Correção de exercícios

Análise combinatória

1 – Com os algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 7, deseja-se formar números de 4 algarismos.

e) Quantos são os números pares formados por algarismos distintos?*(R.: 320)*
f) Quantos são os múltiplos de 10, formados por algarismos distintos?*(R.: 120)*

e) $\underline{5}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{2} = 200$

~~1~~	~~2~~	3	2
2	3	5	~~4~~
3	5	7	
5	7	0	
7	0		

ou

$\underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{1} = 120$

~~1~~	~~2~~	3	0
2	3	4	
3	4	5	
4	5	7	
5	7		
7			

$200 + 120 = \boxed{320}$

f) $\underline{6}\ \underline{5}\ \underline{4}\ \underline{1} = \boxed{120}$

~~1~~	~~2~~	3	0
2	3	4	
3	4	5	
4	5	7	
5	7		
7			

2 – Dada a palavra CONTAGEM, pede-se:

c) Quantos são os anagramas que possuem as letras N, T, A juntas e nessa ordem?*(R.: 720)*

$\underbrace{N\ T\ A}\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1$

NTA

$\downarrow$

6 possíveis posições

$6 \cdot 5! = \boxed{720}$

OU

$\boxed{NTA} = x$

CONTAGEM

COxGEM

$6\ \ 5\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ \ 1 = 6! = 720$

C

O

x

G

E

M

6 – (Unifor-CE) Uma agência de publicidade necessita de 2 rapazes e 3 moças para fazer um comercial para a TV. Disponde de 4 rapazes e 5 moças, quantas opções tem a agência para formar o grupo necessário?*(R: 60)*

→ Não importa a ordem → $\boxed{\text{Combinação}}$ $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

4 rapazes e 5 moças

↓ escolher 2 ↓ escolher 3

$C_{4,2} = \dfrac{4!}{2!\,2!}$ $C_{5,3} = \dfrac{5!}{3!\,2!}$

$C_{4,2} = \dfrac{4.3.\cancel{2!}}{2.\cancel{2!}} = 6$ $C_{5,3} = \dfrac{5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}.2} = 10$

2 rapazes E 3 moças

$\underbrace{6 \cdot 10}_{60 \text{ opções}}$

9 – Com a palavra GARGANTA:

a) Quantos anagramas podemos formar? *(R.: 3360)* ✓

b) Quantos anagramas começam por G?*(R.: 840)* ✓

c) Quantos anagramas começam e terminam por G?*(R.: 8~~4~~0)*

d) Quantos anagramas começam por consoante?*(R.: 1~~2~~0)*

e) Quantos anagramas terminam por vogal?*(R.: 1260)*

f) Quantos anagramas começam por consoante e terminam por vogal?*(R.: 900)*

G $\downarrow$ repete 2x

A $\downarrow$ repete 3x

a) $\frac{8!}{2!\,3!} = \frac{8.7.6.5.4.\cancel{3!}}{2.\cancel{3!}} = \boxed{3360}$

b) G _ _ _ _ _ _ _ $\frac{7!}{3!} = \frac{7.6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = \boxed{840}$

c) G $\underbrace{\quad\quad\quad}_{6\text{letras}}$ G $\frac{6!}{3!} = \frac{6.5.4.\cancel{3!}}{\cancel{3!}} = \boxed{120}$

d) $\frac{1}{G}$ $\underbrace{\_\ \ldots\ \_}_{7\text{letras}}$ $\frac{7!}{3!} = 840$

+ ou

$\frac{3}{R\ N\ T}$ $\underbrace{\_\ \ldots\ \_}_{7}$ $\frac{3.7!}{3!\,2!} = 1260$

$840 + 1260 = \boxed{2100}$

9 – Com a palavra GARGANTA:

a) Quantos anagramas podemos formar? *(R.: 3360)*

b) Quantos anagramas começam por G?*(R.: 840)*

c) Quantos anagramas começam e terminam por G?*(R.: 840)*

d) Quantos anagramas começam por consoante?*(R.: 120)*

e) Quantos anagramas terminam por vogal?*(R.: 1260)* ✓

f) Quantos anagramas começam por consoante e terminam por vogal?*(R.: 900)*

e) $\underbrace{\_ \; \dots \; \_}_{7 \text{ letras}} \; A \qquad \dfrac{7!}{2!\,2!} = 1260$

7 letras → A repete 2, G repete 2

f) $\underline{G} \; \underbrace{\_ \; \dots \; \_}_{6 \text{ letras} \to A \times 2} \; \underline{A} \Rightarrow \dfrac{6!}{2!} = 360$

ou

$\underset{R,\,N,\,T}{\underline{3}} \; \underbrace{\_ \; \dots \; \_}_{6 \text{ letras}} \; \underline{A} \Rightarrow 3 \cdot \dfrac{6!}{2!\,2!} = 540$

6 letras → A × 2, G × 2

$360 + 540 = \boxed{900}$

10 – Uma urna contém duas bolas brancas e algumas bolas pretas. Retirando-se todas as bolas das urnas, uma de cada vez e sem reposição, o número de sequências de cores possíveis, na ordem de retirada, é 21. Determine o número de bolas pretas que a urna contém.*(R.: 5 bolas pretas)*

2 brancas 8 pretas = 10 bolas

$\underline{10}\ \underline{9}\ \underline{8}\ \underline{\ldots}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{\quad}\ \underline{1} = \frac{10!}{2!\,8!} = 45$ seq. de cores diferentes

$b_1\ b_2\ p_1\ p_2 \ldots$

$b_2\ b_1\ p_1\ p_2 \ldots$

$\left.\begin{array}{l}2 \text{ brancas} \\ ? \text{ pretas}\end{array}\right\}$ n bolas

repetidas: brancas 2 vezes
pretas (n-2) vezes

$$\underbrace{\underline{n}\ \ \underline{n-1}\ \ \underline{n-2}\ \ \ldots\ldots\ \ \underline{1}}_{\text{n bolas}} \Rightarrow \frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 21$$

$$\frac{n!}{2!\,(n-2)!} = 21$$

$$\frac{n.(n-1)\cancel{(n-2)!}}{2.\,\cancel{(n-2)!}} = 21$$

$$\frac{n(n-1)}{2} = 21$$

$$n^2 - n - 42 = 0$$

$$(n+6).(n-7) = 0$$

$$\begin{cases} \cancel{n = -6} \\ n = 7 \end{cases} \longrightarrow 7 \text{ bolas} \begin{cases} 2 \text{ br} \\ 5 \text{ pretas} \end{cases}$$

$$(+6).(-7) = -42$$

$$6 - 7 = -1$$

11 – (FCMSCSP-SP) Num hospital, há 3 vagas apara trabalhar no berçário, 5 no banco de sangue e 2 na administração. Se 6 funcionários se candidatam para o berçário, 8 para o banco de sangue e 5 para a administração, de quantas maneiras distintas essas vagas podem ser preenchidas?*(R.: 11200)*

Combinação $\rightarrow C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

Berçário $C_{6,3} = \dfrac{6!}{3!\,3!} = 20$

E

Banco de Sangue $C_{8,5} = \dfrac{8!}{5!\,3!} = 56$

E

Adm $C_{5,2} = \dfrac{5!}{2!\,3!} = 10$

$20 \cdot 56 \cdot 10 = 11200$ possibilidades de preencher as vagas

12 – (Fuvest-SP) Uma ONG decidiu preparar sacolas, contendo quatro itens distintos cada, para distribuir entre a população carente. Esses quatro itens devem ser escolhidos entre 8 tipos de produto de limpeza e 5 tipos de alimentos não perecíveis. Em cada sacola deve haver pelo menos um item que seja alimento não perecível e pelo menos um item que seja produto de limpeza. Quantos tipos de sacolas distintas podem ser feitas?

a) 360 **b)** 420 **c)** 540 **d)** 600 **e)** 640 *R: e)*

Ordem não importa → $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Combinação

Sacolas – 4 itens

8 p.l. 5 al.

Total sacolas possíveis – 13 produtos c/ os quais montaremos sacolas c/ 4

$C_{13,4} = \frac{13!}{4!\,9!} = 715$

sacolas apenas c/ produto limpeza $C_{8,4} = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$

sacolas apenas c/ alimentos $C_{5,4} = \frac{5!}{4!\,1!} = 5$

Sacolas c/ pelo menos 1 prod. limpeza e 1 alim.

$715 - 70 - 5$

$\boxed{640}$

15 – Responda:

a) Quantos anagramas podemos formar com as letras da palavra FILHO?
(R.: 120)

b) Quantas “palavras” de 4 letras distintas é possível formar com as letras da palavra FILHO?*(R.: 120)*

c) Quantas dessas “palavras” de 4 letras começam com O?*(R.: 24)*

d) Quantas dessas “palavras” de 4 letras terminam com FI?*(R.: 6)*

e) Quantas dessas “palavras” contêm a letra I?*(R.: 96)*

a) $\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1} = 5! = 120$

F I L H O; I L H O; L H O

b) $\underline{5}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2} = 120$

c) $\underline{1}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2} = 24$

O; F I L H

d) $\underline{3}\ \underline{2}\ \underline{1}\ \underline{1} = 6$

L H O; F; I

e) $\underline{1}\ \underline{4}\ \underline{3}\ \underline{2} = 24$

I _ _ _   _ I _ _   _ _ I _   _ _ _ I

$24 \cdot 4 = 96$ //

17 – Numa prova de 10 questões, o aluno deve resolver apenas 6. De quantas maneiras diferentes ele poderá escolher essas 6 questões? *(R.: 210 maneiras)*

Não importa a ordem – COMBINAÇÃO – $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

$$C_{10,6} = \frac{10!}{6!4!} = \frac{10.\cancel{9}^{3}.\cancel{8}.\cancel{7}.\cancel{6!}}{\cancel{6!}\,\cancel{4}.\cancel{3}.\cancel{2}.1} = 10.3.7 = \underline{210 \text{ maneiras}}$$

18 – Uma associação tem uma diretoria formada por 10 pessoas: 6 homens e 4 mulheres. De quantas maneiras podemos formar uma comissão dessa diretoria que tenha 3 homens e 2 mulheres? *(R.: 120 maneiras)*

Não importa a ordem ~ COMBINAÇÃO – $C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

6 Homens | escolher 3

4 mulheres | 2.

$C_{6,3} = \dfrac{6!}{3!\,3!}$

$C_{6,3} = 20$

$C_{4,2} = \dfrac{4!}{2!\,2!}$

$C_{4,2} = 6$

3 homens E 2 mulheres

$\underbrace{20 \cdot 6}$ → 120 possibilidades

19 – (Ufop-MG) Para compor a tripulação de um avião, dispomos de 20 pilotos, 4 co-pilotos, 3 comissárias e 5 comissários de bordo. Sabendo que em cada vôo vão 2 comissárias, 2 comissários, 1 piloto e 2 co-pilotos, de quantos modos pode ser escolhida a tripulação? *(R.: 3600 modos)*

Combinação $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

Pilotos $C_{20,1} = \frac{20!}{1!19!} = \frac{20.\cancel{19!}}{1.\cancel{19!}} = 20$

Co-pilotos $C_{4,2} = \frac{4!}{2!2!} = \frac{4.3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,2.1} = 6$

Comissárias $C_{3,2} = \frac{3!}{2!1!} = \frac{3.\cancel{2!}}{\cancel{2!}\,1} = 3$

C. Bordo $C_{5,2} = \frac{5!}{2!3!} = \frac{5.4.\cancel{3!}}{2.1\,\cancel{3!}} = 10$

$\underbrace{20 . 6 . 3 . 10}_{3600}$

21 – (Vunesp) Uma prova consta de 3 partes, cada uma com 5 questões. Cada questão, independente da parte a que pertença, vale 1 ponto, sendo o critério de correção "certo ou errado". De quantas maneiras diferentes podemos alcançar 10 pontos nessa prova, se devem ser resolvidas pelo menos 3 questões de cada parte e 10 questões no total? *(R.: 1500 maneiras)*

COMBINAÇÃO $\quad C_{n,p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

3 Partes — 3 $\quad C_{5,3} = 10$

↓ $\quad$ 4 $\quad C_{5,4} = 5$

5 questões $\quad$ 3 $\quad C_{5,3} = 10$

$10 \cdot 5 \cdot 10 = 500$ possibilidades

1ª p	2ª p	3ª p
3	3	4
3	4	3
4	3	3

$3 \cdot 500 = \underline{\underline{1500}}$

Continuação

22. (Unicamp-SP) De quantas maneiras podem ser escolhidos 3 números naturais distintos de 1 a 30 de modo que sua soma seja par? Justifique sua resposta.
(R.: 2030 maneiras)

Soma Par
- Par + Par + Par
- Ímpar + Ímpar + Par

Combinação $C_{n,p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$

1 - 30
- 15 pares
- 15 ímpares

$455 + 1575$

$\boxed{2030}$

* 3 Pares – $C_{15,3} = \frac{15!}{3!\,12!} = 455$

** 2 ímpares e 1 par – $C_{15,2} = \frac{15!}{2!\,13!} = 105$

$C_{15,1} = 15$

$105 \cdot 15 = 1575$

24 – (Fuvest-SP) O jogo da sena consiste no sorteio de 6 números distintos, escolhidos ao acaso, entre os números 1, 2, 3, ..., até 50. Uma aposta consiste na escolha (pelo apostador) de 6 números distintos entre os 50 possíveis, sendo premiadas aquelas que acertarem 4 (quadra). 5 (quina) ou todos os 6 (sena) números sorteados.
Um apostador, que dispõe de muito dinheiro para jogar, escolhe 20 números e faz todos os 38760 jogos possíveis de serem realizados com esses 20 números. Realizado o sorteio, ele verifica que todos os 6 números sorteados estão entre os 20 que ele escolheu. Além de uma aposta premiada com a sena:

a) Quantas apostas premiadas com a quina esse apostador conseguiu?
(R.: 84 apostas)

b) Quantas apostas premiadas com a quadra ele conseguiu?
(R.: 1365 apostas)

a) $C_{6,5} = \dfrac{6!}{5!\,1!} = 6 \longrightarrow 6 \cdot 14 = 84$ apostas

b) $C_{6,4} = \dfrac{6!}{4!\,2!} = 15$

$C_{14,2} = \dfrac{14!}{2!\,12!} = 91$

Cada aposta tem 4 acertos e 2 errados

$15 \cdot 91 = 1365$ apostas que ganhou na quadra

10 Um professor deve ministrar 20 aulas em 3 dias consecutivos, tendo, para cada um dos dias, as opções de ministrar 4, 6 ou 8 aulas. O número de diferentes distribuições possíveis dessas 20 aulas, nos 3 dias, é

soma = 20 aulas $\begin{cases} 8 \text{ aulas} \\ 8 \text{ aulas} \\ 4 \text{ aulas} \end{cases}$ repete

soma = 20 aulas $\begin{cases} 6 \text{ aulas} \\ 6 \text{ aulas} \\ 8 \text{ aulas} \end{cases}$ repete

$\underset{1^\circ d}{3} \quad \underset{2^\circ d}{2} \quad \underset{3^\circ d}{1} \Rightarrow \frac{6}{2} = 3$

$\underset{1^\circ d}{3} \quad \underset{2^\circ d}{2} \quad \underset{3^\circ d}{1} \Rightarrow \frac{6}{2} = 3$

Total: $3 + 3 = 6$ possibilidades

12. (Mackenzie-SP) Considere todos os números de 3 algarismos formados com os algarismos **1,** 2, 3, 5, 7 e 9. Entre eles, a quantidade de números pares com exatamente 2 algarismos iguais é:

$$\underset{1,3,5,7,9}{\underline{5}} \quad \underset{2}{\underline{1}} \quad \underset{2}{\underline{1}} = 5$$

$$\underset{2}{\underline{1}} \quad \underset{1,3,5,7,9}{\underline{5}} \quad \underset{2}{\underline{1}} = 5$$

$$\underset{3}{\underline{1}} \quad \underset{3}{\underline{1}} \quad \underset{2}{\underline{1}} = 1$$

$\underline{1}$ rep
5
7
9

5 poss

15 possibilidades

14. Ana dispunha de papéis com cores diferentes para enfeitar sua loja, cortou fitas desses papéis e embalou 30 caixinhas, de modo que não ficasse a mesma cor no papel e na fita em nenhuma das embalagens.

A menor quantidade de cores diferentes que ela necessitou usar para a confecção de todas as embalagens foi igual a:

3 caixas
Az — Fita R
V — Fita Az
R — Fita V

3 fitas

3 cores

4 caixa
Az — Fita verde
Verde — Fita az
Rosa — fita az
Rosa — fita verde

3 cores
Az — V
V — Az
R — V
R — Az
A — R
V — R

$\underset{\text{caixa}}{3} \cdot \underset{\text{Fita}}{2} = 6$

$\underset{\text{caixa}}{n} \cdot \underset{\text{Fita}}{(n-1)} = 30$

$n^2 - n - 30 = 0$

$(+5).(-6) = -30$

$+5 - 6 = -1$

$(n+5)(n-6) = 0$

$n = \cancel{-5}$

$n = 6 \rightarrow$ 6 cores

(Enem) O setor de recursos humanos de uma empresa vai realizar uma entrevista com 120 candidatos a uma vaga de contador. Por sorteio, eles pretendem atribuir a cada candidato um número, colocar a lista de números em ordem numérica crescente e usá-la para convocar os interessados. Acontece que, por um defeito do computador, foram gerados números com 5 algarismos distintos e, em nenhum deles, apareceram dígitos pares.
Em razão disso, a ordem de chamada do candidato que tiver recebido o número 75.913 é

1
3
5
7
9

$\frac{1}{1}\ \frac{4}{\cancel{3}\ 5\ 7\ 9}\ \frac{3}{5\ 7\ 9}\ \frac{2}{}\ \frac{1}{} = 24$

$\frac{1}{3}\ \frac{4}{\cancel{1}\ 5\ 7\ 9}\ \frac{3}{5\ 7\ 9}\ \frac{2}{}\ \frac{1}{} = 24$

$\frac{1}{5}\ \_\ \_\ \_\ \_ = 24$

$\frac{1}{7}\ \frac{1}{1}\ \frac{3}{\cancel{3}\ 5\ 9}\ \frac{2}{5\ 9}\ \frac{1}{} = 6$

$\frac{1}{7}\ \frac{1}{3}\ \_\ \_\ \_ = 6$

$\frac{1}{7}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{1}\ \frac{2}{3\ 9}\ \frac{1}{} = 2$

$\frac{}{7}\ \frac{}{5}\ \frac{}{3}\ \_\ \_ = 2$ Até aqui tem 88 nºs

$\frac{}{7}\ \frac{}{5}\ \frac{}{9}\ \frac{}{1}\ \frac{}{3}$ = → posição 89

Escrevendo-se esses números em ordem crescente, determine qual posição ocupa o número 512.346 e que número ocupa a 242ª posição.

$\frac{1}{1}\ \frac{5}{}\ \frac{4}{}\ \frac{3}{}\ \frac{2}{}\ \frac{1}{} = 120$

2
3
4
5
6

$\frac{}{2}$ _ _ _ _ _ = 120 / 240

$\frac{}{3}$ _ _ _ _ _ = 120

$\frac{}{4}$ _ _ _ _ _ = 120 / 480

$\frac{}{5}\ \frac{}{1}\ \frac{}{2}\ \frac{}{3}\ \frac{}{4}\ \frac{}{6}$ ⟶ 481ª posição

241ª

$\frac{}{3}\ \frac{}{1}\ \frac{}{2}\ \frac{}{4}\ \frac{}{5}\ \frac{}{6}$

242ª

$\frac{}{3}\ \frac{}{1}\ \frac{}{2}\ \frac{}{4}\ \frac{}{6}\ \frac{}{5}$