AUTOVALORES E AUTOVETORES

Seja T: V $\rightarrow$ V um operador linear (transformação linear de um espaço vetorial nele mesmo). Um vetor $\vec{v} \in$ V, $\vec{v} \neq 0$ é *autovetor* do operador T se existir $\lambda \in \Re$ tal que:

$$T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$$

O número real λ tal que: $T(\vec{v}) = \lambda\vec{v}$ é denominado *autovalor* de T associado ao vetor próprio $\vec{v}$

OBS: Os ***autovetores*** são também denominados ***VETORES PRÓPRIOS*** ou ***VETORES CARACTERíSTICOS*** e os ***autovalores*** são também denominados de ***VALORES PRÓPRIOS*** ou ***VALORES CARACTERÍSTICOS***.

EXEMPLO 1 :

Verifique se os vetores $\vec{v}_1$ = (5, 2) e $\vec{v}_2$ = (2, 1) são vetores próprios do operador linear T: $IR^2 \rightarrow IR^2$| T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y) associados os valor próprio λ = 6.

Solução

$T(\vec{v}_1)$ = T(5, 2) = (20 + 10, 10 + 2)

$T(\vec{v}_1)$ = T(5, 2) = (30, 12)

$T(\vec{v}_1)$ = T(5, 2) = 6(5,2)

$T(\vec{v}_1) = 6\vec{v}_1$.

Portanto, o vetor $\vec{v}_1$ = (5, 2) é vetor próprio do operador linear deste operador T: $IR^2 \rightarrow IR^2$| T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y), pois: T(5, 2) = (30, 5) = 6(5, 2).

$T(\vec{v}_2)$ = T(2, 1) = (8 + 5, 2 + 1)

$T(\vec{v}_2)$ = T(2, 1) = (13, 5)

$T(\vec{v}_2)$ = T(2, 1) $\neq \lambda$(2, 1).

Portanto,

O vetor $\vec{v_2}$ = (2, 1) não é vetor do operador linear T: $IR^2 \to IR^2$| T(x, y) = (4x + 5y, 2x + y), pois: T(2, 1) = (13, 5) $\neq \lambda$(2, 1). Para $\forall \in$ IR.

CONCLUSÃO: Qualquer múltiplo do vetor (5,2) será vetor próprio associado ao valor próprio 6.

Exemplo 2

Verificar se o vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um autovalor de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$ correspondendo ao autovalor $\lambda = 3$?

Solução

$$A.\vec{v} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A.\vec{v} = 3\vec{v}\,.$$

Portanto, o vetor $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ é um autovalor de $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$

DETERMINAÇÃO DOS VALORES PRÓPRIOS E DOS VETORES PRÓPRIOS:

i) Determinação dos valores próprios ou autovalores

Seja o operador linear T: $IR^3 \to IR^3$, cuja matriz canônica é:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \text{ isto é } A = [T]$$

Se v e λ são respectivamente, vetor próprio e o correspondente valor próprio do operador T, tem-se:

$Av = \lambda v$ (v é matriz-coluna 3 X1) ou:

$Av - \lambda v = 0$

Tendo em vista que $v = Iv$ (I é matriz-identidade), pose-se escrever:

$Av - \lambda Iv = 0$ ou:

$(A - \lambda I).v = 0$

Para que esse sistema homogêneo admita solução não-nula, isto é:

$$v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

deve-se ter:

$\det(A - \lambda I) = 0$ ou:

$$\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} \right) = 0$$

A equação $\det(A - \lambda I) = 0$ é denominada *equação característica* do operador T ou da matriz A, e suas raízes são os valores próprios do operador T ou da matriz A. O determinante $\det(a - \lambda I)$ é um polinômio em λ denominado *polinômio característico.*

ii) Determinação dos vetores próprios ou autovetores

A substituição de λ pelos valores no sistema homogêneo de equações lineares permite determinar os vetores próprios associados.

Exemplo

1) Determinar os valores próprios e os vetores próprios do operador linear:
T: $IR^3 \rightarrow IR^3$, T(x, y, z) = (3x – y + z, - x + 5y – z, x – y + 3z).

Solução:

i) <u>*Determinação dos valores próprios (autovalores):*</u>

A matriz canônica do operador T é:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

A equação característica do operador é:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

isto é, desenvolvendo o determinante pela 1ª linha,(Laplace) vem:

$$(3-\lambda).\begin{vmatrix} 5-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} - (-1).\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} -1 & 5-\lambda \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda).(15-8\lambda+\lambda^2-1)+1.(-3+\lambda+1)+1.(1-5+\lambda)=0$$
$$45-24\lambda+3\lambda^2-3-15\lambda+8\lambda^2-\lambda^3+\lambda-3+\lambda+1+1-5+\lambda=0$$
$$-\lambda^3+11\lambda^2-36\lambda+36=0$$
ou:
$$\lambda^3-11\lambda^2+36\lambda-36=0$$

As soluções inteiras, caso existam, são divisoras do termo independente – 36. Com as devidas substituições na equação acima, constata-se que $\lambda = 2$ é uma delas. Conseqüentemente, $\lambda - 2$ é um fator do polinômio característico $\lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36$. Se dividirmos esse polinômio por $\lambda - 2$, a equação poderá ser apresentada como:

$(\lambda - 2).(\lambda^2 - 9\lambda + 18) = 0$

e, portanto, as demais raízes são soluções da equação:

$\lambda^2 - 9\lambda + 18 = 0$

Logo, os valores próprios do operador T são:

$\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 6$

ii) <u>*Determinação dos vetores próprios (autovalores):*</u>

O sistema homogêneo de equações lineares que permite a determinação dos vetores próprios associado é:

$(A - \lambda I).v = 0$

Considerando $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ o sistema fica:

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\gamma \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

1) Substituindo λ por 2 no sistema, obtém-se os vetores próprios associados a $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
isto é;

$$\begin{cases} 1x - 1y + z = 0 \\ -1x + 3y - 1z = 0 \\ 1x - 1y + 1z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções próprias:

z = - x

y = 0

Assim, os vetores do tipo v_1 = (x, 0, - x) ou v_1 = x(1, o, - 1), x $\neq$ 0, são vetores próprios associados a λ_1 = 2.

2) Substituindo λ por 3 no sistema obtém-se os vetores próprios associados a λ_2 = 3:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é:

$$\begin{cases} -y + z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

O sistema admite uma infinidade de soluções próprias:

y = x

z = x

Assim, os vetores do tipo v_2 = (x, x, x) ou v_2 = x(1, 1, 1), x $\neq$ 0, são os vetores próprios associados a λ_2 = 3.

3) Substituindo λ por 6 no sistema obtém-se os vetores próprios associados a λ_3 = 6:

$$\begin{bmatrix} -3 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

isto é:

$$\begin{cases} -3x - y + z = 0 \\ -x - y - z = 0 \\ x - y - 3z = 0 \end{cases}$$

O sistema admite infinidade de soluções próprias:

y = - 2x

z = x

Assim, os vetores do tipo v_3 = (x, - 2x, x) ou v_3 = x(1, - 2, 1), x $\neq$ 0, são os vetores próprios associados a λ_3 = 6.

Exercícios

1) Determinar os vetores próprios e os valores próprios para:

a) T: $IR^2 \rightarrow IR^2$| T(x, y) = (4x + 5y; 2x + y).

b) T: $IR^2 \rightarrow IR^2$| T(x, y) = (-3x – 5y, 2y).

c) T: $IR^2 \rightarrow IR^2$| T(x, y) = (x = 2y, - x + 4y).

d) T: $IR^3 \rightarrow IR^3$| T(x, y, z) = (x, - 2x – y, 2x + y + 2z).

e) T: $IR^3 \rightarrow IR^3$, T(x, y, z) = (x +y, y, z)

f) T: $IR^2 \rightarrow IR^2$, T(x, y) = y, - x)

2. Calcular os valores próprios e os correspondentes vetores próprios da seguinte matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$.

3. Encontre todos os autovalores do operador T: $IR^3 \rightarrow IR^3$, definido por T(x, y, z) = (2x +y, y – z, 2y + 4z).

4. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$. Determine os autovalores e autovetores de A.

5. Determine os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$.

6. Determine os autovalores e autovetores da matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$.

7. Determinar os valores próprios e os vetores próprios da matriz $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.

8. Determinar os valores próprios e os vetores próprios da matriz $A = \begin{bmatrix} -16 & 10 \\ -16 & 8 \end{bmatrix}$.

9. Os valores próprios de um operador linear são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$, sendo $\overrightarrow{v_1}$ = (1, - 1) e $\overrightarrow{v_2}$ = (- 1, 0) os respectivos vetores associados. Determine T(x, y).

Referências Bibliográficas

BOLDRINI, José Luiz. Álgebra Linear. 3ª ed. São Paulo: Harpa, 1980.

LIPSCHUTZ, Seymour. Álgebra Linear. 2ª ed. São Paulo: McGran-Hill do Brasil, 1981.

MACHADO, Antonio dos Santos. Álgebra Linear e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Atual Editora, 1991.

STEINBRUCH, Alfredo e WINTERLE, Paulo. Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: McGran-Hil do Brasil, 1987.

STEINBRUCH, Alfredo e WINTEELE, Paulo. Álgebra Linear. 2ª ed. São Paulo: McGranw-Hill, 1987.