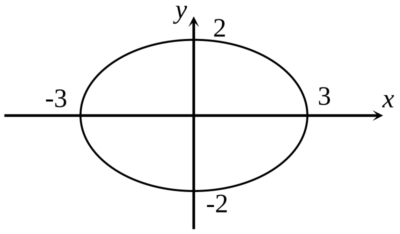
SUPERFÍCIES

1. INTRODUÇÃO

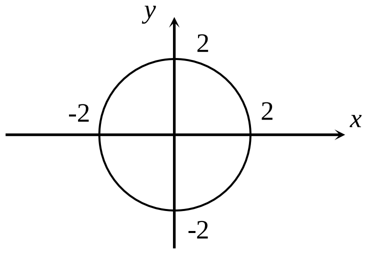
A equação geral do 2º grau, nas três variáveis x e y: $ax^2 + by^2 + 2cx + 2dy + ex + fy + g = 0$, onde pelo menos um dos coeficientes a, b, c e d é diferente de zero, representa uma curva em $\Re^2$.

Exemplo:

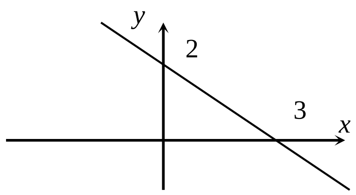
1) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1$ pode ser escrita como $9x^2 + 4y^2 - 36 = 0$ e representa uma *elipse*.



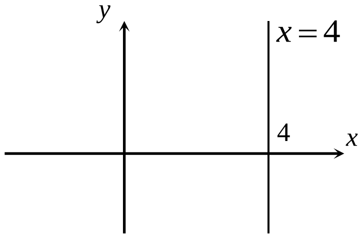
2) $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ ou $x^2 + y^2 = 4$ representa uma *circunferência* de raio 2.



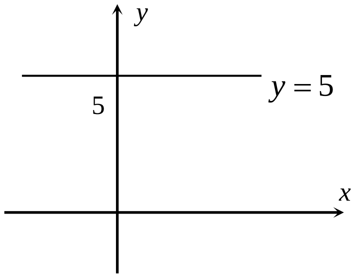
3) $4x + 6y - 12 = 0$ ou $y = \dfrac{12 - 4x}{6}$, representa uma reta.



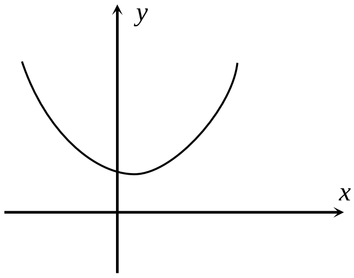
4) $x = 4$ ou $x - 4 = 0$ representa uma reta paralela ao eixo y.



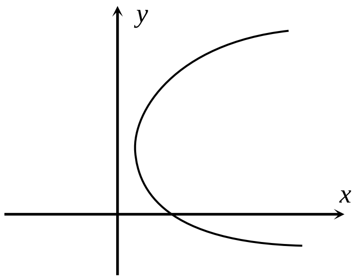
5) $y = 5$ ou $y - 5 = 0$ representa uma reta paralela ao eixo x.



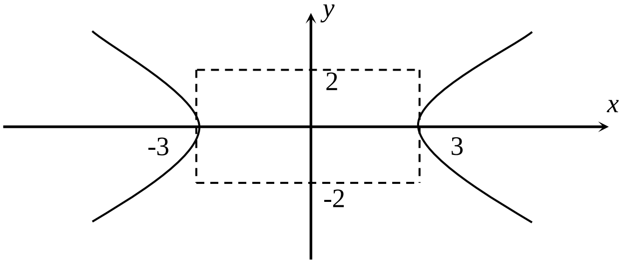
6) $y = ax^2 + by + c$ temos uma parábola em torno do eixo *y*.



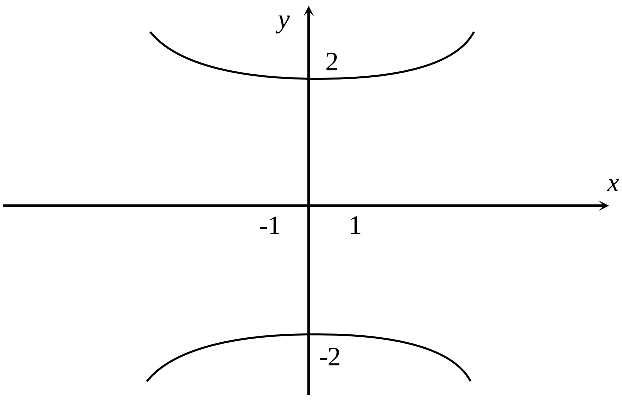
7) $x = ay^2 + by + c$ temos uma parábola em torno do eixo *x*.



8) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ ou $4x^2 - 9y^2 - 36 = 0$ representa uma hipérbole em torno do eixo *y*.



9) $\dfrac{y^2}{4} - \dfrac{x^2}{1} = 1$ ou $y^2 - 4x^2 - 4 = 0$ representa uma hipérbole em torno do eixo *x*.



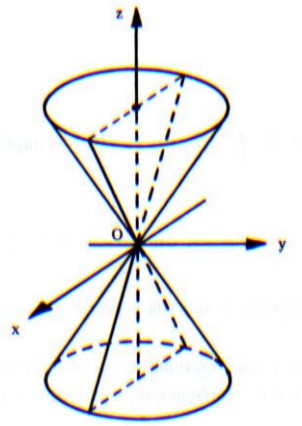
No entanto, o nosso objetivo é estudar as superfícies que são representadas no espaço, $\Re^3$.

A equação geral do 2º grau nas três variáveis *x*, *y* e *z*:
$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0$, onde pelo menos um dos coeficientes *a, b, c, d, e* ou *f* é diferente de zero, representa uma superfície no espaço $\Re^3$.

1. SUPERFÍCIES CÔNICAS

Superfície Cônica é uma superfície gerada por uma **reta** que se move apoiada numa **curva plana qualquer** e passando sempre **por um ponto** dado não situado no plano desta curva.

A ***reta é denominada geratriz***, a *curva plana é a diretriz* e o ponto fixo dado é o *vértice* da superfície cônica.



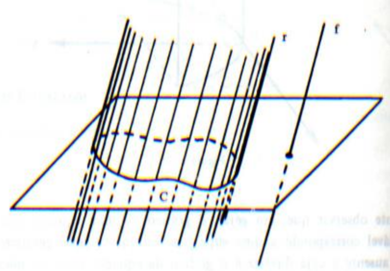
Consideremos o caso particular da superfície cônica cuja diretriz é uma elipse (ou circunferência) com o vértice na origem do sistema e com seu eixo sendo um dos eixos coordenados.

Nestas condições, a superfície cônica cujo eixo é o eixo dos *z* (figura ao lado) tem equação $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

2. SUPERFÍCIES CILÍNDRICAS

Seja *C* uma curva plana e *f* uma reta fixa não contida nesse plano.

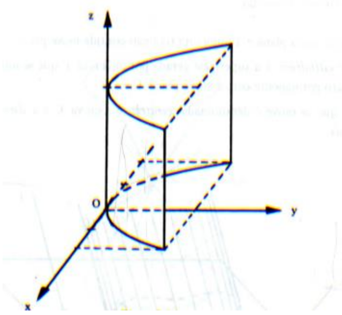
Superfície Cilíndrica é a superfície gerada por uma **reta *r* que** se move paralelamente à reta fixa *f* em contato permanente com **a curva plana *C*.**



A **reta *r*** que se move é denominada ***geratriz*** e a *curva C é a diretriz* da superfície cilíndrica (figura ao lado).

Em nosso estudo consideramos apenas superfícies cilíndricas cuja diretriz é uma curva que se encontra num dos planos coordenados e a geratriz é uma reta paralela ao eixo coordenado não contido no plano. Neste caso, a equação da superfície cilíndrica é a mesma de sua diretriz.

Por exemplo, se a diretriz for a parábola $x^2=2y$, a equação da superfície cilíndrica também será $x^2=2y$ (figura ao lado).



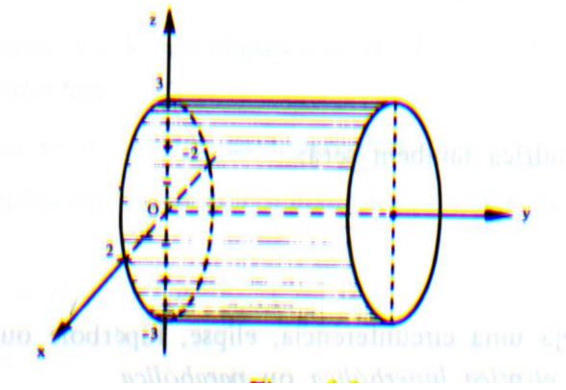
Conforme a ***diretriz seja uma circunferência***, elipse, hipérbole ou parábola, a superfície cilíndrica é chamada *circular*, *elíptica*, *hiperbólica* ou *parabólica.*

É importante observar que, em geral, o gráfico de uma equação que não contém uma determinada variável corresponde a uma superfície cilíndrica cujas geratrizes são paralelas ao eixo da variável ausente e cuja diretriz é o gráfico da equação dada no plano correspondente.

Por exemplo a equação

$$\frac{x^2}{4}+\frac{z^2}{9}=1$$

representa uma superfície cilíndrica ***com geratrizes paralelas ao eixo dos y***, sendo a diretriz uma elipse no plano xOz. (figura abaixo).



3. SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

Eliminando os termos *xy*, *xz* e *yz* por meio de uma rotação e ou através de uma translação a equação geral do 2º grau,

$$ax^2 + by^2 + cz^2 + 2dxy + 2exz + 2fyz + mx + ny + pz + q = 0 \quad \textbf{(1)},$$

esta pode ser transformada na forma ... $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = D$ **(2)**, que representará as superfícies quádricas centradas, ou

$$\textbf{(3)} \begin{cases} Ax^2 + By^2 + Rz = 0 \\ Ax^2 + Cz^2 + Ry = 0 \\ By^2 + Cz^2 + Rx = 0 \end{cases}$$

que representarão as quádricas não centradas.

A equação geral do 2º grau nas três variáveis x, y e z:

3.1. SUPERFÍCIES QUÁDRICAS CENTRADAS

Se nenhum dos coeficientes da equação **(2)** for nulo, ela pode ser escrita sob uma das formas:

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \textbf{(4)}$$

denominadas, qualquer delas, *forma canônica* ou *padrão* de uma superfície quádrica centrada.

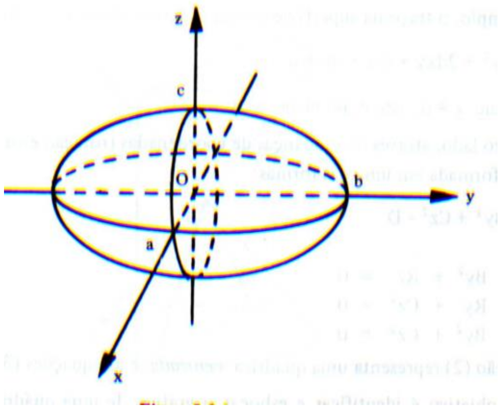
As possíveis combinações de sinais nesta equação permitem concluir a existência de apenas três tipos de superfícies, conforme sejam *três, dois* ou *um* o número de coeficientes positivos dos termos do 1º membro da equação. Se os referidos coeficientes forem todos negativos, não existe lugar geométrico.

3.1.1. ELIPSÓIDE

O *Elipsóide* é a superfície representada pela equação

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \textbf{(5)}$$

em que todos os coeficientes dos termos do 1º membro da equação **(4)** são positivos, onde *a*, *b* e *c* são reais positivos e representam as medidas dos semi-eixos do elipsóide. (Figura abaixo)

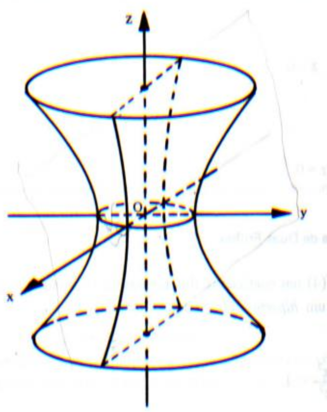


3.1.2. HIPERBOLÓIDE DE UMA FOLHA

Se na equação **(4)** dois coeficientes dos termos do 1º membro são positivos e um é negativo, a equação representa um *hiperbolóide de uma folha.*

A equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \mathbf{(6)}$$



é uma forma canônica da equação do hiperbolóide de uma folha ao longo do eixo dos *z* (figura ao lado). As outras duas formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{e} \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

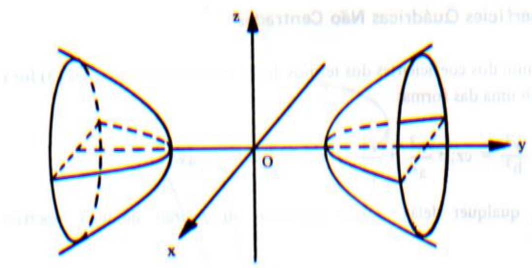
e representam hiperbolóides de uma folha ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.

3.1.3. HIPERBOLÓIDE DE DUAS FOLHAS

Se na equação **(4)** um coeficiente dos termos do 1º membro é positivo e dois são negativos, a equação representa um *hiperbolóide de duas folhas.*

A equação

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \mathbf{(7)}$$



é uma forma canônica da equação do hiperbolóide de duas folhas ao longo do eixo dos *y* (figura ao lado). As outras duas formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{e} \qquad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

e representam hiperbolóides de duas folhas ao longo dos eixos Ox e Oz, respectivamente.

3.2. SUPERFÍCIES QUÁDRICAS NÃO CENTRADAS

Se nenhum dos coeficientes dos termos do 1º membro das equações **(3)** for nulo, elas podem ser escritas sob uma das formas:

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=cz; \qquad \pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=by; \qquad \pm\frac{y^2}{b^2}\pm\frac{z^2}{c^2}=ax \qquad \textbf{(8)}$$

denominadas, qualquer delas, *forma canônica* ou *padrão* de uma superfície quádrica não centrada.

As possíveis combinações de sinais nesta equação permitem concluir a existência de apenas dois tipos de superfícies, conforme os coeficientes dos termos de segundo grau tenham o mesmo sinal ou sinais contrários.

3.2.1. PARÁBOLÓIDE ELÍPTICO

Se nas equações **(8)** os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais iguais, a equação representa um *parabolóide elíptico*.

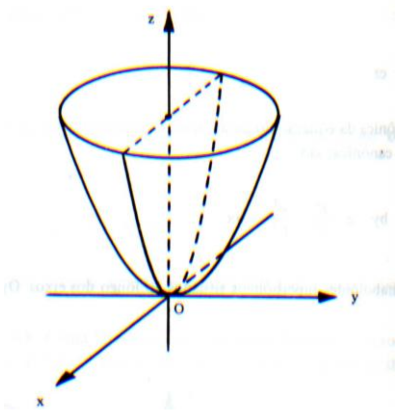
A equação

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz \quad \textbf{(9)}$$

é uma forma canônica da equação do parabolóide elíptico ao longo do eixo dos z (figura ao lado). As outras duas formas canônicas são:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=by \quad \text{e} \quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=ax$$

e representam parabolóides elípticos ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.



3.2.2. PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO

Se nas equações **(8)** os coeficientes dos termos de segundo grau tiverem sinais contrários, a equação representa um *parabolóide hiperbólico.*

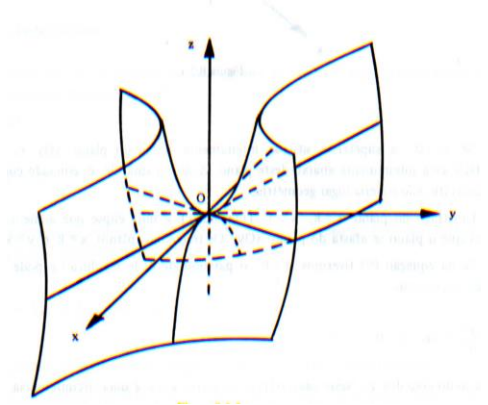
A equação

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=cz \quad \textbf{(10)}$$

é uma forma canônica da equação do parabolóide hiperbólico ao longo do eixo dos z (figura ao lado. As outras formas canônicas são:

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{a^2}=by \quad \text{e} \quad \frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=ax$$

e representam parabolóides hiperbólicos situados ao longo dos eixos Oy e Ox, respectivamente.



Obs.: Para graficar as quádricas centradas e não centradas faremos um estudo de seus traços.

O traço de uma superfície é a curva obtida da intersecção de uma superfície com um dos planos coordenados. Logo, as superfícies quádricas terão 3 traços:

- **traço no plano xy ou z = 0**
- **traço no plano xz ou y = 0**
- **traço no plano yz ou z = 0**

EXERCÍCIOS:

1) Identificar a superfície e fazer a sua representação gráfica.

$a)$ $x^2 + y^2 = 9$

$b)$ $x^2 = 4y$

$c)$ $x = 4$

$d)$ $2x + 3y - 6 = 0$

$e)$ $y = 6$

$f)$ $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

$g)$ $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{16} = 1$

$h)$ $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

$i)$ $4x + 2y + 3z - 12 = 0$

$j)$ $y^2 - x^2 + z^2 = 0$

$l)$ $4x^2 + 9y^2 - z = 0$

$m)$ $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{4} = 1$

$n)$ $\dfrac{y^2}{4} + x^2 - \dfrac{z^2}{9} = 1$

2) Identificar as quádricas representadas pelas equações e fazer a representação gráfica:

$a)$ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

$b)$ $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$

$c)$ $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$

$d)$ $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$

$e)$ $x^2 + z^2 - 4y = 0$

$f)$ $x^2 + y^2 + 4z = 0$

$g)$ $4x^2 - y^2 = z$

$h)$ $z^2 = x^2 + y^2$

$i)$ $z = x^2 + y^2$

$j)$ $x^2 + y^2 = 9$

$l)$ $y^2 = 4z$

$m)$ $x^2 - 4y^2 = 16$

$n)$ $4y^2 + z^2 - 4x = 0$

$o)$ $-x^2 + 4y^2 + z^2 = 0$

$p)$ $16x^2 + 9y^2 - z^2 = 144$

$q)$ $16x^2 - 9y^2 - z^2 = 144$

$r)$ $2y^2 + 3z^2 - x^2 = 0$

$s)$ $4x^2 + 9y^2 = 36z$

RESPOSTAS

2ª Questão:

a) Superfície esférica
b) Elipsóide
c) Hiperbolóide de uma folha
d) Hiperbolóide de duas folhas
e) Parabolóide circular
f) Parabolóide circular
g) Parabolóide hiperbólico
h) Superfície cônica circular
i) Parabolóide circular
j) Superfície cilíndrica circular
l) Superfície cilíndrica parabólica
m) Superfície cilíndrica hiperbólica
n) Parabolóide Elíptico
o) Superfície cônica elíptica
p) Hiperbolóide de uma folha
q) Hiperbolóide de duas folhas
r) Superfície cônica elíptica
s) Parabolóide elíptico