Unidade 3

Prof. Janaína Poffo Possamai

Leonardo Cristiano Gieseler

Torneira pingando

Qual o desperdício de água ao deixar uma torneira pingando um dia inteiro?

Depois de apresentarem a solução:

- Analisar se é uma função, justificar
- Quais são as variáveis e qual a relação de dependência
- Em qual intervalo a função é crescente e decrescente, justificar
- Se existe valor máximo ou mínimo, qual?

Função - definição

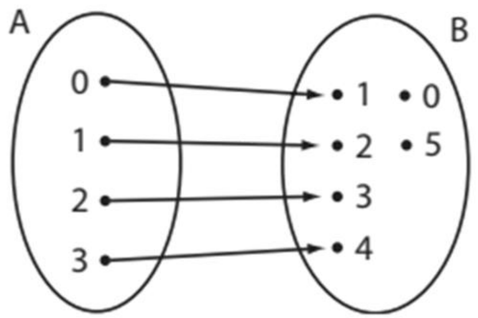
Dados dois conjuntos não vazios **A** e **B**, uma relação (ou correspondência) que associa a cada elemento x $\in$ A um único elemento y $\in$ B recebe o nome de **função de A em B**.

Domínio e contradomínio

Seja f: A → B uma função.

O conjunto **A** é chamado **domínio** de **f**, e o conjunto **B** é chamado **contradomínio** de **f**.

Sendo A = {0, 1, 2, 3} e B = {0, 1, 2, 3, 4, 5}, a função f: A → B tal que f(x) = x + 1 tem domínio **A** e contradomínio **B**.



Trabalho 3

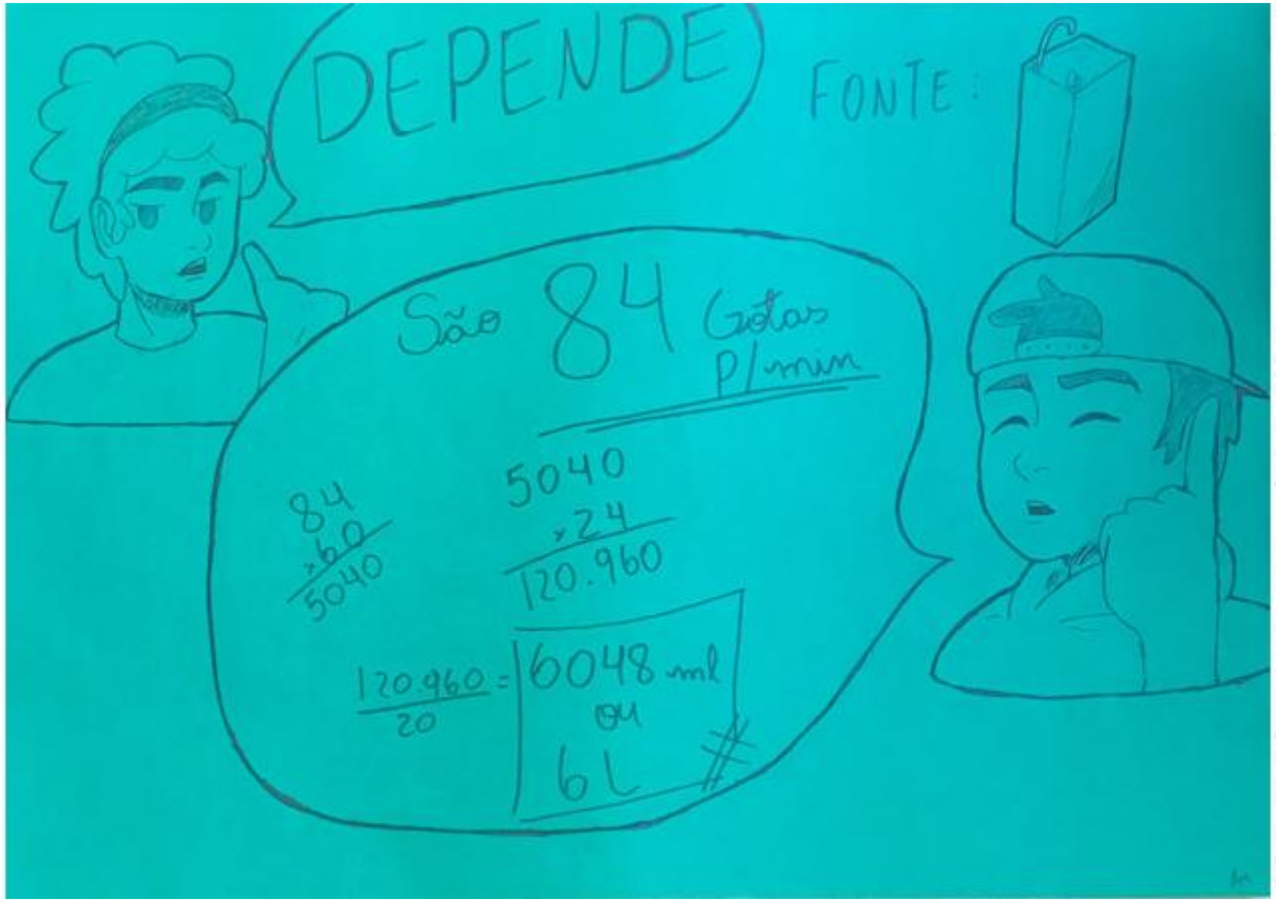
- Investigar um fenômeno ou situação, que necessitem de coleta de dados. Esses dados podem ser oriundos de experimentação ou de bancos de dados com informações (IBGE, CONAB, ...).
- Os dados devem remeter a um gráfico que não seja uma reta.
- Deve-se obter a função que retrata a situação, utilizando algum recurso computacional (Excel, GeoGebra, Tracker, ...).
- O trabalho deve ser realizado em dupla ou trios (não mais que isso).
- Não haverá apresentação e os trabalhos devem ser postados no AVA, até dia 26 de junho.

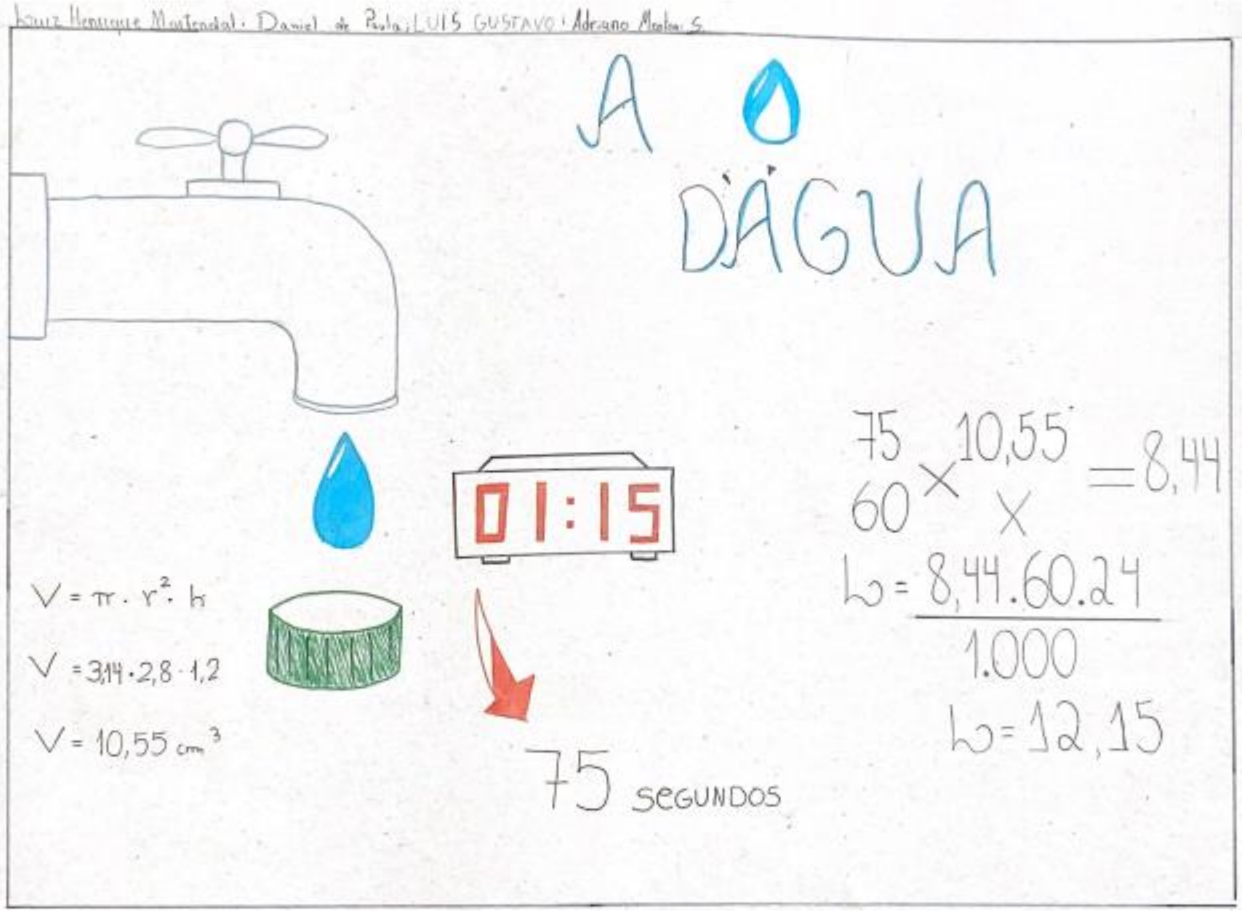
Critérios de avaliação do Trabalho 3

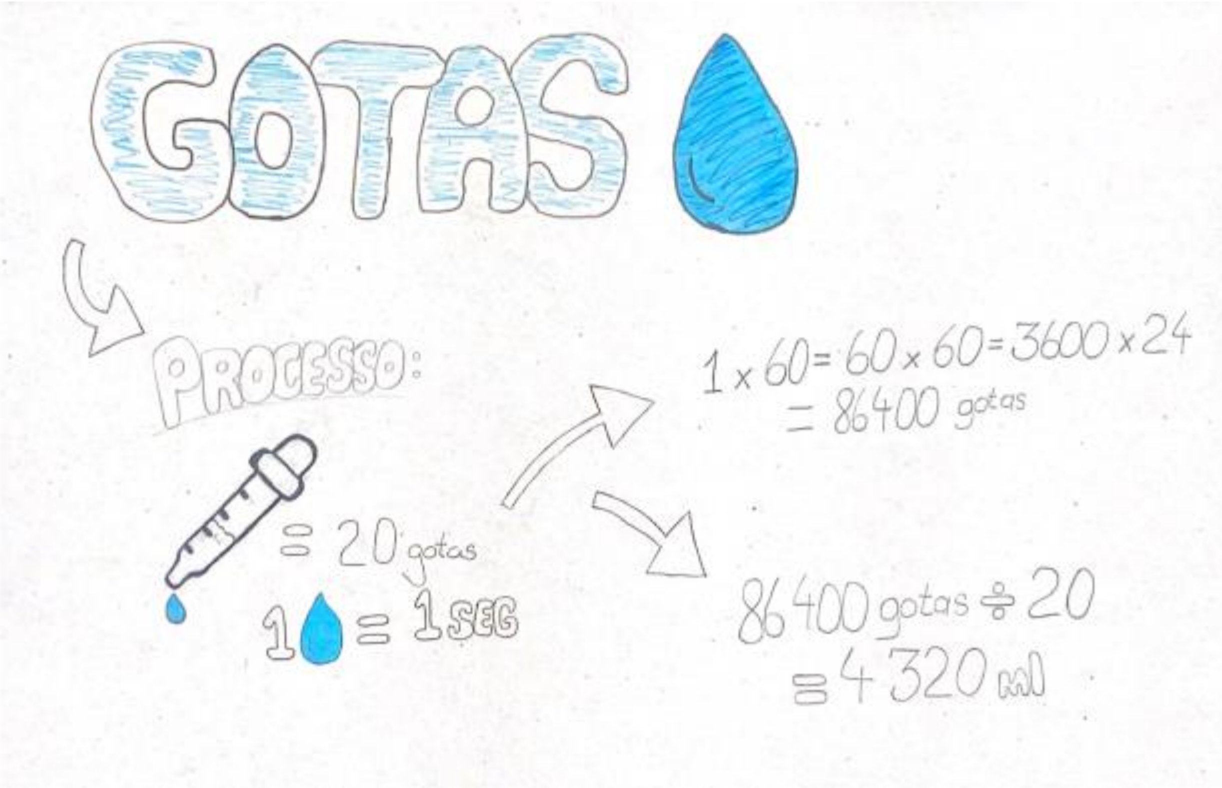
- Tabela com os dados, identificando as variáveis utilizadas.
- Gráfico da função
- Função modelada
- Descrição breve de como fizeram cada etapa
- Formatação adequada do arquivo

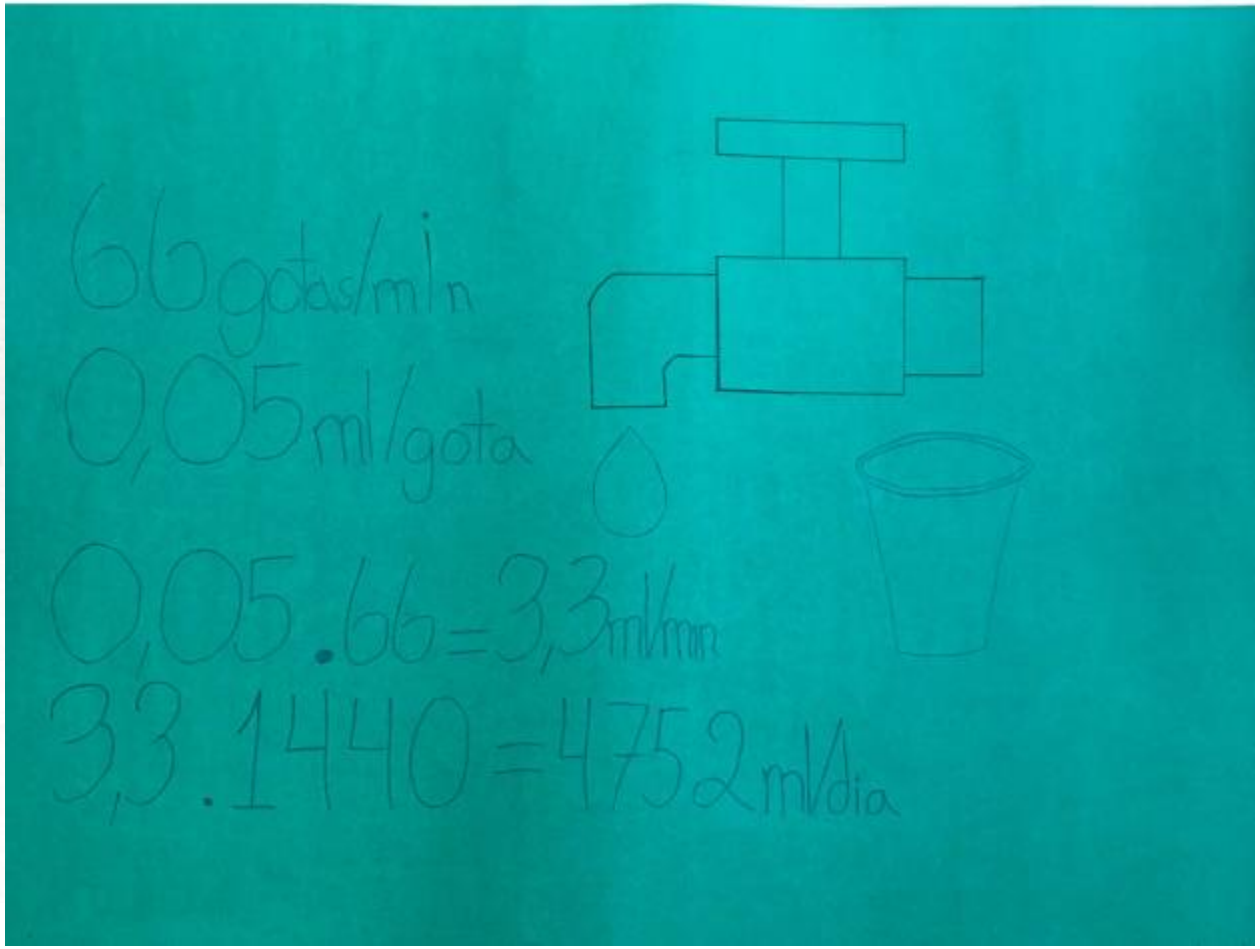
Função afim

Quais as funções que representam as situações?






GOTAS
PROCESSO:
= 20 gotas
1 = 1 SEG
1 x 60 = 60 x 60 = 3600 x 24
= 86400 gotas
86400 gotas ÷ 20
= 4 320 ml


66 gotas/min
0,05 ml/gota
0,05 . 66 = 3,3 ml/min
3,3 . 1440 = 4752 ml/dia

• Pegamos 2 copos de 180 ml.

• Furamos um deles e enchemos o furado para pingar no outro.

• Demorou 14 min para encher o copo debaixo, pingando 3 gotas por segundo.

• Chegamos a conclusão que se pingasse 1 gota por segundo, demoraria 42 min para encher o copo.

• Um dia possui 1.440 min.

• Se em 42 min são preenchidos 180 ml, quantos ml de água serão gastos em 1 dia?

$$42\,\text{min} = 180\,\text{ml}$$
$$1.440\,\text{min} = x$$

⇩

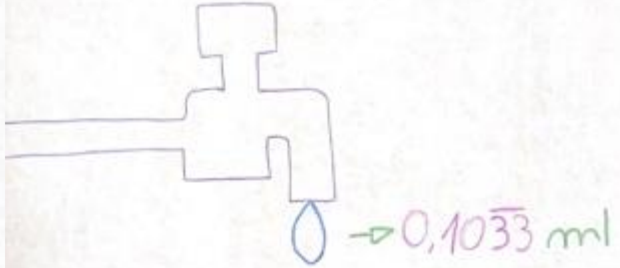
$$42x = 259.200$$

⇩

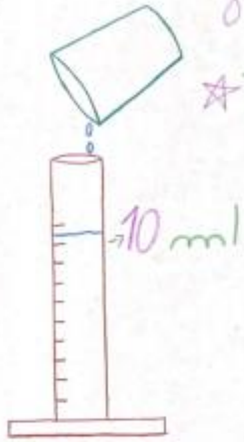
$$x = \frac{259.200}{42}$$

⇩

$$6.171{,}5\,\text{ml}$$



Copo de Isopor



Proveta

$$
\begin{array}{r}
0{,}10\overline{33} \\
\times\ 86400 \\
\hline
8.927{,}9997\,\text{ml}
\end{array}
$$

☆ Intervalo = 1s

TEMPO

1 min = 60 s
1 h = 60 min
1 h = 3600 s
1 dia = 24 h
1 dia = 86400 s

28 gotas/minuto

↓

40 320 gotas/dia

$$\begin{array}{r} 28 \\ \times 60 \\ \hline 00 \\ 168* \\ \hline 1680 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1680 \\ \times 24 \\ \hline 6720 \\ 3360* \\ \hline 40320 \end{array}$$

Qual o desperdício de ao deixa uma torneira pingando um dia inteiro?

fórmula:

$$\text{Volume(ML)} = x \cdot (y \cdot 3)$$

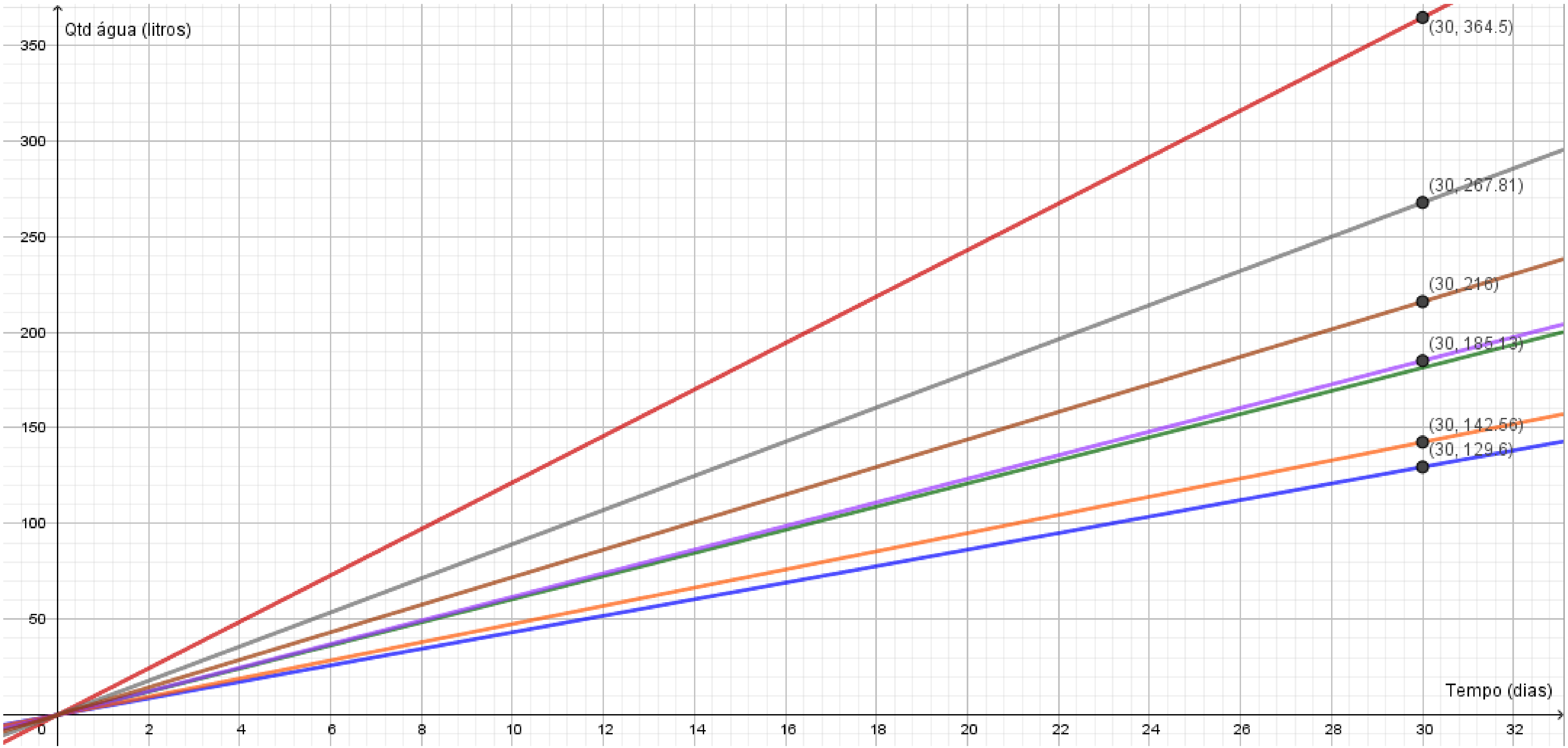
Resumo:

A fim de encontrar o total de desperdício diário de água de uma dada torneira, usamos como referência uma torneira que pertence ao food-truck do Bloco 5, e chegamos na conclusão de que em torno de 7,2 litros são gastos diariamente apenas nesta torneira.

Os calculos executados foram:

x = gotas

y = tempo (t)



Qtd água (litros)
Tempo (dias)
350
300
250
200
150
100
50
0
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
(30, 364.5)
(30, 267.81)
(30, 216)
(30, 185.13)
(30, 142.56)
(30, 129.6)

Definição

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **função afim** quando existem dois números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Valor da função

Dada a função afim g tal que $g(x) = \frac{1}{3}x - 1$, calcular:

a) $g\left(\frac{1}{2}\right)$

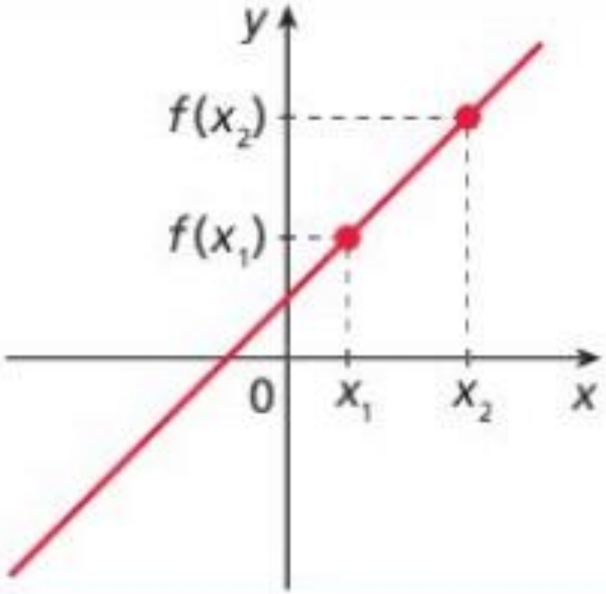
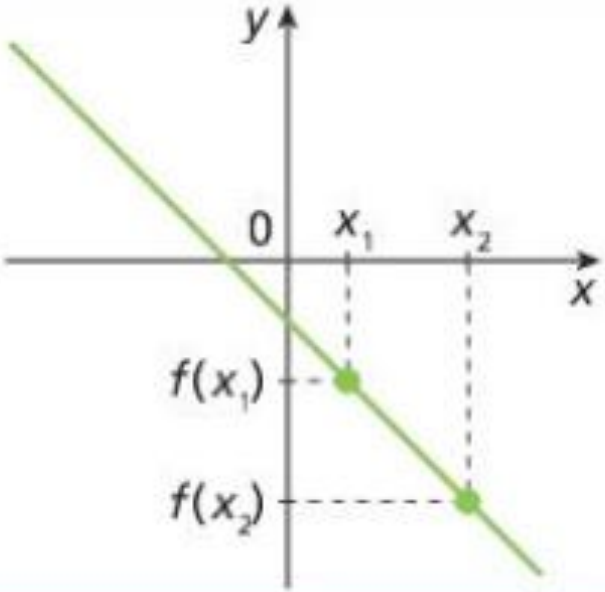
b) x, para $g(x) = 4$

Construção do gráfico

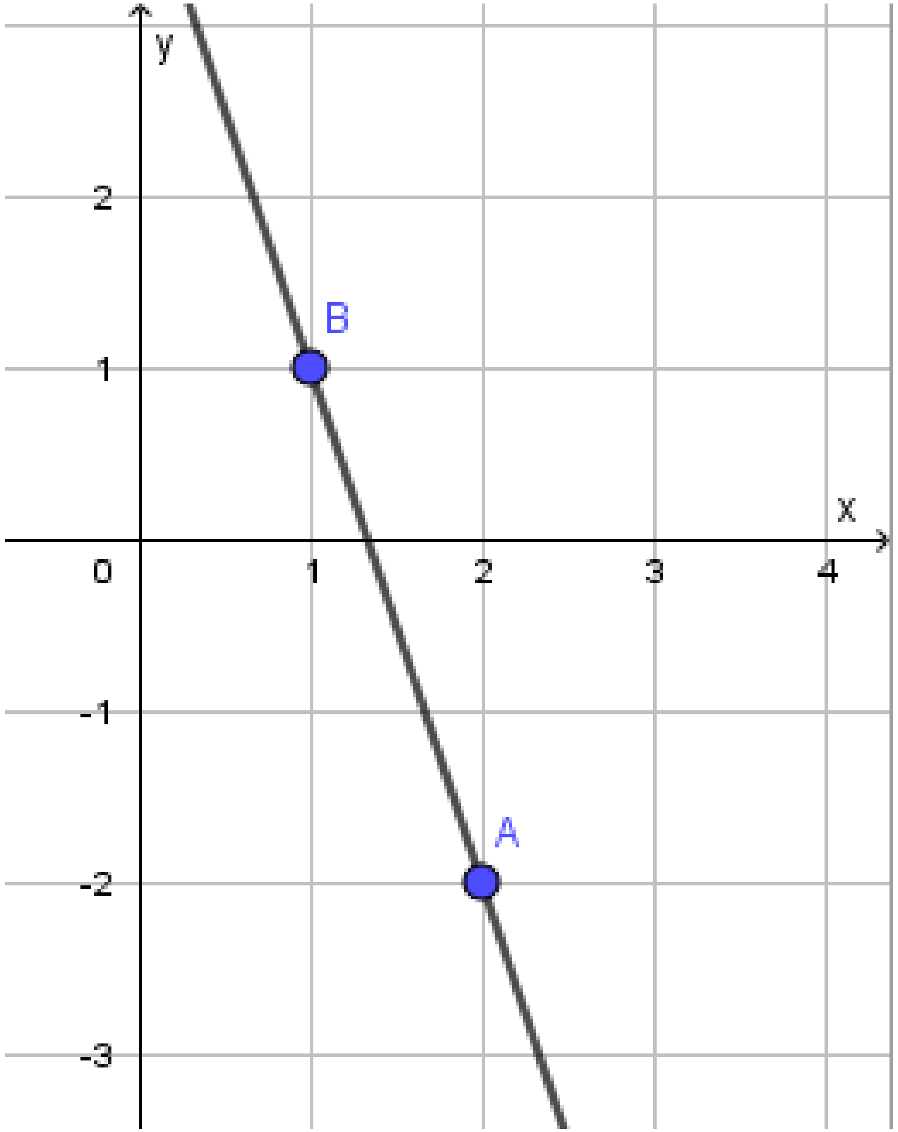
$$f(x) = 3x - 2$$

$$g(x) = -2x + 1$$

$$h(x) = 3$$

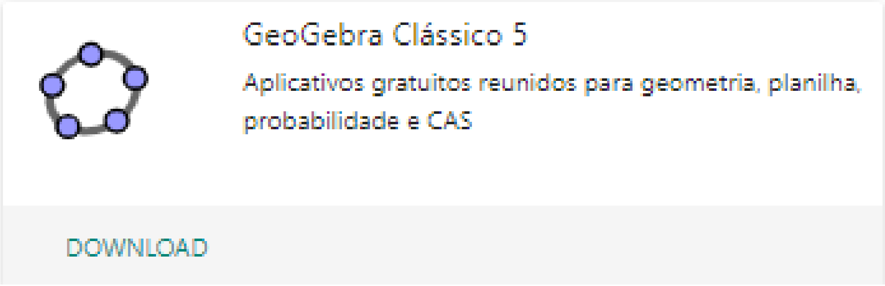
Função crescente ($a > 0$)	Função decrescente ($a < 0$)
	
$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 > ax_1 \Rightarrow ax_2 + b > ax_1 + b$, ou seja, $f(x_2) > f(x_1)$	$x_2 > x_1 \Rightarrow ax_2 < ax_1 \Rightarrow ax_2 + b < ax_1 + b$, ou seja, $f(x_2) < f(x_1)$

Determinar a lei de formação



Alguns recursos

- https://www.wolframalpha.com/
- https://www.geogebra.org/download



Zero da função afim

O valor de x para o qual a função $f(x) = ax + b$ se anula, ou seja, para o qual $f(x) = 0$, denomina-se **zero da função afim**. Para determinar o zero de uma função afim basta resolver a equação $ax + b = 0$.

Função modular

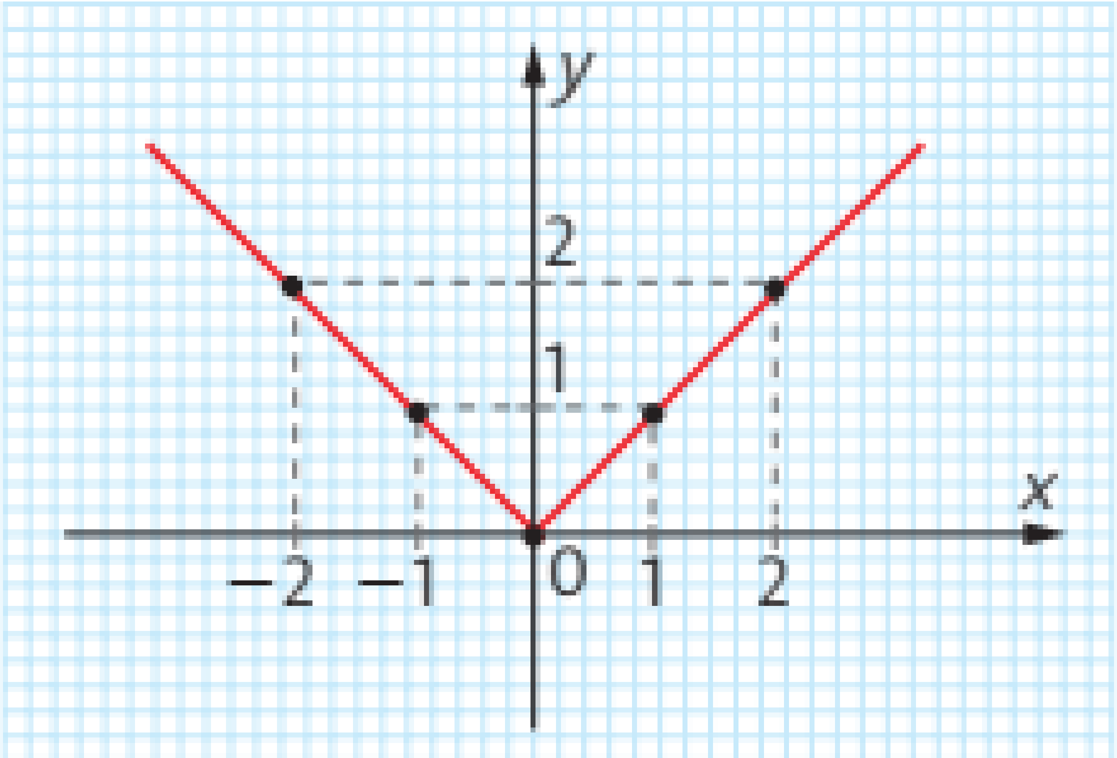
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x|$, onde $|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geqslant 0 \\ -x, \text{ se } x < 0 \end{cases}$, cujo gráfico é dado ao lado.

Essa função recebe o nome de **função modular** ou **função módulo**.

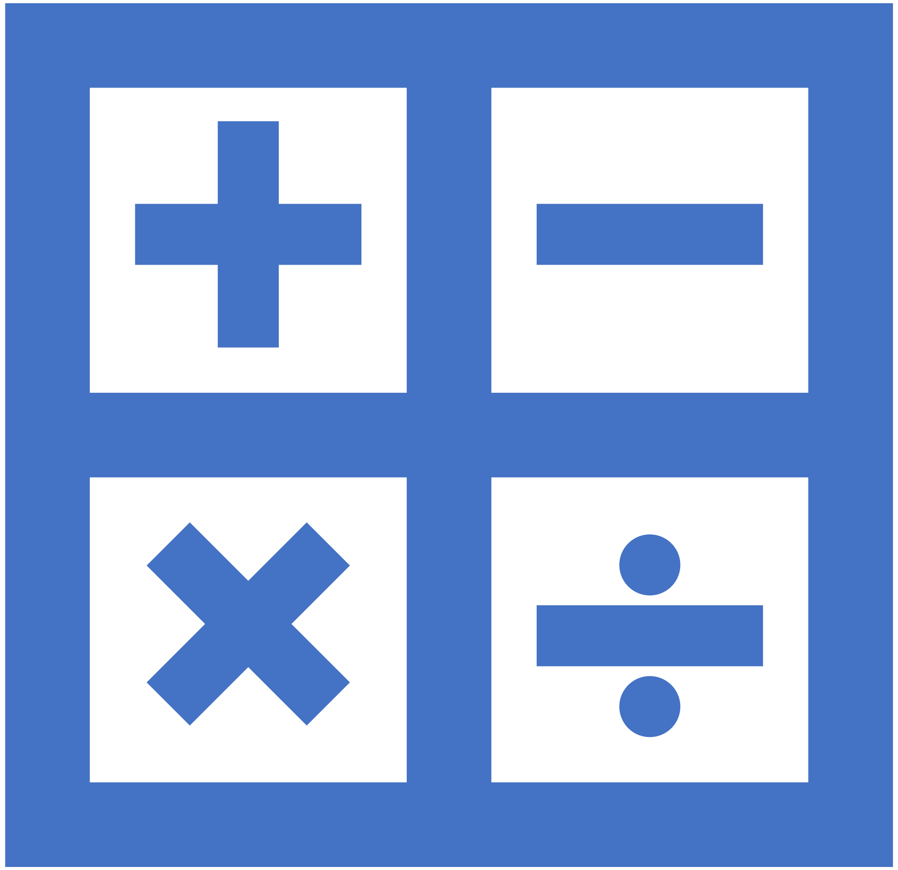
Observe que, para $x < 0$, temos o gráfico da função afim $f(x) = -x$ e, para $x \geqslant 0$, temos o gráfico da função afim $f(x) = x$.

Vamos construir o gráfico da função $f(x) = |x|$:

x	$y = f(x)$
0	0
1	1
2	2
−1	1
−2	2



$$D(f) = \mathbb{R}$$
$$Im(f) = \mathbb{R}_+$$



Exercícios

- MIORELLI, A.A.; AYJARA, D.F.A.; MANTOVANI, L.M. **Pré-cálculo**. Grupo A, 2015.

Função afim:

p. 51 nº 3.1 até 3.16; 3.21 até 3.26; 3.33 e 3.34 (a e b)

Função quadrática

Behemoth, montanha-russa no parque Canada's Wonderland, em Ontário, Canadá.

Definição

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **quadrática** quando existem números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$x \to ax^2 + bx + c$$

Exemplos:

a) $f(x) = -x^2 + 100x$, em que $a = -1$, $b = 100$ e $c = 0$.

b) $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, em que $a = 3$, $b = -2$ e $c = 1$.

c) $f(x) = -4x^2 + 4x - 1$, em que $a = -4$, $b = 4$ e $c = -1$.

d) $f(x) = x^2 - 4$, em que $a = 1$, $b = 0$ e $c = -4$.

e) $f(x) = 20x^2$, em que $a = 20$, $b = 0$ e $c = 0$.

Observe que **não** são funções quadráticas:

f) $f(x) = 2x$ É função afim.

g) $f(x) = 2^x$ É função exponencial.

h) $f(x) = x^3 + 2x^2 + x + 1$ É função do terceiro grau.

Dada a função quadrática de lei $g(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{3} + x^2$, calcular:

a) $g\left(\frac{3}{4}\right)$

b) x para $g(x) = \frac{1}{2}$

Seja f uma função quadrática em que $f(0) = 2$, $f(2) = 12$ e $f(-1) = 6$. Determinar a lei de formação dessa função.

Determinação dos zeros da função quadrática

Vamos ver algumas maneiras de determinar os zeros da função quadrática.

Usando a fórmula $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Para usar a fórmula basta conhecer os coeficientes *a*, *b* e *c*.

Se $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, então as raízes serão:

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Vamos verificar se a função f dada por $f(x) = x^2 - 4x + 3$ tem zeros reais e se a parábola correspondente intercepta o eixo x.

Para isso, resolvemos a seguinte equação do 2º grau:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

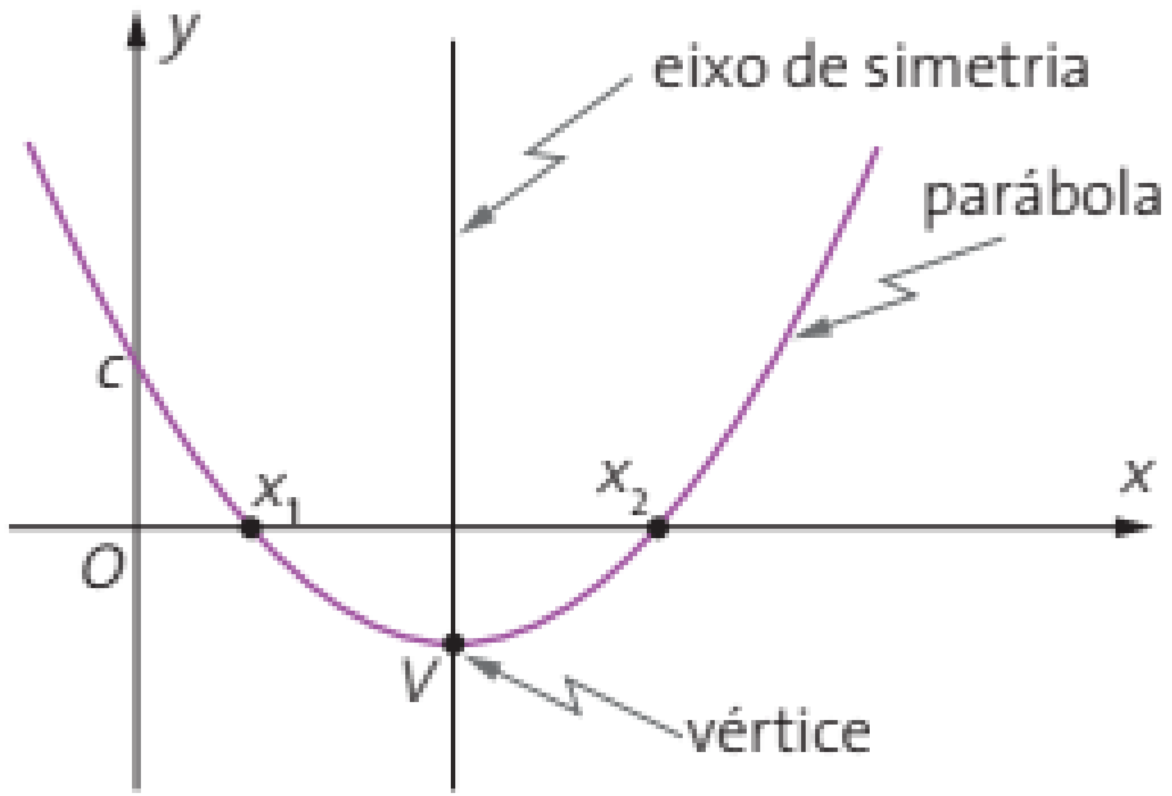
$$\Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 16 - 12 = 4$$

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow x = 3 \text{ ou } x = 1$$

Assim, os zeros da função são $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$.

Logo, o gráfico da função intercepta o eixo x em dois pontos: (1, 0) e (3, 0)

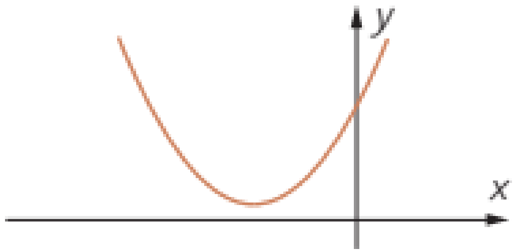
Gráfico da função quadrática



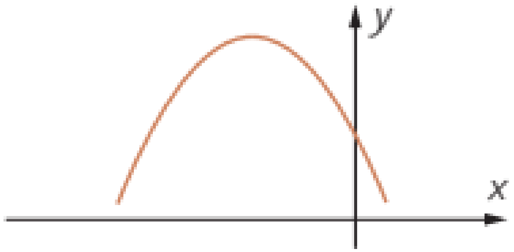
Parâmetro a

Responsável pela concavidade e abertura da parábola.

- Se $a > 0$, a concavidade é para cima.



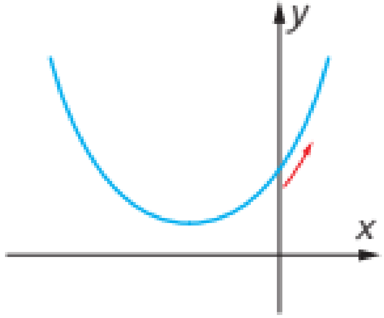
- Se $a < 0$, a concavidade é para baixo.

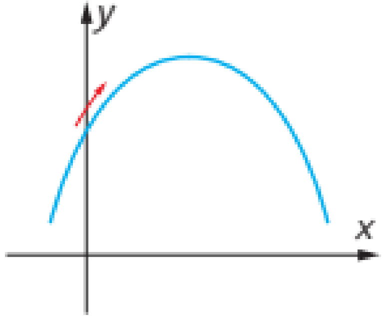


Parâmetro *b*

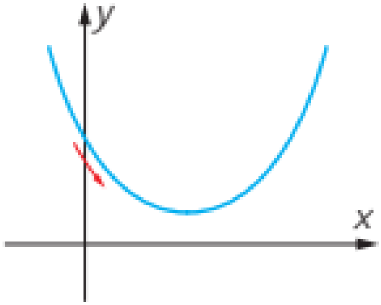
Indica se a parábola intersecta o eixo *y* no ramo crescente ou decrescente da parábola.

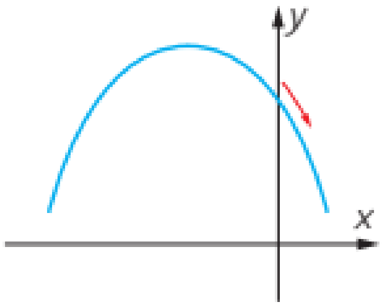
- Se $b > 0$, a parábola intersecta o eixo *y* no ramo crescente.



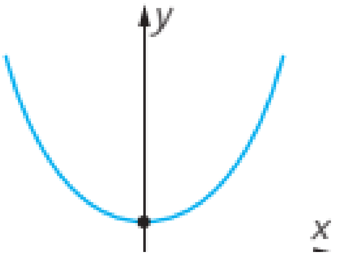


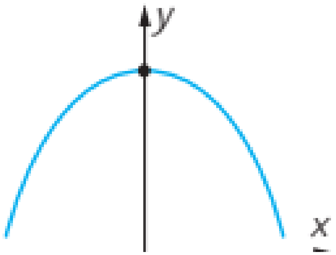
- Se $b < 0$, a parábola intersecta o eixo *y* no ramo decrescente.





- Se $b = 0$, a parábola intersecta o eixo *y* no vértice.

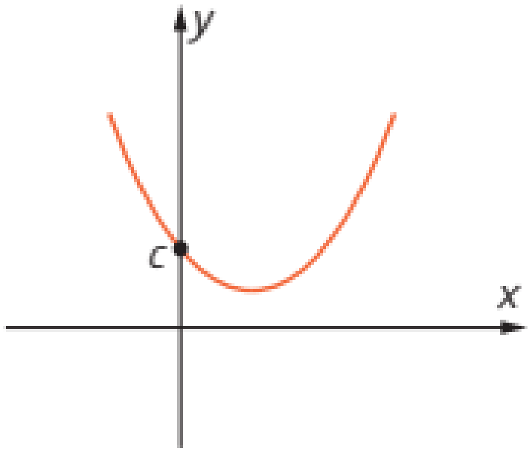




Parâmetro c

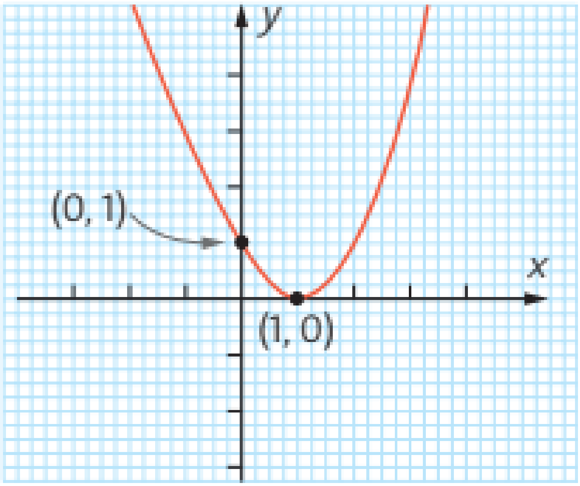
Indica o ponto onde a parábola intersecta o eixo y.

A parábola intersecta o eixo y no ponto $(0, c)$, ou seja, $f(0) = c$.



Determinação algébrica das intersecções da parábola com os eixos

a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$



Intersecção com o eixo y:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 1 = 1$

A parábola intersecta o eixo y em (0, 1).

Intersecção com o eixo x:

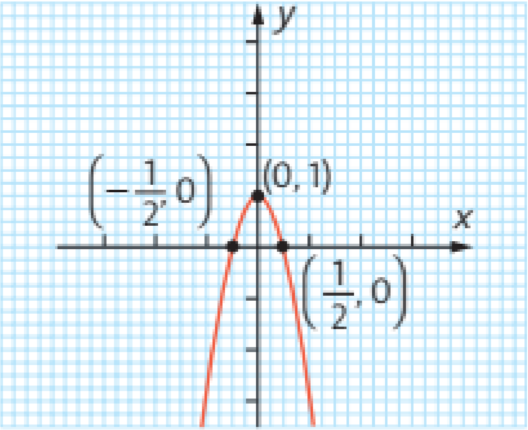
$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$

$\Delta = 4 - 4 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$ (a equação admite uma raiz dupla)

$$x = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

A parábola intersecta o eixo x em um só ponto: (1, 0). Isso significa que a função possui um zero duplo: 1.

b) $f(x) = -4x^2 + 1$



Intersecção com o eixo y:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = -4 \cdot 0^2 + 1 = 1$

A parábola intersecta o eixo *y* em (0, 1).

Intersecção com o eixo x:

$f(x) = 0 \Rightarrow -4x^2 + 1 = 0 \Rightarrow -4x^2 = -1 \Rightarrow 4x^2 = 1 \Rightarrow$

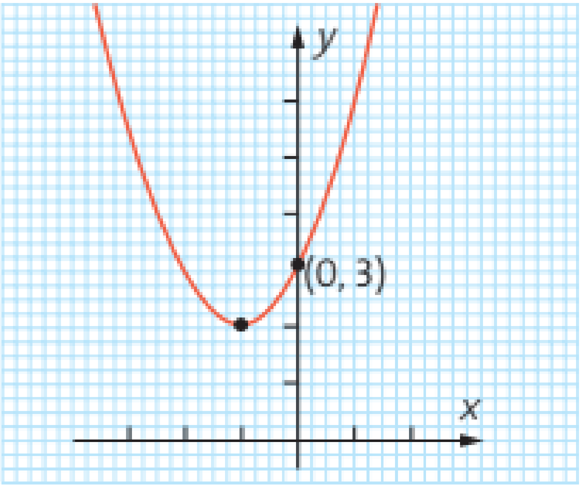
$\Rightarrow x^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = \pm\frac{1}{2}$ (a equação admite duas raízes distintas)

Observe que, nesse caso, $\Delta = 0 + 16 = 16$, ou seja, $\Delta > 0$.

A parábola intersecta o eixo *x* em dois pontos: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ e $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

Isso significa que os zeros da função $f(x) = -4x^2 + 1$ são $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$.

c) $f(x) = x^2 + 2x + 3$



Intersecção com o eixo y:

$x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 + 2 \cdot 0 + 3 = 3$

A parábola intersecta o eixo y em (0, 3).

Intersecção com o eixo x:

$f(x) = 0 \Rightarrow x^2 + 2x + 3 = 0$

$\Delta = 4 - 12 = -8$ ou $\Delta < 0$ (a equação não tem raízes reais)

A parábola não intersecta o eixo x.

A função $f(x) = x^2 + 2x + 3$ não admite zeros reais.

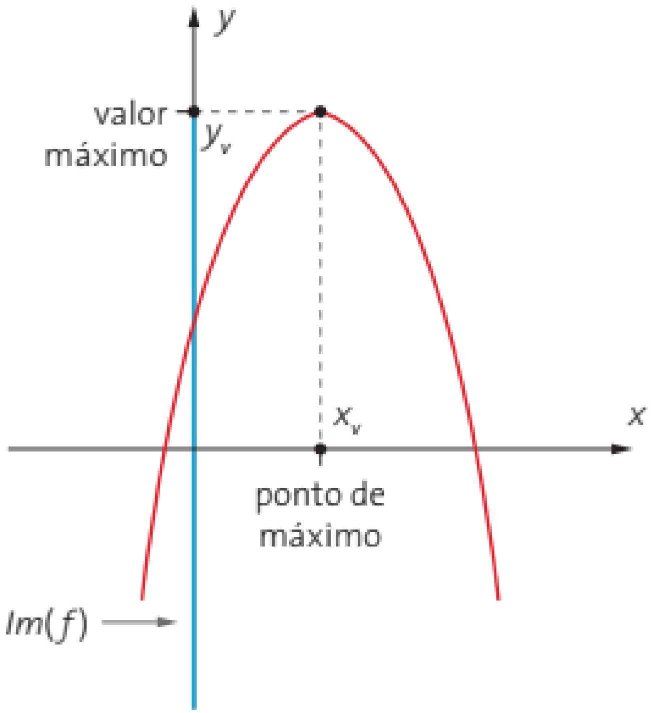
A parábola pode interceptar o eixo *x* em:

- dois pontos (se $\Delta > 0$)
- um único ponto (se $\Delta = 0$)
- nenhum ponto (se $\Delta < 0$)

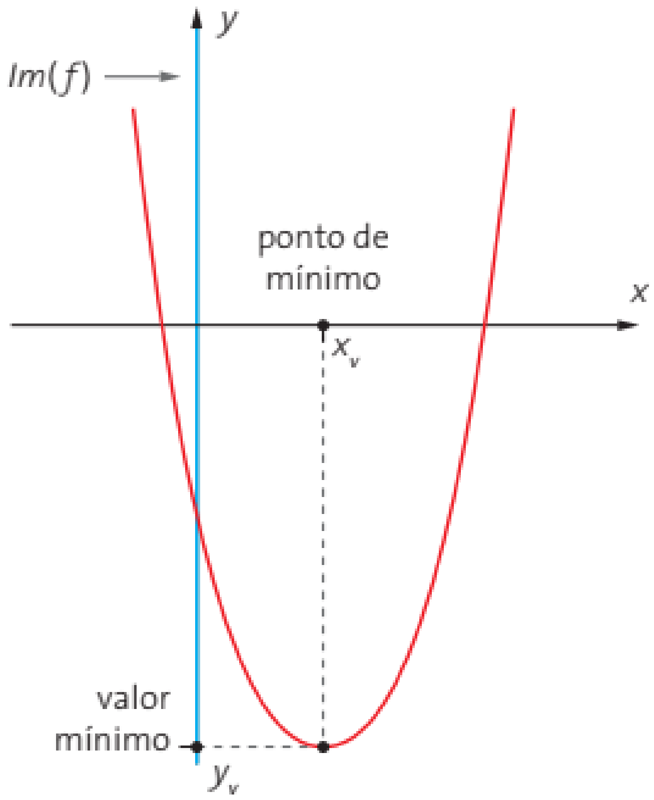
Vértice da parábola, imagem e valor máximo ou mínimo da função quadrática

$$V\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$$

$a < 0$



$a > 0$



Vamos esboçar o gráfico da função dada pela lei $f(x) = -x^2 - 4x - 3$.

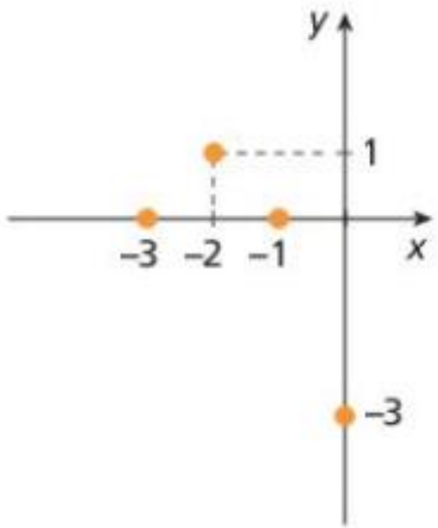
Calculamos os elementos necessários para determinar os pontos convenientes. Temos:

- coeficiente c: -3
- zeros da função: -3 e -1
- coordenadas dos vértices: $x_V = -2$ e $y_V = 1$

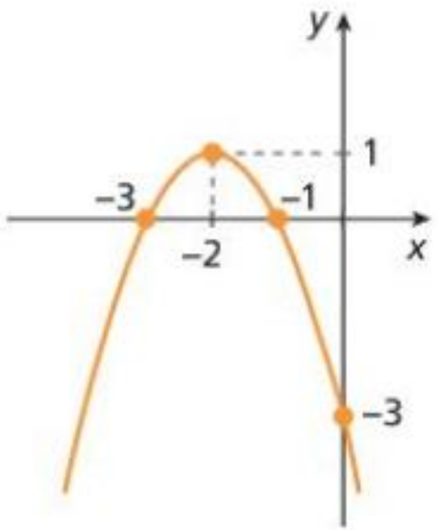
Pontos formados:

- intersecção com os eixos: $(0, -3)$, $(-3, 0)$ e $(-1, 0)$
- vértice: $(-2, 1)$

1ª etapa. Localizamos os pontos no plano cartesiano.



2ª etapa. Traçamos o gráfico.



Vamos esboçar o gráfico da função g dada por $g(x) = 2x^2 + 1$.

Repetindo o procedimento do exemplo anterior, calculamos os elementos necessários para determinar os pontos convenientes. Temos:

- coeficiente c: 1
- zeros da função: $2x^2 + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = -8$

  (Logo, a função g não tem zeros reais.)
- coordenadas do vértice: $x_v = -\dfrac{0}{2 \cdot 2} = 0$; $y_v = -\dfrac{(0^2 - 4 \cdot 2 \cdot 1)}{4 \cdot 2} = -\dfrac{(-8)}{8} = 1$

Observando os valores encontrados, verifica-se que o gráfico da função g não corta o eixo x, e o vértice da parábola coincide com o ponto em que o gráfico corta o eixo y: (0, 1)

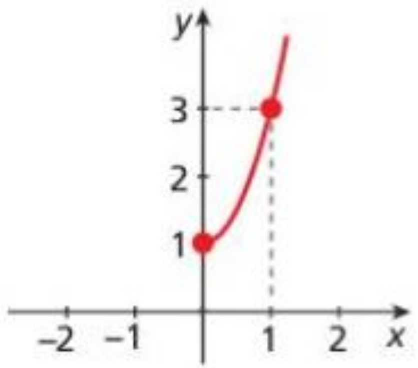
Então, vamos determinar outro ponto pertencente ao gráfico da função g. Para isso, atribuiremos um valor para x e calcularemos sua respectiva imagem.

Sendo $x = 1$, temos: $f(1) = 2 \cdot 1^2 + 1 \Rightarrow f(1) = 3$

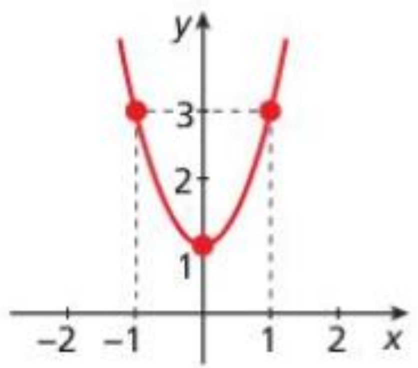
Logo, a parábola passa pelo ponto (1, 3).

Com essas informações, vamos traçar o esboço do gráfico dessa função.

1ª etapa. Localizamos os pontos (0, 1) e (1, 3) no plano cartesiano e traçamos parte da parábola.



2ª etapa. Utilizamos simetria para traçar o restante da parábola.



Faça o esboço do gráfico das funções dadas pelas leis a seguir.

a) $f(x) = -4x^2 + 6x - 9$

b) $g(x) = x^2 + 6x$

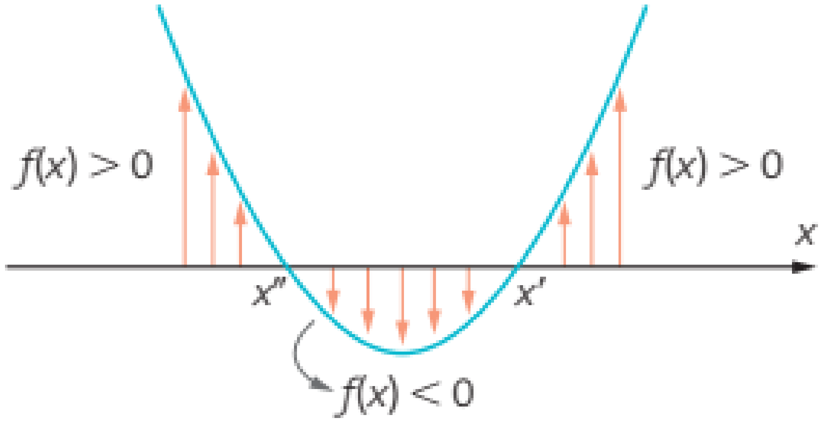
c) $h(x) = \dfrac{3x^2}{5} + x + 5$

d) $i(x) = 2x^2 + 7x - 4$

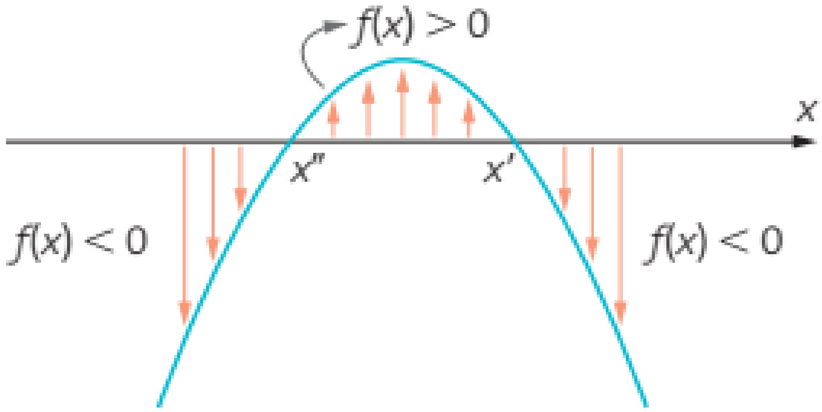
e) $j(x) = x^2 + 3$

f) $l(x) = -2x^2 - 2$

Estudo do sinal da função



$f(x) = 0$ para $x = x''$ ou $x = x'$
$f(x) > 0$ para $x < x''$ ou $x > x'$
$f(x) < 0$ para $x'' < x < x'$



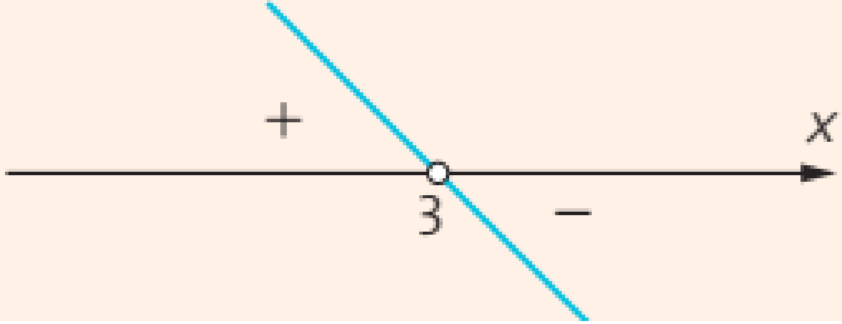
$f(x) = 0$ para $x = x''$ ou $x = x'$
$f(x) > 0$ para $x'' < x < x'$
$f(x) < 0$ para $x < x''$ ou $x > x'$

Resolva a inequação-quociente $\dfrac{-x + 3}{x^2 - 4x - 5} > 0$ em $\mathbb{R}$.

$f(x) = -x + 3$

$a = -1; a < 0$

raiz: $x = 3$

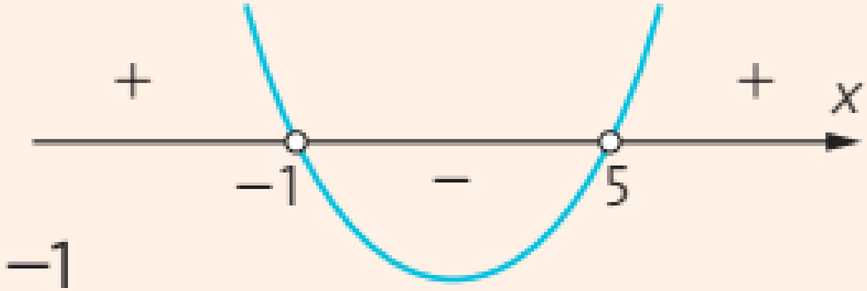


$g(x) = x^2 - 4x - 5$

$a = 1; a > 0$

$\Delta = 36 > 0$

raízes: $x' = 5$ e $x'' = -1$

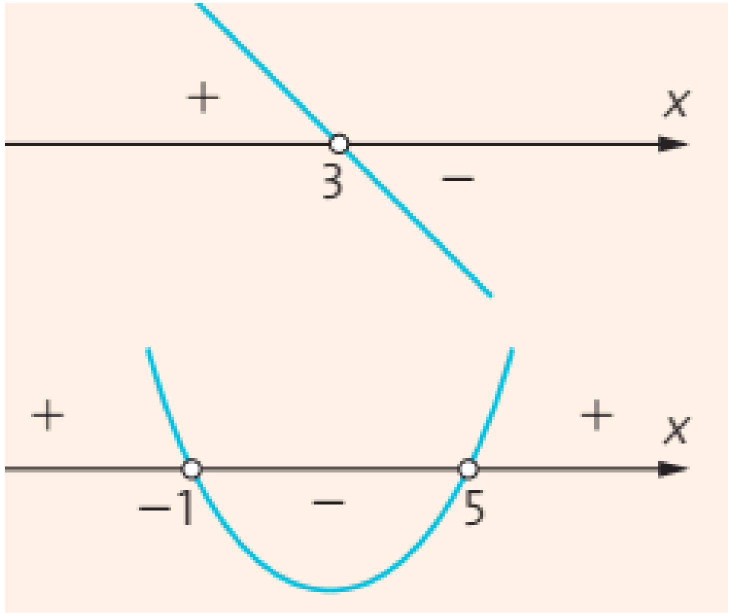


Restrição: $x^2 - 4x - 5 \neq 0 \Rightarrow x \neq 5$ e $x \neq -1$

Quadro de resolução:

		-1		3		5	
$f(x)$	$+$		$+$		$-$		$-$
$g(x)$	$+$		$-$		$-$		$+$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$+$		$-$		$+$		$-$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } 3 < x < 5\}$



Exercícios

- Gomes, F. M. **Pré-cálculo: Operações, equações, funções e trigonometria**. Cengage Learning Brasil, 2018.

- Capítulo 4, p. 324 - nº 2 até 20