LISTA DE EXERCÍCIOS nº3 - GABARITO

1. As fórmulas da lógica proposicional possuem propriedades semânticas. Sendo assim:

a) O que significa dizer que uma fórmula é tautológica (ou uma tautologia, ou válida)?
R.: Uma fórmula é tautológica se a interpretação da fórmula for sempre V, quaisquer que sejam as interpretações das suas sub-fórmulas.

b) O que significa dizer que uma fórmula é contraditória (ou insatisfatível)?
R.: Uma fórmula é contraditória se a interpretação da fórmula for sempre F, quaisquer que sejam as interpretações das suas sub-fórmulas.

c) O que significa dizer que uma fórmula é satisfatível (ou contingente, ou factível)?
R.: Uma fórmula é satisfatível se a interpretação da fórmula for V para algumas interpretações das suas sub-fórmulas e for F para outras.

---

2. Considere a tabela verdade das fórmulas abaixo. Para quais fórmulas é possível afirmar: é tautológica, é contraditória, é satisfatível? Justifique sua resposta.

a) R.: É tautológica, para todas as interpretações das suas sub-fórmulas, a interpretação da fórmula é sempre V.

¬	P	→	*true*
F	V	V	V
V	F	V	V

b) R.: É satisfatível, para algumas interpretações das suas sub-fórmulas, a interpretação da fórmula é V e para outras a interpretação da fórmula é F.

¬	((P	∨	Q)	→	(P	→	Q))
F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	V	F
V	V	V	F	F	V	F	F

c) R.: Não é possível determinar se a fórmula é contraditória ou satisfatível, pois não se tem determinadas todas as interpretações da fórmula.

(P	∧	Q)	↔	(P	→	¬	(Q	∨	¬	P))
V	V	V	F	V	F	F	V	V	F	V
F	F	F	F	F	V	F	F	V	V	F

---

3. Demonstre, utilizando o método da refutação ou absurdo, que as fórmulas a seguir são **tautologias**.

a) (P → R) → (P → R)

(P	→	R)	→	(P	→	R)
V	**V**	**F**	F	V	F	F
6	2	7	1	4	3	5

b) (P → Q) → ((P → ¬Q) → ¬P)

(P	→	Q)	→	((P	→	¬	Q)	→	¬	P)
V	V	V	F	**V**	**V**	**F**	V	F	F	V
7	2	9	1	8	4	11	10	3	5	6

c) (P → (Q → R)) → ((P → Q) → (P → R))

(P	→	(Q	→	R))	→	((P	→	Q)	→	(P	→	R))
V	**V**	V	**F**	F	F	V	V	V	F	V	F	F
8	2	12	13	10	1	9	4	11	3	6	5	7

d) ¬((P → (Q ∧ ¬Q)) ∧ P)

¬	((P	→	(Q	∧	¬	Q))	∧	P)
F	V	V	**V**	V	V	**F**	V	V
1	5	3	7	6	8	9	2	4

e) ((P → (Q → R)) ∧ (P ∧ ¬R)) → ¬Q

((P	→	(Q	→	R))	∧	(P	∧	¬	R))	→	¬	Q
V	**V**	V	**F**	F	V	V	V	V	F	F	F	V
11	6	5	13	12	2	8	7	9	10	1	3	4

f) $((P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)) \rightarrow ((P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge S))$

((P	→	Q)	∧	(R	→	S))	→	((P	∧	R)	→	(Q	∧	S))
V	V	V	V	V	V	V	F	V	V	V	F	**V**	**F**	**V**
8	10	12	2	9	11	13	1	6	4	7	3	14	5	15

g) $(P \vee Q) \leftrightarrow (Q \vee P)$

(P	∨	Q)	↔	(Q	∨	P)	
F	**V**	**F**	F	F	F	F	1ª possibilidade
6	2	7	1	4	3	5	
F	F	F	F	**F**	**V**	**F**	2ª possibilidade
4	2	5	1	6	3	7	

h) $(P \wedge Q) \leftrightarrow (Q \wedge P)$

(P	∧	Q)	↔	(Q	∧	P)	
V	V	V	F	**V**	**F**	**V**	1ª possibilidade
4	2	5	1	6	3	7	
V	**F**	**V**	F	V	V	V	2ª possibilidade
6	2	7	1	4	3	5	

i) $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$

(¬	P	∨	Q)	↔	(P	→	Q)	
F	V	**V**	**F**	F	V	F	F	1ª possibilidade
8	6	2	7	1	4	3	5	
F	V	F	F	F	**V**	**V**	**F**	2ª possibilidade
4	6	2	5	1	7	3	8	

j) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$

(P	→	(Q	→	R))	↔	((P	∧	Q)	→	R)	
V	V	**V**	**V**	**F**	F	V	V	V	F	F	1ª possibilidade
8	2	9	10	11	1	6	4	7	3	5	
V	F	V	F	F	F	V	**V**	V	**V**	**F**	2ª possibilidade
4	2	6	5	7	1	8	11	9	3	10	

4. Demonstre, utilizando o <u>método da refutação ou absurdo</u>, que as fórmulas a seguir são **contraditórias**.

a) ¬((P ∧ Q) → Q)

¬	((P	∧	Q)	→	Q)
V	V	V	V	F	F
1	5	3	6	2	4

b) P ∧ (Q ∧ ¬P)

P	∧	(Q	∧	¬	P)
V	V	V	V	V	F
2	1	4	3	5	6

c) (P ∧ Q) ∧ ¬P

(P	∧	Q)	∧	¬	P
V	V	V	V	V	F
5	2	6	1	3	4

d) (P ∧ Q) ∧ (¬P ∧ ¬Q)

(P	∧	Q)	∧	(¬	P	∧	¬	Q)
V	V	V	V	V	F	V	V	F
4	2	5	1	6	8	3	7	9

(P	∧	Q)	∧	(¬	P	∧	¬	Q)
V	V	V	V	F	V	V	F	V
4	2	5	1	8	6	3	9	7

e) ¬((P → R) → ((Q → R) → ((P ∨ Q) → R)))

¬	((P	→	R)	→	((Q	→	R)	→	((P	∨	Q)	→	R)))
V	F	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F	F	F
1	11	3	9	2	13	5	10	4	12	7	14	6	8

f) ¬(((P ∧ Q) → R) → ((P → R) ∨ (Q → R)))

¬	(((P	∧	Q)	→	R)	→	((P	→	R)	∨	(Q	→	R)))
V	V	V	V	V	F	F	V	F	F	F	V	F	F
1	11	14	12	3	13	2	7	5	8	4	8	6	10

g) ¬(((P → (Q ∨ R)) ∧ (¬R ∧ ¬Q)) → ¬P)

¬	(((P	→	(Q	∨	R))	∧	(¬	R	∧	¬	Q))	→	¬	P)
V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	V	F	F	F	V
1	6	7	13	15	14	3	9	11	8	10	12	2	4	5

h) ¬(P ∧ (Q ∧ ¬P)) → ((P ∧ Q) ∧ ¬P)

¬	(P	∧	(Q	∧	¬	P))	→	((P	∧	Q)	∧	¬	P)	
V							V	V	V	V	V	V	F	1ª possibilidade
2							1	6	4	7	3	5	8	
F							V	V	V	V	V	V	F	2ª possibilidade
2							1	6	4	7	3	5	8	
F	V	V	V	V	V	F	V				F			3ª possibilidade
2	5	4	7	6	8	9	1				3			

i) ¬(¬(P ∨ Q) ↔ (¬P ∧ ¬Q))

¬	(¬	(P	∨	Q)	↔	(¬	P	∧	¬	Q))	
V	V	F	F	F	F	V	F	F	V	F	1ª possibilidade
1	3	6	5	7	2	10	8	4	11	9	
V	F	F	F	F	F	V	F	V	V	F	2ª possibilidade
1	3	9	11	10	2	5	7	4	6	8	

j) ¬((P → Q) → (((P ∧ Q) ↔ P) ∧ ((P ∨ Q) ↔ Q)))

¬	((P	→	Q)	→	(((P	∧	Q)	↔	P)	∧	((P	∨	Q)	↔	Q)))	
V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V	V	1ª possibilidade
1	5	3	6	2	7	13	10	14	8	4	9	15	11	16	12	
V	F	V	V	F	F	F	V	V	F	F	F	V	V	V	V	2ª possibilidade
1	5	3	6	2	7	13	10	14	8	4	9	15	11	16	12	
V	F	V	F	F	F	F	F	V	F	F	F	F	F	V	F	3ª possibilidade
1	5	3	6	2	7	13	10	14	8	4	9	15	11	16	12	

5. Determine, utilizando o <u>método da refutação ou absurdo</u>, se as fórmulas a seguir são **tautologias, contraditórias ou satisfatíveis**.

a) (¬P ∨ ¬Q) ↔ ¬P - <u>conclusão</u>: é satisfatível

(¬	P	∨	¬	Q)	↔	¬	P	
F	V	F	F	V	V	F	V	é contraditória? ausência de absurdo, não é contraditória
6	5	2	7	8	1	3	4	
F	V	V	V	F	F	F	V	é tautologia? ausência de absurdo, não é tautologia
6	5	2	7	8	1	3	4	

b) ¬((P ∧ Q) ∧ (¬P ∧ ¬Q)) - <u>conclusão</u>: é tautologia

¬	((P	∧	Q)	∧	(¬	P	∧	¬	Q))
F	V	V	V	V	**F**	V	**V**	**F**	V
1	5	3	6	2	9	7	4	10	8

c) ¬(¬((P ∧ Q) ∧ ¬P)) - <u>conclusão</u>: é contraditória

¬	(¬	((P	∧	Q)	∧	¬	P))
V	F	F	V	**?**	V	V	F
1	2	7	4		3	5	6

d) ((P ∨ Q) ∧ (P → Q)) → P - <u>conclusão</u>: é satisfatível

((P	∨	Q)	∧	(P	→	Q))	→	P	
F	V	V	V	F	V	V	F	F	é tautologia? ausência de absurdo, não é tautologia
6	4	8	2	7	5	9	1	3	
V	V	V	V	V	V	V	V	V	é contraditória? ausência de absurdo, não é contraditória
6	4	8	2	7	5	9	1	3	

e) ¬ (((P ∧ ¬(¬Q ↔ R)) ∧ (¬R ∧ (¬S → Q))) → (S ∧ P)) - <u>conclusão</u>: é contraditória

¬	(((P	∧	¬	(¬	Q	↔	R))	∧	(¬	R	∧	(¬	S	→	Q)))	→	(S	∧	P))
V	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	V	F	V	V	F	F	**V**	**F**	**V**
1	7	5	8	15	16	9	14	3	10	12	6	18	19	11	17	2	20	4	13

f) ((P → Q) ∧ (¬(¬Q ↔ R) ∧ ((¬S → ¬R) ∧ ((S → (Q ∧ T)) ∧ ¬T)))) → ¬P - <u>conclusão</u>: é tautologia

((P	→	Q)	∧	(¬	(¬	Q	↔	R)	∧	((¬	S	→	¬	R)	∧	((S	→	(Q	∧	T))	∧	¬	T))))	→	¬	P
V	V	V	V	V	F	V	F	V	V	F	V	V	F	V	V	**V**	**V**	V	**F**	F	V	V	F	F	F	V
5	6	14	2	8	20	17	15	21	7	24	25	10	23	22	9	26	12	18	27	19	11	13	16	1	3	4

g) ((P ∨ (Q → R)) ↔ Q) ∧ ¬R - <u>conclusão</u>: é satisfatível

((P	∨	(Q	→	R))	↔	Q)	∧	¬	R	
V	V	V	F	F	V	V	V	V	F	é contraditória? ausência de absurdo, não é contraditória
10	6	8	9	5	2	7	1	3	4	
V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	é tautologia? ausência de absurdo, não é tautologia
10	6	8	9	5	2	7	1	3	4	

h) ((P → ¬P) → Q) ∧ (Q → ¬¬P) - <u>conclusão</u>: é satisfatível

((P	→	¬	P)	→	Q)	∧	(Q	→	¬	¬	P)	
V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	F	V	é contraditória? ausência de absurdo, não é contraditória
8	12	11	9	2	10	1	4	3	5	6	7	
F	V	V	F	V	V	F	V	F	F	V	F	é tautologia? ausência de absurdo, não é tautologia
8	12	11	9	2	10	1	4	3	5	6	7	

i) ((¬P ∨ ¬R) ∧ (Q → R)) → (P ↔ ¬Q) - <u>conclusão</u>: é satisfatível

((¬	P	∨	¬	R)	∧	(Q	→	R))	→	(P	↔	¬	Q)	
V	F	V	V	F	V	F	V	F	F	F	F	V	F	é tautologia? ausência de absurdo, não é tautologia
11	7	9	12	13	2	8	10	14	1	4	3	5	6	
F	V	V	V	F	V	F	V	F	V	V	V	V	F	é contraditória? ausência de absurdo, não é contraditória
11	9	4	12	13	2	10	5	14	1	6	3	7	8	