e, nesse caso, dizemos que os espaços P_3 e $\mathbb{R}^4$ são *isomorfos*.

Observemos ainda que o espaço vetorial $M(2, 2)$ é também isomorfo ao $\mathbb{R}^4$.

De forma análoga, prova-se que:

P_2 é isomorfo a $\mathbb{R}^3$

$M(3, 1)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^3$

$M(2, 1)$ é isomorfo a $\mathbb{R}^2$

e assim por diante.

De um modo geral, tem-se:

"*Se* V *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$ *e* $\dim V = n$, *então* V *e* $\mathbb{R}^n$ *são isomorfos.*"

2.10 PROBLEMAS PROPOSTOS

Nos problemas 1 a 7 apresenta-se um conjunto com as operações de adição e multiplicação por escalar nele definidas. Verificar quais deles são espaços vetoriais. Para aqueles que não são espaços vetoriais, citar os axiomas que não se verificam.

1) $\mathbb{R}^3$, $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$

$$k(x, y, z) = (0, 0, 0)$$

2) $\{(x, 2x, 3x);\ x \in \mathbb{R}\}$ com as operações usuais

3) $\mathbb{R}^2$, $(a, b) + (c, d) = (a, b)$ e $\alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$

4) $\mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e $\alpha(x, y) = (\alpha^2 x, \alpha^2 y)$

5) $\mathbb{R}^2$, $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$ e $\alpha(x, y) = (\alpha x, 0)$

6) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = 5x\}$ com as operações usuais

7) $A = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \in M(2, 2) / a, b \in \mathbb{R} \right\}$ com as operações usuais

Nos problemas 8 a 13 são apresentados subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Verificar quais deles são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^2$ relativamente às operações de adição e multiplicação por escalar usuais.

8) $S = \{(x, y) / y = -x\}$

9) $S = \{(x, x^2);\ x \in \mathbb{R}\}$

10) $S = \{(x, y) / x + 3y = 0\}$

11) $S = \{(y, y);\ y \in \mathbb{R}\}$

12) $S = \{(x, y) / y = x + 1\}$

13) $S = \{(x, y) / x \geqslant 0\}$

Nos problemas 14 a 25 são apresentados subconjuntos de $\mathbb{R}^3$. Verificar quais são seus subespaços em relação às operações de adição e multiplicação por escalar usuais. Para os que são subespaços, mostrar que as duas condições estão satisfeitas. Caso contrário, citar um contra-exemplo.

14) $S = \{(x, y, z) / x = 4y \text{ e } z = 0\}$

15) $S = \{(x, y, z) / z = 2x - y\}$

16) $S = \{(x, y, z) / x = z^2\}$

17) $S = \{(x, y, z) / y = x + 2 \text{ e } z = 0\}$

18) $S = \{(x, x, x);\ x \in \mathbb{R}\}$ 11

19) $S = \{(x, x, 0)/x \in \mathbb{R}\}$ 12

20) $S = \{(x, y, z)/xy = 0\}$

21) $S = \{(x, y, z)/x = 0 \text{ e } y = |z|\}$ 13

22) $S = \{(x, -3x, 4x);\ x \in \mathbb{R}\}$

23) $S = \{(x, y, z)/x \geqslant 0\}$

24) $S = \{(x, y, z)/x + y + z = 0\}$

25) $S = \{(4t, 2t, -t);\ t \in \mathbb{R}\}$

26) **Verificar se os subconjuntos abaixo são subespaços de $M(2, 2)$:**

a) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ c = a + b \text{ e } d = 0 \right\}$

b) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix};\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (matrizes triangulares superiores)

c) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix};\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ (matrizes simétricas)

d) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & a + b \\ a - b & b \end{bmatrix};\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

e) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & b \end{bmatrix};\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

f) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ ad - bc \neq 0 \right\}$ (conjunto de matrizes inversíveis)

27) Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em $\mathbb{R}^3$.

a) Escrever o vetor $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v.

b) Para que valor de k o vetor $(-8, 14, k)$ é combinação linear de u e v?

c) Determinar uma condição entre a, b e c para que o vetor (a, b, c) seja uma combinação linear de u e v.

28) Consideremos no espaço $P_2 = \{at^2 + bt + c/a, b, c \in \mathbb{R}\}$ os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.

a) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.

b) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1 e p_2.

c) Determinar uma condição para a, b e c de modo que o vetor $at^2 + bt + c$ seja combinação linear de p_2 e p_3.

d) É possível escrever p_1 como combinação linear de p_2 e p_3?

29) Seja o espaço vetorial $M(2, 2)$ e os vetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

e) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & 1 \\ a & b \end{bmatrix};\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$

f) $S = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix};\ ad - bc \neq 0 \right\}$ (conjunto de matrizes inversíveis)

27) Sejam os vetores $u = (2, -3, 2)$ e $v = (-1, 2, 4)$ em $\mathbb{R}^3$.

a) Escrever o vetor $w = (7, -11, 2)$ como combinação linear de u e v.

b) Para que valor de k o vetor $(-8, 14, k)$ é combinação linear de u e v?

c) Determinar uma condição entre a, b e c para que o vetor (a, b, c) seja uma combinação linear de u e v.

28) Consideremos no espaço $P_2 = \{ at^2 + bt + c/a, b, c \in \mathbb{R} \}$ os vetores $p_1 = t^2 - 2t + 1$, $p_2 = t + 2$ e $p_3 = 2t^2 - t$.

a) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1, p_2 e p_3.

b) Escrever o vetor $p = 5t^2 - 5t + 7$ como combinação linear de p_1 e p_2.

c) Determinar uma condição para a, b e c de modo que o vetor $at^2 + bt + c$ seja combinação linear de p_2 e p_3.

d) É possível escrever p_1 como combinação linear de p_2 e p_3?

29) Seja o espaço vetorial M(2, 2) e os vetores

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } v_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Escrever o vetor

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3.

30) Escrever o vetor $0 \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores

a) $v_1 = (1, 3)$ e $v_2 = (2, 6)$

b) $v_1 = (1, 3)$ e $v_2 = (2, 5)$

31) Sejam os vetores $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (-2, -1, 0)$. Expressar cada um do vetores $u = (-8, 4, 1)$, $v = (0, 2, 3)$ e $w = (0, 0, 0)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3

32) Expressar o vetor $u = (-1, 4, -4, 6) \in \mathbb{R}^4$ como combinação linear dos vetor $v_1 = (3, -3, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2)$ e $v_3 = (1, -1, 0, 0)$.

33) Seja S o subespaço do $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y - z = 0 \text{ e } t = 0\}$$

Pergunta-se:

a) $(-1, 2, 3, 0) \in S$?

b) $(3, 1, 4, 0) \in S$?

c) $(-1, 1, 1, 1) \in S$?

34) Seja S o subespaço de $M(2, 2)$:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a - b & 2a \\ a + b & -b \end{bmatrix}; \ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Escrever o vetor

$$v = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3.

30) Escrever o vetor $0 \in \mathbb{R}^2$ como combinação linear dos vetores

a) $v_1 = (1, 3)$ e $v_2 = (2, 6)$

b) $v_1 = (1, 3)$ e $v_2 = (2, 5)$

31) Sejam os vetores $v_1 = (-1, 2, 1)$, $v_2 = (1, 0, 2)$ e $v_3 = (-2, -1, 0)$. Expressar cada um dos vetores $u = (-8, 4, 1)$, $v = (0, 2, 3)$ e $w = (0, 0, 0)$ como combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

32) Expressar o vetor $u = (-1, 4, -4, 6) \in \mathbb{R}^4$ como combinação linear dos vetores $v_1 = (3, -3, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, -1, 2)$ e $v_3 = (1, -1, 0, 0)$.

33) Seja S o subespaço do $\mathbb{R}^4$ definido por:

$$S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + 2y - z = 0 \text{ e } t = 0\}$$

Pergunta-se:

a) $(-1, 2, 3, 0) \in S$?

b) $(3, 1, 4, 0) \in S$?

c) $(-1, 1, 1, 1) \in S$?

34) Seja S o subespaço de $M(2, 2)$:

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} a - b & 2a \\ a + b & -b \end{bmatrix};\ a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

Pergunta-se:

a) $\begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \in S$?

b) Qual deve ser o valor de k para que o vetor

$$\begin{bmatrix} -4 & k \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

pertença a S?

35) Determinar os subespaços do $\mathbb{R}^3$ gerados pelos seguintes conjuntos:

a) $A = \{(2, -1, 3)\}$

b) $A = \{(-1, 3, 2), (2, -2, 1)\}$

c) $A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 1, 0)\}$

d) $A = \{(-1, 1, 0), (0, 1, -2), (-2, 3, 1)\}$

e) $A = \{(1, 2, -1), (-1, 1, 0), (-3, 0, 1), (-2, -1, 1)\}$.

f) $A = \{(1, 2, -1), (-1, 1, 0), (0, 0, 2), (-2, 1, 0)\}$

36) Seja o conjunto $A = \{v_1, v_2\}$, sendo $v_1 = (-1, 3, -1)$ e $v_2 = (1, -2, 4)$.

Determinar:

a) O subespaço $G(A)$.

b) O valor de k para que o vetor $v = (5, k, 11)$ pertença a $G(A)$.

38) Determinar os subespaços de P_2 (espaço vetorial dos polinômios de grau $\leqslant 2$) gerados pelos seguintes vetores:

a) $p_1 = 2x + 2$, $p_2 = -x^2 + x + 3$ e $p_3 = x^2 + 2x$

b) $p_1 = x^2$, $p_2 = x^2 + x$

c) $p_1 = 1$, $p_2 = x$, $p_3 = x^2$

39) Determinar o subespaço $G(A)$ para $A = \{(1, -2), (-2, 4)\}$. O que representa geometricamente esse subespaço?

40) Mostrar que os vetores $v_1 = (2, 1)$ e $v_2 = (1, 1)$ geram o $\mathbb{R}^2$.

41) Mostrar que os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 1)$ e $v_3 = (0, 0, 1)$ geram o $\mathbb{R}^3$.

42) Seja o espaço vetorial $M(2, 2)$. Determinar seus subespaços gerados pelos vetores

a) $v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

b) $v_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $v_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

43) Determinar o subespaço de P_3 (espaço dos polinômios de grau $\leqslant 3$) gerado pelos vetores $p_1 = x^3 + 2x^2 - x + 3$ e $p_2 = -2x^3 - x^2 + 3x + 2$.

44) Determinar o subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $u = (2, -1, 1, 4)$, $v = (3, 3, -3, 6)$ e $w = (0, 4, -4, 0)$.

45) Verificar se o vetor $v = (-1, -3, 2, 0)$ pertence ao subespaço do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (2, -1, 3, 0)$, $v_2 = (1, 0, 1, 0)$ e $v_3 = (0, 1, -1, 0)$.

46) Classificar os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ em LI ou LD:

a) $\{(1, 3)\}$

b) $\{(1, 3), (2, 6)\}$

c) $\{(2, -1), (3, 5)\}$

d) $\{(1, 0), (-1, 1), (3, 5)\}$

47) Classificar os seguintes subconjuntos do $\mathbb{R}^3$ em LI ou LD:

a) $\{(2, -1, 3)\}$

b) $\{(1, -1, 1), (-1, 1, 1)\}$

c) $\{(2, -1, 0), (-1, 3, 0), (3, 5, 0)\}$

d) $\{(2, 1, 3), (0, 0, 0), (1, 5, 2)\}$

e) $\{(1, 2, -1), (2, 4, -2), (1, 3, 0)\}$

f) $\{(1, -1, -2), (2, 1, 1), (-1, 0, 3)\}$

g) $\{(1, 2, -1), (1, 0, 0), (0, 1, 2), (3, -1, 2)\}$

48) Quais dos seguintes conjuntos de vetores pertencentes ao P_2 são LD?

a) $2 + x - x^2, -4 - x + 4x^2, x + 2x^2$

b) $1 - x + 2x^2, x - x^2, x^2$

c) $1 + 3x + x^2, 2 - x - x^2, 1 + 2x - 3x^2, -2 + x + 3x^2$

d) $x^2 - x + 1, x^2 + 2x$

50) Sendo V o espaço vetorial das matrizes 2×3, verificar se $\{A, B, C\}$ é LI ou LD, sendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

51) Determinar o valor de k para que seja LI o conjunto

$\{(-1, 0, 2), (1, 1, 1), (k, -2, 0)\}$

52) Determinar k para que

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ k & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

seja LD.

53) Mostrar que são LD os vetores v_1, v_2 e v_3, com v_1 e v_2 vetores arbitrários de um espaço vetorial V e $v_3 = 2v_1 - v_2$.

54) Mostrar que se u, v e w são LI, então $u + v$, $u + w$ e $v + w$ são também LI.

55) Sendo $v_1 = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$, determinar $v_2 \in \mathbb{R}^2$ tal que $\{v_1, v_2\}$ seja base de $\mathbb{R}^2$.

56) Verificar quais dos seguintes conjuntos de vetores formam base do $\mathbb{R}^2$:

a) $\{(1, 2,), (-1, 3)\}$

b) $\{(3, -6), (-4, 8)\}$

c) $\{(0, 0), (2, 3)\}$

d) $\{(3, -1), (2, 3)\}$

57) Para que valores de k o conjunto $\beta = \{(1, k), (k, 4)\}$ é base do $\mathbb{R}^2$?

58) O conjunto $\beta = \{(2, -1), (-3, 2)\}$ é uma base do $\mathbb{R}^2$. Escrever o vetor genérico do $\mathbb{R}^2$ como combinação linear de β.

59) Quais dos seguintes conjuntos de vetores formam uma base do $\mathbb{R}^3$?

a) $(1, 1, -1), (2, -1, 0), (3, 2, 0)$

b) $(1, 0, 1), (0, -1, 2), (-2, 1, -4)$

c) $(2, 1, -1), (-1, 0, 1), (0, 0, 1)$

d) $(1, 2, 3), (4, 1, 2)$

e) $(0, -1, 2), (2, 1, 3), (-1, 0, 1), (4, -1, -2)$

60) Quais dos seguintes conjuntos de vetores formam base de P_2?

a) $2t^2 + t - 4, \; t^2 - 3t + 1$

b) $1, t, t^2$

c) $2, 1 - x, \; 1 + x^2$

d) $1 + x + x^2, \; x + x^2, \; x^2$

e) $1 + x, \; x - x^2, \; 1 + 2x - x^2$

61) Mostrar que o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ -2 & 5 \end{bmatrix} \right\}$$

63) O conjunto

$A = \{ t^3, 2t^2 - t + 3, t^3 - 3t^2 + 4t - 1 \}$

é base de P_3? Justificar.

64) Mostrar que os vetores $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 2, 3)$, $v_3 = (3, 0, 2)$ e $v_4 = (2, -1, 1)$ geram o $\mathbb{R}^3$ e encontrar uma base dentre os vetores v_1, v_2, v_3 e v_4.

65) Mostrar que os polinômios $p_1 = 1 + 2x - 3x^2$, $p_2 = 1 - 3x + 2x^2$ e $p_3 = 2 - x + 5x^2$ formam uma base do espaço dos polinômios de grau $\leqslant 2$ e calcular o vetor-coordenada de $p = -2 - 9x - 13x^2$ na base $\beta = \{p_1, p_2, p_3\}$.

66) Determinar uma base do subespaço do $\mathbb{R}^4$ gerado pelos vetores $v_1 = (1, -1, 0, 0)$, $v_2 = (-2, 2, 2, 1)$, $v_3 = (-1, 1, 2, 1)$ e $v_4 = (0, 0, 4, 2)$.

67) Seja $V = \mathbb{R}^3$ e o conjunto

$B = \{ (0, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 2, 1) \} \subset \mathbb{R}^3$

a) Mostrar que B não é base do $\mathbb{R}^3$.

b) Determinar uma base do $\mathbb{R}^3$ que possua dois elementos de B.

68) Determinar o vetor coordenada de $v = (6, 2)$ em relação às seguintes bases:

$\alpha = \{ (3, 0), (0, 2) \}$ $\quad\quad$ $\gamma = \{ (1, 0), (0, 1) \}$

$\beta = \{ (1, 2), (2, 1) \}$ $\quad\quad$ $\delta = \{ (0, 1), (1, 0) \}$

69) No espaço vetorial $\mathbb{R}^3$, consideremos a seguinte base: $B = \{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, -1, 1) \}$. Determinar o vetor coordenada de $v \in \mathbb{R}^3$ em relação à base B se:

a) $v = (2, -3, 4)$, $\quad$ b) $v = (3, 5, 6)$, $\quad$ c) $v = (1, -1, 1)$

70) Seja $A = \{ 3, 2x, -x^2 \}$ uma base de P_2. Determinar o vetor-coordenada de $v = 6 - 4x + 3x^2$ em relação à base A.

e) $\begin{cases} x + y - 2z + t = 0 \\ 2x + 2y - 4z + 2t = 0 \end{cases}$

2.10.1 Respostas de Problemas Propostos

1. Não é espaço vetorial. Falha o axioma M_4
2. O conjunto é um espaço vetorial
3. Não é espaço vetorial. Falham os axiomas A_2, A_3 e A_4
4. Não é espaço vetorial. Falha o axioma M_2
5. Não é espaço vetorial. Falha o axioma M_4
6. O conjunto é um espaço vetorial
7. O conjunto é um espaço vetorial
8. S é subespaço
9. S não é subespaço
10. É
11. É
12. Não é
13. Não é
14. É
15. É
16. Não é

17. Não é

18. É

19. É

20. Não é

21. Não é

22. É

23. Não é

24. É

25. É

26. São subespaços: a), b), c), d)

27. a) $w = 3u - v$

b) $k = 12$

c) $16a + 10b - c = 0$

28. a) $p = 3p_1 + 2p_2 + p_3$

b) impossível

c) $a + 2b - c = 0$

d) não é possível

29. $v = 4v_1 + 3v_2 - 2v_3$

30. a) $0 = -2v_1 + v_2$

b) $0 = 0v_1 + 0v_2$

31. $u = 3v_1 - v_2 + 2v_3$

$v = v_1 + v_2$

$w = 0v_1 + 0v_2 + 0v_3$

32. $v = -v_1 + 3v_2 + 2v_3$

33. a) sim b) não c) não

34. a) sim b) $k = -2$

35. a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = -2y \text{ e } z = -3y\}$

b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 7x + 5y - 4z = 0\}$

c) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y - z = 0\}$

d) $\mathbb{R}^3$

e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + y + 3z = 0\}$

f) $\mathbb{R}^3$

36. a) $G(A) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / 10x + 3y - z = 0\}$

b) $k = -13$

37. $k = 7$

38. a) $\{ax^2 + bx + c / b = 2a + c\}$

b) $\{ax^2 + bx / a, b \in \mathbb{R}\}$

c) P_2

39. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = -2x\}$

Representa uma reta que passa pela origem.

40. $(x, y) = (x - y)(2, 1) + (-x + 2y)(1, 1)$

41. $(x, y, z) = xv_1 + (y - x)v_2 + (z - y)v_3$

42.

a) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; \; b = -2a - 5d \text{ e } c = -a - d \right\}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} ; \; a + b - c + d = 0 \right\}$

43. $\{ax^3 + bx^2 + cx + d / b = 5a + 3c \;\text{ e }\; d = 11a + 8c\}$

44. $\{(x, y, z, t) / 2x - t = 0 \;\text{ e }\; y + z = 0\}$

45. Pertence.

46. a) LI b) LD c) LI d) LD

47. a) LI b) LI c) LD d) LD
e) LD f) LI g) LD

48. a, c

49. b, d

50. LI

51. $k \neq -3$

52. $k = 3$

55. $v_2 \neq kv_1, \; \forall k \in \mathbb{R}$

56. a, d

57. $k \neq \pm 2$

58. $(x, y) = (2x + 3y)(2, -1) + (x + 2y)(-3, 2)$

59. a), c)

60. b), c), d)

63. Não. $G(A) \neq \mathbb{R}^3$.

64. Base: $\{v_1, v_2, v_3\}$

65. $p_\beta = (1, 5, -4)$

66. Uma base: $\{v_1, v_2\}$.

67. Uma base: $\{(0, 1, 1), (1, 1, 0), (0, 0, 1)\}$

68. $v_\alpha = (2, 1)$, $v_\beta = (-\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$

$v_\gamma = (6, 2)$, $v_\delta = (2, 6)$

69. a) $v_B = (-2, 1, 4)$

b) $v_B = (-3, 11, 6)$

c) $v_B = (0, 0, 1)$

70. $v_A = (2, -2, -3)$

71. a) B é LI e $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$(x, y, z) = \frac{x - z}{2} v_1 + \frac{x + z}{2} v_2 + (x - y + z)v_3$$

b) $e_1 = \frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 + v_3$

$e_2 = -v_3$

$e_3 = -\frac{1}{2} v_1 + \frac{1}{2} v_2 + v_3$

72. a) dim: 2

b) dim: 1

c) dim: 1

d) dim: 1

e) dim: 2

f) dim: 2

As bases ficarão a cargo do leitor.

73. a) dim: 2 c) dim: 2

b) dim: 3 d) dim: 3

As bases ficarão a cargo do leitor.

74. a) 2

b) Não, porque

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \notin S$$

75. a) dim: 2

uma base: $\{(1, 0, 3, -5), (0, 1, 6, -10)\}$

b) dim: 2

uma base: $\{(0, -2, -1, 1), (1, -3, -5, 0)\}$

c) dim: 1

uma base: $\{(1, 1, -1)\}$

d) dim: zero

não existe base

e) dim: 3

uma base: $\{(-1, 0, 0, 1), (-1, 1, 0, 0), (2, 0, 1, 0)\}$