Chapitre 1

Continuité et limites

I. Rappels

Dans ce paragraphe nous rappelons les principaux théorèmes vus en troisième année.

I.1 Continuité et limite en un réel

Activité 1

Dans chacun des cas suivants déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et justifier la continuité de f en tout réel de son ensemble de définition.

$f : x \mapsto 1 - x + x^2$. $\qquad f : x \mapsto \left|\dfrac{-5x+1}{x^2+4}\right|$.

$f : x \mapsto x - \dfrac{1}{x-1}$.

$f : x \mapsto \dfrac{1}{(x+1)(x+2)}$. $\qquad f : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x+3}$.

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel.
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition.
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout réel.

Théorème

Soit f et g deux fonctions définies sur un intervalle ouvert I et a un réel de I.

- Si f et g sont continues en a, alors les fonctions $f+g$ et $f \times g$ sont continues en a.
- Si f est continue en a, alors les fonctions αf $(\alpha \in \mathbb{R})$, $|f|$ et f^n $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ sont continues en a.
- Si f est continue en a et $f(a) \neq 0$, alors les fonctions $\dfrac{1}{f}$ et $\dfrac{1}{f^n}$ $\left(n \in \mathbb{N}^*\right)$ sont continues en a.
- Si f et g sont continues en a et $g(a) \neq 0$, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est continue en a.
- Si f est positive sur I et f est continue en a, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue en a.

Activité 2

Soit la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x^2 - 4x + 2}{|x-1|}$.

1. Vérifier que pour tout réel $x \neq 1$, $f(x) = 2|x-1|$.
2. En déduire $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.

Théorème

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I, sauf peut-être en un réel a de I.
S'il existe une fonction g définie sur I, continue en a et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = g(a)$.