# LISTA DE EXERCÍCIOS nº6 – RESOLUÇÃO

**1.**

a) $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$

b) $(\forall x)((\exists y)(p(x, f_1(y)) \wedge q(f_2(x), y)) \rightarrow r(x))$

c) $(\exists x)(p(x)) \vee (\forall y)(q(y))$

d) $(\exists x)(q(x, y) \rightarrow (\exists y)(r(f(x), y)))$

e) $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(y))$

f) $(\exists x)(p(x) \wedge (\forall y)(q(x, y)))$

g) $(\exists x)((\forall y)\ (p(x, y)) \leftrightarrow q(x, y))$

h) $(\exists x)((\forall y)((p(x, y) \vee q(y, z)) \rightarrow p(c_1, z)))$

i) $(\forall x)((\forall y)((\forall z)((p(x, y) \wedge p(y, z)) \rightarrow p(x, z))))$

j) $((\forall x)((\exists y)(p(x, y)))) \rightarrow p(f(c_1, c_2), x)$

| | símbolos livres |
|---|---|
| a) | p, q |
| b) | p, q, r, $f_1$, $f_2$ |
| c) | p, q |
| d) | q, r, f, y (1ª ocorrência) |
| e) | p, q, y |
| f) | p, q |
| g) | p, q, y (2ª ocorrência) |
| h) | p, q, z |
| i) | p |
| j) | p, f, x (2ª ocorrência) |

2.1 U = conjunto dos números naturais
I [c] = 3
I [x] = 10
I [f(x, y)] = x + y
I [p(x)] = V, se (x é divisível por 5)

a) p(f(x, c))
p(f(10, 3))
((10 + 3) é divisível por 5)
F

b) p(x)
p(10)
(10 é divisível por 5) = V

c) p(c)
p(3)
(3 é divisível por 5) = F

d) p(f(x, f(x, 5)))
p(f(10, f(10, 5)))
((10 + (10 + 5)) é divisível por 5) = V

---

2.2 U = conjunto dos números naturais
I [$c_1$] = 0
I [$c_2$] = 1
I [x] = 3
I [y] = 2
I [$f_1$(x, y)] = x + y
I [$f_2$(x, y)] = x * y
I [p(x, y)] = V, se (x < y)

a) $\neg p(x, y) \rightarrow p(c_1, f_1(x, y))$
$\neg p(3, 2) \rightarrow p(0, f_1(3, 2))$
$\neg(3 < 2) \rightarrow (0 < (3 + 2))$
$\neg F \rightarrow V = V$

b) $p(f_1(x, f_2(x, x)), c_2) \rightarrow (p(c_1, c_2) \wedge p(x, f_2(2, 2))$
$p(f_1(3, f_2(3, 3)), 1) \rightarrow (p(0, 1) \wedge p(3, f_2(2, 2))$
$((3 + (3 * 3)) < 1) \rightarrow ((0 < 1) \wedge (3 < (2 * 2)))$
$F \rightarrow (V \wedge V) = V$

---

2.3 I [x] = 14
I [y] = 14
I [p(x, y)] = V, se ($x \leq y$)

2.3.1 - U = conjunto dos números naturais

a) $(\forall x)(p(x, y))$, com I [y] = 14 $\equiv$ todos os números naturais são menores ou iguais a 14
F, pois se I [x] = 15, ($15 \leq 14$) = F

b) $(\exists x)(p(x, y))$ , com I [y] = 14 $\equiv$ existe pelo menos um número natural que é menor ou igual a 14
V, pois se I [x] = 0, ($0 \leq 14$) = V

2.3.2 - U = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14}

a) $(\forall x)(p(x, y))$, com I [y] = 14 $\equiv$ todos os números pertencentes ao conjunto universo são menores ou iguais a 14
V, pois se I [x] = 14, maior número pertencente ao conjunto universo, ($14 \leq 14$) = V

b) $(\exists x)(p(x, y))$ , com I [y] = 14 $\equiv$ existe pelo menos um número pertencente ao conjunto universo que é menor ou igual a 14
V, pois se I [x] = 0, ($0 \leq 14$) = V

---

2.4 U = conjunto dos números naturais
I [p(x)] = V, se ($x \geq 0$)
I [q(x)] = V, se (x é divisível por 5)
I [r(x)] = V, se (x < 0)

a) $(\forall x)(p(x)) \equiv$ todos os números naturais são maiores ou iguais a 0
V, pois se I [x] = 0, menor número natural, ($0 \geq 0$) = V

b) $(\exists x)(p(x)) \equiv$ existe pelo menos um número natural que é maior ou igual a 0
V, pois se I [x] = 5, ($5 \geq 0$) = V

c) $(\forall x)(q(x)) \equiv$ todos os números naturais são divisíveis por 5
F, pois se I [x] = 4, (4 é divisível por 5) = F

d) $(\exists x)(q(x)) \equiv$ existe pelo menos um número natural que é divisível por 5
V, pois se I [x] = 5, (5 é divisível por 5) = V

e) $(\forall x)(r(x)) \equiv$ todos os números naturais são menores do que 0
F, pois se I [x] = 0, menor número natural, (0 < 0) = F

f) $(\exists x)(r(x)) \equiv$ existe pelo menos um número natural que é menor do que 0
F, pois se I [x] = 0, menor número natural, (0 < 0) = F

---

2.5 U = conjunto dos números naturais
I [f(x)] = $2^x$
I [p(x)] = V, se (x é divisível por 4)

a) $(\exists y)(p(f(y))) \equiv$ existe pelo menos um número natural tal que 2 elevado a esse número é divisível por 4
V, pois se I [y] = 2, (($2^2$) é divisível por 4) = V

b) $(\forall x)(p(f(x))) \equiv$ 2 elevado a qualquer número natural é divisível por 4
F, pois se I [x] = 0, (($2^0$) é divisível por 4) = F

c) $\neg((\forall x)(p(x))) \equiv$ não é verdade que todos os números naturais são divisíveis por 4
V, pois se I [x] = 1, (1 é divisível por 4) = F e $\neg F$ = V

d) $(\forall x)(\neg p(x)) \equiv$ todos os números naturais não são divisíveis por 4
F, pois se I [x] = 8, (8 é divisível por 4) = V

e) $(\forall x)(p(x)) \wedge (\exists y)(p(f(y))) \equiv$ todos os números naturais são divisíveis por 4 e existe pelo menos um número natural tal que 2 elevado a esse número é divisível por 4

$(\forall x)(p(x)) \equiv$ todos os números naturais são divisíveis por 4
F, pois se I [x] = 3, (3 é divisível por 4) = F

$(\exists y)(p(f(y))) \equiv$ existe pelo menos um número natural tal que 2 elevado a esse número é divisível por 4
V, pois se I [x] = 2, (($2^2$) é divisível por 4) = V

Logo $F \wedge V = F$

f) $(\forall x)(p(x)) \vee (\exists y)(p(f(y))) \equiv$ todos os números naturais são divisíveis por 4 ou existe pelo menos um número natural tal que 2 elevado a esse número é divisível por 4

$(\forall x)(p(x)) \equiv$ todos os números naturais são divisíveis por 4
F, pois se I [x] = 3, (3 é divisível por 4) = F

$(\exists y)(p(f(y))) \equiv$ existe pelo menos um número natural tal que 2 elevado a esse número é divisível por 4
V, pois se I [x] = 2, (($2^2$) é divisível por 4) = V

Logo $F \vee V = V$

---

2.6 U = conjunto dos números inteiros
I[p(x)] = V, se (x é ímpar)
I[q(x)] = V, se (x < 10)
I[r(x)] = V, se (x > 9)

a) $(\exists x)(p(x)) \equiv$ existe pelo menos um número natural que é ímpar
V, pois se I [x] = 11, (11 é ímpar) = V

b) $(\forall x)(q(x) \rightarrow p(x)) \equiv$ todos os números naturais menores do que 10 são ímpares
F, pois se I [x] = 8, (8 < 10) $\rightarrow$ (8 é ímpar) = V $\rightarrow$ F = F

c) $(\exists x)(q(x) \wedge r(x)) \equiv$ existe pelo menos um número natural que é menor do que 10 e é maior do que 9
F, pois se I [x] = 9, (9 < 10) $\wedge$ (9 > 9) = V $\wedge$ F = F e se I [x] = 10, (10 < 10) $\wedge$ (10 > 9) = F $\wedge$ V = F

d) $(\forall x)(q(x) \vee r(x)) \equiv$ todos os números naturais são menores do que 10 ou maiores do que 9
V, pois se I [x] = 9, (9 < 10) $\vee$ (9 > 9) = V $\vee$ F = V e se I [x] = 10, (10 < 10) $\vee$ (10 > 9) = F $\vee$ V = V

---

2.7 U = conjunto dos números naturais
I [p(x, y)] = V, se (x < y)
I [q(x, y)] = V, se (x > y)
I [r(x, y)] = V, se ($x \leq y$)
I [s(x, y)] = V, se ($x \neq y$)

a) $(\forall x)((\exists y)(p(x, y))) \equiv$ para qualquer número natural x, existe pelo menos um número natural y que é maior do que ele (x < y)
V, pois se I [y] = x + 1, (x < x + 1) = V, para qualquer x

b) $(\exists x)((\forall y)(p(x, y))) \equiv$ existe pelo menos um número natural x que é menor do que qualquer número natural y
F, pois se I [x] = 0, menor número natural, (0 < 0) = F, para I [y] = 0

c) $(\exists x)((\exists y)(p(x, y))) \equiv$ existe pelo menos um número natural x que é menor do que algum número natural y
V, pois se I [x] = 0 e I [y] = 2, (0 < 2) = V

d) $(\forall x)((\forall y)(p(x, y))) \equiv$ qualquer número natural x, é menor do que qualquer número natural y
F, pois se I [x] = 2 e I [y] = 2, (2 < 2) = F

e) $(\forall x)((\exists y)(q(x, y))) \equiv$ para qualquer número natural x, existe pelo menos um número natural y que é menor do que ele (x > y)
F, pois se I [y] = 0, menor número natural, (0 > 0) = F, para I [x] = 0

f) $(\exists x)((\forall y)(q(x, y))) \equiv$ existe pelo menos um número natural x que é maior do que qualquer número natural y
F, pois se I [y] = x + 1, (x > x + 1) = F, para qualquer x

g) $(\exists x)((\exists y)(q(x, y))) \equiv$ existe pelo menos um número natural x que é maior do que algum número natural y
V, pois se I [x] = 2 e I [y] = 0, (2 > 0) = V

h) $(\forall x)((\exists y)(r(x, y))\ ))) \equiv$ para qualquer número natural x, existe pelo menos um número natural y que é maior ou igual a ele ($x \leq y$)
V, pois se I [y] = x + 1, ($x \leq x + 1$) = V, para qualquer x

i) $(\exists x)((\forall y)(r(x, y))) \equiv$ existe pelo menos um número natural x que é menor ou igual a qualquer número natural y
V, pois se I [x] = 0, menor número natural, ($0 \leq 0$) = V, para I [y] = 0

$(\exists x)((\exists y)(r(x, y))) \equiv$ existe pelo menos um número natural x que é menor ou igual a algum número natural y
V, pois se I [x] = 0 e I [y] = 2, ($0 \leq 2$) = V

j) $(\forall x)((\exists y)(s(x, y))) \equiv$ para qualquer número natural x, existe pelo menos um número natural y que é diferente dele ($x \neq y$)
V, pois se I [y] = x + 1, ($x \neq x + 1$) = V, para qualquer x

k) $(\exists x)((\forall y)(s(x, y))) \equiv$ existe pelo menos um número natural x que é diferente do que qualquer número natural y
F, pois se I [y] = x, ($x \neq y$) = F, para qualquer x

l) $(\exists x)((\exists y)(s(x, y))) \equiv$ existe pelo menos um número natural x que é diferente do que algum número natural y
V, pois se I [x] = 0 e I [y] = 2, ($0 \neq 2$) = V

---

2.8 U = conjunto dos números reais
I [$c_1$] = 1
I [$c_2$] = 25
I [x] = 13
I [y] = 77
I [f(x, y)] = x / y
I [p(x, y)] = V, se (x < y)

a) $(\forall x)(p(x, y))$, com I [y] = 77 $\equiv$ todos os números reais são menores do 77

F, pois se I [x] = 77, (77 < 77) = F

b) $(\exists x)(p(x, y))$, com I [y] = 77 $\equiv$ existe pelo menos um número real que é menor do 77
V, pois se I [x] = 76, (76 < 77) = V

c) $(\forall x)((\exists y)(p(x, y) \rightarrow p(c_2, f(c_1, c_2))))$, com I $[c_1]$ = 1 e I $[c_2]$ = 25, $(\forall x)((\exists y)(p(x, y) \rightarrow p(25, f(1, 25))))$
$(\forall x)((\exists y)(p(x, y) \rightarrow (25 < 1/25)))$ $\equiv$ para qualquer número real x, existe pelo menos um número real y, tal que, se x é menor do que y, então 25 é menor do que 1/25

$(\forall x)((\exists y)(p(x, y)))$ $\equiv$ para qualquer número real x, existe pelo menos um número real y que é maior do que ele (x < y)
V, pois se I [y] = x + 1, (x < x + 1) = V, para qualquer x

(25 < 1/25) = F

Logo V $\rightarrow$ F = F

d) $(\forall x)((\exists y)(p(x, y) \rightarrow p(f(c_1, c_2), c_2)))$, com I $[c_1]$ = 1 e I $[c_2]$ = 25, $(\forall x)((\exists y)(p(x, y) \rightarrow p(f(1, 25), 25)))$
$(\forall x)((\exists y)(p(x, y) \rightarrow (1/25 < 25)))$ $\equiv$ para qualquer número real x, existe pelo menos um número real y, tal que, se x é menor do que y, então 1/25 é menor do que 25

$(\forall x)((\exists y)(p(x, y)))$ $\equiv$ para qualquer número real x, existe pelo menos um número real y que é maior do que ele (x < y)
V, pois se I [y] = x + 1, (x < x + 1) = V, para qualquer x

(1/25 < 25) = V

Logo V $\rightarrow$ V = V

e) $(\forall x)((\exists y)(p(x, y)) \rightarrow p(x, y))$, com I [y] = 77, $(\forall x)((\exists y)(p(x, y)) \rightarrow p(x, 77))$ $\equiv$ para qualquer número real x, existe pelo menos um número real y, tal que, se x é menor do que y, então x é menor do que 77

$(\forall x)((\exists y)(p(x, y)))$ $\equiv$ para qualquer número real x, existe pelo menos um número real y que é maior do que ele (x < y)
V, pois se I [y] = x + 1, (x < x + 1) = V, para qualquer x

$(\forall x)(p(x, 77))$ $\equiv$ qualquer número real x é menor do que 77
F, pois se I [x] = 77, (77 < 77) = F

Logo V $\rightarrow$ F = F

f) $((\forall x)((\exists y)(p(x, y)))) \rightarrow p(f(c_1, c_2), x)$ , com I $[c_1]$ = 1, I $[c_2]$ = 25 e I [x] = 13, $((\forall x)((\exists y)(p(x, y)))) \rightarrow p(f(1, 25), 13)$
$((\forall x)((\exists y)(p(x, y)))) \rightarrow (1/25 < 13)$ $\equiv$ para qualquer número real x, existe pelo menos um número real y, tal que, se x é menor do que y, então 1/25 é menor do que 13

$(\forall x)((\exists y)(p(x, y)))$ $\equiv$ para qualquer número real x, existe pelo menos um número real y que é maior do que ele (x < y)
V, pois se I [y] = x + 1, (x < x + 1) = V, para qualquer x

(1/25 < 13) = V

Logo V $\rightarrow$ V = V

2.9 U = conjunto dos números inteiros
I $[c_1]$ = 0
I [x] = 1
I [y] = -1
I [f(x)] = x + 1
I [p(x, y)] = V, se (x < y)
I [q(x)] = V, se (x é par)

a) $p(x, c_1)$
p(1, 0)
(1 < 0)
F

b) $q(f(y)) \wedge p(x, f(x))$
$q(f(-1)) \wedge p(1, f(1))$
(-1+1 é par) $\wedge$ (1 < 1+1)
V $\wedge$ V = V

c) $(\exists x)(p(y, x))$, com I [y] = -1, $(\exists x)(p(-1, x))$ $\equiv$ existe pelo menos um número inteiro x que é maior do que -1
V, pois se I [x] = 2, (-1 < 2) = V

d) $(\forall y)(p(y, c_1) \vee p(f(y), y))$, com I $[c_1]$ = 0, $(\forall y)(p(y, 0) \vee p(f(y), y))$ $\equiv$ qualquer número inteiro y é menor do que 0 ou é maior do que y + 1
F, pois se I [y] = 1, (1 < 0) $\vee$ (1+1 < 1) = F $\vee$ F = F

e) $(\forall x)((\exists y)(p(x, y)))$ $\equiv$ para qualquer número inteiro x, existe pelo menos um número inteiro y que é maior do que ele (x < y)
V, pois se I [y] = x + 1, (x < x + 1) = V, para qualquer x

f) $(\exists y)((\forall x)(p(x, y)))$ $\equiv$ existe pelo menos um número inteiro y que é maior do que qualquer número inteiro x
F, pois se I [x] = y + 1, (y + 1 < y) = F, para qualquer x

**3.** Considerando que o universo de discurso das fórmulas abaixo é um conjunto de 10 pessoas, preencha na segunda coluna a quantidade de pessoas que podem ser bonitas caso a fórmula da primeira coluna seja verdadeira.

| fórmula | quantidade de pessoas |
|---|---|
| $(\forall x)(bonito(x))$ | 10 |
| $(\forall x)(\neg bonito(x))$ | 0 |
| $\neg((\forall x)(bonito(x)))$ | 9 |
| $(\exists x)(bonito(x))$ | 10 |
| $(\exists x)(\neg bonito(x))$ | 9 |
| $\neg((\exists x)(bonito(x)))$ | 0 |