

# Formulaire sur les inégalités

## Inégalité 1 (Inégalité triangulaire et généralisation)

$$|a + b| \leq |a| + |b| \implies \left| \sum_{i=0}^n x_i \right| \leq \sum_{i=0}^n |x_i|$$

## Inégalité 2 (Inégalité triangulaire-bis)

$$||a| - |b|| \leq |a - b|$$

## Inégalité 3 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ , tel que  $a < b$  et  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{(n+1)}$ . Soit  $M$  un majorant de  $|f^{(n+2)}|$  sur  $[a; b]$ . Alors,

$$\forall x \in [a; b], |f(x) - \underbrace{T_{n,f,a}(x)}_{\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k}| \leq M \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

## Inégalité 4 (Inégalité de convexité)

$f$  est convexe sur  $I$  si et seulement si :

$$- \forall a, b \in I, \forall t \in [0; 1], f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

$$- \forall x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$- \forall a < b, \forall t \in [a; b], f(t) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$$

## Inégalité 5 (Inégalité de concavité)

$f$  est concave sur  $I$  si et seulement si :

$$- \forall a, b \in I, \forall t \in [0; 1], f(ta + (1-t)b) \geq tf(a) + (1-t)f(b)$$

$$- \forall x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \leq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

$$- \forall a < b, \forall t \in [a; b], f(t) \geq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(t - a) + f(a)$$

## Exemple 1 (Exemples d'inégalité de concavité et de convexité)

$$\forall x \in \mathbb{R}, x - 1 \geq \ln(x)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geq x + 1$$

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}], \sin(x) \geq \frac{2}{\pi}x$$

## Inégalité 6 (Inégalité de Jensen)

Soit  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , convexe. Alors  $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [1; n], x_i \in I, \lambda_i \in \mathbb{R}_+$

vérifiant  $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ , on a  $f(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i) \leq \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$ .

## Exemple 2 (Inégalité de Jensen en probabilité)

Soit  $X$  une variable aléatoire et  $f$  une fonction convexe, alors on a

$$f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X)).$$

## Exemple 3 (Conséquences de $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$ )

$$\mathbb{E}(X^2) < +\infty \implies \mathbb{E}(X) < +\infty \text{ et } \text{Var}(X) < +\infty$$

## Inégalité 7 (Inégalité des accroissements finis)

$f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , dérivable telle que  $f'$  est bornée. Soient  $m = \inf_I f'$  et  $M = \sup_I f'$ . Alors,  $\forall a, b \in I, a \leq b, m(b-a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b-a)$ .

## Inégalité 8 (Inégalité des accroissements finis-bis)

Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $a < b$ .  $f : [a; b] \rightarrow \mathbb{C}$  et  $g : [a; b] \rightarrow \mathbb{R}$ , continues sur  $[a; b]$  et dérivable sur  $]a; b[$ .

On suppose  $\forall t \in ]a; b[, |f'(t)| \leq g'(t)$ . Alors  $|f(b) - f(a)| \leq g(b) - g(a)$ .

## Inégalité 9 (Inégalité des moyennes)

Si  $n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [1; n], a_k \in \mathbb{R}_+$ , on a

$$\underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}_{m_{\text{harm}}(a_1, \dots, a_n)} \leq \underbrace{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n a_k}}_{m_{\text{geom}}(a_1, \dots, a_n)} \leq \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k}_{m_{\text{arith}}(a_1, \dots, a_n)}$$

**Inégalité 10 (Lemme de Gauss)**

Soient  $a, b \in \mathbb{R}_+, (p, q)$  un couple d'exposants conjugués (id,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ).

$$\text{Alors } ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Inégalité 11 (Inégalité de Hölder)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \in \mathbb{R}_+, y_i \in \mathbb{R}_+, (p, q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ , un couple d'exposants conjugués (ie  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ),

$$\text{on a } \sum_{i=1}^n x_i y_i \leq \left( \sum_{i=1}^n (x_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum_{i=1}^n (y_i)^q \right)^{\frac{1}{q}}.$$

**Inégalité 12 (Inégalité de Minkowski)**

Soit  $n \in \mathbb{N}^*, p \geq 1, \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \in \mathbb{R}_+, y_i \in \mathbb{R}_+$ . Alors

$$\left( \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \sum_{i=1}^n (x_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \sum_{i=1}^n (y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Inégalité 13 (Inégalité de Bernoulli)**

Soit  $h \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}, (1 + h)^n \geq 1 + nh$ .

**Inégalité 14 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)**

Soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel,  $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$

**Exemple 4 (Exemples d'inégalité de Cauchy-Schwartz)**

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (\alpha_i), (\beta_i) \in \mathbb{R}^n, \left( \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right)^2 \leq \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \sum_{i=1}^n \beta_i^2$$

$$\forall f, g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), \left( \int_a^b fg \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), (\text{Tr}(^tAB))^2 \leq \text{Tr}(^tAA) \text{Tr}(^tBB)$$

**Inégalité 15 (Inégalité de Markov classique)**

Soit  $\mathbb{P}$  une loi de probabilité. Alors,  $\forall t > 0, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{t}$ .

**Inégalité 16 (Inégalité de Markov généralisée)**

Soit  $\mathbb{P}$  une loi de probabilité et  $f$  une fonction croissante et positive. Alors,

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(f(X))}{f(t)}.$$

**Inégalité 17 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)**

Soit  $X$  une variable aléatoire d'espérance  $\mu$  et de variance finie  $\sigma^2$ . Alors,

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

**Inégalité 18 (Inégalité de Hoeffding)**

Soit une suite  $(X_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  de variables aléatoires réelles indépendantes vérifiant, pour deux suites  $(a_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}, (b_k)_{k \in \llbracket 1; n \rrbracket}$  de nombres réels tels que :

$\forall k, a_k < b_k$  et  $\mathbb{P}(a_k \leq X_k \leq b_k) = 1$  En posant  $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ , on a alors

$$\forall t > 0, \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq t) \leq \exp \left( - \frac{2n^2 t^2}{\sum_{k=1}^n (b_k - a_k)^2} \right)$$

**Inégalité 19 (Théorème de la projection sur un convexe complet)**

Soient  $E$  un espace préhilbertien réel,  $x$  un vecteur et  $C$  un ensemble convexe complet non vide de  $E$ . Il existe une unique application  $P_C$  de  $E$  dans  $C$ , dite projection sur le convexe, qui à  $x$  associe le point  $P_C(x)$  de  $C$ , tel que la distance de  $x$  à  $C$  soit égale à celle de  $x$  à  $P_C(x)$ . Le vecteur  $P_C(x)$  est l'unique point de  $C$  vérifiant les deux propositions suivantes, qui sont équivalentes :

1.  $\forall y \in C, \|x - P_C(x)\| \leq \|x - y\|$
2.  $\forall y \in C, \langle x - P_C(x), y - P_C(x) \rangle \leq 0$