TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Uma função, onde o domínio e o contradomínio são espaços vetoriais reais. Assim, tanto a variável independente como a variáveis dependentes são vetores, razão pela qual essas funções são chamadas vetoriais ou funções vetoriais lineares, que serão denominadas ***transformações lineares***.

Para dizer que *T* é uma transformação do espaço vetorial *V* no espaço vetorial *W*, escreve-se:

$$T : V \rightarrow W$$

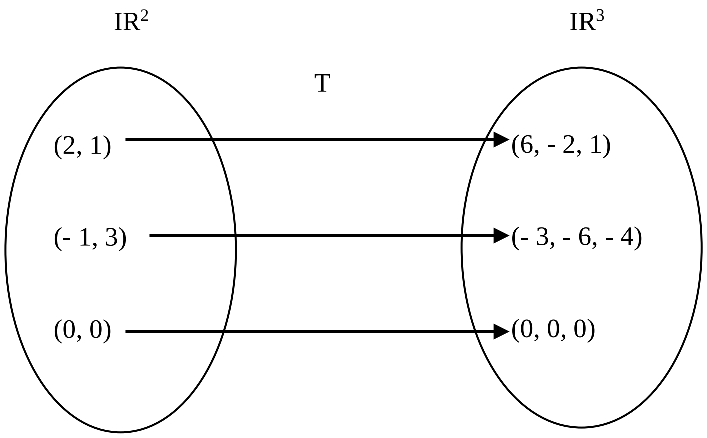
Sendo *T* uma função, cada vetor $v \in V$ tem um só vetor imagem $w \in W$, que será indicado por:

$$W = T(v)$$

Em outras palavras: Se *T* é uma transformação do espaço vetorial *V* no espaço vetorial *W* então escrevemos: $T:\ V \rightarrow W$, onde *V* é o domínio e *W* é o contra-domínio.
Como *T* é uma transformação (função) então cada vetor $v \in V$ tem um só vetor imagem $w \in W$, que indicaremos por: $w = T(v)$

EXEMPLO: Considerando $V = IR^2$ e $W = IR^3$. Uma transformação $T : IR^2 \rightarrow IR^3$ associa vetores $v = (x, y) \in IR^2$ com vetores $w = (x, y, z) \in IR^3$. Se a lei que define a transformação *T* for $T(x, y) = (3x, - 2y, x - y)$

O diagrama apresenta três vetores particulares *v* e suas correspondentes imagens *w*.



T (2, 1) = (6, - 2, 1)
T (- 1, 3) = (- 3, - 6, - 4)
T (0, 0) = (0, 0, 0)

Exercícios

1) Seja $V = IR^2$ e $W = IR^3$. Uma transformação $T: IR^2 \rightarrow IR^3$ associa vetores $v = (x, y) \in IR^2$ com vetores $w = (x, y, z) \in IR^3$. Seja a lei que define a transformação $T(x, y) = (2x, - x, x + y)$ então, calcule:
a) T(1, 3) =
b) T(0, 0) =
c) T(-1, 3) =
d) T(3, 1) =

2) Seja $V = IR^3$ e $W = IR$. Uma transformação $T : IR^3 \rightarrow IR$ associa vetores $v = (x, y, z) \in IR^3$ com vetores $w = (x) \in IR$. Seja a lei que define a transformação $T(x, y, z) = x + y - 2z$, então, calcule:

a) T(3, - 4, 0) =
b) T(3, 1, - 2) =
c) T(0, 0, 0) =
d) T(- 1, 2, 0) =

3) Seja $T : IR^2 \rightarrow IR^2$ definida por $T(x, y) = (x + y, 2y)$ então, calcule:

a) T(3, - 4) =
b) T(2, 2) =
c) T(0, 0) =
d) T(1, 3) =

4) Seja $T : IR^2 \rightarrow IR^2$ definida por $T(x, y) = (3x - 2y; x + 4y)$ e, sendo $u = (1, 2)$ e $v = (3, - 1)$ e ainda $\alpha = 5$ calcule:
a) $T(u + v)$
b) $T(u) + T(v)$
c) $T(\alpha u)$
d) $\alpha T(u)$

5) Seja $T : IR^3 \rightarrow IR^2$ definida por $T(x, y, z) = (x + z; y - 2z)$ e, sendo $u = (1, 3, 1)$ e $v = (-1, 2, 0)$ e ainda $\alpha = 2$ calcule:
a) $T(u + v)$
b) $T(u) + T(v)$
c) $T(\alpha u)$
d) $\alpha T(u)$

6) Seja $T : IR^2 \rightarrow IR^3$ definida por $T(x, y) = (x - y; y; 2)$ e, sendo $u = (1, 2)$ e $v = (3, - 1)$ e ainda $\alpha = 3$ calcule:
a) $T(u + v)$
b) $T(u) + T(v)$
c) $T(\alpha u)$
d) $\alpha T(u)$

TRANSFORMAÇÕES LINEARES:

Sejam *V* e *W* espaços vetoriais. Uma transformação T: V $\rightarrow$ W é chamada ***TRANSFORMAÇÃO LINEAR*** de *V* em *W* se:

i) $T(\vec{u}+\vec{v}) = T(\vec{u}) + T(\vec{v})$
ii) $T(\alpha\vec{u}) = \alpha T(\vec{u})$ para $\vec{u}$ e $\vec{v} \in V$ e $\forall \alpha \in \Re$.

EXEMPLOS

1). T:$IR^2 \rightarrow IR^3$, T(x, y) = (3x, - 2y, x – y) é linear?

i) Sejam u = (x_1, y_1) e v = (x_2, y_2) vetores genéricos de IR^2. Então:

$T(u + v) = T(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$
$T(u + v) = (3(x_1 + x_2), - 2(y_1 + y_2), (x_1 + x_2) - (y_1 + y_2))$
$T(u + v) = (3x_1 + 3x_2, - 2y_1 - 2y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$
$T(u + v) = (3x_1, - 2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2, - 2y_2, x_2 - y_2)$
$T(u + v) = T(u) + T(v)$

ii) Para todo $\alpha \in IR$ e para qualquer u = $(x_1, y_1) \in IR^2$, tem-se:

$$T(\alpha u) = T(\alpha x_1 \alpha y_1)$$
$$T(\alpha u) = (3\alpha x_1, -2\alpha y_1, \alpha x_1 - \alpha y_1)$$
$$T(\alpha u) = \alpha(3x_1, -2y_1, x_1 - y_1)$$
$$T(\alpha u) = \alpha T(u)$$

Portanto, T: $IR^2 \rightarrow IR^3$, definida por T(x, y) = (3x, - 2y, x – y) é uma transformação linear.

2). T: IR $\rightarrow$ IR, T(x) = 3x + 1 é linear?

i) Sejam u = x_1 e v = x_2 vetores genéricos de IR.

$T(u + v) = T(x_1 + x_2)$
$T(u + v) = 3(x_1 + x_2) + 1$
$T(u + v) = 3x_1 + 3x_2 + 1$
$T(u + v) = (3x_1 + 1) + 3x_2$
$T(u + v) \neq T(u) + T(v)$

Portanto, T não é linear.

OBS.:Propriedade: *"Em toda transformação linear T: V $\rightarrow$ W, a imagem do vetor 0 $\in$ V é o vetor 0 $\in$ W, isto é T(0) = 0"*
No exemplo 1), temos: T(0, 0) = (0, 0, 0)
(No exemplo 2), temos: T(0) $\neq$ 0, pois T(0) = 1.
Assim, também não é linear a transformação T: $IR^3 \rightarrow IR^2$, T(x, y, z) = (3x + 2, 2y – z)
Pois, T(0, 0, 0) = (2, 0), ou seja: T(0, 0, 0) $\neq$ (0, 0).

No entanto, a recíproca dessa propriedade não é verdadeira, pois existe transformação com T(0) = 0 e T não é linear.
É o caso da transformação $T: IR^2 \to IR^2$, $T(x,y) = (x^2, 3y)$

Exercícios

1) Verifique quais das seguintes transformações são lineares:

a) $T : Ir^2 \to IR^3$ definida por: T(x,y) = (x + y; 2x; y).

b) $T : IR \to IR^3$ definida por: T(x) = (0; x; 2x).

c) $T : IR^3 \to IR$ definida por: T(x,y;z) = (x + y - z).

d) $T : IR^2 \to IR^2$ definida por: T(x,y) = (x + 1; y).

2) Seja $T : IR^2 \to IR^2$ definida por: T(x,y) = (3y ; x - 2y).
A) Determine o vetor $\vec{u} \in IR^2$ tal que $T(\vec{u}) = (9,-5)$.
B) Determine o vetor $\vec{v} \in IR^2$ tal que $T(\vec{v}) = \vec{v}$.

3) Determine a transformação linear $T : IR^2 \to IR^3$ tal que T(-1, 1) = (3, 2, 1) e T(0, 1) = (1, 1, 0).

4) Para a transformação linear escrita na questão 3 encontre $\vec{v} \in \Re^2$ tal que $T(\vec{v}) = (-2,1,-3)$

5) Seja $T : IR^3 \to IR^2$ definida por
T(1, 1, 1) = (1, 2); T(1, 1, 0) = (2, 3) e T(1, 0, 0) = (3, 4).
A) Determine T(x,y,z).
B) Determine o vetor $\vec{u} \in \Re^3$ tal que $T(\vec{u}) = (-3,-2)$.
C) Determine o vetor $\vec{v} \in \Re^3$ tal que $T(\vec{v}) = (0,0)$.

6) Seja $T : IR^2 \to IR^2$ definida por T(1,0) = (3,-2); T(0,1) = (1,4).
A) Determine T(x,y).
B) Determine T(3,-2).
C) Determine o vetor $\vec{v} \in IR^2$ tal que $T(\vec{v}) = (0,0)$.

7) Seja $T: IR^3 \to IR^3$ definida por
T(x, y, z) + (x + 2y + 2z, x + 2y – z, - x +y + 4z)
a) Determine o vetor $u \in IR^3$ tal que T(u) = (- 1, 8, - 11)
b) Determine o vetor $v \in IR^3$ tal que T(v) = v.

NÚCLEO DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR:

Chama-se núcleo de uma transformação linear $T:V \to W$ ao conjunto de todos os vetores $\vec{v} \in V$ que são transformados em $\vec{0} \in W$.

Indica-se o conjunto núcleo por N(T) ou $N(T) = \{ \vec{v} \in V \mid T(\vec{v}) = \vec{0} \}$.

EXEMPLOS:

1) Seja $T : IR^2 \to IR^2$ definida por: $T(x, y) = (x + y;\ 2x + y)$ calcule N(T).

2) Seja $T : IR^3 \to IR^2$ definida por: $T(x, y, z) = (x - y + 4z;\ 3x + y + 8z)$ calcule N(T).

IMAGEM DE UMA TRANSFORMAÇÃO LINEAR:

Chama-se imagem de uma transformação linear $T: V \to W$ ao conjunto dos vetores $\vec{w} \in W$ que são imagens de pelo menos um vetor $\vec{v} \in V$. Indica-se por Im (T) ou $T(\vec{v})$.

$Im(T) = \{ \vec{w} \in W \mid T(\vec{v}) = w \text{ para algum } \vec{v} \in V \}$

EXEMPLO:

Seja $T : IR^2 \to IR^2$ definida por: $T(x,y) = (x + y;\ 2x + y)$ calcule I m (T).

Ou $Im(T) = \{ w = (a,b) \in IR^2 \mid T(x,y) = (a,b) \}$

EXERCÍCIOS:

Dadas as transformações lineares abaixo, determine N(T) e Im(T).

a) $T : IR^2 \to IR^2$ definida por: $T(x,y) = (3x - y;\ -3x + y)$.

b) $T : IR^2 \to IR^3$ definida por: $T(x,y) = (x + y;\ x;\ 2y)$.

c) $T : IR^3 \to IR^3$ definida por: $T(x, y, z) = (x - 3y;\ x - z;\ z - x)$.

d) $T : IR^2 \to IR^2$ definida por: $T(x,y) = (x - 2y;\ x + y)$.

e) $T: IR^3 \to IR^3$ definida por $T(x, y, z) = (x + 2y - z, y + 2z, x + 3y + z)$

Referências Bibliográficas

STEINBRUCH, Alfredo e WINTERLE, Paulo. Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: McGran-Hil do Brasil, 1987.

STEINBRUCH, Alfredo e WINTEELE, Paulo. Álgebra Linear. 2ª ed. São Paulo: McGranw-Hill, 1987

BOLDRINI, José Luiz. Álgebra Linear. 3ª ed. São Paulo: Harpa, 1980.

LIPSCHUTZ, Seymour. Álgebra Linear. 2ª ed. São Paulo: McGran-Hill do Brasil, 1981.

MACHADO, Antonio dos Santos. Álgebra Linear e Geometria Analítica. 2ª ed. São Paulo: Atual Editora, 1991.

.