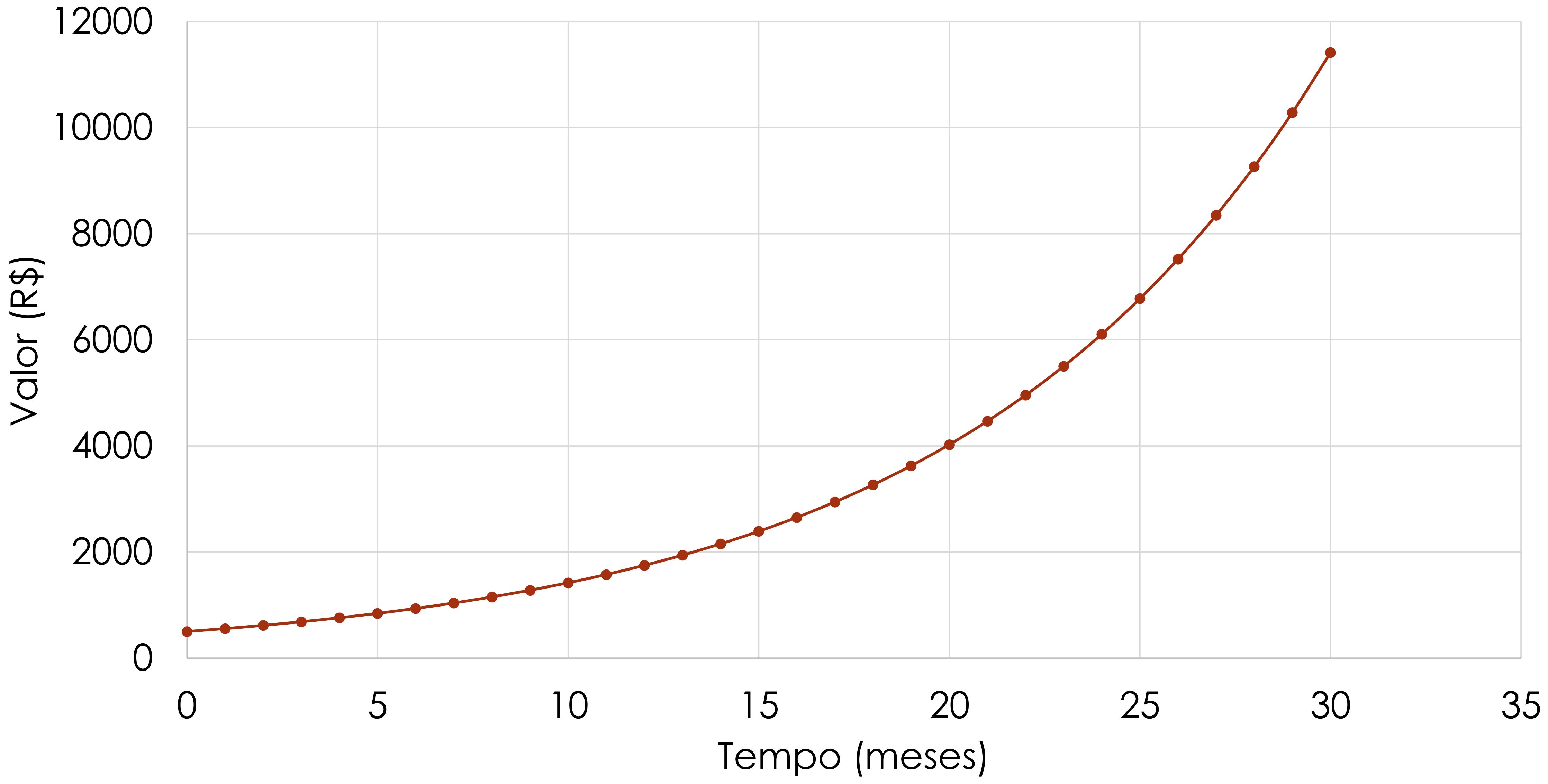
Função exponencial

Vamos analisar a evolução de uma dívida no cartão de crédito

Juros por atraso: 10,99% ao mês

Valor do pagamento em atraso: R$ 500,00

Tempo (meses)	Valor (R$)
0	500
1	$500 + 0{,}1099 \cdot 500 = 554{,}95$
2	$554{,}95 + 0{,}1099 \cdot 554{,}95 = 615{,}94$
3	$615{,}94 + 0{,}1099 \cdot 615{,}94 = 683{,}63$
4	$683{,}63 + 0{,}1099 \cdot 683{,}63 = 758{,}76$
5	$758{,}76 + 0{,}1099 \cdot 758{,}76 = 842{,}15$
6	$842{,}15 + 0{,}1099 \cdot 842{,}15 = 934{,}70$



12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
Valor (R$)
0
5
10
15
20
25
30
35
Tempo (meses)

$V = V_o \cdot (1 + i)^T$

Quais operações estão envolvidas?

Representa uma função? Se sim, de que tipo?

Potência com expoente natural

Dados um número real positivo a e um número natural n, $n \geqslant 2$, chama-se **potência de base *a*** e **expoente *n*** o número $\boldsymbol{a^n}$, que é igual ao produto de n fatores iguais a a:

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ fatores}}$$

Potência com expoente inteiro

Dado qualquer $n \in \mathbb{N}^*$, devemos ter, para $a \neq 0$:

$$a^{-n} \cdot a^{n} = a^{-n+n} = a^{0} = 1$$

Portanto, $a^{-n} \cdot a^{n} = 1$, ou seja, $a^{-n} = \dfrac{1}{a^{n}}$.

Potência com expoente racional

$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ com a real e $n = 2, 3, 4, \ldots$

Calcule o valor de:

a) $\left(27^{\frac{1}{3}} + 64^{\frac{1}{2}} - 8^{\frac{2}{3}} + 4^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}$

b) $$\frac{3^0 + (-2)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$$

Veja exemplos de como escrever um número em notação científica:

a) $300 = 3 \cdot 100 = 3 \cdot 10^2$

b) $0{,}0052 = 5{,}2 \cdot 0{,}001 = 5{,}2 \cdot 10^{-3}$

c) $32{,}45 = 3{,}245 \cdot 10 = 3{,}245 \cdot 10^1$

d) $5\,249 = 5{,}249 \cdot 1000 = 5{,}249 \cdot 10^3$

Notação científica

Uma função $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_+^*$, definida por $f(x)=a^x$ ou $y=a^x$, com $a>0$ e $a\neq1$, é denominada **função exponencial**.

Definição de função exponencial

As funções $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}_+^*$, definidas por $f(x)=b\cdot a^x+c$, com $a>0$, $a\neq1$ e $b\neq0$ podem ser denominadas do **tipo exponencial**.

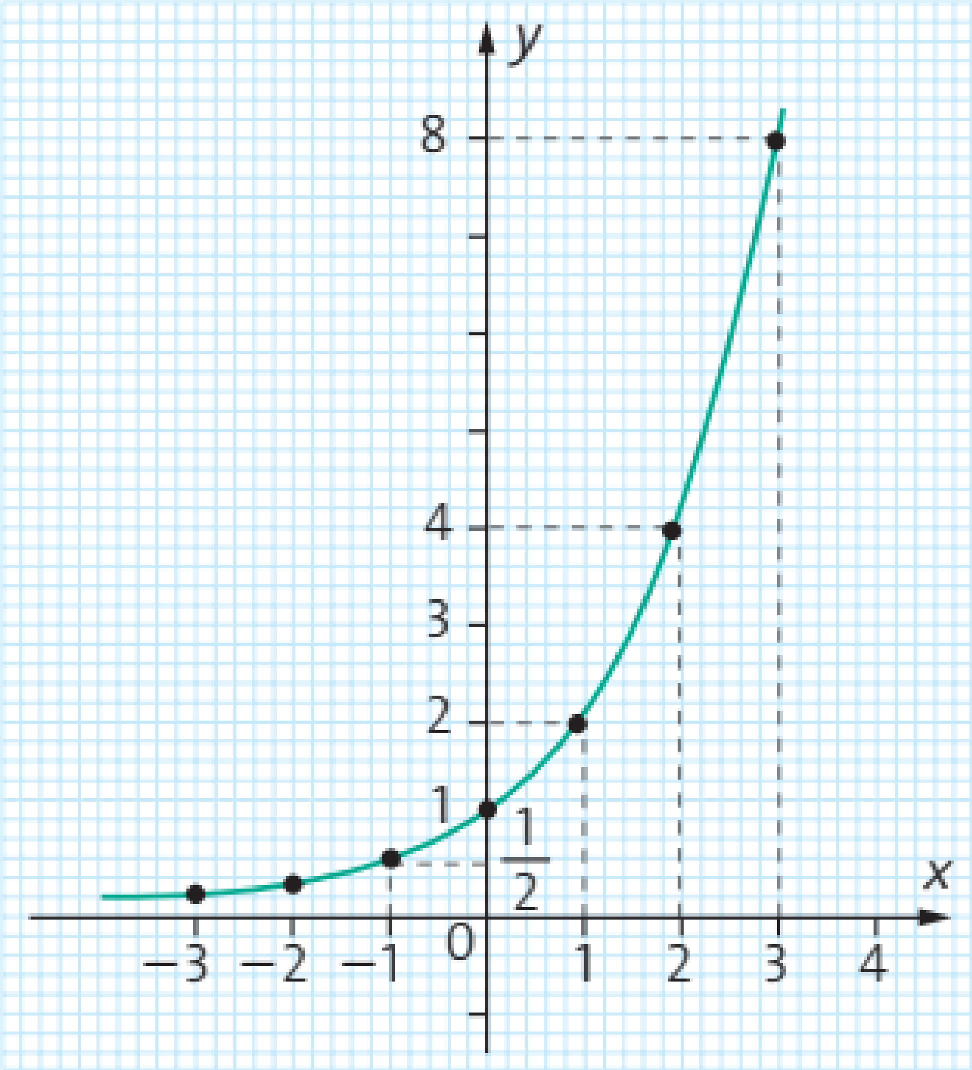
Alguns fornos elétricos contêm um dispositivo que controla a temperatura em seu interior. Assim, o aparelho desliga automaticamente quando chega à temperatura desejada e torna a ligar quando há certa perda na temperatura. Um forno elétrico que possui esse dispositivo tem sua temperatura interna *T* calculada em função do tempo *t* que o forno está ligado, em minutos, pela função $T(t) = 300 - 265 \cdot (0{,}3)^{\frac{t}{10}}$.

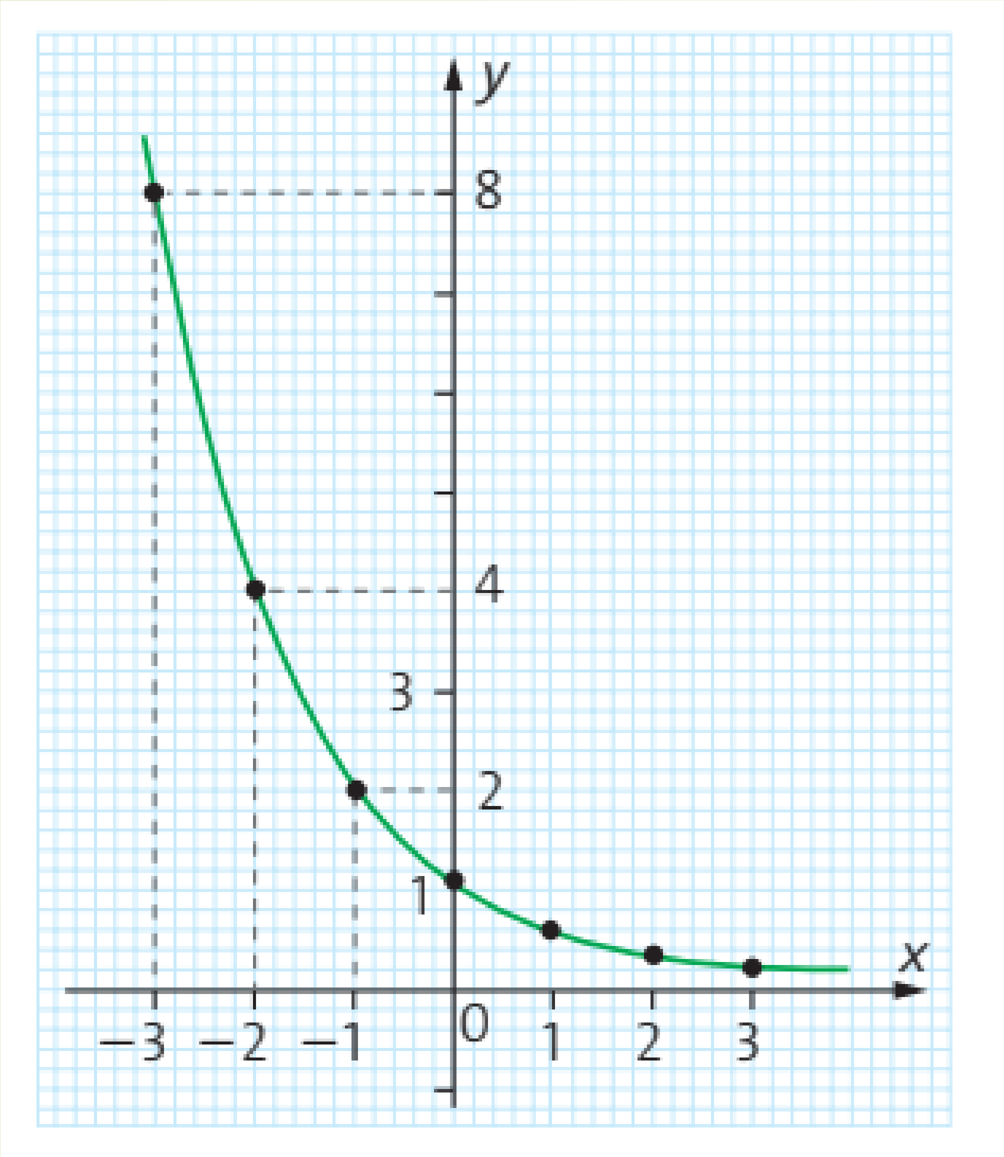
Qual é a temperatura interna desse forno elétrico 5 min após ter sido ligado? E após 20 min?

Para analisar o efeito de um remédio no extermínio de determinada bactéria, cientistas fizeram experimentos expondo uma população desse microrganismo ao remédio e verificando o tempo necessário para que fosse exterminada. Ao final, verificou-se que a população *p* da bactéria *d* dias após a exposição ao remédio poderia ser estimada por meio da função $p(d) = 6\,000 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^d$.

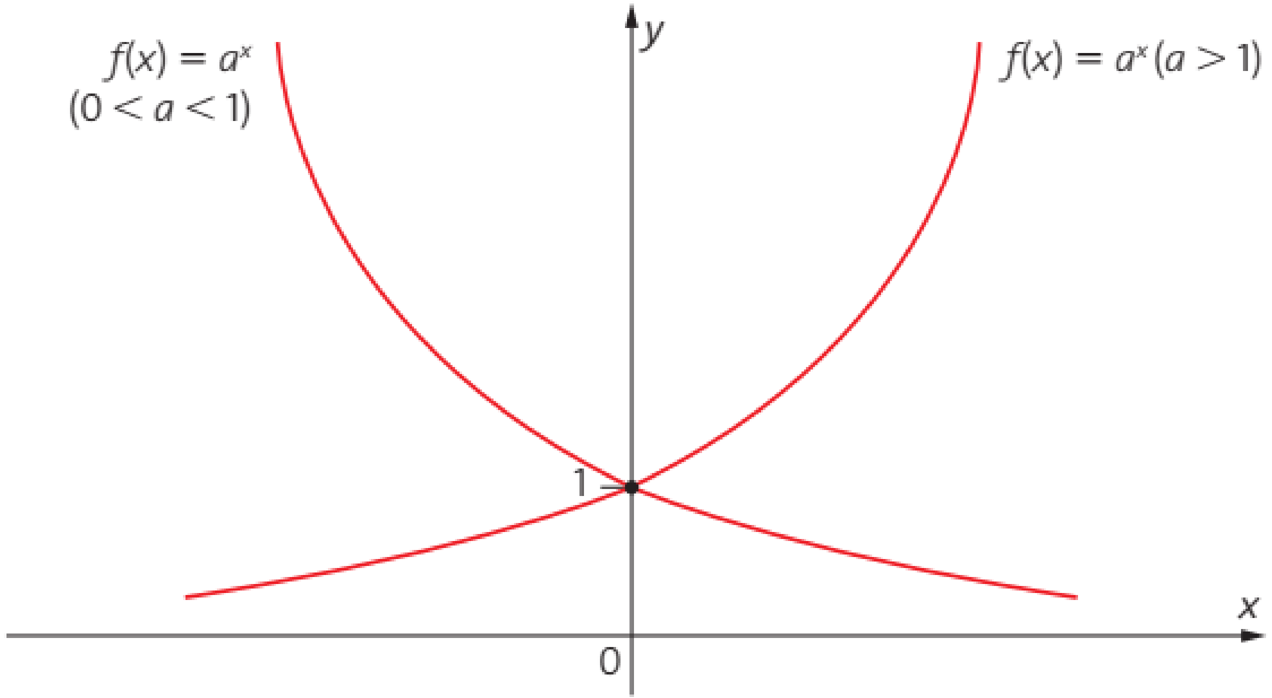
Dois dias após a exposição ao remédio, a população da bactéria reduziu-se a quantos por cento da população inicial? 6,25%

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
2^x	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	2^0	2^1	2^2	2^3
$y = 2^x$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8





x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{0}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{3}$
$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	8	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



Fique atento!
A função exponencial está definida para todo x real e tem por imagem o semieixo $y > 0$.

- para $a > 1$, a função é crescente $(x_1 > x_2 \Rightarrow a^{a_1} > a^{x_2})$;
- para $0 < a < 1$, a função é decrescente $(x_1 > x_2 \Rightarrow a^{x_1} > a^{x_2})$;

Equação exponencial

a) $3^{3x-1} = 81$

$$0{,}75^{x} = \frac{9}{16}$$

$$9^{x+1} = \frac{1}{27}$$

O número irracional e e a função exponencial e^x

$$f(x) = e^x$$

$e = 2{,}718281... \Rightarrow$
$\Rightarrow e > 1 \Rightarrow f(x) = e^x$
é crescente

O número de bactérias de um cultura, t horas após o início de certo experimento, é dado pela expressão $N(t) = 1200 \cdot 2^{0,4t}$. Nessas condições, quanto tempo após o início do experimento a cultura terá 38 400 bactérias?

Voltando a situação do cartão de crédito

- $V = 500 + 1{,}1099^t$
- Qual o valor da dívida após 1 ano?
- Em quanto tempo o valor da dívida chega em R$ 5000,00?

Logaritmos

Dados os números reais positivos a e b, com $a \neq 1$, se $b = a^c$, então o expoente c chama-se **logaritmo de b na base a**, ou seja, $\mathbf{\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b}$, com a e b positivos e $a \neq 1$.

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_a b = c \begin{cases} c\text{: logaritmo} \\ a\text{: base de logaritmo} \\ b\text{: logaritmando} \end{cases}$	$a^c = b \begin{cases} b\text{: potência} \\ a\text{: base da potência} \\ c\text{: expoente} \end{cases}$

a) $\log_3 81 = 4 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

b) $\log_{\frac{1}{2}} 32 = -5 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 32$

c) $\log_{\sqrt{5}} 5 = 2 \Leftrightarrow (\sqrt{5})^2 = 5$

d) $\log_8 1 = 0 \Leftrightarrow 8^0 = 1$

Observações:

1ª) *Condições de existência do logaritmo*

Pela definição,

$$\log_a N \text{ existe quando e somente quando } \begin{cases} N > 0 \\ a > 0 \text{ e } a \neq 1 \end{cases}$$

Veja que, de acordo com as restrições impostas, não são definidos, por exemplo: $\log_3 (-81)$, $\log_{10} 0$, $\log_0 3$, $\log_{-2} 8$ e $\log_1 6$. Experimente aplicar a definição nesses casos.

2ª) Quando a base do logaritmo for 10, podemos omiti-la. Assim, log 2 é o logaritmo de 2 na base 10. Aos logaritmos na base 10 damos o nome de **logaritmos decimais** ou de **Briggs**. Por exemplo, $\log 100 = \log 10^2 = 2$.

Propriedades operatórias dos logaritmos

Para a, M e N números reais positivos e $a \neq 1$, temos:

1ª) Logaritmo de um produto

$$\log_a (M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$$

2ª) Logaritmo de um quociente

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

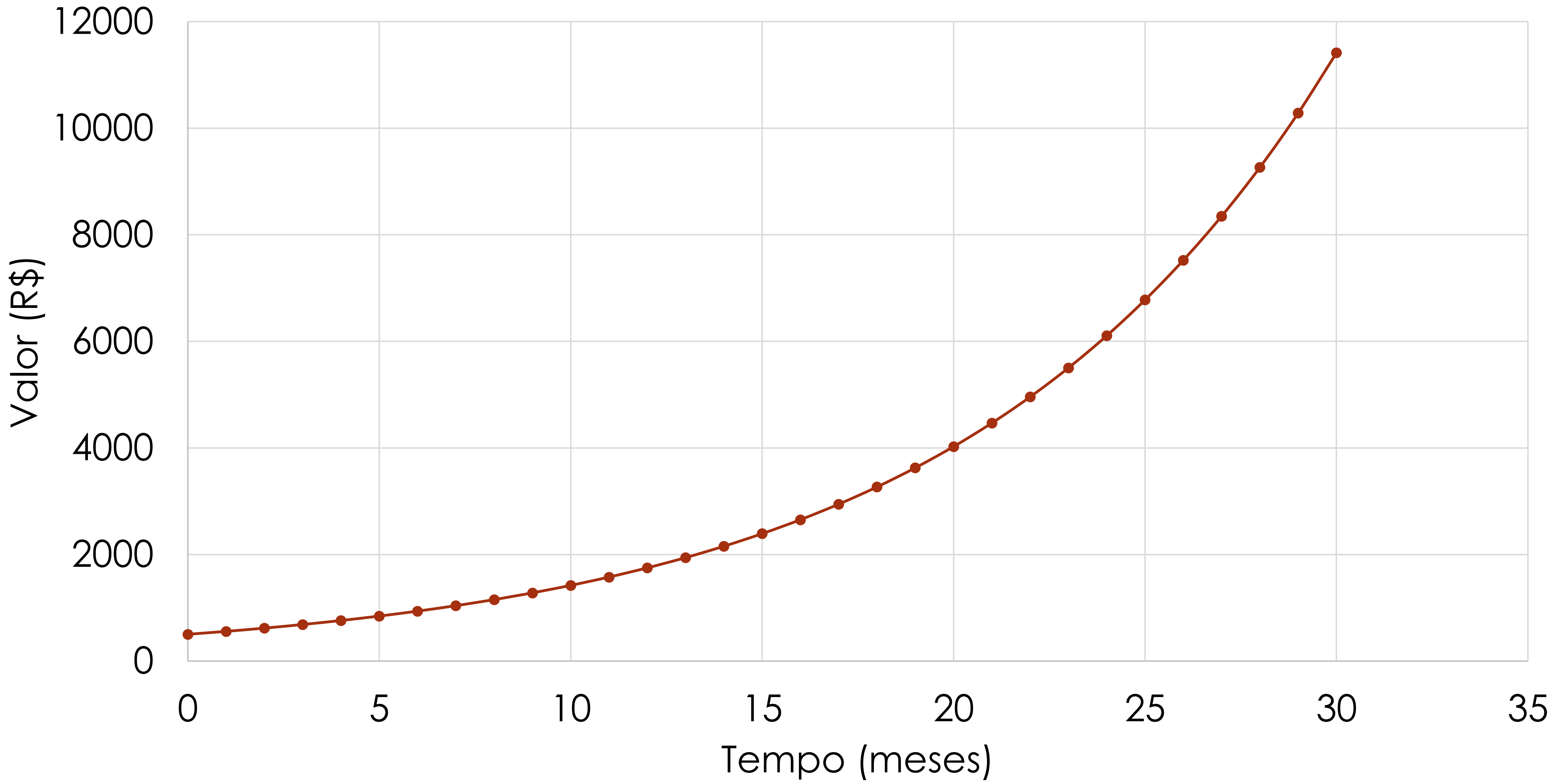
3ª) Logaritmo de uma potência

$$\log_a M^N = N \cdot \log_a M$$

Mudança de base do logaritmo

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b} \text{ para } N > 0,\ b > 0,\ a > 0;\ b \neq 1 \text{ e } a \neq 1$$

- $V = 500 \cdot 1{,}1099^{t}$
- Em quanto tempo o valor da dívida chega em R$ 5000,00?



12000
10000
8000
6000
4000
2000
0
Valor (R$)
0
5
10
15
20
25
30
35
Tempo (meses)

Resolva a equação $3^x = 5$.

$$5^{2x} - 7 \cdot 5^x + 12 = 0$$

Em quantos anos 500 g de uma substância radioativa, que se desintegra a uma taxa de 3% ao ano, se reduzirão a 100 g? Use $Q = Q_0 \cdot e^{-rt}$, em que Q é a massa da substância, r é a taxa e t é o tempo em anos.

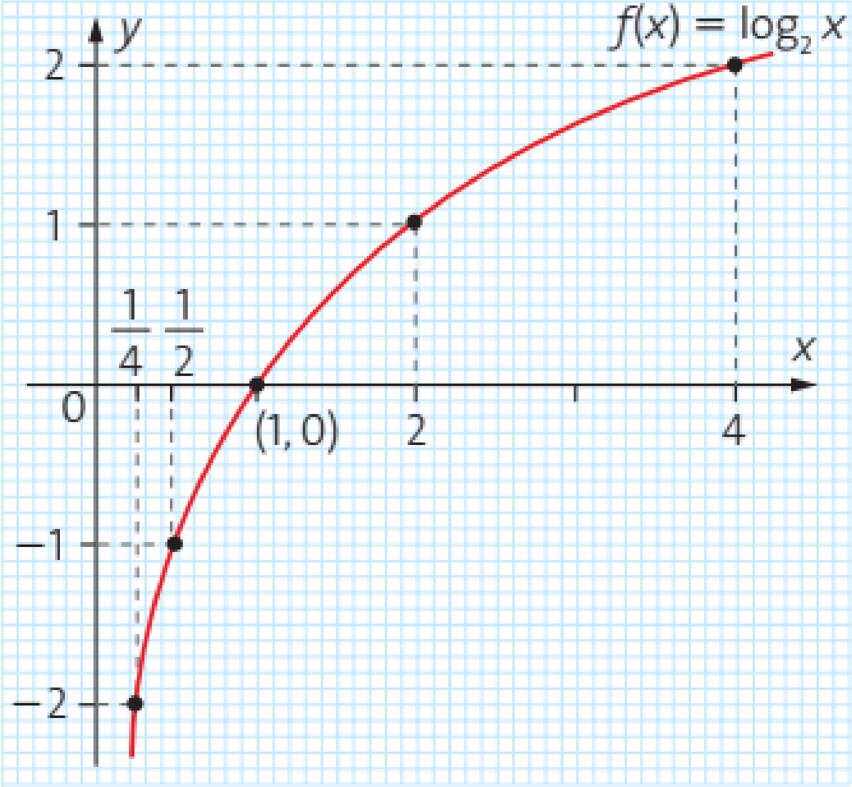
Função logarítmica

Definição

Uma função $f: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \log_a x$ ou $y = \log_a x$, com $a > 0$ e $a \neq 1$, é denominada **função logarítmica.**

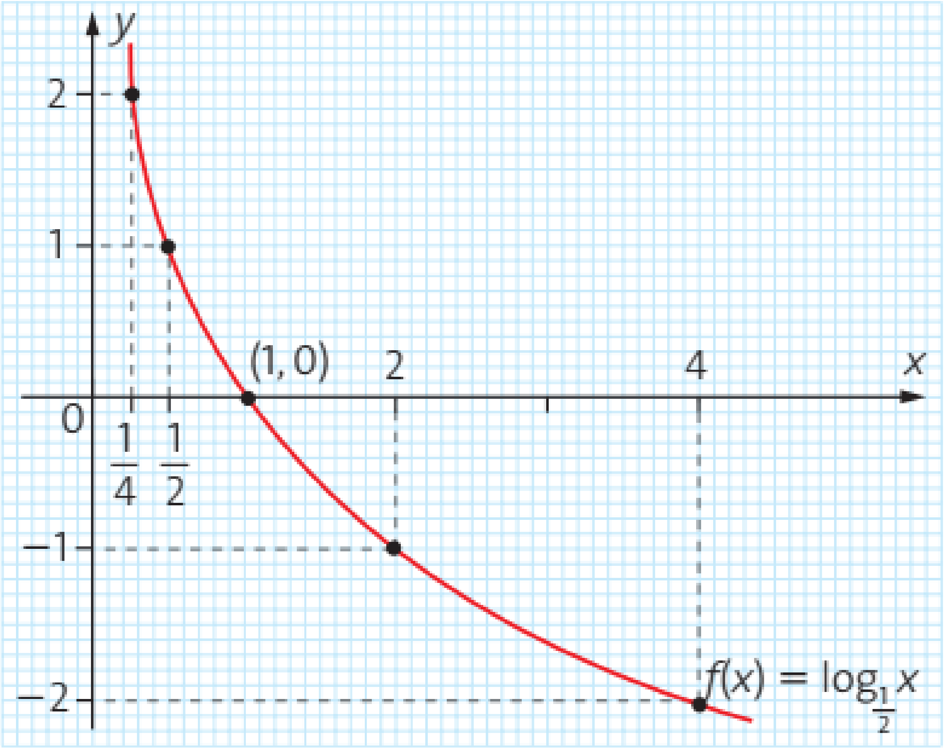
a) $f(x) = \log_2 x$

x	$y = f(x)$
$\frac{1}{4}$	-2
$\frac{1}{2}$	-1
1	0
2	1
4	2



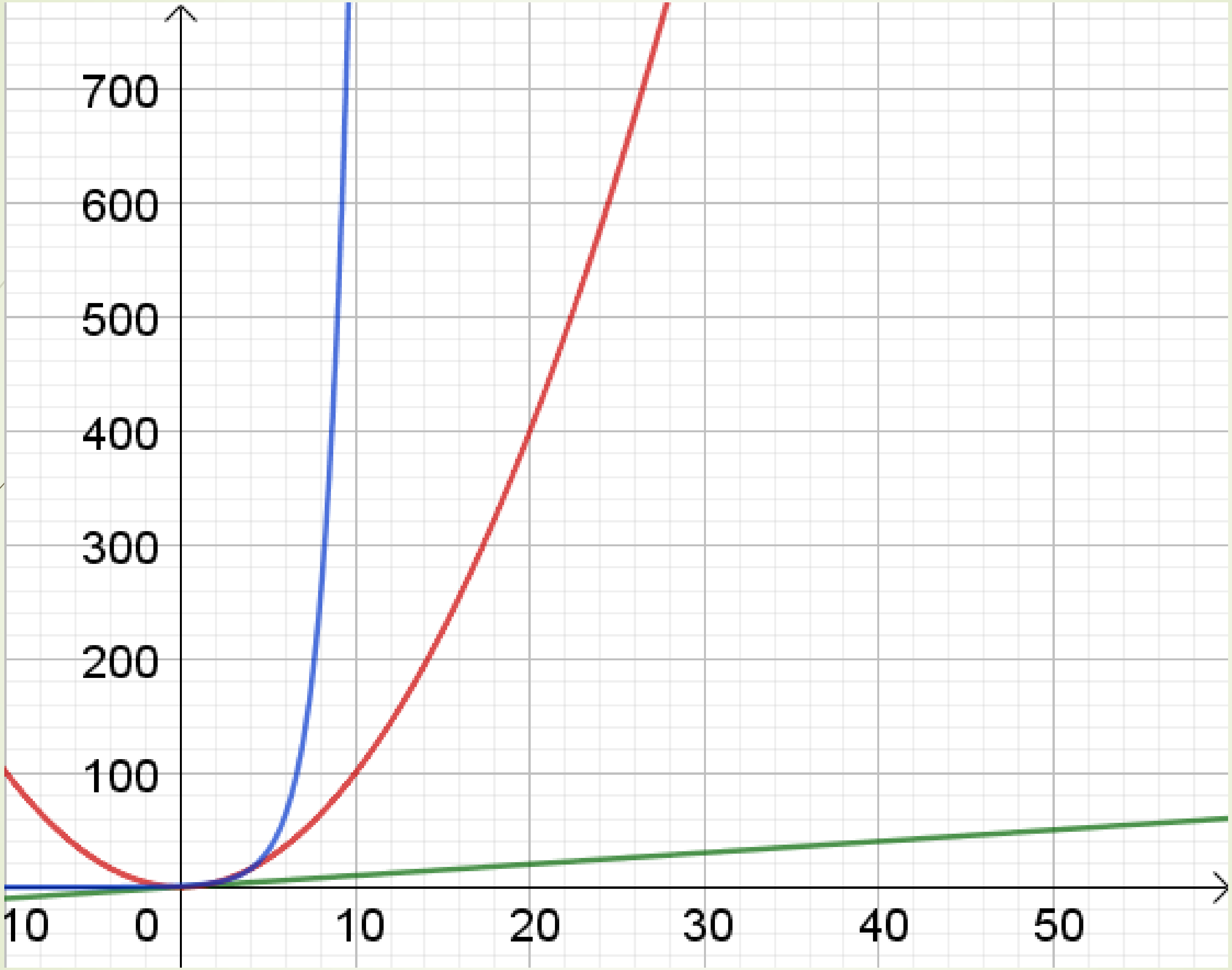
b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$

x	$y = f(x)$
$\frac{1}{4}$	2
$\frac{1}{2}$	1
1	0
2	−1
4	−2



Vamos comparar a taxa de crescimento

- $f(x) = x$
- $g(x) = x^2$
- $h(x) = 2^x$


700
600
500
400
300
200
100
10
0
10
20
30
40
50

Exercícios

MIORELLI, A.A.; AYJARA, D.F.A.; MANTOVANI, L.M. Pré-cálculo. Grupo A, 2015.

p. 129 – 7.2, 7.5, 7.7, 7,8, 7.19, 7.21

Para ir além do básico: p. 134 – 7.29, 7.30