Matrizes

Autoria: Professora Adriana Kuehn e professora Simone Leal Schwertl

Aplicações

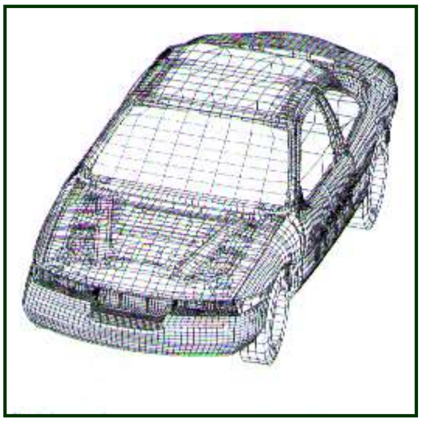
Projetos assistidos por computador (CAD – Computer-aided design) foram introduzidos no início dos anos 70 nas industrias automobilísticas, sua aplicação gera uma economia de milhões de dólares a cada ano.

Hoje, a **computação gráfica** é o coração, e **álgebra linear** a alma, de projetos de carros modernos.

Muitos meses antes que um novo modelo de carro seja construído, os engenheiros projetam e constroem um carro matemático – um modelo de arame que existe apenas na memória do computador e em terminais gráficos. Esse modelo matemático organiza e influencia cada passo do projeto e da produção do carro. O modelo abaixo é um Lincoln Mark VIII (Ford,1993), trabalhando em mais 2600 estações gráficas, os engenheiros da Ford aperfeiçoaram o modelo original, desenharam as linhas de fluxo da carroceria, ajustaram todo o interior, planejaram e desenharam as partes mecânicas e produziram milhares de desenhos técnicos para as peça que os fornecedores irão produzir. Os engenheiros até fizeram um teste de estrada para a suspensão do carro matemático, colocaram o carro num túnel de vento matemático e fizeram repetidamente testes de colisão no computador!

O carro em modelo de arame é armazenado na forma de muitas matrizes para cada componente principal. Cada coluna de uma matriz fornece as coordenadas de um ponto da superfície de uma componente. Há colunas adicionais que descrevem quais os pontos que devem ser ligados por uma curva. Um scanner tridimensional gera o conjunto de dados originais, ao passar os sensores por um modelo de argila em tamanho real. Cada parte no interior do carro também é armazenada na forma de matrizes. As componentes menores são desenhadas numa tela de computador com auxílio de programas gráficos, e as partes maiores são formadas fazendo junção matemática das partes menores.

Posteriormente, os programas matemáticos fornecem mais pontos, curvas e cores que geram as superfícies externas do carro, fazendo com que o carro pareça tão real que a sua aparência na tela é como se fosse um carro de verdade. Independentemente de se estar trabalhando no design global do carro ou modificando uma componente pequena, os engenheiros realizam diversas operações básicas com as imagens gráficas, tais como trocar a orientação ou a escala de uma figura, ampliar uma pequena região ou mudar entre posições bi e tridimensionais, observa-se que todas as manipulações das imagens, na tela, são realizadas através de técnicas da álgebra linear.



Fonte: Álgebra Linear e suas Aplicações (David C. Lay)

Tipos Especiais de Matrizes

A) <u>Matriz quadrada</u> é aquela cujo número de linhas (m) é igual ao número de colunas (n). (m=n)

Ex: $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$ $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 9 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ $A_{4x4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$A_{1x1} = [2]$

A1) <u>Matriz diagonal</u> é uma matriz quadrada onde $a_{ij} = 0$ *para* $i \neq j$ *ou seja os elementos que não estão na diagonal principal são nulos.*

Ex: $B_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

A2) <u>Matriz identidade</u> é uma matriz quadrada (m=n) ou unidade onde $a_{ij} = 0$*, para* $i \neq j$ *e e os elementos* $a_{ij} = 1$ *para* $i = j$ *ou seja os elementos que não estão na diagonal principal nulos. Representada por : In*

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

A3) <u>Matriz triangular superior</u>

Matriz quadrada onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos, m = n e $a_{ij} = 0$ *para* $i > j$.

$B_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ $B_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}$

A4) <u>Matriz Triangular Inferior</u> é aquela em que m = n e $a_{ij} = 0$ *para* $i < j$.

$C_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ $C_{4x4} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 2 & 4 & c & 0 \\ 3 & 3 & 2 & d \end{bmatrix}$

A5) <u>Matriz Simétrica</u> é a matriz quadrada onde $a_{ij} = a_{ji}$

$B_{3x3} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

A6) *<u>Matriz Anti-Simétrica</u>* *é a matriz quadrada onde* $a_{ij} = -a_{ji}$ *. Uma matriz é anti-simétrica se* $A = -A^T$ *ou* $A^T = -A$*. A diagonal principal sempre nula.*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 5 & -8 \\ -5 & 0 & 2 \\ 8 & -2 & 0 \end{bmatrix} \qquad A^T = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 8 \\ 5 & 0 & -2 \\ -8 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

B) *<u>Matriz Nula ou Zero</u>* *é aquela que* $a_{ij} = 0$ *para todo i e j.*

Ex: $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $\qquad A_{1x2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}$

C) *<u>Matriz Retangular</u>* *número de linhas≠número de colunas, m≠n.*

Ex: $B_{2x3} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ $\qquad B_{2x1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\qquad B_{2x1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$

C1) *<u>Matriz Coluna</u>* *é a matriz que possui apenas uma coluna.(ou vetor coluna)*

Ex: $C_{2x1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ $\qquad C_{4x1} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix}$

C2) *<u>Matriz linha</u>* *é uma matriz retangular que possui uma linha.(ou vetor linha)*

Ex: $F_{1x2} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \end{bmatrix}$ $\qquad F_{1x5} = \begin{bmatrix} x & y & z & w & m \end{bmatrix}$

<u>Matriz transposta</u>

A matriz transposta da matriz "A", de ordem mxn, é a matriz $"A^t"$*, de ordem mxn, que se obtém da matriz "A" permutando as linhas pelas colunas de mesmo índice. Ou seja:* $\left| \begin{array}{l} A = a_{ij} \\ A^T = a_{ji} \end{array} \right.$

Ex: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $\qquad A^T{}_{2x3} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$

<u>OBSERVAÇÕES</u>

<u>Diagonal Principal</u>

A diagonal principal de uma matriz quadrada é formada pelos elementos a_{ij} *onde* $i = j$.

$$A_{2x2} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (a_{11}, a_{22}, a_{33} \ldots\ldots\ldots\ldots a_{mn})$$

<u>*Diagonal Secundária*</u>

A diagonal principal de uma matriz quadrada é formada pelos elementos a_{ij} *onde* $i + j = n + 1$.

$$A_{3x3} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{tra = a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{mn} \cong \sum_{i=1}^{n} aii}$$