UNIVERSIDADE REGIONAL DE BLUMENAU - FURB
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E NATURAIS – CCEN
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Professora : Simone Leal Schwertl

1. <u>VETORES</u>

1.1 Segmentos orientados

Considere o segmento orientado **AB** :

Observe que o segmento orientado **AB** é caracterizado por três aspectos assim definidos:

- ***comprimento*** (denominado <u>módulo</u>)
- ***direção***
- ***sentido*** (de A para B)

Um *segmento orientado* é determinado por um par ordenado de pontos.

O primeiro elemento é chamado de **origem** e o segundo elemento é a **extremidade**. **AB≠BA**

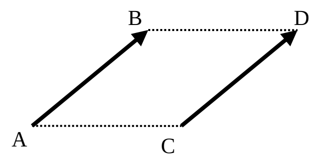
A ⟶ **B** **AB**

⟵

A **B** **BA**

1.2 Segmentos Eqüipolentes

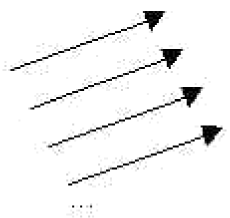
<u>Eqüipolência</u> é uma relação entre dois segmentos orientados.
Dois segmentos (A, B) e (C, D) são *eqüipolentes* se têm as mesmas coordenadas canônicas.
Denotaremos a relação de eqüipolência por (A, B) ~ (C, D).
Quando (A,B) ~ (C, D), a figura formada pelos pontos ABCD no espaço afim é um paralelogramo, ver figura.



1.3 Vetor

Conjunto infinito de todos os segmentos orientados do espaço que são eqüipolentes entre si,<u>ou seja</u>, o conjunto infinito de todos os segmentos orientados que possuem o mesmo comprimento, a mesma direção e o mesmo sentido de AB.
Assim, a idéia de vetor nos levaria a uma representação do tipo:

$$\boxed{Vetor \quad \overrightarrow{AB} = B - A}$$



<u>Na prática</u>, para representar um vetor, tomamos apenas um dos infinitos segmentos orientados que o compõe. <u>Guarde esta idéia, pois ela é importante!</u>

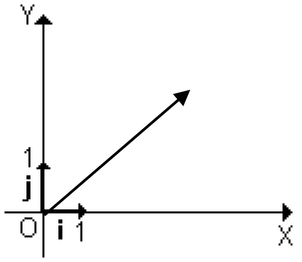
Professora : Simone Leal Schwertl

2. Representação analítica de um vetor

2.1 No plano R^2 : Vetor no plano é o par ordenado (x,y) de números reais e se representa por:

$\boxed{\vec{v} = (x, y)}$ ou ainda $\boxed{\vec{v} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}}$

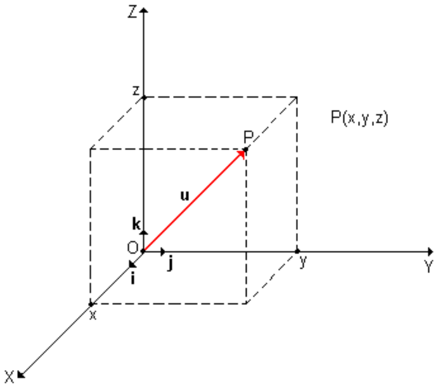
Graficamente:



2.2 No Espaço R^3: um vetor no espaço é a terna ordenada (x,y,z) de números reais e se representa por:

$\vec{u} = (x, y, z)$ ou $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

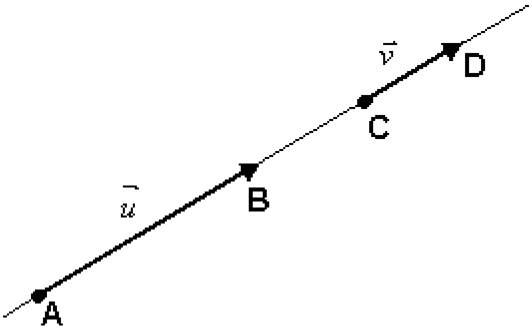
Graficamente:

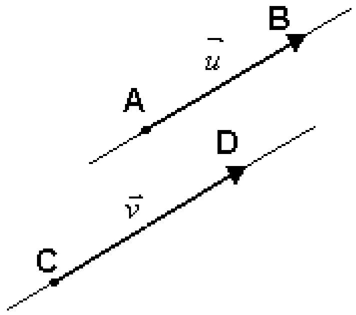


<u>3.Algumas definições importantes</u>

3.1.*Vetores Colineares:* Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são *colineares* se tiverem a mesma direção. Em outras palavras: $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são colineares se tiverem representantes **AB** e **CD** pertencentes a uma mesma reta ou a retas paralelas.

Professora : Simone Leal Schwertl





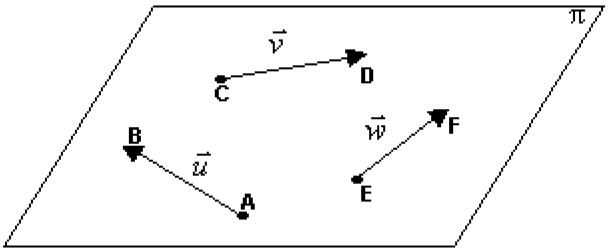
Analiticamente:

Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são colineares (ou paralelos) se existe um **número real m** tal que:

$\vec{u} = m\vec{v}$ ou seja: $m = \dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2} = \dfrac{z_1}{z_2}$ (as componentes são multipla

IMPORTANTE : Fazer exemplo

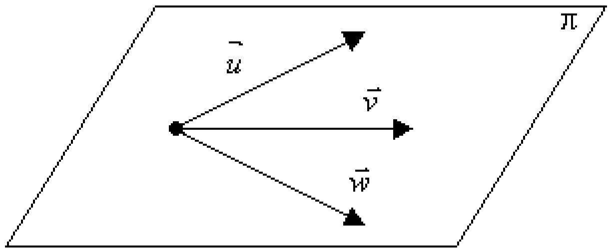
3.2 ***Vetores Coplanares:*** Se os vetores não nulos $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$(não importa o número de vetores) possuem representantes **AB**, **CD** e **EF** pertencentes a um mesmo plano π diz-se que eles são coplanares.



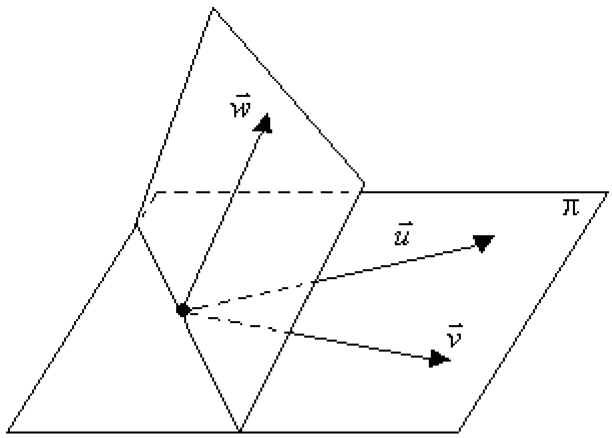
Professora : Simone Leal Schwertl

- ***Dois*** *vetores* $\vec{u}$ e $\vec{v}$ *quaisquer* ***são sempre coplanares***, pois podemos sempre tomar um ponto no espaço e, com origem nele, imaginar os dois representantes de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ pertencendo a um plano π que passa por este ponto.
- **Três vetores poderão ou não ser coplanares**.

$\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são coplanares :



$\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não são coplanares:



3.3 Norma de um vetor (módulo ou comprimento)

Norma é o comprimento do vetor $\vec{v}$.

Indicação $\|\vec{v}\|$ *ou* $|\vec{v}|$ → lê-se norma de $\vec{v}$.

No plano $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

No espaço $\|\vec{v}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Professora : Simone Leal Schwertl

Exemplo: Determinar a norma ou comprimento dos vetores v=(1,4,0) ou u=(2,5). Graficar.

7.4.Vetor Unitário ou Versor

É um vetor cuja norma vale 1. $\| \vec{u} \| = 1 \quad ou \quad \left|\vec{u}\right| = 1$

Exemplos determinar o módulo dos vetores :

- $\vec{i}$ (unitário, de coordenadas (1, 0, 0))
- $\vec{j}$ (unitário, de coordenadas (0, 1, 0))
- $\vec{k}$ (unitário, de coordenadas (0, 0, 1)).

3 Adição de Vetores

Dados os vetores
$\vec{u} = (x_1, y_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2)$
Definimos: $\vec{u} + \vec{v} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$, o mesmo vale para vetores no espaço.

Exemplo: determinar a soma dos vetores u=(1,2,3) e v=(1,4,5).

4 Multiplicação de um número real (escalar) por um vetor

Dados os vetores $\vec{u} = (x_1, y_1)$ e r um escalar $r \in \Re$.
Definimos: $r \cdot \vec{u} = (rx_1, ry_1)$, o mesmo vale para vetores no espaço.

Obs.:
Se $r>0$ o novo vetor possui a mesma direção de $\vec{v}$ e tem como comprimento r vezes o comprimento de $\vec{v}$.
Se r<0 o novo vetor será o oposto do vetor $|r|\vec{v}$.
Se r=0 o novo vetor é o vetor nulo.

Exemplo: Seja u=(2,5) ,determinar: 2u , -u, e (0,5)u

5 Igualdade em operações no R^3

IGUALDADE:
Dois vetores $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1)$ e $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2)$ são iguais somente se, e somente se:
i) Possuem a mesma direção
ii) o mesmo sentido
iii) $x_1 = x_2$; $y_1 = y_2$ e, $z_1 = z_2$. (o mesmo vale para vetores no plano)

Professora : Simone Leal Schwertl

6. Produto entre Vetores

- interno ou escalar (a resposta é um número)
- externo ou vetorial (a resposta é um vetor)
- misto (a resposta é um número)

6.1 Produto interno ou escalar (entre 2 vetores)

Na física o *produto escalar* é utilizado para descrever grandezas físicas tais como: trabalho mecânico, energia potencial gravitacional, potencial elétrico, potencia elétrica e densidade de energia eletromagnética.

Cálculo:

Em R^2: Dados dois vetores (não nulos) $\vec{a} = (x_1,y_1)$ e $\vec{b} = (x_2,y_2)$, o produto interno é definido por:

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2}$$

Em R^3: Dados dois vetores (não nulos) $\vec{a} = (x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{b} = (x_2,y_2,z_2)$, o **produto interno** é definido por:

$$\boxed{\vec{a} \circ \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}$$

Obs.: o resultado do produto interno ou escalar entre dois vetores será sempre um número real.

Exemplo: determinar o produto interno dos vetores: A) u=(2,3,-1) e v=(2,4,4). B) u=(-1,2) e v=(4,3).

6.2 Produto Vetorial ou Produto Externo

Dados dois vetores (não nulos) $\vec{a} = (x_1,y_1,z_1)$ e $\vec{b} = (x_2,y_2,z_2)$, o **produto vetorial** é definido por: $\vec{a}x\vec{b}$

Cálculo :

$$\vec{a}x\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \text{vetor ortogonal aos vetores dados}$$

Obs.: A resposta do produto vetorial é um vetor ortogonal aos vetores dados
Atenção!!! só é calculado para vetores no espaço

Exemplo: determinar o produto interno dos vetores: u=(3,4,0) e v=(1,5,0). Graficar

Professora : Simone Leal Schwertl

6.3 Produto Misto

Dados 3 vetores (não nulos) $\vec{a}$ = (x_1,y_1,z_1) , $\vec{b}$ = (x_2,y_2,z_2) e $\vec{c}$ = (x_3,y_3,z_3), o **<u>produto misto</u>** é definido por: $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ ou $\vec{a} \circ \left(\vec{b} x \vec{c}\right)$

Cálculo :

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \text{número}$$

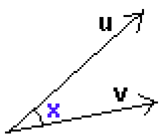
Obs1.: A resposta do <u>produto misto</u> é um número
Atenção!!! só é calculado para vetores no espaço
Obs2.: Quando o **produto misto é igual a zero** os vetores **são coplanares** ou seja estão no mesmo plano.

Exemplo: determinar o produto interno dos vetores: u=(3,4,0) , v=(1,5,0) e w=(1,2,4).

7.5 Ângulo entre dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$:

$$\cos(x) = \frac{u.v}{|u||v|} \quad , \quad 0 \leq x \leq \pi$$

onde x é o ângulo formado entre u e v.



Exemplo: Determine o ângulo entre u = (1, 3) e v = (- 2, 4). Graficar

$$\cos(x) = \frac{u.v}{|u|.|v|} =$$

IMPORTANTE !!! podemos escrever : **u.v = |u| |v| cos(x),** logo o produto interno "u.v" será zero apenas quando cos(x) for zero e isso acontecerá quando x = 90º, pois "x" deve estar entre 0º e 180º . Assim quando o produto interno "u.v" é nulo dizemos que os vetores são ortogonais, ou seja, o ângulo entre eles é 90º.

Exemplo: calcular: i.j = (1,0,0).(0,1,0)=