DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Seja **V** um espaço vetorial.

- Se **V** possui uma base com **n** vetores então **V** tem dimensão **n** e anota-se: **dim V = n**
- Se **V** não possui base, dim V = 0
- Se **V** tem uma base com infinitos vetores, então a dimensão de V é infinita e anota-se: Dim V = ∞.

Exemplos: dim IR^2 = 2, pois toda base do IR^2 tem dois vetores
dim IR^3 = 3
dim IR^n = n
dim M_{2x2} = 4
dim M_{3x3} = 9
dim $M_{(m,\, n)}$ = m . n
dim {0} = 0

OBS:

1. **Seja V um espaço vetorial tal que dim V = n.**
   - Seja S um subespaço vetorial de V. Então a dim S $\leq$ n. No caso de dim S = n, tem-se S = V
     Para permitir uma interpretação geométrica, consideremos o espaço tridimensional IR^3 (dim IR^3 = 3).
     A dimensão de qualquer subespaço S do IR^3 só poderá ser 0, 1, 2, ou 3. Portanto temos os seguintes casos:
     I) dim S = 0, então S = {0} é a origem.
     ii) dim S = 1, então S é uma reta que passa pela origel.
     iii) dim S = 2, então S é um plano que passa pela origem.
     iV) dim S = 3, então S é o próprio IR^3.

2. Seja V um espaço vetorial de dimensão. Então, qualquer subconjunto de V com mais de n vetores é LD.

3. Sabemos que um conjunto B é base de um espaço vetorial V se B for LI e se B gera V. No entanto, se soubermos que a dim V = n, para obtermos uma base de V basta que apenas uma condição de base esteja satisfeita. A outra condição ocorre automaticamente. Assim:
   i) Se dim V = n, qualquer subconjunto de V com n vetores LI é uma base de V.
   ii) Se dim V = n, qualquer subconjunto de V com n vetores geradores de V é uma base de V.

Exemplo 1 -Determinar a dimensão e uma base do espaço vetorial
S = {(x, y, z) $\in$ IR^3 | 2x + y + z = 0}

Solução:
Isolando z (poderíamos também isolar x ou y) na equação de definição, tem-se:
z = - 2x – y onde x e y são as variáveis livres.
Qualquer vetor (x, y, z) $\in$ S te a forma:
(x, y, -2x –y) e, portanto, podemos escrever:
(x, y, z) = (x, y, -2x – y) ou
(x, y, z) = (x, 0, -2x) + (0, y, -y) ou
(x, y, z) = x(1, 0, -2) + y(0, 1, -1), isto é,

todo vetor de S é combinação linear dos vetores (1, 0, -2) e ((0, 1, - 1).
Como esses dois vetores geradores de S são LI,
o conjunto {(1, 0, -2); (0, 1, - 1)} é uma base de S e conseqüentemente,
dim = 2.

Por outro lado, tendo em vista que a cada variável livre corresponde um vetor da base, concluímos que: ***o número de variáveis livres é a dimensão do espaço, ou seja, A dimensão de S será determinada pelo número de variáveis livres.***

Na prática podemos adotar uma maior simplificação para determinar uma base de um espaço. Para esse mesmo espaço vetorial S, onde z = -2x – y, temos:

fazendo x = 1 e y =1, vem z = - 2(1) – 1 = - 3 $\Rightarrow \vec{v_1}$ = (1, 1, - 3)
fazendo x = -1 e y = 2, vem z = - 2(- 1) – 2 = 0 $\Rightarrow \vec{v_2}$ = (- 1, 2, 0)
e o conjunto
{(1, 1, -3); (- 1, 2, 0)} é uma base de S. S tem infinitas bases, porém todas elas com dois vetores.

Exemplo 2: Determinar uma base e a dimensão do espaço-solução do sistema homogêneo abaixo:

$$\begin{cases} x + y - 4z + 3t = 0 \\ x + 2y - 2z + 2t = 0 \\ 2x + 4y - 2z + 3t = 0 \end{cases}$$

Solução:

- **Dimensão de S:**

o conjunto solução do sistema é S= {(x, y, z, t)/t=2z e x=-2y-2z }. Como tem 2 variáveis livres, y e z , dimS=2.

- **Base de S:**

Fazendo y=0 e z=1 v1=(-2y-2z, y, z, 2z) = (-2.0-2.1, 0, 1, 2.1) = (-2,0,1,2)
Fazendo y=1 e z=0 v2=(-2y-2z, y, z, 2z) = (-2.1-2.0, 1, 0, 2.0) = (-2,1,0,0)

Base de S= {(-2,0,1,2); (-2,1,0,0)}

Exercícios

1. Determine a dimensão e uma base do subespaço S= {(x, y, z, t) $\in$ IR^4 | x + y + z = 0}.
2. Determine a dimensão e uma base do subespaço S = {(x, y, z, t) $\in$ IR^4 | x – 2y = 0 e z = 3 t}.
3. Determinar uma base e a dimensão S = $\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; b = a + c \quad e \quad d = c \right\}$
4. **Exercício Do livro: 72), 73) e 75)**