$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\cdots}{4} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\cos\alpha = \frac{v \, . \, T(v)}{|\,v\,|\,|\,T(v)\,|} = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{4}\right) . \left(-\frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{\sqrt{\frac{3}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}}\ \sqrt{\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{-\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{\sqrt{3}}{8}+\frac{1}{2}}{1 \times 1} = \frac{1}{2}$$

$\alpha = 60°$

4.8 PROBLEMAS PROPOSTOS

1) Consideremos a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $T(x,y) = (3x - 2y, x + 4y)$. Utilizar os vetores $u = (1, 2)$ e $v = (3, -1)$ para mostrar que $T(3u + 4v) = 3T(u) + 4T(v)$.

2) Dada a transformação linear $T: V \longrightarrow W$, tal que $T(u) = 3u$ e $T(v) = u - v$, calcular em função de u e v:

a) $T(u + v)$

b) $T(3v)$

c) $T(4u - 5v)$

3) Dentre as transformações $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas pelas seguintes leis, verificar quais são lineares:

a) $T(x, y) = (x - 3y, 2x + 5y)$

b) $T(x, y) = (y, x)$

c) $T(x, y) = (x^2, y^2)$

d) $T(x, y) = (x + 1, y)$

e) $T(x, y) = (y - x, 0)$

f) $T(x, y) = (|x|, 2y)$

g) $T(x, y) = (\text{sen}x, y)$

h) $T(x, y) = (xy, x - y)$

i) $T(x, y) = (3y, -2x)$

4) Seja $V = \mathbb{R}^2$. Fazer um gráfico de um vetor genérico $v = (x, y)$ do domínio e de sua imagem $T(v)$ sob a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ dada por:

a) $T(x, y) = (2x, 0)$

b) $T(x, y) = (2x, y)$

c) $T(x, y) = (-2x, 2y)$

d) $T(x, y) = (3x, -2y)$

e) $T(x, y) = -2(x, y)$

f) $T(x, y) = (x, -y)$

5) Dentre as seguintes funções, verificar quais são lineares:

a) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $T(x, y) = (x - y, 3x, -2y)$

b) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $T(x, y, z) = (x + y, x - y, 0)$

c) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x^2 + y^2, x)$

d) $T: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x) = (x, 2)$

e) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y, z) = -3x + 2y - z$

f) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (|x|, y)$

g) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y) = x$

h) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(x, y) = xy$

i) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$, $T(x, y) = (y, x, y, x)$

j) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow M(2, 2)$, $T(x, y) = \left(\begin{bmatrix} 2y & 3x \\ -y & x + 2y \end{bmatrix}\right)$

k) $T: M(2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - c, b + c)$

l) $T: M(2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$

m) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y, z) \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

6) Seja a aplicação $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$$(x, y) \longrightarrow (x + ky, x + k, y)$$

Verificar em que caso(s) T é linear:

a) $k = x$

b) $k = 1$

c) $k = 0$

7) a) Determinar a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(-1, 1) = (3, 2, 1)$, $T(0, 1) = (1, 1, 0)$.

b) Encontrar $v \in \mathbb{R}^2$ tal que $T(v) = (-2, 1, -3)$.

8) a) Determinar a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $T(1, -1, 0) = (1,$ $T(0, 1, 1) = (2, 2)$ e $T(0, 0, 1) = (3, 3)$.

b) Achar $T(1, 0, 0)$ e $T(0, 1, 0)$.

9) Seja $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(1, 1, 1) = (1, 2)$, $T(1, 1, 0) = (2, 3)$ e $T(1, 0, 0) = (3, 4)$.

a) Determinar $T(x, y, z)$.

b) Determinar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (-3, -2)$.

c) Determinar $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (0, 0)$.

10) Seja T o operador linear no $\mathbb{R}^3$ tal que $T(1, 0, 0) = (0, 2, 0)$, $T(0, 1, 0) = (0, 0, -2)$ e $T(0, 0, 1) = (-1, 0, 3)$. Determinar $T(x, y, z)$ e o vetor $v \in \mathbb{R}^3$ tal que $T(v) = (5, 4, -9)$.

11) Determinar a transformação linear $T: P_2 \longrightarrow P_2$ tal que $T(1) = x$, $T(x) = 1 - x^2$ e $T(x^2) = x + 2x^2$.

12) Seja o operador linear

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \; T(x, y) = (2x + y, \; 4x + 2y).$$

Quais dos seguintes vetores pertencem a $N(T)$?

a) $(1, -2)$ b) $(2, -3)$ c) $(-3, 6)$

13) Para o mesmo operador linear do exercício anterior, verificar quais dos vetores pertencem a $Im(T)$.

a) $(2, 4)$ b) $(-\frac{1}{2}, -1)$ c) $(-1, 3)$

Nos problemas 14 a 21 são apresentadas transformações lineares. Para

a) Determinar o núcleo, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é injetora? Justificar.

b) Determinar a imagem, uma base para esse subespaço e sua dimensão. T é sobrejetora? Justificar.

14) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (3x - y, -3x + y)$

15) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y) = (x + y, x, 2y)$

16) $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x - 2y, x + y)$

17) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (x + 2y - z, 2x - y + z)$

18) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y - 2z, -x + 2y + z, x - 3z)$

19) $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - 3y, x - z, z - x)$

20) $T: P_1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(at + b) = (a, 2a, a - b)$

21) $T: M(2, 2) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = (a - b, a + b)$

22) Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(-2, 3) = (-1, 0, 1)$ e $T(1, -2) = (0, -1, 0)$.

a) Determinar $T(x, y)$.

b) Determinar $N(T)$ e $Im(T)$.

c) T é injetora? E sobrejetora?

23) Seja $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear tal que $T(e_1) = (1, -2, 1)$, $T(e_2) = (-1, 0, -1)$, $T(e_3) = (0, -1, 2)$ e $T(e_4) = (1, -3, 1)$, sendo $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ a base canônica do $\mathbb{R}^4$.

a) Determinar o núcleo e a imagem de T.

b) Determinar bases para o núcleo e para a imagem.

a) $v = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ e $\theta = 180°$

b) $v = (\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $\theta = 180°$

c) $v = (\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ e $\theta = 60°$

4.8.1 Respostas de Problemas Propostos

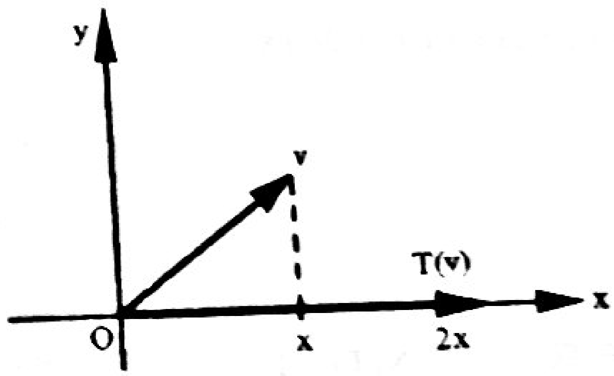
2) a) $4u - v$

b) $3u - 3v$

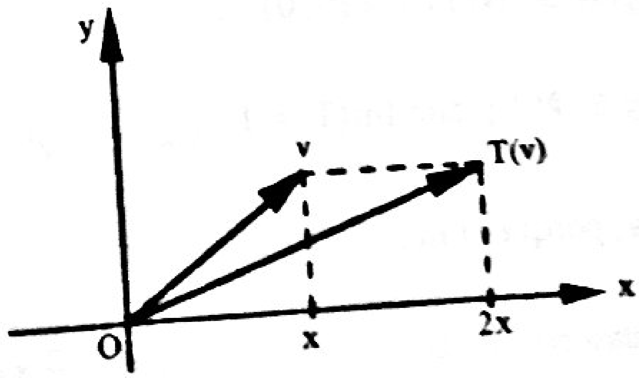
c) $7u + 5v$

3) São lineares: a), b), e), i)

4) a)



b)



c), d), e) e f) a cargo do leitor.

Respostas

5) São lineares: a), b), e), g), i), j), k), m).

6) c) é linear

7) a) $T(x, y) = (-2x + y,\ -x + y,\ -x)$

b) $v = (3, 4)$

8) a) $T(x, y, z) = (-y + 3z,\ -y + 3z)$

b) $T(1, 0, 0) = (0, 0)$ e $T(0, 1, 0) = (-1, -1)$

9) a) $T(x, y, z) = (3x - y - z,\ 4x - y - z)$

b) $v = (1, 6 - z, z)$

c) $v = (0, -z, z)$

10) $T(x, y, z) = (-z, 2x, -2y + 3z)$

$v = (2, -3, -5)$

11) $T(a + bx + cx^2) = b + (a + c)x + (-b + 2c)x^2$

12) a), c)

13) a), b)

14) a) $N(T) = \{(x, 3x)/x \in \mathbb{R}\}$; $\dim N(T) = 1$

T não é injetora, porque $N(T) \neq \{(0,0)\}$.

b) $Im(T) = \{(-y, y)/y \in \mathbb{R}\}$; $\dim Im(T) = 1$

T não é sobrejetora, porque $Im(T) \neq \mathbb{R}^2$.

15) a) $N(T) = \{(0,0)\}$; $\dim N(T) = 0$.

T é injetora, porque $N(T) = \{0\}$.

b) $Im(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}/2x - 2y - z = 0\}$

$\dim Im(T) = 2$. T não é sobrejetora, porque $Im(T) \neq \mathbb{R}^3$.

16) a) $N(T) = \{(0,0)\}$; $\dim N(T) = 0$

T é injetora.

b) $Im(T) = \mathbb{R}^2$; $\dim Im(T) = 2$; T é sobrejetora.

17) a) $N(T) = \{(x, -3x, -5x)/x \in \mathbb{R}\}$

b) $Im(T) = \mathbb{R}^2$

18) a) $N(T) = \{(3z, z, z)/z \in \mathbb{R}\}$

b) $Im(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/2x + y - z = 0\}$

19) a) $N(T) = \{(3x, x, 3x)/x \in \mathbb{R}\}$

b) $Im(T) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3/y = -z\}$

20) a) $N(T) = \{0\}$

b) $Im(T) = \{(a, 2a, c)/a, c \in \mathbb{R}\}$

21) a) $N(T) = \left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{bmatrix} / c, d \in \mathbb{R}\right\}$

b) $Im(T) = \mathbb{R}^2$

22) a) $T(x, y) = (2x + y,\ 3x + 2y,\ -2x - y)$

b) $N(T) = \{(0,0)\}$

$Im(T) = \{(x, y, -x)/x, y \in \mathbb{R}\}$

c) T é injetora, mas não sobrejetora.