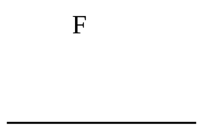
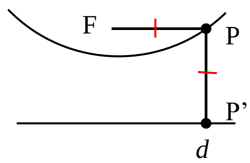
CÔNICAS

I. PARÁBOLAS

Definição: Consideremos em um plano uma reta *d* e um ponto *F* não pertencentes a *d*.
Parábola é o lugar geométrico dos pontos do plano que são eqüidistantes de *F* e *d*.





P pertence à parábola, pois a distância de P até o foco F é igual a distância de P até a reta *d* (diretriz).

Sendo o ponto P’ o pé da perpendicular baixada de um P pertencente a parábola sobre a reta *d* (diretriz), então segundo a definição temos:

$$d(P,F) = d(P,P')$$

Elementos da Parábola:

- **Foco:** é o ponto F;
- **Diretriz:** é a reta *d*;
- **Eixo:** é a reta que passa pelo foco e é perpendicular à reta diretriz;
- **Vértice:** é o ponto V de intersecção da parábola com o seu eixo.

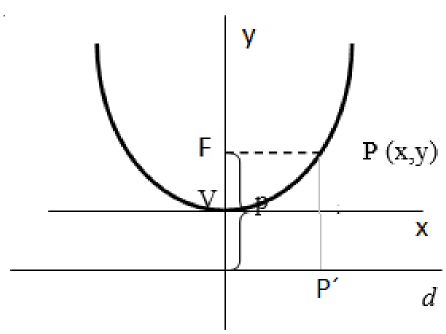
Obs.: $d(V,F) = d(V,A)$ pois V é um ponto da Parábola.

Para obtermos uma equação que represente a parábola, teremos que referi-la ao sistema de eixos cartesianos.

EQUAÇÃO DA PARÁBOLA DE VÉRTICE NA ORIGEM DO SISTEMA V(0, 0)

1º caso: o eixo da parábola é o eixo y

Fazendo a distância do foco até a diretriz igual ao parâmetro p, teremos:



Do gráfico temos :

$$F\left(0,\frac{p}{2}\right) \quad e \quad P'\left(x,-\frac{p}{2}\right)$$

Da definição da parábola, temos d(F,P) = d (P,d)

ou

$$d(P,F) = d(P,P')$$

Atenção : No gráfico a distância do ponto ao foco não está igual a distancia do ponto até a distância . Mas pela definição deve ser igual.

Substituindo as coordenadas do F , P e P’ (obtidas pelo gráfico, por meio dos parâmetros estabelecidos) , na equação acima teremos :

$$\sqrt{(x_F - x_P)^2 + (y_F - y_P)^2} = \sqrt{(x_{P'} - x_P)^2 + (y_{P'} - y_P)}$$

$$\sqrt{(0-x)^2 + \left(\frac{p}{2} - y\right)^2} = \sqrt{(x-x)^2 + \left(-\frac{p}{2} - y\right)^2}$$

Elevando os dois membros ao quadrado, teremos:

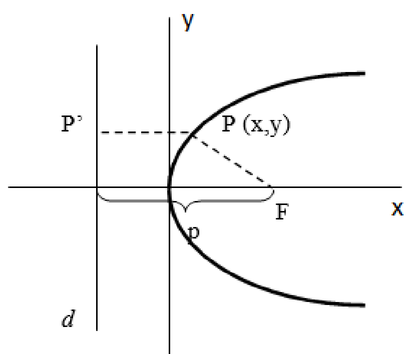
$$(0-x)^2 + \left(\frac{p}{2} - y\right)^2 = (x-x)^2 + \left(-\frac{p}{2} - y\right)^2$$

$$x^2 + \frac{p^2}{4} - \cancel{2}\frac{p}{\cancel{2}}y + y^2 = 0 + \frac{p^2}{4} + \cancel{2}\frac{p}{\cancel{2}}y + y^2$$

Equação reduzida da parábola de vértice na origem e eixo o eixo y:

$\boxed{x^2 = 2py}$ ou $y = x^2/2p$, fazendo $a=1/2p$ teremos $y=ax^2$(fórmula incompleta da equação da parábola , pois trabalhamos apenas com vértice V(0,0).

2° caso: eixo da parábola é o eixo dos x



obs: foi estabelecido como parâmetro que a distância do F a diretriz é "p".

Neste caso as coordenadas do Foco e do ponto P' serão:

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right) \quad e \quad P'\left(-\frac{p}{2}, y\right)$$

Da definição da parábola temos:

d(P,F) = d(F,d)

ou

$$d(P,F) = d(P,P')$$

De forma análoga ao caso 1, assumindo a distância do F a diretraz d como "p", e substituindo as coordenadas do F, P e P´ obtidas pela análise gráfica teremos :

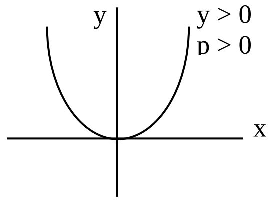
$\boxed{y^2 = 2px}$ $\rightarrow$ equação reduzida da parábola de vértice na origem e eixo o eixo x.

Ou $x= y^2/2p$, fazendo $a=1/2p$ teremos $x=ay^2$

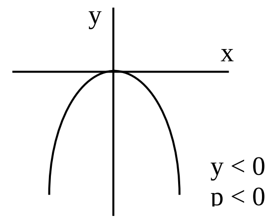
Obs.: Da equação $x^2 = 2py$ ou $y = ax^2$ temos que o produto 2py será sempre positivo ou nulo, pois é igual a x^2. Desta forma é fácil concluir que os sinais de p e y serão sempre iguais.

Assim temos

a) Se $p > 0$, então $y > 0$, logo a parábola tem concavidade voltada para cima.

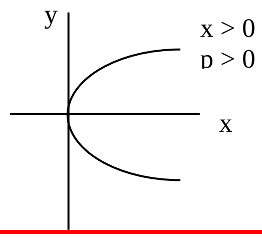


b) Se $p < 0$, então $y < 0$, logo a parábola tem concavidade voltada para baixo.

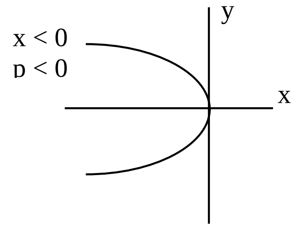


Na equação $y^2 = 2px$ ou $x=ay^2$ o raciocínio será análogo no entanto, teremos:

a) Se $p > 0$, então $x > 0$, logo a parábola tem concavidade voltada para direita.



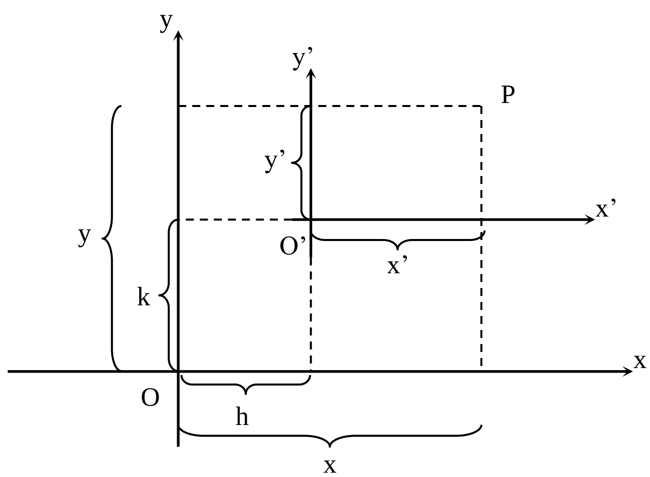
b) Se $p < 0$, então $x < 0$, logo a parábola tem concavidade voltada para esquerda.



TRANSLAÇÃO DE EIXOS

Consideremos no plano cartesiano xOy um ponto O'(h,k), arbitário. Vamos introduzir um novo sistema x'O'y' tal que os eixos O'x' e O'y' tenham a mesma unidade de medida, a mesma direção e o mesmo sentido dos eixos Ox e Oy.

Nestas condições, um sistema pode ser obtido do outro, através de uma translação de eixos.



Seja um ponto P qualquer do plano tal que suas coordenadas são:

a) x e y em relação ao sistema xOy;

b) x' e y' em relação ao sistema x'O'y'.

Pela figura acima, obtém-se:

$$\begin{cases} x = x' + h \\ y = y' + k \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x' = x - h \\ y' = y - k \end{cases}$$

Estas são as fórmulas de translação que permitem transformar coordenadas de um sistema para outro.

EQUAÇÃO DA PARÁBOLA DE VÉRTICE FORA DA ORIGEM. V (h, k)

1º caso: o eixo da parábola é paralelo ao eixo y.

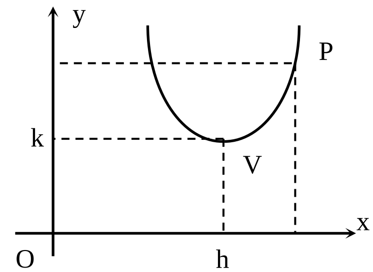


Fig (1)

No sistema xOy não podemos definir a equação da parábola (Fig 1).

Consideraremos então um novo sistema x'O'y' cuja origem O' coincidirá com o vértice V, conforme a figura (Fig 2).

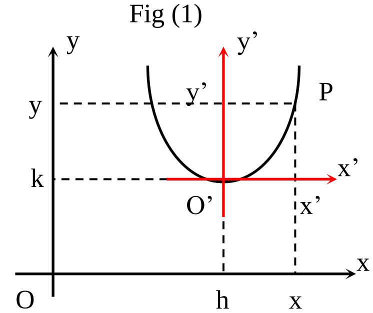


Fig (2)

No sistema x'O'y' a equação da parábola por ter seu vértice V na origem O' e eixo o eixo y', será:

$$\boxed{x'^2 = 2py'}$$

Para obter a equação da parábola no sistema xOy transformaremos as coordenadas x' e y' para x e y, substituindo $x' = x - h$ e $y' = y - k$ na equação $x'^2 = 2py'$.

Assim:

$(x-h)^2 = 2p(y-k)$ é a forma padrão da equação de uma parábola de V (h, k) e eixo paralelo ao eixo y.

2º caso: O eixo da parábola é paralelo ao eixo x.

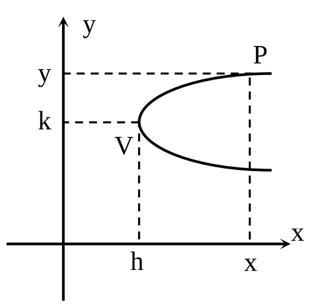


fig. (1)

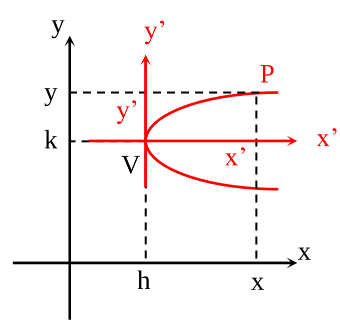


fig. (2)

Como no 1º caso ao referenciarmos a parábola da fig. (1) ao sistema x'O'y', com O' coincidindo com o vértice da parábola, conforme fig. (2) sua equação será $y'^2 = 2px'$. Fazendo transformações adequadas de coordenadas obtemos a equação

$\boxed{(y-k)^2 = 2p(x-h)}$ $\rightarrow$ forma padrão da equação de uma parábola de V(h, k) e eixo paralelo ao eixo y no sistema XOY.

Obs.: Desenvolvendo a equação $(x-h)^2 = 2p(y-k)$, obtemos a equação $y = ax^2 + bx + c$, chamada de forma explícita da parábola cujo eixo é paralelo ao eixo dos y.

Da mesma forma, desenvolvendo a equação $(y-k)^2 = 2p(x-h)$ obtemos a equação $x = ay^2 + by + c$ que é a forma explícita da equação da parábola de eixo paralelo ao eixo x.

Exemplos:

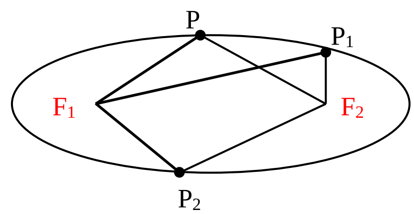
(1) Graficar as parábolas de equações $y^2 = 4x$ e $x^2 = -6y$, determinar as coordenadas dos focos e as equações das diretrizes. (x^2=2py ou y=ax^2) ou (y^2=2px ou x=ay^2)

(2) Seja a parábola de equação $y^2 - 8y - 4x + 20 = 0$. Determinar:

(a) Sua equação na forma padrão;
(b) Esboço do gráfico;
(c) Coordenadas do Foco e equação da Diretriz.

II. ELIPSE

Definição: Elipse é o lugar geométrico dos pontos de um plano cuja distância a dois pontos fixos desse plano é constante.

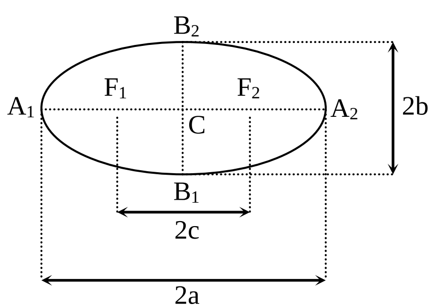


Na figura acima representamos os dois pontos fixos do plano a que se refere a definição como F_1 e F_2.

A figura acima será considerada uma elipse, se e somente se:
$d_{P,F_1} + d_{P,F_2} = d_{P_1,F_1} + d_{P_1,F_2} = d_{P_2,F_1} + d_{P_2,F_2}$, ou seja, a soma das distâncias de qualquer ponto da elipse aos focos deve permanecer constante. Fixaremos essa soma em *2a*.

Tomando a distância entre os focos como *2c*, teremos que *2a > 2c*.

Elementos da Elipse

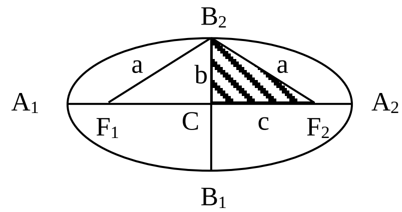


- **Focos**: são os pontos F_1 e F_2.
- **Distância focal**: é a distância 2c entre os focos.
- **Centro**: é o ponto médio C do segmento F_1F_2.
- **Eixo maior**: é o segmento A_1A_2 de comprimento 2a. (o segmento A_1A_2 contém os focos e os seus extremos pertencem à elipse)
- **Eixo menor**: é o segmento B_1B_2 de comprimento 2b (B_1B_2

$\perp A_1A_2$ no seu ponto médio).

- **Vértice**: são os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2.

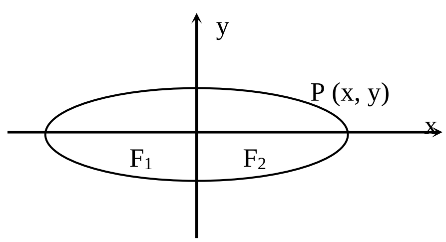
Obs.: em toda a elipse vale a relação $a^2 = b^2 + c^2$.



Para obter a equação da Elipse deveremos referencia-la ao sistema plano de coordenadas cartesianas.

EQUAÇÃO DA ELIPSE DE CENTRO NA ORIGEM.

1º caso: o eixo maior está sobre o eixo x.



Como a distância entre os focos é 2c, então F_1 (-c, 0) e F_2(c, 0).

Se P (x, y) é ponto de uma elipse conforme a figura acima, então por definição teremos:

$$d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$$
$$\sqrt{(x_{F_1}-x_P)^2+(y_{F_1}-y_P)^2}+\sqrt{(x_{F_2}-x_P)^2+(y_{F_2}-y_P)^2}=2a$$
$$\sqrt{(-c-x)^2+(0-y)^2}+\sqrt{(c-x)^2+(y-0)^2}=2a$$

$$\sqrt{x^2+y^2+2cx+c^2}=2a-\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}$$

$$\left(\sqrt{x^2+y^2+2cx+c^2}\right)^2=\left(2a-\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}\right)^2$$

$$x^2+y^2+2xc+c^2=4a^2-4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}+x^2+y^2-2xc+c^2$$

$$4a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}=4a^2-4cx$$

$$a\sqrt{x^2+y^2-2cx+c^2}=a^2-cx$$

$$a^2\left(x^2+y^2-2cx+c^2\right)=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2+a^2y^2-2a^2cx+a^2c^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2$$

$$a^2x^2-c^2x^2+a^2y^2=a^4-a^2c^2$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(-a^2c^2\right)$$

$$como:\quad a^2-c^2=b^2$$

$$\log o:$$

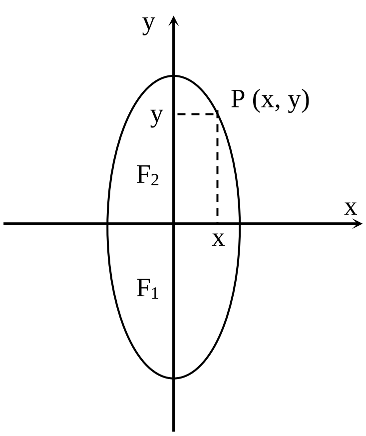
$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

Dividindo todos os membros da equação por a^2b^2, obtemos:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}$$

que é a equação reduzida da elipse de centro na origem e eixo maior sobre o eixo dos x.

2º caso: o eixo maior está sobre o eixo y.



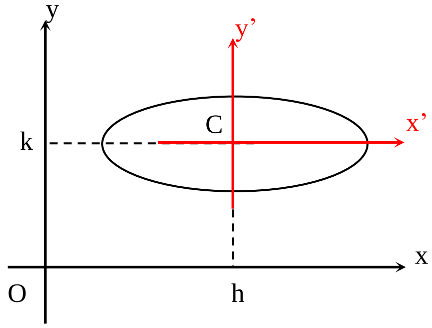
$$F_1(0,-c) \quad e \quad F_2(0,c)$$

Com raciocínio análogo ao 1º caso, obtemos a equação:

$\boxed{\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1}$ $\rightarrow$ Forma reduzida da equação da elipse de centro na origem e eixo maior sobre o eixo x

EQUAÇÃO DA ELIPSE DE CENTRO FORA DA ORIGEM DO SISTEMA, C (H, K).

1º caso: o eixo maior é paralelo ao eixo x.



Anteriormente definimos a equação da elipse com centro na origem do sistema xOy. Como agora a elipse está fora da origem, referenciamos esta elipse ao sistema x'O'y', cuja origem coincidirá com o centro C (h, k).

Assim, a equação da elipse no sistema x'O'y' será:

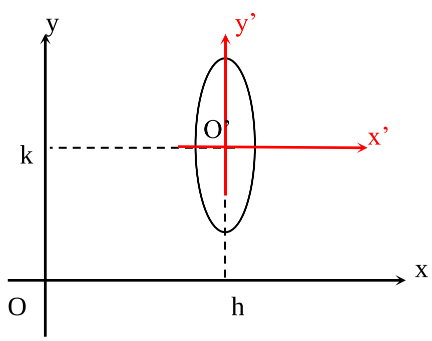
$$\boxed{\frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1}$$

Substituindo $x' = x - h \quad e \quad y' = y - k$ nesta equação obtemos a equação:

$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$ $\rightarrow$ equação da elipse com centro C (h, k) e eixo maior sobre o eixo x no sistema XOY.

2º caso: eixo maior é paralelo ao eixo y.

De forma análoga teremos:



No sistema x'O'y' a equação da elipse será: $\frac{x'^2}{b^2}+\frac{y'^2}{a^2}=1$

No sistema xOy a equação da elipse será:

$\boxed{\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1}$ equação da elipse de C (h, k) e eixo maior paralelo ao eixo y.

Obs. 1: Como $a^2 = b^2 + c^2$ segue-se que $a^2 > b^2$ logo $a > b$. Assim o maior dos denominadores na equação reduzida de uma elipse será a^2.

Assim:
- Se a^2 é denominador de x^2 a elipse terá seu eixo maior sobre ou paralelo ao eixo x.
- Se a^2 é denominador de y^2 a elipse terá seu eixo maior sobre ou paralelo ao eixo y.

Obs. 2: Excentricidade

A excentricidade de uma elipse é o número *e*, e é dado por $e = \frac{c}{a}$.

Tendo em vista que $c < a$ tem-se que $0 < e < 1$.

<u>**Exemplos**</u>**:**

1) Graficar as elipses de equações $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \quad e \quad \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$, e determinar as coordenadas dos Focos e dos Vértices.

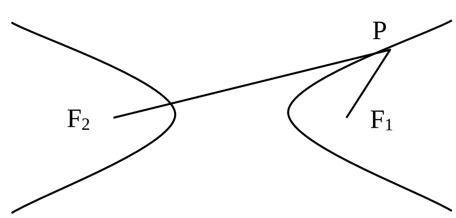
2) Seja a elipse de equação $7x^2 + 16y^2 - 28x - 128y + 172 = 0$, determinar:
   a) A equação na forma reduzida;
   b) O esboço do gráfico;
   c) As coordenadas dos focos e dos vértices.

III. HIPÉRBOLE

Definição: *Hipérbole é o lugar geométrico dos pontos de um plano, cuja diferença das distâncias a dois pontos fixos desse plano, em valor absoluto, é constante.*

Consideremos no plano dois pontos distintos F_1 e F_2 tal que a distância $d(F_1, F_2) = 2c$. Seja um número real a tal que $2a < 2c$.

Ao conjunto de todos os pontos P do plano tais que: $\left| d(P, F_1) - d(P, F_2) \right| = 2a$ dá-se o nome de hipérbole.

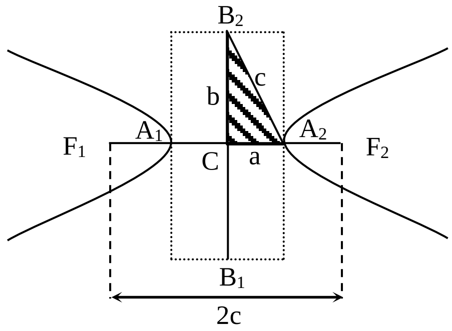


Como se vê na figura ao lado, a hipérbole é uma curva com dois ramos. Na verdade, pela equação $\left| d(P, F_1) - d(P, F_2) \right| = 2a$, um ponto P está na hipérbole se, e somente se:

$$d(P, F_1) - d(P, F_2) = \pm 2a$$

Quando P estiver no ramo da direita, a diferença é $+2a$ e, em caso contrário, será $-2a$.

Elementos da Hipérbole



- **Focos:** são os pontos F_1 e F_2;
- **Distância focal:** é a distância *2c* entre os focos;
- **Centro:** é o ponto médio C do segmento F_1F_2;
- **Vértices:** são os pontos A_1 e A_2;
- **Eixo real ou transverso:** é o segmento A_1A_2 de comprimento *2a*.

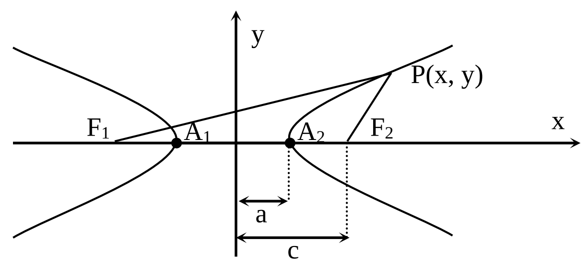
EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE DE CENTRO NA ORIGEM DO SISTEMA

1º caso: o eixo real está sobre o eixo dos x.

Seja P (x, y) um ponto qualquer de uma hipérbole (figura abaixo) de focos F_1 (-c, 0) e F_2 (c, 0).
Por definição , tem-se:

$\left| d(P,F_1) - d(P,F_2) \right| = 2a$ ou, em coordenadas:

$$\left| \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \right| = 2a$$

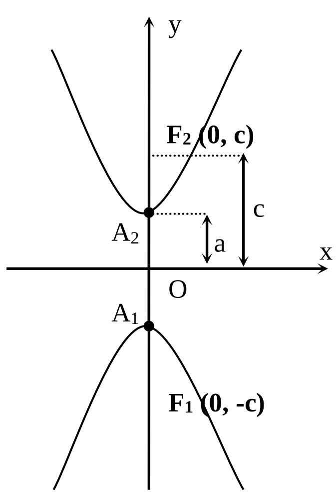


Com procedimento de simplificação análogo ao que foi usado na dedução da equação da elipse, e lembrando que $c^2 = a^2 + b^2$, chegamos à equação:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

que é a equação reduzida da hipérbole de centro na origem e eixo real sobre o eixo dos x.

2º caso: o eixo está sobre o eixo dos y.

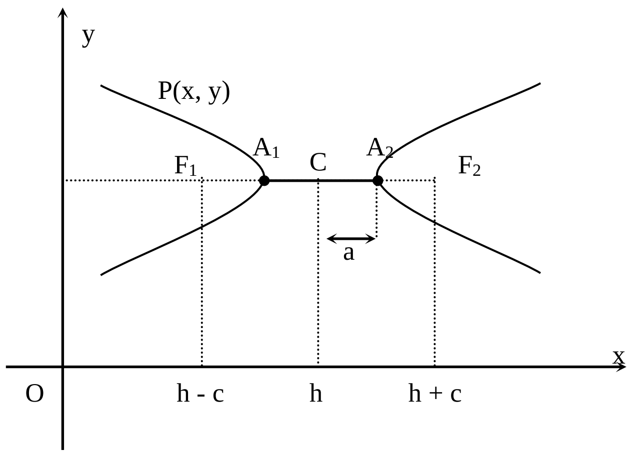


Como já ocorreu com a parábola e a elipse, a equação desta hipérbole somente difere da anterior pela troca de posição das variáveis:

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1}$$

EQUAÇÃO DA HIPÉRBOLE DE CENTRO FORA DA ORIGEM DO SISTEMA

1º caso: o eixo real é paralelo ao eixo dos x.



Consideremos uma hipérbole de centro C (h, k) e seja P (x, y) um ponto qualquer da mesma.

Assim:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

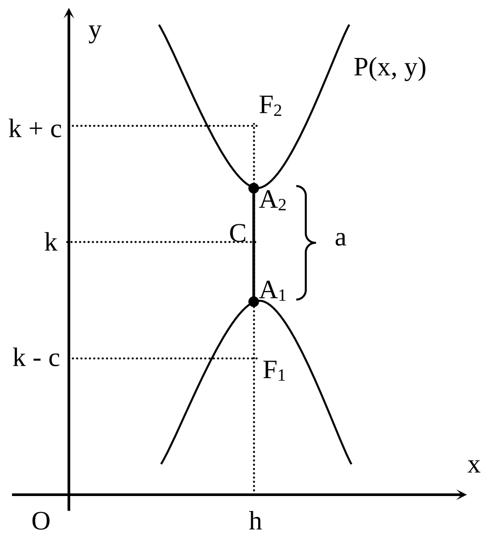
é a equação de uma hipérbole de centro C (0, 0) e eixo real sobre o eixo dos x; quando o eixo real for paralelo ao eixo dos x e o centro é C (h, k), sua equação passa a ser:

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

2º caso: o eixo real é paralelo ao eixo dos y.

De forma análoga, temos:

$$\boxed{\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1}$$



EXEMPLOS

(1) Graficar as hipérboles de equações $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$ e $\dfrac{y^2}{4}-\dfrac{x^2}{9}=1$. Determinar as coordenadas do centro, dos vértices e dos focos.

(2) Seja a hipérbole de equação: $2x^2-2y^2-8x-20y-51=0$, determinar:

(a) a sua equação na forma reduzida;
(b) um esboço do gráfico;
(c) as coordenadas do centro, dos focos, e dos vértices.

EXERCÍCIOS

1) Determinar o vértice, o foco, uma equação para a diretriz e uma equação para o eixo da parábola de equação dada. Esboçar o gráfico.

a) $x^2=-12y$

c) $x^2-2x-20y-39=0$

b) $y^2=-100x$

d) $y^2+4y+16x-44=0$

2) Determinar o centro, os vértices A_1 e A_2, e a excentricidade das elipses dadas. Esboçar o gráfico.

a) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$

b) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{100}=1$

c) $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{9}=1$

d) $25x^2+16y^2+50x+64y-311=0$

3) Determinar os vértices, os focos e a excentricidade das hipérboles dadas. Esboçar o gráfico.

a) $\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{36}=1$

b) $\frac{y^2}{100}-\frac{x^2}{36}=1$

c) $9x^2-4y^2-18x-16y-43=0$

d) $x^2-4y^2+6x+24y-31=0$

4) Identifique o lugar geométrico representado por cada uma das equações abaixo e escreva as equações dadas na forma reduzida.

a) $x^2+y^2-2x+6y+6=0$

b) $4x^2-y^2-32x+4y+24=0$

c) $16x^2+y^2+64x-4y+52=0$

d) $6y-2x+4=0$

e) $x^2+4x+8y+12=0$

f) $x^2+y^2-4x-2y+5=0$

RESPOSTAS

1) a) V(0, 0), F(0, -3), y = 3, x = 0
   b) V(0, 0), F(-25, 0), y = 0, x = 25

2) a) C(0, 0), A(±10, 0), F(±8, 0) e e = 4/5
   b) C(0, 0), A(0, ±10), F(0, ±8) e e = 4/5
   c) C(2, -3), A_1(-2, -3), A_2(6, -3), F(2 ± $\sqrt{7}$, -3) e e = $\sqrt{7}$/4
   d) C(-1, -2), A_1(-1, -7), A_2(-1, 3), F_1(-1, -5), F_2(-1, 1) e e = 3/5

3) a) A(±10, 0), F(±2$\sqrt{41}$, 0) e $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$
   b) A(0, ±10), F(0, ±2$\sqrt{41}$) e $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$
   c) C(1, -2), A_1(-1, -2), A_2(3, -2), F(1 ± $\sqrt{13}$, -2) e $e = \frac{\sqrt{13}}{2}$
   d) C(-3, 3), A_1(-5, 3), A_2(-1, 3), F(-3 ± $\sqrt{5}$, 3) e $e = \frac{\sqrt{5}}{2}$