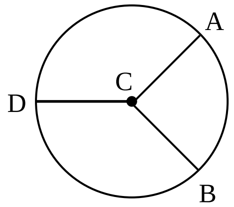
DEFINIÇÃO

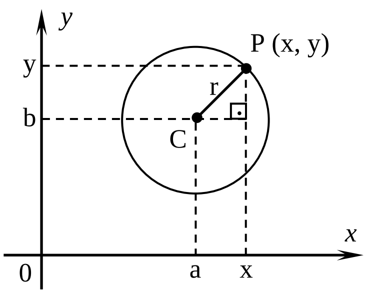
Denomina-se circunferência o conjunto de todos os pontos de um plano eqüidistantes de um ponto fixo C, denominado centro da circunferência.



Em que $\overline{CA} = \overline{CB} = \overline{CD} = r$ (raio da circunferência)

EQUAÇÃO DA CIRCUNFERÊNCIA

Considere o plano cartesiano e a circunferência de centro C (a, b) e raio r, conforme indica a figura.



O ponto P (x, y) pertence à circunferência se:

$$d(P, C) = r \quad \Rightarrow \quad \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r$$

$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

Equação reduzida da circunferência

No caso particular de o centro da circunferência estar na origem, isto é, a = b = 0, a equação será:

$$(x\text{-}0)^2 + (y-0)^2 = r^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x^2 + y^2 = r^2}$$

EQUAÇÃO GERAL DA CIRCUNFERÊNCIA

A equação reduzida da circunferência é dada por $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$. Desenvolvendo os quadrados, obtemos:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 - 2by + b^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + a^2 + b^2 - r^2 = 0$$

Fazendo $\alpha = -2a$, $\beta = -2b$ e $\gamma = a^2 + b^2 - r^2$, vem:

$$\boxed{x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0}$$

Equação geral da circunferência

Toda circunferência pode ser representada por uma equação da forma $x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y + \gamma = 0$, mas nem toda equação dessa forma representa uma circunferência.

Exemplos:

4) Determinar as coordenadas do centro e o raio da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$.

5) Verificar se a equação $3x^2+3y^2+6x+9y+6=0$ representa uma circunferência.

6) Determinar a forma geral da equação da circunferência com centro no ponto Q (-1, 2) e raio r = 3.

EXERCÍCIOS

1) Em cada caso, obter as coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência,caso a equação represente uma circunferência:

a) $x^2+y^2+x-\frac{2y}{3}=\frac{23}{36}$

b) $16x^2+16y^2-8x-31=0$

c) $x^2+y^2+10x-4y-7=0$

d) $4x^2+4y^2+4x-4y+1=0$

e) $3x^2+y^2-x-y=0$

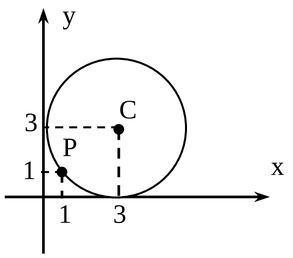
2) Uma circunferência de raio r = 4 tem o centro no ponto Q (0, -2). Determine a equação dessa circunferência.

3) Dada a circunferência de equação $(x+5)^2+(y-2)^2=7$, determine as coordenadas do centro C (a, b) e o raio r.

4) Verifique entre os pontos A (3, 0), B (6, 3) e C (-2, -1), quais pertencem à circunferência de equação $(x-3)^2+(y+1)^2=25$.

5) Determine a equação da circunferência com centro no ponto Q (1, -2) e que passa pelo ponto M (0, 3).

6) Observando a circunferência da figura ao lado, determine a sua equação.



7) Verifique, analiticamente, se a equação $4x^2+4y^2+24x-16y+62=0$ representa uma circunferência. Em caso afirmativo determine o centro e o raio e em caso negativo justifique sua resposta.

8) Por que a equação $2x^2+5y^2-2x-10y+1=0$ não tem como gráfico uma circunferência?

9) Verifique se a equação $2x^2+2y^2+2x+2y-4=0$ representa uma circunferência. Em caso afirmativo determine o centro e o raio e em caso negativo justifique sua resposta.

RESPOSTAS

1) a) $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right) \quad e \quad r = 1$

b) $C\left(\frac{1}{4}, 0\right) \quad e \quad r = \sqrt{2}$

c) $C(-5,2) \quad e \quad r = 9$

d) $C\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad e \quad r = \frac{1}{2}$

e) Não representa circunferência . justifique.

2) $x^2 + y^2 + 4y - 12 = 0$

3) C(-5,2) e r = $\sqrt{7}$

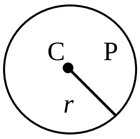
4) A-Não , B-sim e C-sim.

5) $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 26$

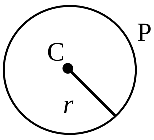
6) $(x-3)^2 + (y-3)^2 = 8$

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE PONTO E CIRCUNFERÊNCIA

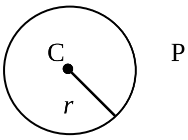
Um ponto pode ser interno, externo ou pode pertencer a uma dada circunferência de raio *r*. Observe as figuras:



$\boxed{D(P, C) < r}$ **P** é interno



$\boxed{D(P, C) = r}$ **P** $\in$ circunferência



$\boxed{D(P, C) \succ r}$ **P** é externo

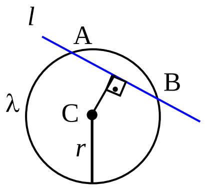
EXEMPLOS

7) Determinar a posição dos pontos A (2, 0), B (-1, 3) e C (4, 5) em relação à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 8x - 20 = 0$. Fazer solução gráfica e analítica

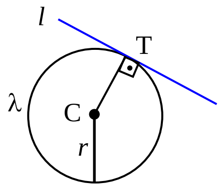
8) Qual a condição que deve verificar o número *m*, para que o ponto A (4, 3) seja interno à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 2y + m = 0$?

POSIÇÕES RELATIVAS ENTRE RETA E CIRCUNFERÊNCIA

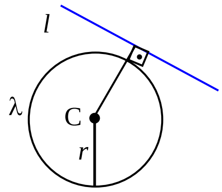
Uma reta l e uma circunferência λ podem ocupar as seguintes posições relativas:



D (C, l) < r



D (C, l) = r



D (C, l) > r

- l e λ são secantes. A reta l intercepta a circunferência λ em dois pontos.
- l e λ são tangentes A reta l intercepta a circunferência λ em um ponto chamado ponto de tangência.
- l e λ são não-secantes ou exteriores. A reta l não intercepta a circunferência λ.

Observação:

Podemos, também, determinar a posição relativa de uma reta e uma circunferência procurando os pontos de intersecção da reta com a circunferência.

Isso se consegue resolvendo o sistema formado pelas equações da reta e da circunferência.

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+\alpha x+\beta y+\gamma=0 \end{cases}$$

Como a resolução envolve uma equação do 2º grau, podemos ter:

$\Delta > 0$ (2 pontos comuns) $\Rightarrow$ a reta é ***secante*** à circunferência.
$\Delta = 0$ (1 pontos comum) $\Rightarrow$ a reta é ***tangente*** à circunferência.
$\Delta < 0$ (nenhum pt comum) $\Rightarrow$ a reta é ***exterior*** à circunferência.

EXEMPLOS

9) São dadas a reta l, de equação $-x+y+2=0$, e a circunferência λ, de equação $x^2+y^2+6x-8y=0$. Qual é a posição da reta l em relação à circunferência λ?

10) Determinar a equação da circunferência com centro no ponto C (0, 3) e que é tangente à reta s de equação $x+y+2=0$.

EXERCÍCIOS

1) Qual a posição do ponto A (-3, 4) em relação a cada uma das circunferências definidas por:

(a) $2x^2+2y^2+x+y-4=0$
(b) $x^2+y^2-2x+4y-3=0$
(c) $x^2+y^2-8x-20y+10=0$

2) Qual a posição relativa entre a reta e a circunferência definida por:

(a) $x+y+3=0 \quad e \quad x^2+y^2-4x-2y-13=0$
(b) $3x+2y+10=0 \quad e \quad x^2+y^2-2x-3=0$

(c) $y = x - 1 = 0 \quad e \quad \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$

3) Determine os pontos de intersecção da reta *l* e da circunferência λ, nos seguintes casos:

(a) $l: \quad y = x \quad e \quad x^2 + y^2 - 2x + 8y + 4 = 0$
(b) $l: \quad 2x + y - 5 = x \quad e \quad x^2 + y^2 = 5$

4) A reta *s*, de equação $x + y - 7 = 0$, e a circunferência, de equação $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$, são secantes nos pontos A e B. Calcule o comprimento da corda AB.

5) Determine as coordenadas dos pontos de intersecção da circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 9 = 0$ com os eixos das coordenadas.

6) A reta *l* de equação *x = 3* é tangente à circunferência de equação $x^2 + y^2 + 4x - 2y + k = 0$. Nessas condições, calcule o valor de *k*.

7) Uma circunferência tangencia o eixo *x* e tem o centro no ponto C (3, -2). Determine a equação dessa circunferência.

8) Determine a equação de uma circunferência tangente ao eixo *y* e à reta *x = 4* e que tem o centro no eixo *x*.

9) A circunferência com centro no ponto C (1, 1) é tangente à reta de equação $x + y - 10 = 0$. Calcule a equação da circunferência.

10) Qual é a equação de uma circunferência concêntrica à circunferência de equação $x^2 + y^2 - 8x - 4y + 4 = 0$ e que é tangente à reta *l* de equação $4x + 3y + 13 = 0$?

11) A circunferência de equação $x^2 + y^2 - 5x + 4y + 4 = 0$ intercepta o eixo dos *x* nos pontos A e B. Sabendo que C é o centro da circunferência, determine:

(a) As coordenadas dos pontos A, B e C;
(b) A área do triângulo ABC.

12) Uma circunferência de centro no ponto Q (2, 0) passa pelo ponto de intersecção das retas l_1 e l_2, de equações $x + y - 6 = 0$ e $x - y - 2 = 0$, respectivamente. Determine a equação dessa circunferência.

13) Determine as coordenadas do centro da circunferência que contém os pontos A (5, 4), B (-2, 3) e C (5, 3).

14) Calcule a equação da circunferência que passa pela origem e pelos pontos de intersecção da reta $\frac{x}{6} + \frac{y}{8} = 1$ com os eixos coordenados.

15) Sendo C a circunferência $x^2 + y^2 = 4$ e *s* a reta $x + y = 8$.

(a) Determine uma equação da reta perpendicular a *s* e que passa pelo centro de C.
(b) Dentre os pontos eqüidistantes de C e *s*, determine aquele que está mais próximo de *s*.

16) Ache a equação da circunferência circunscrita ao triângulo de vértices (2, 0), (2, 3) e (1, 3).

17) Sabendo que uma circunferência passa pelas intersecções das retas definidas pelas equações $x = y, y = 0 \quad e \quad x = 7$, determine:

(a) A equação dessa circunferência;
(b) A área do círculo formado por essa circunferência.

18) Determine a equação da circunferência que passa pelos pontos M (0, 2) e N (2, 1) e tem o centro sobre a reta de equação $-x + 2y + 7 = 0$

19) Uma circunferência *l* passa pela origem dos eixos coordenados, intercepta o eixo das abscissas no ponto (6, 0) e tem o centro na reta *y = 4*. Determine a equação de *l*.

RESPOSTAS

1) **(a)** externo
(b) pertence
(c) interno

2) **(a)** tangentes
(b)exteriores
(c) secantes

3) **(a)** (-1, -1) e (-2, -2)
(b) (2, 1)

4) $2\sqrt{2}$

5) eixo *x*: (9, 0) e (-1, 0)
eixo *y*: (0, 3) e (0, -3)

6) –20

7) $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 9 = 0$

8) $x^2 + y^2 - 4x = 0$

9) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 32$

10) $x^2 + y^2 - 8x - 4y - 29 = 0$

11) **(a)** $A(1,0), B(4,0) \quad e \quad C\left(\frac{5}{2}, -2\right)$

(b) 3

12) $(x-2)^2 + y^2 = 8$

13) $\left(\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right)$

14) $(x-3)^2 + (y-4)^2 = 25$

15) **(a)** y = x

(b) $\left(\frac{4+\sqrt{2}}{2}, \frac{4+\sqrt{2}}{2}\right)$

16) $x^2 + y^2 - 3x - 3y + 2 = 0$

17) **(a)** $x^2 + y^2 - 7x - 7y = 0$

(b) $\frac{49\pi}{2}$

18) $(x+2)^2 + \left(y + \frac{9}{2}\right)^2 = \frac{185}{4}$

19) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 68 = 0$

.