Pesquisa Operacional

MÉTODO SIMPLEX

FURB

UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU

- **Algoritmo Simplex** foi desenvolvido por George Dantzig e Koopmans em 1946, quando trabalhavam no departamento da Força Aérea Americana.

É considerado por muitos como um dos principais algoritmos inventados no século XX.

Problema I

Uma marcenaria deseja estabelecer uma programação diária de produção. Atualmente a oficina faz apenas dois produtos: *mesa* e *armário*, ambos de um só modelo. Para efeito de simplificação, vamos considerar que a marcenaria tem limitações em somente dois recursos: *madeira* e *mão de obra*, cujas disponibilidades diárias são mostradas na tabela abaixo:

Recurso	Disponibilidade
Madeira	12 m^2
Mão de obra	8 homens-hora

O processo de produção é tal que, para fazer 1 mesa, a fábrica gasta 2 m^2 de madeira e 2 homens-hora de mão de obra. Para fazer um armário, a fábrica gasta 2 m^2 de madeira e 1 homem-hora de mão de obra.

Além disso, o fabricante sabe que cada mesa dá um lucro de 6 u.m. e cada armário dá um lucro de 2 u.m. O problema do fabricante é encontrar o programa de produção que maximiza o lucro total.

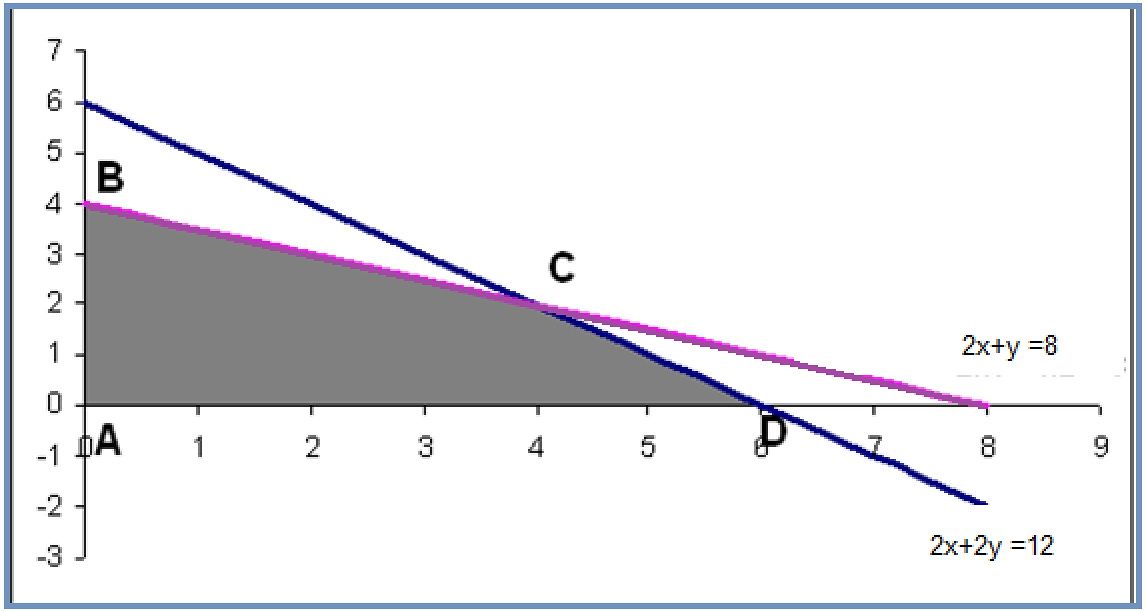
Modelagem

Variáveis: x: quantidade de mesas produzidas
y: quantidade de armários produzidos

Função Objetivo: Máximo lucro: $L = 6x + 2y$

Restrições: Matéria prima: $2x + 2y \leq 12$
Mão de obra: $2x + 1y \leq 8$
Não negatividade: $x, y \geq 0$

Resolução Gráfica



Ponto	x	y	L = 6x + 2y
A	0	0	0
B	0	6	12
C	2	4	20
D	**4**	**0**	**24**

MÉTODO SIMPLEX

Forma Padrão:

(1) Escrever inequações como equações:

Matéria Prima: $2x + 2y \leq 12$

$\Rightarrow \quad 2x + 2y \mathbf{+ 1f_1} = 12$

Mão de Obra: $2x + 1y \leq 8$

$\Rightarrow \quad 2x + 1y \mathbf{+ 1f_2} = 8$

Não negatividade:

$x, y, \mathbf{f_1, f_2} \geq 0$

MÉTODO SIMPLEX

Forma Padrão:

(2) Variáveis da Função Objetivo devem estar no lado esquerdo da igualdade:

Função Objetivo: $L = 6x + 2y$

$\Rightarrow$ **$L - 6x - 2y - 0.f_1 - 0.f_2 = 0$**

MÉTODO SIMPLEX

FORMA PADRÃO:

Matéria Prima: $2x + 2y \mathbf{+ 1f_1} = 12$

Mão de Obra: $2x + 1y \mathbf{+ 1f_2} = 8$

Não negatividade: $x, y, \mathbf{f_1, f_2} \geq 0$

Função Objetivo: $\mathbf{L - 6x - 2y - 0.f_1 - 0.f_2 = 0}$

TABELA I

Matéria Prima: $2x + 2y + 1f_1 + 0f_2 = 12$

Mão de Obra: $2x + 1y + 0f_1 + 1f_2 = 8$

Função Objetivo: $L - 6x - 2y - 0.f_1 - 0.f_2 = 0$

Não negatividade: $x, y, f_1, f_2 \geq 0$

Var. Básicas	x	y	f_1	f_2	Mão Direita
	2	2	1	0	12
	2	1	0	1	8
L	-6	-2	0	0	0

TABELA I

Var. Básicas	x	y	f_1	f_2	Mão Direita
f_1	2	2	1	0	12
f_2	2	1	0	1	8
L	-6	-2	0	0	0

$f_1 = 12$: inicialmente há disponível, na empresa, 12 m^2 de madeira.

$f_2 = 8$: inicialmente há disponível, na empresa, 8 homens-hora de trabalho.

Lucro inicial: $L = 0$

$x = y = 0$

É solução Ótima??

VB	x	y	f_1	f_2	MD
f_1	2	2	1	0	12
f_2	2	1	0	1	8
L	-6	-2	0	0	0

VB	x	y	f_1	f_2	MD
f_1	2	2	1	0	12
f_2	2	1	0	1	8
L	-6	-2	0	0	0

Coluna Pivotal

VB	x	y	f_1	f_2	MD
f_1	2	2	1	0	12
f_2	2	1	0	1	8
L	-6	-2	0	0	0

$12/2 = 6$

$8/2 = 4$

Linha Pivotal

VB	x	y	f_1	f_2	MD
f_1	2	2	1	0	12
f_2	2	1	0	1	8
L	-6	-2	0	0	0

Pivô

VB	x	y	f_1	f_2	MD
f_1	2	2	1	0	12
f_2	2	1	0	1	8
L	-6	-2	0	0	0

$NL_2^* = L_2/2$

$NL_2^* = L_2/2$

x: 2/2 = 1

y: ½ = 0,5

f_1: 0/2 = 0

f_2: ½ = 0,5

MD: 8/2 = 4

Tabela II

VB	x	y	f_1	f_2	MD
f_1					
X	1	0,5	0	0,5	4
L					

$$\text{Nova Linha} = \begin{pmatrix}\text{Linha}\\ \text{Antiga}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{n}^{\text{o}} & \text{que está nesta linha}\\ \text{e} & \text{na Coluna Pivotal}\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}\text{nova Linha}\\ \text{Pivotal}\end{pmatrix}$$

VB	x	y	f_1	f_2	MD
f_1	2	2	1	0	12
x	2	1	0	1	8
L	-6	-2	0	0	0

$$\boxed{NL_1^* = L_1 - 2.\, NL_2^*}$$

$NL_2^* = L_2/2$

$NL_1 = L_1 - 2.\, NL_2^*$

x: $2 - 2.1 = 0$

y: $2 - 2.0{,}5 = 1$

f_1: $1 - 2.0 = 1$

f_2: $0 - 2.0{,}5 = -1$

MD: $12 - 2.4 = 4$

Tabela II

VB	x	y	f_1	f_2	MD
f_1	0	1	1	-1	4
x	1	0,5	0	0,5	4
L					

$$\text{Nova Linha} = \begin{pmatrix}\text{Linha}\\ \text{Antiga}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}n^o & \text{que está nesta linha}\\ e & \text{na Coluna Pivotal}\end{pmatrix} x \begin{pmatrix}\text{nova Linha}\\ \text{Pivotal}\end{pmatrix}$$

VB	x	y	f_1	f_2	MD
f_1	2	2	1	0	12
f_2	2	1	0	1	8
L	-6	-2	0	0	0

$$NL_1^* = L_1 - 2.\, NL_2^*$$

$$NL_2^* = L_2/2$$

$$\boxed{NL_3^* = L_3 - (-6).\, NL_2^*}$$

$NL_3 = L_3 + 6.\, NL_2^*$

x: $-6 + 6.1 = 0$

y: $-2 + 6.0{,}5 = 1$

f_1: $0 + 6.0 = 0$

f_2: $0 + 6.0{,}5 = 3$

MD: $0 + 6.4 = 24$

Tabela II

VB	x	y	f_1	f_2	MD
f_1	0	1	1	-1	4
x	1	0,5	0	0,5	4
L	0	1	0	3	24

Tabela II

VB	x	y	f_1	f_2	MD
f_1	0	1	1	-1	4
X	1	0,5	0	0,5	4
L	0	1	0	3	24

É solução ótima??

$f_1 = 4$: ainda há disponível, na empresa, 4 m^2 de madeira.

x = 4 : devem ser fabricada 4 mesas.

Lucro Máximo: L = 24 u.m.

$y = f_2 = 0$

Exercício

Uma empresa fabrica dois tipos de produtos, feitos de madeira compensada. Cada produto do tipo A necessita de 5 minutos para o corte e 10 minutos para a montagem; cada produto do tipo B precisa de 8 minutos para o corte e 8 minutos para a montagem. Dispõe-se de 3 horas e vinte minutos para o corte e 4 horas para a montagem. O lucro é de 5 u.m. para cada produto do tipo A e de 6 u.m. para cada produto do tipo B. Suponha que toda a produção é vendida. Quantas unidades de cada produto a empresa deverá produzir para maximizar o lucro?

Solução

- Inicialmente precisamos modelar o problema.

Xa = Quantidade do prod. tipo a.

Xb = Quantidade do prod. tipo b.

- $L = 5\ Xa + 6\ Xb$

Restrições:

Corte: $5\ Xa + 8\ Xb \leq 200$

Montagem: $10\ Xa + 8\ Xb \leq 240$

$Xa;\ Xb;\ f1;\ f2 \geq 0$

Método simplex

		Tabela 1				
Linha	Var. Básicas	Xa	Xb	f1	f2	M.D. =
L1	f1	5	8	1	0	200
L2	f2	10	8	0	1	240
L3	L	-5	-6	0	0	0

Escolha do Pivô

		Tabela 1				
Linha	Var. Básicas	Xa	Xb	f1	f2	M.D. =
L1	f1	5	8	1	0	200
L2	f2	10	8	0	1	240
L3	L	-5	-6	0	0	0

pivô

Linha pivô

O que mais impacta no lucro está na coluna Xb

$\frac{200}{8} < \frac{240}{8}$

L1	f1	5	8	1	0	200

$$NL1 = L1/8$$

		Tabela 2				
Linha	Var. Básicas	Xa	Xb	f1	f2	M.D. =
NL1	Xb	0,625	1	0,125	0	25
L2	f2					
L3	L					

L2	f2	10	8	0	1	240

$$NL2 = L2 - (8 * NL1)$$

		Tabela 2				
Linha	Var. Básicas	Xa	Xb	f1	f2	M.D. =
NL1	Xb	0,625	1	0,125	0	25
NL2	f2	5	0	(-1)	1	40
L3	L					

L1	f1	5	8	1	0	200

$$NL3 = L3 - (-6*NL1)$$

		Tabela 2				
Linha	Var. Básicas	Xa	Xb	f1	f2	M.D. =
NL1	Xb	0,625	1	0,125	0	25
NL2	f2	5	0	(-1)	1	40
NL3	L	-1,25	0	0,75	0	150

Escolhendo o novo Pivô

		Tabela 2	Pivô			
Linha	Var. Básicas	Xa	Xb	f1	f2	M.D. =
NL1	Xb	0,625	1	0,125	0	25
NL2	f2	5	0	(-1)	1	40
NL3	L	-1,25	0	0,75	0	150

Vamos zerar Xa da linha 2

NL2	f2	5	0	(-1)	1	40

$$NNL2 = NL2/5$$

		Tabela 3				
Linha	Var. Básicas	Xa	Xb	f1	f2	M.D. =
NL1	Xb	0,625	1	0,125	0	25
NNL2	Xa	1	0	(-0,2)	0,2	8
NL3	L	-1,25	0	0,75	0	150

NL1	Xb	0,625	1	0,125	0	25

NNL1= NL1-(0,625*NNL2)

		Tabela 3				
Linha	Var. Básicas	Xa	Xb	f1	f2	M.D. =
NNL1	Xb	0	1	0,25	-0,125	20
NNL2	Xa	1	0	(-0,2)	0,2	8
NL3	L	-1,25	0	0,75	0	150

NL3	L	-1,25	0	0,75	0	150

NNL3 = NL3 – (1,25*NNL2)

		Tabela 3				
Linha	Var. Básicas	Xa	Xb	f1	f2	M.D. =
NNL1	Xb	0	1	0,25	-0,125	20
NNL2	Xa	1	0	(-0,2)	0,2	8
NNL3	L	0	0	0,5	0,25	160

		Tabela 3				
Linha	Var. Básicas	Xa	Xb	f1	f2	M.D. =
NNL1	Xb	0	1	0,25	-0,125	20
NNL2	Xa	1	0	(-0,2)	0,2	8
NNL3	L	0	0	0,5	0,25	160

Temos então como solução:

Xb = 20

Xa = 8

L = 160

f1=0

f2=0

Exercício Resolver Método Simplex

Problema 1.

- Um agricultor deseja cultivar duas variedades de cereais. Digamos tipo A e B, em uma área restrita a um hectare, sendo que cada are cultivado pelo cereal A produz 8 sacas e para o B 10 sacos. Para o plantio, cada are cultivado pelo cereal A precisa de 3 homens hora e o cultivado pelo cereal B, precisa de 2 homens hora, sendo que a disposição máxima de homens hora é de 240. O custo de um homem hora é de R$ 20,00. A demanda máxima é limitada pelo mercado consumidor de 480 sacos do cereal A, a um preço de R$ 15,00 por saco e 800 sacos do cereal B, a um preço de R$12,00 por saco. O agricultor deseja planejar a sua produção de modo a maximizar o seu lucro.