Lógica de Predicados

<parte 2 – sintaxe e semântica>

LÓGICA PARA COMPUTAÇÃO

PROF. JONATHAN GIL MÜLLER

FURB

LÓGICA DE PREDICADOS: introdução

MOTIVAÇÃO: como simbolizar matematicamente o conhecimento abaixo expresso em linguagem natural:

>> Para qualquer número inteiro x, se x for par, então x é divisível por 2.

>> Alguém não é aluno de Ciência da Computação.

>> Todo aluno de Ciência da Computação é inteligente.
José é aluno de Ciência da Computação.
Logo, José é inteligente.

A dificuldade em representar tais conhecimentos na **lógica proposicional** deve-se às quantificações indicadas pelas palavras **para qualquer**, **alguém** e **todo**.

Assim, é necessária a introdução de **novos símbolos** na linguagem da lógica proposicional, obtendo-se uma linguagem mais rica, a linguagem da **lógica de predicados**.

LÓGICA DE PREDICADOS: introdução

- ✓ a **lógica de predicados** é uma linguagem mais rica, obtida a partir da introdução de novos símbolos na linguagem da lógica proposicional;

- ✓ a especificação da linguagem da lógica de predicados envolve:

>> sintaxe: regras para escrever fórmulas bem formadas a partir de símbolos de pontuação, de conectivos e outros símbolos da lógica de predicados.
>> semântica: regras para determinar o significado das fórmulas.

- ✓ o cálculo de predicados engloba os métodos para determinar a validade das fórmulas.

LÓGICA DE PREDICADOS: sintaxe

DEFINIÇÃO nº1 - Alfabeto: o alfabeto da lógica de predicados é constituído pelos seguintes símbolos:

- símbolos de pontuação: ( )
- símbolos verdade: *true, false; ou V, F.*
- símbolos para constantes: c, c_1, c_2... para representar **objetos específicos**;
- símbolos para variáveis: x, y, z, x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2... para representar **objetos arbitrários**;

. . .

LÓGICA DE PREDICADOS: sintaxe

- símbolos para funções: f^n, f_1^n, f_2^n..., com $n > 0$ indicando o nº de parâmetros da função. As funções representam **propriedades ou relações** entre os objetos, denotando objetos específicos;

- símbolos para predicados: p^n, q^n, r^n, p_1^n, q_1^n, r_1^n, p_2^n, q_2^n, r_2^n..., com $n > 0$ indicando o nº de parâmetros do predicado. Os predicados representam **propriedades ou relações** entre os objetos, denotando os valores **V** ou **F**;

- conectivos: $\neg$ (não), $\wedge$ (e), $\vee$ (ou), $\rightarrow$ (se-então), $\leftrightarrow$ (se-somente-se), $\forall$ (quantificador universal), $\exists$ (quantificador existencial).

LÓGICA DE PREDICADOS: sintaxe

DEFINIÇÃO nº2 - Termo: um termo na lógica de predicados representa um objeto específico e é definido por:

- toda constante é um termo;
- toda variável é um termo;
- se t_1, t_2, ... t_n são termos e f_n é uma função, então $f_n(t_1, t_2, ... t_n)$ é um termo.
- Nada mais é um termo.

LÓGICA DE PREDICADOS: sintaxe

DEFINIÇÃO nº3 - Átomo: um átomo na lógica de predicados representa um valor **V** ou **F** e é definido por:

- todo símbolo verdade (*true* e *false*) é um átomo;
- se t_1, t_2, ... t_n são termos e p_n é um predicado, então $p_n(t_1, t_2, \ldots t_n)$ é um átomo.

LÓGICA DE PREDICADOS: sintaxe

DEFINIÇÃO nº4 - Fórmula: uma fórmula é construída a partir dos símbolos do alfabeto, considerando as seguintes regras:

- todo átomo é uma fórmula;
- se α e β são fórmulas, então também são fórmulas:
  a) $(\neg \alpha)$ - negação,
  b) $(\alpha \wedge \beta)$ - conjunção,
  c) $(\alpha \vee \beta)$ - disjunção,
  d) $(\alpha \rightarrow \beta)$ - implicação (α é o antecedente, β é o consequente),
  e) $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ - bi-implicação (α é o lado esquerdo, β é o lado direito).
- se x é uma variável e α é uma fórmula, então também são fórmulas:
  a) $(\forall x)(\alpha)$,
  b) $(\exists x)(\alpha)$.

EXEMPLO: Seja a seguinte frase declarativa:

Todo filho de meu pai é meu irmão.

EXEMPLO: Seja a seguinte frase declarativa:

Todo filho de meu pai é meu irmão.

PREDICADOS:

Pred. ou Função

Uma fórmula junta átomos a partir de conectivos

$P(x,y)$: x é pai de y

$I(x,y)$: x é irmão y

subfórmula

$$\forall x \left((P(x,y) \land P(x,z)) \to I(y,z) \right)$$

INTERPRETAÇÃO: Para qualquer x, se x é pai de y e x é pai de z então y é irmão de z.

Fórmula

$f(x)$: retorna pai x

c : jonathan

$F(x,y)$: x é filho y

$$\forall x \left(F(x, f(c)) \to I(x,c) \right)$$

INTERPRETAÇÃO: Para qualquer x, se x for filho do pai de c, então x é irmão de c.

DEFINIÇÃO nº 5 - Correspondência entre quantificadores: sejam uma fórmula α e uma variável x. Os quantificadores se relacionam pelas correspondências:

- $(\forall x)(\alpha)$ é equivalente a $\neg((\exists x)(\neg\alpha))$
- $(\exists x)(\alpha)$ é equivalente a $\neg((\forall x)(\neg\alpha))$

Equivalência

$\forall \rightarrow \exists$

$$\forall x\,(\overbrace{T(x)}^{\alpha}) \equiv \neg(\exists x\,(\neg \overbrace{T(x)}^{\alpha}))$$

Variável
Aluno FURB

x tem acesso ao Teams

Todo aluno da FURB tem acesso ao MS Teams. $\equiv$ É falso que existe um aluno da FURB que não tenha acesso ao MS Teams

Equivalência

$\exists \rightarrow \forall$

$$\exists x\,(R(x)) \equiv \neg(\forall x\,(\neg R(x)))$$

Variável:
Funcionário do FURB

x é reitor do FURB

Existe algum funcionário da FURB que é reitor da FURB

É falso que todos funcionários da FURB não são reitores da FURB

LÓGICA DE PREDICADOS: sintaxe

Quantificador Universal ∀x

• Representa afirmações universais: devem ser **válidas para todos** os elementos de um domínio.

>> Para todo mundo...
>> Para qualquer um que...
>> Todos aqui...

Exemplo:

• p(x) ≡ inteligente(José) ➔ José é inteligente.
∀x(p(x)) = Todos são inteligentes.

LÓGICA DE PREDICADOS: sintaxe

Quantificador Existencial ∃x

• Representa afirmações existenciais: devem ser **válidas para pelo menos um** dos elementos do domínio.

>> Existe pelo menos um ...
>> Para pelo menos um...
>> Existe alguém ...
>> Algum ...

Exemplo:

• p(x) = p(x) ≡ inteligente(José) ➔ José é inteligente.
• ∃x(p(x)) = Alguém é inteligente.

LÓGICA DE PREDICADOS: semântica

Para determinar a interpretação de uma fórmula da lógica dos predicados é necessário observar:

a) o universo (domínio) da interpretação;

b) a interpretação dos símbolos livres da fórmula.

LÓGICA DE PREDICADOS: semântica

DEFINIÇÃO nº6 - Escopo de um quantificador (abrangência): seja β uma fórmula. Então:

- se $(\forall x)(\alpha)$ é uma subfórmula de β, então o escopo de $(\forall x)$ em β é α;
- se $(\exists x)(\alpha)$ é uma subfórmula de β, então o escopo de $(\exists x)$ em β é α.

DEFINIÇÃO nº7 - Variável livre e ligada: sejam uma fórmula α e uma variável x. Então:

- a variável x é ligada em α se está no escopo de um quantificador;
- caso contrário, a variável x é livre.

DEFINIÇÃO nº8 - Símbolos livres: dada uma fórmula α, seus símbolos livres são as variáveis livres, as funções e os predicados.

EXEMPLO 1:

$$\left(\forall x\left(P(x) \land Q(x)\right)\right) \rightarrow (\neg P(x) \lor Q(y))$$

EXEMPLO 1:

$$(\forall x(P(x) \wedge Q(x))) \to (\neg P(x) \vee Q(y))$$

ORDEM DE PRECEDÊNCIA:

1º Respeitar símbolos pontuação

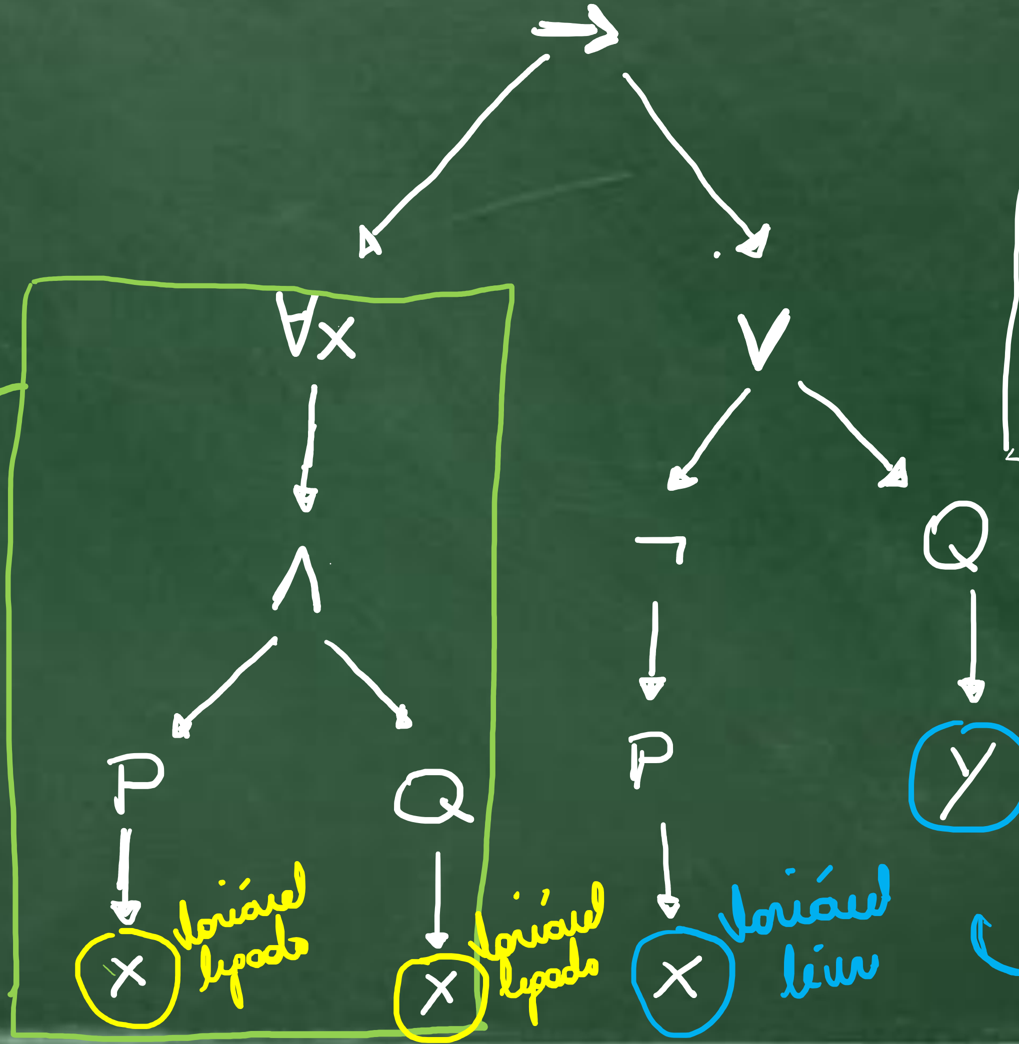
2º $\neg$, $\forall$, $\exists$

3º $\vee$, $\wedge$

4º $\to$, $\leftrightarrow$

Escopo do quantificador $\forall x$: Parte da fórmula que está sob efeito da quantificação

ESTRUTURA DA FÓRMULA:



Pois, estes não pertencem ao escopo do quantificador

SÍMBOLOS LIVRES:

x (2ª ocorrência)

y

P, Q } Predicados

EXEMPLO 2:

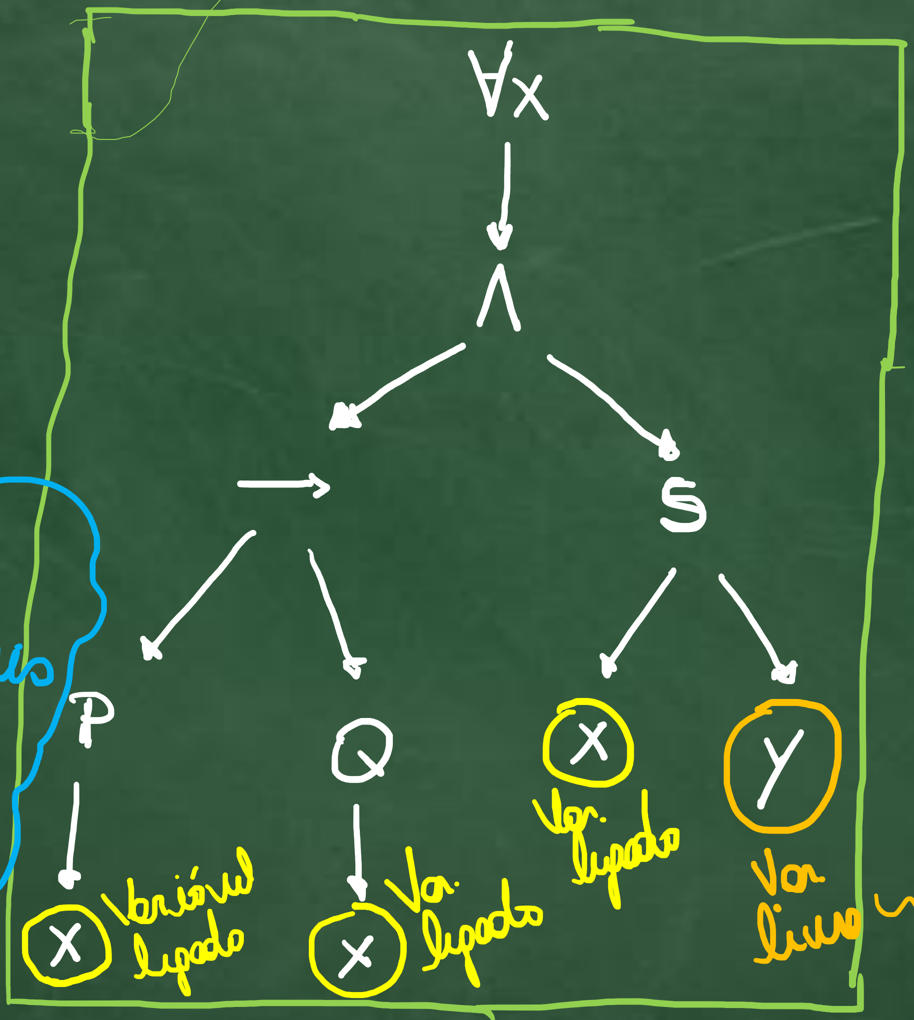
$$\forall x((P(x) \to Q(x)) \land S(x,y))$$

EXEMPLO 2:

$$\forall x\left(\left(P(x) \to Q(x)\right) \wedge S(x,y)\right)$$

Árvore de análise da estrutura de uma fórmula de predicados

Escopo do Quantificador ∀x



SÍMBOLOS LIVRES: $\underbrace{P, Q, S}_{\text{Predicados}}, y$.

- FÓRMULA FECHADA: não possui variáveis livres
- FÓRMULA ABERTA possui variáveis livres

Pois o ∀ está quantificando apenas a variável x.

LÓGICA DE PREDICADOS: semântica

DEFINIÇÃO nº9 – Interpretação de fórmulas: seja U um conjunto não vazio, denominado universo. Uma interpretação I sobre U é definida da seguinte forma:

- I[*true*] = **V**, a interpretação de *true* é **V**;
- I[*false*] = **F** , a interpretação de *false* é **F**;
- para toda constante **c**, se I[**c**] = **u**, então **u** $\in$ U;
- para toda variável **x**, se I[**x**] = **u**, então **u** $\in$ U;

...

LÓGICA DE PREDICADOS: semântica

- para toda função $\mathbf{f^n}$, se $\mathrm{I}[\mathbf{f^n}] = \mathbf{u}$, então $\mathbf{u} \in \mathrm{U}$ e $\mathbf{f^n}$ é uma função n-ária em U, isto é, f^n: $\mathrm{U}^n \to \mathrm{U}$;
- para todo predicado $\mathbf{p^n}$, $\mathrm{I}[\mathbf{p^n}] \in \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$ e $\mathbf{p^n}$ é um predicado n-ário em U, isto é, p^n: $\mathrm{U}^n \to \{\mathbf{V}, \mathbf{F}\}$;
- se α e β são fórmulas, então $\neg(\alpha)$, $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \to \beta)$, $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são fórmulas cuja a interpretação é a mesma dada para fórmulas envolvendo esses conectivos na lógica proposicional;

P	**Q**	$\neg$**P**	**P** $\wedge$ **Q**	**P** $\vee$ **Q**	**P** $\to$ **Q**	**P** $\leftrightarrow$ **Q**
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

...

LÓGICA DE PREDICADOS: semântica

- se x é uma variável e α é uma fórmula, então:

a) $I[(\forall x)(\alpha)]$ = **V**, se e somente se $\forall$**u** $\in U$, $I[\alpha]$ = **V**, isto é, $I[\alpha]$ = **V** para todos os valores de **u**,

b) $I[(\forall x)(\alpha)]$ = **F**, se e somente se $\exists$**u** $\in U$, $I[\alpha]$ = **F**, isto é, existe pelo menos um valor **u** tal que $I[\alpha]$ = **F**,

c) $I[(\exists x)(\alpha)]$ = **V**, se e somente se $\exists$**u** $\in U$, $I[\alpha]$ = **V**, isto é, existe pelo menos um valor **u** tal que $I[\alpha]$ = **V**,

d) $I[(\exists x)(\alpha)]$ = **F**, se e somente se $\forall$**u** $\in U$, $I[\alpha]$ = **F**, isto é, $I[\alpha]$ = **F** para todos os valores de **u**.

LÓGICA DE PREDICADOS: semântica

>> como determinar a interpretação de fórmulas **sem quantificadores**?

<u>1º</u>: substituir variáveis e constantes, se for o caso

<u>2º</u>: substituir funções e predicados

<u>3º:</u> determinar a I[α]

>> como determinar a interpretação de fórmulas **com quantificadores** com ou sem variáveis livres?

<u>1º</u>: substituir variáveis livres e constantes, se for o caso

<u>2º</u>: traduzir a fórmula para o português

<u>3º:</u> determinar a I[α], justificando a resposta da seguinte forma:

- I[($\forall$x)(a)] = V, apresentar um valor u_g do conjunto universo que se para esse valor I [a] = V, pode-se generalizar que para todos os valores de u $\in$ U, I [a] = V,
- I[($\forall$x)(a)] = F, apresentar um valor u_g do conjunto universo que para esse valor I [a] = F,
- I[($\exists$x)(a)] = V, apresentar um valor u_g do conjunto universo que para esse valor I [a] = V,
- I[($\exists$x)(a)] = F, apresentar um valor u_g do conjunto universo que se para esse valor I [a] = F, pode-se generalizar que para todos os valores de u $\in$ U, I [a] = F.

LÓGICA DE PREDICADOS: formalização de problemas

O processo de **formalização** converte uma **sentença (ou argumento)** em uma **fórmula da lógica de predicados**, ou seja, uma estrutura composta por termos e átomos.

A **formalização** de sentenças consiste basicamente em:

1º passo: selecionar um conjunto adequado de símbolos;

2º passo: traduzir as sentenças (trechos do discurso) para uma ou mais fórmulas, respeitando o significado pretendido dos símbolos.

FURB

DÚVIDAS?

DOCUMENTOS CONSULTADOS/RECOMENDADOS

1. ABE, J. M.; SCALZITTI, A.; SILVA FILHO, J. I. **Introdução à lógica para a ciência da computação**. 2.ed. São Paulo: Arte & Ciência, 2002.

2. BISPO, C. A. F.; CASTANHEIRA, L. B.; SOUZA FILHO, O. M. **Introdução à lógica matemática**. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

3. GERSTING, J. L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação**. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

4. NOLT, J.; ROHATYN, D. **Lógica**. São Paulo: Makron Books, 1991.

5. SOUZA, J. N. **Lógica para ciência da computação**: fundamentos de linguagem, semântica e sistemas de dedução. Rio de Janeiro: Campus, 2002.

FURB

EXERCÍCIOS

Bora estudar a lista de exercícios 6!!!