ESPAÇOS VETORIAIS

1. DEFINIÇÃO:

Seja um conjunto V, não-vazio, sobre o qual estão definidas as operações adição e multiplicação por escalar, isto é:

i) $\forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V$, temos $\vec{u} + \vec{v} \in V$.
ii) $\forall \alpha \in \Re, \forall \vec{u} \in V$ temos $\alpha\, \vec{u} \in V$.

O conjunto V com essas duas operações é chamado ESPAÇO VETORIAL REAL (ou espaço vetorial sobre $\Re$) se for satisfeitas as propriedades:

i) Em relação à adição:

A1) $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \forall\ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$.
A2) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}, \forall\ \vec{u}, \vec{v} \in V$.
A3) $\exists\ \vec{0} \in V, \forall\ \vec{u} \in V$ temos $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$.
A4) $\forall\ \vec{u} \in V, \exists\ (-\vec{u}) \in V$ temos $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$.

ii) Em relação à multiplicação por escalar:

M1) $(\alpha\beta)\ \vec{u} = \alpha(\beta\, \vec{u}), \forall\ \alpha, \beta \in \Re\ \ \vec{u} \in V$.
M2) $(\alpha + \beta)\ \vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$.
M3) $\alpha\,(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\,\vec{u} + \alpha\,\vec{v};\ \forall \alpha \in \Re$ e $\vec{u}, \vec{v} \in V$.
M4) $1 . \vec{u} = \vec{u};\ \forall\, \vec{u} \in V$.

EXEMPLOS:

1. V = $\Re^2$ = { (x,y) | x, y $\in\Re$}

é um espaço vetorial com as operações adição e multiplicação por escalar assim definidas, pois temos:

(i) $(x_1,y_1) + (x_2,y_2) = (x_1+x_2;\ y_1+y_2)$

(ii) $\alpha(x_1,y_1) = (\alpha x_1,\ \alpha y_1)$

2. V = $\Re^3$ = {(x,y,z) | x, y, z $\in\Re$}

é um espaço vetorial com as operações adição e multiplicação por escalar assim definidas:

(i) $(x_1,y_1,z_1) + (x_2,y_2,z_2) = (x_1+x_2;\ y_1+y_2;\ z_1+z_2)$

(ii) $\alpha(x_1,y_1,z_1) = (\alpha x_1,\ \alpha y_1; \alpha z_1)$

3. V = $\Re$

é um espaço vetorial com as operações adição e multiplicação por escalar assim definidas:

(i) $x_1 + x_2 = x_1 + x_2$

(ii) $\alpha x_1 = \alpha x_1$

4. V = M $_{2x2}$ = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle|\ a,b,c,d \in \Re \right\}$

É um espaço vetorial com as operações adição e multiplicação por escalar assim definidas:

(i) $$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 & b_1 + b_2 \\ c_1 + c_2 & d_1 + d_2 \end{bmatrix}$$

(ii) $$\alpha \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 & \alpha b_1 \\ \alpha c_1 & \alpha d_1 \end{bmatrix}$$

2. SUBESPAÇOS VETORIAIS:

Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto, não-vazio, de V.
Um subconjunto S, não-vazio, é um espaço vetorial de V se forem satisfeitas as condições:

(i) $0 \in S$
(ii) Para quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v} \in S$, tem-se $(\vec{u} + v) \in S$.
(iii) Para quaisquer $\alpha \in \Re$, $\vec{u} \in S$, tem-se $\alpha\,\vec{u} \in S$.

EXEMPLOS:

1. Seja **$V = \Re^2$ e $S = \{ (x, y) \in \Re^2 | \; y = 2x\}$ ou $S = \{ (x, 2x) \in \Re^2 \; | \; x \in \Re$** é um subespaço?

Solução:

Por tanto, S é um subespaço vetorial de IR^2.

2. Sejam ***$V = IR^2$ e $S = \{(x, 4 - 2x); x \in IR\}$*** é um subespaço de IR^2

Solução:

Referências Bibliográficas

BOLDRINI, José Luiz. Álgebra Linear. 3ª ed. São Paulo: Harpa, 1980.

LIPSCHUTZ, Seymour. Álgebra Linear. 2ª ed. São Paulo: McGran-Hill do Brasil, 1981.

MACHADO, Antonio dos Santos. Álgebra Linear e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Atual Editora, 1991.

STEINBRUCH, Alfredo e WINTERLE, Paulo. Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: McGran-Hil do Brasil, 1987.

STEINBRUCH, Alfredo e WINTEELE, Paulo. Álgebra Linear. 2ª ed. São Paulo: McGranw-Hill, 1987.