Sistemas Lineares

Autoria: Professora Adriana Kuehn e professora Simone Leal Schwertl

**Sistemas Lineares**

**1.Equação linear:** é toda equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + .... + a_nx_n = b$. Na qual $x_1$ , $x_2$ , $x_3$ , ... $x_n$ são variáveis e $a_1$ , $a_2$ , ... $a_n$ são constantes das variáveis e b é o termo independente.

**Exemplos:**

1. Verifique se o termo (1, -2, 3) é uma solução da equação linear: $2x_1 + x_2 + 4x_3 = 12$.
2. Determine um conjunto solução da equação do exercício anterior onde a variável $x_3$ seja igual a 1.
3. Qual deve ser o valor de k para que o termo (k, 3, k+2) seja uma das solução da equação 2x+5y-3z=8.
4. Verifique se as equações dadas são lineares, em caso negativo justifique a sua resposta:
   a) $2x_1 x_2 - 3x_3 = 0$
   b) $x^2 + 2y - 3z = 9$
   c) $2\cos(x_1) + 4x_2 - x_3 = 20$
   d) x-4y+3z -3=0

**2.Sistemas de Equações Lineares**

A um conjunto de equações lineares se dá o nome de sistemas de equações lineares

$$:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nn}x_{n=} = b_n \end{cases}$$

Podemos escrever este sistema linear na forma de matrizes:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{21} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Exemplo:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 10 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \quad \text{ou}$$

Escrita na forma matricial

**3.Classificação dos sistemas lineares**

a) Sistema Possível ou compatível (quando admite solução)
   - Determinado (uma única solução) - SPD
   - Indeterminado (admite infinitas soluções) - SPI

b) Sistema Impossível ou incompatível (não admite solução) - SI

**Exemplo 1. Resolva o problema usando um sistema linear.**

**Problema: visto em sala**

**Exemplos 2.** Dados os sistemas representá-los na forma matricial e resolvê-los**.**

**a)** $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=5} \\ \boldsymbol{x-y=1} \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=4} \\ \boldsymbol{2x-2y=10} \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} \boldsymbol{x+y=1} \\ \boldsymbol{x+y=4} \end{cases}$

**4.Sistemas Equivalentes**

Diz que dois sistemas são equivalentes se admitem a mesma solução.

**Exemplo:** Determinar um sistema equivalente ao sistema dado e resolver os sistemas.

**a)** $\begin{cases} \boldsymbol{4x+8y=20} \\ \boldsymbol{3x-y=10} \end{cases}$

**5. Regra de Cramer para resolução de sistemas lineares**

As variáveis $x_i$ de um sistema linear, quando o sistema for compatível, podem ser obtidas por : $x_i = \frac{det.A_i}{det.A}$ , onde A é a matriz incompleta do sistema e $A_i$ é a matriz obtida de A, substituindo - se as colunas de $x_i$ pela coluna dos termos independentes.

Exemplo: Resolver o sistema aplicando a Regra de Cramer:

$$\begin{cases} x+2y-z=0 \\ 3x-4y+5z=10 \\ x+y+z=1 \end{cases}$$

**Discussão de Sistemas:**

Discutir um sistema linear significa analisar a solução esperada do sistema antes de resolvê-lo.

Podemos fazer esta discussão ou análise usando a Regra de Cramer onde as soluções esperadas podem ser calculadas por $x_i = \frac{det.A_i}{det.A}$ . Sendo assim, teremos:

A) Um ***SPD*** quando det. A ≠0

B) Um ***SPI*** quando $\begin{cases} det.A = 0 \\ e \\ \forall det.A_i = 0\ (todos) \end{cases}$

C) Um ***SI*** quando $\begin{cases} det.A = 0 \\ e \\ \exists det.A_i = 0\ (ao\ menos\ um) \end{cases}$

Exemplo: Discutir o sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{4x + 6y = 14} \\ \mathbf{2x + 3y = 6} \end{cases}$$

Exercícios

1) Discutir, usando a regra de Cramer, a solução dos sistemas abaixo **quando estes forem sistemas lineares**. Justifique os casos de **sistemas não lineares**.

**a)** $\begin{cases} \mathbf{xy + 2y = 14} \\ \mathbf{2x + 3y = 6} \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} \mathbf{4x + 5y = 14} \\ \mathbf{x^2 + 3y = 6} \end{cases}$

**c)** $\begin{cases} \mathbf{3x - 4y = 1} \\ \mathbf{x + 3y = 9} \end{cases}$

**d)** $\begin{cases} \mathbf{4x + y = 14} \\ \mathbf{2x - 3y = -28} \end{cases}$

e) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$

f) $\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ sen(x) + y + z = 6 \\ x - \log(y) + 2z = 3 \end{cases}$

g) $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 3x + 7y + 2z = 0 \\ 2x + 5y + 11z = 13 \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 5z = 2 \\ 4x + 3y + 7z = 3 \end{cases}$

i) $\begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ 3x + y + 2z = 0 \\ 2x - y - z = 0 \end{cases}$

2) Apresentar o conjunto solução dos sistemas LINEARES do exercício 1.

3) Determinar o valor de m para que o sistema seja possível e determinado.

$\begin{cases} mx + 2y - z = 1 \\ x - 3y + z = 0 \\ x + 2z = 2 \end{cases}$ Resposta: m≠-5/6

4) Existe valor de b que torne o sistema possível e indeterminado ? Justifique.

$$\begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \\ 2x - 2y + 2z = b \end{cases}$$ Resposta: não existe b. Por que?

**Sistema Linear Homogêneo**

Qdo em um sistema os termos independentes são todos nulos, o sistema é chamado de sistema homogêneo. Este sistema tem uma particularidade, ou seja, ele terá sempre uma solução. Essa solução é chamada de solução trivial, onde todos as variáveis do sistema serão iguais a zero.
Exemplo: Exercício 1 – i)

A **Discussão de um Sistema Homogêneo** torna-se mais simples uma vez que ele nunca será impossível de resolver. E, sendo assim, teremos as seguintes possibilidades:

- SPD quando det.A≠0 (apenas a solução trivial)
- SDI quando det. A =0 (infinitas soluções)

**Exercícios**

2. Discutir os seguintes sistemas e apresentar o conjunto solução.

a) $\begin{cases} \mathbf{2x - y = 0} \\ \mathbf{x - 3y = 0} \end{cases}$

**b)** $\begin{cases} \mathbf{4x - 6y = 0} \\ \mathbf{6x - 9y = 0} \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y + z = 0 \\ -x + 2y + 5z = 0 \end{cases}$

**j)** $\begin{cases} 3x + y + 5z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \end{cases}$

**6 .Sistema Escalonado**

Consideremos um sistema de m equações com n incógnitas que tem o aspecto do sistema abaixo, por exemplo, iremos que S é um sistema escalonado :

S= $\begin{cases} 2x - y - z - 3t = 0 \\ 0x + 0y + z - t = 1 \\ 0x + 0y - 0z + 2t = 2 \end{cases}$

Isso porque, num sistema escalonado, o número de coeficientes iniciais nulos em cada equação, a partir da segunda, é maior que a precedente. Ou ainda, a matriz incompleta é uma matriz triangular superior (os termos abaixo da diagonal principal são nulos).

**Discussão de sistemas por escalonamento:**

Suponhamos que um sistema tenha sido escalonado e, retiradas as equações do tipo 0=0, restam **p** equações com **n** incógnitas. Então:

(i) Se a última linha das equações restantes é $0x_1 + 0x_2 + .... + 0x_3 = b_p$ ($b_p \neq 0$) então o sistema é incompatível, ou seja, não tem solução.
Caso contrário sobram duas alternativas:

(ii) Se p=n, o sistema é compatível e determinado, possui uma única solução;

(iii) Se p <n, então o sistema é possível e indeterminado, ou seja, possui infinitas soluções.

**Resolução de sistema por escalonamento:**

**Exemplo:**

$$\begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + y + z = 6 \\ x - y + 2z = 3 \end{cases}$$

Exercícios

Discuta e resolver os sistemas abaixo:

1. $\begin{cases} x + 3y + 4z = -1 \\ -2x + 5y + 2z = 1 \\ -3x + 4y + z = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} x + y + z + 3t = 1 \\ x + y - z + 2t = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y - z = 2 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

4. $\begin{cases} x + 4y + 3z = 1 \\ 2x + 5y + 4z = 4 \\ x - 3y - 2z = 5 \end{cases}$

5. $\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y - z = -3 \\ 2x + y + 2z = 1 \\ 3x + 2y + 3z = 3 \end{cases}$

6. $\begin{cases} x + y + z + t = 0 \\ x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + y + 2z - t = 0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 2y - 3z = 0 \\ x + 4y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases}$