Formulaire sur les inégalités

Inégalité 1 (Inégalité triangulaire et généralisation)

$$|a+b| \leqslant |a|+|b| \Longrightarrow \left|\sum_{i=0}^{n} x_i\right| \leqslant \sum_{i=0}^{n} |x_i|$$

Inégalité 2 (Inégalité triangulaire-bis)

$$||a|-|b|| \leqslant |a-b|$$

Inégalité 3 (Inégalité de Taylor-Lagrange)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, tel que $a < b$ et $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{K}$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et f de classe $\mathcal{C}^{(n+1)}$. Soit M un majorant de $|f^{(n+2)}|$ sur $[a;b]$. Alors,

$$\forall x \in [a;b], |f(x) - \underbrace{T_{n,f,a}(x)}_{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k}| \leqslant M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Inégalité 4 (Inégalité de convexité)

f est convexe sur I si et seulement si :

— $\forall a, b \in I, \forall t \in [0;1], f(ta+(1-t)b) \leqslant tf(a)+(1-t)f(b)$

— $\forall x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

— $\forall a < b, \forall t \in [a;b], f(t) \leqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$

Inégalité 5 (Inégalité de concavité)

f est concave sur I si et seulement si :

— $\forall a, b \in I, \forall t \in [0;1], f(ta+(1-t)b) \geqslant tf(a)+(1-t)f(b)$

— $\forall x_0 \in I, \forall x \in I, f(x) \leqslant f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$

— $\forall a < b, \forall t \in [a;b], f(t) \geqslant \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)+f(a)$

Exemple 1 (Exemples d'inégalité de concavité et de convexité)

$$\forall x \in \mathbb{R}, x-1 \geqslant \ln(x)$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x \geqslant x+1$$
$$\forall x \in [0;\frac{\pi}{2}], \sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}x$$
$$\forall a, b \geq 0, (a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p+b^p)$$

Inégalité 6 (Inégalité de Jensen)

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, convexe. Alors $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [\![1;n]\!], x_i \in I, \lambda_i \in \mathbb{R}_+$ vérifiant $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, on a $f(\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i x_i) \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i)$.

Exemple 2 (Inégalité de Jensen en probabilité)

Soit X une variable aléatoire et f une fonction convexe, alors on a $f(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(f(X))$.

Exemple 3 (Conséquences de $\mathbb{E}(X^2) < +\infty$)

$$\mathbb{E}(X^2) < +\infty \Longrightarrow \mathbb{E}(X) < +\infty \text{ et } \mathrm{Var}(X) < +\infty$$

Inégalité 7 (Inégalité des accroissements finis)

$f : I \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, dérivable telle que f' est bornée. Soient $m = \inf\limits_I f'$ et $M = \sup\limits_I f'$. Alors, $\forall a, b \in I, a \leqslant b, m(b-a) \leqslant f(b)-f(a) \leqslant M(b-a)$.

Inégalité 8 (Inégalité des accroissements finis-bis)

Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. $f : [a;b] \longrightarrow \mathbb{C}$ et $g : [a;b] \longrightarrow \mathbb{R}$, continues sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$.
On suppose $\forall t \in]a;b[, |f'(t)| \leqslant g'(t)$. Alors $|f(b)-f(a)| \leqslant g(b)-g(a)$.

Inégalité 9 (Inégalité des moyennes)

Si $n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in [\![1;n]\!], a_k \in \mathbb{R}_+$, on a

$$\underbrace{\frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}}_{m_{harm}(a_1,\ldots,a_n)} \leqslant \underbrace{\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_k}}_{m_{geom}(a_1,\ldots,a_n)} \leqslant \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k}_{m_{arith}(a_1,\ldots,a_n)}.$$

Inégalité 10 (Lemme de Gauss)

Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$,(p, q) un couple d'exposants conjugués (id, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$).

$$\text{Alors } ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Inégalité 11 (Inégalité de Hölder)

Soit $n \in \mathbb{N}^*, \forall i \in [\![1; n]\!], x_i \in \mathbb{R}_+, y_i \in \mathbb{R}_+$. $(p; q) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$, un couple d'exposants conjugués (ie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$),

$$\text{on a } \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i)^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Inégalité 12 (Inégalité de Minkowski)

Soit $n \in \mathbb{N}^*, p \geqslant 1, \forall i \in [\![1; n]\!], x_i \in \mathbb{R}_+, y_i \in \mathbb{R}_+$. Alors

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i)^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} (y_i)^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Inégalité 13 (Inégalité de Bernoulli)

Soit $h \in \mathbb{R}_+, n \in \mathbb{N}, (1 + h)^n \geqslant 1 + nh$.

Inégalité 14 (Inégalité de Cauchy-Schwartz)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, $\forall x, y \in E, <x, y>^2 \leqslant <x, x><y, y>$

Exemple 4 (Exemples d'inégalité de Cauchy-Schwartz)

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (\alpha_i), (\beta_i) \in \mathbb{R}^n, \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2$$

$$\forall f, g \in \mathcal{C}([a; b], \mathbb{R}), \left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}), \left(\mathrm{Tr}({}^tAB)\right)^2 \leqslant \mathrm{Tr}({}^tAA)\mathrm{Tr}({}^tBB)$$

Inégalité 15 (Inégalité de Markov classique)

Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité. Alors, $\forall t > 0$, $\mathbb{P}(X \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X)}{t}$.

Inégalité 16 (Inégalité de Markov généralisée)

Soit $\mathbb{P}$ une loi de probabilité et f une fonction croissante et positive. Alors,

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(f(X))}{f(t)}.$$

Inégalité 17 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Soit X une variable aléatoire d'espérance μ et de variance finie σ^2. Alors,

$$\forall \alpha > 0, \mathbb{P}(|X - \mu| \geq \alpha) \leq \frac{\sigma^2}{\alpha^2}.$$

Inégalité 18 (Inégalité de Hoeffding)

Soit une suite $(X_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ de variables aléatoires réelles indépendantes vérifiant, pour deux suites $(a_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$, $(b_k)_{k \in [\![1;n]\!]}$ de nombres réels tels que :

$\forall k, a_k < b_k$ et $\mathbb{P}(a_k \leq X_k \leq b_k) = 1$ En posant $S_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, on a alors

$$\forall t > 0,\ \mathbb{P}(S_n - \mathbb{E}(S_n) \geq t) \leq \exp\left(-\frac{2n^2t^2}{\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)^2}\right)$$

Inégalité 19 (Théorème de la projection sur un convexe complet)

Soient E un espace préhilbertien réel, x un vecteur et C un ensemble convexe complet non vide de E. Il existe une unique application P_C de E dans C, dite projection sur le convexe, qui à x associé le point $P_C(x)$ de C, tel que la distance de x à C soit égale à celle de x à $P_C(x)$. Le vecteur $P_C(x)$ est l'unique point de C vérifiant les deux propositions suivantes, qui sont équivalentes :

1. $\forall y \in C, \| x - P_C(x) \| \leq \| x - y \|$
2. $\forall y \in C, < x - P_C(x), y - P_C(x) > \leq 0$