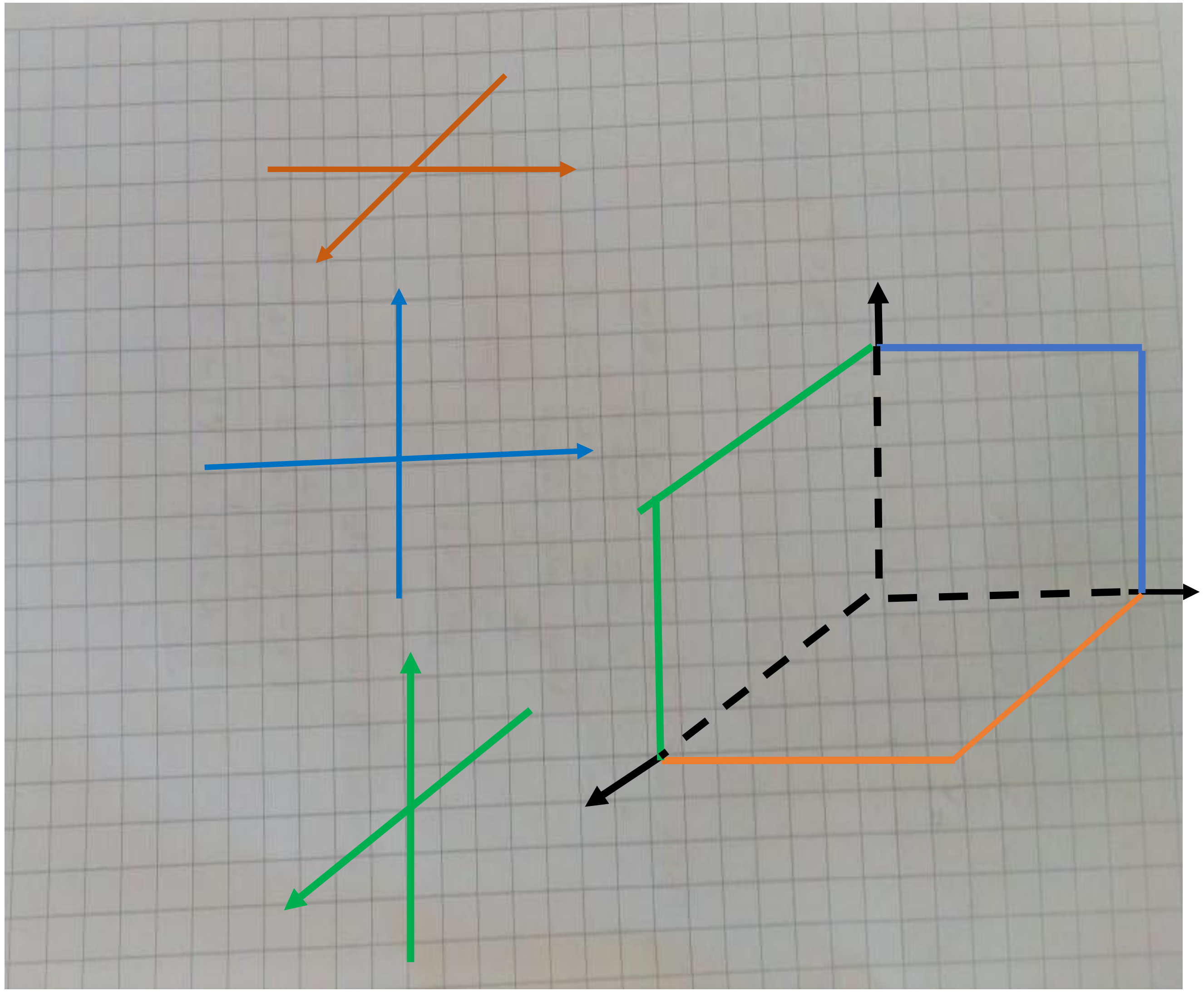
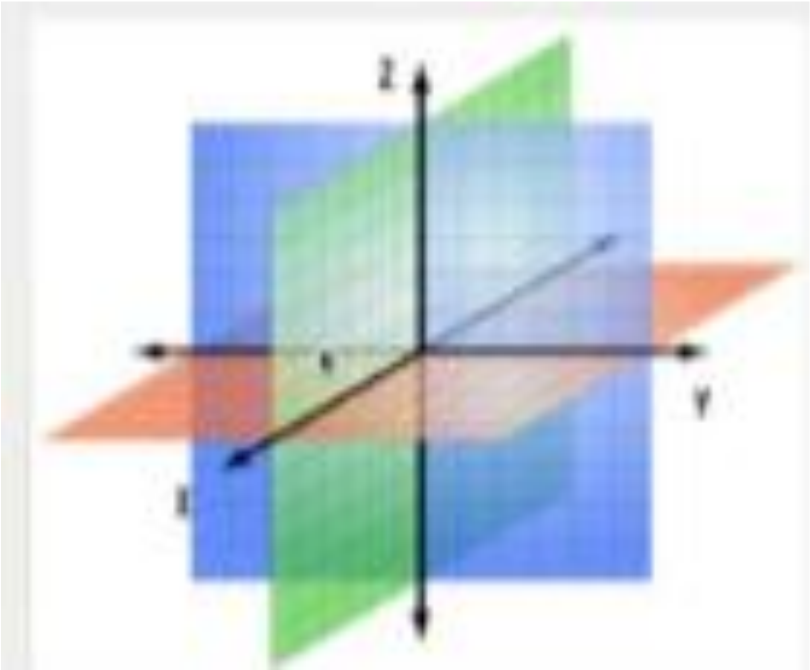
O Espaço R3 e o estudo de superfícies

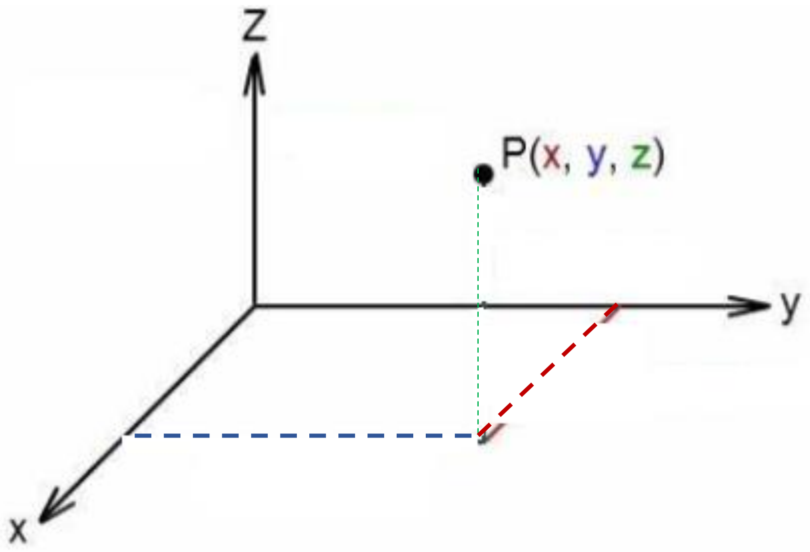
Profa. Dra Simone Leal Schwertl

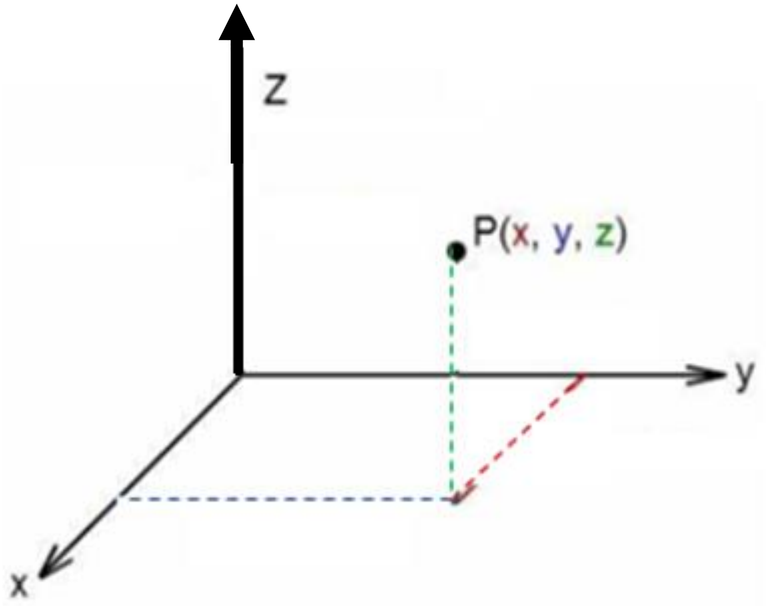
FURB

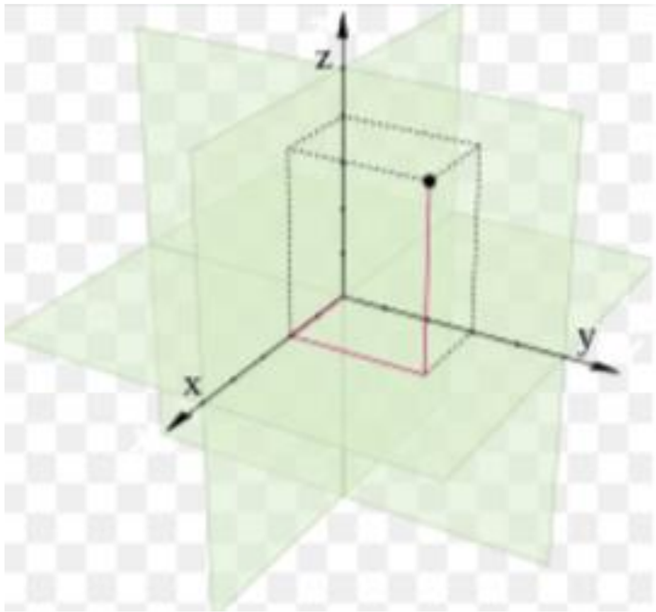
O Espaço R3
É formado pela interseção de 3 planos: xy, xz e yz.

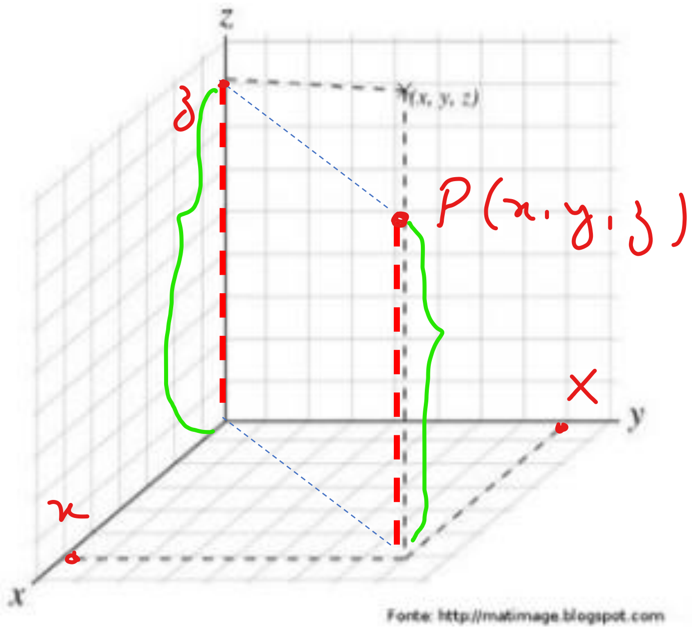







Z
P(x, y, z)
y
x


z
y
x


z
(x, y, z)
P (x, y, z)
y
x
Fonte: http://matimage.blogspot.com

Graficando pontos no espaço R3

Foram feitos exemplos durante a aula no quadro.

Gráfico de superfícies em R3

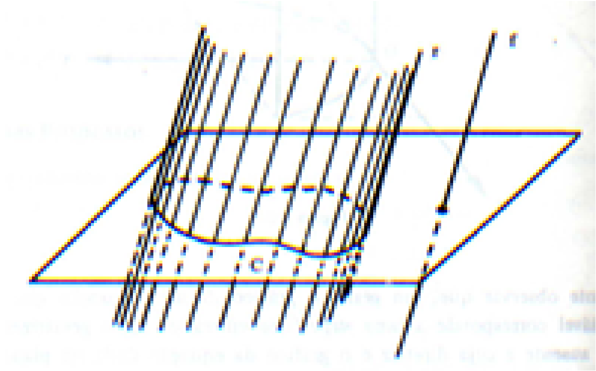
Profa. Dra Simone Leal Schwertl

FURB

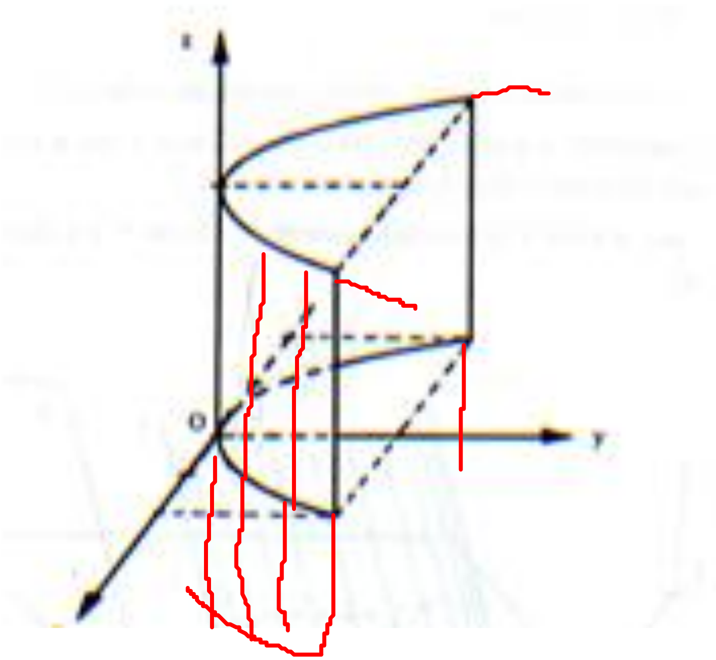
2. Superfícies Cilíndricas

Seja C uma curva plana e f uma reta fixa não contida nesse plano.

Superfície Cilíndrica é a superfície gerada por uma **reta *r* que** se move paralelamente à reta fixa f em contato permanente com **a curva plana *C*.**



A **reta *r*** que se move é denominada ***geratriz*** e a *curva C é a diretriz* da superfície cilíndrica (figura ao lado).



Por exemplo, se a diretriz for a parábola $x^2 = 2y$, a equação da superfície cilíndrica também será $x^2 = 2y$ (figura ao lado).

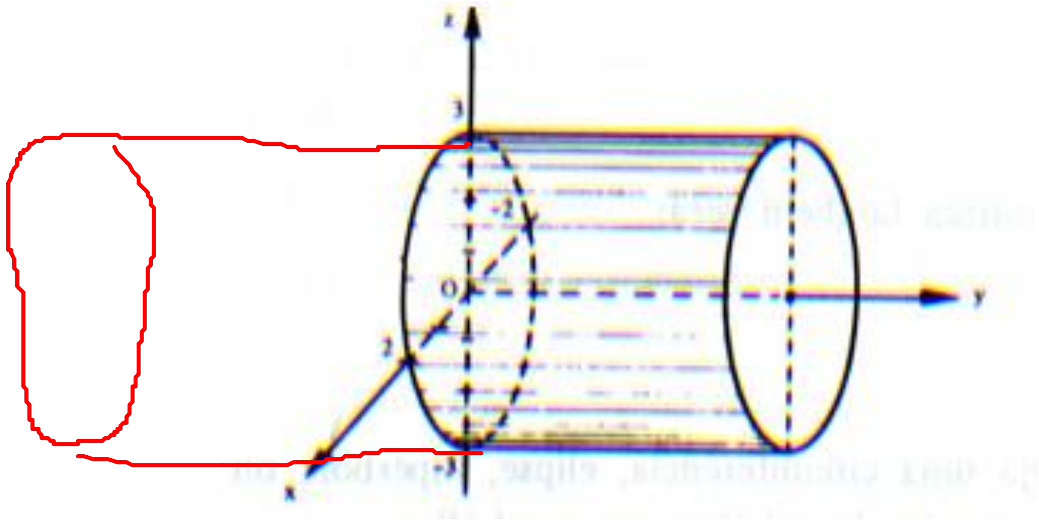
Conforme a ***diretriz seja uma circunferência***, elipse, hipérbole ou parábola, a superfície cilíndrica é chamada *circular*, *elíptica*, *hiperbólica* ou *parabólica*.

Por exemplo a equação

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$$

representa uma superfície cilíndrica ***com geratrizes paralelas ao eixo dos y***,

sendo a diretriz uma elipse no plano xOz.



Síntese – características das equações das superfícies cilíndricas:

FURB UNIVERSIDADE DE BLUMENAU

- Apresentam sempre apenas duas variáveis na equação.
- A variável que falta indica o eixo para o qual todos os pontos da curva (representada pela equação dada, qdo referenciada ao R2), deverão ser "puxados" , com retas paralelas ao eixo faltante.

Exemplos:

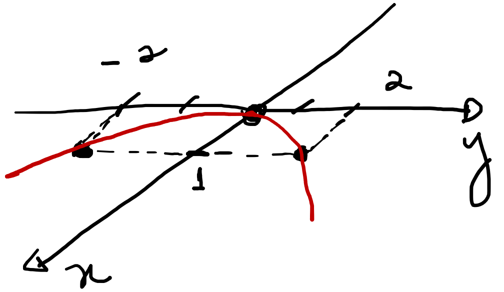
Foram feitos vários exemplos no quadro durante a aula. obs.

outros exemplos a seguir

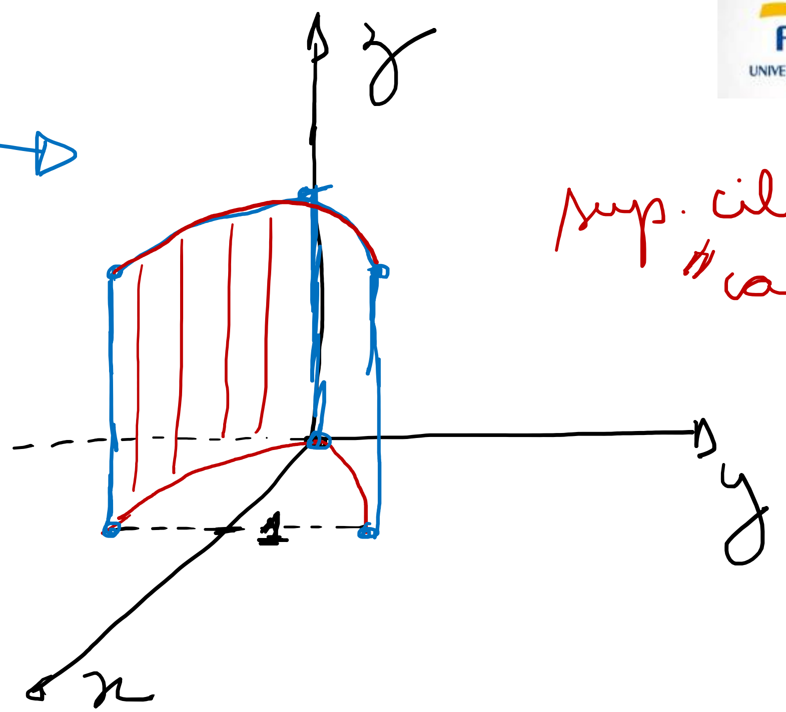
b) $y^2 = 4x$ (atribuir valores p/a variável ao quadrado)

falta a variável z

parábola em $\mathbb{R}^2$ → no plano xy.



$\mathbb{R}^3$



sup. cilíndrica "calha"

x	y
0	0
1	2
1	-2

p/ $y = 2$

$4x = 2^2$

$\boxed{x = 4/4 = 1}$

p/ $y = -2$

$4x = (-2)^2$

$\boxed{x = \frac{4}{4} = 1}$

p/ $y = 0$

$4x = 0^2$

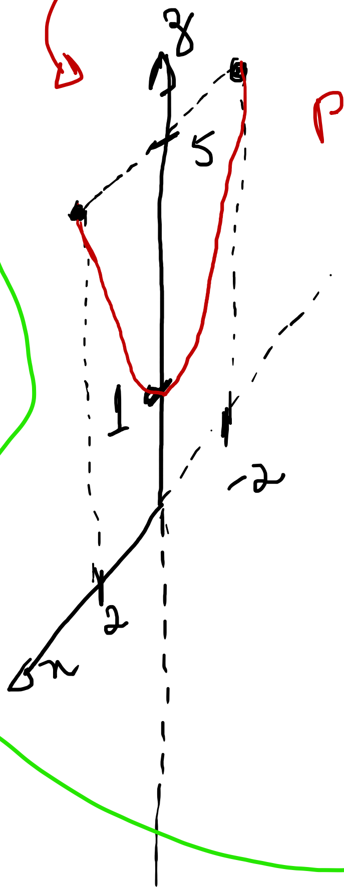
$\boxed{x = 0/4 = 0}$

c) $z = x^2 + 1 \Rightarrow$ 2 variáveis na eq. $\Rightarrow$ Em $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ sup. cilíndrica

falta a variável y

1º) reconhecer a curva em $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ no plano xz.

parábola



x	z
0	1
2	5
-2	5

vértice

p/ $x = 0$

$z = 0^2 + 1 = 1$

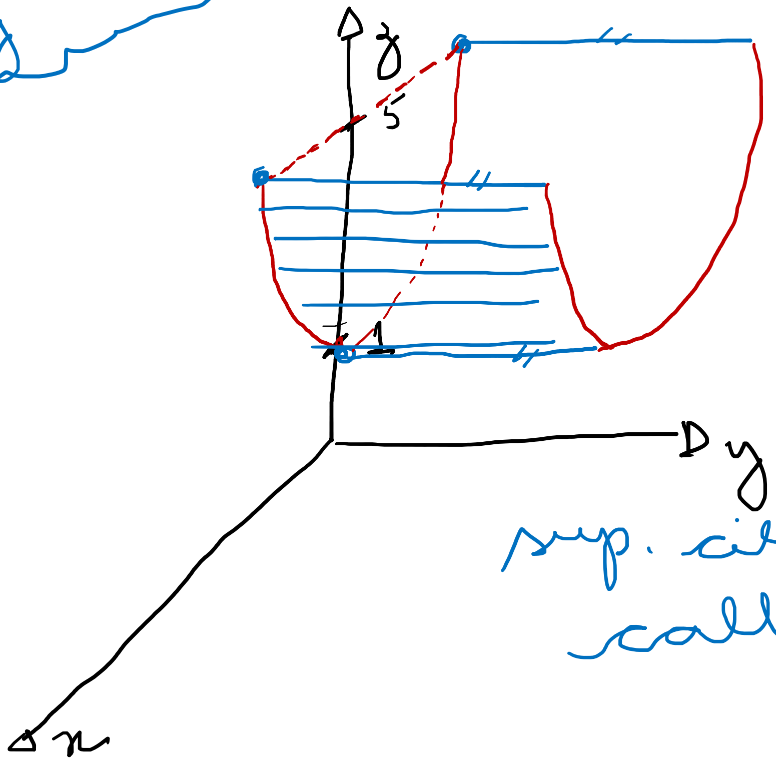
p/ $x = 2$

$z = 2^2 + 1 = 5$

p/ $x = -2$

$z = (-2)^2 + 1 = 5$

em $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$



sup. cilíndrica

calha

d) $z^2 = y - 3$ $\Rightarrow$ só tem 2 variáveis $\Rightarrow$ Em $\mathbb{R}^3$

$\Downarrow$

sup. cilíndrica

falta a variável x

1º reconhecer a curva nas variáveis da equação $\Rightarrow$ plano yz ($\mathbb{R}^2$)

parábola

z	y
0	3
1	4
-1	4

vértice

p/ $z = 1$

$y - 3 = 1^2$

$y = 4$

p/ $z = -1$

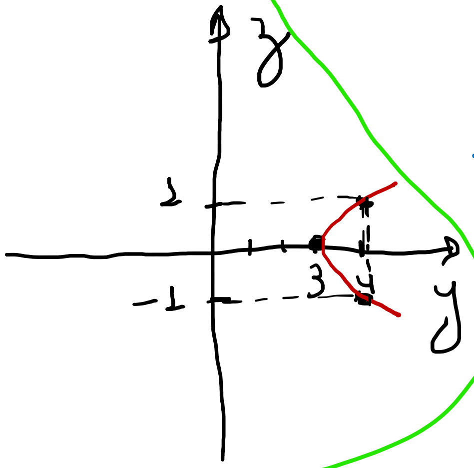
$y - 3 = (-1)^2$

$y = 4$

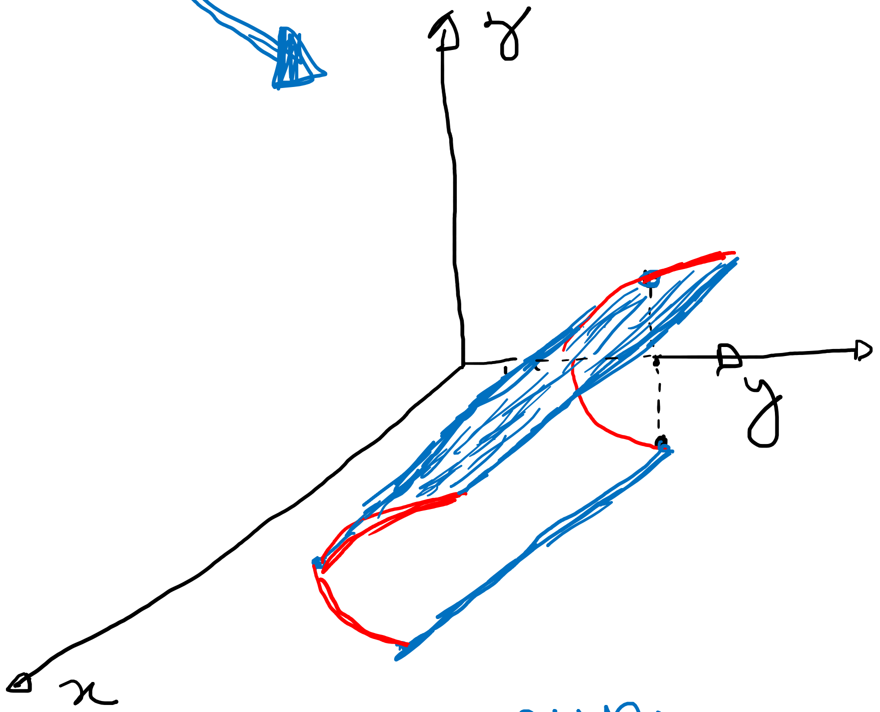
p/ $z = 0$

$y - 3 = 0^2$

$y = 3$



$\mathbb{R}^3$



sup. cilíndrica "calha"

e) $x^2+y^2=4$ $\Rightarrow$ sup. cilíndrica (2 variáveis)

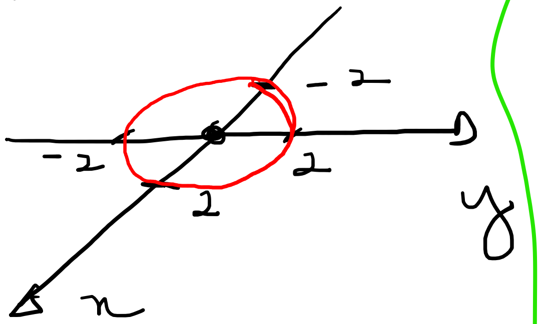
em $\mathbb{R}^3$

falta z

Em $\boxed{\mathbb{R}^2}$ $\Rightarrow$ plano xy

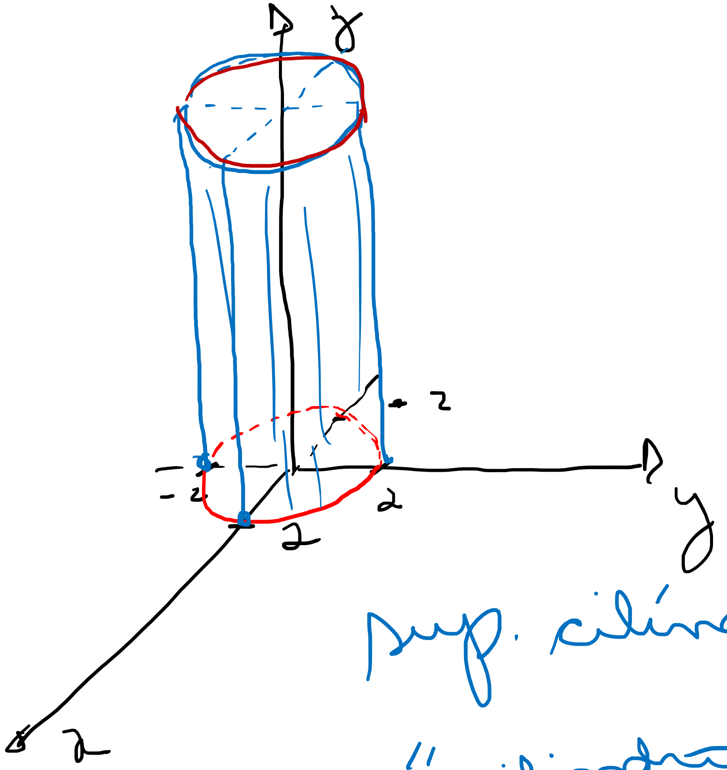
circunferência

$C(0,0)$ $r=2$



$$\boxed{(x-0)^2+(y-0)^2=r^2}$$

$\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$



sup. cilíndrica

"cilindro circular"

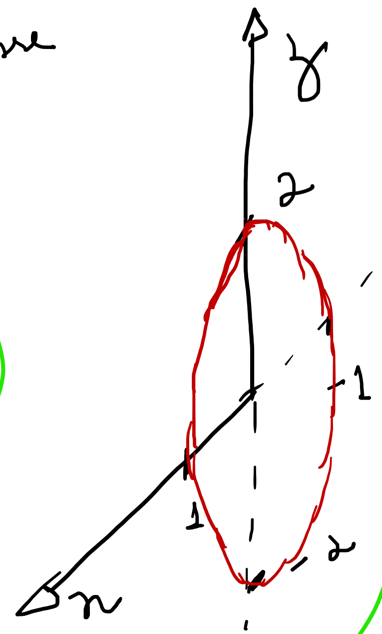
f) $x^2 + \frac{z^2}{4} = 1 \xrightarrow{\text{Em } \mathbb{R}^3}$ sup. cilíndric

$\rightarrow$ falta y

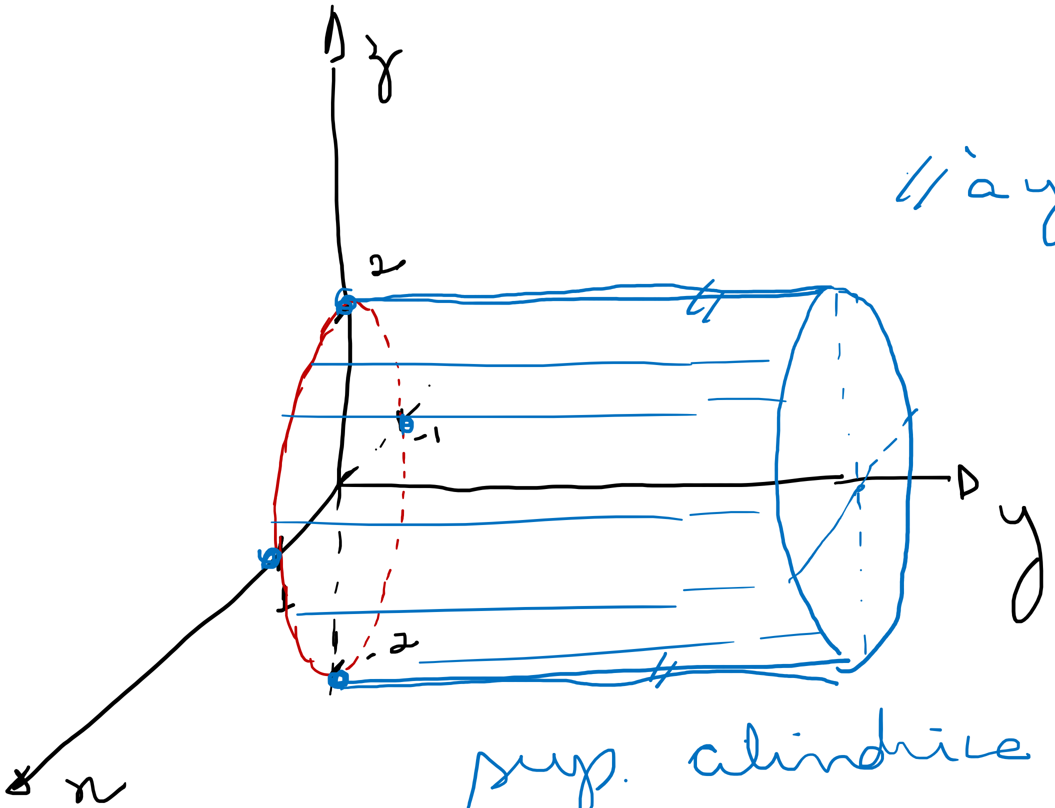
$\Downarrow$

no plano xz $(\mathbb{R}^2)$

elipse



$\xrightarrow{\mathbb{R}^3}$



// à y.

sup. cilíndrica

cilindro elíptico

FURB
UNIVERSIDADE DE BLUMENAU

g) $\boxed{y^2 - \frac{x^2}{4} = 1} \xrightarrow{\text{Em } \mathbb{R}^3}$ sup. cilíndrica (2 variáveis)

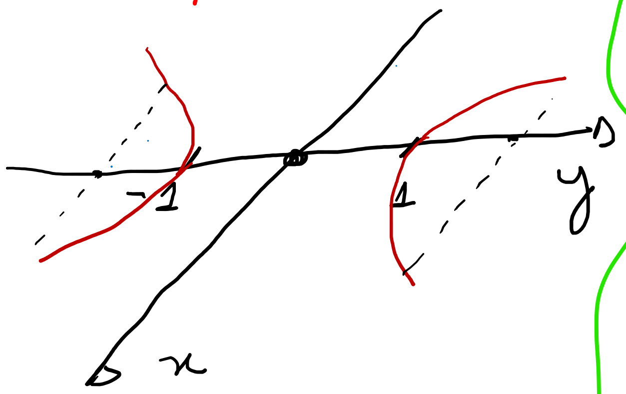
$\boxed{\text{falta } z}$

$\Downarrow$

Em $\mathbb{R}^2$ no plano xy

hipérbole $C(0,0)$

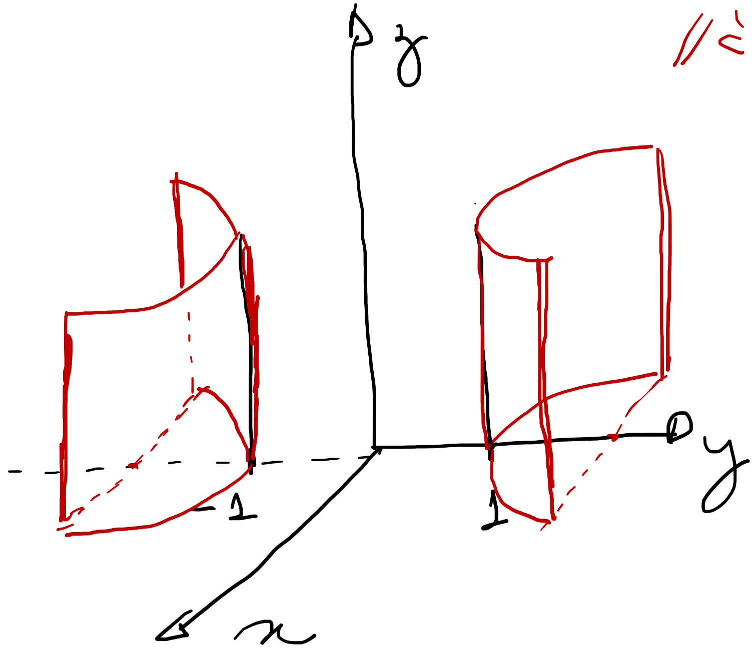
toca y



$$\frac{(y-0)^2}{(1)^2} - \frac{(x-0)^2}{2^2} = 1$$

→ toca o eixo y

em $\mathbb{R}^3$



// à z

sup. cilíndrica hiperbólica

EXERCÍCIOS:

1) Identificar a superfície e fazer a sua representação gráfica.

a) $x^2 + y^2 = 9$

b) $x^2 = 4y$

c) $x = 4$

d) $2x + 3y - 6 = 0$

e) $y = 6$

f) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

g) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} + \dfrac{z^2}{16} = 1$

h) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

i) $4x + 2y + 3z - 12 = 0$

j) $y^2 - x^2 + z^2 = 0$

l) $4x^2 + 9y^2 - z = 0$

m) $\dfrac{x^2}{1} - \dfrac{y^2}{4} - \dfrac{z^2}{4} = 1$

n) $\dfrac{y^2}{4} + x^2 - \dfrac{z^2}{9} = 1$

2) Identificar as quádricas representadas pelas equações e fazer a representação gráfica:

a) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$

b) $2x^2 + 4y^2 + z^2 - 16 = 0$

c) $x^2 - 4y^2 + 2z^2 = 8$

d) $z^2 - 4x^2 - 4y^2 = 4$

e) $x^2 + z^2 - 4y = 0$

f) $x^2 + y^2 + 4z = 0$

g) $4x^2 - y^2 = z$

h) $z^2 = x^2 + y^2$

i) $z = x^2 + y^2$

j) $x^2 + y^2 = 9$

l) $y^2 = 4z$

m) $x^2 - 4y^2 = 16$

n) $4y^2 + z^2 - 4x = 0$

o) $-x^2 + 4y^2 + z^2 = 0$

p) $16x^2 + 9y^2 - z^2 = 144$

q) $16x^2 - 9y^2 - z^2 = 144$

r) $2y^2 + 3z^2 - x^2 = 0$

s) $4x^2 + 9y^2 = 36z$