REPUBLIQUE TUNISIENNE
MINISTERE DE L'EDUCATION

Mathématiques

4éme année de l'enseignement secondaire

Section Sciences expérimentales
TOME 2

Hikma Smida
Professeur universitaire

Mourad El Arbi
Professeur Principal

Taoufik Charrada
Inspecteur

Ridha Bouida
Professeur Principal hors classe

Nabil Mziou
Inspecteur

Khadija Kaâniche Ben Messaoud
Inspecteur Principal

Mohamed Sakrani
Professeur Principal

Evaluateurs

Néjiba Mhammdi
Inspecteur

Ali Béji Hammas
Inspecteur

Centre National Pédagogique

Remerciements

Les auteurs remercient toutes les personnes qui ont participé à l'élaboration de ce manuel, et en particulier

Madame Néjiba MHAMDI, Messieurs Abdennibi ACHOUR, et Ali Béji HAMMAS pour leurs critiques, leurs conseils pertinents et leurs modifications judicieuses.

Mesdames Imène GHDAMSI et Leila YOUSSEF pour leur contribution et leur disponibilité.

Les membres de l'équipe d'édition du CNP pour leur grande compétence et leur patience.

Les auteurs

© Tous droits réservés au centre National Pédagogique

Préface

Ce manuel comprend sept chapitres. Chaque chapitre comprend trois rubriques : Cours, QCM-Vrai ou faux et Exercices et problèmes.

La rubrique Cours comprend
- *des activités visant à permettre aux élèves de développer leur capacité à chercher, à expérimenter, à modéliser, à conjecturer et à démontrer,*
- *les résultats du cours à retenir,*
- *des exercices et problèmes résolus.*

La rubrique QCM vise à permettre à l'élève de faire sa propre évaluation.
La rubrique Vrai ou faux vise à l'apprentissage progressif des règles logiques.

La rubrique Exercices et problèmes comprend des exercices et problèmes visant à permettre aux élèves de mobiliser leurs compétences de façon autonome.

Sommaire

Chapitre 1

Nombres complexes

A partir de la deuxième moitié du XVIIe, les géomètres utilisent de façon de plus en plus courante le symbole -1 dans les identités algébriques et les recherches relatives aux résolutions d'équations.
En 1740, Euler donne la formule $\cos x = \frac{1}{2}(e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}})$, et en 1748, la formule $e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1}\,\sin x$, x est réel.
Dontzig dit de cette dernière qu'elle contient "les symboles les plus importants, union mystérieuse dans laquelle l'arithmétique est représentée par 0 et 1, l'algèbre par -1 , la géométrie par p et l'analyse par e".
(Dalmedico et al, Une histoire des mathématiques, 1986).

Cauchy ne se ralliera explicitement à la représentation géométrique des nombres complexes qu'en 1874. […] et s'est convaincu que la "notion de quantité géométrique […] comprendra comme cas particulier la notion de quantité algébrique.

Chapitre 1

Nombres complexes

I. Rappels et compléments

I. 1 Définition et opérations sur les nombres complexes

Activité 1

Déterminer l'écriture cartésienne de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$(2-2i)(1+i)^2$; $\left(-\sqrt{2}-i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right)$; $(1+i)^4(1-i)^{20}$.

Théorème et définition (rappel)

Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ et vérifiant les propriétés ci-dessous.

1. L'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels.
2. Il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i, tel que $i^2=-1$.
3. L'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
4. Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z=a+ib$, où a et b sont des réels.

Conséquences

Soit $z=a+ib$ et $z'=a'+ib'$, où a, a', b et b' sont des réels.

- $z=z'$, si et seulement si, $a=a'$ et $b=b'$.
- $z=0$, si et seulement si, $a=b=0$.
- z est réel, si et seulement si, $b=0$.
- z est imaginaire, si et seulement si, $a=0$.

Activité 2

Soit les nombres complexes
$z=-1+2i$ et $z'=i$.

Soit $z=a+ib$, où a et b sont des réels.
Le conjugué de z est le nombre complexe
$\bar{z}=a-ib$.

1. Donner l'écriture cartésienne de z^2 et z^3, ainsi que de leurs conjugués.
2. Donner l'écriture cartésienne de zz', $(zz')^2$, $(zz')^3$, ainsi que de leurs conjugués.
3. Donner l'écriture cartésienne de $\frac{z}{z'}$, $\left(\frac{z}{z'}\right)^2$, $\left(\frac{z}{z'}\right)^3$, ainsi que de leurs conjugués.

Propriétés

- Pour tous nombres complexes z et z',
$\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{zz'}=\overline{z}\,\overline{z'}$; $\overline{\left(z^n\right)}=\left(\overline{z}\right)^n$; $n\in\mathbb{N}^*$.
- Pour tout nombre complexe z et tout nombre complexe non nul z',
$\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\dfrac{1}{z'^n}\right)}=\dfrac{1}{\left(\overline{z'}\right)^n}$, $n\in\mathbb{Z}$.
- $z+\overline{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$; $z-\overline{z}=2i\,\mathrm{Im}(z)$; $z\overline{z}=\left(\mathrm{Re}(z)\right)^2+\left(\mathrm{Im}(z)\right)^2$.
- $z=\overline{z}$, si et seulement si, z est réel.
- $z=-\overline{z}$, si et seulement si, z est imaginaire.

I. 2 Affixe d'un point, affixe d'un vecteur

Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

1. Placer les points A, B et C d'affixes respectives i, $1-3i$, $1+2i$.
2. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
3. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport au point O.
4. Donner les affixes de leurs symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
5. Donner les affixes des vecteurs $\overrightarrow{OB}-2\overrightarrow{OC}$, $-\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.
6. Déterminer l'affixe du centre de gravité du triangle ABC.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

- L'affixe d'un point $M(a,b)$ du plan est le nombre complexe $z=a+ib$ noté $\mathrm{Aff}(M)$ ou z_M. On dit aussi que le point $M(a,b)$ est l'image de z.
- Soit $\vec{w}$ un vecteur et M et N deux points tels que $\vec{w}=\overrightarrow{MN}$. Alors l'affixe du vecteur $\vec{w}$ est le nombre complexe noté $\mathrm{Aff}\left(\vec{w}\right)$ ou $z_{\vec{w}}$, vérifiant $z_{\vec{w}}=z_N-z_M$.
- Pour tous vecteurs $\vec{w}$ et $\vec{w_1}$ et tous réels α et β, $\mathrm{Aff}\left(\alpha\vec{w}+\beta\vec{w_1}\right)=\alpha\mathrm{Aff}\left(\vec{w}\right)+\beta\mathrm{Aff}\left(\vec{w_1}\right)$.

Exercice résolu 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit A et B les points d'affixes respectives $2-2i$ et $-1+i$.
1. Montrer que les points O, A et B sont alignés.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe $z=k(2-2i)$, $k\in\mathbb{R}$.

Solution

1. Les points O, A et B sont alignés, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires,

ou encore, si et seulement si, il existe un réel k tel que $\text{Aff}\left(\overrightarrow{OA}\right) = k\text{Aff}\left(\overrightarrow{OB}\right)$.

Ce qui est le cas, puisque $\text{Aff}\left(\overrightarrow{OA}\right) = -2(-1+i) = -2\text{Aff}\left(\overrightarrow{OB}\right)$.

2. Soit $D = \{M;\ z = k(2-2i),\ k \in \mathbb{R}\}$.

Un point M appartient à D, si et seulement si, $\text{Aff}\left(\overrightarrow{OM}\right) = k\text{Aff}\left(\overrightarrow{OA}\right)$.

Ce qui équivaut à, $\overrightarrow{OM} = k\overrightarrow{OA}$. On en déduit que l'ensemble cherché est la droite (OA).

Propriété

Soit $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1} \neq \vec{0}$.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont colinéaires, si et seulement si, $\dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}$ est réel.

Démonstration

Soit $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1} \neq \vec{0}$.

Les vecteurs $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont colinéaires, si et seulement si, il existe un réel k tel que $\vec{w} = k\overrightarrow{w_1}$.

La relation $\vec{w} = k\overrightarrow{w_1}$ est équivalente à $\text{Aff}\left(\vec{w}\right) = k\text{Aff}\left(\overrightarrow{w_1}\right)$, ou encore à $\dfrac{\text{Aff}\left(\vec{w}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{w_1}\right)} = k$.

Le théorème en découle.

Activité 4

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit A et B les points d'affixes respectives $1+2i$ et $i(1+2i)$.

1. Placer les points A et B.
2. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux.

Propriété

Soit $\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1} \neq \vec{0}$.

$\vec{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $\dfrac{z_{\vec{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}$ est imaginaire.

Démonstration

Soit $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ deux vecteurs tels que $\overrightarrow{w_1} \neq \vec{0}$ et d'affixes respectives $z_{\overrightarrow{w}} = a + bi$ et $z_{\overrightarrow{w_1}} = a' + b'i$, a, b, a' et b' réels.

Les vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $aa' + bb' = 0$.

Or, $\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}} = \dfrac{a+bi}{a'+b'i} = \dfrac{(a+bi)(a'-b'i)}{a'^2+b'^2} = \dfrac{aa'+bb'+(a'b-ab')i}{a'^2+b'^2}$.

On en déduit que $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w_1}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_{\overrightarrow{w_1}}}$ est imaginaire.

Exercice résolu 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-i}{z-1}$ soit imaginaire.

Solution

Désignons par A le point d'affixe i, B le point d'affixe 1 et M le point d'affixe z tel que $z \neq 1$.

Le nombre complexe $\dfrac{z-i}{z-1}$ est imaginaire, si et seulement si, les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont orthogonaux et M est distinct de B.

L'ensemble cherché est donc le cercle de diamètre [AB], privé du point B.

I. 3 Module d'un nombre complexe

Activité 5

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_B = 1 - i\sqrt{3}$.

Calculer OA, OB et AB.

> Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
>
> • Soit $z = a + ib$ et $M(a, b)$ le point d'affixe z.
> On appelle module de z le réel positif, noté $|z|$, défini par $|z| = OM = \sqrt{a^2+b^2}$.
>
> • Pour tous points M et N d'affixes z_M et z_N, $|z_N - z_M| = MN$.

Activité 6

Soit $z = 2 - i$ et $z' = -3 + 4i$.

1. Donner les écritures cartésiennes de $z + z'$; zz' ; $\dfrac{z}{z'}$; z^4 ; $(\overline{z}z')^2$.

2. Calculer les modules de $z + z'$; zz' ; $\dfrac{z}{z'}$; z^4 ; $(\overline{z}z')^2$.

Propriétés

Soit deux nombres complexes z et z'.

$|z| = 0$, si et seulement si, $z = 0$; $|z+z'| \leq |z| + |z'|$; $|kz| = |k||z|$, $k \in \mathbb{R}$.

$|zz'| = |z||z'|$; $|\bar{z}| = |z|$; $|z|^2 = z\bar{z}$; $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$, $z \neq 0$; $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$, $z \neq 0$; $\left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z|^n}$, $z \neq 0$ et $n \in \mathbb{Z}$.

Activité 7

Calculer les modules de $(1+i)^5$, $\frac{(1+i)^{11}}{(1-i)^6}$ et $(1-i)^5$.

Exercice résolu 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - 1 + 2i| = 2$.

2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z + 2 - i| = |\bar{z} - 2 + 2i|$.

Solution

1. Considérons le point A d'affixe $1 - 2i$ et un point M d'affixe z.
L'égalité $|z - 1 + 2i| = 2$ est équivalente à $AM = 2$.
On en déduit que l'ensemble cherché est le cercle de centre A et de rayon 2.
2. On sait qu'un nombre complexe et son conjugué ont même module.
Il en résulte que $|\bar{z} - 2 + 2i| = |z - 2 - 2i|$.
Considérons les points K et L d'affixes respectives $-2 + i$ et $2 + 2i$.
Soit M un point d'affixe z. L'égalité $|z + 2 - i| = |\bar{z} - 2 + 2i|$ est équivalente à $|z + 2 - i| = |z - 2 - 2i|$, ou encore à $KM = LM$.
On en déduit que l'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[KL]$.

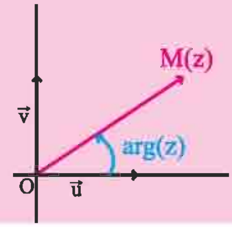
I. 4 Argument d'un nombre complexe non nul

Activité 8

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Placer les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_A = -i$; $z_B = 4$; $z_C = 2 + 2i$ et $z_D = -1 + i$ et déterminer, graphiquement, un argument de chacun de ces nombres complexes.
2. Soit A_1, B_1, C_1 et D_1 les symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à l'axe des abscisses.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit z un nombre complexe non nul et M son image. On appelle argument de z et on note $\arg(z)$ toute mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



Déterminer un argument de chacun de leurs affixes.

3. Reprendre la question précédente pour les symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à O.
4. Reprendre la question précédente pour les symétriques respectifs de A, B, C et D par rapport à l'axe des ordonnées.

Activité 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Soit M un point distinct de O tel que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\equiv\theta\ [2\pi]$.

On désigne par M_1, M_2 et M_3 les symétriques respectifs de M par rapport à l'axe des abscisses, au point O et à l'axe des ordonnées.

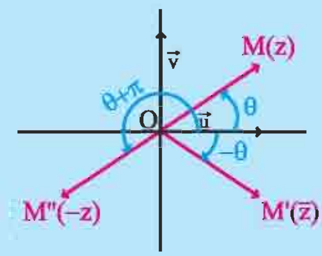
Déterminer $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_1}}\right)$; $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_2}}\right)$; $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM_3}}\right)$ en fonction de θ.

Propriétés

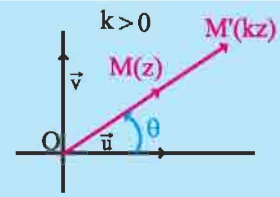
Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul.

$\arg\left(\bar{z}\right)\equiv-\arg(z)\ [2\pi]$.

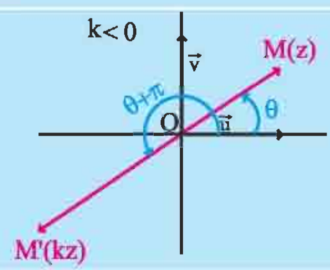
$\arg(-z)\equiv\pi+\arg(z)\ [2\pi]$.



Si $k>0$ alors $\arg(kz)\equiv\arg(z)\ [2\pi]$.



Si $k<0$ alors $\arg(kz)\equiv\pi+\arg(z)\ [2\pi]$.



I. 5 Ecriture trigonométrique

Activité 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Soit $z=-2\sqrt{3}+2i$.

1. Déterminer l'écriture trigonométrique de z et placer le point d'affixe z.
2. En déduire l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes $\bar{z}$, $-z$, $\frac{1}{2}z$ et $-\frac{3}{2}z$, puis placer leurs points images.

Soit z un nombre complexe non nul tel que $\arg(z)\equiv\theta\ [2\pi]$. Alors $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$.
L'écriture précédente est appelée écriture trigonométrique de z.
Si M est l'image de z dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ alors M appartient au cercle de centre O et de rayon $|z|$ et à la demi droite $[OB)$ telle que $(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}})\equiv\theta\ [2\pi]$.

Activité 11

Soit les nombres complexes $z=1+9i$ et $z'=2-8i$.
Donner une valeur approchée de leurs arguments à 10^{-2} près.

Soit un nombre complexe non nul $z=a+ib$, a et b des réels.
$\arg(z)\equiv\theta\ [2\pi]$, si et seulement si,
$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ et $\sin\theta=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

Activité 12

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Donner l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes $z_A=4$, $z_B=-1+i\sqrt{3}$ et $z_C=1-i\sqrt{3}$.

I. 6 Propriétés d'un argument d'un nombre complexe non nul

Activité 13

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$ et $z'=|z'|(\cos\theta'+i\sin\theta')$.

1. Donner les écritures trigonométriques de zz', $\frac{1}{z}$ et $\frac{z'}{z}$.
2. a. Montrer par récurrence, sur l'entier naturel n, que $z^n=|z|^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $z^{-n}=|z|^{-n}(\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta))$.

Propriétés

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.
$\arg(zz') \equiv \arg(z)+\arg(z')\ [2\pi]$.
$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z)\ [2\pi]$; $\quad \arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) \equiv \arg(z')-\arg(z)\ [2\pi]$.
$\arg(z^n) \equiv n\arg(z)\ [2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$; $\arg\left(\dfrac{1}{z^n}\right) \equiv -n\arg(z)\ [2\pi]$, $n \in \mathbb{N}$.

Soit un nombre complexe non nul $z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$.
Pour tout entier n, $z^n=|z|^n(\cos(n\theta)+i\sin(n\theta))$.
La formule précédente est appelée formule de Moivre.

Activité 14

Donner l'écriture trigonométrique de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$$(1+i)^6 \ ;\ (1-i)^9\dfrac{(\sqrt{3}+i)^5}{(\sqrt{3}-i)^8}\ ;\ (2\sqrt{3}-2i)^6(1+i\sqrt{3})^3.$$

II. Ecriture exponentielle d'un nombre complexe

Activité 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

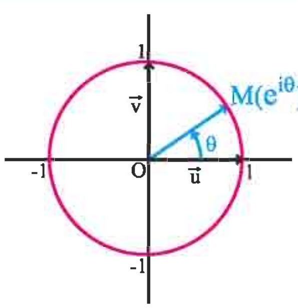
Soit les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=i$, $z_B=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+i)$ et $z_C=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$.

1. Donner les écritures trigonométriques de z_A, z_B et z_C.
2. En déduire que les points A, B et C appartiennent au cercle trigonométrique.

Notation

Pour tout réel θ, on note $e^{i\theta}$ le nombre complexe $\cos\theta+i\sin\theta$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Un point M appartient au cercle trigonométrique, si et seulement si, M a pour affixe $z=e^{i\theta}$, où $\theta \equiv \widehat{(\vec{u},\overrightarrow{OM})}\ [2\pi]$.



Conséquences

- $e^{i0}=1$, $e^{i\frac{\pi}{2}}=i$, $e^{-i\frac{\pi}{2}}=-i$, $e^{i\pi}=-1$.
- Pour tout réel θ et tout entier k, $e^{i\theta}=e^{i(\theta+2k\pi)}$.
- Pour tout réel θ, $\left|e^{i\theta}\right|=1$ et $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ et $-e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}$.

Activité 2

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On donne les nombres complexes $z=e^{-i\frac{\pi}{3}}$ et $z'=e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

1. Donner le module et un argument de chacun des nombres complexes
   $-z$, $\bar{z}$, zz', $\frac{1}{z}$, $\frac{z}{z'}$ et z^n, $n\in\mathbb{Z}$.
2. Ecrire sous la forme $e^{i\theta}$ les nombres complexes zz', $\bar{z}$, $\frac{z}{z'}$, z^n, $n\in\mathbb{Z}$.

Les propriétés ci-dessous découlent des propriétés de l'argument du produit, de l'inverse ou du quotient de deux nombres complexes non nuls.

Propriétés

Soit deux réels θ et θ'.

$e^{i\theta}.e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$; $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}, n\in\mathbb{Z}$.

Exercice résolu 4

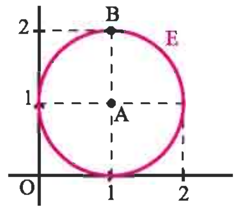
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

On considère le nombre complexe $z=1+i+e^{i\theta}$, $\theta\in[0,2\pi[$ et on désigne par E l'ensemble des points M du plan d'affixe z .

1. Vérifier que le point B d'affixe $z_B=1+2i$ appartient à E.
2. Déterminer l'ensemble E.

Solution

1. On sait que $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$. On peut alors écrire $z_B = 1 + 2i = 1 + i + e^{i\frac{\pi}{2}}$.
Ce qui prouve que B appartient à l'ensemble E.
2. Soit A le point d'affixe $z_A = 1 + i$ et M
un point du plan complexe d'affixe z.
Le point M appartient à E, si et seulement si,
$z - z_A = e^{i\theta}$, $\theta \in [0, 2\pi[$,
ou encore, si et seulement si, AM = 1.
L'ensemble E est donc le cercle de centre A et de rayon 1.



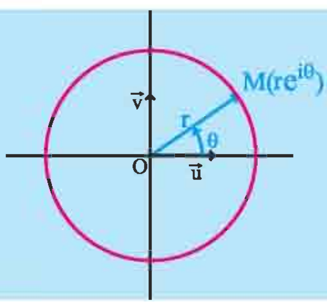
Activité 3

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Donner l'écriture trigonométrique des nombres complexes
$z_1 = 2i$, $z_2 = -3i$, $z_3 = -\dfrac{5}{2}$, $z_4 = \sqrt{3}(1+i)$ et $z_5 = \dfrac{-2\sqrt{3} + 2i}{5}$.
2. Ecrire chacun des nombres complexes précédents sous la forme $re^{i\theta}$, avec $r > 0$.

Théorème et définition

Tout nombre complexe non nul z, s'écrit sous la forme
$z = re^{i\theta}$, où $r = |z|$ et $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$.
L'écriture $z = re^{i\theta}$ est appelée écriture exponentielle de z.



Activité 4

On considère les deux nombres complexes $z = \sqrt{3} + i$ et $z' = -1 + i$.

Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes z, $\bar{z}$, z', $\bar{z'}$, zz', $\dfrac{1}{z}$, z^5, $\dfrac{z}{z'}$ et z'^2.

Activité 5

1. Ecrire sous forme exponentielle les nombres complexes $z = \sqrt{3} - i$ et $z' = 1 + i$.
2. En déduire l'écriture cartésienne de $\dfrac{(1+i)^{14}}{(\sqrt{3} - i)^8}$.

Activité 6

1. Vérifier que pour tout réel θ, $1+e^{i\theta}=\left(e^{-i\frac{\theta}{2}}+e^{i\frac{\theta}{2}}\right)e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2. Donner l'écriture exponentielle des nombres complexes $z=1+e^{i\frac{2\pi}{5}}$ et $z=1+e^{i\frac{3\pi}{5}}$.

III. Nombres complexes et trigonométrie

Théorème

Pour tout réel x et pour tout entier n,

$(\cos x+i\sin x)^n=\cos(nx)+i\sin(nx)$. (Formule de Moivre).

Pour tout réel x,

$\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ et $\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$. (Formules d'Euler).

Les formules de Moivre et d'Euler permettent d'établir un grand nombre de formules trigonométriques.
Elles permettent aussi d'exprimer des puissances de $\cos x$ et $\sin x$ à l'aide de $\cos(nx)$ et $\sin(nx)$.

Activité 1

Soit k un entier.

Montrer que pour tout réel x différent de $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, $e^{2ix}=\dfrac{1+i\tan x}{1-i\tan x}$.

Activité 2

1. En utilisant la formule de Moivre et la formule du binôme de Newton, montrer que $\cos(3x)=\cos^3 x-3\cos x\sin^2 x$ et $\sin(3x)=3\cos^2 x\sin x-\sin^3 x$.
2. Exprimer $\cos(4x)$ et $\sin(4x)$ en fonction de puissances de $\cos x$ et de $\sin x$.

Exercice résolu 5

Linéariser $\sin^5 x$, $x\in\mathbb{R}$.

En transformant une expression contenant une puissance de $\cos x$ ou de $\sin x$ sous une forme qui ne contient aucun produit de fonctions circulaires, on dit qu'on a linéarisé l'expression donnée.

Solution

En utilisant la formule d'Euler, on obtient $\sin^5 x = \frac{1}{(2i)^5}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5$.

La formule du binôme de Newton, donne

$$\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5 = e^{5ix} - C_5^1\, e^{4ix}e^{-ix} + C_5^2\, e^{3ix}e^{-2ix} - C_5^3\, e^{2ix}e^{-3ix} + C_5^4\, e^{ix}e^{-4ix} - e^{-5ix}.$$

On obtient alors, $\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)^5 = \left(e^{5ix} - e^{-5ix}\right) - 5\left(e^{3ix} - e^{-3ix}\right) + 10\left(e^{ix} - e^{-ix}\right)$.

Il en résulte que $\sin^5 x = \frac{1}{16}\left(\sin 5x - 5\sin 3x + 10\sin x\right)$.

Activité 3

Linéariser $\cos^3 x$, $\sin^3 x$, où x est un réel.

Activité 4

Linéariser $\sin^2 x.\cos^3 x$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. Soit les points $M(z)$ et $M'(z')$.

1. a. La distance MM' est égale à

☐ $|z-z'|$. ☐ $\left||z|-|z'|\right|$. ☐ $|z+z'|$.

b. Si $\arg(z) \equiv \arg(z')\ [2\pi]$, alors

☐ O, M et M′ sont alignés. ☐ $z=z'$. ☐ $|z|=|z'|$.

c. Si $\arg(z) \equiv \arg(iz')\ [2\pi]$ et $|z|=|z'|=1$, alors

☐ $z=z'$ ☐ $z=iz'$. ☐ $z=-z'$.

2. Si A, B et C sont trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tels que $z_B - z_A = 4(z_C - z_A)$, alors

☐ ABC est isocèle. ☐ (AB) et (AC) sont perpendiculaires. ☐ A, B et C sont alignés

3. Si A, B et C sont trois points d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tels que $z_B - z_A = 4i(z_C - z_A)$, alors

☐ ABC est isocèle. ☐ (AB) et (AC) sont perpendiculaires. ☐ (AB) et (AC) sont parallèles.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit z_1 et z_2 deux nombres complexes non réels.

Le conjugué de $Z = z_1 + iz_2$ est $\overline{Z} = z_1 - iz_2$.

2. Soit z un nombre complexe. Si z^3 est réel alors nécessairement z est réel.

3. Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

Si $|z|=|z'|$ alors nécessairement $z=z'$ ou $z=-z'$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1 Mettre les nombres complexes ci-dessous sous forme algébrique.

$2i+\frac{1}{i}-1$; $\frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}$; $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2$; $\frac{(1-i)(2+i)}{i-2}$.

2 Calculer le conjugué de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$\frac{(3-2i)(5+i)}{3i(7+2i)}$; $\left(\frac{i-3}{1+i}\right)^2$;

$(2-i)(3+2i)(2+i)(3-2i)$.

3 On donne les nombres complexes

$z_1=\frac{(11+13i)(11-13i)-(3-5i)-(3+5i)}{(7+3i)+(7-3i)}$;

$z_2=\frac{3-7i}{9+2i}$; $z_3=\frac{3+7i}{9-2i}$.

Montrer, sans effectuer de calcul, que z_1 est réel, z_3+z_2 est réel et z_3-z_2 est imaginaire.

4 Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants.

1. $z=a+i(a+1)$, $\quad a\in\mathbb{R}$.
2. $z=2i\sin\frac{a}{2}$, $\quad a\in[0, 2\pi[$.
3. $a(z-i)=i(z+1)$, $\quad a\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

5 Calculer le module de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$(1+i)^4$; $(2-3i)^2$; $(-2+i)(1-3i)(1-4i)$; $\frac{1-5i}{i+2\sqrt{3}}$.

6 1. Montrer que pour tout nombre complexe z, $|z|=1$, si et seulement si, $\bar{z}=\frac{1}{z}$.

2. En déduire que si z_1 et z_2 sont deux nombres complexes tels que $|z_1|=|z_2|=1$ alors $\frac{z_1+z_2}{1+z_1z_2}$ est réel.

7 Soit z un nombre complexe. Déterminer z pour que les nombres complexes z, $1-z$ et z^2 aient le même module.

8 Pour tout nombre complexe $z=x+iy$ avec x et y réels, on considère le nombre complexe $z'=z^2$.

1. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de z'.
2. Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit réel.
3. Déterminer et représenter l'ensemble des points M d'affixe z tel que z' soit imaginaire.

9 Soit A, B et C les points d'affixes respectives $2+i$, -1 et $3-2i$.

1. Déterminer l'affixe du point I milieu de $[BC]$.
2. a. Calculer AB, AC et BC.
b. Quelle est la nature du triangle ABC ?
3. a. Déterminer l'affixe du point D symétrique de A par rapport à I.
b. Quelle est la nature du quadrilatère ABDC ?

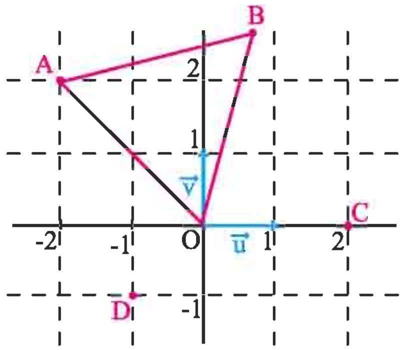
10 Placer dans le plan, les points A, B, C et D d'affixes respectives $-2+i$, $4i$, $\frac{7}{2}+2i$ et $\frac{3}{2}-i$

Quelle est la nature du quadrilatère ABCD?

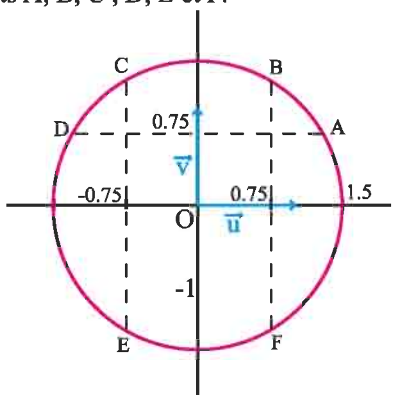
11 1. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|\bar{z}-1+2i|=3$.

2. Déterminer et représenter l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\frac{|iz+1-i|}{|\bar{z}+2+i|}=1$.

12 Dans le graphique ci-dessous le triangle OAB est équilatéral. Déterminer le module et un argument des affixes z_A, z_B, z_C et z_D des points A, B, C et D.



13 Déterminer à l'aide du graphique ci-contre, un argument des affixes z_A , z_B , z_C , z_D , z_E et z_F des points A, B, C , D, E et F.



14 Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants.

a. $-8i$; $\dfrac{-1+i}{\sqrt{2}}$; $3i+\sqrt{3}$; -2.5 ; $\sqrt{2}-\sqrt{6}i$; $5+5i$.

b. $\dfrac{3\left(1+i\sqrt{3}\right)}{(1+i)^2}$; $\dfrac{1+i}{1-i}$; $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^3$; $(1-i)^5(1+i)^3$.

15 Soit $z_1=1+i$ et $z_2=\sqrt{3}-i$.

1. Déterminer $|z_1|$, $\arg(z_1)$, $|z_2|$ et $\arg(z_2)$.
2. Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique de z_1z_2 .
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

16 Soit $z_1=-1+i\sqrt{3}$ et $z_2=1+i$.

1. Déterminer $|z_1|$, $\arg(z_1)$, $|z_2|$ et $\arg(z_2)$.
2. Déterminer $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|$ et $\arg\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$.
3. En déduire les valeurs exactes de $\cos\dfrac{5\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{5\pi}{12}$.

17 Mettre sous la forme algébrique les nombres complexes ci-dessous.

e^i ; $e^{-i\frac{\pi}{4}}$; $e^{2i\frac{\pi}{3}}$; $\dfrac{e^{i\pi}}{4}$; $2ie^{i\frac{\pi}{6}}$.

18 Donner la forme exponentielle des nombres complexes ci-dessous.

$2\sqrt{3}-2i$; $-5-5i$; $-1+i\sqrt{3}$; $\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\cos\dfrac{\pi}{5}-i\sin\dfrac{\pi}{5}$.

19 1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}$.

2. En déduire la forme algébrique de z^6 .

20 1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $-1+i$.

2. En déduire que $(-1+i)^{11}=32+32i$.

21 Déterminer et construire l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants.

1. $z=2e^{i\theta}$, $\quad\theta\in[0, \pi]$.
2. $z=-2e^{i\theta}$, $\quad\theta\in[0, \pi]$.
3. $z=2+\cos\theta+i\sin\theta$, $\quad\theta\in[0, 2\pi[$.

22 Soit un réel θ de $]0,\pi[$.

1. Montrer que $1+e^{i\theta}=2\cos\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$ et

$1-e^{i\theta}=-2i\sin\frac{\theta}{2}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

2. En déduire le module et argument de chacun des nombres complexes $1+e^{i\theta}$ et $1-e^{i\theta}$.

23 Donner la forme exponentielle du nombre complexe z dans chacun des cas suivants.

1. $z=\cos\theta-i\sin\theta,\quad \theta\in\mathbb{R}$.
2. $z=\sin\theta+i\cos\theta,\quad \theta\in\mathbb{R}$.
3. $z=-\cos\theta-i\sin\theta,\quad \theta\in\mathbb{R}$.
4. $z=1+i\tan\theta,\quad \theta\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.
5. $z=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{e^{i\theta}+e^{-i\theta}},\quad \theta\in\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$.

24 On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O. Soit un point M de $\mathscr{C}$ d'affixe t telle que $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\equiv\alpha[2\pi]$, $\alpha\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

On pose $u=t^3$ et $v=2t$.

1. Ecrire chacun des nombres complexes u et v sous la forme trigonométrique.

Soit $w=2t-t^3$, A, B et C les points d'affixes respectives u, v et w.

2. Placer, dans le plan, les points A, B et C lorsque $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

3. Déterminer les réels α pour lesquels O, A et B sont alignés.

4. On suppose dans la suite que $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

a. Quelle est la nature du quadrilatère OABC ?
b. Déterminer le réel α pour que OABC soit un rectangle.

25 Soit le nombre complexe $z=e^{i2\theta}-i$ avec $\theta\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right[$.

1. On désigne par M et M′ les points images respectives de z et $\bar{z}$. Déterminer l'affixe du point N pour que OMNM′ soit un losange.

2. a. Montrer que $z=2\cos\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)}$.

b. Mettre $\frac{z}{\bar{z}}$ sous la forme exponentielle.

c. En déduire la valeur de θ pour que OMNM′ soit un carré.

d. Construire le carré OMNM′ pour la valeur de θ trouvée.

26 Soit θ un réel de $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. On désigne par $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique de centre O.
Soit un point M de $\mathscr{C}$ d'affixe z tel que $\arg(z)\equiv\theta\,[2\pi]$.

1. Placer les points A et B d'affixes respectives $z_A=1+\cos\theta$ et $z_B=-1+i\sin\theta$.

2. a. Montrer que le quadrilatère OAMB est un parallélogramme.
b. Montrer qu'il existe une valeur de θ tel que OABM est un losange.
c. Donner une valeur approchée de θ à 10^{-1} près.

3. On désigne par $\mathscr{A}(\theta)$ l'aire du parallélogramme OAMB.

Montrer que $\mathscr{A}(\theta)$ est maximale lorsque $\theta=\frac{\pi}{3}$.

27 Soit φ un réel de $]0,\pi[$ et z le nombre complexe défini par $z=\frac{1}{2}(\sin\varphi+i(1-\cos\varphi))$.

1. Déterminer en fonction de φ, le module et un argument de z.

2. Déterminer un module et un argument des nombres complexes $z_1=z-i$ et $z_2=\dfrac{z}{z-i}$.

On considère les points M et N d'affixes respectives z_1 et z_2.

1. Déterminer l'ensemble E décrit par le point M.
2. Déterminer l'ensemble F décrit par le point N.
3. Représenter les ensembles E et F.

Chapitre 2

Equations à coefficients complexes

Les nombres complexes ont de riches propriétés algébriques et analytiques. Le théorème fondamental de l'algèbre établit que tout polynôme non nul possède autant de racines complexes (comptées avec leur multiplicité) que son degré. Les nombres complexes furent inventés au 16$^{\text{ème}}$ siècle par les mathématiciens Cardan, Bombelli et Tartaglia comme intermédiaires de calcul pour trouver des solutions aux équations polynomiales du troisième degré. Il semblerait que ce soit Héron d'Alexandrie qui ait inventé le nombre impossible.

(Wikipedia)

Chapitre 2

Equations à coefficients complexes

I. Equation $z^n = a, n \geq 2, a \in \mathbb{C}^*$

Activité 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): u^2 = -\frac{3}{4}$.

2. En déduire les solutions de l'équation $(E'): \left(z+\frac{1}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4}$.

On note z_1 la solution de (E') dont la partie imaginaire est positive et z_2 la solution dont la partie imaginaire est négative.
Ecrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

3. a. Montrer que $z^3 - 1 = (z-1)\left(\left(z+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right)$.

b. Déduire de la deuxième question les solutions de l'équation $(E''): z^3 = 1$.

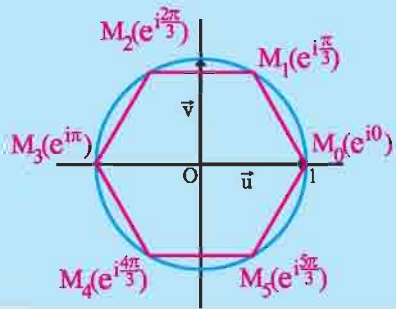
Théorème et définition

Pour tout entier naturel $n \geq 2$, l'équation $z^n = 1$ admet dans $\mathbb{C}$ n solutions distinctes définies par $z_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$, l'entier k appartenant à $\{0, 1, ..., (n-1)\}$.
Les solutions de l'équation $z^n = 1$ sont appelées racines nièmes de l'unité.

Conséquence

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes de l'unité sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle trigonométrique.

Les points images des racines sixièmes de l'unité



Activité 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1. On pose $j=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

a. Vérifier que j est une racine cubique de l'unité.

b. Vérifier les égalités $j^3=1$, $j^2=\bar{j}$ et $1+j+j^2=0$.

c. Montrer que pour tout entier naturel n, $j^{3n}=1$, $j^{3n+1}=j$ et $j^{3n+2}=\bar{j}$.

Exercice résolu 1

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^6=1$.

2. En déduire que la somme des solutions de (E) est nulle.

Solution

1. On sait que les solutions de (E) sont les nombres complexes

$z_0=1$, $z_1=e^{i\frac{2\pi}{6}}$, $z_2=e^{i\frac{4\pi}{6}}$, $z_3=e^{i\frac{6\pi}{6}}=-1$, $z_4=e^{i\frac{8\pi}{6}}$ et $z_5=e^{i\frac{10\pi}{6}}$.

2. Il découle de la question précédente que $z_2=z_1^2$, $z_3=z_1^3$, $z_4=z_1^4$ et $z_5=z_1^5$.

En remarquant que $z_1\neq 1$ et que $1+z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4+z_1^5=\dfrac{z_1^6-1}{z_1-1}$, on déduit que

$1+z_1+z_1^2+z_1^3+z_1^4+z_1^5=0$.

Activité 3

Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $z^8=1$.

Activité 4

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(E): z^3=8i$.

1. Montrer que z est une solution de (E), si et seulement si, $\dfrac{z}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}$ est une racine cubique de l'unité.

2. En déduire que l'équation (E) possède exactement trois solutions.

Vérifier que les solutions de (E) sont $z_k=2e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}\right)}$,

où k est un entier appartenant à $\{0, 1, 2\}$.

Théorème et définition

Soit a un nombre complexe non nul d'argument θ et un entier naturel $n \geq 2$.
L'équation $z^n = a$ admet dans $\mathbb{C}$, n solutions distinctes définies par
$z_k = r\,e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, où r est le réel strictement positif tel que $r^n = |a|$.
Ces solutions sont appelées les racines nièmes du nombre complexe a.

Démonstration

Posons $a = |a|\,e^{i\theta}$.

Considérons le réel $r > 0$ tel que $r^n = |a|$. On peut alors écrire $a = r^n\left(e^{i\frac{\theta}{n}}\right)^n$.

Il en résulte que l'équation $z^n = a$ est équivalente à l'équation $\left(\dfrac{z}{re^{i\frac{\theta}{n}}}\right)^n = 1$.

On en déduit que z est solution de l'équation $z^n = a$, si et seulement si, $\dfrac{z}{re^{i\frac{\theta}{n}}}$ est une racine nième de l'unité.

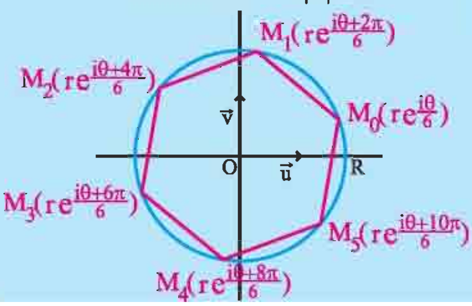
Par conséquent, l'équation $z^n = a$ admet exactement n solutions complexes de la forme
$z_k = re^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$, $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, où r est le réel tel que $r^n = |a|$.

Conséquences

- Tout nombre complexe non nul admet deux racines carrées opposées.

- Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
Lorsque $n \geq 3$, les points images des racines nièmes d'un nombre complexe non nul sont les sommets d'un polygone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon r tel que $r^n = |a|$.

Les points images des solutions de l'équation $z^6 = |a|e^{i\theta}$



Activité 5

Déterminer les racines carrées, puis les racines quatrièmes du nombre complexe $u = -4i$.

Activité 6

Soit le nombre complexe $z = \sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)} + i\sqrt{\left(2+\sqrt{2}\right)}$.

1. Déterminer le module et un argument de z^2.
2. En déduire une écriture trigonométrique de z.

II. Résolution dans $\mathbb{C}$, de l'équation $az^2 + bz + c = 0,\ a \neq 0$

Activité 1 (Recherche des racines carrées d'un nombre complexe par une méthode algébrique)

Soit le nombre complexe $d = 3 - 4i$.
On se propose de déterminer les racines carrées de d.
Remarquons d'abord que la recherche d'un argument du nombre complexe d ne conduit pas à un angle "remarquable".
Déterminons alors, sous forme algébrique, les solutions de l'équation $z^2 = d$.
On pose $z = x + iy$ avec x et y deux nombres réels.

1. Montrer que l'équation $z^2 = d$ équivaut à $\begin{cases} x^2 - y^2 = 3, \\ 2xy = -4, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$
2. Vérifier que les couples (x, y) solutions de ce système sont $(2, -1)$ et $(-2, 1)$.
3. Conclure.

Activité 2

Déterminer les racines carrées de $-8 + 6i$ et $1 - 2\sqrt{2}i$.

Activité 3

On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 + 2iz - \frac{7}{4} - i = 0$.

1. Montrer que $z^2 + 2iz - \frac{7}{4} - i = 0$, si et seulement si, $(z+i)^2 = \frac{3+4i}{4}$.
2. Vérifier que $\left(\frac{2+i}{2}\right)^2 = \frac{3+4i}{4}$.
3. En déduire les solutions de l'équation (E).

Activité 4

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$.

On se propose de résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E): az^2 + bz + c = 0$.

1. Montrer que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est équivalente à l'équation $\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$.

2. On pose $\Delta = b^2 - 4ac$.

a. Montrer que si $\Delta = 0$, alors l'équation (E) admet une unique solution que l'on déterminera.

b. On suppose que $\Delta \neq 0$.

Dans ce cas, le nombre complexe Δ admet deux racines carrées opposées δ et $-\delta$.

Montrer que l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est équivalente à l'équation

$\left(z + \frac{b - \delta}{2a}\right)\left(z + \frac{b + \delta}{2a}\right) = 0$.

En déduire les solutions de (E).

Cette activité nous permet d'énoncer le théorème suivant.

Théorème

Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$.

L'équation $az^2 + bz + c = 0$, admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions (éventuellement confondues) définies par $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$, où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Conséquences

Si z_1 et z_2 sont les solutions de $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, alors

$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$, $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \frac{c}{a}$.

Activité 5

Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations ci-dessous.

a. $z^2 - (1 - i)z + 2 - 2i = 0$.

b. $1 + z + z^2 = 0$.

c. $1 - z + z^2 = 0$.

Activité 6

Déterminer les nombres complexes z_1 et z_2 vérifiant $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1 + 2i, \\ z_1 z_2 = -1 + i. \end{cases}$

III. Exemples d'équations de degré supérieur ou égal à 3

Activité 1

Soit $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0,\ n \geq 2$.

Soit $f : z \mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$.

Soit (E) l'équation $f(z) = 0$.

1. Montrer que si z_0 est une solution de (E), alors $f(z) = 0$, si et seulement si,

$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z = a_n z_0^n + a_{n-1} z_0^{n-1} + ... + a_1 z_0$.

2. En déduire que si z_0 est une solution de (E), alors (E) est équivalente à l'équation $(z - z_0) g(z) = 0$, où g(z) est de la forme $a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + ... + b_0$, avec b_{n-2}, ..., b_0 des nombres complexes.

Théorème

Soit $a_1, a_2, ..., a_n$ des nombres complexes tels que $a_n \neq 0,\ n \geq 2$.

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + ... + a_1 z + a_0$.

Si z_0 est un zéro de P, alors $P(z) = (z - z_0) g(z)$, où $g(z)$ est de la forme $a_n z^{n-1} + b_{n-2} z^{n-2} + ... + b_0$, avec $b_0, b_1, ..., b_{n-2}$ complexes.

Exercice résolu 2

On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E) : z^3 + (1 - 4i) z^2 - (7 + 3i) z + 6i - 2 = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une solution imaginaire et la déterminer.
2. Résoudre l'équation (E).

Solution

1. Posons $z_0 = iy$ avec y réel.

z_0 est solution de (E), si et seulement si, $(iy)^3 + (1 - 4i)(iy)^2 - (7 + 3i) iy + 6i - 2 = 0$,

ou encore $-y^2 + 3y - 2 + i\left(-y^3 + 4y^2 - 7y + 6\right) = 0$.

On en déduit que z_0 est solution de (E), si et seulement si, $\begin{cases} -y^2 + 3y - 2 = 0 \quad (*), \\ -y^3 + 4y^2 - 7y + 6 = 0 \quad (**). \end{cases}$

L'équation $(*)$ admet deux solutions réelles qui sont 1 et 2. Seul le réel 2 vérifie l'équation $(**)$. Il en résulte que le réel 2 est l'unique solution du système précédent.

On en déduit que $z_0 = 2i$ est l'unique solution imaginaire de (E).

Il suit que $z^3 + (1-4i)z^2 - (7+3i)z + 6i - 2 = (z-2i)\left(z^2 + bz + c\right)$, avec b et c des nombres complexes.

Un développement et une identification terme à terme nous donnent $b = 1-2i$ et $c = -3-i$.

L'équation (E) s'écrit alors $(z-2i)\left(z^2 + (1-2i)z + -3 - i\right) = 0$,

ce qui équivaut à $z = 2i$ ou $z^2 + (1-2i)z - 3 - i = 0$.

Les solutions de l'équation $(E_1): z^2 + (1-2i)z - 3 - i = 0$ sont $z_1 = -2+i$ et $z_2 = 1+i$.

Il en résulte que l'équation (E) a pour ensemble de solutions $S = \{2i,\ -2+i,\ 1+i\}$.

Activité 2

Soit $f(z) = z^3 + (2+2i)z^2 + (2+i)z + 3 + i$, où $z \in \mathbb{C}$.

1. Vérifier que $f(i) = 0$.
2. En déduire les solutions, dans $\mathbb{C}$, de l'équation $f(z) = 0$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. L'équation $z^2+z+1=0$ a deux solutions
 - ☐ opposées.
 - ☐ conjuguées.
 - ☐ confondues.

2. L'équation $z^2-2z+2=0$ a pour solutions
 - ☐ $z_1=1-i$ et $z_2=1+i$.
 - ☐ $z_1=2i$ et $z_2=-i$.
 - ☐ $z_1=1-i$ et $z_2=2+i$.

3. L'équation $z^3-z^2+z-1=0$ admet
 - ☐ une seule solution réelle.
 - ☐ deux solutions réelles.
 - ☐ trois solutions réelles.

4. L'équation $z^4=-1$ admet
 - ☐ une solution réelle.
 - ☐ une solution imaginaire.
 - ☐ quatre solutions distinctes.

5. Le nombre $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ est une racine carrée de
 - ☐ $4i$.
 - ☐ $-4i$.
 - ☐ $2\sqrt{2}i$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. L'équation $z^2=-3$ n'admet pas de solution dans $\mathbb{C}$.
2. L'équation $z^4=z^2$ est équivalente à l'équation $z^2=1$.
3. Le nombre 0 est l'unique solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4+z^2=0$.
4. Une équation du second degré dans $\mathbb{C}$ admet toujours deux racines opposées.
5. Soit z et a deux nombres complexes non nuls.

   $z^4=a^4$, si et seulement si, $z=a$ ou $z=-a$.
6. Soit z un nombre complexe. Si $z^3=i$ alors nécessairement z est imaginaire.

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1 Déterminer les racines cubiques de $4\sqrt{2}\left(i+1\right)$.

2 Déterminer les racines quatrièmes de $8\sqrt{2}\left(-1-i\right)$.

3 Déterminer les racines cinquièmes de $32\,i$.

4 Déterminer les racines sixièmes de $32\left(i-\sqrt{3}\right)$.

5 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes.

$z^2=2i$; $z^2+4=0$; $z^2=-5+12i$; $z^2=e^{i\frac{\pi}{3}}$;
$z^2+i=0$; $(1-iz)^2=-1$, $(2z-1)^2-(i-z)^2=0$.

6 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes.
1. $z^2+z+2=0$.
2. $z^2-2iz-1=0$.
3. $z^2-\left(4+2i\right)z+2+4i=0$.
4. $\left(2+i\right)z^2+\left(1-7i\right)z-5=0$.

7 Soit α un nombre complexe non nul.

1. Développer $\left(\alpha-i\right)^2$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E\right): z^2-\alpha(\alpha+i)z+i\alpha^3=0$.
3. On note r le module de α et θ un argument de α . Calculer en fonction de r et de θ le module et un argument de chacune des solutions de $\left(E\right)$.

8 1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$E: z^2-\left(3+i\right)z+2\left(1+i\right)=0$.

b. Donner les solutions sous forme algébrique et trigonométrique.

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E'\right): X^4-(3+i)X^2+2\left(1+i\right)=0$.

9 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$\left(E\right): z^4+az^2+b+12i=0$, où a et b sont deux nombres réels.

1. Déterminer les réels a et b sachant que $\sqrt{2}\left(1+i\right)$ est une solution de E.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation ainsi obtenue.

10 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$\left(E\right): z^2+(1+i)z+i=0$.

2. En déduire les solutions des équations ci-dessous.

a. $iz^2+\left(1-i\right)z-1=0$.

b. $z^4+\left(1+i\right)z^2+i=0$.

11 Résoudre dans $\mathbb{C}$ chacune des équations ci-dessous.
1. $z^4+6z^2+25=0$.
2. $z^4+4z^2-77=0$.
3. $z^5=\bar{z}$.

12 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$\left(E\right): z^3-8z^2+24z-32=0$.

1. Vérifier que $z_0=4$ est une solution de $\left(E\right)$.
2. Résoudre $\left(E\right)$.
3. Déterminer la forme exponentielle des solutions.

13 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$\left(E\right): z^3-\left(3+4i\right)z^2-4\left(1-3i\right)z+12=0$

1. Montrer que l'équation admet une racine réelle que l'on déterminera.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\left(E\right)$.

14 On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^3 = 2+11\,i$.

1. Vérifier que $z_0 = 2+i$ est une solution de (E).
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

15 1. On considère les nombres complexes

$\alpha = \dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ et $\beta = \dfrac{3+i\sqrt{3}}{2}$.

Ecrire α et β sous forme exponentielle.

2. Soit θ un réel de $]0,\pi[$.

a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2z + 1 - e^{2i\theta} = 0$.
On désigne par z_1 la solution ayant une partie imaginaire négative et par z_2 l'autre solution.

b. Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

c. Déterminer θ pour que l'on ait $z_1 = \alpha$ et $z_2 = \beta$.

16 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^2 + (1-2i)z - 2i = 0$.

Soit θ un réel. On considère. l'équation

$E_\theta : z^2 + \left(1-2e^{i\theta}\right)z - 2e^{i\theta} = 0$.

On désigne par z_1 la solution indépendante de θ et par z_2 l'autre solution.
On considère les points A et M d'affixes respectives z_1 et z_2.
Soit I le milieu de $[AM]$ et z_I l'affixe de I.

1. Vérifier que pour tout réel θ, $z_I + 0.5 = e^{i\theta}$.
2. Déterminer l'ensemble des points I lorsque θ varie dans $[0,2\pi[$.
3. Déterminer les valeurs de θ de $[0,2\pi[$ pour lesquelles les points O,A et I sont alignés.

17 Soit a un nombre complexe non nul et l'équation $z^2 - 2z + 1 + a^2 = 0$.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation.
2. On considère les points A et B d'affixes respectives $1+ia$ et $1-ia$.
On pose $a = a_1 + ia_2$, où a_1 et a_2 sont des réels.

a. Montrer que les points O, A et B sont alignés, si et seulement si, $a_1 = 0$.

b. Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont orthogonaux, si et seulement si, $|a| = 1$.

3. On suppose que $a = e^{i\alpha}$, où $\alpha \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

a. Vérifier que pour tout réel x, $1+e^{ix} = 2\cos\dfrac{x}{2}e^{i\frac{x}{2}}$

et $1-e^{ix} = -2i\sin\dfrac{x}{2}e^{i\frac{x}{2}}$.

b. En déduire l'écriture sous forme exponentielle de chacun des nombres
Complexes $1+ia$ et $1-ia$.

c. Déterminer a pour que le triangle OAB soit rectangle isocèle en O.

18 Pour tout nombre complexe non nul z, on pose

$w = z + \dfrac{4}{z}$.

Soit θ un réel.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z + \dfrac{4}{z} = 4\cos\theta$.
2. Ecrire les solutions trouvées sous forme exponentielle.
3. A tout nombre complexe z, on associe le point M d'affixe z.
Déterminer et construire l'ensemble E des points M tels que w soit réel.
4. Soit A, B et C les points d'affixes respectives $2e^{i\theta}$; $4\cos\theta$ et $2e^{-i\theta}$, où θ est un réel de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

a. Placer, pour $\theta = \dfrac{\pi}{6}$, les points A, B et C.

b. Vérifier que pour tout θ de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, les points A, B et C appartiennent à l'ensemble E.

c. Montrer que pour tout réel θ de $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, OABC est un losange.

d. Pour quelle valeur de θ le quadrilatère OABC est un carré ?

19 Soit θ un réel de $[0, 2\pi[$.

1. a. Vérifier que $\left(e^{i\theta}-i\right)^2=-1+e^{2i\theta}-2ie^{i\theta}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$z^2-2iz+2ie^{i\theta}-e^{2i\theta}=0$.

2. On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $e^{i\theta}$ et $2i-e^{i\theta}$ dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct.
a. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}_1$ décrit par le point M_1 lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$.

b. Calculer l'affixe du milieu I du segment $\left[M_1M_2\right]$.

c. Déterminer et construire l'ensemble $\mathscr{C}_2$ décrit par le point M_2 lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$.

3. a. Montrer que $\left(M_1M_2\right)^2=8(1-\sin\theta)$.

b. Déduire la valeur de θ pour laquelle M_1M_2 est maximale.

20 I. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation
$z^2+i\sqrt{3}z-i=0$.

II. Soit θ un réel de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation
$(E): z^2+(2i\sin\theta)z-2i\cos\theta=0$.

1. a. Vérifier que $(\cos\theta+i)^2=-\sin^2\theta+2i\cos\theta$.

b. Résoudre l'équation (E).
2. Le plan étant rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$, on désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a=i$, $b=\cos\theta+(1-\sin\theta)i$ et $c=-\cos\theta-(1+\sin\theta)i$.
a. Déterminer θ pour que A, B et C soient alignés.
b. Déterminer θ pour que B et C appartiennent à un cercle de centre O.
Quel est le rayon de ce cercle ?

21 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$(E): z^2-2(1+i)z+\dfrac{1}{2}+i=0$.

2. Soit θ un réel de $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$. On considère l'équation

$E_\theta: 2z^2-(1+2\cos\theta+2i)z+\cos\theta+i=0$.
a. Montrer que l'équation E_θ admet une racine réelle que l'on calculera.
Calculer l'autre racine en fonction de θ.
On considère les points A et M d'affixes respectives $\dfrac{1}{2}$ et $\cos\theta+i$.
b. Déterminer et construire l'ensemble E des points M lorsque θ varie dans l'intervalle $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

c. Calculer AM en fonction de θ et en déduire la valeur de θ pour laquelle la distance AM est minimale.

22 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous.

$z^4=1$ et $\left(\dfrac{z-i}{z+i}\right)^4=1$.

23 1. Déterminer, sous forme trigonométrique, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation
$(E): z^3=4\sqrt{2}(-1+i)$.
2. En utilisant les racines cubiques de l'unité, écrire les solutions de (E) sous forme algébrique.
3. Déduire des questions précédentes les valeurs de $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$.

24 Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^6=-1$.

Mettre le polynôme x^6+1 sous la forme d'un produit de trois polynômes du second degré à coefficients réels.

Chapitre 3

Produit scalaire – Produit vectoriel dans l'espace

Le produit scalaire apparaît assez tard dans l'histoire des mathématiques.
On en trouve trace chez Hamilton en 1843 lorsqu'il crée le corps des quaternions.
Peano le définit ensuite associé à un calcul d'aire ou de déterminant.
Roberto Marcolongo et Cesare Burali-Forti le définissent à l'aide du cosinus d'un angle et lui donne le nom de produit intérieur ou produit scalaire. C'est sous cette forme qu'il apparaît par la suite.
Sa qualité de forme bilinéaire symétrique sera ensuite exploitée en algèbre et, de propriété, deviendra définition.

La définition utilisée actuellement du produit vectoriel est apparu en 1881 dans un manuel d'analyse vectorielle écrit par Josiah Willard Gibbs pour ses étudiants en physique. Les travaux de Hermann Grassmann et William Hamilton sont à l'origine du produit vectoriel défini par Gibbs.

(M-J. Crowe, A history of vector analysis,
The Evolution of the Idea of a Vectorial System,
1994)

Chapitre 3

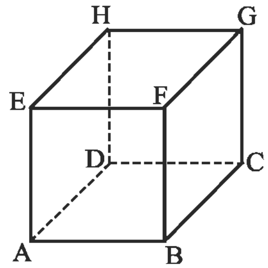
Produit scalaire – Produit vectoriel dans l'espace

I. Rappels

I. 1 Déterminants

Activité 1

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.



Soit $\mathscr{B}$ une base de l'espace.

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}a'\\b'\\c'\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}a''\\b''\\c''\end{pmatrix}$ trois vecteurs de l'espace.

Le déterminant de $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ dans la base $\mathscr{B}$ est le réel $a(b'c''-c'b'')-b(a'c''-c'a'')+c(a'b''-b'a'')$.

On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ et on note $\mathscr{B}$ la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Déterminer les coordonnées de chacun des sommets du cube.

Calculer $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AH})$, $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AG})$, $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC})$.

Activité 2

L'espace est muni d'un repère $(O,\vec{u},\vec{v},\vec{w})$ et $\mathscr{B}$ désigne la base $(\vec{u},\vec{v},\vec{w})$.

On considère les points $A(1, 2, 0)$, $B(0, -1, 1)$, $C(-1, 0, 2)$, $D(0, 1, 0)$ et $E(1, 2, -2)$.

1. Les points A, B, C et D sont-ils coplanaires ?
2. Les points B, C , D et E sont-ils coplanaires ?

Soit $\mathscr{B}$ une base de l'espace.
Les points A, B, C et D sont coplanaires, si et seulement si, le déterminant de $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD})$ dans la base $\mathscr{B}$ est nul.

I. 2. Produit scalaire dans l'espace

Activité 3

Soit ABCDEFGH un cube d'arête a.

1. Exprimer à l'aide de a les produits scalaires ci-dessous.
   $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DG}$, $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DH}$, $\overrightarrow{AF}.\overrightarrow{DE}$.
2. Exprimer à l'aide de a les distances AC, AF, DH et DF.

* Soit A, B et C des points de l'espace.
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le réel défini par

- $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=0$, si $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ ou $\overrightarrow{AC}=\vec{0}$.
- $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}=AB.AC.\cos\widehat{BAC}$, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont non nuls.

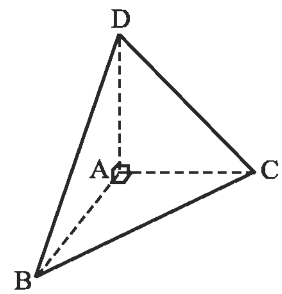
* $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AB}=\|\overrightarrow{AB}\|^2=AB^2$.

Propriétés (Rappel)

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et tous réels α et β

- $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$.
- $\vec{u}.\left(\vec{v}+\vec{w}\right) = \vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.
- $\left(\alpha\vec{u}\right).\vec{v} = \vec{u}.\left(\alpha\vec{v}\right) = \alpha\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$.
- $\left(\alpha\vec{u}\right).\left(\beta\vec{v}\right) = \alpha\beta\left(\vec{u}.\vec{v}\right)$.

Activité 4



Dans la figure ci-contre, ABCD est un tétraèdre tel que les triangles ABC, ABD et ACD sont rectangles et isocèles en A.
On suppose de plus que $AB = AC = AD = 1$.

1. Montrer que le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est orthonormé.
2. Déterminer les coordonnées du centre de gravité P du triangle ABC.
3. On désigne par G le centre de gravité du tétraèdre ABCD, c'est-à-dire le point tel que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$.
   Déterminer les coordonnées de G.
4. Montrer que $\overrightarrow{DG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{DP}$.

On dit que le repère $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ est orthonormé si,
$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{i}.\vec{k} = \vec{j}.\vec{k} = 0$.

Activité 5

Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1,
I et J les milieux respectifs de [FB] et [CD] et K le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABH.
Utiliser un repère orthonormé adéquat pour répondre aux questions ci-dessous.

1. Calculer $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{IJ}$.
2. a. Calculer $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KC}$.
   b. En déduire la mesure en radian de l'angle $\widehat{AKC}$.

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace.

- Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\\z'\end{pmatrix}$,

$\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'+zz'$ et $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

- Pour tous points $M(x,y,z)$ et $M'(x',y',z')$,

$MM' = \sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}$.

II. Produit vectoriel dans l'espace

II.1. Orientation de l'espace et d'un plan de l'espace

Orientation de l'espace

Soit $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère de l'espace.

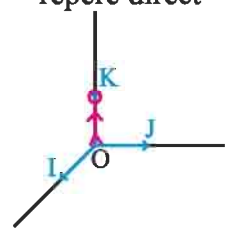
Considérons les points de l'espace I , J et K tels que $\overrightarrow{OI}=\vec{i}$, $\overrightarrow{OJ}=\vec{j}$ et $\overrightarrow{OK}=\vec{k}$.

Un observateur d'Ampère pour ce repère est un personnage placé le long de (OK), les pieds en O et qui regarde dans la direction de (OI).

Le plan (OIK) partage l'espace en deux demi-espaces, l'un à gauche de l'observateur et l'autre est à sa droite.

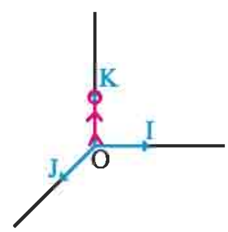
- Si (OJ) est dans le demi-espace placé à gauche de l'observateur, on dit que le repère est direct.

repère direct



- Si (OJ) est dans le demi-espace placé à droite de l'observateur, on dit que le repère est indirect.

repère indirect



Orienter l'espace c'est choisir l'un de ces repères.

On dit que l'espace est orienté dans le sens direct s'il est muni d'un repère direct.

On dit que l'espace est orienté dans le sens indirect s'il est muni d'un repère indirect.

Nous admettrons qu'étant donné une base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$, le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ a toujours la même orientation quelque soit le point O de l'espace.

- On dit que la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est directe, dans le cas où le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est direct.
- On dit que la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est indirecte, dans le cas où le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est indirect.
- Chaque permutation de deux vecteurs d'une base change l'orientation de cette base.
- Chaque permutation circulaire des trois vecteurs conserve l'orientation de la base.
- En remplaçant un vecteur d'une base par son opposé, on change l'orientation de cette base.

Activité 1

L'espace est muni d'un repère direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Parmi les bases ci-dessous préciser celles qui sont directes et celles qui sont indirectes.

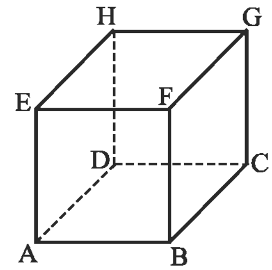
$\left(\vec{i},\vec{k},\vec{j}\right)$, $\left(\vec{j},\vec{k},\vec{i}\right)$, $\left(\vec{i},-\vec{j},\vec{k}\right)$, $\left(-\vec{i},\vec{j},-\vec{k}\right)$, $\left(\vec{k},\vec{i},-\vec{j}\right)$, $\left(-\vec{i},-\vec{k},-\vec{j}\right)$.

Exercice résolu 1

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH.
On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

Dire pour chacune des bases ci-dessous si elle est directe ou indirecte.

$\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)$;$\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{HD},\overrightarrow{FG}\right)$; $\left(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC}\right)$.



Solution

1. On sait que la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ est directe.

La base $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)$ est obtenue à partir de la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ par permutation des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$. On en déduit que la base $\left(\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB}\right)$ est indirecte.

2. Il est clair que $\left(\overrightarrow{EF},\overrightarrow{HD},\overrightarrow{FG}\right)=\left(\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)$.

La base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)$ est obtenue par une permutation des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ dans la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$. On en déduit que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)$ est indirecte, puis que $\left(\overrightarrow{AB}, -\overrightarrow{AE},\overrightarrow{AD}\right)$ est directe.

3. Il est clair que $\left(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{BC}\right)=\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right)$. On en déduit que la base $\left(\overrightarrow{CG},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DC}\right)$ obtenue à partir de la base $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ par permutation des trois vecteurs, est directe.

Orientation d'un plan de l'espace.

Soit P un plan de l'espace orienté et O un point de P.
On considère la perpendiculaire Δ à P en O, un point C de Δ distinct de O, deux points A et B de P tels que O, A et B ne soient pas alignés.

- Le repère cartésien $\left(O, \overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ de P est dit direct si $\left(O, \overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ est un repère cartésien direct de l'espace.
- Le repère cartésien $\left(O, \overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)$ de P est dit indirect si $\left(O, \overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OC}\right)$ est un repère cartésien indirect de l'espace.

II. 2 Produit vectoriel

Théorème

Soit P un plan.

Pour toute base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ de P et tout réel $d>0$, il existe un unique vecteur $\vec{k}$ vérifiant $\left\|\vec{k}\right\|=d$, $\vec{k}.\vec{i}=\vec{k}.\vec{j}=0$ et la base $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ est directe.

Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On appelle produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ et on note $\vec{u}\wedge\vec{v}$, le vecteur défini comme suit.

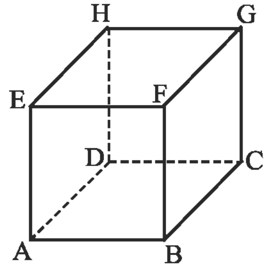
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\begin{cases}\vec{u}\wedge\vec{v} \text{ orthogonal à } \vec{u} \text{ et à } \vec{v},\\ \left(\vec{u}\,,\,\vec{v}\,,\,\vec{u}\wedge\vec{v}\right) \text{ est une base directe,}\\ \left\|\vec{u}\wedge\vec{v}\right\|=\left\|\vec{u}\right\|.\left\|\vec{v}\right\|.\sin\alpha,\end{cases}$

où α est la mesure en radians de l'angle géométrique déterminé par deux représentants de même origine de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Exercice résolu 2

L'espace est orienté dans le sens direct.
La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.

Déterminer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{GH}$.



Solution

- Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ et vérifie les deux conditions : la base $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right)$ est directe et $\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|=AB.AD\sin\left(\widehat{BAD}\right)$.

On en déduit que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$.

- $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AE}$.
- $\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{EF}=\vec{0}$.
- $\overrightarrow{EF}\wedge\overrightarrow{GH}=\vec{0}$ car les vecteurs sont colinéaires.

Théorème

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$,

- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, si et seulement si, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -\left(\vec{v} \wedge \vec{u}\right)$.
- $a\vec{u} \wedge b\vec{v} = ab\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right)$, pour tous réels a et b.
- $\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$.
- $\vec{u} \wedge \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$.

Activité 2

Soit A, B et C trois points non alignés de l'espace orienté.

Quel est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

Activité 3

Soit A, B, C et D quatre points de l'espace orienté.

Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

Activité 4

Soit A et B deux points distincts de l'espace orienté et I le milieu du segment $[AB]$.

Déterminer l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) \wedge \left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right) = \vec{0}$.

Expression analytique du produit vectoriel dans une base orthonormée directe

Théorème

L'espace est muni d'une base orthonormée directe $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, $\vec{u} \wedge \vec{v} = (bc' - cb')\vec{i} + (ca' - ac')\vec{j} + (ab' - ba')\vec{k}$.

Activité 5

L'espace est muni d'une repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives $A(-1 , 2 , 1)$, $B(1 , -6 , -1)$, $C(2, 2, 2)$ et $I(0 , 1 , -1)$.

Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AI} \wedge \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AI}\right)$; $2\overrightarrow{AI} \wedge \left(-3\overrightarrow{BC}\right)$.

Activité 6

Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormé direct de l'espace.

On considère quatre points $A(1,0,-1)$, $B(1,-2,1)$ et $C(0,-1,2)$ et $D(3,1,0)$

1. Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2. Donner une valeur approchée, en radian, à 0.1 près de la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.
3. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

Activité 7 (distance d'un point à une droite)

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul, A un point de l'espace et D la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$.

On considère un point M de l'espace n'appartenant pas à la droite D et H le projeté orthogonal de M sur la droite D.

1. Montrer que $\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{MH} \wedge \vec{u}$.
2. En déduire que $MH = \dfrac{\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

Définition

On appelle distance d'un point M à une droite D, la distance MH, où H est le projeté orthogonal de M sur D . Cette distance est notée $d(M, D)$.

Théorème

Soit D une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et A un point de D .

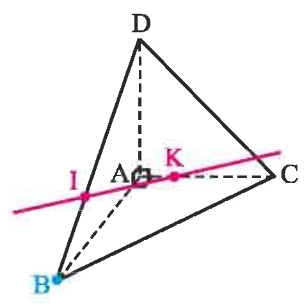
La distance d'un point M de l'espace à la droite D est le réel $d(M, D) = \dfrac{\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\right\|}{\left\|\vec{u}\right\|}$.

Activité 8

Dans la figure ci-contre, ABCD est un tétraèdre tel que les triangles ABC, ABD et ACD sont rectangles et tels que $AB = AC = AD = 1$.

On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$. Soit I le point de (BD) tel que $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$ et K le point (AC) tel que $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$.

Calculer la distance de B à la droite (IK).



II. 3 Aires et volumes

Activité 9

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace.

Montrer que $\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w} = \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right).\vec{u} = \left(\vec{w} \wedge \vec{u}\right).\vec{v} = \det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$.

Propriété

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace,

$\left(\vec{u} \wedge \vec{v}\right).\vec{w} = \left(\vec{v} \wedge \vec{w}\right).\vec{u} = \left(\vec{w} \wedge \vec{u}\right).\vec{v} = \det\left(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\right)$.

Activité 10

Soit ABCD un parallélogramme .

1. Montrer que l'aire de ABCD est égale à $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$.
2. En déduire l'aire du triangle ABD.

Théorème

- L'aire d'un parallélogramme ABCD est égale à $\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$.
- L'aire d'un triangle ABD est égale à $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|$.

Activité 11

Soit ABCDEFGH un cube de centre O tel que le repère $R = \left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ soit direct.

On désigne par I, J, K et L les centres respectifs des faces ABFE , BCGF , CDHG et ADHE.

1. Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que IJKL est un parallélogramme de centre O.
3. a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IL}$
   b. En déduire l'aire du parallélogramme IJKL.
4. Calculer le volume de la pyramide AIJKL.

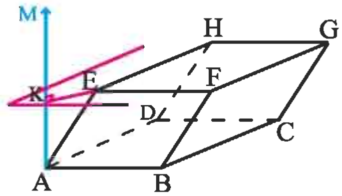
Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.

Le volume d'un parallélépipède ABCDEFGH est égal à

$\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right| = \left|\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)\right|$.

Démonstration



Soit M le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}$ et K le projeté orthogonal de E sur la droite (AM).

On sait que le volume $\mathcal{V}$ du parallélépipède ABCDEFGH est égal au produit de l'aire du parallélogramme ABCD et de la distance AK,

D'où $\mathcal{V} = \|\overrightarrow{AM}\|.\|\overrightarrow{AK}\|$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AK}$ étant colinéaires, on en déduit que $|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AK}| = \|\overrightarrow{AM}\|.\|\overrightarrow{AK}\|$.

Par suite, $\mathcal{V} = \left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AK}\right| = \left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right).\overrightarrow{AE}\right|$.

Le théorème en découle.

Activité 12

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

On considère les points $A(1,0,0)$, $B(0,3,0)$, $C(-1,3,0)$, $D(2,2,2)$, $E(3,2,2)$, $F(2,5,2)$ et $G(1,5,2)$.

1. Montrer que OABCDEFG est un parallélépipède.
2. Calculer le volume du parallélépipède OABCDEFG.

Activité 13

L'espace est orienté dans le sens direct.

Soit ABCD un tétraèdre et H le projeté orthogonal de A sur (BCD).

1. Montrer que $\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BA} = \left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{HA}$.
2. En déduire que $\left|\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BA}\right| = \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\|.\|\overrightarrow{HA}\|$.
3. Montrer alors que le volume du tétraèdre ABCD est égal à $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BA}\right|$.

Théorème

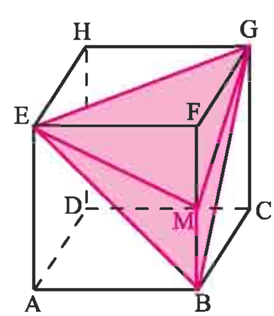
L'espace est muni d'un repère orthonormé direct.

Le volume d'un tétraèdre ABCD est égal à $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\right).\overrightarrow{BA}\right| = \frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}\right)\right|$.

Exercice résolu 3

L'espace est orienté dans le sens direct.

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête a et M est le milieu du segment $[BF]$.



1. Déterminer le volume du tétraèdre MEBG.
2. En déduire le volume du solide S formé du cube privé du tétraèdre.

Solution

On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$.

1. On sait que le volume du tétraèdre MEBG est égal à $\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BM}\right)\right|$.

Dans le repère $\left(A, \frac{1}{a}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AD}, \frac{1}{a}\overrightarrow{AE}\right)$, les points B, E , M et G ont pour coordonnées respectives $(a,0,0)$, $(0,0,a)$, $\left(a,0,\frac{a}{2}\right)$ et (a,a,a).

Le calcul donne $\frac{1}{6}\left|\det\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BG}, \overrightarrow{BM}\right)\right| = \frac{1}{12}a^3$.

2. On en déduit que le volume de S est égal à $\frac{11}{12}a^3$.

Activité 14

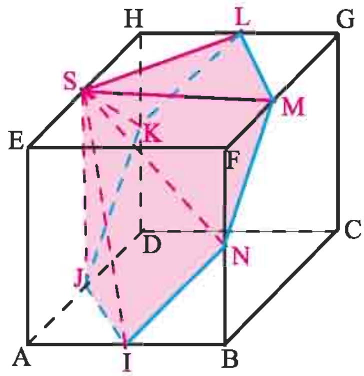
L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OK}\right)$.

On considère les points $R(1,1,0)$, $M(1,1,1)$, $N(0,1,1)$ et $L(1,0,1)$.

1. Montrer que OIRJKLMN est un cube.
2. On note A le milieu de [I L] et B le point défini par $\overrightarrow{KB} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KN}$.
   a. Déterminer les coordonnées des points A et B.
   b. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB}$
   c. En déduire l'aire du triangle OAB.
3. Déterminer le volume du tétraèdre OABK.

Activité 15

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube. Les points I, J, K, L, M , N et S sont les milieux respectifs des segments [AB], [AD], [DH], [HG], [FG], [FB] et [EH].
Déterminer le volume de la pyramide SIJKLMN.



QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{v}=-2\vec{u}$ et $\|\vec{v}\|=2$.

   Le réel $\vec{u}.\vec{v}$ est égal à

☐ -2. ☐ 2. ☐ 4.

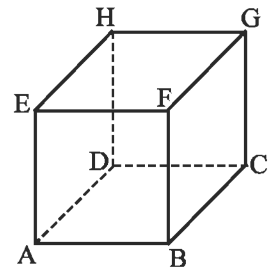
2. Soit A, B et C trois points non alignés. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est

☐ Normal au plan ABC. ☐ directeur du plan ABC. ☐ directeur à la droite (BC).

3. Si ABCD est un parallélogramme alors

☐ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}$. ☐ $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|=\|\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BC}\|$. ☐ $\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\|=\frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|$.

4. Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.



   a. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est égal à

   ☐ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}$. ☐ $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{DC}$. ☐ $\sqrt{2}\,\overrightarrow{AE}$.

   b. Le vecteur $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{EG}$ est égal à

   ☐ $\vec{0}$. ☐ $\overrightarrow{BD}$. ☐ $\overrightarrow{BF}$.

   c. Le réel $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{FH}$ est égal à

   ☐ 2. ☐ 0. ☐ $\sqrt{2}$.

   d. Le volume du tétraèdre FBEG est égal à

   ☐ $\frac{1}{6}$. ☐ $\frac{1}{3}$. ☐ $\frac{1}{2}$.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Soit A, B, C et D quatre points non coplanaires de l'espace.

   Si $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AD}=0$ alors la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC).

2. Pour tous vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}\wedge\vec{v}\}$ est liée.

3. Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs.

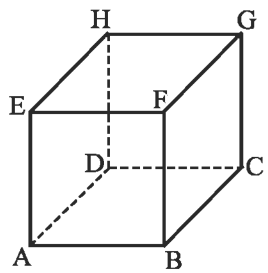
   a. Si $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{v}$ alors $\vec{v}=\vec{0}$.

   b. Si $\vec{u}.\vec{v}=\vec{u}.\vec{w}$ alors $\vec{v}=\vec{w}$.

   c. Si $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{u}\wedge\vec{w}$ alors $\vec{v}=\vec{w}$.

Dans tous les exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

1 Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.



En utilisant un repère orthonormé adéquat, calculer
$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FH}$; $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{HC}$; $\overrightarrow{EG}.\overrightarrow{GB}$; $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HB}$.

2 Soit ABCD un tétraèdre régulier de côté 1.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$.
2. En déduire $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD}$.
3. En déduire que deux arêtes opposées sont orthogonales.

3 Dans chacun des cas suivants, dire si le repère proposé est orthogonal.

a. $\left(O, \vec{j}+\vec{k}, \vec{k}-\vec{j}, \vec{i}\right)$.

b. $\left(O, \vec{i}-\vec{j}, \vec{j}-\vec{k}, \vec{k}-\vec{i}\right)$.

4 Soit ABC un triangle.

1. En écrivant $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}$, montrer que

$\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

2. Montrer que $\overrightarrow{CA}\wedge\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
3. En déduire que

$$\frac{AB}{\sin\hat{C}}=\frac{AC}{\sin\hat{B}}=\frac{BC}{\sin\hat{A}}.$$

5 Dans chacun des cas suivants, calculer $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

a. $\vec{u}=\vec{j}-2\vec{k}$ et $\vec{v}=\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

b. $\vec{u}=\vec{i}-2\vec{j}$ et $\vec{v}=\vec{i}+\vec{k}$.

c. $\vec{u}=\vec{i}+\frac{2}{3}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$ et $\vec{v}=\frac{1}{3}\vec{i}-\frac{4}{9}\vec{j}+\frac{1}{2}\vec{k}$.

6 Calculer $\vec{j}\wedge\vec{k}$; $\vec{k}\wedge\vec{i}$; $\vec{i}\wedge\left(-\vec{j}\right)$; $2\vec{j}\wedge-3\vec{k}$.

7 Soit $\vec{u}=2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ et $\vec{w}=3\vec{i}-4\vec{j}-2\vec{k}$.

1. Montrer que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont orthogonaux.
2. Trouver un vecteur $\vec{v}$ vérifiant $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$.
Trouver tous les vecteurs $\vec{v}$ vérifiant $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$.
3. Trouver un vecteur $\vec{v}$ vérifiant $\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{w}$ et $\vec{u}.\vec{v}=1$.

8 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs vérifiant $\|\vec{u}\|=1$, $\|\vec{v}\|=4$ et $\vec{u}.\vec{v}=2$. Soit $\vec{w}=2\vec{u}\wedge\vec{v}-3\vec{v}$.

Calculer $\vec{u}.\vec{w}$, $\vec{v}.\vec{w}$ et $\|\vec{w}\|$.

9 Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs unitaires est orthogonaux et soit $\vec{w}$ un vecteur vérifiant $\vec{u}=\vec{w}+\vec{w}\wedge\vec{v}$.

1. Montrer que $\vec{w}$ est orthogonal à $\vec{v}$ et que sa norme vaut $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
2. Montrer que $\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{u}-\frac{1}{2}\vec{u}\wedge\vec{v}$.

10 Trouver dans chacun des cas ci-dessous un vecteur non nul $\vec{w}$ orthogonal aux deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

a. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$.

b. $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}$.

c. $\vec{u}\begin{pmatrix}1+\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\\1-\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2-\sqrt{2}\\3-2\sqrt{2}\end{pmatrix}$.

11 On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$. Calculer les composantes des vecteurs $\left(\vec{u}\wedge\vec{v}\right)\wedge\vec{w}$ et $\vec{u}\wedge\left(\vec{v}\wedge\vec{w}\right)$.

Que remarque-t-on ?

12 Soit les points $A(1, 1, 1)$, $B(2, 1, 0)$, $C(-1, 2, 2)$, $D(3, 0, 0)$ et $E(-4, 3, 4)$.

1. Montrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD} \wedge \overrightarrow{AE}$ sont colinéaires.
2. En déduire que les points A, B, C, D et E sont coplanaires.

13 Déterminer dans chacun des cas ci-dessous la distance du point A à la droite (BC).

$A(1,1,1)$; $B(-1,0,1)$ et $C(0,0,1)$.
$A(-1,2,0)$; $B(-1,5,0)$ et $C(-3,7,-3)$.

$A(1,-1,2)$; $B(1,0,1)$ et $C(0,1,2)$.

14 Soit la droite $D: \begin{cases} x = 1-2t \\ y = 3+2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1-t \end{cases}$ et le point $A(0,3,-2)$.

1. a. Déterminer la distance de A à un point M de D.
b. Pour quelle valeur de t cette distance est-elle minimale ?
c. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de A sur D.

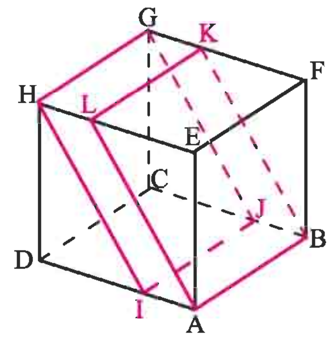
15 Soit les points $A(0, 0, 3)$, $B(1, 1, 0)$, $C(3, 0, 0)$ et $D(0, 3, 0)$.

1. Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
2. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
3. Montrer que le triangle ACD est équilatéral.
Soit H le projeté orthogonal de B sur le plan (ACD).
Calculer BH.

16 Soit ABCDEFGH un cube de centre O et d'arête 1. On désigne par I le milieu du segment $[AB]$,
J et K les centres respectifs des faces ABFE et ABCD.
1. Montrer que O, I, J et K sont coplanaires.
2. Quelle est la nature du quadrilatère OKIJ ?
3. Quel est le volume de la pyramide BIJOK ?

17 Soit ABCDEFGH un cube d'arête 1.

Soit I, J, K et L les points définis par $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$,
$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{HL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HE}$ et $\overrightarrow{GK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GF}$.



1. Montrer que ABKLIJGH est un parallélépipède.
2. On munit l'espace du repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

a. Déterminer les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AL}$.
b. En déduire le volume du parallélépipède ABKLIJGH.

18 Soit ABCDEFGH un cube tel que le repère $(D, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DA})$ soit orthonormé direct.
On désigne par K le centre du carré ADHE et J le milieu de [BG].
Donner un représentant de chacun des vecteurs
1. $\overrightarrow{FE} \wedge \overrightarrow{FG}$, $\overrightarrow{DC} \wedge \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{DC}$.
2. Comparer les vecteurs $\overrightarrow{DB} \wedge \overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{CE}$.
3. Donner un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AJ}$.

19 Soit ABCDEFGH un cube tel que le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ soit orthonormé direct.
On désigne par I le milieu de [EF] et K le centre du carré ADHE.
1. a. Vérifier que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$.
   b. En déduire l'aire du triangle IGA.
2. Calculer le volume du tétraèdre ABIG.

Chapitre 4

Equations de droites, de plans et de sphères

La géométrie analytique est une approche de la géométrie dans laquelle on représente les objets par des équations ou inéquations.
Le plan ou l'espace est nécessairement muni d'un repère.
La géométrie analytique permet à l'inverse de représenter des fonctions mathématiques sous la forme de courbes, de graphiques. Elle est donc fondamentale pour la physique et l'infographie.

(Wikipedia)

Chapitre 4

Equations de droites, de plans et de sphères

Dans tout le chapitre, l'espace est orienté dans le sens direct.

I. Equations d'une droite et d'un plan.

Activité 1

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On donne les points $A(0,-1,1)$, $B(2,1,3)$

et la droite

$$\Delta : \begin{cases} x=\alpha \\ y=-2+2\alpha \, ; \, \alpha \in \mathbb{R}. \\ z=1+\alpha \end{cases}$$

> • Soit A un point, $\vec{u}$ un vecteur non nul et D la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$. Alors $D\left(A, \vec{u}\right)=\left\{M \, ; \, \overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} \text{ où } \alpha \text{ est un réel}\right\}$.
>
> • Deux droites de l'espace sont parallèles si elles ont des vecteurs directeurs colinéaires.

1. Déterminer un point et un vecteur directeur de Δ.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ' passant par A et parallèle à Δ.
3. a. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
   b. Montrer que les droites (AB) et Δ sont sécantes en un point I que l'on précisera.

Activité 2

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-1\,,2\,,1)$, $B(1\,,-6\,,-1)$ et $C(2,2,2)$.

> L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
>
> • Soit A un point, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires et P le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Alors $P\left(A, \vec{u},\vec{v}\right)=\left\{M \, ; \, \det\left(\overrightarrow{AM}, \vec{u},\vec{v}\right)=0\right\}$.
>
> • Soit A et B deux points et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires. Alors les plans $P\left(A, \vec{u},\vec{v}\right)$ et $P\left(B, \vec{u},\vec{v}\right)$ sont parallèles.

1. a. Vérifier que les points A, B et C sont non alignés.
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par O et parallèle à (ABC).
3. Soit le point $D(0, 0, 1)$.

Déterminer l'intersection de la droite (OD) avec chacun des plans (ABC) et Q.

Activité 3

L'espace est muni d'un repère $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(-1\ ,2\ ,1)$ et $B(-1, 0, 1)$.

1. Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans $\left(O,\vec{i},\vec{k}\right)$ et $\left(O,\vec{j},\vec{k}\right)$.
2. Déterminer une équation cartésienne de chacun des plans $\left(A,\vec{i},\vec{k}\right)$ et $\left(B,\vec{j},\vec{k}\right)$.

II. Vecteur normal à un plan

Activité 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit deux points $A(-5,10,2)$ et $B(-2,1,2)$

1. Déterminer une équation du plan P passant par le point $A(-5,10,2)$ et de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$.
2. Déterminer l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $\overrightarrow{BM}.\vec{n}=0$.

> L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. Si P est un plan d'équation $ax+by+cz+d=0$, alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ est normal à P.
>
> Soit $\vec{n}$ un vecteur non nul . l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n}=0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$.

Exercice résolu 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit les points $A(1,1,1)$, $B(1,2,3)$ et $C(0,0,1)$.

1. Vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Justifier que $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).
3. a. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
   b. En déduire une équation cartésienne de (ABC).
4. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par O et perpendiculaire au plan (ABC).

> Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, si et seulement si, $\vec{u}.\vec{n}=\vec{v}.\vec{n}=0$.
>
> Si un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan P, alors toute droite de vecteur directeur $\vec{n}$ est perpendiculaire à P.

Solution

1. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix}$ n'étant pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ qui sont des vecteurs directeurs non colinéaires du plan (ABC). On en déduit que le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).

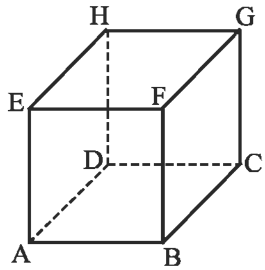
3. Le calcul donne $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}$.

Par suite le plan (ABC) a une équation de la forme $2x-2y+z+d=0$. En remarquant que les coordonnées du point C vérifient l'équation précédente, on en déduit que le plan (ABC) a pour équation $2x-2y+z-1=0$.

4. La droite passant par O et perpendiculaire au plan (ABC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

On en déduit que $\begin{cases}x=2\alpha\\y=-2\alpha\ ;\ \alpha\in\mathbb{R}\\z=\alpha\end{cases}$ est une représentation paramétrique de cette droite.

Activité 2



La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1.
On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH).
2. En déduire une représentation paramétrique de la droite perpendiculaire à (AFH) passant par C.
3. Calculer la distance de C au plan (AFH).
4. Déterminer le volume du tétraèdre CAFH.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.
La distance d'un point $M(x_0, y_0, z_0)$ au plan P d'équation $ax+by+cz+d=0$ est le réel $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

III. Position relative de plans

Activité 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit P, Q et R les plans d'équations respectives $P: 4x-2y+2z+3=0$, $Q: -2x+y-z+6=0$ et $R: x-2z+1=0$.

Deux plans sont parallèles, si et seulement si, leurs vecteurs normaux sont colinéaires.
Deux plans sont perpendiculaires, si et seulement si, leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

1. Montrer que les plans P et Q sont parallèles.
2. a. Montrer que les plans P et R sont perpendiculaires.
   b. Déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection.
3. Que peut-on dire des plans Q et R ?

Exercice résolu 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(2, 0, -1)$, $B(1, -1, 0)$ et $C(0, 1, 4)$.

1. a. Vérifier que les points A, B et C sont non alignés.
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan Q passant par O et parallèle au plan (ABC).
3. a. Déterminer une équation du plan R passant par A et perpendiculaire à (AC).
   b. Montrer que R est perpendiculaire au plan (ABC).
4. Déterminer l'intersection Δ de (ABC) et R.

Solution

1. a. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\1\\5\end{pmatrix}$ n'étant pas colinéaires, les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. Le calcul donne $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-6\\3\\-3\end{pmatrix}$.

Par suite, le plan (ABC) a une équation de la forme $6x-3y+3z+d=0$. En remarquant que les coordonnées du point B vérifient l'équation précédente, on en déduit que le plan (ABC) a pour équation $2x-y+z-3=0$.

2. Les plans Q et (ABC) étant parallèles, ils ont des vecteurs normaux colinéaires.
On en déduit que Q a une équation de la forme $2x-y+z+d=0$. En remarquant que les coordonnées du point O vérifient l'équation précédente, on en déduit que le plan Q a pour équation $2x-y+z=0$.

3. a. Le plan R a pour vecteur normal $\overrightarrow{AC}$. On en déduit que le plan R a une équation de la forme $2x-y-5z+d=0$. Le point A étant un point de R, il en résulte que R a pour équation $2x-y-5z-9=0$.

b. Les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux. De plus, ce sont des vecteurs normaux respectifs des plans R et (ABC). Ce qui prouve que les plans R et (ABC) sont perpendiculaires.

4. La droite Δ a pour système d'équations cartésiennes $\begin{cases} 2x-y+z-3=0 \\ 2x-y-5z-9=0 \end{cases}$.

Le calcul donne $\Delta : \begin{cases} x=\alpha \\ y=-4+2\alpha \;;\; \alpha\in\mathbb{R} \\ z=-1 \end{cases}$.

IV. La Sphère

Activité 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1. Soit le point $I(1, 0, 2)$ et S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ vérifiant
   $x^2+y^2+z^2-2x-4z+4=0$.
   Montrer que M appartient à S, si et seulement si, $IM=1$.
2. Les points $A(1,1,2)$ et $B(1,-1,4)$ sont-ils des points de S ?

Définition

Soit R un réel strictement positif et I un point de l'espace. On appelle sphère de centre I et de rayon R, l'ensemble des point M de l'espace tels que $IM=R$.

Conséquence

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit le point $I(x_0,y_0,z_0)$ et R un réel strictement positif.

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$ est la sphère de centre I et de rayon R.

Activité 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

Soit deux points $A(x_0,y_0,z_0)$ et $B(x_1,y_1,z_1)$. Montrer que l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère de centre le milieu I de $[AB]$ et de diamètre $[AB]$.

Cette activité démontre le théorème suivant.

Théorème

Soit A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=0$ est la sphère de diamètre $[AB]$.

Activité 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit deux points $A(-1,1,0)$ et $B(0,1,1)$.

Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA=2MB$.

Activité 4

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Déterminer l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tels que

a. $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z+1=0$.

b. $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z+4=0$.

c. $x^2+y^2+z^2-2x+2y+2z+3=0$.

Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

L'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$ est soit une sphère, soit un point, soit le vide.

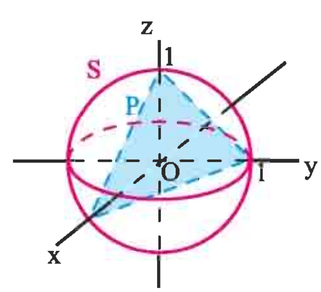
V. Intersection d'une sphère et d'un plan.

Activité 1

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit la sphère S de centre O et de rayon 1.

1. Soit P le plan d'équation $P: x+y+z-1=0$.
   Calculer la distance du point O au plan P.
   Que peut-on dire de la position relative de S et P ?
2. Reprendre la question précédente pour chacun des plans Q et R d'équations respectives
   $Q: x+y+z+2=0$ et $R: x+y+z+\sqrt{3}=0$.



Théorème

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit S une sphère de centre A et de rayon R. Soit P un plan, h la distance de A à P et H le projeté orthogonal de A sur P.
L'intersection de S et P est
- vide si $h > R$,
- réduite au singleton $\{H\}$ si $h = R$,
- le cercle de rayon $\sqrt{R^2 - h^2}$ et de centre H si $h < R$.

Activité 2

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

Soit la sphère $S = \{M(x,y,z)\,;\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x = 1\}$.

Etudier la position relative de S et de chacun des plans P, Q et R d'équations respectives $P: z = 0$; $Q: x + y = 0$ et $R: x = 1$.

Exercice résolu 3

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1. Soit la sphère $S = \{M(x,y,z)\,;\ x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z = 3\}$.
   Préciser le rayon R et les coordonnées du centre I de la sphère S.
2. a. Vérifier que $A(-3,1,1)$ est un point de S.
   b. Déterminer une équation cartésienne du plan P tangent à S en A.
3. Soit l'ensemble $Q = \{M(x,y,z)\ ;\ MA = MI\}$.

a. Montrer que Q est un plan dont on précisera une équation cartésienne.
b. Montrer que l'intersection du plan Q et de la sphère S est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
c. Déterminer une équation cartésienne de la sphère S' tangente à P et Q respectivement en A et K.

4. Soit R le plan d'équation $2x + y - 2z - 6.5 = 0$.

Montrer que l'intersection du plan R et de la sphère S est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Solution

1. On vérifie facilement qu'un point $M(x,y,z)$ appartient à S , si et seulement si,

$(x+1)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9$. Donc S est la sphère de centre $I(-1,2,-1)$ et de rayon 3.

2. a. Il suffit de s'assurer que les coordonnées de A vérifient l'équation de la sphère. Ce qui est bien le cas.

b. Le plan P contient A et le vecteur $\overrightarrow{IA}\begin{pmatrix}-2\\-1\\2\end{pmatrix}$ est normal à P.

On en déduit que P a pour équation $-2x-y+2z-7=0$.

3. a. Le plan Q est le plan médiateur du segment $[IA]$ et le vecteur $\overrightarrow{IA}$ est normal à Q.

En remarquant que le milieu $K(-2,\ 1.5,\ 0)$ de $[IA]$ est un point de Q, on en déduit que le plan Q est d'équation $-2x-y+2z-2.5=0$.

b. La distance de I à Q est le réel $IK=1.5$, qui est strictement inférieur au rayon de la sphère.

On en déduit que $Q\cap S$ est un cercle de centre K et de rayon $\sqrt{9-\frac{9}{4}}=3\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c. La sphère S' tangente à P et Q respectivement en A et K a pour centre le point J milieu du segment $[KA]$ et pour rayon JA.

On en déduit que S' est la sphère de centre $J(-2.5\ ,\ 1.25\ ,0.5)$ et de rayon 0.75.

Par suite $S':(x+2.5)^2+(x-1.25)^2+(x-0.5)^2=0.75^2$.

4. la distance h du point I au plan R est le réel $\frac{|-2+2+2-6.5|}{\sqrt{9}}=1.5$

Soit $H(x_0,y_0,z_0)$ le projeté orthogonal du centre I de la sphère sur le plan R. Déterminons les coordonnées de H. On peut affirmer que les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{IA}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel m tel que $\overrightarrow{IH}=\begin{pmatrix}-2m\\-m\\2m\end{pmatrix}$, ou encore tel que, $\begin{cases}x_0=-1-2m\\y_0=2-m\\z_0=-1+2m\end{cases}$.

En remarquant que H est un point de R, on obtient $m=-0.5$.

Ce qui nous donne $H(0\ ,\ 2.5\ ,\ -2)$.

Par suite $R\cap S$ est un cercle de centre H et de rayon $r=\sqrt{9-\frac{9}{4}}=3\frac{\sqrt{3}}{2}$.

L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Soit S la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2-x-y-z-\frac{1}{2}=0$.

   a. ☐ La sphère S a pour centre le point $I(0.5, 0.5, 0.5)$ et pour rayon 0.25.

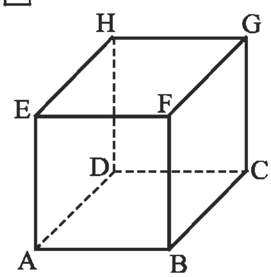
   ☐ La sphère S a pour centre le point $I(0.5, 0.5, 0.5)$ et pour rayon $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

   ☐ La sphère S a pour centre le point $I(1, 1, 1)$ et pour rayon 0.5.

   b. L'intersection de la sphère S et du plan d'équation $x+y+z+\frac{1}{2}=0$ est

   ☐ un cercle. ☐ un point. ☐ le vide.

2. Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arête 1.
   On munit l'espace du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



   a. Le plan (BCH) a pour équation,

   ☐ $x+y-1=0$. ☐ $x+z-1=0$. ☐ $y+z-1=0$.

   b. le système d'équations $\begin{cases} x+z-1=0 \\ y=1 \end{cases}$ est celui de

   ☐ la droite (HG). ☐ la droite (HC). ☐ la droite (HD).

   c. L'intersection des plans d'équations $x+y-1=0$ et $x-y=0$ est

   ☐ la droite (HC).

   ☐ la droite (BD).

   ☐ la droite passant par le centre du carré ABCD et parallèle à (AE).

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Les plans d'équations $x-2y+z-1=0$ et $x+y+z-1=0$ sont perpendiculaires.
2. Soit P le plan d'équation $x+2y+3z+4=0$. Pour tous points A, B et C du plan P, le vecteur $\vec{u}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.
3. Le plan d'équation $x=0.5$ coupe la sphère S d'équation $x^2+y^2+z^2=1$ suivant un cercle de centre $I(0.5, 0, 0)$ et de rayon 0.5.
4. La sphère d'équation $(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=1$ est tangente à chacun des plans d'équations respectives $x=0$, $y=0$ et $z=0$.

Dans tous les exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1 Dans chacun des cas ci-dessous donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

a. $A(1,-2,3)$; $B(-1,0,1)$.

b. $A(2,3.5,0)$; $B(2,-2,1)$.

c. $A(0,0,1)$; $B(-1,-1,-1)$.

2 Soit les droites

$$D:\begin{cases}x=1-\alpha\\ y=2+\alpha \quad \alpha\in\mathbb{R}\\ z=-1-\alpha\end{cases} \quad \text{et} \quad D':\begin{cases}x=1+2\beta\\ y=2-2\beta \quad \beta\in\mathbb{R}\\ z=1+2\beta\end{cases}$$

Montrer que les droites D' et D sont parallèles.

3 Etudier dans chacun des cas la position relative de la droite D et du plan P.

$$\Delta:\begin{cases}x=2t+4\\ y=-3t-5\ ,t\in\mathbb{R}\\ z=t+8\end{cases} \quad ; \quad P: x+y+z-5=0\ .$$

$$\Delta:\begin{cases}x=5t+4\\ y=3\quad ,t\in\mathbb{R}\\ z=2t\end{cases} \quad ; \quad P: 2x-3y+4z-11=0\ .$$

4 Déterminer les coordonnées des points d'intersection du plan P d'équation $2x+3y-5z=20$ avec les droites $(O,\vec{i})$, $(O,\vec{j})$ et $(O,\vec{j}\wedge\vec{i})$.

5 Soit ABCDEFGH un parallélépipède rectangle tel que $AB=2$, $AD=1$ et $AE=1$.
On désigne par I le milieu [BD].
Soit $R=\left(A\ ,\ \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\ ,\ \overrightarrow{AD}\ ,\ \overrightarrow{AE}\right)$ un repère de l'espace.
1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HI).
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (DEG).
3. En déduire que la droite (HI) coupe le plan (DEG) au milieu du segment [HI].

6 Soit le point $A(-1,-2,-3)$.

1. Déterminer une équation cartésienne des plans $P\left(A\ ,\ \vec{i}-\vec{j},\vec{k}\right)$; $Q\left(A\ ,\ \vec{i}+\vec{j},\vec{i}+\vec{k}\right)$; $R\left(A\ ,\ \vec{i}\wedge\vec{j},\ \vec{j}\wedge\vec{k}\right)$.
2. Calculer les distances de O à chacun des plans P , Q et R .

7 On considère le tétraèdre OIJK tel que le repère $(O,\overrightarrow{OI},\overrightarrow{OJ},\overrightarrow{OK})$ soit orthonormé direct.

1. Donner une équation cartésienne de chacun des plans des faces.
2. Soit le point $M\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$.
Calculer la distance de M à chacune des faces du tétraèdre.
3. Montrer que les points O, I , J et M ne sont pas coplanaires et calculer le volume du tétraèdre OIJM.

8 Déterminer dans chacun des cas une équation du plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

a. $A(1,0,1)$; $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$ b. $A(1,2,0)$; $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

c. $A(-1,2,-3)$; $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\-4\end{pmatrix}$.

9 Donner dans chacun des cas une représentation paramétrique de la droite passant par A et perpendiculaire au plan P.

a. $A(0,0,1)$; $P: -3x+2y-7=0$.

b. $A(1,-3,2)$; $P: y-5=0$.

c. $A(1,5,3)$; $P: y-5z+4=0$.

10 Soit P le plan d'équation $-x+5y-z=7$ et le point $A(1,1,5)$.

1. Vérifier que A n'appartient pas à P.

Soit $H(x_0,y_0,z_0)$ le projeté orthogonal de A sur P.

2.a. Justifier l'existence d'un réel k tel que $\overrightarrow{AH}=\begin{pmatrix}-k\\5k\\-k\end{pmatrix}$.

b. Déterminer les coordonnées de H.

11 On considère les points $A(1,-2,3)$, $B(2,0,3)$ et $C(0,-1,2)$.

1. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés
2. Donner une équation cartésienne du plan (ABC).
3. Donner une équation cartésienne du plan Q passant par le point $D(0,1,2)$ et parallèle au plan (ABC).
4. Déterminer l'intersection de la droite (OD) le plan (ABC).

12 Soit les deux plans P et Q d'équations

$P: 2x-y+2z-5=0$ et $Q: 2x+2y-z-4=0$.

1. Montrer que les plans P et Q sont perpendiculaires.
2. Calculer les distances du point $A(1,2,-1)$ à chacun des plans P et Q.
3. En déduire la distance de A à la droite d'intersection Δ des plans P et Q.
4. Déterminer une représentation paramétrique de Δ.
5. Déterminer les coordonnées du point M de Δ tel que la distance AM est minimale.

13 Pour tout réel m, on considère le plan P_m d'équation $(1+m)x+y-2mz-4-3m=0$.

Soit le point $A(0,3,-2)$.

1. a. Déterminer la distance de A à P_m.

b. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles la distance de A à P_m est égale à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Soit la droite $D:\begin{cases}x=1-2t\\y=3+2t,\quad t\in\mathbb{R}\\z=-1-t\end{cases}$

Montrer que pour tout m, la droite D est incluse dans P_m.

14 Soit les deux plans P et Q d'équations

$P: x+2y+2z-1=0$ et $Q: 3x-4z=0$.

1. Montrer que P et Q sont sécants.
2. Montrer que l'ensemble des points équidistants de P et Q est constitué de deux plans perpendiculaires passant par la droite d'intersection de P et Q.

15 On considère les points $A(1,2,-1)$ et $B(2,1,1)$.

1. Déterminer une équation du plan Q passant par A et perpendiculaire à la droite (AB).
2. Pour tout réel m, on considère le plan P_m d'équation $x+y+m-3=0$.

a. Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan P_m.

b. Pour quelle valeur de m, la droite (AB) est-elle incluse dans le plan P_m ?

c. Montrer que pour tout réel m, les plans P_m et Q sont perpendiculaires.

3. Soit B' et A' les projetés orthogonaux respectifs de B et A sur P_m.

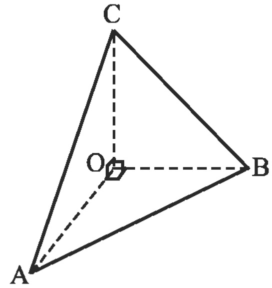
Déterminer les valeurs de m pour lesquelles $ABB'A'$ est un carré.

16 Soit OABC un tétraèdre trirectangle tel que (OA), (OB) et (OC) sont deux à deux orthogonales et H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

On pose $OA=a$, $OB=b$ et $OC=c$ avec a, b et c trois réels strictement positifs.

On munit l'espace du repère

$R=\left(O,\frac{1}{a}\overrightarrow{OA},\frac{1}{b}\overrightarrow{OB},\frac{1}{c}\overrightarrow{OC}\right)$.



1. a. Déterminer, à l'aide de a, b et c , une équation du plan (ABC).

b. En déduire que $\frac{1}{OH^2}=\frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}+\frac{1}{OC^2}$

2. a. A l'aide d'un calcul de volume, exprimer l'aire du triangle ABC à l'aide de a, b et c.

b. Vérifier que le carré de l'aire de la face ABC est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces.

(C'est en 1738 que le mathématicien De Gua de Malves qualifia ce résultat de « généralisation du théorème de Pythagore à l'espace ».

17 Déterminer l'ensemble des points M(x, y, z).

1. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z=0$.
2. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+14=0$.
3. $x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+16=0$.

18 Déterminer une équation de la sphère passant par $O(0,0,0)$, $A(1,1,1)$, $B(2,0,0)$ et $C(1,-2,2)$.

19 Déterminer, dans chacun des cas ci-dessous, une équation de la sphère de centre A et tangente au plan P.

$A(1,7,-1)$ et $P: x+y+z=0$.

$A(0,2,3)$ et $P: x-y+z+5=0$.

$A(5,3,1)$ et $P: 3x-2y-z+7=0$.

20 Donner une équation du plan P tangent en $A(1,4,-5)$ à la sphère de centre $I(1,3,-2)$.

21 Soit les points $A(2,0,0)$, $B(1,1,0)$ et $C(1,1,1)$.

Montrer que les plans (OAB) et (ABC) sont perpendiculaires.

Déterminer les équations des plans médiateurs des segments $[OA]$, $[OB]$ et $[OC]$.

Déterminer le centre et le rayon de la sphère circonscrite au tétraèdre OABC.

22 Déterminer, dans chacun des cas ci-dessous, le centre et le rayon du cercle d'intersection de la sphère S et du plan P.

1. $S: x^2+y^2+z^2-2x-2y-2z-13=0$ et $P: x+y+z-1=0$
2. $S: x^2+y^2+z^2-3x+5y-z=0$ et $P: x+2y+3z+5=0$.

23 Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer l'intersection de la sphère S et du plan P.

1. La sphère S est de centre O et de rayon 2 et $P: x+2y-z+1=0$.
2. $S: x^2+y^2+z^2-4x+2y+2z=0$ et $P: x+y+z-1=0$.
3. $S: x^2+y^2+z^2-2x+3y-z=\frac{1}{2}$ et $P: x+2y+2z-1=0$
4. $S: x^2+y^2+z^2+2x-4y-4z+4=0$ et

$$P:\begin{cases} x=1+2\alpha-\beta \\ y=-1+\beta \\ z=1-\alpha \end{cases} ;\ \alpha \text{ et } \beta \in \mathbb{R}.$$

24 Soit $A(0,1,0)$, $B(0,0,1)$ et $C(1,1,-1)$ et S la sphère de centre A et de rayon 1.

1. Déterminer l'intersection de S avec le plan (ABC).
2. Déterminer l'intersection de S avec le plan passant par A et perpendiculaire à (AC).
3. Déterminer l'intersection de S avec le plan passant par C et perpendiculaire à (AC).

25 On considère les points $A(1,-1,2)$ et $B(-1,1,-2)$.

1. Donner une représentation paramétrique de la droite (AB).

2. Soit P le plan passant par A et perpendiculaire à (AB) et Q le plan d'équation $Q: x-y+2z+6=0$.

a. Donner une équation cartésienne de P.

b. Vérifier que le plan Q contient B et est parallèle à P.

3. On considère la sphère S tangente en B à Q et dont l'intersection avec P est le cercle de centre A et de rayon $2\sqrt{3}$.

On désigne par $I(a,b,c)$ le centre de S.

a. Montrer que I appartient à la droite (AB).

b. En déduire que $b=-a$ et $c=2a$.

c. Montrer que $IB^2-IA^2=12$ et en déduire que $a-b+2c=3$.

d. Déterminer les coordonnées de I et donner une équation cartésienne de S.

26 On considère les points $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$, $C(0,0,6)$ et $D(-2,-2,-2)$.

1. a. Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b. On note P le plan (ABC). Déterminer une équation du plan P.

c. Vérifier que la droite (OD) est perpendiculaire au plan P.

d. Donner une représentation paramétrique de (OD).

e. Soit H le projeté orthogonal de O sur P. Déterminer les coordonnées de H et montrer que H est équidistant des points A, B et C.

f. En déduire que (OD) est l'axe du cercle circonscrit au triangle ABC.

2. Soit Q le plan médiateur du segment $[CD]$.

a. Donner une équation cartésienne de Q.

b. Montrer que la droite (OD) coupe Q en un point I dont on déterminera les coordonnées.

3. Soit S la sphère de centre I et de rayon $3\sqrt{3}$.

a. Ecrire une équation cartésienne de S.

b. vérifier que les points A, B, C et D appartiennent à S.

c. Déterminer l'intersection de S et P.

27 Soit S la sphère d'équation

$S: x^2+y^2+z^2+2x-2y-2=0$.

1. Déterminer le centre et le rayon de S.

2. Pour tout réel m, on considère le plan P_m d'équation $x+z+m=0$.

1. a. Montrer que l'intersection de P_0 et S est un cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon.

b. Montrer que $\left(O, \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{k}), \vec{j}\right)$ est un repère orthonormé de P_0.

c. Soit M un point du plan P_0 et (X,Y) les coordonnées de M dans le repère $\left(O, \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{k}), \vec{j}\right)$.

Déterminer X et Y à l'aide des coordonnées x, y et z du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

En déduire une équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O, \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{i}-\vec{k}), \vec{j}\right)$.

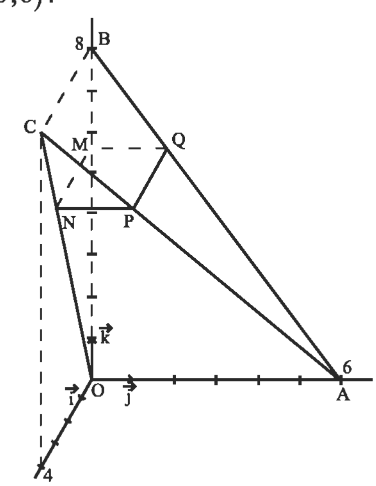
2. Etudier suivant les valeurs de m, la position relative de P_m et S.

28 On donne les points $A(0,4,-1)$, $B(-2,4,-5)$, $C(1,1,-5)$ et $D(1,0,-4)$.

1. Déterminer une équation de chacun des plans médiateurs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[AD]$.

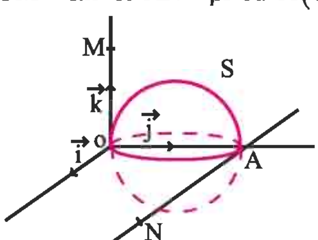
2. Montrer que ces trois plans ont un point commun I. En déduire une équation cartésienne de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

29 On considère les points $A(0,6,0)$, $B(0,0,8)$ et $C(4,0,8)$.



1. Montrer que
a. Les droites (BC) et (BA) sont orthogonales.
b. Les droites (CO) et (OA) sont orthogonales.
c. La droite (BC) est orthogonale au plan (OAB).
2. Déterminer le volume du tétraèdre OABC.
3. Montrer que les quatre points O, A, B et C se trouvent sur une sphère dont on déterminera le centre et le rayon.
4. A tout réel α de l'intervalle $]0,8[$ on associe le point $M(0,0,\alpha)$.
Le plan contenant M et orthogonal à la droite (OB) rencontre les droites (OC), (AC) et (AB) respectivement en N, P et Q.
a. Déterminer la nature du quadrilatère MNPQ.
b. La droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (OB) ?
Pour quelle valeur de α la droite (PM) est-elle orthogonale à la droite (AC) ?
c. Déterminer MP^2 à l'aide de α. Pour quelle valeur de α la distance PM est-elle minimale ?

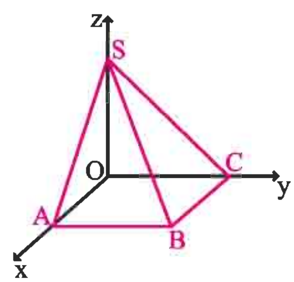
30 On désigne par S la sphère de centre $J(0,1,0)$ et de rayon 1.
Soit α et β deux réels donnés, M et N sont les points définis par $\overrightarrow{OM} = \alpha\vec{k}$ et $\overrightarrow{AN} = \beta\vec{i}$ où $A(0,2,0)$.



1. Déterminer une équation cartésienne de la sphère S.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MN) à l'aide de α et β.
3. a. Montrer que la droite (MN) est tangente à la sphère si et seulement si $\alpha^2.\beta^2 = 4$.
b. Dans le cas où la droite (MN) est tangente à S, calculer les coordonnées du point de contact à l'aide de α et β.

31 Soit ABCD un tétraèdre. Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.
Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[CD]$.
Soit K le point tel que $5\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$.
Soit L le point défini par $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AB}$.
On munit l'espace du repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.
1. Déterminer les coordonnées des points A, B, C, D, G, I, J, K et L.
2. Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (IK), (JL) et (AG).
3. En déduire que les droites (IK), (JL) et (AG) sont concourantes.

32 Soit $\left(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS}\right)$ un repère orthonormé de l'espace. Soit B le point de coordonnées $(1,1,0)$.
Soit P le plan d'équation $x + y = a$ où a est un réel de l'intervalle $]0,1[$.
Le but du problème est de déterminer la section du plan P avec la pyramide SOABC et le maximum de l'aire de cette section.
1. Déterminer une représentation paramétrique de chacune des droites (SA), (SB), (SC), (OC) et (OA).



2. On note I, J, K, L et M les points d'intersection respectifs du plan P avec les droites (SA), (SB), (SC), (OC) et (OA).
a. Déterminer les coordonnées des points I, J, K, L et M.
b. Vérifier que le quadrilatère IKLM est un rectangle.
c. Déterminer l'aire du pentagone IJKLM.
3. Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par
$f(x) = \frac{x\sqrt{2}}{4}(4 - 3x)$.
a. Etudier les variations de f sur $]0,1[$.
b. En déduire la position du plan P qui réalise le maximum de l'aire du pentagone IJKLM.
Vérifier qu'il s'agit d'un plan qui passe par le centre de gravité du triangle OAC.

Chapitre 5

Probabilités sur un ensemble fini

Un homme du monde a proposé deux problèmes à Pascal et Roberval,
le second fut à l'origine des calculs de probabilité.
C'est le problème "des points" ou "des parties" ou "de division".
Le prix d'un tournoi est gagné par le premier des participants qui obtient un certain nombre de points.
Comment partager ce prix si le tournoi est interrompu ?
Toutes les solutions qui en furent ensuite données étaient fausses.
Le calcul des probabilités fut présenté au monde en 1657 par Huyghens.
Pour la première fois, les concepts fondamentaux, énoncés et correctement utilisés, sont dans le domaine public.

(Dieudonné,
Abrégé d'histoire des mathématiques,
1978).

Chapitre 5

Probabilités sur un ensemble fini

I. Expériences aléatoires

Activité 1

On désigne par E l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs ou égaux à 100.
On note
A l'ensemble des entiers de E qui sont multiples de 10,
B l'ensemble des entiers de E qui sont multiples de 6,
C l'ensemble des entiers de E qui sont multiples de 15.

1. Dénombrer E, A, B et C.
2. Déterminer et dénombrer chacun des ensembles $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $A\cap B$, $A\cap C$, $B\cap C$, $A\cap\overline{B}$, $\overline{A\cup B}$, $\overline{A\cap C}$, $(A\cap B)\cup C$.

Activité 2

1. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot CHOIX ?
2. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot POSSIBLE ?
3. Combien y a-t-il d'anagrammes du mot BACCALAUREAT ?

Exercice résolu 1

Une urne contient trois boules numérotées 1, 2 et 3.
On effectue 5 tirages, en tirant les boules une à une et en remettant chaque fois la boule tirée dans l'urne.

1. On note A_j l'ensemble des tirages qui n'amènent pas le numéro j.
   Déterminer le cardinal de A_1, A_2 et A_3.
2. On note $A_{2,3}$ l'ensemble des tirages qui n'amènent ni le numéro 2 ni le numéro 3.
   Déterminer le cardinal de $A_{2,3}$.
3. On note B l'ensemble des tirages qui n'amènent pas en même temps les numéros 2 et 3.
   Déterminer le cardinal de B.

Solution

1. Un tirage qui n'amène pas le numéro 1, amène soit le numéro 2, soit le numéro 3
   Donc le cardinal de A_1 est 2^5.
   De même le cardinal de A_2 est 2^5 et le cardinal de A_3 est 2^5.

2. Un tirage qui n'amène ni le numéro 2, ni le numéro 3 est un tirage qui amène obligatoirement le numéro 1. Donc le cardinal de $A_{2,3}$ est $1^5 = 1$.

3. Dire qu'un tirage n'amène pas en même temps les numéros 2 et 3, c'est dire que ou bien ce tirage n'amène pas 2 ou bien il n'amène pas 3.
Par suite , $B = A_2 \cup A_3$.

On en déduit que $\operatorname{card}(B) = \operatorname{card}(A_2 \cup A_3) = \operatorname{card}(A_2) + \operatorname{card}(A_3) - \operatorname{card}(A_2 \cap A_3)$.

Ce qui donne $\operatorname{card}(B) = 2 \times 2^5 - 1$.

Activité 3

Dans une librairie douze titres de revues différentes sont disponibles.
Trois clients commandent chacun une revue.

1. Combien y a-t-il de commandes possibles ?
2. Combien y a-t-il de commandes possibles si on suppose qu'aucun titre n'est choisi deux fois ?
3. Combien y a-t-il de commandes possibles si on suppose que les clients commandent la même revue ?
4. Combien y a-t-il de commandes si exactement deux clients choisissent le même titre ?

Définition et théorème

Soit $E = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul.

* Le nombre des p- uplets d'éléments de E est l'entier n^p.
* Le nombre de n- uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier $n!$

* Si $1 \le p \le n$ alors
  • le nombre des p- uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier
  $A_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$,
  • le nombre de parties à p éléments de E est l'entier $C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

(L'entier C_n^p est aussi noté $\begin{pmatrix} n \\ p \end{pmatrix}$ et on convient que $C_n^0 = 1$).

Activité 4

Soit un entier $n \ge 2$ et un entier $2 \le p \le n$.

On considère un ensemble E de cardinal n et a, b deux éléments de E.

1. a. Déterminer le nombre des parties à p éléments contenant a et b.
   b. Déterminer le nombre des parties à p éléments contenant a ou bien b.
   c. Déterminer le nombre des parties à p éléments ne contenant ni a ni b.
2. En déduire que $C_n^p = C_{n-2}^{p-2} + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^p$.

Exercice résolu 2

On peint un cube de 5cm d'arête, puis on le découpe en petits cubes de 1cm d'arête, suivant des plans parallèles aux faces. On dispose les petits cubes obtenus dans une urne et on tire simultanément quatre cubes de cette urne.

1. Combien de cubes ont
   a. trois faces colorées?
   b. deux faces colorées?
   c. une face colorée?
   d. zéro face colorée?
2. Combien y a t-il de tirages possibles?
3. Combien de ces tirages amènent deux cubes exactement avec trois faces colorées ?
4. Combien de ces tirages amènent des cubes ayant au moins une face colorée ?

Solution

1. a. Les cubes ayant trois faces colorées sont situés aux sommets du grand cube. Il y en a 8.
b. Les cubes ayant deux faces colorées sont situés sur les arêtes du grand cube, sauf sur les sommets. Sur chaque arête, il y a 3 petits cubes qui ne sont pas sur les sommets. Le cube ayant douze arêtes, on en déduit que le nombre cherché est 36.
c. Les cubes ayant une face colorée sont situés au centre des faces du grand cube. Il y en a 9 sur chaque face. On en déduit que le nombre cherché est 54.
d. Le nombre de cubes n'ayant aucune face colorée est égal à $125-(8+36+54)=27$.

2. Le nombre de tirages possibles est $C_{125}^{4}=9691375$.

3. Pour obtenir deux cubes exactement ayant trois faces colorées, il faut que deux des cubes n'aient pas trois faces colorées. Le nombre de tirages possibles est $C_8^2 \times C_{117}^2=190008$.

4. Pour obtenir des cubes ayant au moins une face colorée, il faut tirer les quatre cubes parmi
les cubes ayant une, deux ou trois faces colorées, c'est-à-dire parmi 98 cubes.
Le nombre de tirages amenant des cubes ayant au moins une face colorée est
$C_{98}^{4}=3612280$.

II. Définition d'une probabilité sur un ensemble fini

Définition

Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est soumis au hasard et est donc imprévisible.
L'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers.
Les éléments de E sont appelés événements élémentaires.
Une partie A de E est appelée événement.

Activité 1

Une expérience consiste à lancer une pièce de monnaie trois fois de suite.

On note à chaque fois le côté exposé (P pour pile et F pour face).

1. Dénombrer les issues de cette expérience.
2. Déterminer le cardinal de chacun des événements ci-dessous.
   A : « La face pile apparaît une seule fois »
   B : « Obtenir P pour la première fois au deuxième lancer »
3. Déterminer le cardinal de $A \cap B$ et de $A \cup B$.

Définition

Soit E l'univers fini d'une expérience aléatoire et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des événements de E.

On appelle probabilité sur E, toute application p, de $\mathscr{P}(E)$ dans $[0,1]$ vérifiant les conditions ci-dessous.

- L'image $p(E)$ de E est égale à 1.
- L'image $p(\varnothing)$ de l'ensemble vide est égale à 0.
- L'image $p(A)$ d'un événement A, est la somme des images des événements élémentaires de A, c'est-à-dire $p(A) = \sum_{a_i \in A} p(a_i)$.

Vocabulaire

Le triplet $(E, \mathscr{P}(E), p)$ est appelé espace probabilisé fini.

L'événement E est appelé événement certain.
L'événement vide est appelé événement impossible.
L'événement contraire d'un événement A est noté $\overline{A}$.
Deux événements sont dits incompatibles si leur intersection est vide.

Activité 2

On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. On suppose que la probabilité d'apparition de 6 est le triple de la probabilité d'apparition de chacun des nombres 1, 2, 3, 4 et 5.
   Déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire.
2. Déterminer la probabilité de chacun des événements ci-dessous.
   A « obtenir un nombre pair »,
   B « obtenir un nombre impair inférieur ou égal à 3 »,
   C « obtenir un nombre pair strictement supérieur à 3»,
   D « obtenir un multiple de 3 ou un nombre pair ».

Propriétés

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et A et B deux événements de E.

- $p(\overline{A})=1-p(A)$. • $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$.
- Si $A\cap B=\varnothing$ alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.
- Si $A_1, A_2, ..., A_k$ sont des événements deux à deux incompatibles , alors $p(A_1\cup A_2\cup ...\cup A_k)=p(A_1)+p(A_2)+...+p(A_k)$.

Exercice résolu 3

Un appareil, fabriqué en très grande série, peut présenter deux sortes de défauts désignés par D_1 et D_2.

Dans un lot de 1000 appareils, on constate que 60 appareils ont le défaut D_1, 50 appareils ont le défaut D_2 et 20 appareils ont les deux défauts.

Un client achète un appareil. (on admet que son achat a été fait au hasard).

Déterminer les probabilités des événements suivants :

A : « L'appareil a les deux défauts ».

B : « L'appareil a au moins un défaut ».

C : « L'appareil n'a pas de défaut ».

D'_1 : « L'appareil a le défaut D_1 et n'a pas le défaut D_2 ».

D'_2 : « L'appareil a le défaut D_2 et n'a pas le défaut D_1 ».

D : « L'appareil a un seul défaut ».

Solution

On désigne par D_1 : « L'appareil a le défaut D_1 » et par D_2 :« L'appareil a le défaut D_2 ».

Il en résulte que $A=D_1\cap D_2$.

D'après les données, 20 appareils parmi 1000 ont les deux défauts D_1 et D_2.

On en déduit que $p(A)=\dfrac{20}{1000}=0.02$.

L'événement B est la réunion des événements D_1 et D_2. On en déduit que

$$p(B)=p(D_1)+p(D_2)-p(D_1\cap D_2)==\frac{60}{1000}+\frac{50}{1000}-\frac{20}{1000}=0.09$$

L'événement C est l'événement contraire de B. Par suite, $p(C)=1-p(B)=0.91$.

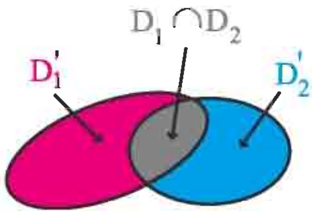
On vérifie facilement que $D_1=D'_1\cup(D_1\cap D_2)$ et que D'_1 et $D_1\cap D_2$ sont incompatibles.

Il en résulte que $p(D'_1)=p(D_1)-p(D_1\cap D_2)=\dfrac{60}{1000}-\dfrac{20}{1000}=0.04$.

De même $p(D'_2) = p(D_2) - p(D_1 \cap D_2) = 0.03$.

Il est clair que $D = D'_1 \cup D'_2$ et les événements D'_1 et D'_2 sont incompatibles.

On en déduit que $p(D) = p(D'_1 \cup D'_2) = 0.07$.



III. Equiprobabilité

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie bien équilibrée, on jette un dé non pipé ou on effectue un tirage au hasard, les issues ont la même probabilité de réalisation, on dit qu'on est en présence d'une situation d'équiprobabilité.

Définition et théorème

Soit E l'univers fini d'une expérience aléatoire dans une situation d'équiprobabilité et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

L'application p définie de $\mathscr{P}(E)$ dans $[0,1]$ par $p(a) = \dfrac{1}{\text{card}(E)}$, pour tout événement élémentaire a de E est une probabilité sur E, appelée probabilité uniforme.

Propriété

Si $(E, \mathscr{P}(E), p)$ est un espace probabilisé fini tel que la probabilité p est uniforme, alors $p(A) = \dfrac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$, pour tout événement A de E.

Exercice résolu 4

On jette deux dés équilibrés de couleurs rouge et verte et dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

1. Déterminer l'univers E de l'expérience et donner son cardinal.
2. Calculer la probabilité d'obtenir le même chiffre sur les deux dés.
3. Calculer la probabilité d'obtenir deux chiffres distincts.

Solution

1. Les dés sont discernables par leur couleur.
   On en déduit que $E = \{(i, j) \text{ tels que } 1 \le i \le 6 \text{ et } 1 \le j \le 6\}$ et $\text{card}(E) = 36$.
2. L'événement A : « Obtenir le même chiffre sur les deux dés » est tel que
   $A = \{(i, i), 1 \le i \le 6\}$. Par suite, $\text{card}A = 6$ et $p(A) = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$.
3. La probabilité d'obtenir deux chiffres distincts est $p(\overline{A}) = 1 - p(A) = \dfrac{5}{6}$.

Activité

Un code comporte deux lettres suivies de deux chiffres.

1. Dénombrer les codes possibles.
2. Un enfant compose un code au hasard. Calculer la probabilité d'obtenir,
   a. un code commençant par la lettre A,
   b. un code contenant les lettres A et Z,
   c. un code contenant le chiffre 0 deux fois,
   d. un code ne contenant pas de chiffre pair.

IV. Probabilité conditionnelle

Activité 1

Un enquêteur effectue un sondage auprès de familles ayant deux enfants et s'intéresse à la composition des enfants suivant le sexe (F ou G) et leurs âges.

On suppose que les naissances des filles et des garçons sont équiprobables.

1. Il choisit une famille au hasard.
   a. Déterminer les quatre éléments possibles de l'univers de cette expérience.
   b. Quelle est la probabilité que l'aîné des enfants soit une fille ?
   c. Quelle est la probabilité que cette famille ait deux filles ?
   d. Quelle est la probabilité que cette famille ait deux garçons ?
   e. Quelle est la probabilité que cette famille ait un garçon et une fille ?
2. Il sonne à la porte de la demeure de l'une de ces familles. Une fille vient ouvrir la porte.
   a. Quelle est alors la probabilité que l'autre enfant soit une fille ?
   b. Quelle est alors la probabilité que l'autre enfant soit un garçon ?

Théorème

Soit $\left(E, \mathscr{P}(E), p\right)$ un espace probabilisé fini et B un événement tel que $p(B) \neq 0$.

L'application p_B de $\mathscr{P}(E)$ dans $[0,1]$, définie par $p_B(A) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)}$, pour tout événement A, est une probabilité sur E.

Démonstration

L'égalité $E \cap B = B$ nous permet de déduire que $p_B(E) = \dfrac{p(E \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(B)}{p(B)} = 1$.

De plus, $p_B(\varnothing) = \dfrac{p(\varnothing \cap B)}{p(B)} = \dfrac{p(\varnothing)}{p(B)} = 0$.

Si α_j est un élément de B alors $\{\alpha_j\} \cap B = \{\alpha_j\}$ et $p_B(\alpha_j) = \dfrac{p(\alpha_j)}{p(B)}$.

De plus si A est un événement de E tel que $A=\{\alpha_1, ..., \alpha_k\}$, on peut écrire $A\cap B=\{\alpha'_1\}\cup\{\alpha'_2\}\cup...\cup\{\alpha'_m\}$, où $\alpha'_1, \alpha'_2, ..., \alpha'_m$ sont les éléments qui appartiennent à A et à B. Par suite, $p(A\cap B)$ est la somme des probabilités des événements élémentaires $\{\alpha'_1\}, \{\alpha'_2\}, ..., \{\alpha'_m\}$.

On en déduit alors que $p_B(A)=\dfrac{p(\alpha'_1)}{p(B)}+\dfrac{p(\alpha'_2)}{p(B)}+...+\dfrac{p(\alpha'_m)}{p(B)}$.

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et B un événement tel que $p(B)\neq 0$.

L'application p_B ainsi définie s'appelle probabilité B-conditionnelle.

Le réel $p_B(A)$ est noté $p(A/B)$ (on lit « probabilité de A, sachant B »).

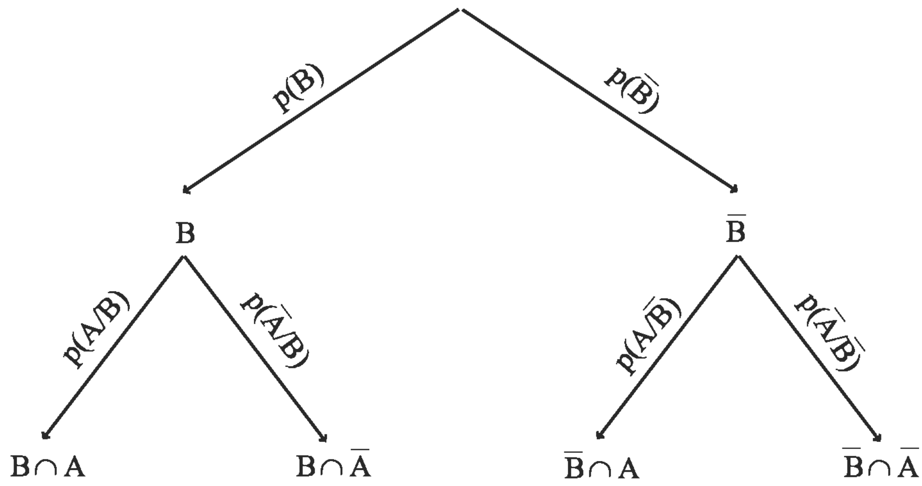
Activité 2

Une urne contient quatre boules rouges numérotées $(1, 1, 2, 2)$ et deux boules vertes numérotées $(1, 2)$. Un joueur tire une boule.

On désigne par R l'événement « obtenir une boule rouge » et par D l'événement « obtenir une boule numérotée 2 ».

1. Quelle est la probabilité que le joueur tire une boule rouge ?
2. Le joueur a tiré une boule rouge.
   a. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit numérotée 2 ?
   b. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit numérotée 1 ?
3. Le joueur a tiré une boule verte.
   a. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit numérotée 2 ?
   b. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit numérotée 1 ?
4. a. Quelle est la probabilité que le joueur tire une boule rouge et numérotée 2 ?
   b. Quelle est la probabilité que le joueur tire une boule verte et numérotée 1 ?

Lorsqu'on est en présence d'une situation de conditionnement, il est conseillé d'établir un arbre de probabilités.
L'arbre de probabilités ci-après modélise la situation de conditionnement suivante.
On effectue une expérience (I) comportant deux issues contraires B et $\overline{B}$.
L'expérience (I) étant effectuée, on procède à une expérience (II) comportant deux issues contraires A et $\overline{A}$.



Exercice résolu 5

Un centre de santé se propose de dépister une maladie auprès d'une population de 1000 individus.

On dispose des données suivantes :

La proportion des personnes malades est de 10%.

Sur 100 personnes malades, 98 ont un test positif.

Sur 100 personnes non malades, une seule personne a un test positif.

On choisit une personne au hasard et on la soumet à un test de dépistage.

On note M « la personne est malade » et T « la personne a un test positif ».

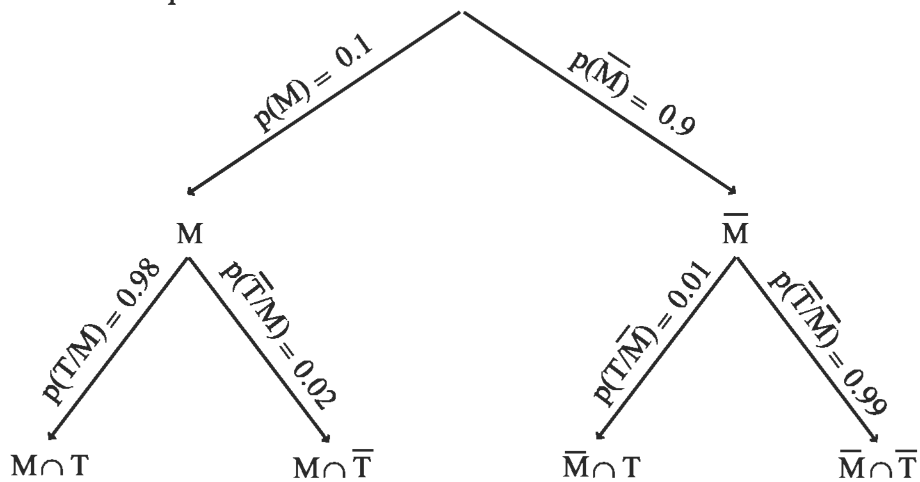
1. Déterminer la probabilité qu'une personne malade ait un test positif.
ainsi que la probabilité qu'une personne malade ait un test négatif.
2. Déterminer la probabilité qu'une personne non malade ait un test négatif, ainsi que la probabilité qu'une personne non malade ait un test positif..
3. Déterminer, à l'aide d'un arbre, les probabilités des événements ci-dessous
   « La personne choisie est malade et a un test positif. »
   « La personne choisie est malade et a un test négatif. »
   « La personne choisie n'est pas malade et a un test positif. »
   « La personne choisie n'est pas malade et a un test négatif. »
4. Déterminer les probabilités des événements ci-dessous.
   a. « La personne choisie a un test positif. »
   b. « La personne choisie est malade sachant qu'elle a un test négatif . »

Solution

1. On sait que sur 100 personnes malades, 98 ont un test positif et donc deux personnes ont un test négatif. Par suite, $p(T/M) = 0.98$ et $p(\overline{T}/M) = 0.02$

2. On sait que sur 100 personnes non malades, une seule a un test positif. C'est-à-dire que parmi 100 personnes non malades, 99 personnes ont un test négatif. Par suite, $p(T/\overline{M}) = 0.01$ et $p(\overline{T}/\overline{M}) = 0.99$.

3. Dressons l'arbre de probabilités .



On déduit de l'arbre de probabilités que
$p(T \cap M) = 0.098$, $p(\overline{T} \cap M) = 0.002$, $p(T \cap \overline{M}) = 0.009$, $p(\overline{T} \cap \overline{M}) = 0.891$.

4. a. On peut écrire $T = (T \cap M) \cup (T \cap \overline{M})$.
Les événements $(T \cap M)$ et $(T \cap \overline{M})$ étant incompatibles,
$p(T) = p(T \cap M) + p(T \cap \overline{M}) = 0.107$.

b. Il s'agit de déterminer la probabilité de l'événement M sachant que l'événement $\overline{T}$ est réalisé.

On sait que $p(M/\overline{T}) = \dfrac{p(\overline{T} \cap M)}{1 - p(T)}$. Il en résulte que $p(M/\overline{T}) = \dfrac{0.002}{0.893} \simeq 0.0022$.

Evénements indépendants

Activité 3

On jette un dé équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On considère les événements :
A : « Obtenir un numéro pair »
B : « Obtenir un multiple de 3 »
C : « Obtenir un multiple de 6 »
Calculer la probabilité de chacun des événements A, B, C, $A \cap B$ et $A \cap C$.

Définition

On dit que deux événements A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
Dans le cas où $p(B) \neq 0$, la réalisation de B n'influence pas celle de A, c'est à dire $p(A/B) = p(A)$.

Activité 4

Une urne U_1 contient trois boules noires et six boules vertes.

Une urne U_2 contient deux boules noires et trois boules vertes.

On choisit une urne au hasard et on tire successivement deux boules, en remettant chaque fois la boule, dans l'urne choisie.
On considère les événements
A : « obtenir une boule verte au premier tirage » et B : « obtenir une boule verte au deuxième tirage ».
Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Activité 5

Trois personnes A, B et C participent à un jeu télévisé. L'animateur dispose de deux cadeaux qu'il se propose d'offrir au hasard aux candidats, pour cela il leur fait un tirage au sort (un candidat pourra recevoir deux cadeaux).
On considère les événements A : « la personne A ne reçoit aucun cadeau » et
B : « la personne B ne reçoit aucun cadeau ».
1. Calculer les probabilités des événements A, B et $A \cap B$.
2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Formule des probabilités totales

Activité 6

Dans une usine, le tiers de la production provient de la machine A, le quart provient de la machine B et le reste provient de la machine C. Les trois machines fabriquent des ampoules de types 1 et 2.
On a constaté que
Sur 1000 ampoules produites par la machine A, deux seulement sont défectueuses,
sur 1000 ampoules produites par la machine B, dix seulement sont défectueuses,
et sur 1000 ampoules produites par la machine C, cinq seulement sont défectueuses.
On choisit au hasard une ampoule emballée.
Déterminer, à l'aide d'un arbre, les probabilités des événements ci-dessous.
a. « L'ampoule est défectueuse ».
b. « L'ampoule fonctionne ».
c. « L'ampoule provient de la machine A sachant qu'elle est défectueuse ».
d. « L'ampoule ne provient pas de la machine A sachant qu'elle fonctionne ».

Définition

Soit E un ensemble fini, les parties $B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de E lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est E.

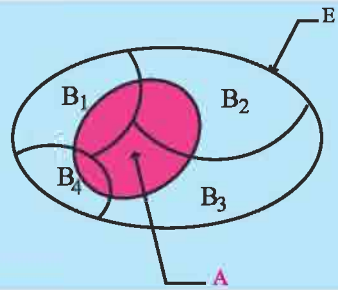
Théorème

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini,

$B_1, B_2, \dots, B_n$ des événements formant une partition de E tels que pour tout i, $p(B_i) \neq 0$.

Alors pour tout événement A,

$$p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i).p_{B_i}(A).$$



Démonstration

Les parties $A \cap B_1, A \cap B_2, \dots, A \cap B_n$ forment une partition de A.

D'après l'additivité de la probabilité, $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(A \cap B_i)$.

On déduit alors de la formule $p(A \cap B_i) = p(B_i).p_{B_i}(A)$, que $p(A) = \sum_{i=1}^{n} p(B_i).p_{B_i}(A)$.

Exercice résolu 6

Une urne U_1 contient sept boules noires et trois boules vertes.

Une urne U_2 contient deux boules noires et huit boules vertes.

On effectue une suite de tirages en remettant à chaque fois la boule tirée dans l'urne, suivant la règle suivante.

Si au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage , on a obtenu une boule noire alors le $n^{\text{ème}}$ tirage s'effectue dans U_1,

Si au $(n-1)^{\text{ème}}$ tirage , on a obtenu une boule verte alors le $n^{\text{ème}}$ tirage s'effectue dans U_2.

1. On choisit une urne au hasard et on fait le premier tirage.
   Déterminer la probabilité p_1 d'obtenir une boule noire.
2. On désigne par p_n la probabilté de tirer une boule noire au $n^{\text{ème}}$ tirage.
   a. Calculer p_2.
   b. Montrer que $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{5}$, $n \geq 2$.
3. a. Montrer que la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ définie par $q_n = p_n - \frac{2}{5}$, $n \geq 1$ est une suite géométrique.
   b. Déterminer p_n en fonction de n en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n$.

Solution

1. Notons E_1 : « obtenir une boule noire au premier tirage »,

U_1 : « le premier tirage s'effectue dans U_1 » U_2 : « le premier tirage s'effectue dans U_2 ».

Remarquons que le choix de l'urne étant fait au hasard, $p(U_1) = p(U_2) = 0.5$

$E_1 = (E_1 \cap U_1) \cup (E_1 \cap U_2)$. Les événements $E_1 \cap U_1$ et $E_1 \cap U_2$ étant incompatibles, on obtient $p_1 = p(E_1 \cap U_1) + p(E_1 \cap U_2) = p(E_1 / U_1)p(U_1) + p(E_1 / U_2)p(U_2)$.

De plus, $p(E_1 / U_1) = \frac{7}{10}$ et $p(E_1 / U_2) = \frac{2}{10}$. Par suite, $p_1 = \frac{9}{20}$.

2. a. Notons E_2 : « obtenir une boule noire au deuxième tirage ».

On peut alors écrire $E_2 = (E_2 \cap E_1) \cup (E_2 \cap \overline{E_1})$. Les événements $E_2 \cap E_1$ et $E_2 \cap \overline{E_1}$ étant incompatibles, on en déduit que $p_2 = p(E_2 / E_1)p(E_1) + p(E_2 / \overline{E_1})p(\overline{E_1})$.

De plus, $p(E_2 / E_1) = \frac{7}{10}$, $p(E_2 / \overline{E_1}) = \frac{2}{10}$.

On en déduit que $p_2 = \frac{7}{10}p_1 + \frac{2}{10}(1 - p_1) = \frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{5} = \frac{17}{40}$.

b. Notons E_n : « obtenir une boule noire au $n^{\text{ème}}$ tirage ».

On peut alors écrire $E_n = (E_n \cap E_{n-1}) \cup (E_n \cap \overline{E_{n-1}})$. Les événements $E_n \cap E_{n-1}$ et $E_n \cap \overline{E_{n-1}}$ étant incompatibles, on en déduit que $p_n = p(E_n / E_{n-1})p(E_{n-1}) + p(E_n / \overline{E_{n-1}})p(\overline{E_{n-1}})$.

Les égalités $p(E_n / E_{n-1}) = \frac{7}{10}$, $p(E_n / \overline{E_{n-1}}) = \frac{2}{10}$ impliquent que $p_n = \frac{1}{2}p_{n-1} + \frac{1}{5}$.

3. a.Un simple calcul montre que la suite $(q_n)_{n\geq 1}$ est une suite géométrique de raison 0.5 et de premier terme $q_1 = \frac{1}{20}$.

b. On déduit de la question 3. a. que $p_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{20}(0.5)^{n-1}$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{2}{5}$.

Activité 7

Le cycle d'un feu tricolore dure une minute : vert 25s, orange 5s et rouge 30s.

1. Quelle est la probabilité que le feu soit vert ? orange ? rouge ?
2. Un automobiliste arrive à 10 mètres d'un feu tricolore et aucun véhicule ne le précède. On suppose que l'automobiliste passe sans s'arrêter :
   au feu vert avec une probabilité de 99%,
   au feu orange avec une probabilité de 80%
   et au feu rouge avec une probabilité de 1%.
   Quelle est la probabilité que l'automobiliste passe sans s'arrêter ?

Activité 8

Une personne qui fait du sport un jour donné, fait du sport le lendemain avec la probabilité0.4.
Si elle ne fait pas de sport ce jour là elle en fera le lendemain avec la probabilité 0.8.
Cette personne a fait du sport le lundi. Quelle est la probabilité quelle en fasse le jeudi ?

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Une urne contient vingt jetons numérotés de 0 à 19.

a. On tire simultanément deux jetons de l'urne.

La probabilité d'obtenir deux jetons portant des numéros impairs est égale à

☐ 0.5. ☐ $\frac{9}{38}$. ☐ 0.25.

b. On tire successivement et avec remise deux jetons de l'urne.

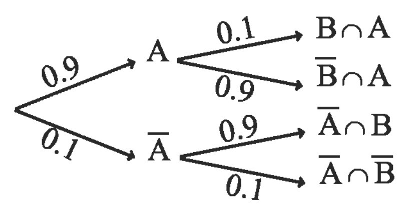
La probabilité d'obtenir deux jetons portant des numéros impairs est égale à

☐ 0.5. ☐ $\frac{9}{38}$. ☐ 0.25.

c. On tire successivement et sans remise deux jetons de l'urne.

La probabilité d'obtenir deux jetons portant des numéros impairs est égale à

☐ 0.5. ☐ $\frac{9}{38}$. ☐ 0.25.



2. On représente une expérience aléatoire par l'arbre de probabilité ci-contre.

a. La probabilité de B sachant A est égale à

☐ 0.9. ☐ 0.1. ☐ 0.09.

b. La probabilité de l'événement $\overline{A}\cap\overline{B}$ est égale à

☐ 0.01. ☐ 0.1. ☐ 0.2.

c. La probabilité de l'événement A sachant B est égale à

☐ 0.09. ☐ 0.5. ☐ 0.9.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Si deux événements A et B sont indépendant alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$.
2. Si deux événements A et B sont incompatibles alors $p(A\cap B)=p(A).p(B)$.
3. Si $A\cup B$ est l'événement certain alors pour tout événement C, $p(C)=p(A\cap C)+p(B\cap C)$.

1 Dans un lot de douze ampoules, quatre ampoules sont défectueuses.
On tire au hasard et simultanément trois ampoules.
1. Quelle est la probabilité qu'aucune ampoule ne soit défectueuse?
2. Quelle est la probabilité qu'exactement une ampoule soit défectueuse?
3. Quelle est la probabilité qu'au moins une ampoule tirée soit défectueuse?

2 Dans une urne, une boule est numérotée 1,deux boules sont numérotées 2, trois boules sont numérotées 3, quatre boules sont numérotées 4, …et enfin neuf boules sont numérotées 9.
1. Combien y a-t-il de boules dans l'urne ?
2. On tire deux boules simultanément et au hasard.
a. Quelle est la probabilité que les deux numéros soient pairs ?
b. Quelle est la probabilité que la somme des deux numéros obtenus soit supérieure ou égale à 3 ?
c. Quelle est la probabilité que la somme des deux numéros obtenus soit inférieure ou égale à 15 ?
3. On tire quatre boules successivement, sans les remettre dans l'urne, et on les aligne dans l'ordre où on les a tirées.
La probabilité d'obtenir 1983 est elle la même que celle d'obtenir 1389 ?
4. On tire quatre boules successivement, en les remettant dans l'urne, et on les aligne dans l'ordre où on les a tirées.
La probabilité d'obtenir 1983 est elle la même que celle d'obtenir 1389 ?

3 Un élève effectue un sondage dans sa classe (qui comprend 40 élèves). Les 40 élèves ont répondu par oui ou par non au trois questions « Aimez-vous les mathématiques ? », « Aimez-vous la philosophie ? » et « Aimez vous le sport ? ».
La première question a obtenu 31 « oui », la deuxième question, un « oui » et la troisième question, 9 « oui ».
Un supplément d'enquête a donné les résultats suivants.
1 élève aime seulement la philosophie,
3 élèves aiment seulement le sport,
25 élèves aiment seulement les mathématiques.
Quelle la probabilité qu'un élève interrogé au hasard
1. Aime à la fois les trois matières ?
2. Aime les mathématiques et n'aime pas le sport ?
3. N'aime pas la philosophie et les mathématiques ?
4. N'aime aucune matière ?
5. Aime au moins une matière ?

4 Le programme d'une épreuve d'examen comporte 100 questions. Un candidat n'en étudie que 80. lors d'un examen, le candidat tire au sort trois questions, quelle est la probabilité qu'il ait étudié
1. les trois questions proposées,
2. deux questions seulement,
3. une seule question,
4. aucune des trois,
5. au moins une des trois.

5 Lors d'un concours la première épreuve est une épreuve de mathématiques, la deuxième épreuve est une épreuve de sciences physiques.
Un élève a :
80% de chance de réussir la première épreuve,
s'il réussit la première épreuve il aura 75% de chance de réussir la deuxième épreuve,
et s'il ne réussit pas la première épreuve il aura 40% de chance de réussir la deuxième épreuve.
On désigne par M l'événement «l'élève réussit la première épreuve » et par S l'événement « l'élève réussit la deuxième épreuve ».
Déterminer $p(M)$, $p(S/M)$, $p(S/\overline{M})$ et $p(S)$.

6 Dans une usine, l'énergie électrique est fournie par deux générateurs.
Sur une période donnée, chacun des générateurs tombe en panne avec une probabilité égale à 0.005, de façon indépendante de l'autre générateur.
1. Quelle est la probabilité, que sur cette période, que les deux générateurs soient en panne?
2. Quelle est la probabilité, que sur cette période, l'usine possède toujours au moins un générateur en état de marche ?

7 Soit A, B deux événements indépendants tels que $p(A)=0.2$ et $p(B)=0.4$.
Calculer les probabilités ci-dessous.
$p(A\cap B)$, $p(A\cup B)$, $p(A\cap\overline{B})$, $p(\overline{A}\cup B)$.

8 Le personnel d'une grande entreprise est réparti en trois catégories : les ingénieurs, les techniciens et le personnel administratif.
10% des employés sont des ingénieurs et 80 % sont des techniciens.
80% des employés sont des femmes, 60% des des ingénieurs sont des hommes et 90% des techniciens sont des femmes.
On intérroge un employé au hasard.
1. a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme ingénieur ?
b. Quelle est la probabilité d'interroger un homme technicien ?
c. Quelle est la probabilité d'interroger une femme du personnel administratif ?
2. On sait que l'employé interrogé est une femme.
a. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit technisienne ?
b. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit ingénieur ?
3. On sait que l'employé interrogé est un ingénieur.
a. Quelle est alors la probabilité que ce soit soit une femme ?
b. Quelle est alors la probabilité que ce soit un homme ?

9 Un magasin vend deux types de téléphones portables : des modèles de marque A et des modèles de marque B.
Le magasin propose deux types d'abonnement : un abonnement de type I et un abonnement de type II.
Le service marketing effectue une enquête sur un échantillon de 2000 clients ayant acheté chez ce magasin un seul téléphone et choisi un seul abonnement.
Sur les 2000 clients, 1200 ont acheté le modèle A.
Sur les 2000 clients, 960 ont choisi l'abonnement I.
On note S l'événement « avoir acheté le modèle A » et C «avoir choisi l'abonnement I »
Un client est choisi au hasard dans l'échantillon.
1. Quelle est la probabilité qu'il ait acheté le modèle A ?
2. Parmi les clients qui ont acheté le modèle A , 32% ont choisi l'abonnement I.
a. Quelle est la probabilité que le client ait acheté le modèle A et choisi l'abonnement I ?
b. Quelle est la probabilité que le client ait acheté le modèle B et choisi l'abonnement II ?

10 Une urne contient huit jetons :
- trois noirs portant tous le numéro 1,
- trois noirs portant tous le numéro 2,
- un vert portant le numéro 1,
- un vert portant le numéro 2.

Une épreuve consiste à extraire au hasard deux jetons selon une procédure déterminée par le lancer d'une pièce truquée.
Si l'on obtient pile, on extrait deux jetons simultanément.
Si l'on obtient face, on extrait les deux jetons successivement sans remise.
Lors du lancer de la pièce, la probabilité d'obtenir pile est égale à $\frac{7}{15}$.
On note P l'événement « obtenir pile » et F l'événement « obtenir face »
A « les deux jetons portent le même numéro ou ont la même couleur. »
B « les deux jetons portent le même numéro et ont la même couleur. »
C « les deux jetons tirés ont la même couleur. »
D « les deux jetons tirés portent le même numéro.»
1. Déterminer les probabilités $p(C/P)$, $p(D/P)$, $p(B/P)$ et $p(A/P)$.
2. Déterminer $p(A/F)$ et en déduire $p(A)$.

11 Deux joueurs X et Y s'entraînent au tir à la cible. Le joueur X est expérimenté et atteint sa cible 9 fois sur 10 et le joueur Y est débutant et atteint sa cible 4 fois sur 10.
X laisse Y s'entraîner et n'effectue qu'un tir sur trois.
Un des joueurs tire et la cible est atteinte.
Quelle est la probabilité que ce soit Y ?

12 Un joueur est en présence de deux urnes A et B.
Dans l'urne A, il y a trois boules blanches et cinq boules rouges.
Dans l'urne B, il y a sept boules blanches et cinq boules rouges.
Le joueur dispose de deux dés non pipés et de couleurs différentes qu'il lance une fois.
Si le total des points obtenus est inférieur ou égal à 7, il choisit l'urne A.
Si le total des points obtenus est strictement supérieur à 7, il choisit l'urne B.
Il tire alors dans l'urne choisie successivement quatre boules sans remise.
1. Calculer la probabilité qu'il obtienne 2 boules blanches et 2 boules rouges.
2. Calculer la probabilité qu'il n'obtienne que des boules rouges.
3. Le joueur n'obtient que des boules rouges. Quelle est la probabilité p que ce soit l'urne B qui ait été choisie ?

13 Deux amis se rendent indépendamment l'un de l'autre sur un lieu de vacances.
Les jours d'arrivée possibles pour chacun des deux amis sont numérotés de 1 à 8.
Les deux amis choisissent chacun leur jour d'arrivée au hasard, il reste alors trois jours dans ce lieu à attendre l'autre, puis reparte.
Leurs séjours possibles se situent au cours de la période comportant les journées numérotées de 1 à 10.
1. Calculer la probabilité que les deux amis arrivent le même jour.
2. Calculer la probabilité que les deux amis arrivent avec un jour d'écart.
3. Calculer la probabilité que les deux amis puissent se rencontrer.
4. On sait que les deux amis se sont rencontrés. Quelle est la probabilité qu'ils aient pu passer ensemble au moins deux jours ?

14 Un individu essayant de réduire sa consommation de cigarettes, applique les conditions suivantes
C_1 : s'il reste un jour sans fumer alors la probabilité pour qu'il fume le lendemain est de 0.2
C_2 : par contre s'il cède et fume un jour alors la probabilité qu'il fume le lendemain est égale 0.7.
On note F_n l'événement « l'individu fume le $n^{\text{ième}}$ jour» et p_n la probabilité de l'événement F_n .
1. A l'aide d'un arbre de choix, déterminer les probabilités des événements
$\left(F_{n+1}/F_n\right)$; $\left(\overline{F_{n+1}}/F_n\right)$; $\left(F_{n+1}/\overline{F_n}\right)$ et $\left(\overline{F_{n+1}}/\overline{F_n}\right)$.
2. En déduire que pour tout entier $n \geq 1$,
$p_{n+1} = 0.5\, p_n + 0.2$
3. Soit (a_n) la suite définie par
$a_n = p_n - 0.4,\ n \geq 1$.
a. Montrer que (a_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et la limite.
b. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter.

15 Des personnes P_1 , $P_2, \ldots, P_n, \ldots$ se transmettent une information dans cet ordre. Chaque personne transmet l'information de manière fidèle avec une probabilité égale à 0.9 ou la change en son contraire avec une probabilité égale à 0.1.
On suppose que la première personne possède l'information non déformée.
Pour tout $n \geq 1$, on note A_n l'événement « la $n^{\text{ème}}$ personne possède l'information non déformée » et p_n sa probabilité.
1. Calculer p_1 et p_2 .
2. Utiliser un arbre de choix pour calculer p_3 .
3. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0.8 p_n + 0.1$

4. Exprimer p_n en fonction de n.

5. Quelle est la probabilité que la $20^{ème}$ personne possède l'information non déformée ?

6. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

16 Un gène peut avoir deux états A « allèle dominant » ou a « allèle récessif ».
Un individu peut avoir l'un des trois génotypes suivants : « AA », « Aa » ou « aa ».
Un enfant récupère un allèle de chacun de ses deux parents.
1. On suppose que l'un des parents a le génotype « AA » et l'autre « Aa ».
a. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « AA » ?
b. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « Aa » ?
2. On suppose que les deux parents sont de génotype « Aa ».
a. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « AA » ?
b. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « Aa » ?
c. Quelle est la probabilité que l'enfant soit de type « aa » ?

3. On note p_n, q_n et r_n les probabilités respectives qu'un individu de la $n^{ième}$ génération soit de type « AA », « Aa » ou « aa ».
A l'aide d'un arbre de choix, montrer que

a. $p_{n+1} = \left(p_n + \dfrac{q_n}{2}\right)^2$.

b. $r_{n+1} = \left(\dfrac{q_n}{2} + r_n\right)^2$.

c. $q_{n+1} = 1 - \left(p_n + \dfrac{q_n}{2}\right)^2 - \left(\dfrac{q_n}{2} + r_n\right)^2$.

4. On note $\alpha = p_0 - r_0$.

a. Montrer que pour tout n, $p_n - r_n = \alpha$.

b. Montrer que pour tout n, $2r_n + q_n = 1 - \alpha$.

5. En déduire que suites (p_n), (q_n) et (r_n) sont constantes.

17 Un sac contient n boules rouges et 2n boules noires indiscernables au toucher et ayant chacune la même probabilité d'être tirée. On tire simultanément trois boules du sac.

1. Quelle est la probabilité p_n pour que parmi ces trois boules, il y ait une seule rouge?
En déduire que (p_n) possède une limité finie que l'on notera p.
2. Quelle est la probabilité q_n pour que parmi ces trois boules, il y ait au moins une rouge? En déduire que (q_n) possède une limité finie que l'on notera q.
3. On effectue trois tirages successifs d'une seule boule en remettant la boule tirée dans le sac avant d'effectuer le tirage suivant.
a. Montrer que la probabilité d'obtenir une seule boule rouge est égale à p.
b. Montrer que la probabilité d'obtenir au moins une boule rouge est égale à q.

18 Un joueur joue à pile ou face avec la règle suivante :
Il gagne dès que le nombre de fois où pile apparaît dépasse de deux le nombre de fois où face apparaît.
Il perd dès que le nombre de fois où face apparaît dépasse de deux le nombre de fois où pile apparaît.
On suppose que la pièce utilisée par le joueur est truquée de sorte qu'elle amène pile avec la probabilité $\dfrac{5}{12}$ et face avec la probabilité $\dfrac{7}{12}$.
1. Montrer que le joueur doit jouer un nombre pair de lancers pour gagner.
2. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de 2 lancers.
3. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de 4 lancers.
4. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de n lancers.
5. Calculer la probabilité pour que le joueur gagne au plus au bout de 20 lancers.

Chapitre 6

Variables aléatoires

Né en 1777 dans le duché de Brunswick (Allemagne), Carl Friedrich Gauss fut un véritable génie des mathématiques. Entre autres découvertes, on lui doit une constatation très simple. Dans une population donnée (les salariés d'une entreprise, des haricots dans un sac, etc.), si on classe les individus selon une caractéristique (leur taille, leur poids, leur QI, leur niveau de compétence), on s'aperçoit que, plus on s'approche de la moyenne sur le critère considéré, et plus il y a d'individus. Plus on s'en éloigne, et moins il y en a. Aux deux extrémités, il n'y a presque personne. La représentation graphique de cette réalité s'appelle une courbe de Gauss et prend la forme d'une cloche.

Chapitre 6

Variables aléatoires

A.Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

I. Définition et propiétés

Activité 1

Une urne contient deux boules numérotées 4 et trois boules numérotées -2, indiscernables au toucher. On tire simultanément deux boules de l'urne.

1. a. Quelle est la probabilité de tirer deux boules numérotées 4 ?
   b. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant des numéros différents ?
   c. Quelle est la probabilité de tirer deux boules portant le même numéro ?
2. On note X l'application qui à tout événement élémentaire associe la somme des numéros des deux boules tirées.Quelles sont les différentes valeurs prises par X ?

Définition

Soit $\left(E, \mathscr{P}(E), p\right)$ un espace probabilisé fini.

On appelle aléa numérique ou variable aléatoire toute application $X: E \to \mathbb{R}$.

Notation

L'événement $\{a \in E \; ; \; X(a) = x_i\}$ est noté $(X = x_i)$.

L'ensemble $X(E)$ désigne l'ensemble des valeurs prises par X.

Activité 2

On lance une pièce de monnaie bien équilibrée trois fois de suite.

1. Déterminer l'ensemble de toutes les issues possibles.
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque événement élémentaire associe le nombre de côtés « face » obtenus.
   a. Quelle est la probabilité de l'événement $(X = 0)$?
   b. Quelle est la probabilité de l'événement $(X = 1)$?
   c. Quelle est la probabilité de l'événement $(X = 2)$?
   d. Quelle est la probabilité de l'événement $(X = 3)$?

Définition

Soit $\left(E, \mathscr{P}(E), p\right)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire.

On appelle loi de probabilité de X ou distribution de X, l'application

$$P_X : X(E) \to [0,1]$$
$$x_i \mapsto p(X = x_i).$$

Conséquences

Soit $\left(E, \mathscr{P}(E), p\right)$ un espace probabilisé fini. Si X est une variable aléatoire sur E telle que $X(E)=\left\{x_1, x_2, ..., x_n\right\}$, alors $\sum_{i=1}^{n} p\left(X=x_i\right)=1$.

Démonstration

Les parties $\left(X=x_1\right)$, $\left(X=x_2\right)$,... et $\left(X=x_n\right)$ forment une partition de E.

On en déduit que $\sum_{i=1}^{n} p\left(X=x_i\right)=p(E)=1$.

Exercice résolu 1

Une entreprise organise un concours pour recruter un cadre. Trois candidats se présentent dans l'ordre. Chacun d'eux passe un test et le premier qui y satisfait est engagé.
La probabilité qu'a un candidat de réussir le test est p.
On définit la variable aléatoire X de la manière suivante :
$X=j$ si le $j^{\text{ème}}$ candidat qui se présente est engagé et $X=4$ si aucun candidat n'est engagé.
Déterminer la loi de X.

Solution

Dire que $X=1$, c'est dire que le premier candidat a été recruté. Donc $p(X=1)=p$.

Dire que $X=2$, c'est dire que le premier candidat n'a pas été recruté et le deuxième candidat a été recruté. Donc $p(X=2)=(1-p)p$.

Dire que $X=3$, c'est dire que les deux premiers candidats n'ont pas été recrutés et le troisième candidat a été recruté. Donc $p(X=3)=(1-p)^2 p$.

Dire que $X=4$, c'est dire que les trois candidats n'ont pas été recrutés.
Donc $p(X=4)=(1-p)^3$.

Remarquons aussi que $p+(1-p)p+(1-p)^2 p+(1-p)^3=1$.

II. Espérance et variance d'une variable aléatoire

Définition

Soit $\left(E, \mathscr{P}(E), p\right)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E telle que $X(E)=\left\{x_1, x_2, ..., x_n\right\}$.

On appelle espérance mathématique ou moyenne de X le nombre $E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p_i$.

Activité 1

On lance un dé de six faces numérotées de 1 à 6 et on désigne par X l'aléa numérique qui à chaque lancer associe le numéro obtenu et par Y l'aléa qui à chaque lancer associe 1 si le numéro obtenu est pair et -1 si le numéro obtenu est impair.
Calculer $E(X)$, $E(-3X)$, $E(Y)$ et $E(X+Y)$.

Théorème

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini, X et Y deux variables aléatoires sur E.

- Pour tout réel α, $E(\alpha X) = \alpha E(X)$.
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E.

On appelle variance de X le nombre $V(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$.

On appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Propriété

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini.

Si X est une variable aléatoire sur E alors $V(X) = E\left(X^2\right) - \left(E(X)\right)^2$.

Activité 2

Un marchand de glaces propose 5 parfums au choix.
Trois personnes choisissent, au hasard et indépendamment, un des parfums proposés.

1. a. Calculer la probabilité de l'événement « les trois personnes choisissent des parfums deux à deux différents ».
   b. Calculer la probabilité de l'événement « les trois personnes choisissent le même parfum».
2. On note X la variable aléatoire qui à chaque événement élémentaire associe le nombre de parfums choisis par les trois personnes.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

Activité 3

Une enveloppe contient les douze figures d'un jeu de carte : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets.

1. On tire, simultanément et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe.
   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Calculer son espérance et son écart-type.
2. On tire, successivement et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe en remettant chaque fois la carte dans l'enveloppe.

Soit Y la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus.

a. Déterminer la loi de probabilité de Y.

b. Calculer son espérance et son écart-type.

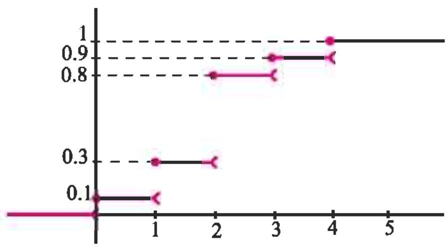
3. Comparer les résultats des questions 1.b et 2. b. Interpréter.

III. Fonction de répartition d'une variable aléatoire

Activité 1

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E.
On a représenté ci-contre la fonction

$$F: \mathbb{R} \to [0,1]$$
$$x \mapsto p(X \le x),$$



où $(X \le x)$ désigne l'ensemble $\{a \in E; X(a) \le x\}$.

Déterminer graphiquement

1. les valeurs prises par X,
2. $p(X \le -1)$, $p(X \le 1.3)$, $p\left(X \le \frac{11}{3}\right)$, $p(X \le 1)$, $p(X < 2)$, $p(X = 2)$, $p(1 \le X \le 6)$,
3. la loi de probabilité de X.

Activité 2

Une pièce de monnaie est truquée de sorte que la probabilité d'obtenir pile est égale à 0.6.
On lance la pièce trois fois et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de piles obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. On considère l'application $F: \mathbb{R} \to [0,1]$

$$x \mapsto p(X \le x).$$

Déterminer l'expression de F et la représenter.

Définition

Soit $(E, \mathscr{P}(E), p)$ un espace probabilisé fini et X une variable aléatoire sur E.
On appelle fonction de répartition de X, l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ par $F: x \mapsto p(X \le x)$.

Activité 3

Trois urnes contiennent chacune des jetons numérotés de 1 à 6. On tire au hasard un jeton de chaque urne, et on note X la variable aléatoire associant à chaque tirage le plus grand des numéros tirés.

1. Soit k un entier inférieur ou égal à 6.
   a. Dans chaque urne, quelle est la probabilité de tirer un numéro inférieur ou égal à k ?
   b. En déduire $p(X \leq k)$.
2. Déterminer la fonction de répartition de X et tracer sa courbe.
3. Déterminer la loi de probabilité de X.

IV. Loi binomiale

Activité 1

La probabilité qu'un joueur de fléchettes atteigne sa cible est égale à 0.9.

1. On suppose que le joueur effectue deux tirs et on note X la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès réalisés.
   a. Déterminer la loi de probabilité de X.
   b. Déterminer la probabilité de l'événement
      « le joueur atteint au moins une fois sa cible ».
2. On suppose que le joueur effectue dix tirs et on note Y la variable aléatoire associant à cette épreuve le nombre de succès réalisés.
   a. Calculer la probabilité des événements suivants « le joueur réalise neuf succès »,
      « le joueur réalise au moins un succès ».
   b. Déterminer la loi de probabilité de Y.

Théorème et définition

Soit E une expérience aléatoire constituée de n épreuves identiques, indépendantes et n'ayant que deux issues : succès ou échec.
Soit p la probabilité de l'événement succès.
On considère la variable aléatoire X associant à cette expérience le nombre de succès réalisés au cours des n épreuves.
Alors la loi de probabilité de X est donnée par :
$p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$.
On dit que X suit une loi binômiale de paramètre (n, p).

Notation et vocabulaire

La loi binomiale de paramètre (n, p) est notée $B(n, p)$.
Lorsque $n = 1$, on dit que X suit une loi de Bernoulli.

Activité 2

Un mobile se déplace sur un axe $(O, \vec{i})$.

A l'instant $t = 0$, il est au point O, à chaque seconde, son abscisse augmente de 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou diminue de 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

1. A l'instant $t = 2$
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit au point d'abscisse 2 ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il soit au point O ?

2. A l'instant $t=n$
   a. Quelle est la probabilité qu'il soit au point d'abscisse n ?
   b. Quelle est la probabilité qu'il soit au point d'abscisse $-n$?

Activité 3

On lance n fois $(n \geq 1)$ un dé. On note A l'événement « obtenir au moins un 6 ».

1. Calculer $p(A)$ pour $n=3$.
2. Exprimer $p(A)$ en fonction de n.
3. Combien de fois au moins faut-il lancer le dé pour que la probabilité de A soit supérieure ou égale à 0.9 ?

Espérance et variance

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale B(n, p). Alors
$E(X)=np$, $\quad V(X)=np(1-p)$ $\quad$ et $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$.

B/ Exemples de lois continues

I. La loi uniforme

Activité 1

1. a. Soit l'intervalle $I=[-1,1]$. Quelle est son amplitude ?

   b. Soit f la fonction définie sur I par $f(x)=\frac{1}{2}$.

   Calculer $\int_{-1}^{1} f(x)dx$.

   c. Montrer que pour tout intervalle $[c,d]$ de $[-1,1]$, $0 \leq \int_{c}^{d} f(x)dx \leq 1$.

2. Soit f une fonction constante sur un intervalle $[a,b]$.

   a. Quelle valeur doit-on donner à f pour que $\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$?

   b. Montrer que dans ce cas que $0 \leq \int_{c}^{d} f(x)dx \leq 1$, pour tout intervalle $[c,d]$ de $[a,b]$.

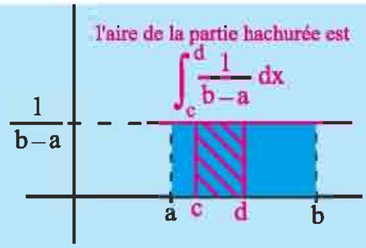
Définition

Soit un intervalle $[a,b]$ $(a<b)$. La fonction f définie sur $[a,b]$ par $f(x)=\frac{1}{b-a}$ est appelée densité de la loi de probabilité uniforme sur $[a,b]$.
On appelle probabilité uniforme sur $[a,b]$ l'application qui à tout intervalle $[c, d]$ inclus dans $[a,b]$ associe le réel $P([c,d])=\int_{c}^{d} f(x)dx$.

Conséquences

Pour tout réel c de $[a,b]$, $P(\{c\})=\int_c^c f(x)dx=0$.

Si on désigne par $\overline{[c,d]}$ le complémentaire de $[c,d]$ dans $[a,b]$, alors $P\left(\overline{[c,d]}\right)=1-P([c,d])$.



Activité 2

Un joueur lance une fléchette sur une cible circulaire de rayon 30 cm.
Le joueur n'est pas expérimenté de sorte qu'il atteint aléatoirement la cible.
On désigne par d la distance entre le centre de la cible et le point d'impact.

1. Quelles sont les valeurs possibles de d ?
2. On partage l'intervalle $[0,30]$ en 10 intervalles de même amplitude.
   a. Quelle est l'amplitude de ces intervalles ?
   b. Le réel d a-t-il plus de chances d'appartenir à un intervalle plutôt qu'à un autre ?
   c. Quelle est selon vous la probabilité que d appartienne à l'intervalle $[0,30]$? $[4,5]$? $[9,10]$?

Dans l'activité précédente le réel d varie de façon aléatoire dans l'intervalle $[0,30]$, mais de façon équirépartie.
On dit alors que d est une variable aléatoire à valeurs dans $[0,30]$.

Définition

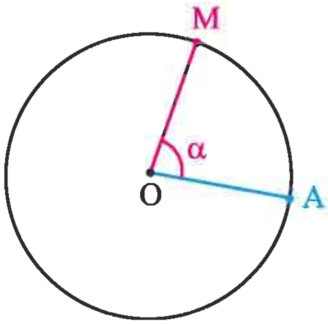
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle $[a,b]$ suit la loi de probabilité uniforme P si $P(c\le X\le d)=\dfrac{d-c}{b-a}$.

Activité 3

On considère un mobile M qui se déplace sur un cercle de centre O à partir d'un point A et qui s'arrête d'une manière aléatoire.
On mesure alors l'angle α que fait $[OA)$ avec $[OM)$.

Soit P la probabilité uniforme sur $[0,2\pi]$.

Calculer $P\left(\frac{\pi}{4}\le X\le\pi\right)$, $P\left(\frac{\pi}{4}\le X\le 3\frac{\pi}{2}\right)$ et $P(0\le X\le\pi)$.



Activité 4

On suppose que la durée (en minutes) du trajet qui sépare un employé de son travail est une variable aléatoire X à valeurs dans l' intervalle $[30,50]$ qui suit la loi de probabilité uniforme P.

1. Calculer $P(30 \leq X \leq 40)$ et $P(30 \leq X \leq 43)$.
2. On considère l'application $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

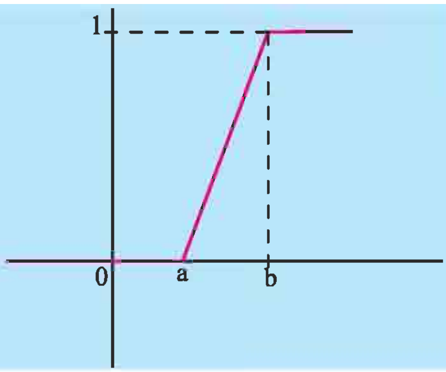
$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x < 30 \\ P(30 \leq X \leq x) & \text{si } x \in [30,50] \\ 1 & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

Déterminer l'expression de F et la représenter.

Définition

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité uniforme P sur l'intervalle $[a,b]$.
On appelle fonction de répartition de X, l'application $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ P(a \leq X \leq x) & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$



II. La loi exponentielle

Activité 1

1. Soit λ un réel strictement positif et f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$.

   a. Calculer $\int_0^x f(t)dt$ et $\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)dt$.

   b. Montrer que pour tout intervalle $[c,d]$ de $[0,+\infty[$, $0 \leq \int_c^d f(x)dx \leq 1$.

Définition

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(t)=\lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.
On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ, l'application P qui

- à tout intervalle $[c, d]$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $P([c, d])=\int_c^d \lambda e^{-\lambda x}dx$,
- à tout intervalle $[c,+\infty[$ inclus dans $[0,+\infty[$ associe le réel $P([c,+\infty[)=e^{-\lambda c}$.

Conséquences

1. Pour tout réel $c > 0$, $P(\{c\}) = \int_c^c f(x)\,dx = 0$.
2. Pour tout réel $c > 0$, $P([0,c]) = \int_0^c f(x)\,dx = 1 - e^{-\lambda c}$.
3. $P([c,+\infty[) = 1 - P([0,c])$.

Activité 2

On s'intéresse à la durée de vie t (en semaines) d'un appareil électronique.
On suppose que la probabilité que l'appareil soit encore fonctionnel au bout d'un temps t est une loi de probabilité exponentielle de paramètre 0.5.
Quelle est la probabilité que la durée de vie soit entre 100 et 200 semaines ?

Dans l'activité précédente le réel t varie de façon aléatoire mais selon une loi appelée loi exponentielle. On dit alors que t est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0.5.

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ,
si $P(c \le X \le d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$ et $P(X \ge c) = e^{-\lambda c}$.

Activité 3

Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ.

1. Déterminer λ sachant que $P(X \ge 10) = 0.5$
2. Déterminer alors $P(0 \le X \le 10)$, $P(100 \le X \le 300)$ et $P(X \ge 300)$.
3. On considère l'application $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

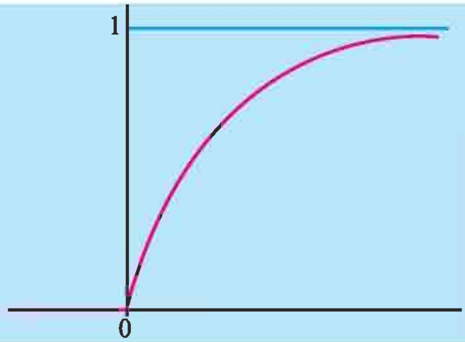
$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ P(0 \le X \le x) & \text{si } x \in [0,+\infty[\end{cases}$$

   a. Déterminer l'expression de F.
   b. Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$.
   c. Représenter F.

Définition

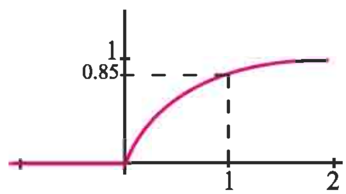
Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle P de paramètre λ.
On appelle fonction de répartition de X, l'application $F: \mathbb{R} \to [0,1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ P(0 \le X \le x) & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$



Activité 4

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle P de paramètre λ.
Dans la figure ci-contre on a représenté la fonction de répartition de X.



1. Déterminer une valeur approchée à 10^{-1} près du paramètre λ.
2. Calculer $p(X \ge 2)$.

QCM

Cocher la réponse exacte.

1. Une variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètre 3 et $\frac{1}{3}$.

   a. La probabilité de l'événement $X > 2$ est

   □ $\left(\frac{1}{3}\right)^3$. □ $\left(\frac{2}{3}\right)^3$. □ $C_3^2\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^2$.

   b. L'espérance de X est égale à

   □ 1. □ $\frac{2}{3}$. □ $\frac{1}{3}$.

   c. Si F est la fonction de répartition de X alors $F(1)$ est égal à

   □ $\frac{7}{27}$. □ $\frac{20}{27}$. □ $\frac{6}{27}$.

2. Si X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 0.1 alors l'arrondi au centième de $p(X > 10)$ est

   □ 0.63. □ 0.37. □ 0.91.

VRAI - FAUX

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1. Dans une expérience aléatoire, la probabilité d'un événement A est égale à 0.2.

   On répète huit fois cette expérience de façon indépendante.

   La probabilité que l'événement A se réalise au moins une fois est égale à $1-(0.8)^8$.

2. Les situations de tirages sans remise obéissent à une loi binomiale.
3. La probabilité de choisir au hasard un réel entre 0 et 0.0000001 est égale à 0.
4. Si X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle

   alors $p(0 \leq X \leq 2) = p(0 < X \leq 2)$.

5. Le tableau ci-dessous décrit la loi de probabilité d'une variable aléatoire X.

x_i	-1	0	1
p_i	0.25	0.5	0.25

   a. L'espérance de X est nulle.

   b. La variance de X est nulle.

1 Le programme d'une épreuve d'examen comporte 100 questions. Un candidat n'en étudie que 80. Lors d'un examen, le candidat tire au sort trois questions, quelle est la probabilité qu'il ait étudiée
1. les trois questions proposées,
2. deux questions seulement,
3. une seule question,
4. aucune des trois,
5. au moins une des trois.

2 Deux joueurs X et Y s'entraînent au tir à la cible. Le joueur X est expérimenté et atteint sa cible 9 fois sur 10 et le joueur Y est débutant et atteint sa cible 4 fois sur 10.
X laisse Y s'entraîner et n'effectue qu'un tir sur trois.
Un des joueurs tire et la cible est atteinte.
Quelle est la probabilité que ce soit Y ?

3 Un dé cubique a trois faces portant le numéro 1, deux faces portant le numéro 2 et une face portant le numéro 3.
On lance le dé deux fois et on désigne par X la variable aléatoire qui donne la somme des nombres obtenus.
1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.
3. Déterminer la fonction de répartition F de X et tracer sa courbe.

4 Un sac contient 10 jetons dont quatre sont rouges et six sont blancs.
On extrait les jetons un à un sans remise.
Soit X la variable aléatoire égale au rang d'apparition du premier jeton rouge.
Trouver la loi de X, son espérance et sa variance.

5 On lance deux dés identiques bien équilibrés.
On note X la variable aléatoire égale au plus grand des nombres obtenus et Y la variable aléatoire égale au plus petit des nombres obtenus.
1. Déterminer les lois de X et Y.
2. Calculer l'espérance de X et celle de Y, ainsi que leurs variances.

6 Un standardiste répond à 90% des appels.
On appelle 10 fois le standard.
1. Quelle est la probabilité que le standardiste réponde aux 10 appels ?
2. Quelle est la probabilité que le standardiste réponde seulement à cinq appels ?
3. Quelle est la probabilité que le standardiste réponde à au moins un appel ?

7 On jette 20 fois une pièce de monnaie.
1. Déterminer le nombre moyen de faces obtenues.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces égal à 10.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces compris entre 9 et 11.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces compris entre 8 et 12.
5. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre de faces compris entre 7 et 13.

8 Dans une production d'ampoules, la probabilité qu'une ampoule soit défectueuse est égale à 0.1.
Dans un lot de 400 ampoules, déterminer la moyenne et l'écart type de la distribution des pièces défectueuses.

9 On dispose de trois tétraèdres parfaitement équilibrés.
Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.
On lance simultanément les trois tétraèdres.
1. Quelle est la probabilité qu'aucune face rouge ne soit visible ?
2. Quelle est la probabilité qu'aucune face bleue ne soit visible ?
3. Soit A l'événement « les six faces rouges sont visibles.» Calculer $p(A)$.
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.
Calculer la probabilité p_n que l'événement A soit réalisé une et une seule fois.

10 1. On lance 2 dés non pipés. On désigne par A_2 « le total des numéros amenés est pair ».
Calculer $p(A_2)$.
2. On lance 3 dés non pipés.
On désigne par
A_3 « le total des numéros amenés est pair ».
Calculer $p(A_3)$.
3. On lance n dés non pipés.
On désigne par A_n « le total des numéros amenés est pair. »
Montrer par récurrence sur n que la suite $(p(A_n))$ est constante.

11 Dans une foire une publicité annonce « Un billet sur deux est gagnant, achetez deux billets »
Dans cet exercice, on suppose qu'effectivement, sur le nombre de billets en vente, exactement un billet sur deux est gagnant.
1. Un jour , cent billets sont mis en vente. Un promeneur en achète deux.
Calculer la probabilité qu'il ait au moins un billet gagnant.
2. Un autre jour, 2n billets sont mis en vente. Un promeneur en achète deux.
Soit p_n la probabilité qu'il ait au moins un billet gagnant.
a. Montrer que $p_n = \dfrac{3n-1}{4n-2}$.
b. Calculer p_1 et expliquer le résultat.
c. Montrer que pour tout entier n non nul,
$\dfrac{3}{4} \le p_n \le 1$.
3. Tous les jours, 2n billets sont mis en vente. Un promeneur revient chaque jour,
pendant 3 jours, acheter deux billets.
a. Quelle est la probabilité q_n, qu'il obtienne au cours des ces 3 jours au moins un
billet gagnant ?
b. Etudier la limite de la suite (q_n).

12 Dans une loterie, on suppose que chaque billet a une chance sur 100 d'être gagnant.
1. On suppose qu'on achète n billets et on note A l'événement « avoir au moins un billet gagnant ».
Exprimer en fonction de n la probabilité de l'événement A.
2. Combien de billets faut-il acheter pour que la probabilité d'avoir au moins un billet gagnant soit supérieur à 0.5 ?

13 Un lot de n pièces contient une pièce défectueuse.
1. Une machine les teste une par une, jusqu'à détecter la pièce défectueuse.
Elle effectue le $n^{\text{ème}}$ test, dans le cas où il ne reste que la pièce défectueuse.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués.
a. Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul test ?
b. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement deux tests ?
c. Déterminer la loi de probabilité de X.
d. Calculer l'espérance et la variance de X.
(On rappelle que $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$).
2. Dans cette question, on suppose que les tests sont effectués par un homme et que s'il ne reste que deux pièces, celui-ci ne fait alors qu'un test supplémentaire.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de tests effectués.
a. Quelle est la probabilité qu'il y ait un seul test ?
b. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement $n-1$ tests ?
c. Déterminer la loi de probabilité de Y.
d. Calculer l'espérance et la variance de Y.

14 On choisit un nombre x au hasard dans l'intervalle $[0,1]$.
1. Quelle est la probabilité que x soit égal à 0.1 ?
0.0005 ? 0.99999 ?
2. Quelle est la probabilité que x appartienne à l'intervalle $[0.5,1]$?

3. Quelle est la probabilité que x appartienne à l'intervalle $[0.001,\ 0.002]$?
4. Quelle est la probabilité que x soit plus petit que 0.99999 ?
5. Quelle est la probabilité que x soit plus gand que 0.99999 ?

15 Dans la journée, un bus passe toutes les 20 minutes à une station.
Soit X le temps d'attente d'une personne à cette station.
On suppose que X suit une loi uniforme sur $[0, 20]$.
1. Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 2 et 5 minutes ?
2. Quelle est la probabilité que cette personne attende entre 10 et 13 minutes ?
3. Quelle est la probabilité que cette personne attende exactement 3 minutes ?
4. Quelle est la probabilité que cette personne attende moins de 3 minutes ?
5. Quelle est la probabilité que cette personne attende plus de 3 minutes ?

16 On suppose que la durée de vie X, exprimée en années d'une machine suit une loi exponentielle de paramètre 0.2.
1. a. Calculer la probabilité que $X=10$.
   b. Calculer la probabilité que $X \leq 10$.
   c. Calculer la probabilité que $X \geq 10$.
2. Déterminer le réel c tel que $P(X \leq c) = P(X \geq c)$.

17 La durée de vie exprimée en années, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne suit une loi exponentielle de paramètre 0.0005.
1. Calculer la probabilité qu'un robot ait une durée de vie comprise entre 5 et 8 ans.
2. Calculer la probabilité qu'un robot dépasse 5 ans de durée de vie.
3. Calculer la probabilité qu'un robot dépasse 8 ans de durée de vie.

18 Une machine fabrique des cylindres. On mesure l'écart X, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine.
On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre 1.5.
1. Calculer à 10^{-3} prés, $P(X \leq 1)$, $P(X \geq 2)$ et $P(1 \leq X \leq 2)$.
Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté.
Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas.
Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.
2. On prélève au hasard un cylindre dans la production.
a. Quelle est la probabilité qu'il soit accepté ?
b. On sait qu'il est accepté, quelle est alors la probabilité qu'il ait subit une rectification ?

19 La durée de vie d'une machine, exprimée en années, jusqu'à ce que survienne la première panne est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de
paramètre λ.
1. Déterminer λ à 10^{-1} prés, pour que $P(X > 6) = 0.3$.
Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0.2$.
2. A quel instant t, à un mois prés, la probabilité qu'une machine tombe en panne pour la première fois est-elle de 0.5 ?
3. Calculer la probabilité qu'une machine n'ait pas de panne au cours des deux premières années de sa vie.
4. On considère un lot de cinq machines fonctionnant de manière indépendante.
Déterminer la probabilité que dans ce lot, il ait au moins une machine qui n'ait pas eu de panne au cours des deux premières années.

Statistiques

Huygens (1669) : Espérance de vie.

"Par les observations faites à Londres avec beaucoup d'exactitude.
De 100 personnes conçues, il en meurt [...].
Donc, de 100 personnes, ceux qui atteignent l'âge de 6 ans sont 64, de 16 ans sont 40, de 26 ans sont 25, de 36 ans sont 16, de 46 ans sont 10, de 56 ans sont 6, de 66 ans sont 3, de 76 ans est 1 et de 86 ans est 0.
Qui gagerait qu'un enfant conçu virait jusqu'à 6 ans, peut mettre 64 contre 36 ou 16 contre 9. Et qui gagerait [...].
De 100 enfants conçus, il en meurt 36 avant l'age de 6 ans, lesquels on peut dire ont vécu l'un portant l'autre 3 ans.
Des 64 restants, il en meurt 24 avant l'âge de 16 ans [...]."
Une correspondance de Huygens sur la statistique démographique.
Huygens aboutit au total 1822 en multipliant 36 par 3, 24 par 11, jusqu'à 1 par 81 et en ajoutant tous les produits ainsi obtenus puis calcul le quotient de 1822 par 100 et déclare :" Et le quotient qui est ici 18 ans et environ 2 mois et demi, ce n'est pas à dire qu'il soit apparent qu'il vivra si longtemps, car il est beaucoup plus apparent qu'il mourra avant ces termes."

(J Dhombres et al,
Mathématiques au fil des âges,
1987).

Chapitre 7

Statistiques

Il arrive que l'on soit amené à effectuer deux séries de mesure X et Y sur un même échantillon composé de n individus et que l'on s'interroge sur les relations possibles entre ces mesures.

On dit alors que l'on a une série statistique double (X, Y).

I. Distributions marginales

Activité 1

On a relevé dans le tableau ci-dessous, l'intensité de travail X (en kilojoules par minute) et la fréquence cardiaque Y de 100 personnes.

Y \ X	9.6	12.8	18.4	31.2	36.8	47.2	49.6	56.8	Total
70	4	2							6
86	3	5	6	4	1			2	21
90	2	5	12	3	4	1	1		28
104		1	$\boxed{12}$	14	8	5	3	2	45
Total	9	13	30	21	13	6	4	4	100

1. a. Quelle est la signification du nombre 12 encadré dans le tableau ?
   b. Quelle est le nombre d'individus dont la fréquence cardiaque est supérieure à 100 ?
   c. Quelle est le nombre d'individus qui ont fourni un travail d'intensité supérieure à 49 ?
   d. Quelle est le nombre d'individus qui ont fourni un travail d'intensité supérieure à 49 et ayant une fréquence cardiaque supérieure à 100 ?
2. Déterminer la distribution marginale de X, puis calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X.
3. Déterminer la distribution marginale de Y, puis calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y.

Activité 2

On a recueilli dans le tableau ci-contre la distance parcourue avant la première grande panne et la puissance en chevaux de 20 voitures.

1. a. Quelle sont les valeurs prises par Y ?

   b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type σ_Y.

2. Compléter le tableau suivant donnant la répartition des 20 voitures suivant la distance parcourue.

X (distance parcourue en mille km)	Effectifs
Moins de 50	
$[50, 60[$	
$[60, 70[$	
70 et plus	

3. Déterminer le pourcentage des voitures ayant parcouru une distance inférieure à 60000 km et qui ont une puissance supérieure ou égale à 6 chevaux.

(X) Distance parcourue en mille km	(Y) Puissance en chevaux
42	4
55	5
57	6
81	6
64	4
70	7
75	6
58	5
61	4
65	5
48	4
58	4
65	4
72	6
75	4
80	7
65	7
73	5
43	6
61	5

Définitions

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n et soit $(x_i, y_i)_{1\leq i\leq n}$ les valeurs numériques prises respectivement par les variables X et Y.

La distribution marginale de la variable X est la distribution des valeurs $(x_i)_{1\leq i\leq n}$ prises par la variable X.

La distribution marginale de la variable Y est la distribution des valeurs $(y_i)_{1\leq i\leq n}$ prises par la variable Y.

Soit X une série statistique sur un échantillon de taille n.

Si $\overline{X}$, $V(X)$ et σ_X désignent respectivement la moyenne, la variance et l'écart-type de la série, alors $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i x_i$, $V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{p} n_i \left(x_i - \overline{X}\right)^2$, $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$, où les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_p$ désignent les valeurs distinctes prise par la variable X si elle est discrète, ou les centres des classes si la variable X est continue. L'entier n_i désigne l'effectif de la valeur x_i.

Activité 3

Dans le tableau suivant, on a reproduit les effectifs d'individus d'un échantillon selon leur poids X (en kg)et leur taille Y(en cm).

Y \ X	[40,45[	[45,50[	[50,55[	[55,60[	Effectif selon la taille	Fréquence selon la taille
[120,155[	20	9	1	0	30	0.30
[155,160[	2	18	4	1	25	0.25
[160,165[	0	5	12	6	23	0.23
[165,170[	0	1	7	14	22	0.22
Effectif selon le poids	22	33	24	21	100	1
Fréquence selon le poids	0.22	0.23	0.24	0.21	1	

1. Déterminer la distribution marginale de X et celle de Y.
2. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.
3. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.

II. Covariance d'une série statistique double

II. 1 Cas d'un échantillon simple

Activité 1

Dans le tableau ci-dessous, on a relevé les exportations (en million de dinars) et les importations (en million de dinars) mensuelles de la Tunisie pour l'année 2006.

Mois	exportations (X)	importations (Y)
Janvier	1081.1	1312.1
Février	1225.6	1367.6
Mars	1378.6	1641.6
Avril	1193.7	1613.1
Mai	1205.8	1827.3
Juin	1374.6	1705.8
Juillet	1283.8	1713.4
Août	1157.8	1494.1
Septembre	1349.4	1859.8
Octobre	1230.1	1668.1
Novembre	1488.5	1902.6
Décembre	1347.3	1660.6

1. Déterminer la taille de l'échantillon étudié.
2. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.

   b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.
3. Calculer $\frac{1}{12}\sum_{i=1}^{12} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$.

Définition

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n.

On appelle covariance de (X, Y) le réel, noté $\operatorname{cov}(X, Y)$ défini par

$\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}$, où (x_i, y_i) est la valeur observée pour l'individu i si X et Y sont discrètes, ou le centre de la classe si l'une des variables est continue.

Il découle de la définition que $\operatorname{cov}(X, Y) = \operatorname{cov}(Y, X)$.

Interprétation de la covariance

La covariance mesure la tendance qu'ont les variables X et Y à varier ensemble.
La covariance est positive si X et Y ont tendance à varier dans le même sens.
La covariance est négative si X et Y ont tendance à varier en sens contraire.

Activité 2

On a relevé dans le tableau suivant le nombre de logements (en milliers) et le nombre de logements modernes (villa, appartement) durant quelque années.

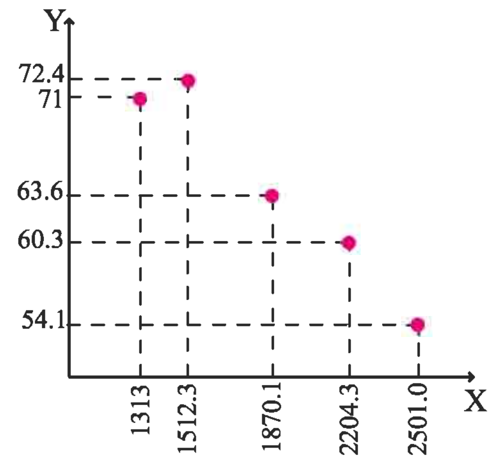
Année	1984	1989	1994	1999	2004
X : Nombre de logements (en milliers)	1313.1	1512.3	1870.1	2204.3	2501.0
Y : Nombre de logements modernes(en milliers)	265.2	343.3	630.2	848.7	1128.0

1. Représenter le nuage de points de la série (X, Y).
2. a. Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

   b. Calculer $\operatorname{cov}(X, Y)$. Interpréter le résultat.

Activité 3

Dans le graphique ci-contre, on a représenté les points $M(X,Y)$, où X désigne le nombre de logements (en milliers) et Y le pourcentage des logements traditionnels pour la même année.
Quel est le signe de $\operatorname{cov}(X,Y)$?



II. 2 Cas d'un échantillon groupé

Définition

Soit (X,Y) une série statistique double de taille n.

Soit n_{ij} le nombre de fois qu'apparaît le couple (x_i,y_j).

Alors $\operatorname{cov}(X,Y)=\dfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{q}\sum_{i=1}^{p}n_{ij}x_iy_j-\overline{X}\,\overline{Y}$.

Exercice résolu

Le tableau ci-dessous donne le poids Y (en kg) de 63 nouveaux-nés ainsi que le poids maternel X.

Y \ X	$]40,50]$	$]50,60]$	$]60,70]$	$]70,80]$	Total
$]1.5,2.5]$	1	0	1	0	2
$]2.5,3.5]$	11	17	13	2	43
$]3.5,4.5]$	4	4	8	2	18
Total	16	21	22	4	63

1. Calculer $\overline{X}$ et σ_X, ainsi que $\overline{Y}$ et σ_Y.
2. Déterminer la covariance de X et Y. Interpréter.

Solution

1. • Etude de la variable X

x_i (centres des classes de la variable X)	45	55	65	75	
n_i	16	21	22	4	$\sum_{i=1}^{4} n_i = 63$
x_i^2	2025	3025	4225	5625	
$n_i x_i$	720	1155	1430	300	$\sum_{i=1}^{4} n_i x_i = 3605$
$n_i x_i^2$	32400	63525	92950	22500	$\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2 = 211375$

Le calcul donne

$\overline{X} = \frac{1}{63}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i \simeq 57.2222$, $V(X) = \frac{1}{63}\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2 - \left(\overline{X}\right)^2 \simeq 80.776$,

$\sigma_X = \sqrt{V(X)} \simeq 8.9875$.

• Etude de la variable Y

y_j	2	3	4	
n_j	2	43	18	$\sum_{j=1}^{3} n_j = 63$
y_j^2	4	9	16	
$n_j y_j$	4	129	72	$\sum_{j=1}^{3} n_j y_j = 205$
$n_j y_j^2$	8	387	288	$\sum_{j=1}^{3} n_j y_j^2 = 683$

Le calcul donne

$\overline{Y} = \frac{1}{63}\sum_{j=1}^{3} n_j y_j \simeq 3.2539$, $V(Y) = \frac{1}{63}\sum_{j=1}^{3} n_j y_j^2 - \left(\overline{Y}\right)^2 \simeq 0.2529$, $\sigma_Y = \sqrt{V(Y)} \simeq 0.5029$.

2. Dressons les couples distincts des valeurs observées et leurs effectifs.

Couples (x_i, y_j)	(45,2)	(45,3)	(45,4)	(55,3)	(55,4)	(65,2)	(65,3)	(65,4)	(75,3)	(75,4)
Effectifs n_{ij}	1	11	4	17	4	1	13	8	2	2
$n_{ij} \cdot x_i \cdot y_j$	90	1485	720	2805	880	130	2535	2080	450	600

Le calcul donne $\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} n_{ij}x_iy_j = 11775$.

D'où $\operatorname{cov}(X,Y) = \frac{1}{63}\times 11775 - \overline{X}\,\overline{Y} \simeq 0.7$.

Interprétation

La covariance est positive donc X et Y ont tendance à varier dans le même sens.

Utilisation d'une calculatrice

Les calculatrices et les ordinateurs actuels permettent de retrouver les résultats précédents. A titre d'exemple, on donne le mode d'emploi d'une calculatrice.

- Pour choisir le mode de fonctionnement en statistique appuyer sur $\boxed{\text{MODE}}$ $\boxed{1}$.
- Appuyer sur $\boxed{1}$ pour sélectionner le sous mode statistique à deux variables.
- Pour entrer les données taper $\boxed{x_i}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{y_j}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{n_{ij}}$ $\boxed{\text{M+}}$

Par exemple pour le couple $(55,3)$ taper $\boxed{55}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{17}$ $\boxed{\text{M+}}$.

- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{n}$ la calculatrice affiche 63.
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sum x}$ la calculatrice affiche 3605 (la valeur de $\sum_{i=1}^{4} n_i x_i$).
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sum x^2}$ la calculatrice affiche 211375 (la valeur de $\sum_{i=1}^{4} n_i x_i^2$).
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\overline{X}}$ la calculatrice affiche 57.22222222.
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sigma_X}$ la calculatrice affiche 8.987547725.
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sigma_X}$ $\boxed{x^2}$ la calculatrice affiche 80.77601411 (la valeur de V(X)).
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sum xy}$ la calculatrice affiche 11775 (la valeur de $\sum_{j=1}^{3}\sum_{i=1}^{4} n_{ij}x_iy_j$).
- On appuie sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\sum xy}$ $\boxed{\div}$ $\boxed{63}$ $\boxed{-}$ $\big($ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\overline{X}}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{\overline{Y}}$ $\big)$ la calculatrice

affiche 0.705467372 (la valeur de $\operatorname{cov}(X,Y)$).

Activité 4

Dans une population de 100 ménages, on a considéré le nombre d'enfants X et le revenu du chef de famille Y (en DT).

Y \ X	0	1	2	3	4	5	Total
Moins de 200	6	4	1	0	0	0	11
$[200, 400[$	3	11	10	5	1	0	30
$[400, 600[$	1	3	16	13	4	1	38
$[600, 800[$	0	1	3	5	8	4	21
Total	10	19	30	23	13	5	100

1. a. Déterminer le nombre de ménages qui ont 4 enfants et dont le revenu est supérieur à 600 dinars.
   b. Déterminer le nombre de ménages qui n'ont pas d'enfants et ayant un revenu inférieur à 200 dinars.
   c. Déterminer le nombre de ménages qui ont moins de 4 enfants et dont le revenu est compris entre 400 et 600 dinars.
2. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.
   b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.
3. a. Peut-on prévoir le signe de la covariance de X et Y ?
   b. Calculer la covariance de X et Y.

III. Ajustement d'une série statistique double

Lorsque un statisticien étudie une série statistique double. L'une des questions qu'il se pose est : peut-on prévoir la valeur de Y lorsqu'on connaît la variable X ?
Pour répondre à une telle question, le statisticien essaiera de trouver une fonction f qui modélise le phénomène étudié, grâce à la relation $Y = f(X)$.

Dans ce cas , on dit que X est la variable explicative et Y est la variable expliquée.
La fonction f cherchée dépendra de l'allure du nuage de points.
Si le nuage de point a l'allure d'une droite, le statisticien essaiera de trouver une fonction affine f qui sera la plus proche des points du nuage. On dit que le statisticien effectue un ajustement affine.
Par conséquent faire un ajustement affine consiste à déterminer deux réels a et b tels que $Y = aX + b$ soit un modèle acceptable du phénomène étudié.
La droite d'équation $y = ax + b$ sera appelée droite d'ajustement affine de Y en X.

III. 1 Méthode de Mayer

Activité 1

On a relevé dans le tableau ci-contre, le montant total (en million de dinars) du commerce extérieur en Tunisie (importations et exportations) depuis l'année 1990 jusqu'à l'année 2004.

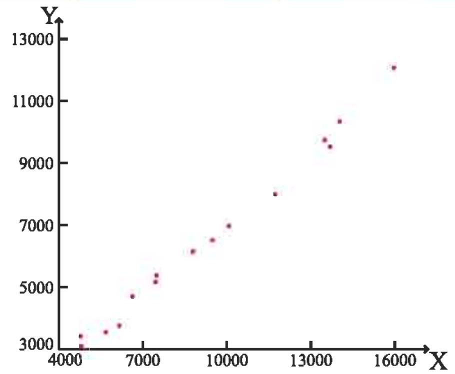
1. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart-type σ_X de la variable X.

b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.

Année	Importations (X)	Exportations (Y)
1990	4826.4	3087.4
1991	4788.9	3417.1
1992	5688.8	3549.7
1993	6172.1	3760
1994	6647.3	4696.6
1995	7464.3	5172.5
1996	7498.8	5372
1997	8793.5	6147.9
1998	9489.5	6518.3
1999	10070.5	6966.9
2000	11738	8004.8
2001	13697.3	9536.2
2002	13510.9	9748.6
2003	14038.9	10342.6
2004	15960.3	12054.9

2. On a représenté ci-contre, dans un même repère, le nuage de points de la série double (X,Y).

Placer le point $\overline{G}\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$.



3. On scinde l'ensemble des 15 points du nuage en deux parties. La première partie (I) correspond aux valeurs observées entre 1990 et 1997 et la deuxième partie (II) correspond aux valeurs observées entre 1998 et 2004.

On désigne par G_1 et G_2 les points moyens respectifs de la partie I et de la partie (II).

a. Déterminer les coordonnées de G_1 et G_2.

Vérifier que G, G_1 et G_2 sont alignés et tracer la droite (G_1G_2).

b. Comment semblent se répartir les points du nuage autour de la droite (G_1G_2).

c. Donner alors un ajustement affine de la série double (X,Y).

d. Donner une estimation du montant des exportations si le montant de l'importation est égal à 17000 millions de dinars.

Définition

Soit (X, Y) une série statistique double de valeurs $(x_i, y_i)_{1 \le i \le n}$.

L'ensemble des points M_i de coordonnées (x_i, y_i) dans un repère orthogonal est appelé nuage de points représentant la série statistique.

Le point moyen du nuage est le point dont les coordonnées sont les moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

Principe de la méthode de Mayer

Soit un nuage de points représentant une série statistique double (X, Y) et G son point moyen.

On scinde le nuage de points de (X, Y) en deux parties contenant à peu prés le même nombre de points.

On considère alors les points moyens G_1 et G_2 des deux nuages obtenus.

La droite (G_1G_2) définit un ajustement affine du nuage de points représentant la série statistique double (X, Y).

La droite (G_1G_2) est appelée droite de Mayer et passe par le point moyen G du nuage global.

Activité 2

Le mur d'une habitation est constitué par une couche de béton et une couche de polystyrène d'épaisseur variable X (en cm). On a mesuré la résistance thermique R (en $m^2.°C/W$) de ce mur pour divers valeurs de X et on a obtenu les résultats ci-dessous.

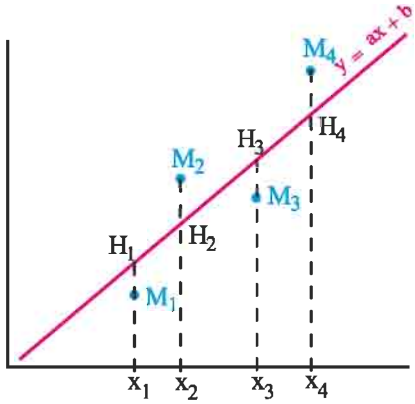
X	2	4	6	8	10	12	14	16	18
R	0.83	1.34	1.63	2.3	2.44	2.93	3.44	3.85	4.28

1. Tracer le nuage de la série (X, R).
2. Déterminer un ajustement affine de R en X par la méthode de Mayer.
3. Quelle résistance thermique peut-on espérer obtenir avec une épaisseur de polystyrène de 25 cm ?

III. 2 Méthode d'ajustement par les moindres carrés

Nous avons représenté ci-contre le nuage de points $M_i(x_i, y_i)$, $1 \le i \le n$ d'une série statistique double, ainsi qu'une droite D d'équation $y = ax + b$.

Pour tout entier $1 \le i \le n$, on note $H_i(x_i, z_i)$ le point de la droite D de même abscisse que M_i.



Le principe de la méthode d'ajustement par la méthode des moindres carrés consiste à déterminer les réels a et b tels que la somme $\sum_{i=1}^{n} M_iH_i^2$ soit minimale.

Dans ce cas, le statisticien pourra faire des prévisions en remplaçant la valeur observée y_i par la valeur théorique $z_i = ax_i + b$.

Activité 3

Le tableau ci-dessous donne le chiffre d'affaire annuel en mille DT d'une société pendant huit années consécutives.

Rang de l'année (X)	1	2	3	4	5	6	7	8
Chiffre d'affaires en mille DT	13.6	15	15.8	17	18	20	19	20

1. a. Représenter le nuage de points de la série (X, Y).
   b. Un ajustement affine de cette série est-il justifié ?
2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage.
3. a. Tracer dans le même repère la droite D d'équation $y = 1.6x + 10.1$.
   b. Calculer la somme $S_D = \sum_{i=1}^{8}\left[y_i - (1.6x_i + 10.1)\right]^2$.
4. On considère une droite Δ d'ajustement de Y par rapport à X obtenue par la méthode de Mayer.
   a. Déterminer l'équation de Δ sous la forme $y = ax + b$. (on donnera a et b à 10^{-1} prés)
   b. Calculer la somme $S_\Delta = \sum_{i=1}^{8}\left[y_i - (ax_i + b)\right]^2$.
5. Comparer S_D et S_Δ.
6. Estimer le chiffre d'affaires de cette société à sa dixième année.

Théorème (admis)

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n et telle que $\sigma_X \neq 0$.

Soit $(x_i, y_i)_{1 \le i \le n}$ les valeurs observées de la série. Alors la somme $\sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2$ est minimale pour le couple (a_0, b_0) tel que $a_0 = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}$ et $b_0 = \left(\overline{Y} - \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}\overline{X}\right)$.

Définition

Soit (X, Y) une série statistique double sur un échantillon de taille n.

La droite d'équation $y = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X^2}(x - \overline{X}) + \overline{Y}$ est appelée droite des moindres carrés de Y en X, ou droite de régression de Y en X.

La droite d'équation $x = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_Y^2}(y - \overline{Y}) + \overline{X}$ est appelée droite des moindres carrés de X en Y, ou droite de régression de X en Y.

Conséquence

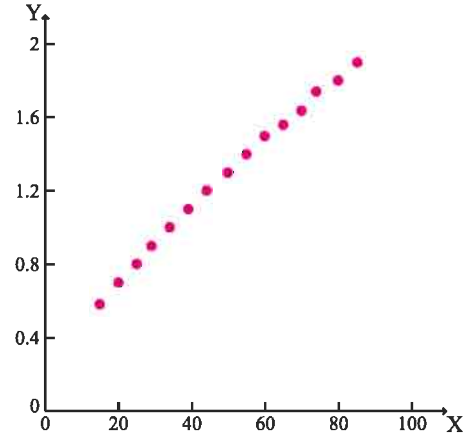
Les droites des moindres carrés de Y en X et de X en Y passent par le point moyen G du nuage associé à la série (X, Y).

Activité 1

Dans le tableau ci-dessous, on a relevé le poids (en Kg) et la surface corporelle (en m^2) correspondante de 15 sujets.

	Masse (X)	Surface corporelle (Y)
1	15	0.58
2	20	0.7
3	25	0.8
4	29	0.9
5	34	1
6	39	1.1
7	44	1.2
8	50	1.3
9	55	1.4
10	60	1.5
11	65	1.56
12	70	1.64
13	74	1.74
14	80	1.8
15	85	1.9

1. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart- type σ_X de la variable X.
b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart- type σ_Y de la variable Y.
2. Déterminer la covariance la série (X,Y).
3. On a représenté ci-contre le nuage de la série (X, Y).
a. Placer le point $G\left(\overline{X},\overline{Y}\right)$.
b. Comment semblent se répartir les points du nuage ?
c. Donner alors un ajustement affine par les moindres carrés de la série double (X,Y).
4. Donner une estimation de la surface corporelle d'un sujet qui pèse 62 KG.



III. 3 Coefficient de corrélation linéaire

On peut toujours au vu des formules précédentes construire une droite de régression.
Mais parfois cette dernière n'est d'aucune efficacité, dans la mesure où les prédictions que l'on fait à partir de cette droite ne sont pas raisonnables.
Pour savoir s'il est pertinent d'ajuster un nuage de point par les moindres carrés, on calcule un réel appelé coefficient de corrélation linéaire.

Définition

Soit (X,Y) une série statistique double. On appelle coefficient de corrélation linéaire le réel noté ρ_{XY} défini par $\rho_{XY} = \dfrac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y}$.

Propriétés

Soit (X,Y) une série statistique double. Alors $-1 \le \rho_{XY} \le 1$.
Le coefficient de corrélation linéaire est invariant par changement d'unité ou d'origine.

Interprétation du coefficient de corrélation linéaire

Les statisticiens conviennent que lorsque $|\rho_{XY}| > \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, l'ajustement affine est justifié et les prédictions faites au moyen de cet ajustement sont raisonnables.

Activité 4

Le tableau suivant donne l'effectif de la population scolaire de la $3^{ème}$ année de l'enseignement secondaire du mois d'octobre 1997 au mois d'octobre 2002.

Année (X)	1997	1998	1999	2000	2001	2002
Population scolaire en $3^{ème}$ année (Y)	67755	74581	79266	76138	80123	90087

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
2. Déterminer un ajustement par les moindres carrés de la série double (X,Y) puis donner une estimation de la population scolaire en $3^{ème}$ année secondaire au mois d'octobre 2010.

Activité 5

On donne la série double suivante, relative aux voitures selon leur puissance Y et la durée des pneumatiques X (en millier de kilomètres).

Y \ X	2	3	4	
20	0	8	30	38
25	5	20	7	32
30	25	3	2	30
	30	31	39	100

1. Calculer le coefficient de corrélation linéaire.
2. Un ajustement par les moindres carrés est-il justifié ?

III. 4 Exemple d'ajustement non affine

Exercice résolu

Le tableau ci-contre indique l'évolution du personnel paramédical tunisien dans le secteur public (techniciens supérieurs, infirmiers, auxiliaires de santé) de 1990 à 2005.

1. En numérotant les années de 0 à 15, déterminer les valeurs de la série double $(X, \ln Y)$, où X est le rang de l'année et Y est le nombre de paramédicaux de l'année correspondante.
2. On pose $Z = \ln Y$.
   a. Calculer le coefficient de corrélation et justifier que l'on peut procéder à un ajustement affine par les moindres carrés de la série (X,Z).
   b. Donner la droite de régression de Z en X.
3. Quel sera le nombre de paramédicaux en 2010 ?

Année	Paramédicaux
1990	23743
1991	24555
1992	25070
1993	25291
1994	25466
1995	25874
1996	26130
1997	26369
19989	26676
1999	27050
2000	27392
2001	30292
2002	28629
2003	29976
2004	29584
2005	29607

Solution

1.

x_i	y_i	$z_i = \ln(y_i)$	x_i^2	z_i^2	$x_i z_i$
0	23743	10.075	0	101.505	0
1	24555	10.108	1	102.171	10.108
2	25070	10.129	4	102.597	20.258
3	25291	10.138	9	102.778	30.414
4	25466	10.145	16	102.921	40.580
5	25874	10.160	25	103.230	50.800
6	26130	10.170	36	103.430	61.020
7	26369	10.179	49	103.612	71.253
8	26676	10.191	64	103.860	81.528
9	27050	10.205	81	104.142	91.845
10	27392	10.218	100	104.410	102.180
11	30292	10.318	121	106.461	113.498
12	28629	10.262	144	105.310	123.144
13	29976	10.308	169	106.254	134.004
14	29584	10.294	196	105.970	144.116
15	29607	10.295	225	105.990	154.425

2. a. Le calcul donne $\overline{X} = 7.5$, $\sigma_X \simeq 4.6$, $\overline{Z} \simeq 10.199$, $\sigma_Z \simeq 0.074$.

$\text{Cov}(X,Z) \simeq 0.326$, $\rho_{XZ} \simeq 0.960$.

Le coefficient de corrélation est très proche de 1
L'ajustement est donc justifié.

b. La droite de régression est d'équation $z = \dfrac{0.326}{(4.61)^2}(x - 7.5) + 10.199$.

Soit $z = 0.015(x - 7.5) + 10.199$.

3. Le nombre de paramédicaux sera de $e^{0.015(20-7.5)+10.199} \simeq 32419$.

Utilisation d'une calculatrice

Dans cet exercice la série est à données simples.

- Pour entrer les données taper $\boxed{x_i}$ $\boxed{\text{STO}}$ $\boxed{y_i}$ $\boxed{\text{M+}}$.
- Pour afficher la valeur du coefficient de corrélation, appuyer sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{r}$.
- Pour afficher la valeur de la pente de la droite de régression de Y en X, appuyer sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{b}$.
- Pour afficher la valeur de l'ordonné à l'origine de la droite de régression de Y en X, appuyer sur $\boxed{\text{RCL}}$ $\boxed{a}$.

Activité 6

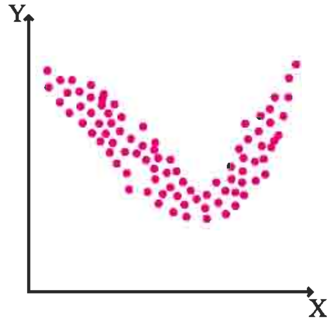
La résistance à l'avancement d'un poids lourd est une fonction de la vitesse. L'objet de cette activité est de déterminer la meilleur expression possible de cette fonction dans un intervalle de vitesse compris entre 10 km/h et 100 km/h. Cette résistance est mesurée en kW.
Les résultats de ces mesures sont consignés dans le tableau ci-dessous.

V (km/h)	10	20	30	40	50	60	70	80	90
R (kW)	2.6	5.8	9.9	15.4	23.6	34.5	49	67.2	89.1

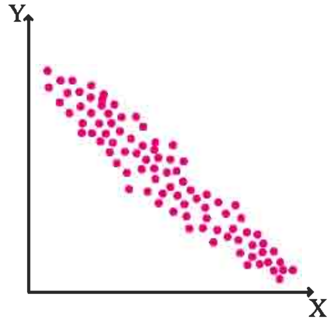
1. Dresser le tableau des valeurs de la série (X, Y) où $X = V^2$ et $Y = \dfrac{R}{V}$.
2. Donner le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y et une équation de la droite de régression de Y en X.
3. En déduire une relation entre R et V.
4. Donner une évaluation de la valeur de R pour une vitesse de 100 km/h.

1 Pour chacun des graphiques suivants, indiquer si le nuage de points justifie la recherche d'un ajustement affine.

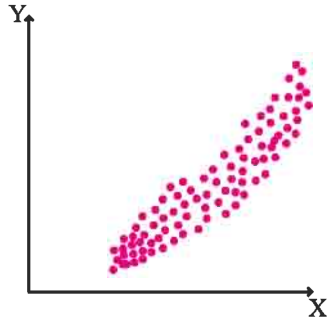
1.



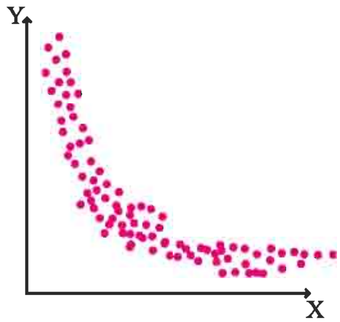
2.



3.



4.



2 On a relevé dans le tableau ci-dessous les poids (en kg) respectif de 12 pères et de leurs fils aînés.

X Poids du père	Y Poids du fils
65	63
63	61
67	66
64	62
68	67
62	60
70	69
66	65
68	67
67	67
69	66
71	70

1. Tracer le nuage de la série (X, Y).
2. Déterminer un ajustement affine par la méthode de Mayer.
3. Quel poids devrait avoir le fils aîné d'un homme qui pèse 77 kg ?

3 Le tableau ci-dessous indique l'évolution du nombre de médecins en Tunisie de l'année 1990 à l'année 2003.

Année	Rang de l'année (X)	Nombre de médecins (Y)
1990	1	4425
1991	2	4500
1992	3	5099
1993	4	5257
1994	5	5344
1995	6	5965
1996	7	6177
1997	8	6464
1998	9	6819
1999	10	7149
2000	11	7444
2001	12	7767
2002	13	7964
2003	14	8189

1. Tracer le nuage de la série (X, Y).

2. Déterminer le point moyen $G(\overline{X}, \overline{Y})$

3. Déterminer un ajustement affine par la méthode de Mayer.

4. Donner une estimation du nombre de médecin en Tunisie dans l'année 2010 ?

4 Le tableau suivant donne la répartition d'une population de 100 ménages selon les deux caractères X le nombre de pièces habitées et Y le nombre d'enfants.

X \ Y	0	1	2	3	4	Total
1	6	2	1	0	0	9
2	5	12	8	1	1	27
3	2	7	15	11	3	38
4	0	1	8	14	3	26
Total	13	22	32	26	7	100

1. a. Calculer la moyenne $\overline{X}$ et l'écart type σ_X de la variable X.
b. Calculer la moyenne $\overline{Y}$ et l'écart type σ_Y de la variable Y.
2. a. Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y.
b. Un ajustement affine de la série (X, Y) est-il justifié ?

5 Le tableau ci-dessous donne la charge maximale Y, en tonnes, qu'une grue peut lever pour une longueur X, en mètres, de la flèche.

X	Y
9	1.4
10	1.25
12	1
14	0.84
16	0.7
18	0.62
20	0.55
22	0.5

1. Les réponses numériques à cette question seront données à 10^{-2} près.
a. Représenter le nuage de points dans un repère orthogonal.
b. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
c. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.
Construire cette droite sur le graphique précédent.
d. Utiliser cette équation pour déterminer la charge maximale que peut lever la grue avec une flèche de 23 mètres.

6 Le tableau suivant recense par clinique le nombre de postes du personnel non médical en fonction du nombre de lits de la clinique.

Clinique	Nombre de lits (X)	Nombre de postes (Y)
C_1	122	185
C_2	177	221
C_3	77	114
C_4	135	164
C_5	109	125
C_6	88	118
C_7	185	193
C_8	128	160
C_9	120	151
C_{10}	146	172
C_{11}	100	150

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (X, Y) dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
2. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.
3. Donner une équation de la droite de régression de Y en X.
Pour les coefficients, on prendra les valeurs décimales arrondies à 10^{-1} près.
Tracer cette droite dans le repère précédent.
4. Une clinique possède 35 lits.

En utilisant les résultats obtenus dans la question 3, combien devrait-elle embaucher de personnel occupant un poste non médical ?

7 A/ Un club sportif a été crée en 1999, à l'origine le nombre d'adhérents était égal à 600. On donne dans le tableau suivant le nombre d'adhérents de 1999 à 2005.

Année	Rang (X)	Nombre d'adhérents (Y)
1999	0	600
2000	1	690
2001	2	794
2002	3	913
2003	4	1045
2004	5	1207
2005	6	1380

On pose $Z = \ln Y$.

1. a. Vérifier qu'on peut réaliser un ajustement affine par la méthode des moindres carrés de la série (X, Z).

b. Déterminer une prévision du nombre d'adhérents en 2006.

2. Justifier que $Y \simeq 602 \times (1.15)^X$.

B/ En fait le club a compté 2400 adhérents lors de l'année 2006.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(x) = \frac{3600}{1 + 0.5e^{-x}}$$

On suppose que le nombre d'adhérents en $(2006 + n)$ est égal à $f(n)$ où n est un entier naturel.

1. Déterminer la limite de $f(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

2. a. Reproduire et compléter le tableau suivant :

Année	2007	2008	2009	2010	2011
n	1	2	3	4	5
$f(n)$	3040				

b. Calculer la moyenne M du nombre prévisionnel d'adhérents entre 2007 et 2011.

3. Calculer la valeur moyenne $\overline{f}$ de f sur l'intervalle $[0.5, 5.5]$.

8 On a relevé la taille et le poids de 16 jeunes filles. Les résultats obtenus sont résumés dans le tableau suivant.

Tailles X (en cm)	Poids Y (en kg)
160	46
165	48
167	48
160	46
168	49
170	51
160	45
162	45
165	48
170	49
170	51
168	50
172	50
165	48
165	47
170	50

1. a. Construire, dans un repère orthogonal, le nuage de points de la série (X, Y).

b. Un ajustement affine est-il justifié ?

2. a. Déterminer le coefficient de corrélation entre X et Y.

b. Ecrire une droite de régression de Y en X.

c. Donner une estimation de la masse d'une jeune fille mesurant 180 cm.

3. Un journal de santé publie la loi de Lorentz qui donne une relation entre le poids M et la taille T pour une jeune fille, $M = (T - 100) - \frac{T - 130}{2}$.

Utiliser cette relation pour estimer la masse d'une jeune fille mesurant 180 cm.

9 Onze élèves de $7^{\text{ème}}$ année de base travaillent sur la proportionnalité.
Ils mesurent le rayon d'un disque puis évaluent l'aire de ce disque.
Les rayons, exprimés en cm, forme la série (X).

Les aires correspondantes, exprimées en cm^2, forment la série (Y).

Les résultat de cette expérience sont donnés dans le tableau suivant.

X (en cm)	Y (en cm^2)
2	12
2.5	20
3	28
3.5	38
4	50
4.5	64
5	78
5.5	95
6	113
6.5	133
7	154

1. Les deux séries sont-elles proportionnelles ?
2. On pose $Z=\sqrt{Y}$.
a. Construire, dans un repère orthogonal, le nuage de points de la série (X,Z). (Les valeurs de Z seront arrondis à 10^{-1} près).
b. Calculer le coefficient de corrélation ρ_{XZ}.
Interpréter le résultat.
c. Déterminer une équation de la droite de régression de Z en X.
(Les coefficients seront arrondis à 10^{-1} près).
d. En déduire une valeur approchée de π.

10 Une entreprise envisage la fabrication d'un nouveau produit.
Une étude a permis d'établir le tableau suivant où, pour différentes observations, X désigne la quantité de produit que la clientèle est disposée à acheter, et Y le prix de vente (en DT) d'une unité.

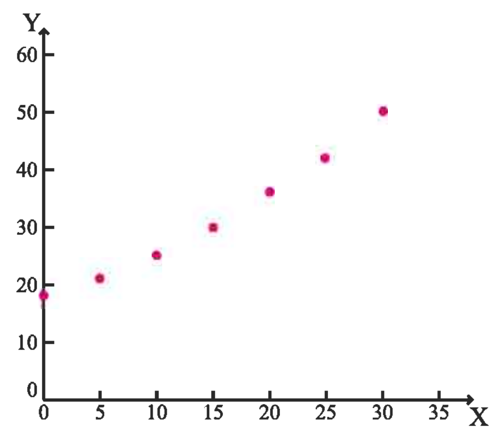
X	350	400	450	500	550	600
Y	140	120	100	95	85	70

1. Calculer le coefficient de corrélation ρ_{XY}.
2. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X. (les coefficients seront arrondis à 10^{-1} prés).
3. Soit $r(x)$ la recette correspondant à la vente de x articles au prix unitaire y.
a. Montrer que $r(x)=(226.5-0.3x)x$.
b. Etudier le variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x)=-0.3x^2+226.5x$.
c. En déduire le prix de vente pour lequel la recette est maximale. Calculer cette recette maximale.

11 Le tableau suivant donne la population d'une ville entre les années 1975 et 2005.

Année	Rang de l'année (X)	Population (en milliers d'habitants) (Y)
1975	0	18
1980	5	21
1985	10	25
1990	15	30
1995	20	36
2000	25	42
2005	30	50

Le nuage de points associé à ce tableau est représenté graphiquement ci-après.



A/ 1. Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y.
2. a. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.
b. Tracer cette droite sur le graphique ci-dessus.
c. En déduire une estimation de la population en 2008 à un millier prés.

B/ 1. L'allure du nuage suggère à chercher un ajustement par une fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=ae^{bx}$ où a et b sont des réels.
Déterminer a et b tels que $f(0)=18$ et $f(30)=50$.
On donnera une valeur arrondie de b au millième.
2. Déduire de cet ajustement une estimation de la population en 2008 à un millier prés.
3. Tracer la courbe de f sur le même graphique.
4. La population en 2008 était de 55 milliers.
Lequel des deux ajustement vous semble le plus pertinent ? Justifier votre choix.

C/ On considère maintenant que, pour une année, la population est donnée en fonction du rang x par $f(x)=18e^{0.034x}$.
1. Calculer la valeur moyenne $\overline{f}$ de la fonction f sur $[0,30]$. On donnera le résultat arrondi au dixième.
2. A l'aide d'une lecture graphique, déterminer l'année au cours de laquelle la population atteint cette valeur moyenne.

12 Le tableau ci-dessous donne l'évolution de la population d'un pays de 1965 à 2000.
T désigne le rang de l'année et P la population en millions d'habitants.

Année	Rang de l'année (T)	P
1965	0	8
1970	5	8.9
1975	10	9.9
1980	15	11
1985	20	12
1990	25	13.5
1995	30	15
2000	35	16.6

A/ 1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (T,P) dans un repère orthogonal.
• Sur l'axe des abscisses, choisir 2 cm pour 5 unités (5 ans).
• Sur l'axe des ordonnées, placer 8 à l'origine, puis choisir 2 cm pour une
unité (1 million d'habitants).
2. Les experts cherchent à modéliser cette évolution par une fonction f dont la courbe est voisine du nuage de points.
On pose $Y=\ln P$.
a. Donner une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut du coefficient de corrélation linéaire de la série (T,Y).
b. Déterminer une équation de la droite de régression de Y en T. (Les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).
c. En déduire l'expression de la population P en fonction du rang T de l'année.

B/ On admet que la fonction f définie sur $[0,35]$ par $f(t)=8.e^{0.02t}$ est une
modélisation satisfaisante de l'évolution de la population (en millions d'habitants) de 1965 à 2000.
1. Étudier le sens de variation de f sur $[0,35]$ et dresser le tableau de variation de f sur cet intervalle.
2. Construire la courbe représentative de f, notée (C), dans le repère de la partie A.
3. On pose $I=\int_0^{35} f(t)dt$.
a. Donner une valeur approchée de I arrondie à 10^{-2} près.
b. En déduire la population moyenne m du pays durant ces 35 années et la
représenter sur le graphique.

4. Calculer le rapport $\dfrac{f(t+1)-f(t)}{f(t)}$ et en donner une interprétation en terme de pourcentage.
5. Si le modèle exponentiel étudié dans la partie B restait valable après 2000, en
quelle année la population aurait-elle dépassé les 19 millions d'habitants ?

15 On étudie la croissance d'une plante à partir d'un instant considéré comme initial.
Le tableau ci-dessous indique le diamètre D de la tige après T semaines.

Temps T en semaines	Diamètre D en centimètres
0	0.4
2	1.2
6	5.4
8	5.8
10	6.4
12	6.9

1. Représenter le nuage de points associé à cette série statistique.

2. On pose $U = \ln\left(\dfrac{8}{D} - 1\right)$.

a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série (T, U).

b. Déterminer par les moindres carrés une équation de la droite d'ajustement de U en T.

c. Vérifier que pour cette plante, le diamètre de sa tige principale est donné par une relation de la forme $D(t) = \dfrac{8}{1 + ce^{-at}}$ où a et c sont deux réels que l'on précisera.

3. a. Pour les valeurs de a et c trouvées, tracer dans le repère précédent la fonction $f : t \mapsto D(t)$ pour $t \geq 0$

b. Le diamètre de la plante dépassera-t-il 8 cm ?