Disciplina: **ALGEBRA LINEAR** **Autoria** : Adriana Kuehn e Simone Leal Schwertl

Determinantes

Um determinante é um número que é atribuído a um reticulado quadrado de números, de uma determinada forma. Essa idéia já tinha sido considerada em 1683 pelo matemático japonês Seki Takakazu e, de forma independente. Em 1963 pelo matemático alemão Gottfried Leibniz (um dos inventores do cálculo), cerca de 160 anos antes que uma teoria de matrizes fosse desenvolvida.Durante os 120 anos seguintes, os determinantes foram estudados, principalmente, no que diz respeito a sistemas lineares de equações .

Depois, em 1812, Augustin-Louis Cauchy publicou um trabalho no qual usava determinantes para obter fórmulas para o volume de certos sólidos poliédricos. Sejam $v_1 = (a_1, b_1, c_1)$, $v_2 = (a_2, b_2, c_2)$, $v_3 = (a_3, b_3, c_3)$, e considere o “cristal” ou paralelepípedo da Fig. 1. Cauchy mostrou que o volume desse cristal é igual ao módulo do determinante associado ao sistema acima.

A utilização dos determinantes, feita por Cauchy, na geometria analítica deu partida a um intenso interesse em aplicações de determinantes que durou cerca de 100 anos. Um resumo do que era conhecido no início de 1900 preencheu um tratado de quatro volumes por Thomas Muir.

Na época de Cauchy, quando a vida era simples e as matrizes pequenas, os determinantes desempenharam um papel fundamental na geometria analítica e em outras partes da matemática. **Hoje, os determinantes têm pouco valor numérico em cálculos com matrizes de grande escala que ocorrem tão freqüentemente**. Mesmo assim, as fórmulas com determinantes ainda fornecem informações importantes sobre matrizes, e um conhecimento de determinantes é útil em algumas aplicações de álgebra linear.

FONTE:ALGEBRA LINEAR E SUAS APLICAÇÕES.David C. Lay.

CÁLCULO DE DETERMINANTES

Entenderemos por determinante , como sendo um número ou uma função, associado a uma matriz quadrada , calculado de acordo com regras específicas .

É importante observar , que só as matrizes quadradas possuem determinante .

Regra para o cálculo de um determinante de 2ª ordem

Dada a matriz quadrada de ordem 2 a seguir: $A_{2x2} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

- O determinante de A será indicado por det(A) e calculado da seguinte forma :

- det (A) = ad - bc
- Exemplo: Feito em sala.

Regra PRÁTICA para o cálculo de um determinante de 3ª ordem (Regra de SARRUS).

Exemplo: feito em sala

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

- **O DETERMINANTE É IGUAL A ZERO (0) SE:**

P1 – Quando uma das filas (linhas ou colunas) da matriz for nula (igual a zero).

Ex: $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 6 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ **det A = 0**

P2 – Quando duas filas(linhas ou colunas) forem iguais ou proporcionais.

Ex: $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & -5 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ **det A = 0** $B_{4X4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 1 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \end{bmatrix}$ **det B = 0**

P3 – Quando uma das filas é combinação linear de outras filas paralelas.

Ex: $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 14 \end{bmatrix}$ **det A = 0, pois $C_3 = C_1 + 2C_2$**

- **TRANSFORMAÇÕES QUE NÃO ALTERAM O DETERMINANTE:**

P4 – O determinante de uma matriz é igual ao determinante da sua matriz transposta.

Ex: $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **det A = 3** $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ **det A^T = 3**

P5 – *Teorema de Jacobi* um determinante não se altera, quando se somam aos elementos de uma fila fixa (linha ou colunas) os correspondentes elementos de outra fila paralela multiplicada por uma constante qualquer.

Ex: $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **det A = 3** $\longrightarrow$ **$B_{2x2} = C_1 + 2C_2$** $B = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$ **det B = 3**

- **<u>TRANSFORMAÇÕES QUE ALTERAM O DETERMINANTE:</u>**

P6 – Um determinante muda de sinal, quando se trocam entre si as posições de suas filas paralelas.

Ex: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$ **= 10-12=-2** $\longrightarrow$ $\det A = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ **=12-10=2**

P7 – Quando se multiplica (ou se divide) uma fila de um determinante por um número qualquer, o novo determinante fica multiplicado ou dividido por este número.

Ex: $\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ **= 12-10=2** Multiplicando os elementos da 1ª linha por 4 teremos:

$\det A = \begin{vmatrix} 12 & 20 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$ **= 48-40=8**

P8 – Se uma matriz é triangular superior ou inferior seu determinante é o produto dos elementos da diagonal principal.

Ex: $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ **det A = -10** $B_{4X4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}$ **det B = 16**

Aplique as propriedades acima, para determinar o determinante das seguintes matrizes, justifique sua resposta:

a) $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **b)** $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ **c)** $A_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

d) $B_{4X4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 1 & 4 & 9 & 2 \\ 1 & 3 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$ **e)** $A_{2x2} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **f)** $B_{4X4} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 4 & 0 & 16 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix}$