

Programação Linear

Histórico

- ▶ A origem da Pesquisa Operacional - PO - remonta a época da Segunda Grande Guerra Mundial. Os militares necessitavam gerenciar seus recursos de forma eficiente até os campos de batalha. Segundo registros, o governo britânico e norte-americano solicitaram a cientistas (matemáticos) que fizessem estudos (leia-se pesquisa) sobre operações militares de como otimizar essas operações.
- ▶ Com o fim da guerra e com a expansão econômica de diversos países as organizações não militares tinham operações cada vez mais complexas. Percebeu-se assim, que os problemas tratados nas questões militares eram na verdade muito semelhantes aos encontrados nas empresas, cada qual no seu devido contexto. Então no início de 1950, a PO passou a ser aplicada em organizações das mais variadas áreas de atuação.

A Programação Linear é uma técnica da Pesquisa Operacional.

A Pesquisa Operacional utiliza de modelos matemáticos, estatística e algoritmos para ajudar a tomada de decisões. É mais frequente o seu uso para análise de sistemas complexos reais, tipicamente com o objetivo de melhorar ou otimizar a performance. É uma forma de matemática aplicada.

Fases Principais


- ✓ Formulação do problema;
- ✓ Construção de um modelo que represente o sistema em estudo;
- ✓ Obtenção de solução a partir do modelo;
- ✓ Teste do modelo e da solução dele originada;
- ✓ Colocação da solução em funcionamento: implantação.

Programação Linear

- Modelos de problemas P.O. onde as funções e equações são todos de primeiro grau
- É um meio matemático de designar um montante fixo de recursos que estabeleça certa demanda de tal modo que alguma função-objetivo seja otimizada e ainda satisfaça a outras condições definidas.

Problema 1.

Um agricultor deseja cultivar duas variedades de cereais. Digamos tipo A e B, em uma área restrita a um hectare, sendo que cada are cultivado pelo cereal A produz 8 sacas e para o B 10 sacos. Para o plantio, cada are cultivado pelo cereal A precisa de 3 homens hora e o cultivado pelo cereal B, precisa de 2 homens hora, sendo que a disposição máxima de homens hora é de 240. O custo de um homem hora é de R\$ 20,00. A demanda máxima é limitada pelo mercado consumidor de 480 sacos do cereal A, a um preço de R\$ 15,00 por saco e 800 sacos do cereal B, a um preço de R\$12,00 por saco. O agricultor deseja planejar a sua produção de modo a maximizar o seu lucro.

- 
- ▶ **Embora não haja uma fórmula única para a modelagem, sugere-se a seguinte metodologia:**
 - **Identificar as variáveis decisórias:** aquilo que se pode controlar e que se deseja saber quanto vale. As variáveis devem ser claramente definidas. Se a variável usa alguma unidade de medida, deve-se deixar bem claro qual é esta unidade de medida. Se ela é real ou só pode assumir valores inteiros.
 - **Identificar o objetivo:** sempre se quer ou maximizar ou minimizar um determinado objetivo, expresso em função das variáveis do problema.
 - **Identificar os fatores restritivos:** também expressas em função das variáveis do problema, as restrições limitam as combinações das variáveis a determinados limites.

Modelo Geral de Problemas de Programação Linear

Todo problema de PL pode ser descrito através de uma função objetivo e através de um conjunto de restrições, todos lineares. Assim, temos o seguinte modelo genérico.

$$\{ \text{Max, Min} \} Z = C_1X_1 + C_2X_2 + \dots + C_nX_n$$

sujeito a

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \{ =, \leq, \geq \} b_1$$

$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \{ =, \leq, \geq \} b_2$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \{ =, \leq, \geq \} b_m$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0$$

$$\{ \text{Max, Min} \} Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

sujeito a

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \{ =, \leq, \geq \} b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \{ =, \leq, \geq \} b_2$$

$$\dots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \{ =, \leq, \geq \} b_m$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0$$

No modelo matemático acima, deve-se interpretar:

- x_1, x_2, \dots, x_n = conjunto de variáveis estruturais do problema;
- c_1, c_2, \dots, c_n = coeficientes da função objetivo;
- a_{ij} e b_j = coeficientes das restrições. Os coeficientes da b_j da mão direita devem necessariamente ser não-negativos quando o algoritmo de resolução é o Simplex.

O que está entre colchetes significa “usar um dos elementos separados por vírgula”.

A função objetivo expressa a meta que se deseja atender. Esta meta ou será de maximização (Max $Z = \dots$) ou de minimização (Min $Z = \dots$).

As restrições expressam limites a serem respeitados. A resolução procura a solução ótima no espaço de soluções compatíveis ao problema de PL, ou seja, no conjunto de pontos cujas coordenadas são valores das variáveis que satisfazem ao conjunto de restrições. Cada restrição poderá ser uma igualdade (=) ou uma desigualdade não-estrita (\leq ou \geq).

Voltando ao Problema

- Um agricultor deseja cultivar duas variedades de cereais. Digamos tipo A e B, em uma área restrita a um hectare, sendo que cada are cultivado pelo cereal A produz 8 sacas e para o B 10 sacos. Para o plantio, cada are cultivado pelo cereal A precisa de 3 homens hora e o cultivado pelo cereal B, precisa de 2 homens hora, sendo que a disposição máxima de homens hora é de 240. O custo de um homem hora é de R\$ 20,00. A demanda máxima é limitada pelo mercado consumidor de 480 sacos do cereal A, a um preço de R\$ 15,00 por saco e 800 sacos do cereal B, a um preço de R\$12,00 por saco. O agricultor deseja planejar a sua produção de modo a maximizar o seu lucro.

► Objetivo: Maximizar o lucro do Agricultor.

➤ Variáveis de decisão:

x_1 = quantidade de ares a serem cultivados com o cereal A.

x_2 = quantidade de ares a serem cultivados com o cereal B.

□ Restrições:

- Restrição de área cultivada: 100 ares (obs: 1 are = 100 m²)
- Restrição de mão de obra: 240 homem-hora.
- Restrição de produção e mercado.

Trabalhando a função objetivo.

- Maximizar o Lucro.

Em economia: Lucro = Receita - Custo

$$\text{Max } Z = \underbrace{(15 \cdot 8 x_1 + 12 \cdot 10 \cdot x_2)}_{\text{Receita}} - \underbrace{(20 \cdot 3 \cdot x_1 + 20 \cdot 2 x_2)}_{\text{Custo}}$$

$$\text{Max } Z = 60x_1 + 80x_2$$

Trabalhando as restrições

- ▶ Restrição de área

$$x_1 + x_2 \leq 100$$

- Restrição de mão de obra

$$3x_1 + 2x_2 \leq 240$$

- Restrição de produção e mercado

$$8x_1 \leq 480 \rightarrow x_1 \leq 60$$

$$10x_2 \leq 800 \rightarrow x_2 \leq 80$$

e

$$x_1 \text{ e } x_2 \geq 0$$

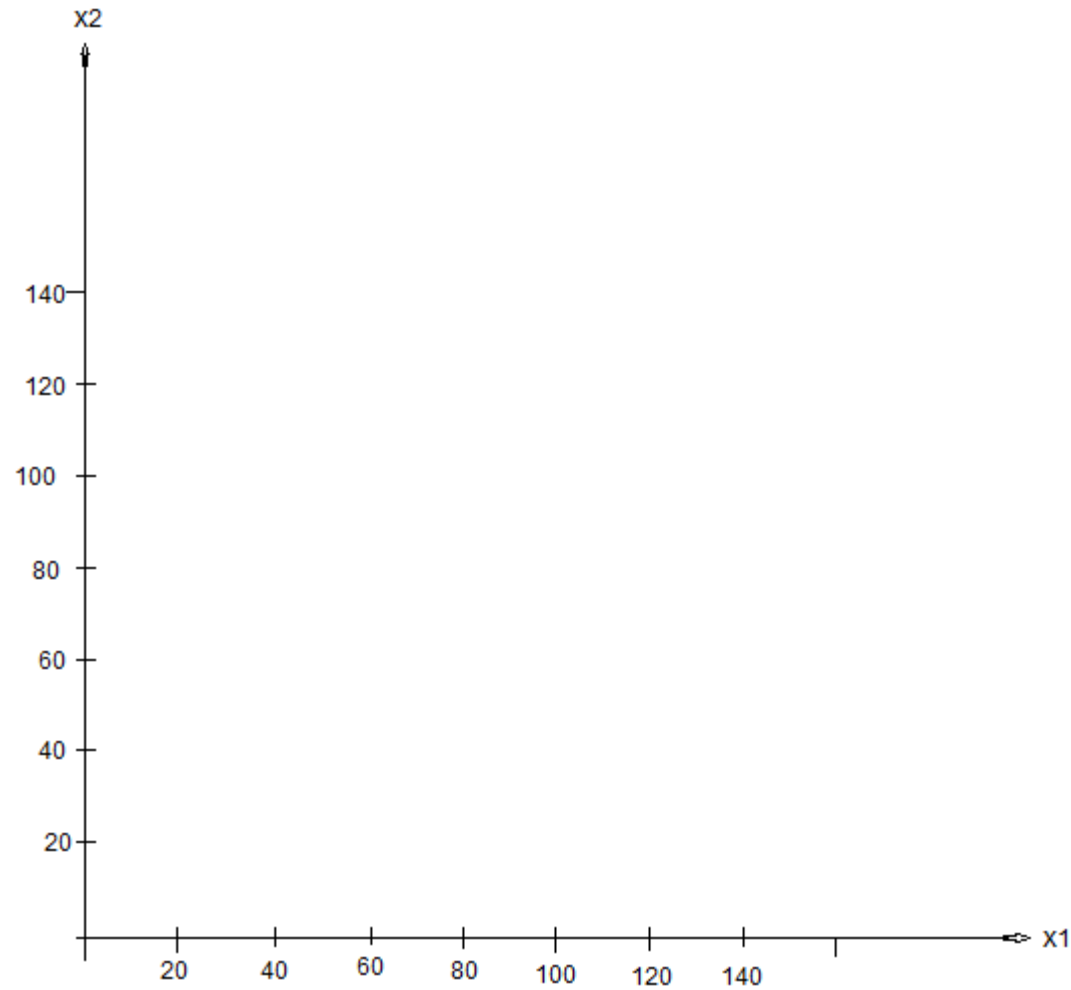
Reescrevendo o problema.

$$\text{Max } Z = 60x_1 + 80x_2$$

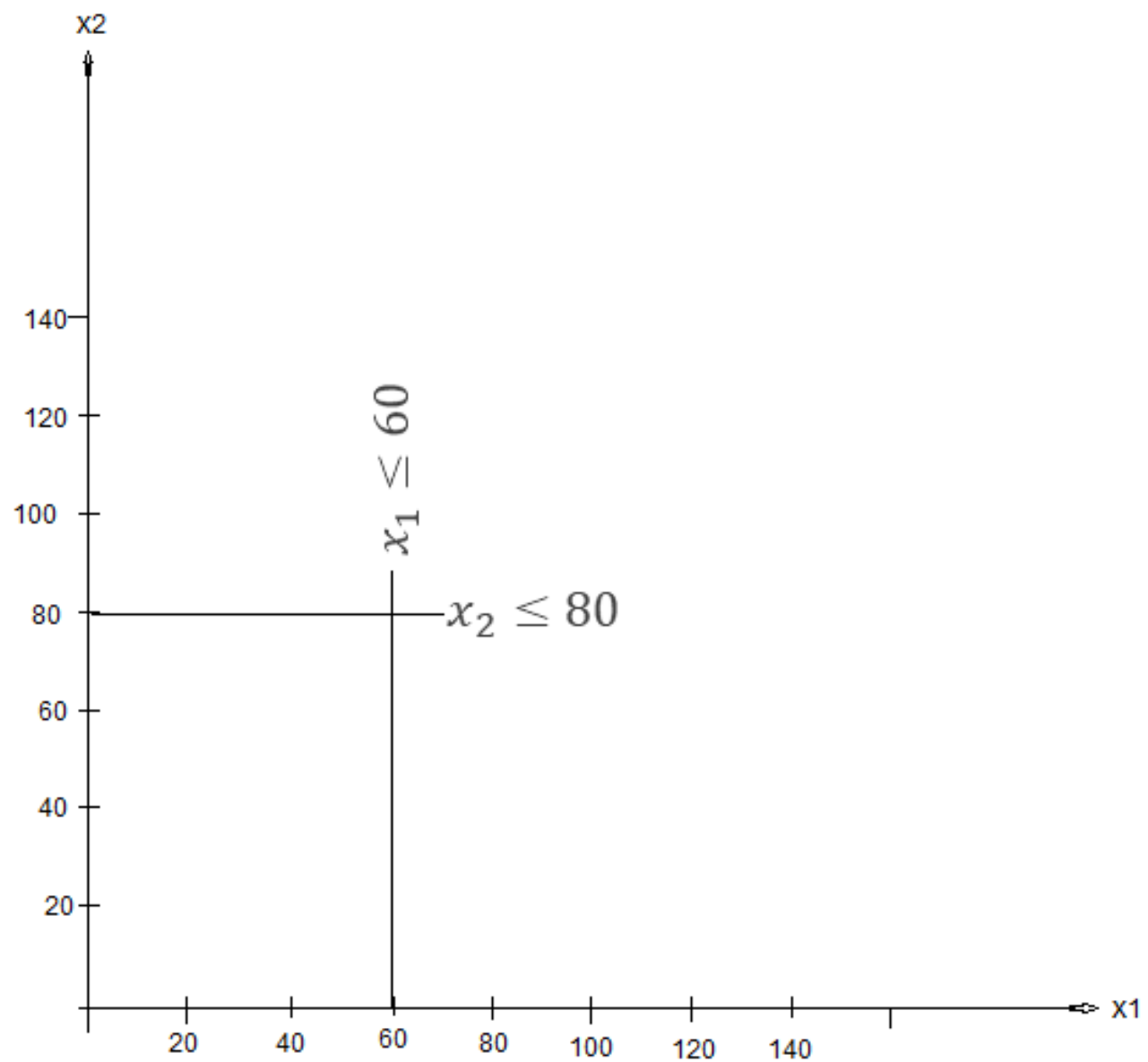
Sujeito a:

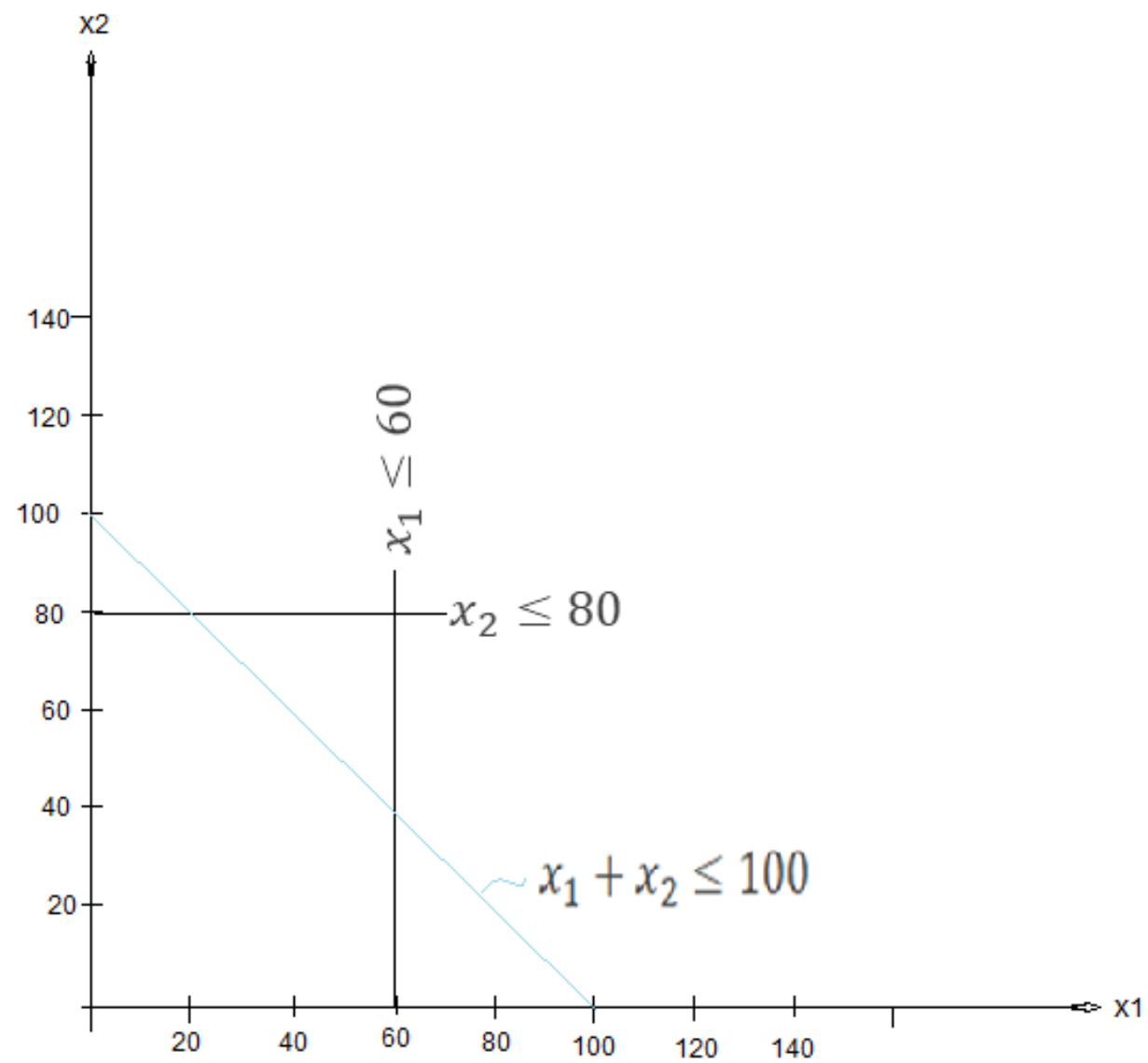
$$\begin{aligned}x_1 + x_2 &\leq 100 \\3x_1 + 2x_2 &\leq 240 \\x_1 &\leq 60 \\x_2 &\leq 80 \\x_1 \text{ e } x_2 &\geq 0\end{aligned}$$

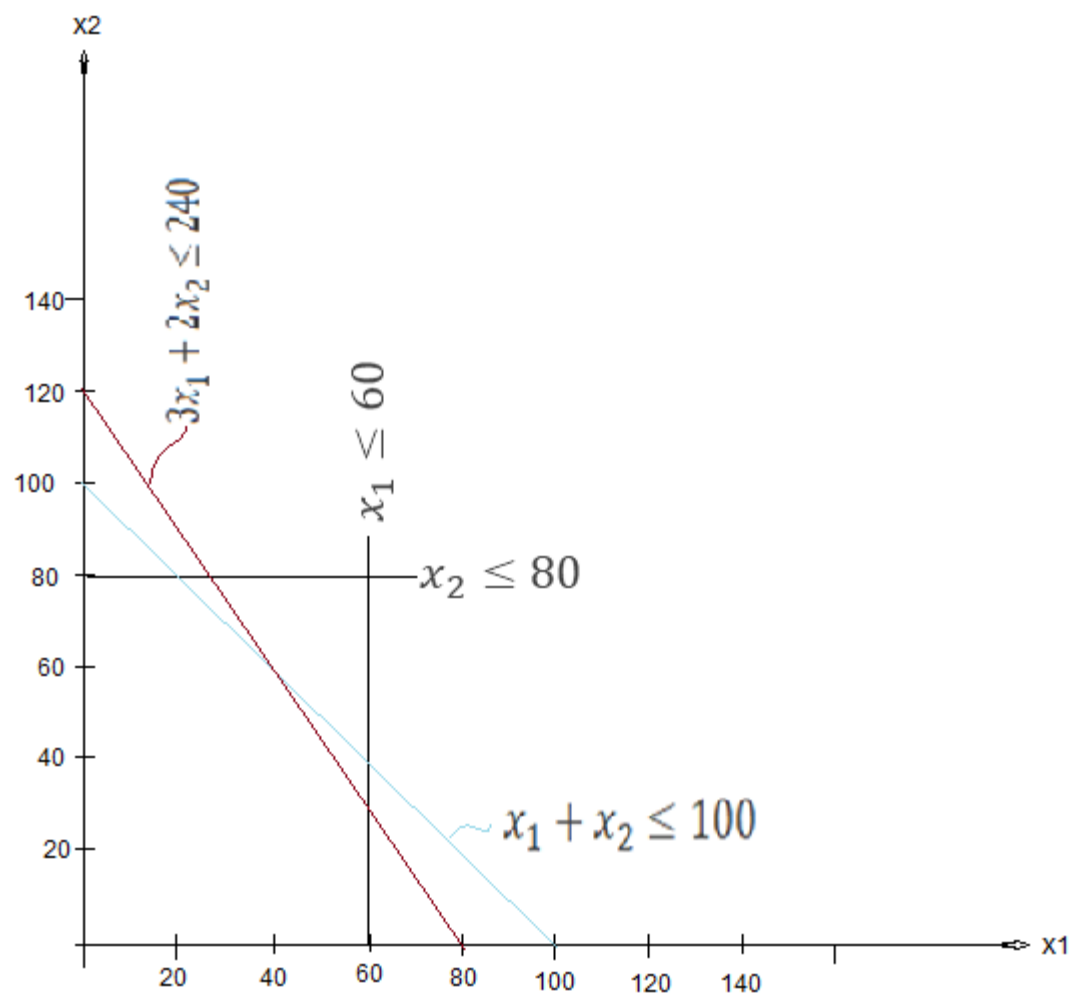
Solução Gráfica



Construímos no plano cartesiano onde os eixos serão as variáveis x_1 e x_2







Gradiente de uma função

- O cálculo do gradiente de uma função ajuda a dar a direção onde temos a indicação do ponto máximo.

A coisa mais importante para se lembrar sobre o gradiente: o gradiente da função se avaliado no ponto (x_0, y_0) , apontará onde a subida é mais íngreme.

Gradiente de uma função

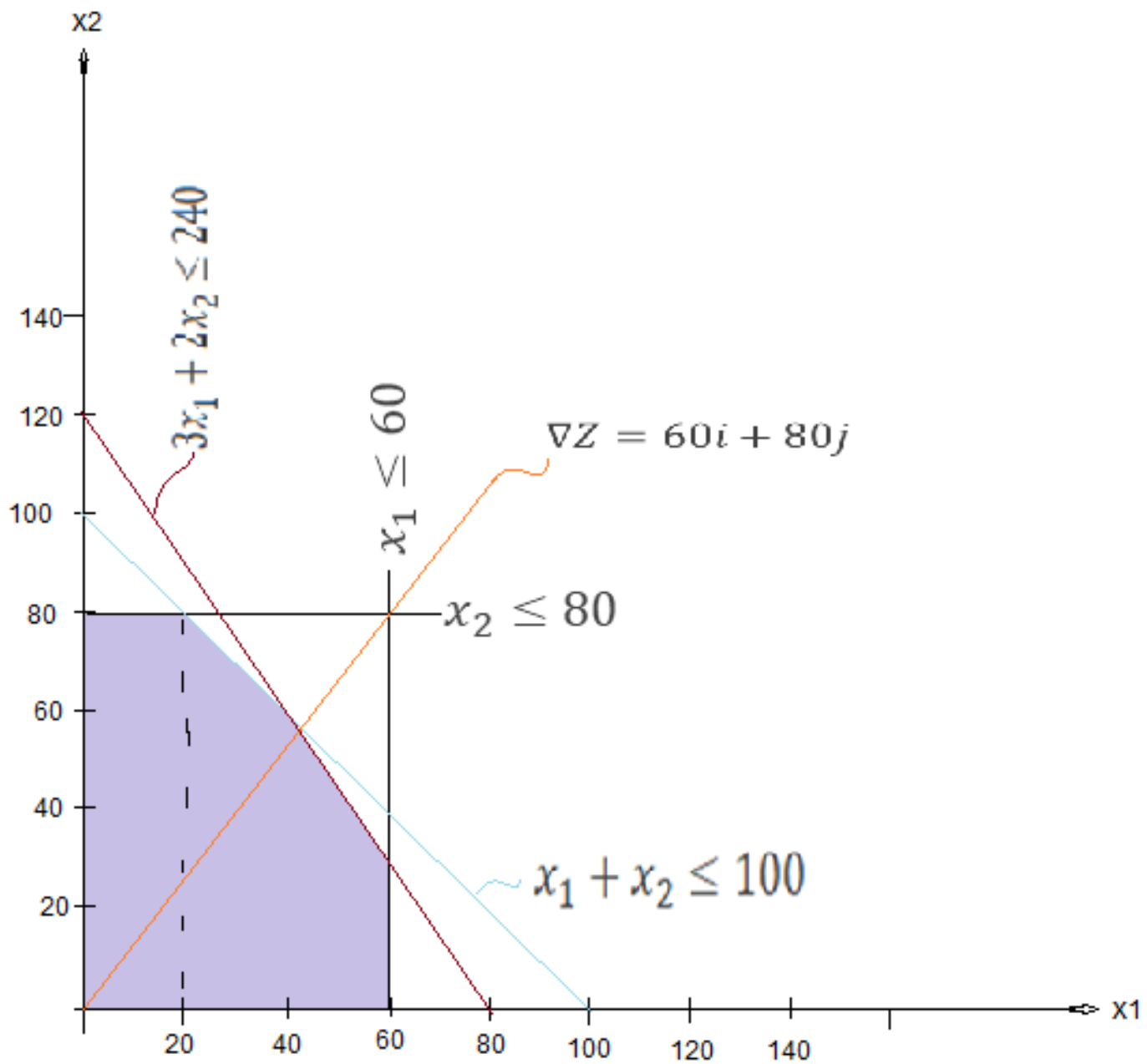
► $\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x_1} i + \frac{\partial \phi}{\partial x_2} j + \frac{\partial \phi}{\partial x_3} k$ (Em 3 dimensões)

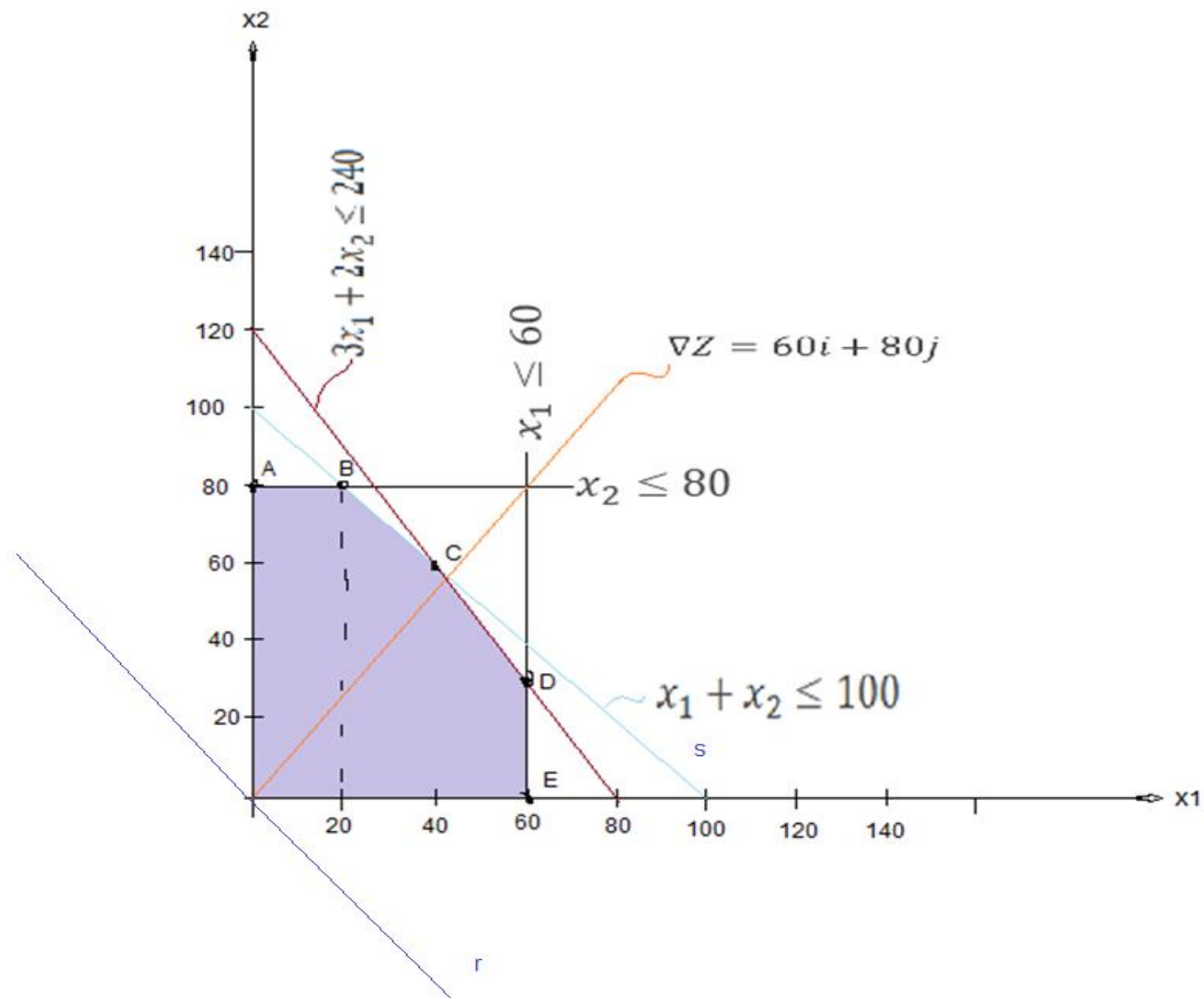
► No nosso caso estamos falando de duas dimensões.

$$\nabla Z = \frac{\partial Z}{\partial x_1} i + \frac{\partial Z}{\partial x_2} j$$

$$\text{Max } Z = 60x_1 + 80x_2$$

$$\nabla Z = 60i + 80j$$





Vamos Verificar os pontos A, B, C, D, E.

$Max Z = 60x_1 + 80x_2$			
Ponto	X1	X2	Z
A	0	80	6400
B	20	80	7600
C	40	60	7200
D	60	35	6400
E	60	0	3600

CONSIDERAÇÕES

- ▶ ∇Z é um vetor que indica a direção do máximo crescimento da função objetivo, cujas as projeções horizontal e vertical são magnitudes proporcionais aos coeficientes da função objetivo, 60 e 80 respectivamente.
- ▶ A região hachurada representa o conjunto das soluções viáveis do problema.
- ▶ A reta r perpendicular ∇Z é o lugar geométrico de todos os pontos em que $Z = 0$ e qualquer reta paralela a reta r é o lugar geométrico de pontos de Z constante. Deste modo, a reta s é paralela a reta r mais distante desta que contém algum ponto do conjunto de soluções compatíveis, que neste caso foi o ponto B.

Análise das restrições.

- ▶ $x_1 + x_2 \leq 100 \rightarrow 20 + 80 \leq 100$ (*verdadeiro*)
- ▶ $3x_1 + 2x_2 \leq 240 \rightarrow 3.20 + 2.80 \leq 240 \rightarrow 220 \leq 240$ (*verdadeiro*)
- ▶ $x_1 \leq 60 \rightarrow 20 \leq 60$ (*verdadeiro*)
- ▶ $x_2 \leq 80 \rightarrow 80 \leq 80$ (*verdadeiro*)
- ▶ $x_1 \text{ e } x_2 \geq 0 \rightarrow 20, 80 \geq 0$ (*verdadeiro*)

Conclusão

- Toda área será ocupada.
- Sobrarão 20 homens-hora.
- Mesmo sabendo que o mercado aceita 480 sacos de A, serão cultivados apenas 160 sacos.
- Serão cultivados 800 saco do cereal B, que o mercado aceita.
- $x_1 = 20$ ares do cereal A;
- $x_2 = 80$ ares do cereal B;
- (Lucro) $Z = 7600$.