3$, p_n et P_n les périmètres respectifs des polygones r_n et R_n on obtient
$p_n < p_{2n} < p_{4n} < \ldots < \pi < \ldots < P_{4n} < P_{2n} < P_n$.
Dans ce qui suit on se propose de déterminer p_{2n} et P_n en fonction de p_n.

1. a. En remarquant que $AC^2 = DC.HC$, montrer que $AC^2 = \left(\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{AB^2}{4}}\right)$.
   b. En déduire que $p_{2n} = \sqrt{2n}\sqrt{n - \sqrt{n^2 - p_n^2}}$.
2. a. En remarquant que OA.AH = AE.OH, montrer que $EF = \dfrac{AB}{\sqrt{1 - AB^2}}$.

b. En déduire que $P_n = \dfrac{np_n}{\sqrt{n^2 - p_n^2}}$.

3. Compléter le tableau ci-dessous.

n	Valeur approchée de p_n à 10^{-8} près	Valeur approchée de P_n à 10^{-8} près	Encadrement de π
$2^2 = 4$			
$2^3 = 8$			
$2^4 = 16$			
$2^5 = 32$			
$2^6 = 64$			
$2^7 = 128$			
$2^8 = 256$			
$2^9 = 512$			
$2^{10} = 1024$			

Exercices et problèmes

Exercice 1

Pour chacun des cas ci-dessous, préciser à partir de quel rang la suite est définie, puis calculer les quatre premiers termes de la suite.

$u_n = \dfrac{5n-1}{n^2-5}$; $v_n = \sqrt{n^2+n-12}$; $w_n = \dfrac{-1}{3^n-3}$;

$a_n = \dfrac{n+1}{\sqrt{n-9}}$; $b_n = \cos\left(\dfrac{1}{n-3}\right)$; $t_n = \sqrt{2^n-12}$.

Exercice 2

On considère la suite u définie par $u_n = \left(\dfrac{1}{4}n(n+1)\right)^2$, $n \geq 1$.

1. Représenter les points $A_n (n, u_n)$, $1 \leq n \leq 3$.
2. Exprimer u_{2n}, u_{2n+1}, u_{n^2}, en fonction de n.

Exercice 3

Pour chacune des suites définies ci-dessous, calculer les cinq premiers termes puis représenter dans un repère les points correspondants et calculer en fonction de n les termes d'indices n+1, n+2 et 2n.

$u_n = 3n-1, n \geq 0$; $u_n = 3n-1, n \geq 0$;

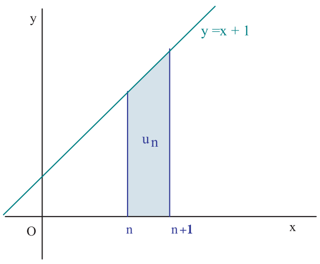
$w_n = \sqrt{2n+4}$, $n \geq 0$; $k_n = \begin{cases} \dfrac{n}{2}, \text{ si n est pair} \\ \dfrac{n+1}{2}, \text{ si n est impair} \end{cases}$;

$\begin{cases} s_0 = 1 \\ s_{n+1} = 2s_n, \ n \geq 0 \end{cases}$; $t_n = \sin\left(\dfrac{2n\pi}{3}\right), n \geq 0.$

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Expliciter le terme général de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ où u_n est l'aire du domaine représenté dans la figure ci-dessous.



2. En déduire l'aire du domaine D des points M de coordonnées (x , y) tels que $0 \leq x \leq 10$ et $0 \leq y \leq x + 1$.

Exercice 5

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ telle que $u_{n+1} = 2^{4n+2}$.

1. Déterminer u_n en fonction de n.
2. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

Exercice 6

On admet, en première approximation, que la pression atmosphérique diminue de 1% de sa valeur initiale chaque fois que l'altitude de l'observateur augmente de 100 mètres.

On désigne par P(0) la valeur de la pression atmosphérique en un lieu donné et P(n) celle en un lieu situé n centaines de mètres plus haut.

1. Etablir une relation entre P(n+1) et P(n).
2. Exprimer P(n) en fonction de n et de P(0).
3. Un promeneur part de son domicile situé au bord de la mer (altitude 0). La pression indiquée par son baromètre de poche est de 1000 millibars. Il arrive à un village à une altitude de 400 mètres. Quelle est la valeur indiquée par le baromètre ?
4. Lorsqu'il atteint le sommet, son baromètre indique 894 millibars. Calculer à 100 mètres près l'altitude de ce sommet.

Exercice 7

Etudier les variations de chacune des suites définies ci-dessous.

$u_n = \dfrac{2n}{n^2+3}$, $n \geq 0$.

$v_n = \dfrac{2n}{\sqrt{n+1}}$, $n \geq 0$.

$w_n = \dfrac{2^n\sqrt{n}}{3^n}$, $n \geq 0$.

Exercice 8

Montrer que chacune des suites définies ci-dessous est bornée.

$u_n = 3 + \dfrac{2n}{n^2+1}$, $n \geq 0$.

$v_n = 3 - 2\cos(4n-1)$, $n \geq 0$.

$w_n = 1 + \dfrac{(-5)^n}{6^n\sqrt{n}}$, $n \geq 0$.

Exercice 9

On considère la suite (u_n) définie par
$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1, n \geq 0. \end{cases}$$
1. Montrer que (u_n) est positive.
2. Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice 10

Pour chacune des suites définies ci-dessous étudier ses variations, indiquer, lorsque c'est possible, si elle est majorée, minorée ou bornée.

1. $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3}$, $n \geq 0$.
2. $u_n = \dfrac{-3n+1}{2n-4}$, $n \geq 3$.
3. $u_n = -3n + 1$, $n \geq 0$.
4. $u_n = \sqrt{3n+2}$, $n \geq 0$.
5. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n, n \geq 0. \end{cases}$
6. $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -\dfrac{2}{3}u_n, n \geq 0. \end{cases}$

Exercice 11

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = 3n + \cos n$, $n \geq 0$.
Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice 12

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par
$$u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$
Montrer que $(u_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Exercice 13

Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{n}\right)$, $n \geq 1$.

Montrer que (u_n) est croissante.

Exercice 14

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{3n+1}{n+2}$, $n \geq 0$.
1. Déterminer les variations de (u_n).
2. Montrer que (u_n) est majorée par 3.
3. Déterminer un entier k tel que pour tout $n > k$, $2.9999 < u_n$.

Exercice 15

On considère la suite (u_n) définie par
$u_n = 3n^2 - 6n - 10$, $n \geq 1$.
1. Déterminer les variations de (u_n).
2. Déterminer un entier k tel que pour tout $n > k$, $u_n > 10^4$.
3. La suite (u_n) est- elle minorée ? majorée ?

Exercice 16

Soit la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est croissante.
2. Montrer que pour tout entier $k > 1$, $k! \geq 2^{k-1}$.
3. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est majorée par 3.

Exercice 17

Soit un réel a et la suite (u_n) définie par
$$u_n = \frac{n+a}{a-n-1}, n > a.$$
On considère la suite (v_n) telle que
$$v_n = \frac{1}{u_n - u_{n-1}} - \frac{1}{u_{n-1} - u_{n-2}}, n \geq 2.$$
1. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique.
2. Pour quelles valeurs de a la suite (v_n) est-elle croissante ? décroissante ?

Exercice 18

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Tracer l'hyperbole H d'équation $y = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ et placer le point $A_0(1,1)$.

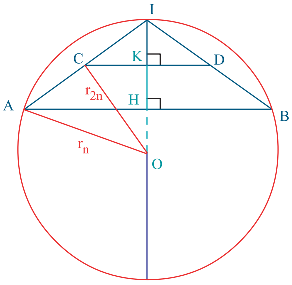
On considère les points de H, A_n et B_n, tels que pour tout $n \geq 0$, le segment $[A_n B_n]$ a pour coefficient directeur 2 et le segment $[A_{n+1} B_n]$ a pour coefficient directeur $\dfrac{3}{4}$.

2. Placer les points B_0 et A_1 puis déterminer leurs coordonnées.

Pour tout $n \geq 0$, on désigne par a_n l'abscisse du point A_n et par b_n l'abscisse du point B_n.

3. Déterminer une relation entre a_n et b_n puis une relation entre a_{n+1} et b_n.
4. Montrer que les suites (a_n) et (b_n) sont géométriques.
5. En déduire les coordonnées des points A_n et B_n en fonction de n.

Exercice 19



Dans la figure ci-contre [AB] désigne un côté d'un polygone régulier à n côtés, de périmètre 2 et inscrit dans un cercle de rayon r_n , (r_n = OA).
Soit r'_n le rayon du cercle inscrit dans le polygone (r'_n = OH).
Soit C et D les milieux de [AI] et [BI] , alors [CD] est l'un des côtés d'un polygone régulier à 2n côtés, de même périmètre que le précédent, inscrit dans un cercle de rayon r'_{2n} (r'_{2n} = OC) et circonscrit à un cercle de rayon r'_{2n} (r'_{2n} = OK).

On obtient alors $\frac{1}{r_n} < \frac{1}{r_{2n}} < \ldots < \pi < \ldots < \frac{1}{r'_{2n}} < \frac{1}{r'_n}$.

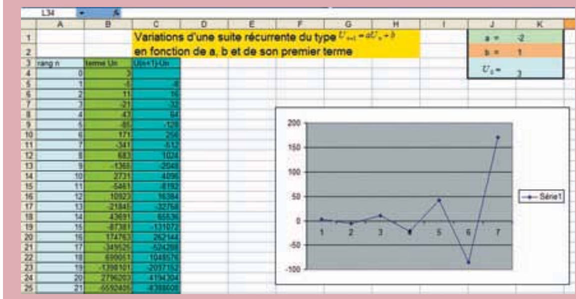
1. Calculer r_4 et r'_4 puis donner un encadrement de π.
2. Remarquer que OK = $\frac{OI + OH}{2}$ et en déduire que $r'_{2n} = \frac{r'_n + r_n}{2}$.
3. Remarquer que $OC^2 = OI \cdot OK$ et en déduire que

$r'_{2n} = \sqrt{r_n r'_{2n}}$.

4. Calculer des valeurs approchées à 10^{-9} près de $\frac{1}{r_{64}}$ et $\frac{1}{r'_{64}}$ puis donner un nouvel encadrement de π.

Avec l'ordinateur

On se propose d'étudier à l'aide d'un tableur, les variations d'une suite récurrente du type $U_{n+1}=aU_n + b$



Comme indiqué dans la figure ci-dessus,
• on inscrit dans la cellule K1 une valeur de a, dans K2 une valeur pour b et dans K3 on choisira une valeur de U_0.
• Dans la cellule A4 on écrit 0 et dans A5 on écrit la formule =A4+1.
On sélectionne A5 et avec la poignée de recopie, on copie par exemple jusqu'à A100.
• Dans la cellule B4 on écrit la formule =K3 et dans B5 on écrit la formule =$K$1*B4+$K$2
La cellule B5 étant sélectionnée, on la copie à l'aide de la poignée de recopie jusqu'à B100.
• Dans la cellule C5 on écrit la formule =B5-B4 et on la copie jusqu'à C100.
• On pourra représenter les termes de cette suite à l'aide d'un graphique du type courbe en choisissant par exemple la plage B4 : B10 comme plage de données.

Séquence 2
On considère la suite (U_n) définie par la donnée de son premier terme $U_0 \in [-6, +\infty[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$;
$U_{n+1} = \sqrt{U_n+6}$
A l'aide du logiciel CABRI,
1. Ecrire à l'aide de l'outil " expression " l'expression (x+6)^0.5 puis utiliser l'outil " appliquer une expression " pour représenter cette fonction.
2. Faire de même pour la droite d'équation y = x.
3. Créer un point sur l'axe des abscisses à l'aide de " point sur objet " et le nommer A. On désignera par l'abscisse de A.
4. Construire les termes U_1, U_2, U_3,U_4 et U_5 de la suite (U_n).
5. Comment semblent les variations de (U_n).
6. Déplacer le point A sur l'axe des abscisses. Conjecturer les variations de la suite (U_n) en fonction de la valeur de U_0.
7. Démontrer cette conjecture.

Math – culture

Leonardo Fibonacci (fils de Bonaccio) est un mathématicien de talent de son époque, ses travaux sont fondamentaux comme lien entre les mathématiques arabes et celles de la Renaissance. Son influence est certaine dans l'introduction des nombres arabes en Occident.

Suite de Fibonacci

Quand nous regardons le coeur d'un tournesol, nous remarquons que les fleurons qui le composent forment deux familles de spirales. Une première famille qui s'éloigne du centre dans le sens horloger, et une seconde famille dans le sens anti-horloger.
Chaque fleuron constitue l'intersection d'une spirale de chaque famille. Structure remarquable du coeur de tournesol. Lorsque la nature n'a pas créé un mutant, le nombre de fleurons des spirales du premier type et le nombre de fleurons des spirales du second type sont constants, et sont deux nombres adjacents de la suite de Fibonacci. (55 dans un sens et 89 dans l'autre, 34 dans un sens et 55 dans l'autre).

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, dans la mathématique babylonienne, chez Archimède, spécialiste des procédés illimités d'approximation pour des calculs d'aires et de volumes, ou en Égypte au 1er siècle après Jésus-Christ, dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie.

في العلوم العدديّة، أولها الأرتماطقي وهو معرفة خواص الأعداد من حيث التأليف إمّا على التّوالي أو بالتضعيف مثل أن الأعداد إذا توالت بعدد واحد فإن جمع الطرفين منها مساو لجمع كلّ عددين بعدهما من الطرفين بعد واحد، ومثل ضعف الواسطة ، إن كانت عدة تلك الأعداد على تواليها والأزواج على تواليها (١) ويحدث في جمعها وقسمة بعضها على بعض طولا وعرضا خواص غريبة استقربت منها وتقرّرت في دواوينهم مسائلها. وكذلك ما يحدث للزّوج والفرد وزوج الزّوج وزوج لفرد...
فإن لكلّ خواص مختصّة به تضمنها هذا الفن وليست في غيره، وهذا الفنّ أوّل أجزاء التّعاليم وأثبتها، ويدخل في براهين الحساب...»

ابن خلـــــدون

Math – culture

Chapitre 10

Limites de suites réelles

" Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer. "

Hugo

Limites de suites réelles

Pour commencer

Activité 1

1. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n par $u_n = 3^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

   Déterminer une valeur approchée à 0.0001 près de chacun des réels u_{10} et u_{20}.

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n par $v_n = 3^n + \left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

   Déterminer une valeur approchée à 0.0001 près de chacun des réels v_{10} et v_{20}.

   Que remarque-t-on ?

Activité 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 0.71$, pour tout entier n.

Calculer chacun des réels u_5, u_{10} et u_{20}.

Cours

1. Limite finie d'une suite

Activité 1

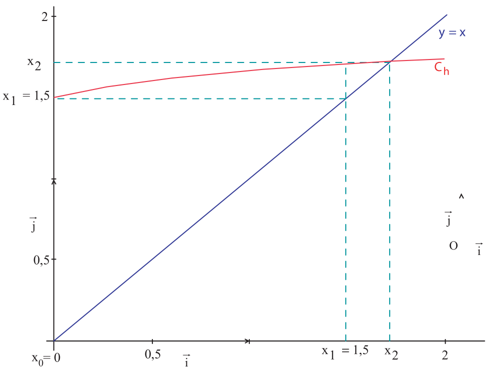
Afin de déterminer la vitesse d'apprentissage des rats, un groupe d'étudiants en psychologie a effectué une expérience au cours de laquelle un rat de laboratoire doit parcourir un labyrinthe à plusieurs reprises.

Les étudiants ont observé que le temps (en minute) mis par le rat pour parcourir le labyrinthe lors du $n^{ème}$ essai est d'environ $t_n = 3 + \frac{12}{n}$.

1. Représenter dans un repère les points $A_n(n, t_n)$, $1 \leq n \leq 10$.
2. Quel est le temps (arrondi à la seconde près) mis par le rat pour parcourir le labyrinthe lors du $30^{ème}$ essai, $50^{ème}$ essai, $100^{ème}$ essai, $1000^{ème}$ essai, $10000^{ème}$ essai ?
3. A partir de quel essai t_n est-il une valeur approchée de 3 à 10^{-6} près, 10^{-9} près, 10^{-15} près et 10^{-25} près ?
4. Interpréter ces résultats.

Activité 2

Soit la fonction $h : x \mapsto \frac{3+2x}{2+x}$.

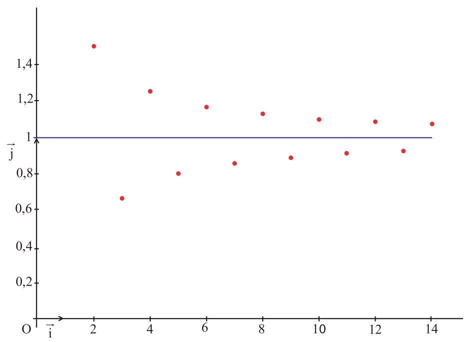


1. Déterminer la solution positive de l'équation $h(x) = x$.
2. Dans le repère ci-contre, on a représenté la droite d'équation $y = x$ et les trois premiers points $A_n(n, x_n)$ où (x_n) est une suite obtenue selon le procédé suivant: le terme x_{n+1} est l'image par h de x_n.
   a. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.
   b. Expliquer la construction de x_1 et x_2.
3. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-6} de x_n, $n \leq 6$.
4. a. A partir de quel entier n, a-t-on $\left|\sqrt{3} - x_n\right| \leq 10^{-2}$?
   b. A partir de quel entier n, a-t-on $\left|\sqrt{3} - x_n\right| \leq 10^{-3}$?
   c. A partir de quel entier n, a-t-on $\left|\sqrt{3} - x_n\right| \leq 10^{-5}$?

Activité 3

Dans le repère ci-contre, on a représenté les points $A_n(n, u_n)$, $n \leq 13$, où (u_n) est la suite définie par

$$u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}, n \geq 1.$$



1. Donner la valeur exacte de u_{10^k}, $k \leq 10$.

2. a. A partir de quel entier n, a-t-on $|1 - u_n| \leq 10^{-8}$?
   b. A partir de quel entier n, a-t-on $|1 - u_n| \leq 10^{-50}$?
   c. A partir de quel entier n, a-t-on $|1 - u_n| \leq 10^{-1000}$?
   d. Soit k un entier positif. A partir de quel entier n, a-t-on $|1 - u_n| \leq 10^{-k}$?

Définition

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$.
On dit que la suite (u_n) converge vers un nombre réel L si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$ alors $|u_n - L| < \varepsilon$.

Théorème (admis)

Si (u_n) converge vers un réel L alors ce réel est unique.

Conséquence

Une suite (u_n) converge vers un nombre réel L, si et seulement si, la suite $(|u_n - L|)$ converge vers zéro.

Notation et vocabulaire

Si une suite (u_n) converge vers un nombre réel L, on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = L$ ou $\lim\limits_{n} u_n = L$
et on dit que L est la limite de la suite (u_n).
Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Théorème (admis)

Soit une suite réel (u_n) convergente vers un réel non nul. Alors il existe un entier p tel que pour tout $n \geq p$, $u_n \neq 0$.

Activité 4

Soit f une fonction définie sur $[0, +\infty[$ et u la suite définie par $u_n = f(n)$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = a$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a$.
2. Appliquer le résultat précédent pour déterminer la limite de chacune des suites (u_n), (v_n), (t_n) et (w_n) définies par

$$u_n = \frac{1}{n},\ n \geq 1\ ;\ v_n = \frac{2n+1}{3n-1},\ n \geq 1\ ;\ t_n = 5 - \frac{3}{2n+1},\ n \geq 0\ ;\ w_n = 5 - \frac{3n^4 - 1}{-2n^4 - 1},\ n \geq 0.$$

Activité 5

1. Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n).
   On suppose qu'il existe un entier N tel que $0 \leq |u_n| \leq v_n$, $n \geq N$.
   Montrer que si $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.
2. Appliquer le résultat précédent pour déterminer la limite de chacune des suites (u_n), (v_n), (t_n) et (w_n) définies par

$$u_n = \frac{1}{n!},\ n \geq 0\ ;\ v_n = \frac{\cos(n)}{n+1},\ n \geq 0\ ;\ t_n = \frac{1}{\sqrt{n^2+1}},\ n \geq 0\ ;\ w_n = \frac{(-1)^n}{n},\ n \geq 1.$$

2. Opérations sur les limites finies de suites

On peut, comme dans le cas des fonctions additionner et multiplier des suites.

Théorème (admis)

Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) convergentes respectivement vers L et L'.
Soit a et b deux réels. Alors
- la suite $(au_n + bv_n)$ converge vers $aL + bL'$,
- la suite $(u_n\, v_n)$ converge vers LL'.

Théorème (admis)

Soit une suite réelle (u_n) convergente vers un réel non nul L.

Alors la suite $\left(\dfrac{1}{u_n}\right)$ converge vers $\dfrac{1}{L}$.

Activité 1

Déterminer la limite de chacune des suites (u_n), (v_n) et (t_n) définies par

$$u_n = \frac{1}{2+\frac{\cos n}{n}},\ n \geq 1\ ;\quad v_n = \frac{3n^2 \quad 1}{n^2+1} - 200\,\frac{(-1)^n}{n},\ n \geq 1\ ;$$

$$t_n = \left(-\frac{2n+1}{3n-1}\right)\left(\frac{\sin(4n^3)}{n^2+1}+3\right),\ n \geq 1\ .$$

3. Limite infinie d'une suite

Activité 1

Si on ne ralentit pas la production de déchets solides, notre planète pourrait bien devenir une vaste poubelle. Une étude menée par une association pour la protection de l'environnement montre que dans n années, la quantité (en tonne) de déchets solides sera approximativement de $Q_n = 10^4(n^2 + 15n + 70)$.

1. Représenter dans un repère les points $A_n(n, Q_n)$, $1 \leq n \leq 10$.
2. Quelle sera la quantité de déchets solides après 20 ans, 30 ans, 50 ans et 100 ans ?
3. a. Au bout de combien d'années aura-t-on une quantité de déchets solides supérieure à 10^6 tonnes ?
   b. Au bout de combien d'années aura-t-on une quantité de déchets solides supérieure à 10^9 tonnes ?
   c. Au bout de combien d'années aura-t-on une quantité de déchets solides supérieure à 10^{12} tonnes ?
   d. Soit N un réel positif, au bout de combien d'années aura-t-on une quantité de déchets solides supérieure à N tonnes ?

Activité 2

On considère n points ($n \geq 3$), trois quelconques d'entre eux n'étant pas alignés et on désigne par d_n le nombre de droites passant par deux de ces points.

1. Déterminer l'expression de d_n en fonction de n.
2. Représenter, dans un repère, les points de coordonnées $(10k, d_{10k})$ pour $1 \leq k \leq 3$.
3. Calculer d_{10^p}, $1 \leq p \leq 5$.
4. a. Comment peut-on choisir l'entier N pour avoir $d_n \geq 10^6$ pour tout $n \geq N$?
   b. Comment peut-on choisir l'entier N pour avoir $d_n \geq 10^9$ pour tout $n \geq N$?
   c. Comment peut-on choisir l'entier N pour avoir $d_n \geq 10^{2000}$ pour tout $n \geq N$?
   d. Soit A un réel positif, peut-on trouver N tel que si $n \geq N$, alors $d_n \geq A$?

Activité 3

En 1228, le plus grand mathématicien occidental, Léonard de Pise (surnommé Fibonacci) publiait dans un recueil intitulé Liber Abaci le problème suivant :
" *On place dans un enclos un couple (mâle et femelle) de lapereaux. Chaque couple âgé de deux mois donne naissance chaque mois à un nouveau couple (mâle et femelle). Si aucun lapin ne meurt, combien y aura-t-il de couples le $n^{ème}$ mois ?* "
On note F_n le nombre cherché.

1. Vérifier les égalités $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_3 = 2$ et $F_4 = 3$.
2. Vérifier la relation $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 1$.
3. Calculer F_n, $n \leq 10$.
4. Montrer que la suite (F_n) est strictement positive.
5. Etudier les variations de la suite (F_n).
6. Montrer que $F_n \geq n$, $n \geq 5$.
7. a. Comment peut-on choisir l'entier N pour que pour tout $n \geq N$, $F_n \geq 10^{100}$?
   b. Comment peut-on choisir l'entier N pour que pour tout $n \geq N$, $F_n \geq 10^{10000}$?
   c. Comment peut-on choisir l'entier N pour que pour tout $n \geq N$, $F_n \geq 10^{10^{25}}$?
   d. Soit A un réel positif, peut-on trouver N tel que si $n \geq N$, alors $F_n \geq A$?

Définition

Soit (u_n) une suite numérique définie pour tout entier $n \geq p$.
On dit que la suite (u_n) tend vers $+\infty$ si pour tout $A > 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n > A$.
On dit que la suite (U_n) tend vers $-\infty$ si pour tout $A < 0$, il existe un entier naturel N tel que si $n \geq N$, alors $u_n < A$.
Si une suite (u_n) tend vers $+\infty$, on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.
Si une suite (u_n) tend vers $-\infty$, on écrit $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Activité 4

Soit f une fonction définie sur $[0,+\infty[$ et u la suite définie par $u_n = f(n)$.

1. Montrer que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

   et que si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

2. Appliquer le résultat précédent pour déterminer la limite de chacune des suites (u_n), (v_n) et (t_n) définies par

   $u_n = \sqrt{n}$, $n \geq 0$; $v_n = 3n^2 - 2n + 3$, $n \geq 0$; $t_n = 2n - \dfrac{1}{n}$, $n \geq 1$.

Activité 5

1. Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n).

   On suppose qu'il existe un entier N tel que $v_n \leq u_n$, $n \geq N$.

   Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n).

   On suppose qu'il existe un entier N tel que $u_n \leq v_n$, $n \geq N$.

   Montrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Théorème

Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n).

- S'il existe un entier N tel que $v_n \leq u_n$, $n \geq N$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

- S'il existe un entier N tel que $u_n \leq v_n$, $n \geq N$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Activité 6

Appliquer le théorème précédent pour déterminer la limite de chacune des suites (u_n), (v_n) et (t_n) définies par

$u_n = n!$, $n \geq 0$; $v_n = -2n(2 + \cos n)$, $n \geq 0$; $t_n = n^{n+1}$, $n \geq 1$.

4. Opérations sur les limites (finies ou infinies) de suites

Activité 1

1. Montrer le théorème suivant.

Théorème

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\geq p}$ telle que $u_n > 0$, $n \geq p$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty, \text{ si et seulement si, } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_n}\right) = 0.$$

Soit une suite réelle $(u_n)_{n\geq p}$ telle que $u_n < 0$, $n \geq p$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty, \text{ si et seulement si, } \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{u_n}\right) = 0.$$

2. Appliquer le résultat précédent pour déterminer la limite de chacune des suites (u_n), (v_n) et (t_n) définies par

$$u_n = \frac{1}{2n^2 + 2n + 5} \ , \ n \geq 0 \ ; \ v_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2 + n}} \ , \ n \geq 0 \ ; \ t_n = \frac{-1}{n!} \ , \ n \geq 0 \ .$$

Nous admettrons les règles suivantes qui nous donnent les limites de la somme et du produit de deux suites.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n\, v_n)$
L	L'	L + L'	LL'
$+\infty$	L' $\neq 0$	$+\infty$	∞ (et on applique la règle des signes)
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$		$-\infty$

Activité 2

Déterminer la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a. $u_n = \dfrac{1}{n^2} \sin n + \dfrac{1}{2 + \dfrac{1}{\sqrt{n}}}, n > 0.$

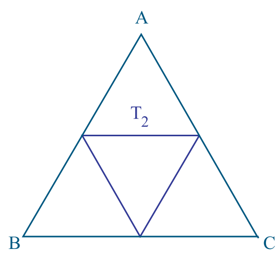
b. $u_n = -\dfrac{n^5}{n^2 - \pi} + \dfrac{\sin n}{n} \ , n > 0.$

c. $u_n = (2n^2 - n \cos^2 n)\left(-4 + \dfrac{2}{n!}\right), n \geq 0.$

5. Limite d'une suite géométrique

Activité 1

Dans la figure ci-contre ABC est un triangle équilatéral de côté 1.
On considère un second triangle équilatéral T_2 en reliant les milieux des côtés du premier triangle.
On répète le procédé indéfiniment pour obtenir à chaque étape n, un triangle équilatéral T_n.
On désigne par p_n le périmètre de T_n et par a_n son aire.



1. Calculer p_2, p_3, p_4, p_5 et a_2, a_3, a_4, a_5.
2. Quelle est la nature de chacune des suites (p_n) et (a_n) ?
3. Donner les expressions de p_n et a_n en fonction de n.
4. Etudier les variations des suites (p_n) et (a_n).
5. Donner une valeur approchée de p_{100} et a_{100} à 10^{-6} près.

Activité 2

On admet que le taux de croissance annuel de la population mondiale est d'environ 2%.

1. Sachant que la population mondiale P_0 en 2000 était de 6.2 milliards, à combien s'élèvera-t-elle en 2100, 2200 ?
2. Si la surface habitable de la terre est d'environ 20×10^6 hectares, quelle sera la densité de la population mondiale en 2200 ?
3. Déterminer la population mondiale P_n, n années après l'an 2000.
4. a. A partir de quelle année la population mondiale dépassera-t-elle 10 milliards ?
   b. A partir de quelle année la population mondiale dépassera-t-elle 100 milliards ?
   c. A partir de quelle année la population mondiale dépassera-t-elle un billion ?

Activité 3

1. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$, $n \geq 0$.

   a. Représenter dans un repère les points $A_n(n, u_n)$ pour $0 \leq n \leq 4$.

   b. Utiliser la calculatrice pour déterminer l'entier N tel que pour tout $n \geq N$, $\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| \leq 10^{-3}$.

   c. Utiliser la calculatrice pour déterminer l'entier N tel que pour tout $n \geq N$, $\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| \leq 10^{-5}$.

   d. Utiliser la calculatrice pour déterminer l'entier N tel que pour tout $n \geq N$, $\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right| \leq 10^{-8}$.

2. Soit la suite (v_n) définie par $v_n = (-1)^n$, $n \geq 0$.
   a. Représenter dans un repère les points $B_n(n, v_n)$ pour $0 \leq n \leq 20$.
   b. La suite (v_n) est-elle convergente ?
3. Soit la suite (w_n) définie par $w_n = (-2)^n$, $n \geq 0$.
   a. Représenter dans un repère les points $C_n(n, w_n)$ pour $0 \leq n \leq 8$.
   b. La suite (w_n) est-elle convergente ?

Activité 4

1. Soit a un réel positif. Montrer que pour tout entier n, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.
2. Soit $q > 1$ et (u_n) la suite définie par $u_n = q^n$, $n \geq 0$.

   En écrivant $q = 1 + (q - 1)$, montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

3. Soit $|q| < 1$ et (u_n) la suite définie par $u_n = q^n$, $n \geq 0$.

   Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$. (On distinguera les cas $q = 0$ et $q \neq 0$.)

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_n = q^n, n \geq 0$.

- Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $|q| < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
- Si $q \leq -1$ alors la suite (u_n) est divergente.

Activité 5

Etudier la limite de chacune des suites suivantes

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n, n \geq 0 \quad ; \quad v_n = \left(-\frac{3}{\sqrt{6}}\right)^n, n \geq 0 \quad ; \quad w_n = \left(\sqrt{2}\right)^n, n \geq 0 \ ;$$

$$t_n = 5\left(\sqrt{3}\right)^n, n \geq 0 \quad ; \quad s_n = 3\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n, n \geq 0 \quad ; \quad r_n = -10\left(-\frac{11}{9}\right)^n, n \geq 0.$$

Activité 6

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 3$ par $u_n = \dfrac{n^3}{3^n}$.

1. Calculer $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ en fonction de n.
2. Montrer que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{64}{81}$, pour tout entier $n \geq 3$.
3. En déduire que $u_{n+1} \leq \left(\dfrac{64}{81}\right)^{n-2}$.
4. Montrer alors que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Activité 7

1. On considère la suite$(a_n)_{n\geq 1}$ définie de la manière suivante :

   $a_1 = 0.3 \ ; \ a_2 = 0.33 \ ; \ a_n = 0.\underbrace{3...33}_{n}\ , \ n \geq 1$

   En écrivant $a_n = 0.\underbrace{3...33}_{n} = 3(10^{-1} + 10^{-2} + ... + 10^{-n})$, montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers un nombre rationnel que l'on déterminera.

2. On considère le nombre rationnel $\dfrac{9}{11}$.

   a. Donner une valeur approchée de $\dfrac{9}{11}$ à 10^{-2} près, 10^{-4} près, 10^{-6} près, 10^{-12} près .

   b. On considère la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie de la manière suivante :

   $a_1 = 0,81 \ ; \ a_2 = 0,8181 \ ; \ a_n = \ ; \quad a_n = 0.\underbrace{8181...81}_{2n} \ ; \quad n \geq 1.$

   Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ converge vers $\dfrac{9}{11}$.

3. Utiliser un procédé analogue pour trouver une suite de nombres décimaux convergente vers $\dfrac{50}{111}$.

Activité 8

Une équipe médicale teste sur cent individus, tous fumeurs, un protocole pour les amener à cesser de fumer.
A la fin de chaque jour, l'équipe comptabilise le nombre de personnes qui ont fumé.
Ils ont constaté l'évolution suivante :
30% des personnes qui fument un jour ne fument pas le lendemain et 10% des personnes qui ne fument pas un jour fument le lendemain.
On désigne par P_n le nombre de personnes qui fument le $n^{\text{ième}}$ jour.

1. Calculer P_1, P_2 et P_3.
2. Montrer que la suite (P_n) vérifie la relation de récurrence

$$\begin{cases} P_1 = 100 \\ P_{n+1} = 0.6\, P_n + 10\ . \end{cases}$$

3. Déterminer le réel α tel que $\alpha = 0.6\alpha + 10$.
4. On désigne par (g_n) la suite définie par $g_n = P_n - 25$, $n \geq 1$.
   a. Montrer que (g_n) est une suite géométrique.
   b. En déduire l'expression de P_n en fonction de n.
   c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} P_n$. Interpréter ce résultat.

QCM – VRAI – FAUX

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Si (v_n) est la suite définie par $v_n = \left(-\frac{3}{\sqrt{600000}}\right)^n$, $n \geq 0$ alors (v_n)

☐ est convergente ☐ tend vers $-\infty$ ☐ n'a pas de limite.

2. Si (v_n) est une suite arithmétique de raison positive, alors (v_n)

☐ est convergente ☐ tend vers $+\infty$ ☐ n'a pas de limite.

3. Si (v_n) est la suite définie par $v_n = \frac{n^n}{2n}$, $n \geq 1$ alors (v_n)

☐ tend vers 0.5 ☐ tend vers 0 ☐ tend vers $+\infty$.

4. Si (v_n) est la suite définie par $v_n = \cos(n^2\pi)$, $n \geq 1$ alors (v_n)

☐ est convergente ☐ est bornée ☐ tend vers $+\infty$.

5. Si (v_n) est la suite définie par $v_n = \frac{\tan(n^2\pi)}{2n}$, $n \geq 1$ alors (v_n)

☐ est constante ☐ tend vers $+\infty$ ☐ tend vers 0.

VRAI – FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

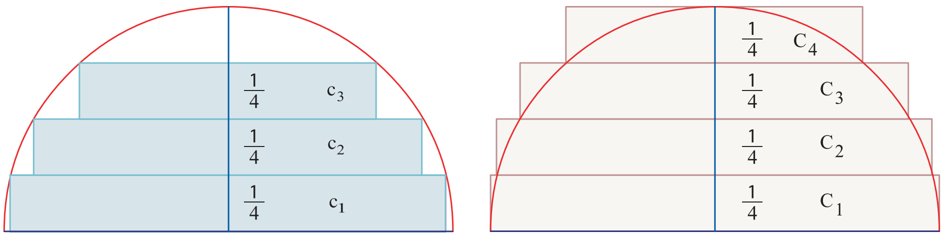
1. Si une suite est bornée alors elle est convergente.
2. Si une suite n'est pas convergente, alors elle tend vers l'infini.
3. Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est positive à partir d'un certain rang.
4. Si une suite est strictement positive et convergente, alors sa limite est non nulle.
5. Si une suite est convergente, alors son inverse est convergente.

Mobiliser ses compétences

Situation 1

On se propose de donner un encadrement du volume d'une boule de rayon 1. Pour cela on va encadrer le volume de la demi-boule par les volumes respectifs de deux empilements de cylindres de même hauteur.

1. Dans cette question on suppose que tous les cylindres ont la même hauteur $\frac{1}{4}$.



Empilement de cylindres contenu dans la demi-boule **Empilement de cylindres contenant la demi-boule**

a. Déterminer les rayons des cylindres C_1, C_2, C_3, C_4 et c_1, c_2, c_3.
b. Déterminer le volume de chacun de ces cylindres.
c. Calculer les volumes des empilements S_4 et s_4.
d. En déduire un encadrement du volume de la boule.

2. Soit un entier $n \geq 5$. On généralise le procédé en considérant des empilements S_n et s_n par des cylindres de même hauteur $\frac{1}{n}$ tels que S_n contient la demi-boule et s_n est contenu dans la demi-boule.
a. Déterminer les rayons des cylindres C_1, C_2, ... , C_n de S_n.
En déduire le volume V_n de S_n en fonction de n.
b. Déterminer les rayons des cylindres c_1, c_2, ... , c_{n-1} de s_n.
En déduire le volume v_n de s_n en fonction de n.
c. En déduire un encadrement du volume de la boule.

3. a. Etablir que $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

b. En déduire que $V_n = \dfrac{\pi n(n-1)(4n+1)}{6n^3}$ et que $v_n = \dfrac{\pi n(n+1)(4n-1)}{6n^3}$.

c. Calculer les limites des suites (V_n) et (v_n).
Que remarque-t-on ? Que peut-on conjecturer sur le volume de la boule ?

Exercices et problèmes

Exercice 1

Déteminer dans chacun des cas suivants $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

1. $u_n = -\pi n + 1,\ n \geq 0.$
2. $u_n = \dfrac{2n-1}{n+3},\ n \geq 0.$
3. $u_n = \dfrac{-3n+1}{2n-4},\ n \geq 3.$
4. $u_n = -3n^2 + 5n,\ n \geq 0.$
5. $u_n = -2 + \sqrt{3n},\ n \geq 0.$
6. $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = -\dfrac{2}{\pi} u_n,\ n \geq 0. \end{cases}$
7. $u_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n + 3^n,\ n \geq 0.$
8. $u_n = \dfrac{n^3}{(-0.3)^n},\ n \geq 0.$

Exercice 2

Déteminer dans chacun des cas suivants $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

1. $u_n = \dfrac{1}{n+3} \cos(n),\ n \geq 0.$
2. $u_n = \dfrac{\sin(n^2)}{\sqrt{n^4+1}},\ n \geq 0.$
3. $u_n = \sqrt{4n^2+1} - n,\ n \geq 0.$
4. $u_n = \dfrac{19^n + 2}{5^n - 17},\ n \geq 0.$

Exercice 3

On considère la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par $u_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n+2}$.

1. Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente et calculer sa limite.
2. On pose pour tout $n \geq 1$, $a_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

a. Exprimer a_n en fonction de n.

b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Exercice 4

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2^n - n,\ n \geq 0$.

a. Montrer que (u_n) est croissante.

b. En déduire que $2^n \geq n + 1,\ n \geq 0$.

2. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = 2^n - \dfrac{1}{2} n,\ n \geq 0.$

Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \left(\frac{n}{10} - 1\right)^n,\ n \geq 0.$$

1. Calculer les onze premiers termes de la suite (u_n). Quelle conjecture peut-on formuler quant à la convergence (u_n) ?
2. Montrer que pour tout $n > 100$, $u_n > 9^n$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 6

On considère la suite (u_n) définie par

$$u_n = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n},\ n \geq 1.$$

1. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée par 1.
2. Montrer que la limite de (u_n) est égale à 1.
3. Déterminer un entier k tel que pour tout $n > k$, $u_n < 1.0001$.

Exercice 7

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = -1, \\ u_{n+1} = 5u_n + 3,\ n \geq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer le réel α tel que $\alpha = 5\alpha + 3$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$, $n \geq 0$.

a. Montrer que (v_n) est géométrique.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 8

On considère la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 2, \\ u_{n+1} = -0.2u_n + 1,\ n \geq 0. \end{cases}$$

1. Déterminer le réel α tel que $\alpha = -0.2\alpha + 1$.
2. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - \alpha$, $n \geq 0$.

a. Montrer que (v_n) est géométrique.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 9

On considère une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ positive et la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ définie par $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$, $n \geq 0$.

1. Montrer que $0 \leq v_n \leq 1$, pour tout $n \geq 0$.
2. Montrer que (u_n) est croissante, si et seulement si, (v_n) est croissante.
3. Montrer que si (u_n) est convergente alors (v_n) est convergente.
4. Si (v_n) est convergente a-t-on que (u_n) est convergente ?

Exercice 10

On considère deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$ définies par $u_n = n^2(0.8)^n$ et $v_n = (0.9)^n$.

On pose $a_n = \frac{u_n}{v_n}$.

1. Calculer $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ et montrer que $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$, $n \geq 17$.
2. En déduire qu'il existe un réel c tel que pour tout $n \geq 17$, $0 \leq u_n \leq c(0.9)^n$.
3. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 11

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier naturel n , on a $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.
2. On considère la suite (a_n) définie pour tout $n \geq 1$ par $a_n = \frac{n!}{n^n}$.

En utilisant la question 1, montrer que pour tout $n \geq 1$, $\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 2$.

3. En déduire que (a_n) est décroissante.
4. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} \leq a_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.
5. En déduire la limite de (a_n).

Exercice 12

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \sqrt{n^2+4n} - n - 2$, $n \geq 0$.

1. Montrer que pour tout entier $n \geq 0$,
$u_n = \frac{4}{\sqrt{n^2+4n}+n+2}$.
2. En déduire la limite de (u_n).

Exercice 13

1. Montrer que pour tout entier non nul n,
$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$.
2. On considère la suite (S_n) définie par

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}, \ n \geq 1.$$

a. Déterminer une valeur approchée à 0.001 près des cinq premiers termes de (S_n).
b. Utiliser la question 1, pour montrer que $S_n \geq 2(\sqrt{n+1} - 1)$, $n \geq 1$.
c. En déduire la limite de (S_n).

Exercice 14

Pour étudier un marché on le divise en périodes.
La demande, l'offre et le prix d'un certain produit sont mesurés par les indices respectifs D, O et P (d_n, o_n et p_n sont les valeurs respectives de ces indices durant la $n^{\text{ème}}$ période).
Les trois indices D, O et P sont définis par les relations

$$\begin{cases} o_n = 0.5\, p_n + 50, \\ d_n = -\ 0.3\, p_n + 162, \\ p_n = 1.05 p_{n-1} + 0.5(d_n - o_n). \end{cases}$$

On suppose que $p_0 = 100$.

1. Calculer o_0 et d_0 puis o_1 ,d_1 ,p_1 ,o_2 ,d_2 et p_2.
2. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $p_n = \frac{3}{4} p_{n-1} + 40$.
3. Calculer p_3 ,p_4 , ..., p_{10} puis représenter dans un repère les points $A_i(i, p_i)$, $0 \leq i \leq 10$.
Quelle conjecture peut-on formuler quant à la limite de (u_n) ?
4. a. Déterminer le réel α tel que $\alpha = \frac{3}{4}\alpha + 40$.
On considère la suite (u_n) définie par
$u_n = p_n - \alpha$, $n \geq 0$.
b. Montrer que (u_n) est géométrique.
c. Exprimer u_n puis p_n en fonction de n.
d. En déduire que la suite (p_n) converge vers α.
La valeur limite α est appelée prix d'équilibre de la denrée étudiée.
e. Calculer les valeur des indices O et D correspondant à ce prix d'équilibre.

Exercice 15

Soit une droite D munie d'un repère $(O, \vec{i})$.

On donne les points A_0 et A_1 d'abscisses respectives 0 et 1 et pour tout $n \geq 0$, on note A_{n+2} le milieu du segment $[A_nA_{n+1}]$.

On désigne par a_n l'abscisse du point A_n.

Le but de cet exercice est de voir, si les points A_n se rapprochent d'un même point, lorsque n prend des valeurs de plus en plus grandes.

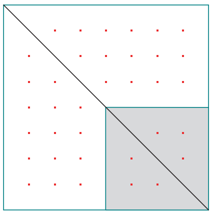
1. Placer les points A_n, pour tout $n \leq 5$, puis déterminer leurs abscisses.

On pose pour tout $n \geq 1$, $x_n = a_n - a_{n-1}$.

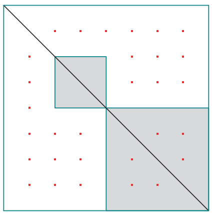
2. Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $x_1 + x_2 + ... + x_n = a_n$.
3. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geq 1}$ est géométrique.
4. En déduire a_n en fonction de n.
5. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.
6. Conclure.

Exercice 16

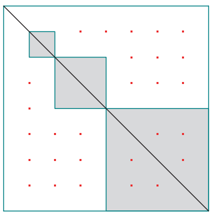
A l'intérieur d'un carré de côté 1, on effectue le coloriage schématisé ci-dessous.



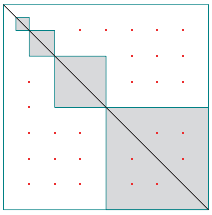
Etape 1



Etape 2



Etape 3



Etape 4

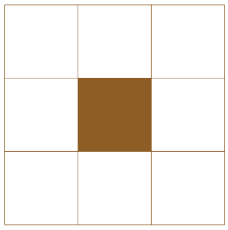
On désigne par u_n l'aire du domaine colorié après le coloriage du $n^{ème}$ carré.

1. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n) .
2. Exprimer u_n en fonction de n.
3. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

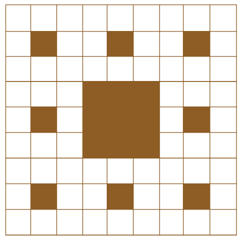
Exercice 17 (Le tamis de Sierpinski)

A l'intérieur d'un carré de côté 1, on effectue le coloriage suivant :

On divise un carré de côté 1 en neuf carrés égaux et on colorie le carré central, puis on divise chacun des huit carrés non coloriés en neuf carrés égaux et on colorie les carrés centraux et ainsi de suite. (Voir le schéma ci-dessous).



Etape 1



Etape 2

On désigne par u_n l'aire du domaine colorié après la $n^{ème}$ étape.

1. Calculer les trois premiers termes de la suite (u_n).
2. Montrer que $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{9}(1 - u_n)$.
3. On pose pour tout $n \geq 1$, $v_n = u_n - 1$.

a. Montrer que la suite (v_n) est géométrique.

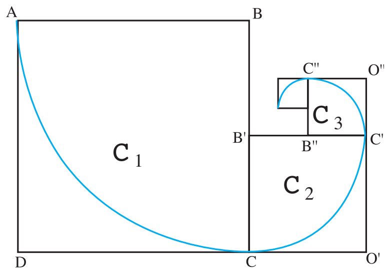
b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

c. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 18

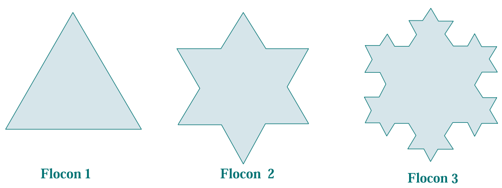
On considère un carré ABCD de côté 1et le quart de cercle C_1 de centre B et d'extrémités A et C.

On désigne par B' le milieu de [BC] et on construit le carré B'CO'C' et le quart de cercle C_2 de centre B' et d'extrémités C et C', comme l'indique la figure ci-dessous.

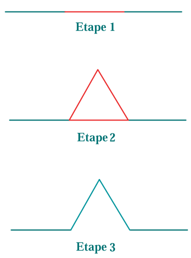


On réitère le procédé de façon à obtenir une spirale par réunion de quarts de cercles successifs.
Pour tout $n \geq 1$, on désigne par :
u_n la longueur du $n^{\text{ème}}$ quart de cercle $\mathcal{C}_n$ construit,
v_n la longueur de la spirale après la construction de $\mathcal{C}_n$,
a_n la somme des aires des n premiers carrés.
1. a. Calculer les quatre premiers termes de la suite (u_n).
b. Exprimer u_n en fonction de n.
c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
2. a. Exprimer v_n en fonction de n.
b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.
3. a. Exprimer a_n en fonction de n.
b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Exercice 19 (Les flocons de Von Koch)



Dans la figure ci-dessus on a représenté les trois premiers flocons de Von Koch.
Les flocons de Von Koch s'obtiennent selon le procédé suivant :
Le flocon 1 est un triangle équilatéral de côté 1.
Pour passer d'un flocon n au flocon (n+1),
on partage chaque côté du flocon n en 3 segments isométriques et on substitue au segment central deux segments qui forment avec le segment supprimé un triangle équilatéral (voir schéma ci-dessous).



On note respectivement c_n, x_n, p_n et a_n, le nombre de côtés, la longueur d'un côté, le périmètre et l'aire du flocon n.
1. a. Montrer que la suite (c_n) est définie par $\begin{cases} c_1 = 1, \\ c_{n+1} = 4c_n. \end{cases}$
b. En déduire c_n en fonction de n.
2. Exprimer x_n en fonction de n.
3. a. Montrer que la suite (p_n) est une suite géométrique.
b. Déterminer les variations de la suite (p_n).
c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.
4. a. Calculer a_1 et a_2.
b. En remarquant que l'on construit le flocon (n+1) en ajoutant sur chaque côté du flocon n un triangle équilatéral de côté x_{n+1}, établir que $a_{n+1} = a_n + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(\frac{4}{9}\right)^n$.
5. a. En déduire que pour tout $n \geq 1$,
$$a_n = \frac{\sqrt{3}}{16} + \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(1 + \frac{4}{9} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1}\right).$$
b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n$.

Exercice 20

Soit n un entier naturel.
On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.
1. Montrer que $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$, $x \neq 1$.
2. a. Vérifier que f est dérivable pour tout réel x différent de 1.
b. Calculer de deux façons différentes $f'(x)$, $x \neq 1$.
3. En déduire le calcul de la somme
$$S_n = 1 + 2.\frac{1}{2} + 3.\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4.\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + n.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$
4. On se propose de calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.
On considère la suite (u_n) définie par
$u_n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $n \geq 0$.
a. Montrer que $u_{n+1} \leq \frac{3}{4} u_n$, $n \geq 2$.
b. En déduire que $u_{n+1} \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} u_2$, $n \geq 2$.
c. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

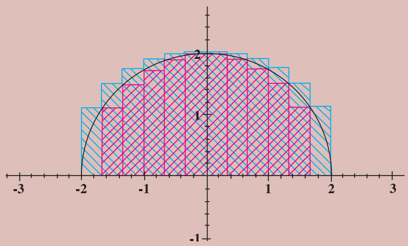
Avec l'ordinateur

Soit f la fonction définie sur [—2, 2] par $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$. Soit $\mathscr{D}$ le domaine délimité par la courbe $\mathscr{C}$ et l'axe des abscisses.
On choisit pour unité d'aire l'aire du carré OIKJ.
On se propose dans cette activité de déterminer l'aire $\mathscr{A}$ du domaine $\mathscr{D}$.

On subdivise l'intervalle [—2, 2] en n intervalles de longueur $\frac{1}{n}$, n étant un entier naturel non nul.

On définit les fonctions paires g et h suivantes :
Pour tout entier k compris entre 0 et n-1 et sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right[$ on a

$g(x) = \sqrt{4 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$ et $h(x) = \sqrt{4 - \left(\frac{k+1}{n}\right)^2}$.



On note s_n la somme des aires des rectangles situés sous la courbe de g et S_n la somme des aires des rectangles situés sous la courbe de h.
a) Calculer s_n et S_n pour n = 4 et n = 10.
En déduire que $\frac{57}{200} \leq \mathscr{A} \leq \frac{77}{200}$.
b) Expliquer pourquoi, pour tout n, on a :
$s_n \leq \mathscr{A} \leq S_n$.
c) Démontrer que pour tout entier naturel non nul n on a :
$s_n = \frac{1}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + ... + (n–1^2)$ et $S_n = \frac{1}{n^3}\,(1^2 + 2^2 + ... + n^2)$

A. Etude de la somme des carrés des entiers de 1 à n.

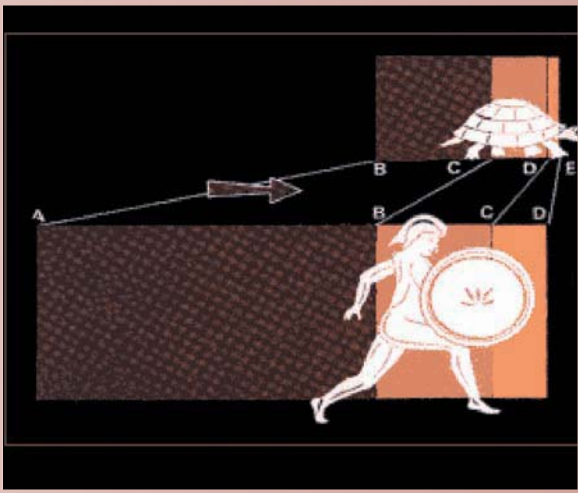
1°) On considère la suite u définie par $u_n = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$. Représenter graphiquement cette suite pour n allant de 1 à 12.
2°) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$.

B. Etude des suites s_n et S_n .

1. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n :
$s_n = \frac{n(n - 1)(2n - 1)}{6n^3}$ et $S_n = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6n^3}$
2. A l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice graphique représenter les suites s_n et S_n dans un même repère, pour n allant de 1 à 100. Conjecturer la limite commune des suites s_n et S_n .
Quelle est la valeur de l'aire $\mathscr{A}$ du domaine situé sous la courbe $\mathscr{C}$?

Math – culture

Paradoxe de Zénon d'Elée

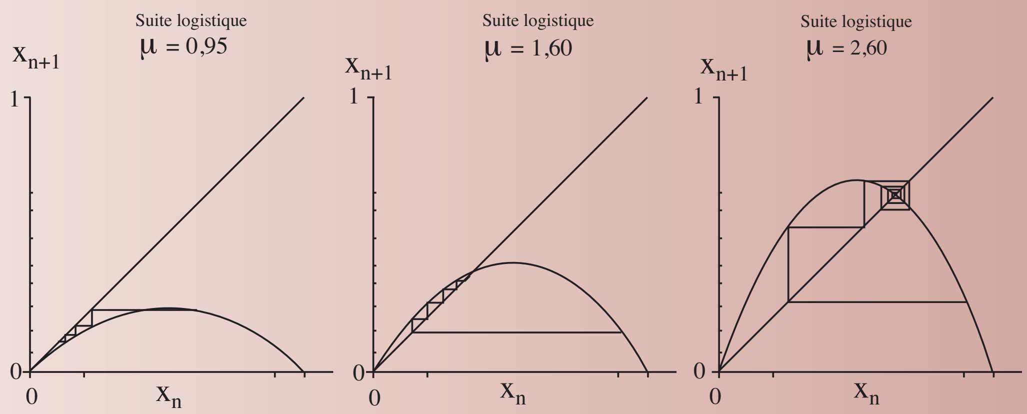


Achille et la tortue devaient faire la course sur un parcours circulaire ; et comme l'on savait qu'Achille pouvait courir dix mètres par seconde alors que la tortue ne court qu'un mètre par seconde, celle-ci se vit accorder une avance de cent mètres. Il n'y avait pas de ligne d'arrivée, la course devant se poursuivre jusqu'à ce qu'Achille ait, soit rattrapé la tortue, soit abandonné la course.
Or il est évident que lorsqu'il aurait effectué les cent premiers mètres, la tortue en aurait parcouru dix de plus ; et que lorsqu'il aurait parcouru ces dix mètres, elle en aurait parcouru un de plus ; et ainsi de suite indéfiniment.
Par conséquent, le nombre de secondes qui s'écoulent avant qu'Achille ne rattrape la tortue est :

$$10 + 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \dots$$

On obtient une somme comportant une infinité de termes. Ce que Zenon d'Elée n'avait pas prévu, c'est que cette somme infinie possède une valeur finie.

Le **modèle logistique** fut introduit à la base en tant que modèle démographique.
On considère l'évolution de la population d'une espèce, en présence de facteurs limitants (prédateurs, famine…), en considérant que l'espèce se reproduit à un taux proportionnel à la population et elle décroît à un taux proportionnel à la différence entre une capacité limite de l'environnement et la population.
Mathématiquement, cela peut se traduire par $x_{n+1} = \mu x_n(1 - x_n)$.
où μ est un réel positif, représentant le taux combiné de reproduction et de famine.



Math – culture