Departamento de Sistemas e Computação – FURB
Curso de Ciência da Computação
Disciplina de Teoria dos Grafos

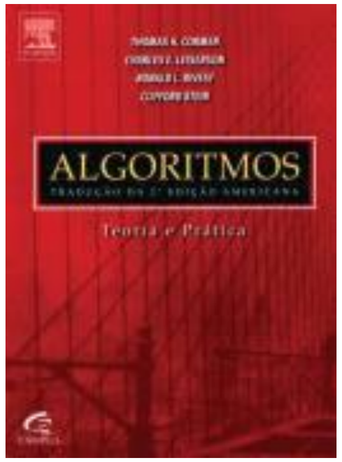
Coloração

Prof. Aurélio Hoppe
aureliof@furb.br
http://www.inf.furb.br/~aurelio/

Grupo de Processamento de Imagens,
Análise de dados, Robótica e
Simulação computacional

Bibliografia

Márcia A. Rabuske. **Introdução à Teoria dos Grafos**. Editora da UFSC. 1992



Thomas Cormen et al. **Algoritmos**: teoria e prática. Ed. Campus. 2004.

Joan M. Aldous, Robin J. Wilson. **Graphs and Applications**: as introductory approach. Springer. 2001

Tópicos

- Motivação
- Introdução/definições
- Algoritmos de coloração
- Determinação do número cromático
- Exercícios

Motivação

- Um fabricante de produtos químicos necessita armazenar produtos num depósito. Alguns produtos reagem violentamente quando entram em contato uns com os outros e o fabricante decide dividir o depósito em áreas para separar pares de produtos reagentes. Na tabela abaixo, os produtos estão listados de “a” a “g” e um asterisco indica pares de produtos que devem ficar separados.

  Qual é o menor número de áreas necessárias para armazenar todos os produtos com segurança?

	a	b	c	d	e	f	g
a		*	*	*			*
b	*		*	*	*		*
c	*	*		*		*	
d	*	*	*			*	
e		*					
f			*	*			*
g	*	*				*	

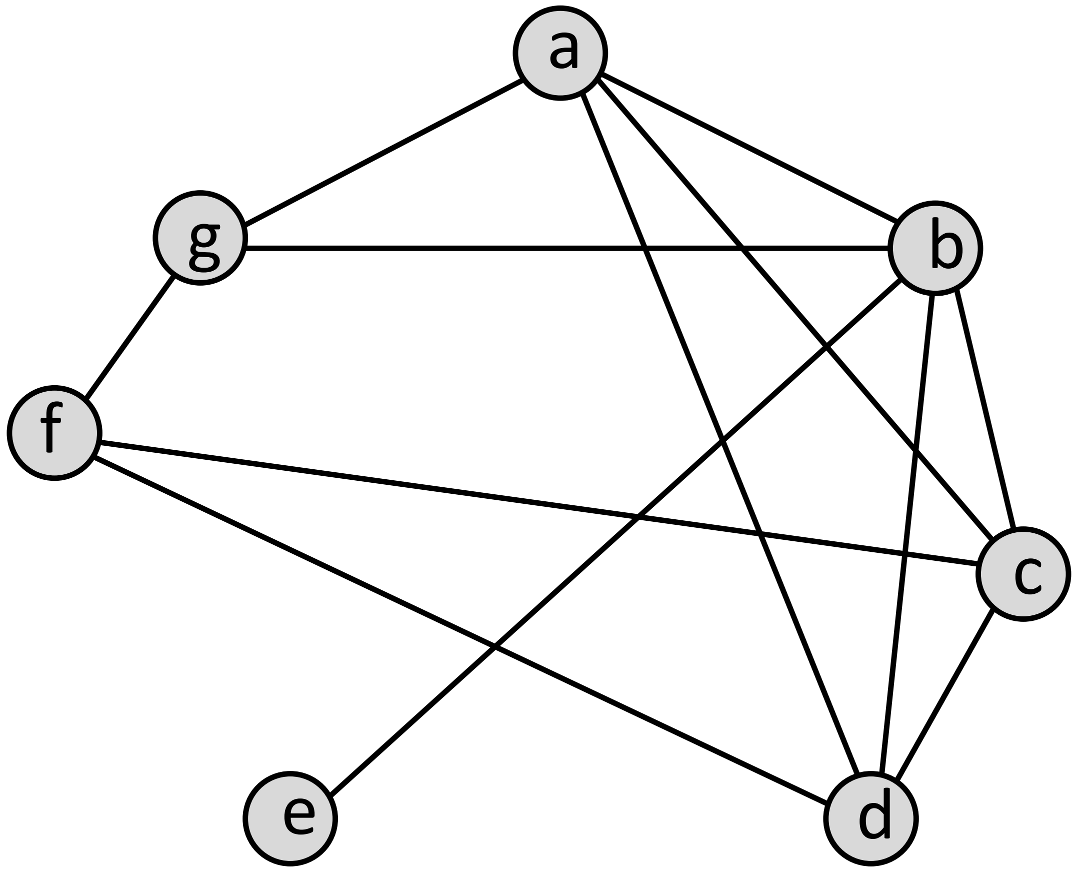
Solução

1. Identificamos o problema como passível de ser resolvido com auxílio da Teoria dos Grafos
2. Modelamos o problema como um grafo
3. Aplicamos algum teorema ou algoritmo para encontrar a solução do problema

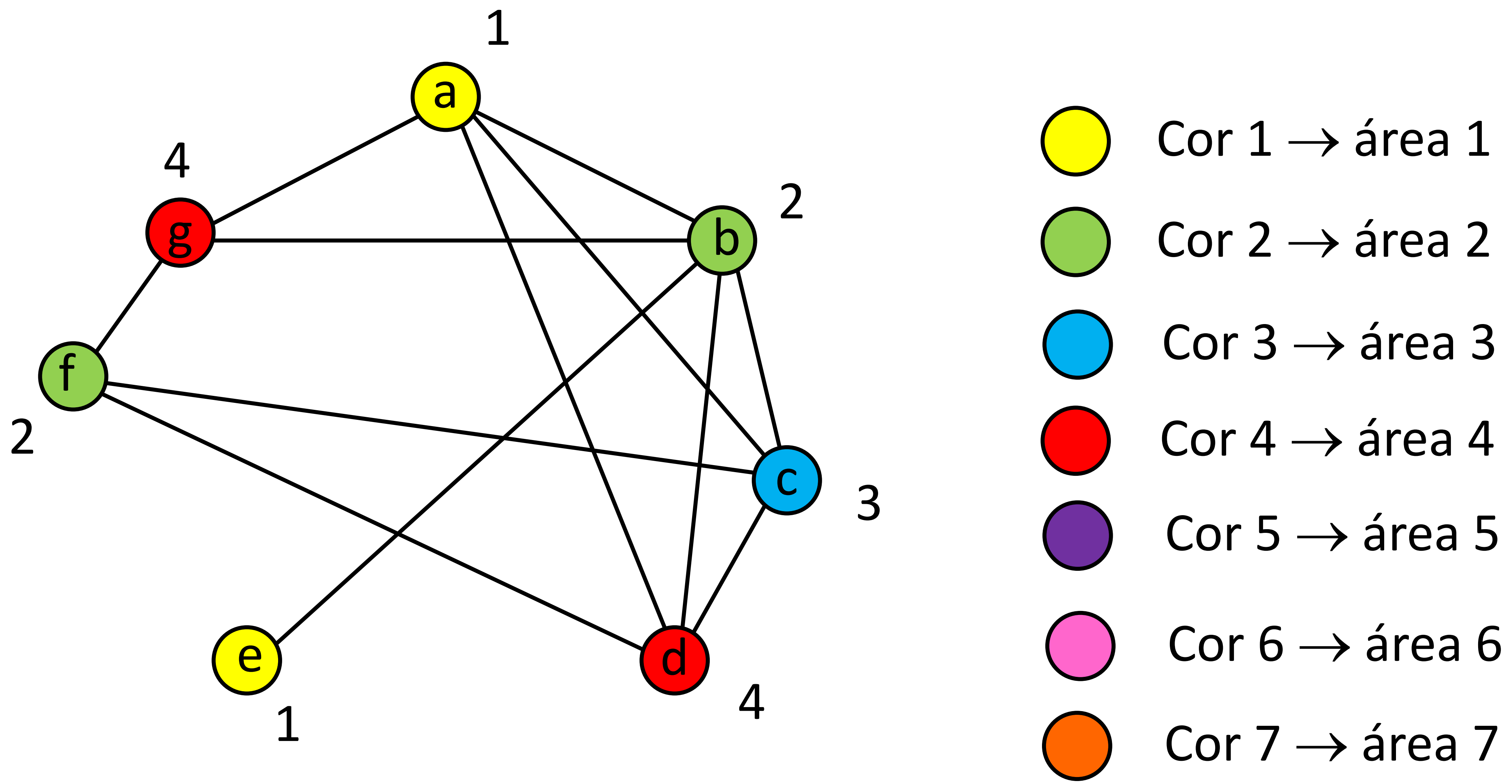
Solução

- Modelagem:
  V = produtos químicos
  E = ligam 2 produtos que reagem entre si

	a	b	c	d	e	f	g
a		*	*	*			*
b	*		*	*	*		*
c	*	*		*		*	
d	*	*	*			*	
e		*					
f			*	*			*
g	*	*				*	



Solução: coloração de vértices



- Resultado: quatro áreas: {a, e}, {b, f}, {c}, {d, g}

Definições

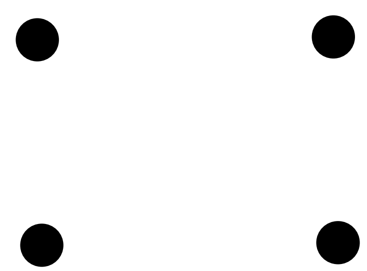
- Seja G um grafo simples. Uma **k-coloração** de G é uma atribuição de no máximo k cores aos vértices de G de tal forma que vértices adjacentes recebem cores diferentes.

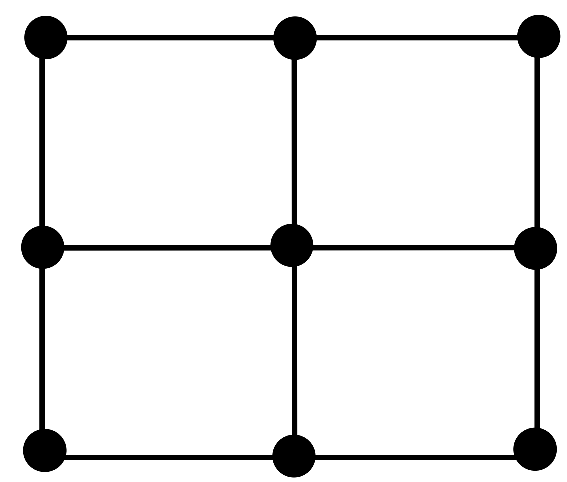
  Se G possui uma K-coloração, então G é dito **k-colorável**.

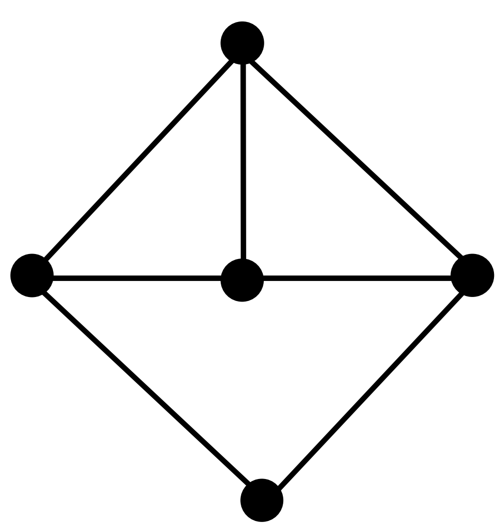
- O **número cromático** de G, denotado por $\chi(G)$, é o menor número k para o qual G é k-colorável.

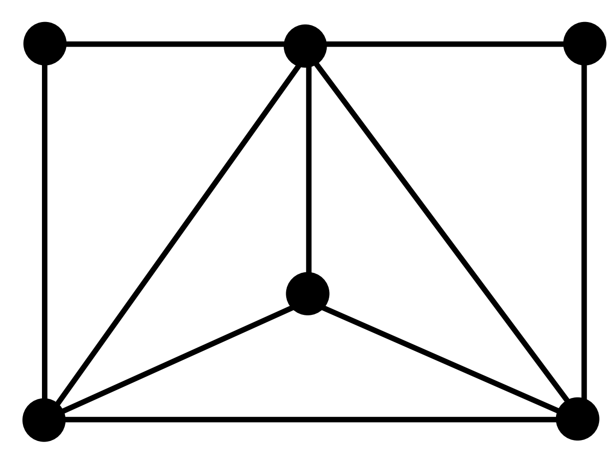
Exercícios

Determine χ(G) para cada um dos grafos abaixo:









Exercícios

Escreva o número cromático de cada um dos grafos a seguir:

a. grafo completo K_n

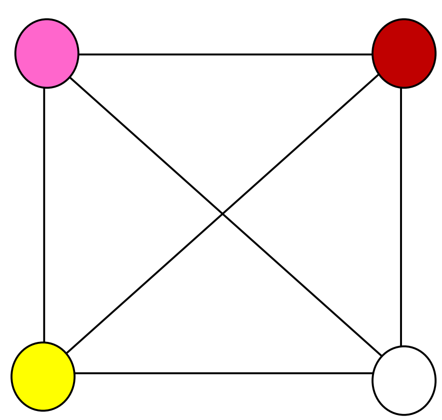
b. grafo bipartido completo $K_{r,s}$

c. grafo ciclo Cn (com $n \geq 3$)

d. uma árvore

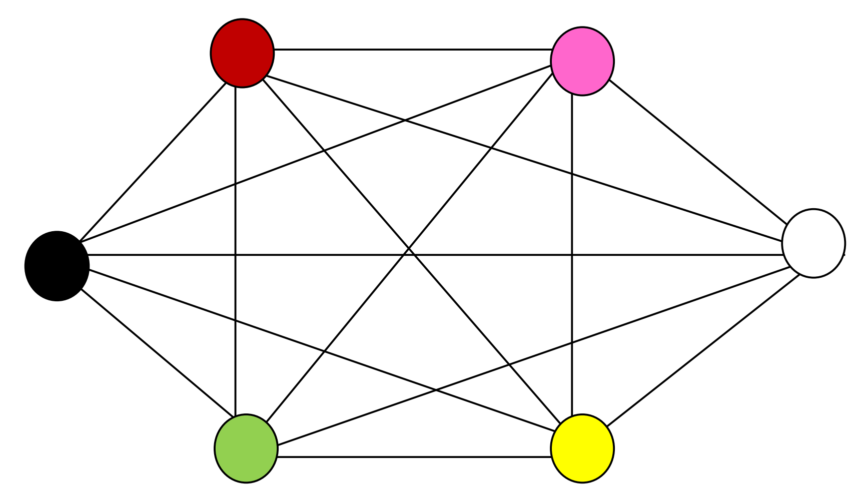
Coloração de Vértices

- Está claro que crom(K_n) = n , então existem grafos com número cromático arbitrariamente grande



K_4

crom(K_4) = 4

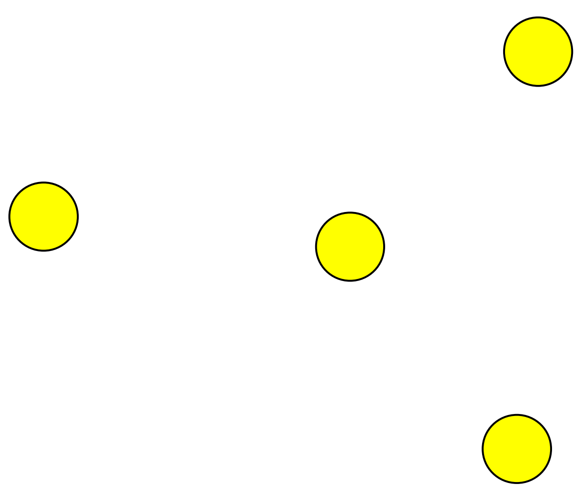


K_6

crom(K_6) = 6

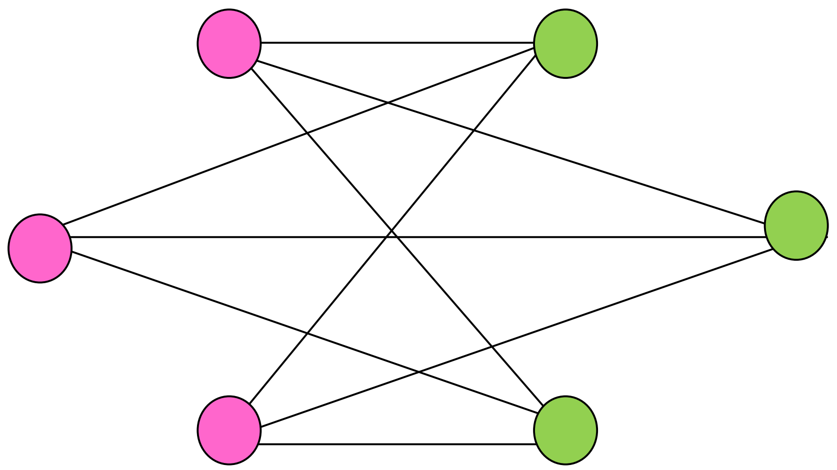
Coloração de Vértices

crom(G) = 1 se e somente se G é um grafo nulo. E crom(G) = 2 se e somente se G é um grafo bipartido não nulo



N_4

$crom(N_4) = 1$



$K_{3,3}$

$crom(K_{3,3}) = 2$

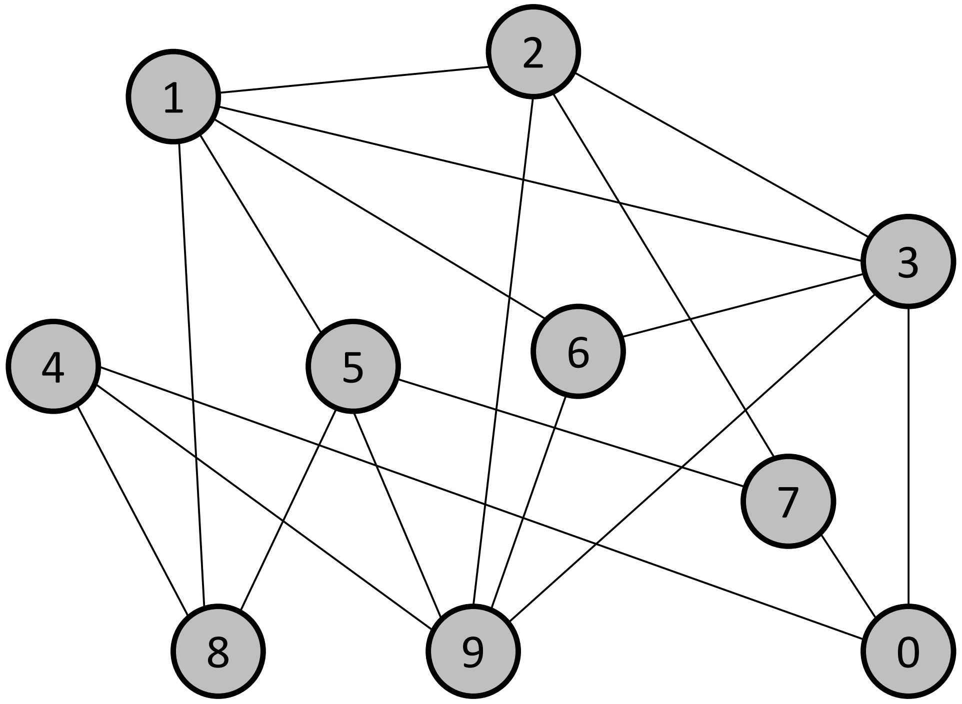
Algoritmo de coloração sequencial

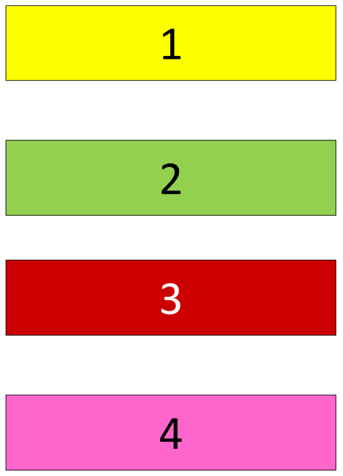
- **Entrada**: Grafo G com lista de vértices $v_1, v_2, \ldots v_n$
- **Saída**: uma coloração de vértices $f : V \rightarrow \{1,2,\ldots\}$

```
Para i = 1,..., n faça
     f(vi) ← menor índice de cor não usado por
            qualquer dos vizinhos de vi já
            coloridos;
Fim-para;
Retorne f;
```

Algoritmo de coloração sequencial

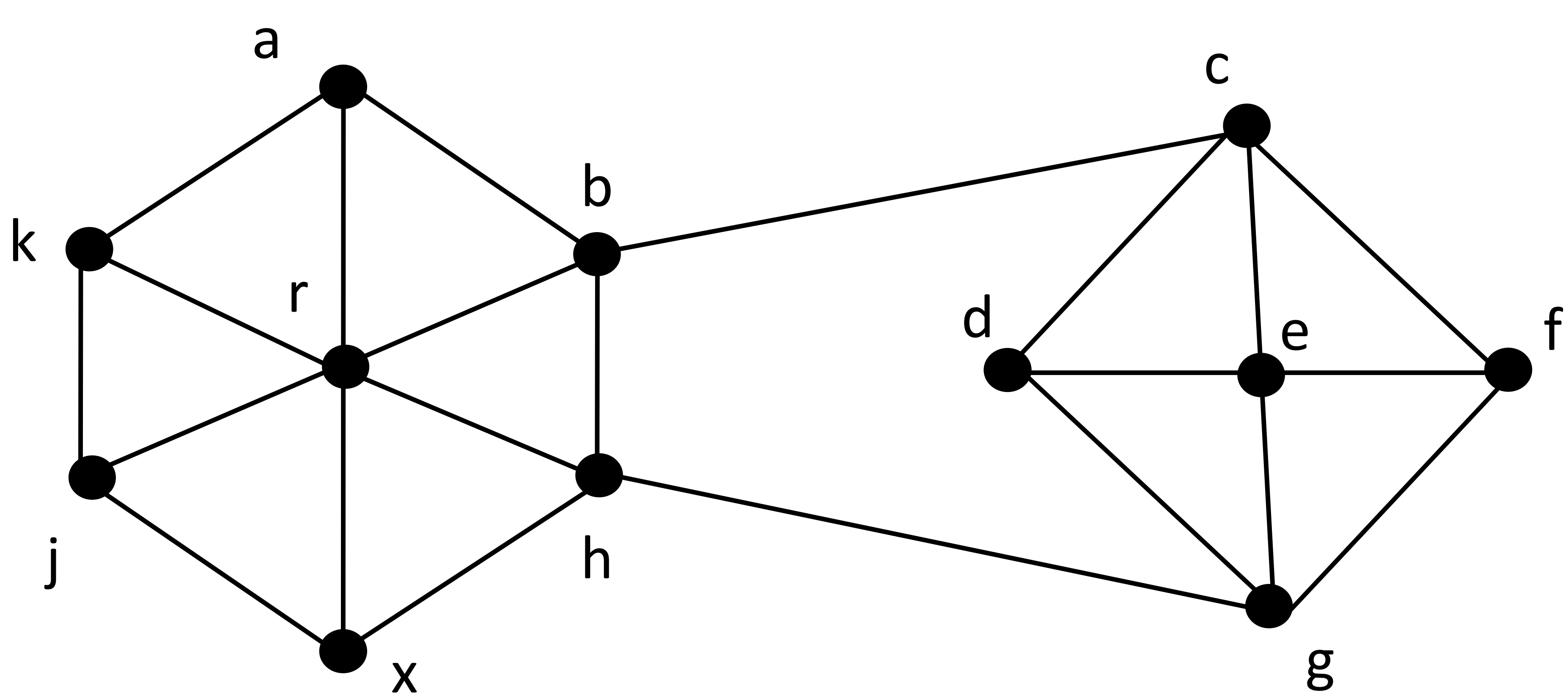
- Aplicando o algoritmo ao exemplo abaixo tem-se um grafo 4-colorável:





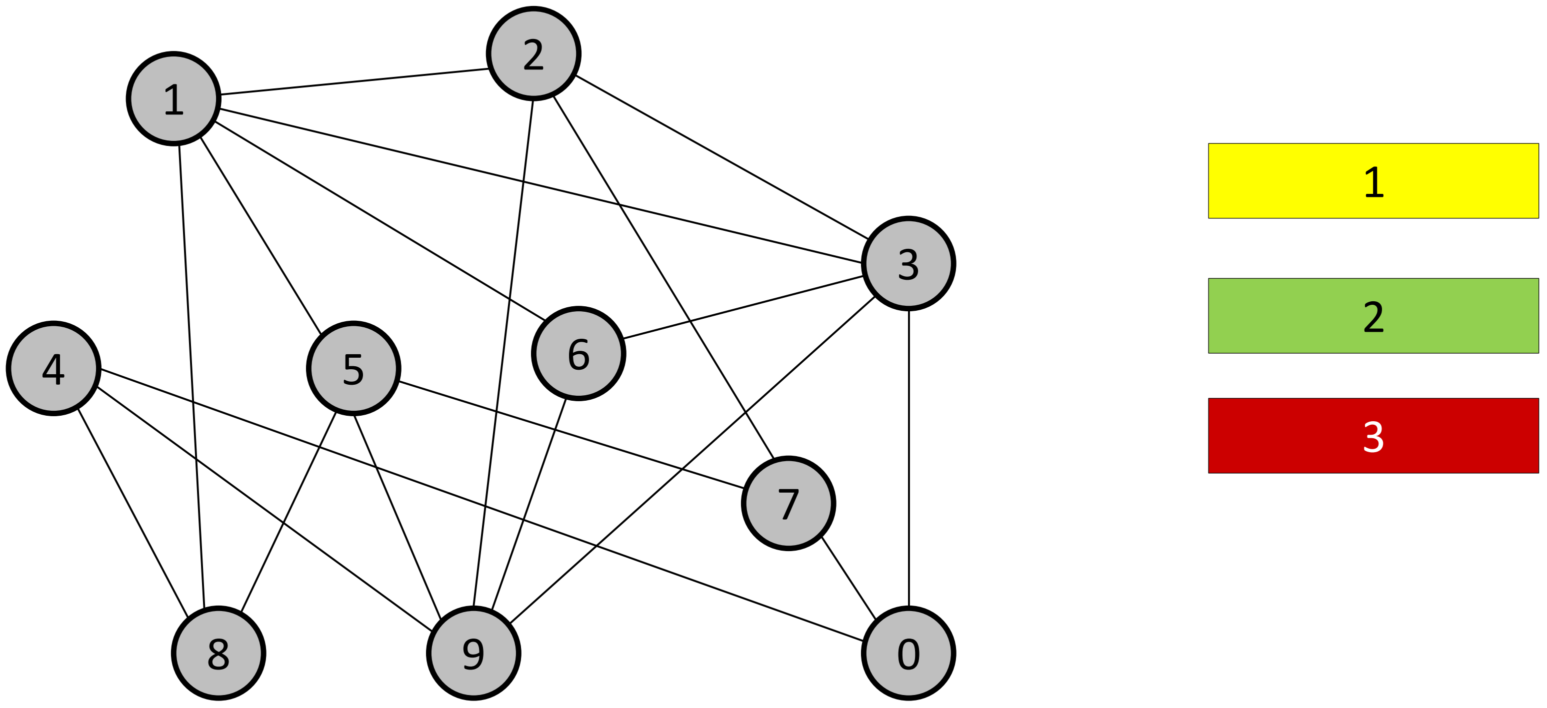
Exercício

- Utilizando o algoritmo de coloração sequencial, encontre uma coloração para o grafo abaixo (vá colorindo os vértices em ordem alfabética)



Algoritmo de coloração sequencial

- Porém o grafo exemplo é 3-colorável:



Algoritmo de coloração heurística

- Várias heurísticas para coloração são baseadas na noção de que um vértice de grau maior é mais difícil de ser colorido no final do que um vértice de grau menor.
- Definições:
  Grau não colorido de um vértice v não colorido é igual ao número de vértices adjacentes a v ainda não coloridos.

  Grau colorido de um vértice v é o número de **cores** diferentes usadas para colorir vértices adjacentes a v.

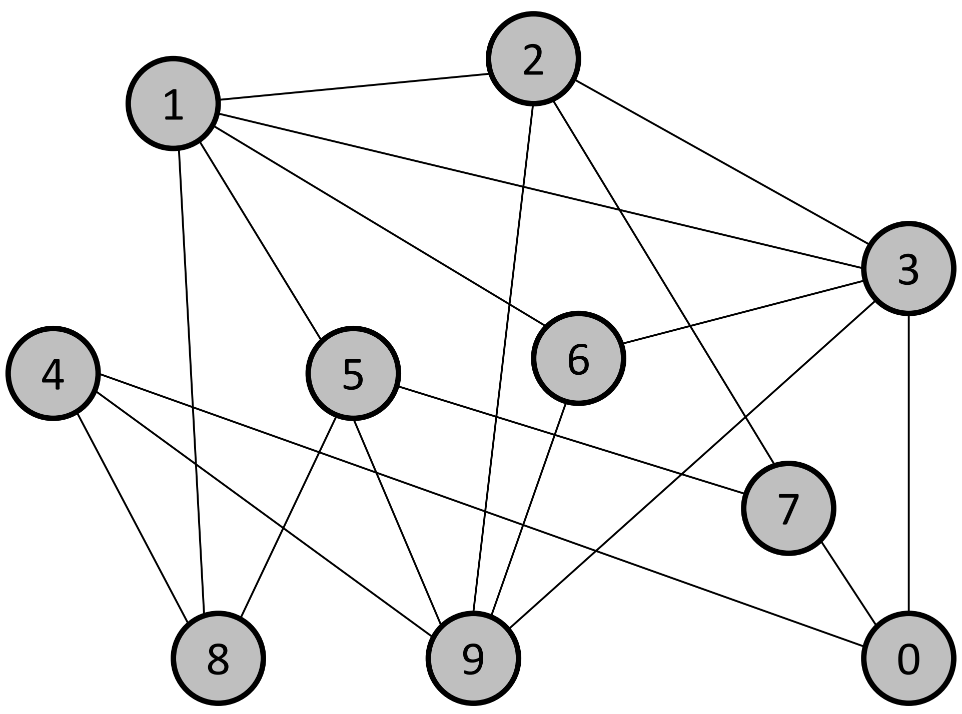
Algoritmo de coloração heurística

- **Entrada**: Grafo G com lista de vértices $v_1, v_2, \ldots v_n$
- **Saída**: uma coloração de vértices $f : V \rightarrow \{1,2,\ldots\}$

```
Enquanto existirem vértices não-coloridos, faça
      Dentre os vértices não-coloridos com maior grau,
      escolha o vértice v com maior grau colorido;
      Atribua a menor cor possível k ao vértice v: f(v) ← k;
Fim-enquanto;
Retorne f;
```

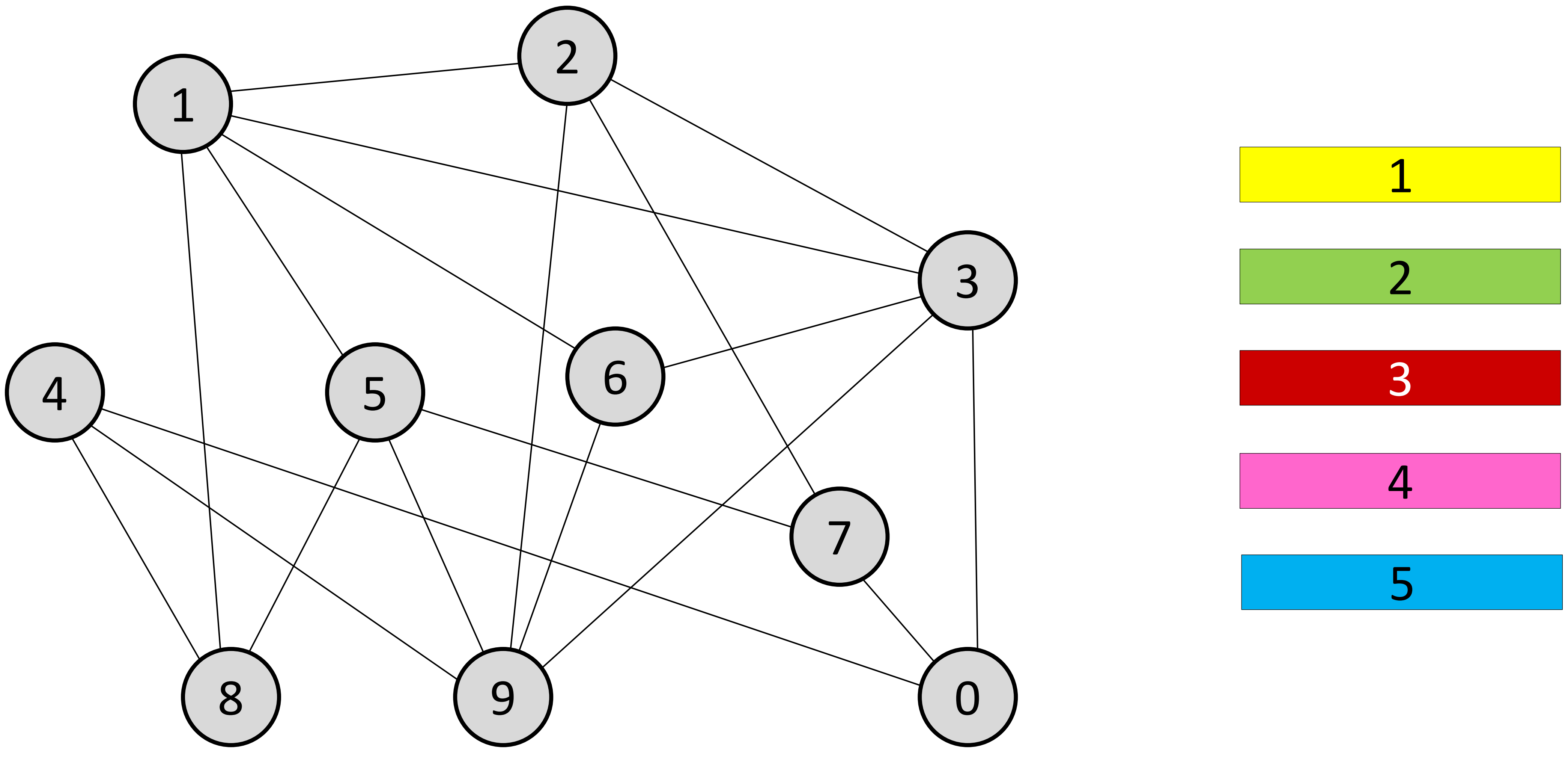
Heurísticas para Coloração

- Muitas heurísticas para coloração de vértices se baseiam na intuição de que um vértice de maior grau será mais difícil de colorir mais tarde do que um de menor grau



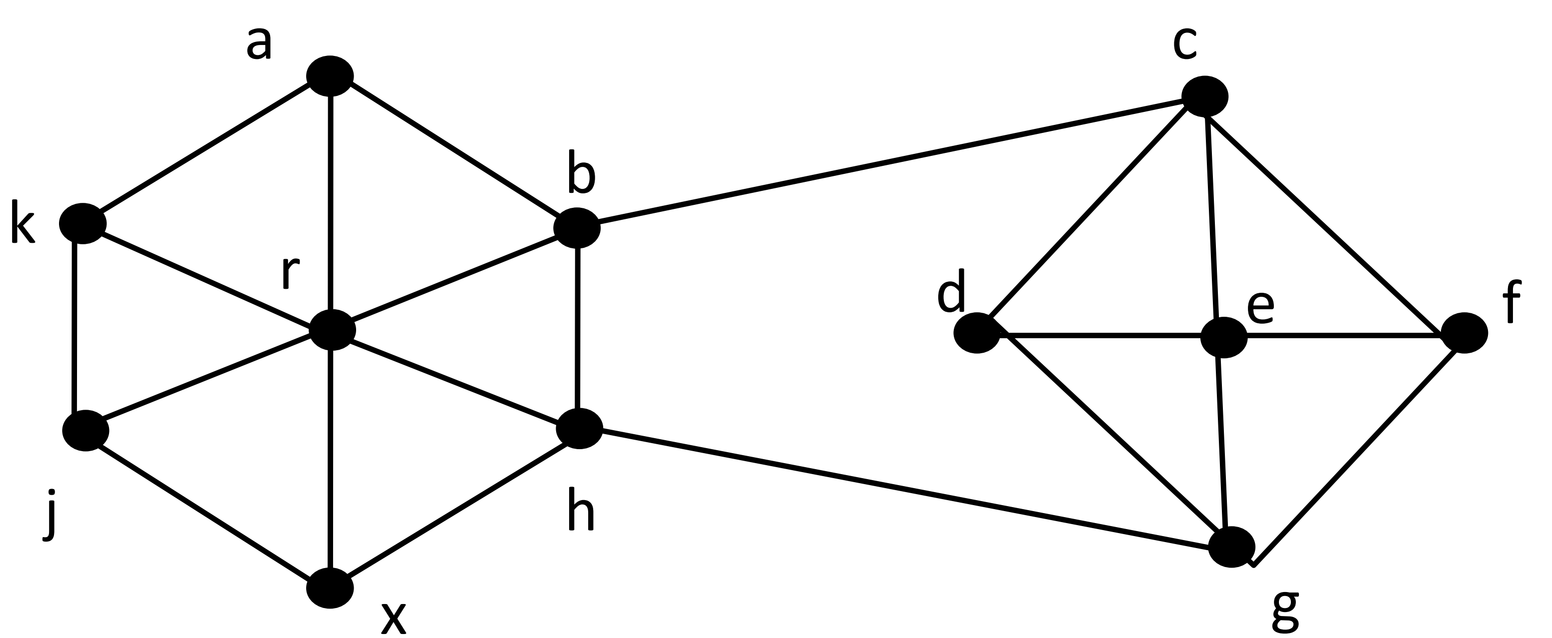
Heurísticas para Coloração

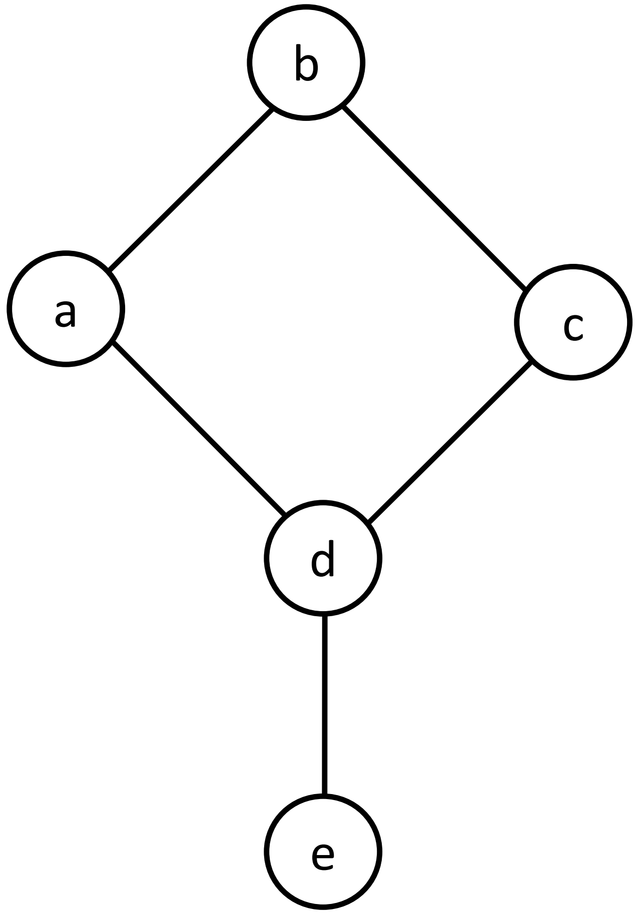
- Ordem decrescente de grau:
  $v_1^{(5)}, v_3^{(5)}, v_9^{(5)}, v_2^{(4)}, v_5^{(4)}, v_4^{(3)}, v_6^{(3)}, v_7^{(3)}, v_8^{(3)}, v_{10}^{(3)}$



Exercícios

- Utilizando o algoritmo de coloração **heurística**, encontre uma cloração para o grafo abaixo.





Exercícios

O diretor de um zoológico precisa acomodar oito animais(A, B,...,H) em gaiolas. Por questões de segurança alguns animais não podem ser colocados juntos na mesma gaiola. Na tabela abaixo, os “x” indicam pares de animais que devem ser colocados em gaiolas diferentes. Determine a quantidade mínima de gaiolas para acomodar todos os animais com segurança

	a	b	c	d	e	f	g	h
a		X			X	X		X
b	X		X			X		X
c		X		X		X	X	X
d			X		X	X	X	
e	X			X		X	X	
f	X	X	X	X	X			
g			X	X	X			X
h	X	X	X				X	