DEPENDÊNCIA E INDEPENDÊNCIA LINEAR:

Seja **V** um espaço vetorial e **A** = $\{\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; ...; \vec{v}_n\} \subset$ **V**,
O conjunto **A** diz-se <u>linearmente independente</u> **(LI)** ou os vetores $\vec{v}_1; \vec{v}_2; \vec{v}_3; ...; \vec{v}_n$ são **LI**, caso a equação:

$$\boxed{\vec{0} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + \ldots + a_n\vec{v}_n}$$

admita apenas a solução trivial.
Isto é:
existirem $a_1 = a_2 = a_3 = \ldots = a_n = 0$ (ou seja, o sistema linear homogêneo criado a partir da equação acima só admite solução trivial é SPD, tem determinante diferente de zero).

O conjunto A diz-se <u>linearmente Dependente</u> **(LD)** ou os vetores $\vec{v_1}$; $\vec{v_2}$, $\vec{v_3}$, ..., $\vec{_n}$; são **LD** se para a equação:

$$\boxed{\vec{0} = a_1\vec{v}_1 + a_2\vec{v}_2 + a_3\vec{v}_3 + \ldots + a_n\vec{v}_n}$$

existir pelo menos um $a_k \neq 0$, onde k = 1,2,3,..., n.

OBS:

- ***Se v_1 e v_2 são colineares (múltiplos) então o conjunto A (v_1, $v_2 \in$ A) é LD.***
- ***Se v_1, v_2 e v_3 (não nulos) são LD então são coplanares (produto misto de v_1, v_2 e v_3 é nulo).***
- ***Dado {v_1; v_2; v_3;...; vn}, se um deles for combinação linear dos outros então são LD.***

Exemplos

1. Verifique se são LI ou LD os seguintes conjuntos:
   a) No espaço vetorial V = IR^3 o conjunto A = {$3\vec{v_1}$ + $4\vec{v_2}$ - $\vec{v_3}$}, tais que: $\vec{v_1}$ = (2, -1, 3); $\vec{v_2}$ = (-1, 0, -2) e $\vec{v_3}$ (2, -3, 1).

Solução

$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + a_3\vec{v_3} = \vec{0}$
a_1 (2, -1, 3) + a_2(-1, 0, -2) + a_3(2, -3, 1) = (0, 0, 0)

$(2a_1, -a_1\ 3a_1) + (-a_2, 0, -2a_2\ ) +)2a_{3,} -3a_{3\ ,}\ a_3) = (0, 0, 0)$

$$\begin{cases} 2a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \\ -a_1 + 0a_2 - 3a_3 = 0 \\ 3a_1 - 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

Este sistema possui infinitas soluções não triviais.
Portanto; o conjunto A é LD.

Por exemplo, fazendo $a_3 =\ -1$ resulta em $a_1 = 3$ e $a_2 = 4$
Verifique, com estes valores:

$3\overrightarrow{v_1} + 4\overrightarrow{v_2}\ -\ \overrightarrow{v_3} = \vec{0}$
3(2, -1, 3) + 4(-1, 0, -2) – (2, -3, 1) = (0, 0, 0)
(6, -3, 9) + (-4, 0, -8) – (-2, 3, -1) = (0, 0, 0)
(6-4-2, -3 + 0 + 2, 9 – 8 -1) = (0, 0, 0)
(0, 0, 0) = (0, 0, 0)

b) A = {(2, -1), (1,3) $\subset$ IR^2

Solução

$a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} = \vec{0}$
$a_1(2, -1) + a_2(1,3) = (0, 0)$
$(2a_{1,} -a_1) + (a_2, 3a) = (0, 0)$
$(2a_1 + a_2\ , -a_1\ 3a_2\ ) = (0, 0)$

$$\begin{cases} 2a_1 + a_2 = 0 \\ -a_1 + 3a_2 = 0 \end{cases}$$

Como o sistema admite somente a solução trivial (0, 0) o Conjunto A é LI.

Exercícios

1. Mostre que o conjunto A = {(1, 0), (0, 1) é LI em IR^2.

2. Mostre que o conjunto A = {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) é LI em IR^3.
3. Verifique no espaço vetorial V = IR^4, os vetores $\overrightarrow{v_1}$ = (2, 2, 3, 4), $\overrightarrow{v_2}$ = (0, 5, -3, 1) e $\overrightarrow{v_3}$ = (0, 0, 4, -2) são LI ou LD?

4. No espaço vetorial M(2, 2) o $A=\left\{\begin{bmatrix}-1 & 2\\ -3 & 1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2 & -3\\ 3 & 0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & -4\\ 3 & 1\end{bmatrix}\right\}$ é LI ou LD?

5. Mostre que o conjunto A = {(1, -2, 3), (2, -4, 6)} $\subset$ IR^3 é LD?

6. Verifique o conjunto $A=\left\{\begin{bmatrix}1 & 2\\ -4 & -3\end{bmatrix},\begin{bmatrix}3 & 6\\ -12 & -9\end{bmatrix}\right\}$ $\subset$ M(2, 2).é LI ou LD.

7. Mostre que o conjunto A = {(-1, -2, 0, 3), (2, -1, 0, 0), (1, 0, 0, 0) $\subset$ IR^4 é LI.

8. Determine o valor de k para que os vetores $\vec{v_1}$ = 2, 3) e $\vec{v_2}$ = (4, k) sejam LI.

9. Determine o valor de k para que os vetores $\vec{v_1}$ = (1, k) e $\vec{v_2}$ = (k, 1) sejam LD.

10. Determine k para que o conjunto A = {(1, 0, -1), (1, 1, 0), (k, 1, -1)$\subset$ IR^3 seja LI.

11. Determine k para que o conjunto A = {(1, k, 2), (1, -1, -3), (1, 0 4)$\subset$ IR^3 seja LD.

12. Verifique a dependência linear dos vetores:

a) $\vec{v_1}$ = (1, 1, -2), $\vec{v_2}$ = (2, 0, 3) e $\vec{v_3}$ = (-1, 2, 3).
b) $\vec{v_1}$ = (1, 1, -2), $\vec{v_2}$ = (2, 0, 3) e $\vec{v_3}$ = (8, 2, 5).
c) $\vec{v_1}$ = (1, 2, 3) e $\vec{v_2}$ = (-2, -4, -6).
d) $\vec{v_1}$ = (0, 1, 2), $\vec{v_2}$ = (1, 2, 3) e $\vec{v_3}$ = (1, 3, 0).
e) $\vec{v_1}$ = (1, -1, 2), $\vec{v_2}$ = (2, 0, 3) e $\vec{v_3}$ = (0, -2, 1).

13. Verifique quais dos seguintes conjuntos de vetores, são LI

a) A = {(1, 1. 0, 0); (0, 2, 1, 0); (0, 0, 0, 3)} $\subset$ IR^4.
b) A= {(1, 1, 0, 0); (0, 1, 0, 0); (2, 1, 0, 0) $\subset$ IR^4.
c) A= {(1, 1, 0); (1, 4, 5); (3, 6, 5) $\subset$ IR^3.
d) A = {(1, 2, 3); (1, 4, 9); (1, 8, 27)} $\subset$ IR^3.
e) A= {(1, 2, 1); (2, 4, 2); (5, 10, 5)} $\subset$ IR^3.