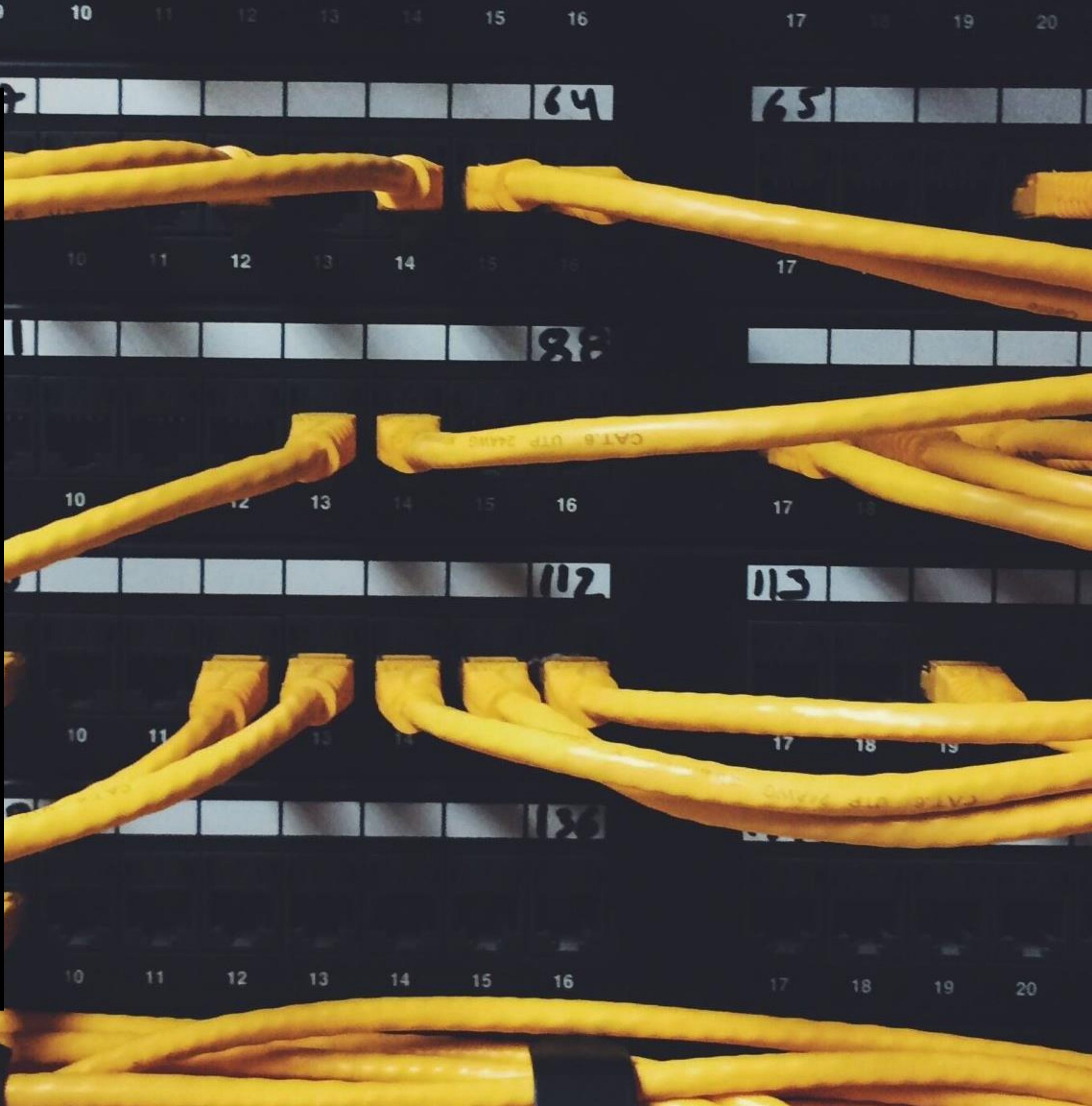
LÓGICA PROPOSICIONAL

<dedução formal – regras de inferência>

PROF. JONATHAN GIL MÜLLER



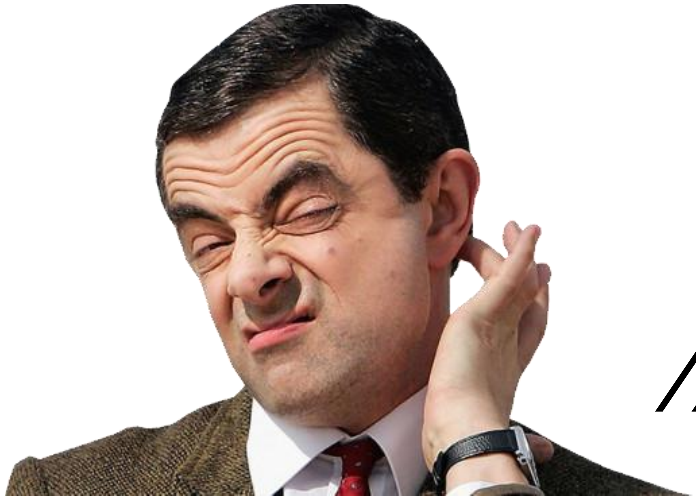
Lógica Proposicional: **DEDUÇÃO FORMAL**

Neste tópico, discutiremos uma parte importante da lógica, a **dedução formal**, ou seja, uma maneira de **deduzir novas informações** a partir de informações dadas. Esse processo, na lógica, é denominado de **inferência**.

Mas o que significa a palavra inferência?

ou

O que significa fazer uma inferência?



FURB

Lógica Proposicional: **DEDUÇÃO FORMAL**

No dicionário encontramos as seguintes definições:

1. ação ou efeito de inferir; **conclusão**, indução.

2. (LÓGICA) operação intelectual por meio da qual se **afirma a verdade de uma proposição** em decorrência de sua ligação com outras já reconhecidas como verdadeiras.

Lógica Proposicional: **DEDUÇÃO FORMAL**

Sendo assim, em lógica podemos dizer que **inferência** se refere ao **processo** onde, a partir de um conjunto de fórmulas (premissas), conseguimos afirmar outra fórmula (conclusão), de modo que, se a primeira for verdadeira a segunda (inferência) também será.

α_1
α_2
$\vdots$
α_n

CONJUNTO FÓRMULAS (PREMISSAS)

INFERÊNCIA

NOVA FÓRMULA (CONCLUSÃO) $\to \beta$

TAUTOLÓGICA

$(\alpha_1 \wedge \alpha_2 \dots \wedge \alpha_n) \to \beta$

Regras que permitem a obtenção de conclusão e, consequentemente, fórmula tautológica

Lógica Proposicional: **DEDUÇÃO FORMAL**

Nesse contexto, são as **regras de inferência** que nos permitem fazer essa passagem entre proposições (fórmulas). Estas, expressam as **relações fundamentais entre os operadores lógicos** do alfabeto utilizado.

"guia" p/ o raciocínio lógico.

- **REGRAS DE INFERÊNCIA:** permitem a dedução de novas fórmulas (conclusão) a partir de fórmulas anteriores (premissas).

Em outras palavras, uma regra de inferência permite deduzir novas informações, **formalizando a forma humana de "tirar conclusões"** e evitando o trabalho tedioso e mecânico das tabelas verdades e do método da refutação.

FURB

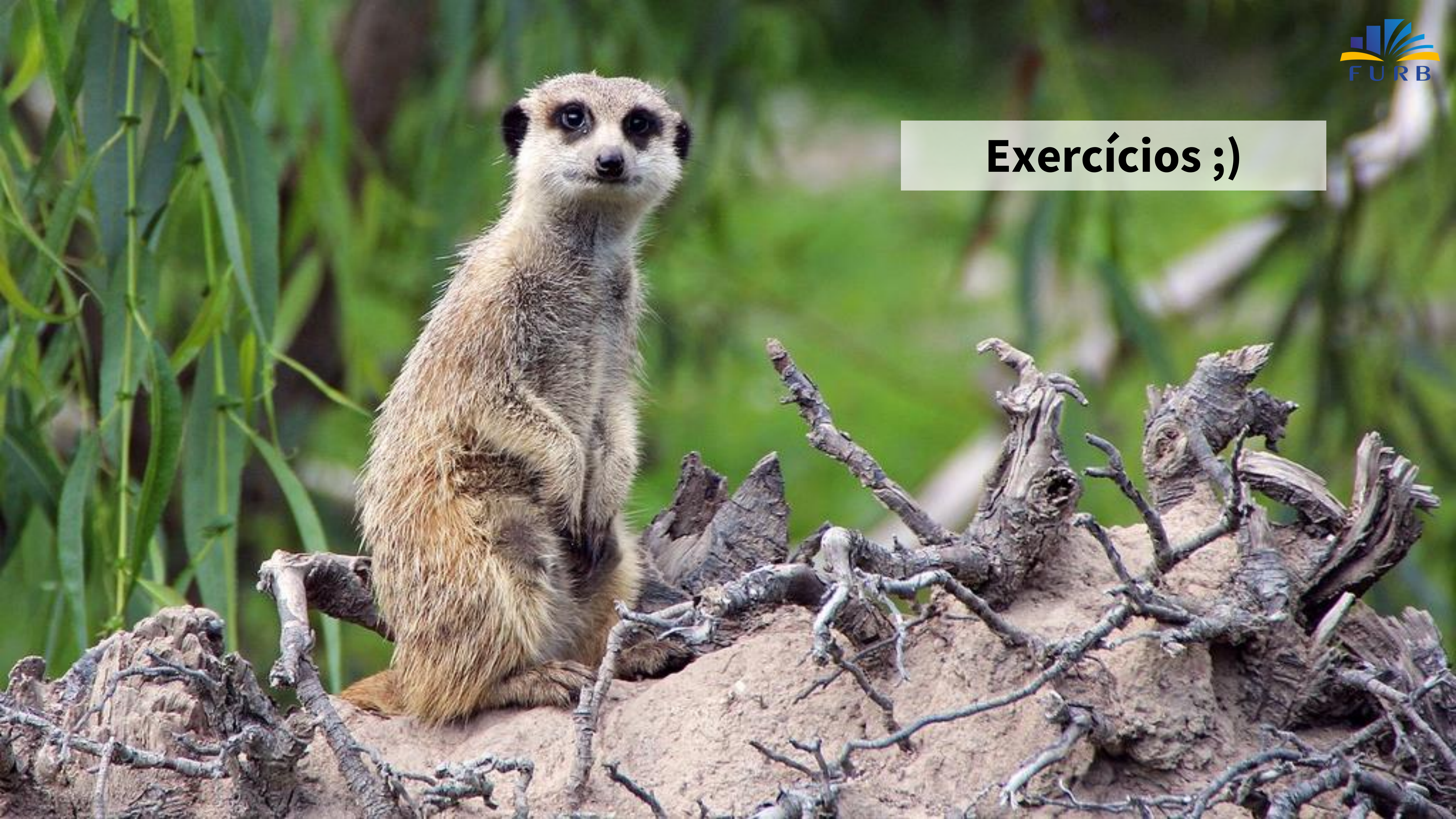
Lógica Proposicional: **DEDUÇÃO FORMAL**

Parte-se da suposição que as **premissas são verdadeiras** e tenta-se aplicar as **regras** de maneira a obter a **conclusão** (também verdadeira). Caso a conclusão possa ser deduzida a partir das premissas, **prova-se** que as premissas (α) implicam na conclusão (β).

Portanto, <u>α implica logicamente em β</u> ($\alpha \vDash \beta$) se e somente se β é verdadeira quando α for verdadeira, isto é, $\alpha \rightarrow \beta$ é uma tautologia.

As regras de inferência não permitem substituição em qualquer direção.

FURB



Exercícios ;)

1. Sejam α e β as fórmulas abaixo. α implica logicamente em β? Justifique a sua resposta.

	α	β
a)	$P \vee Q$	P
b)	$P \wedge \neg Q$	P
c)	$P \vee \neg Q$	Q
d)	$(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)$	$P \rightarrow R$
e)	$(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q$	$\neg P$

2. Considere as fórmulas α_1, α_2 e α_3 formadas pelos símbolos proposicionais P e Q, que possuem a tabela verdade abaixo:

P	Q	α_1	α_2	α_3
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	F
F	F	F	V	V

Considerando a tabela verdade anterior, assinale V (verdadeiro) ou F (falso) - <u>exemplos:</u>

( ) α_1 implica em α_3
( ) α_3 implica em α_2
( ) α_1 é equivalente a α_3
( ) α_3 é equivalente a $P \vee \neg Q$
( ) se $I[Q] = F$, então $I[\alpha_1] = F$

Assinale V (verdadeiro) ou F (falso):

( ) α_1 implica em α_2
( ) α_2 implica em α_3
( ) α_3 implica em α_1
( ) α_1 é equivalente a α_2
( ) α_1 é equivalente a $P \wedge Q$
( ) α_2 é equivalente a $\neg Q$
( ) α_3 é equivalente a $P \rightarrow Q$
( ) $\alpha_1 \leftrightarrow \alpha_2$ é satisfatível
( ) $\neg(\alpha_1 \rightarrow \alpha_3)$ é contraditória
( ) se $I[\alpha_2] = F$, então $I[Q] = F$

Lógica Proposicional: **DEDUÇÃO FORMAL**

Para que todos os nossos argumentos lógicos válidos (fórmulas) possam ser provados precisamos de um conjunto de regras de inferência que sejam suficientes para isso.

Considerando os cinco operadores lógicos do nosso alfabeto ($\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \neg$) precisamos de pelo menos **duas regras** para cada um deles (uma **regra de introdução** e uma **regra de eliminação**) para possibilitar a **manipulação de qualquer fórmula lógica**, inserindo e eliminando o respectivo operador.

FURB

Lógica Proposicional: **DEDUÇÃO FORMAL**

Esquematicamente, tem-se:

>> seja β a conclusão e Γ um conjunto de premissas (**P_1**, **P_2** ... **P_n**);

>>uma prova de β a partir de Γ é uma sequência de fórmulas β_1 **,** β_2, ..., β_m onde:

- $\beta = \beta_m$, e
- β_i

  é uma premissa (**P_1**, **P_2** ... **P_n**)

  é uma fórmula deduzida por uma regra de inferência

>> se existe uma prova para β a partir de Γ, então β é consequência lógica de Γ.

Uma **prova** permite verificar, usando apenas as regras de inferência, se as premissas implicam na conclusão sem a necessidade de recorrer a todas as interpretações.

FURB

Lógica Proposicional: **DEDUÇÃO FORMAL**

Esquematicamente, tem-se:

seja β a conclusão e Γ um conjunto de premissas (**P_1, P_2 ... P_n**);

1.	P1	(premissa 1)
2.	P2	(premissa 2)
...		
n.	Pn	(premissa n)
n+1	β_1	(é uma fórmula deduzida por uma regra de inferência)
n+2	β_2	(é uma fórmula deduzida por uma regra de inferência)
...		
n+m	β_m	(é uma fórmula deduzida por uma regra de inferência)
	β	(Conclusão)

FURB

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

Existem duas regras de inferência para cada um dos cinco operadores lógicos:

1. Regras de Eliminação (E)
2. Regras de Introdução (I)

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE ELIMINAÇÃO ($\rightarrow$)

- **Modus Ponens (Implicação $\rightarrow$)**
  - De uma implicação e seu antecedente, podemos inferir o seu consequente.
  - Isto é, se exclui o antecedente!

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \qquad \alpha}{\beta}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

1. Se chove, então a rua fica molhada. (P)
2. Chove. (P)
3. Então, a rua fica molhada. (C)

1.	$P \rightarrow Q$
2.	P
3.	Q

FURB

[Nolt e Rohatyn (1991)]

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE ELIMINAÇÃO ($\rightarrow$)

- **Modus Tollens (Implicação $\rightarrow$)**
  - De uma implicação e a negação do seu consequente, podemos inferir na negação do seu antecedente.
  - Isto é, se exclui o consequente e se nega o antecedente.

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \qquad \neg\beta}{\neg\alpha}$$

1. Se chove, então a rua fica molhada. (P)
2. A rua não está molhada. (P)
3. Portanto, não choveu. (C)

1.	$P \rightarrow Q$
2.	$\neg Q$
3.	$\neg P$

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE ELIMINAÇÃO ($\rightarrow$)

- **Silogismo Hipotético (Implicação $\rightarrow$)**
  - Se α implica em β, e β implica em γ, então o α implica em γ.
  - Isto é, exclui o consequente do primeiro e o antecedente do segundo e se cria uma nova fórmula!

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

1. Se chove, então a rua fica molhada. (P)
2. Se a rua estiver molhada, então eu escorrego. (P)
3. Portanto, se chove então eu escorrego. (C)

1.	$P \rightarrow Q$
2.	$Q \rightarrow R$
3.	$P \rightarrow R$

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE INTRODUÇÃO ($\rightarrow$)

- **Condicionalização (Implicação $\rightarrow$)**
  - Se α for uma premissa, então podemos concluir que β implica em α.
  - Isto é, insere-se a implicação a partir de uma premissa.

$$\frac{\alpha \quad .}{\beta \rightarrow \alpha}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

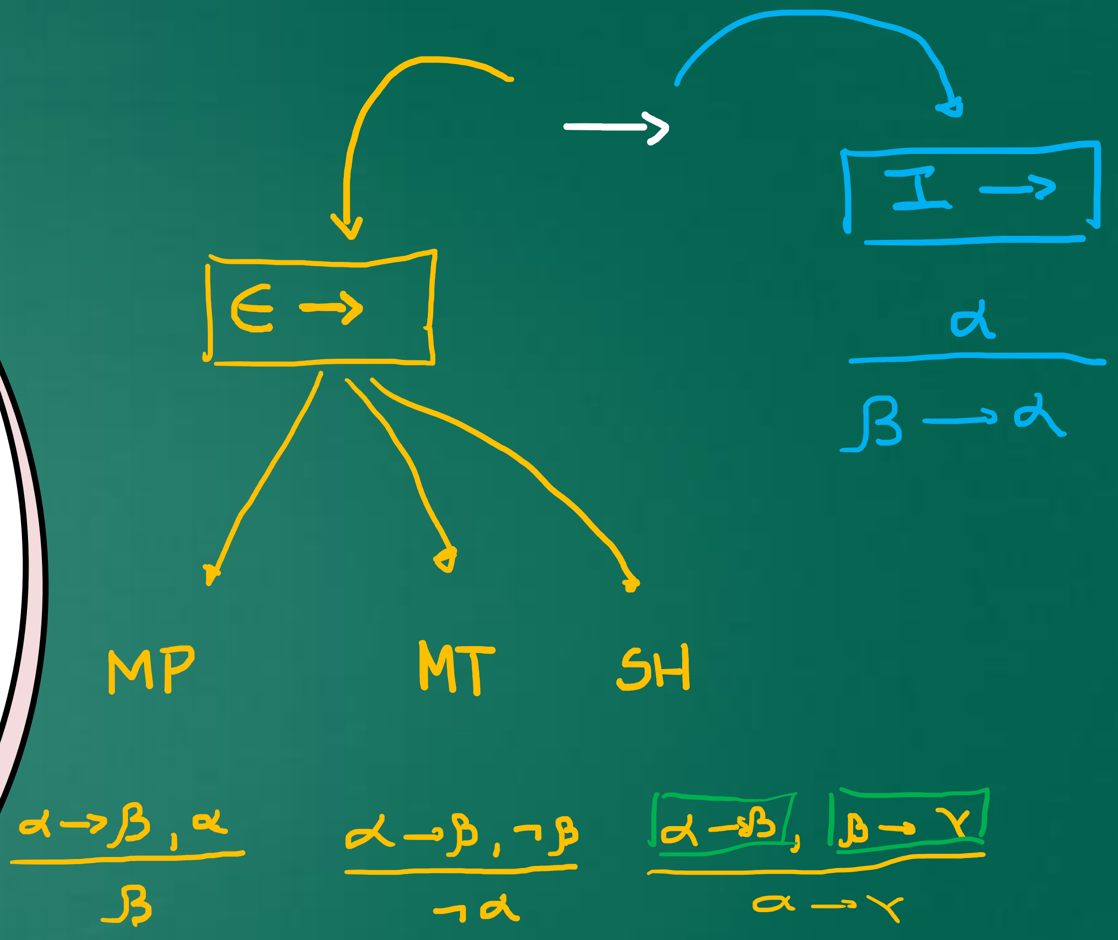
β	$\rightarrow$	α
V	V	V
~~V~~	~~F~~	~~F~~
F	V	V
~~F~~	~~V~~	~~F~~

1. Eu estou contente. (P)
2. Se hoje é feriado, então eu estou contente. (C)

1.	P
2.	$Q \rightarrow P$

QUE TAL UM RESUMO DAS REGRAS DE INFERÊNCIA ESTUDADAS ATÉ AQUI!

;)



FURB

Exercício 1 da lista 04!

1ª Questão: Preencha a terceira coluna das seguintes provas, identificando cada uma das fórmulas ou como foram obtidas.

a) $P \to \neg Q, P$ conclusão: $\neg Q$

1.	$P \to \neg Q$	Premisso
2.	P	Premisso
3.	$\neg Q$	$E\to$ (MP, 1, 2)

b) $(Q \vee S) \to P, \neg P$ conclusão: $\neg(Q \vee S)$

1.	$(Q \vee S) \to P$	Premisso
2.	$\neg P$	Premisso
3.	$\neg(Q \vee S)$	$E\to$ (MT, 1, 2)

c) $P \to Q, Q \to R$ conclusão: $P \to R$

1.	$P \to Q$	
2.	$Q \to R$	
3.	$P \to R$	

d) $\neg P \land Q, (\neg P \land Q) \to (R \lor \neg P)$

conclusão: $R \lor \neg P$

1.	$\neg P \land Q$	
2.	$(\neg P \land Q) \to (R \lor \neg P)$	
3.	$R \lor \neg P$	

e) $P \to Q, R \to P, R$ conclusão: Q

1.	$P \to Q$	
2.	$R \to P$	
3.	R	
4.	P	
5.	Q	

f) $P \to Q, R \to P, R$ conclusão: Q

1.	$P \to Q$	
2.	$R \to P$	
3.	R	
4.	$R \to Q$	
5.	Q	

g) $P \to (Q \to R)$, P, $\neg R$ conclusão: $\neg Q$

1.	$P \to (Q \to R)$	Premisso
2.	P	Premisso
3.	$\neg R$	Premisso
4.	$Q \to R$	E→ (MP, 1, 2)
5.	$\neg Q$	E→ (MT, 4, 3)

h) $P \to Q$, $Q \to R$, $R \to S$, P conclusão: S

1.	$P \to Q$	Premisso
2.	$Q \to R$	
3.	$R \to S$	
4.	P	
5.	$P \to R$	E→ (SH, 1, 2)
6.	$P \to S$	E→ (SH, 5, 3)
7.	S	E→ (MP, 6, 4)

i) $P \to S$, $\neg P \to R$, $S \to T$, $\neg T$ conclusão: R

1.	$P \to S$	
2.	$\neg P \to R$	
3.	$S \to T$	
4.	$\neg T$	
5.	$P \to T$	
6.	$\neg P$	
7.	R	


Exercícios 2 (a-e)
da lista 04!

2ª Questão: Prove a validade dos argumentos abaixo usando regras de inferência.

a) $P \rightarrow (Q \wedge R), P$ conclusão: $Q \wedge R$

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

b) $\neg P \rightarrow (Q \rightarrow R), \neg P, Q$ conclusão: R

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

c) $P \rightarrow (P \rightarrow Q), P$ <u>conclusão:</u> Q

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

d) $P \rightarrow (Q \rightarrow R), P \rightarrow Q, P$ <u>conclusão:</u> R

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

e) $P \rightarrow \neg Q, S \rightarrow Q, P$ conclusão: $\neg S$

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE ELIMINAÇÃO (∧)

- **Eliminação da Conjunção (E ∧)**
  - De uma conjunção podemos inferir qualquer um dos seus conjuntos.

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha} \qquad \frac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

1. Está chovendo e relampejando. (P)
2. Portanto, está chovendo. (C)
2. Portanto, está relampejando. (C)

1.	P ∧ Q
2.	P
2.	Q

[Nolt e Rohatyn (1991)]

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE INTRODUÇÃO (∧)

- **Introdução da Conjunção (I ∧)**
  - De quaisquer fórmulas α e β, podemos inferir a conjunção $\alpha \wedge \beta$.

$$\frac{\alpha \quad \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

1. Está chovendo. (P)
2. Está relampejando. (P)
3. Portanto, está chovendo e relampejando. (C)

1.	P
2.	Q
3.	P ∧ Q

FURB

[Nolt e Rohatyn (1991)]

QUE TAL UM RESUMO DAS REGRAS DE INFERÊNCIA ESTUDADAS ATÉ AQUI! ;)

Eliminação ($E\to$) $\to$ Introdução ($I\to$)

MP

$$\frac{\alpha\to\beta,\ \alpha}{\beta}$$

MT

$$\frac{\alpha\to\beta,\ \neg\beta}{\neg\alpha}$$

SH

$$\frac{\alpha\to\beta,\ \beta\to\gamma}{\alpha\to\gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\beta\to\alpha}$$

($E\wedge$) $\wedge$ $I\wedge$

$$\frac{\alpha\wedge\beta}{\alpha \text{ ou } \beta}$$

$$\frac{\alpha,\ \beta}{\alpha\wedge\beta}$$

FURB

Exercícios 2 (f-h)
da lista 04!

2ª Questão: Prove a validade dos argumentos abaixo usando regras de inferência.

f) $P \wedge Q, R$ conclusão: $Q \wedge R$

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

g) $(P \wedge Q) \wedge R, S \wedge T$ conclusão: $Q \wedge S$

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

h) $P \rightarrow (Q \wedge R), P$ <u>conclusão:</u> $Q \wedge P$

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE ELIMINAÇÃO ($\vee$)

α	$\rightarrow$	γ
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F

- **Eliminação da Disjunção (E $\vee$) – 3 regras**

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \neg\alpha}{\beta} \qquad\qquad \frac{\alpha \vee \beta \qquad \neg\beta}{\alpha}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

$$\frac{\alpha \vee \beta \qquad \alpha \rightarrow \gamma \qquad \beta \rightarrow \gamma}{\gamma}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

1. Hoje é sábado ou domingo. (P)
2. Se hoje é sábado, então é fim de semana. (P)
3. Se hoje é domingo, então é fim de semana. (P)
4. Portanto hoje é um fim de semana. (C)

1.	S v D
2.	$S \rightarrow F$
3.	$D \rightarrow F$
4.	F

[Nolt e Rohatyn (1991)]

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE INTRODUÇÃO (∨)

- **Introdução da Disjunção (I ∨)**
  - De uma fórmula, podemos inferir a disjunção destas fórmula com qualquer outra fórmula.

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta}. \qquad \frac{\beta}{\alpha \vee \beta}.$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

1. O céu é azul. (P)
2. O céu é azul ou a terra é quadrada. (C)

1.	C
2.	C ∨ T

[Nolt e Rohatyn (1991)]

QUE TAL UM RESUMO DAS REGRAS DE INFERÊNCIA ESTUDADAS ATÉ AQUI!

;)

FURB

$E\rightarrow$

$\rightarrow$

$I\rightarrow$

MP

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \alpha}{\beta}$$

MT

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \neg \beta}{\neg \alpha}$$

SH

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha}$$

$E\wedge$

$\wedge$

$I\wedge$

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha \text{ ou } \beta}$$

$$\frac{\alpha,\ \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

$E\vee$

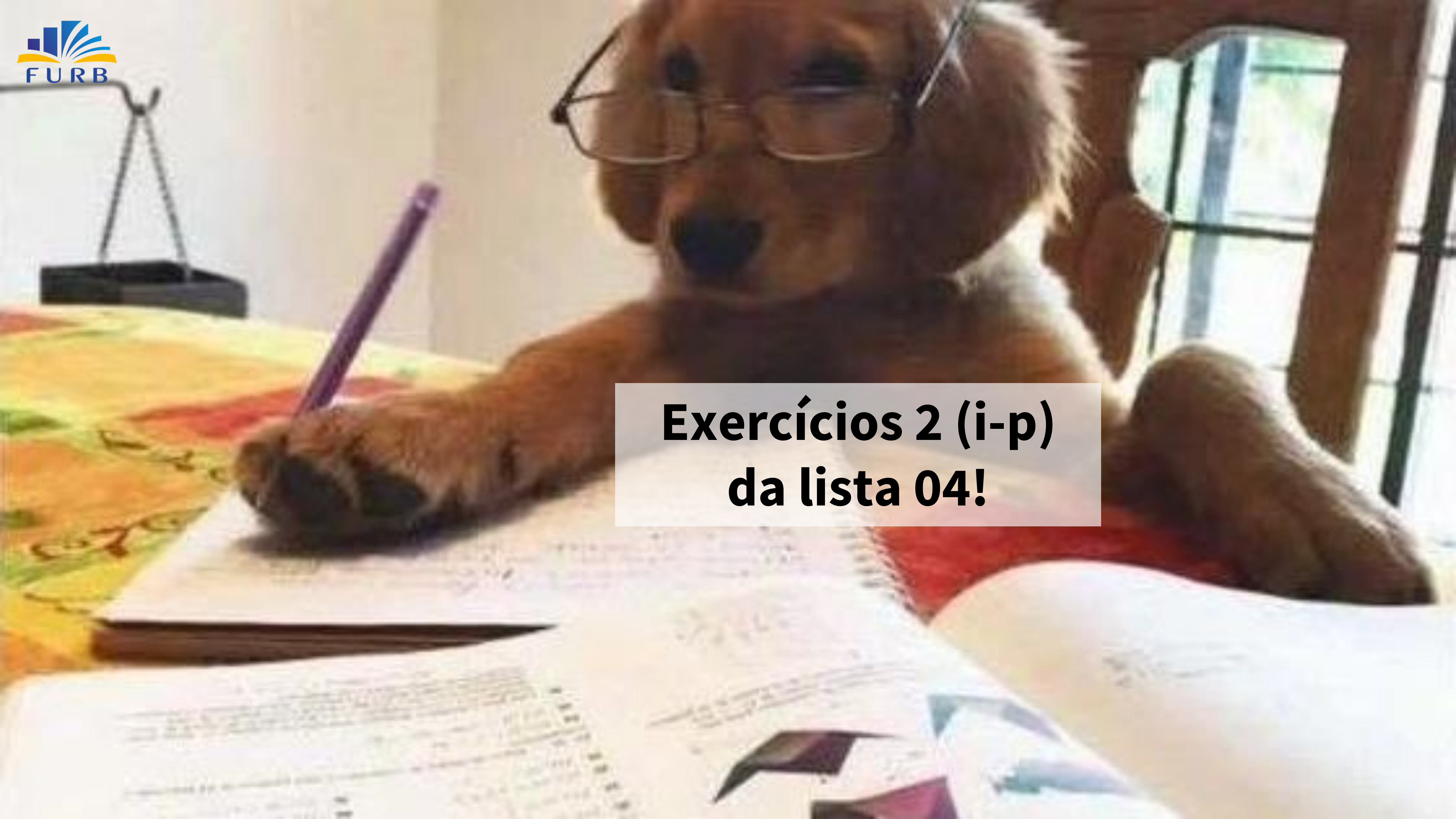
$\vee$

$I\vee$

$$\frac{\alpha \vee \beta,\ \neg \alpha}{\beta},\quad \frac{\alpha \vee \beta,\ \neg \beta}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha \vee \beta,\ \alpha \rightarrow \gamma,\ \beta \rightarrow \gamma}{\gamma}$$

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta},\quad \frac{\beta}{\beta \vee \alpha}$$



Exercícios 2 (i-p) da lista 04!

2ª Questão: Prove a validade dos argumentos abaixo usando regras de inferência.

i) $P \wedge Q$ conclusão: $P \vee R$

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

j) $P \vee Q, \neg Q$ conclusão: P

k) $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q), \neg P$ conclusão: Q

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

l) $(P \vee Q) \wedge (R \vee S), \neg R$ conclusão: S

m) $(P \vee Q) \rightarrow (R \wedge (S \wedge T)), Q$ conclusão: $R \wedge T$

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA
1.		

n) $P \rightarrow Q, P \wedge R$ conclusão: Q

o) $T \vee Q,\ T \to L,\ Q \to L$ conclusão: L

p) $(P \vee Q) \wedge (P \vee R),\ P \to S,\ Q \to S,\ P \to T,\ R \to T$ conclusão: $S \wedge T$

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE ELIMINAÇÃO (¬¬)

- **Eliminação da Negação Dupla (E¬¬)**
  - De uma fórmula com duas negações, podemos inferir a sua afirmação.

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

- 1. Não é o caso que não está chovendo. **OU**
- 1. É falso que não está chovendo.
- 2. Portanto, está chovendo.

1.	$\neg\neg P$
2.	P

[Nolt e Rohatyn (1991)]

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE INTRODUÇÃO ($\neg\neg$)

- **Introdução da Negação Dupla (I$\neg\neg$)**

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

- 1. Está chovendo.
- 2. Não é o caso que não está chovendo. **OU**
- 2. É falso que não está chovendo.

1.	P
2.	$\neg\neg$P

FURB

QUE TAL UM RESUMO DAS REGRAS DE INFERÊNCIA ESTUDADAS ATÉ AQUI! ;)

FURB

$\neg\neg$

E$\neg\neg$

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

I$\neg\neg$

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$$

$\rightarrow$

E$\rightarrow$

MP

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \alpha}{\beta}$$

MT

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \neg\beta}{\neg\alpha}$$

SH

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta,\ \beta \rightarrow \gamma}{\alpha \rightarrow \gamma}$$

I$\rightarrow$

$$\frac{\alpha}{\beta \rightarrow \alpha}$$

$\wedge$

E$\wedge$

$$\frac{\alpha \wedge \beta}{\alpha \text{ ou } \beta}$$

I$\wedge$

$$\frac{\alpha,\ \beta}{\alpha \wedge \beta}$$

$\vee$

E$\vee$

$$\frac{\alpha \vee \beta,\ \neg\alpha}{\beta},\quad \frac{\alpha \vee \beta,\ \neg\beta}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha \vee \beta,\ \alpha \rightarrow \gamma,\ \beta \rightarrow \gamma}{\gamma}$$

I$\vee$

$$\frac{\alpha}{\alpha \vee \beta},\quad \frac{\beta}{\beta \vee \alpha}$$

Exercícios 2 (q-u) da lista 04!

FURB

2ª Questão: Prove a validade dos argumentos abaixo usando regras de inferência.

q) $P \rightarrow \neg\neg Q, \neg\neg P$ conclusão: Q

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

r) $P, \neg\neg(Q \wedge R)$ conclusão: $\neg\neg P \wedge R$

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

s) $(P \wedge Q) \rightarrow (R \wedge S), \neg\neg P, Q$ conclusão: S

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

t) $P \wedge Q, (P \vee R) \rightarrow S$ conclusão: $P \wedge S$

u) $(P \vee \neg Q) \rightarrow R, R \rightarrow S, P$ conclusão: S

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE ELIMINAÇÃO ($\leftrightarrow$)

- **Eliminação da Bi-implicação (E$\leftrightarrow$)**

$$\frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \beta} \qquad \frac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta \rightarrow \alpha}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

1. Estou respirando se e somente se estou vivo.
2. Portanto, se estou respirando então estou vivo.
2. Portanto, se estou vivo então estou respirando.

1.	$P \leftrightarrow Q$
2.	$P \rightarrow Q$
2.	$Q \rightarrow P$

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE INTRODUÇÃO (↔)

- **Introdução da Bi-implicação (I↔)**

$$\frac{\alpha \rightarrow \beta \quad \beta \rightarrow \alpha}{\alpha \leftrightarrow \beta}.$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

1. Se estou respirando então estou vivo.
2. Se estou vivo então estou respirando.
3. Estou respirando se e somente se estou vivo.

1.	$P \rightarrow Q$
2.	$Q \rightarrow P$
3.	$P \leftrightarrow Q$

FURB

QUE TAL UM RESUMO DAS REGRAS DE INFERÊNCIA ESTUDADAS ATÉ AQUI! ;)

$\rightarrow$

$E\rightarrow$

MP

$$\frac{\alpha\rightarrow\beta,\ \alpha}{\beta}$$

MT

$$\frac{\alpha\rightarrow\beta,\ \neg\beta}{\neg\alpha}$$

SH

$$\frac{\alpha\rightarrow\beta,\ \beta\rightarrow\gamma}{\alpha\rightarrow\gamma}$$

$I\rightarrow$

$$\frac{\alpha}{\beta\rightarrow\alpha}$$

$\neg\neg$

$E\neg\neg$

$$\frac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$$

$I\neg\neg$

$$\frac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$$

$\wedge$

$E\wedge$

$$\frac{\alpha\wedge\beta}{\alpha \text{ ou } \beta}$$

$I\wedge$

$$\frac{\alpha,\ \beta}{\alpha\wedge\beta}$$

$\leftrightarrow$

$E\leftrightarrow$

$$\frac{\alpha\leftrightarrow\beta}{\alpha\rightarrow\beta \text{ ou } \beta\rightarrow\alpha}$$

$I\leftrightarrow$

$$\frac{\alpha\rightarrow\beta,\ \beta\rightarrow\alpha}{\alpha\leftrightarrow\beta}$$

$\vee$

$E\vee$

$$\frac{\alpha\vee\beta,\ \neg\alpha}{\beta},\quad \frac{\alpha\vee\beta,\ \neg\beta}{\alpha}$$

$$\frac{\alpha\vee\beta,\ \alpha\rightarrow\gamma,\ \beta\rightarrow\gamma}{\gamma}$$

$I\vee$

$$\frac{\alpha}{\alpha\vee\beta},\quad \frac{\beta}{\beta\vee\alpha}$$

FURB

Exercícios 2 (v) da lista 04!

2ª Questão: Prove a validade dos argumentos abaixo usando regras de inferência.

v) $P \wedge Q,\ P \leftrightarrow \neg S,\ T \rightarrow S$ conclusão: $\neg T$

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

Lógica Proposicional: **DEDUÇÃO FORMAL**

Em uma **prova** usando dedução formal tem-se que:

- "as inferências são realizadas por regras de inferência em que hipóteses [suposições] podem ser introduzidas na prova e que deverão ser descartadas para consolidação da prova;
- para cada conectivo lógico, duas regras de inferência devem ser providas, uma para a inserção do conectivo na prova e outra para a remoção do conectivo" (SILVA; FINGER; MELO, 2006, p. 41-42).

DEDUÇÃO FORMAL : Raciocínio lógico que, a partir das premissas, nos leva a uma conclusão verdadeira

Pautada por:

- Regras de inferência

ou

- Regras de inferência + hipóteses

Negação da conclusão

Quando a conclusão for uma →, podemos supor o antecedente e, a partir dali, deduzir o consequente

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE ELIMINAÇÃO ($_{\text{false}}$)

- **Eliminação do Falso (E$_{\text{false}}$)**

$$\frac{\mathit{false}}{\alpha}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

Falso	$\rightarrow$	Chove.
F	V	V
F	V	F

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE INTRODUÇÃO ($_{\text{false}}$)

- **Introdução do Falso (I_{false})**

Princípio da Não Contradição

$$\frac{\alpha \quad \neg\alpha}{\mathit{false}}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

- 1. Chove e não chove.
- 2. Falso

1.	$P \wedge \neg P$
2.	false

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE ELIMINAÇÃO (¬)

- **Eliminação da Negação (E¬)**

$$\frac{\begin{array}{c}[\neg\alpha] \\ \dots \\ \mathit{false}\end{array}}{\alpha}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

1. Se não chove então falso.
2. Chove.

1.	$\neg P \rightarrow$ False
2.	P

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE INTRODUÇÃO (¬)

- **Introdução da Negação (I¬)**

$$\begin{array}{c} [\alpha] \\ \ldots \\ \underline{\ \textit{false}\ \ .} \\ \neg\alpha \end{array}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

- 1. Se chove então falso.
- 2. Não chove.

1.	$P \rightarrow False$
2.	$\neg P$

QUE TAL UM RESUMO DAS REGRAS DE INFERÊNCIA ESTUDADAS ATÉ AQUI! ;)

Exercícios 3 (a-g) da lista 04!

3ª Questão: Prove a validade dos argumentos abaixo usando regras de inferência.

a) $P \to Q, \neg Q$ <u>conclusão:</u> $\neg P$ (sem usar MT)

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

b) $R \rightarrow F, F \rightarrow \neg R$ conclusão: $\neg R$

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

c) $P \rightarrow S,\ S \rightarrow \neg P,\ \neg S \rightarrow P$ conclusão: S

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

d) $P \vee (Q \rightarrow P), Q$ conclusão: P

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

e) $\neg P \vee \neg Q$ <u>conclusão:</u> $\neg(P \wedge Q)$

f) $P \rightarrow (Q \vee R), \neg Q, \neg R$ <u>conclusão:</u> $\neg P$

g) $P \rightarrow Q, P \rightarrow \neg Q$ <u>conclusão:</u> $\neg P$

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

REGRA DE INTRODUÇÃO (→)

- **Introdução da Implicação (→)**

$$\frac{\begin{array}{c}[\alpha] \\ \dots \\ \beta\end{array}}{\alpha \to \beta}$$

(P) Premissa

(C) Conclusão

Colocamos como hipótese o seu antecendente e deduzimos o seu consequente.

PROVE:

Se você continuar correndo, então não estará apto para disputar a corrida.

C → ~A

FURB

[Nolt e Rohatyn (1991)]

Lógica Proposicional: **REGRAS DE INFERÊNCIA**

- **Introdução da Implicação ($\rightarrow$)**

  PROVE: Se você continuar correndo, então não estará apto para disputar a corrida. **($C \rightarrow \sim A$)**

1. Seu tornozelo está muito inchado.
2. Se o seu tornozelo está muito inchado e você continuar correndo, então ele não irá sarar em uma semana.
3. Se o seu tornozelo não sarar em uma semana, então você não estará apto para disputar a corrida.

1.	I	P
2.	$(I \wedge C) \rightarrow \sim S$	P
3.	$\sim S \rightarrow \sim A$	P
4.	C	H
5.	$I \wedge C$	$I\wedge$ (1,4)
6.	$\sim S$	MP(2,5)
7.	$\sim A$	MP(3,6)
8.	$\mathbf{C \rightarrow \sim A}$	**$I\rightarrow$ (4-7)**

Colocamos como hipótese o seu antecendente e deduzimos o seu consequente.

[Nolt e Rohatyn (1991)]

E por fim...

Exercícios 3 (h-n)

da lista 04!

3ª Questão: Prove a validade dos argumentos abaixo usando regras de inferência.

h) $P \to Q, Q \to R$ conclusão: $P \to R$ (sem usar SH)

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

i) $P \to Q$ conclusão: $\neg Q \to \neg P$

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

j) $\neg P \wedge \neg Q$ conclusão: $(P \vee Q) \rightarrow Q$

Nº	AFIRMAÇÃO	JUSTIFICATIVA

k) $(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)$ conclusão: $(P \vee Q) \rightarrow R$

l) $P \to (P \to Q)$ conclusão: $P \to Q$

m) $P \to (Q \to R)$ conclusão: $(P \wedge Q) \to R$

n) $P \to Q$ conclusão: $(P \land R) \to (Q \land R)$