Indução

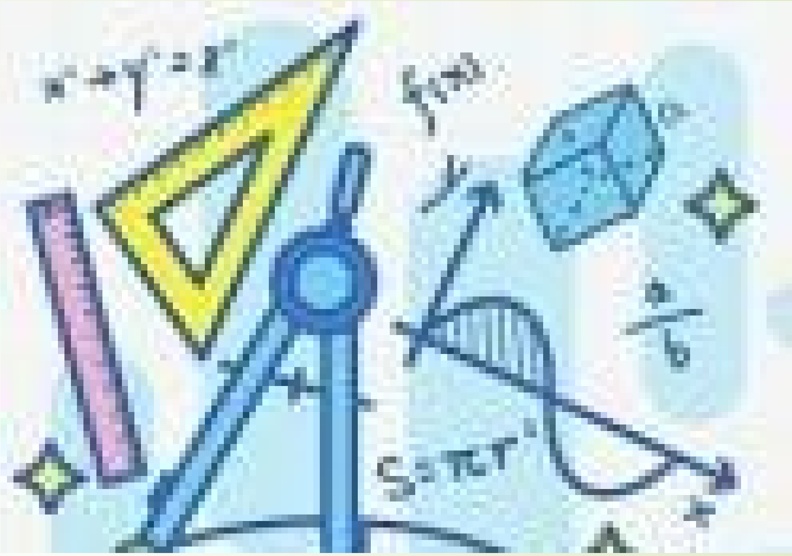
Indução, segundo o *Dicionário Aurélio*, é a ação de induzir, de ser a razão de algo ou de ter a capacidade de provocar algo. É o ato de fazer com que alguém acredite ou passe a acreditar em alguma coisa.

- Mas, dependendo da área de conhecimento em que a palavra é empregada, as intenções e interpretações podem e vão ser diferentes, por ser observada de pontos de vista distintos e com diversas finalidades.

- A origem etimológica da palavra indução, segundo o *site* Significados, é no latim *inductio*, que, ao ser traduzido, significa “ação de levar e trazer” ou “ação de introduzir”.
- Também é mencionado por Francis Bacon (1551-1627), responsável pelo método experimental, proporcionou a partir do método indutivo que o homem despertasse em si o desejo pela experiência e pelo que é concreto, fazendo com que houvesse maior necessidade de comprovar determinados fenômenos.

Introdução

A informática, assim como parte da matemática, é baseada na representação do mundo real por entidades formais nas quais se exerce o raciocínio ou a programação.



Este processo de modelar de forma formal entidades reais, intuitivas, ou completamente conhecidas revelou-se, ao longo da história da matemática fonte de verdadeiras revoluções na matemática.

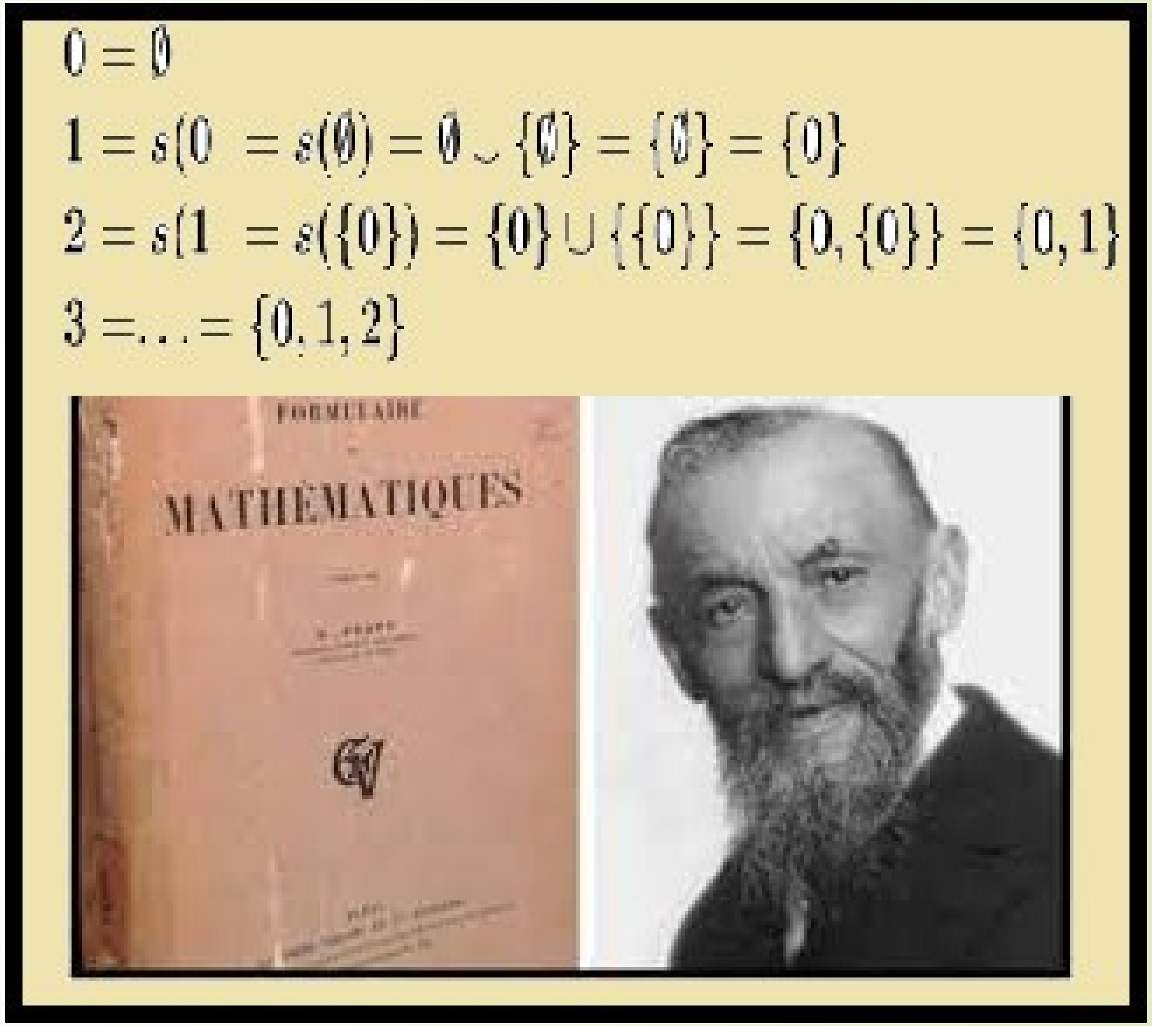
O processo de capturar o mundo à nossa volta pela formalização, levou à construção de sistemas axiomáticos.

Axioma

Na lógica tradicional, um axioma ou postulado é uma sentença ou proposição que não é provada ou demonstrada e é considerada como óbvia ou como um consenso inicial necessário para a construção ou aceitação de uma teoria. Por essa razão, é aceito como verdade e serve como ponto inicial para dedução de outras verdades.

Na matemática, um sistema axiomático, é qualquer conjunto de axiomas que podem ser ligados em conjunção para logicamente derivar teoremas. Uma teoria matemática consiste em um sistema axiomático e todos os seus teoremas. Um sistema axiomático que é completamente descrito é um tipo especial de sistema formal.

Um deles, o famoso "sistema axiomático da aritmética de Peano", propõe uma construção dos naturais, ou seja, um método construtivo para obtenção dos inteiros.



$s(n) = n + 1$

$se\ n = 0\ teremos\ como\ sucessor\ de\ 0\ o\ número\ 1,$
Se n = 1 teremos como sucessor de 1 o número 2.
E assim sucessivamente.

$$0 \xrightarrow{S} 1 \xrightarrow{S} 2 \xrightarrow{S} 3 \xrightarrow{S} 4 \xrightarrow{S} 5 \ \ldots$$

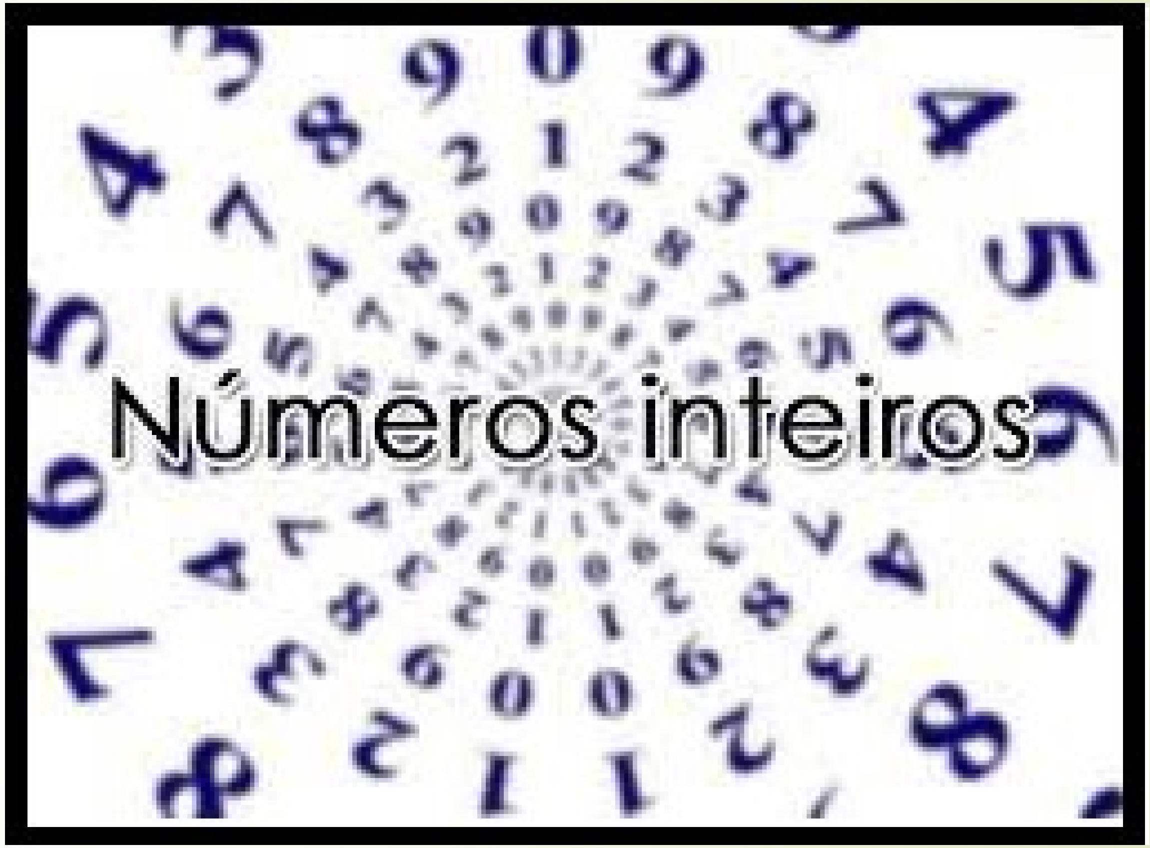
Mas se n = 0 e s(n) = n+2 teremos ?

$s(0) = 2, \qquad s(2) = 4, \qquad s(4) = 6, \ldots$

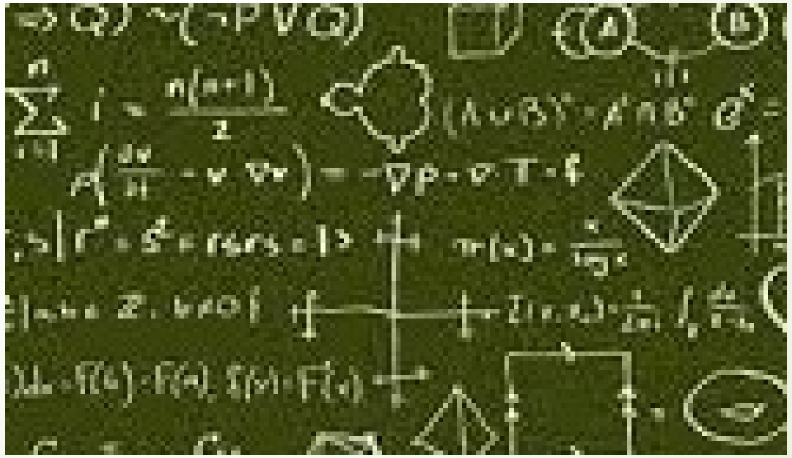
E se n= 1 e s(n) = n+2 teremos?

s(1)=3, s(3) =5,   s(5)=7, . . .

- Os inteiros, embora estejam em número infinito, são vistos como construções finitas, baseadas em regras bem estabelecidas, aos quais se pode submeter, por isso mesmo certos tipos de raciocínio.



Para averiguar se uma sentença ou uma fórmula matemática é verdadeira necessitamos colocar a mesma a prova.



Neste caso uma das alternativas de averiguação é a Indução matemática.

A Indução Matemática é uma técnica de demonstração de teoremas, muito utilizada na matemática e na ciência da computação.

Técnica de demonstração utilizando o princípio da Indução

Uma afirmação pode ser ou não verdadeira.

Para averiguarmos se a afirmação é ou não verdadeira basta encontrar um fato que comprove a não afirmação.

Forneça contra exemplos para as seguintes sentenças:

1 – Todas as aves voam grandes distâncias.

2 – Todas as entradas de dados para um programa de computador são fornecidas através do teclado.

3 – O consumo de energia elétrica residencial só reduz se trocarmos as lâmpadas da casa por uma potência menor.

- Relembrando.

- Para refutar uma afirmação basta então encontrar um caso que comprove a não afirmação.

- Mas como podemos provar que uma determinada afirmação é verdadeira para qualquer elemento do contexto ou da coleção?

- Em alguns casos quando desenvolvemos um programa de computação necessitamos testar a nossa estrutura lógica, ou uma fórmula matemática específica.

Nestes casos seria improdutivo ficar fornecendo dados aleatoriamente, ainda mais que não teríamos 100 % de certeza que o nosso programa ou sistema funcionará como o imaginado.

- Existe uma técnica de demonstração que se aplica a determinadas situações, para ilustrar o uso desta técnica, imagine que você esta se locomovendo por uma estrada sem fim. Como poderá saber se é capaz de chegar a uma distância arbitrariamente grande?

Vamos supor as seguintes afirmações sobre o seu deslocamento nesta estrada.

1 – Você pode caminhar os primeiros 100 metros.

2 – Se você pode caminhar os primeiros 100 metros,

você pode sempre caminhar os 100 metros seguintes.

Observe que a sentença 2 é uma implicação, ou seja ela só acontece se a primeira acontecer.

Assim podemos concluir:

- *Que, se é possível percorrer os primeiros 100 metros, então será possível caminhar os próximos 100 metros.*
- *E se for possível caminhar os primeiros 200 metros, então será possível caminhar os próximos 100 metros, e assim sucessivamente.*
- *Mas se por algum motivo não for possível caminhar os primeiros 100 metros, então não será possível alcançar os 100 metros e muito menos os 200 metros.*
- *Caso seja possível andar os primeiros 100 metros, mas por algum motivo os próximos 100 metros não for possível caminhar, então não será possível atingir os 200 meros e seguindo o mesmo princípio não alcançaremos os 300 metros , e assim sucessivamente.*

O método da Indução

Tomando o exemplo da estrada, vamos representar os primeiros 100 metros pelo número 1, os 200 metros pelo número 2 , os 300 metros pelo número 3 e assim sucessivamente.

Então estamos trabalhando com os números inteiros maiores ou iguais a 1.

- Logo podemos assumir que um número inteiro, maior ou igual a 1, possuí a propriedade mencionada.
- (Andar pela estrada 100 metros)

Portanto, podemos escrever:

P(n) = (um número inteiro positivo “n” diferente de zero, possui a propriedade P).

Vamos relacionar agora as afirmações 1 e 2 com a notação matemática.

a) $P(1)$ = (1 tem a propriedade P)

b) Para qualquer inteiro positivo "k"

$P(k) \Rightarrow p(k+1)$ (Se um número possuí a propriedade P,
Então o número seguinte também o
Tem).

- Logo se pudermos demonstrar as sentenças a e b, então P(n) vale para qualquer inteiro positivo, da mesma maneira como poderemos percorrer uma metragem arbitrária da estrada.

Enunciado do Princípio da Indução Matemática.

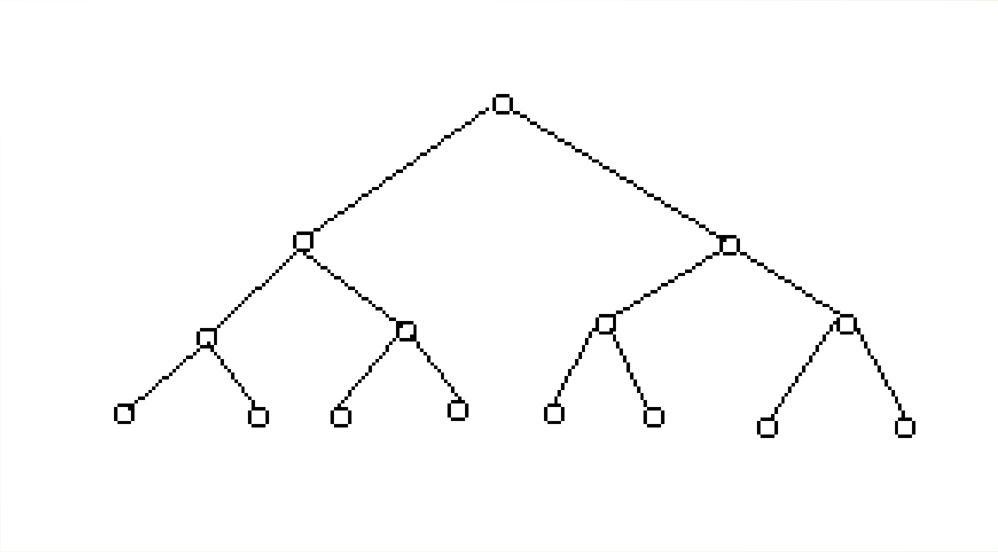
"Dado $n \in Z$, suponhamos que a cada inteiro $k \geq n$ esteja associada uma afirmação $P(k)$. Então, $P(k)$ será verdadeira para todo $k \geq n$ desde que seja possível provar o seguinte:

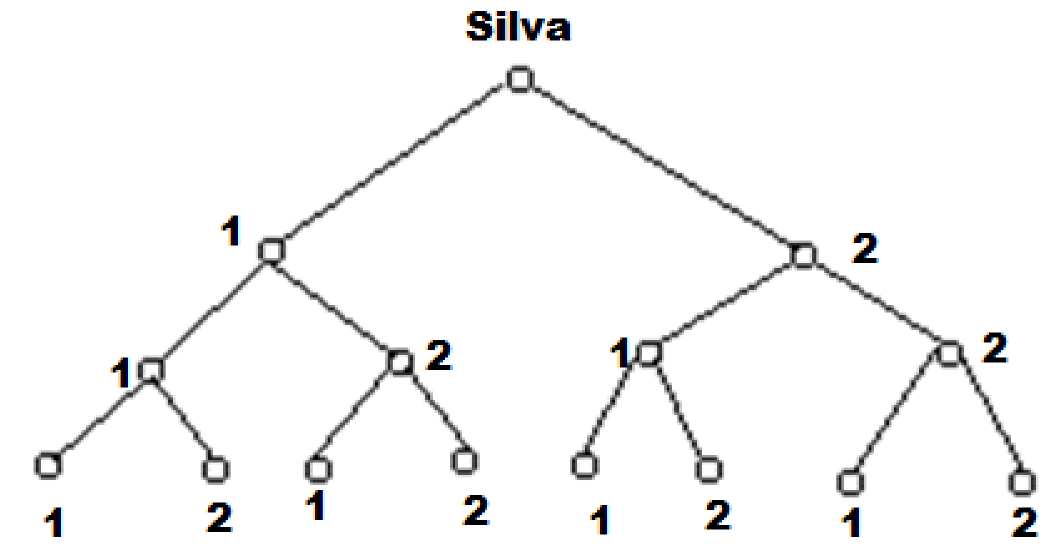
i. $P(n)$ é verdadeira;

ii. Se $P(k)$ é verdadeira para $k \geq n$, então $P(k+1)$ também é verdadeira."

Exemplo.

Vamos supor que o clã Silva tenha dois filhos e que todo filho terá dois filhos e assim sucessivamente então teremos:





= 2

= 4

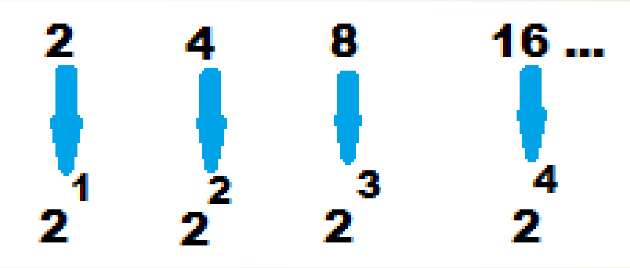
= 8

Então podemos supor que a próxima geração terá:

2 , 4 , 8 , ...

16 pessoas

A qual podemos representar:



Então generalizando
podemos expressar esta situação matematicamente como:

$$P(n) = 2^n$$

Colocando na notação matemática

1 - $P(1) = 2$ Verdadeira

2 – $P(k) = 2^k$ Supor verdadeira a afirmação

3 - $P(k+1) = 2^{k+1}$ Testar está hipótese.

Então a cada geração teremos 2 descendentes para cada descendente.

Logo sabemos que: $n = 1 \rightarrow s(1) = 2 \rightarrow s(2) = 4.....$

Então $podemos\ afirmas\ que\ s(1) = 1.2 = 2$
S(2) = 2.2 =4 e s(4) = 2.4 = 8 ou seja 2^n

$n = k\ podemos\ escrever\ que\ P(k) = 2^k$

$$p(k+1) = 2^{k+1}$$

$$P(k+1) = 2.2^k$$

Utilizando o passo anterior

$P(k) = 2^k$ Supor verdadeira a afirmação

$$P(k+1) = 2.P(k)$$

$$P(k+1) = 2.2^k$$

$$p(k+1) = 2^{k+1}$$

Encontramos a mesma solução,
Portanto a afirmação é verdadeira.

Exemplos.

1) Prove que $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para qualquer n ≥ 0 e n $\in Z$

Solução

- Para $n = 0 \rightarrow 2^0 = 2^{0+1} - 1$ $Confirmado.$
- Para $n = 1 \rightarrow 2^0 + 2^1 = 2^{1+1} - 1$ $Confirmado.$
- Para $n = 2 \rightarrow 2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^{2+1} - 1$ $Confirmado.$
- Para $n = k$ $teremos:$

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k = 2^{k+1} - 1$

Então para $n = k + 1$

$2^0 + 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^k + 2^{k+1} = 2^{k+1+1} - 1$

$2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} = 2^{k+2} - 1$
$2^{k+1} . 2 - 1 = 2^{k+2} - 1$
$2^{k+2} - 1 = 2^{k+2} - 1$

Confirmado a afirmação inicial. CQD.

2) Provar que a equação $1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$ considerando n $\in$ Z (Inteiros positivos sem o zero).

Solução

Para $n = 1 \rightarrow 1^2 = (2.1 - 1)$ $Confirmado.$

Para $n = 2 \rightarrow 2^2 = 1 + (2.2 - 1)$ $Confirmado.$

Para $n = 3 \rightarrow 3^2 = 1 + 3 + (2.3 - 1)$ $Confirmado.$

Para $n = k$ $teremos$:

$k^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2\mathrm{k} - 1)$

Então para $n = k + 1$

$(k + 1)^2 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (2\mathrm{k} - 1) + 2(k + 1) - 1$

$(k + 1)^2 = k^2 + 2(k + 1) - 1$

$k^2 + 2k + 1 = k^2 + 2k + 2 - 1$

$2k^2 + 2k + 1 = 2k^2 + 2k + 1$

C.Q.D

3) Prove que o número $7^n - 2^n$ é $divisível\ por$ 5.

Solução

- Para n =1 temos $\frac{7^1-2^1}{5} = 1$ confirmado.
- Para n = 2 temos $\frac{7^2-2^2}{5} = 9$ $confirmado.$
- Para n = k temos $\frac{7^k-2^k}{5} = m \rightarrow 7^k - 2^k = 5m \rightarrow 7^k = 5m + 2^k$ para $m \in Z_+^*;$
- Para n = k+1 Teremos:

$\frac{7^{(k+1)}-2^{(k+1)}}{5} =$

$\frac{7^k 7-2^k 2}{5} =$

$\frac{(5m+2^k)7-2^k 2}{5} =$

$\frac{35m+7.2^k-2^k 2}{5} =$

$\frac{35m+5.2^k}{5} =$ logo $7m + 2^K$ $C.Q.D.\ pois\ \ m\ e\ k\ \in Z_+^*$

Demonstrar que, para qualquer inteiro n.

- $2^n > n \; para \; n \geq 1.$

Solução

- Para n =1 teremos $2^1 > 1$ confirmado.
- Para n = 2 teremos $2^2 > 2$ confirmado.
- Para n=k teremos $2^k > k$ vou supor verdadeira.
- Para n = k +1 teremos:

$2^{K+1} > k + 1$

$2^k . 2 > k + 1$ $\quad$ $\textit{então substituímos } 2^k \textit{ por um número menor que ele.}$

k.2 > k+1 Como K pertence aos inteiros positivos 2k vai ser sempre maior ou igual que k+1.

C.Q.D.

Exercícios

1) Use a Indução matemática para demonstrar que os resultados são válidos para qualquer inteiro positivo n.

$a)\ 2 + 6 + 10 + \cdots + (4n - 2) = 2n^2$

$b)\ 2 + 4 + 6 + \cdots + 2n = n(n + 1)$

$c)\ 4 + 10 + 16 + \cdots + (6n - 2) = n(3n + 1)$

$d)\ 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$

2) Prove que para qualquer inteiro n, positivo:

$a)\ o\ número\ 2^{3n} - 1$ é $divisível\ pôr\ 7.$
$b)\ o\ numero\ 3^{2n} + 7$ é $divísível\ pôr\ 8.$
$c)\ o\ número\ 7^{2n} + 16n - 1$ é $divisível\ pôr\ 64.$

- 3) Demonstrar que, para qualquer inteiro n:

a) $n^2 > 5n + 10\ para\ n\ > 6$

b) $n^2 > n + 1\ para\ n \geq 2.$

c) $n! > n^2$ para n ≥ 4