Wrapped Gaussian

250724
wrapped gaussian을 통해서 초기 분포를 형성하며, Order parameter와 Daido parameter(1차 및 2차 모멘트)를 구해 보려고 한다.

초기 조건은 다음과 같이 구성되어 있다.

$$f_\sigma = \eta_\sigma f_a + (1 - \eta_\sigma) f_b$$

f_a, f_b는 각각 0과 pi에 있는 임의의 unimodal한 분포이며 분산은 서로 같다고 가정을 하였으며, η는 0 혹은 π중에서 어느 위치에 많이 분포하는 가를 의미한다. f_a, f_b의 경우 현제는 가우시안 분포를 사용할 것이다.

Wrapped gaussian distribution n-th moment

$$f_{WN}(\theta; \mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \exp\left[\frac{-(\theta - \mu + 2\pi k)^2}{2\sigma^2}\right],$$

@wikipedia
periodic boundary condition에서의 가우시안 분포는 위의 식과 같이 구성이 된다.

또한 여기의 moment는 다음과 같다.

$$\langle z^n \rangle = \int_\Gamma e^{in\theta} \, f_{WN}(\theta; \mu, \sigma) \, d\theta = e^{in\mu - n^2\sigma^2/2}.$$

우리가 구하려고 하는 order parameter와 Daido order parameter의 경우 각각 1차 및 2차 moment이며, 위상차가 pi만큼 차이나는 wrapped normal distribution이 합쳐진 분포이다.

$$\langle z^n \rangle = \int_\Gamma e^{in\theta} \left[\eta_\sigma f_{WN}(\theta; \mu, \sigma) + (1 = \eta_\sigma) f_{WN}(\theta; \mu + \pi, \sigma)\right] d\theta = \eta_\sigma e^{in\mu - n^2\sigma^2/2} + (1 - \eta_\sigma) e^{in}$$

여기서 $\mu = 0$으로 설정하는 경우 n-th order parameter는 다음과 같이 설정이 가능하다.

$$R_n = |\langle z^n \rangle| = \eta_\sigma e^{-n^2\sigma^2/2} + (-1)^n(1-\eta_\sigma)e^{-n^2\sigma^2/2}$$

Order parameter는 다음과 같이 표현 가능하며

$$R_1 = |1-2\eta_\sigma|e^{-\sigma^2/2},$$

Daido order parameter의 경우 다음과 같이 표현이 가능하다:

$$R_2 = e^{-2\sigma^2},$$

이제 nordmal distirubtion과 standard deviation의 관계를 나타내면,

$$\sigma = \sqrt{-\frac{1}{2}\ln R_2}$$

또한 각각의 분포에 대한 정보와, Order parameter와 Daido order parameter을 사용한다면

$$R_2^{1/4} = e^{-\sigma^2/2}$$

$$|1-2\eta_\sigma| = \frac{R_1}{R_2^{1/4}}$$

OA ansatz 관련된 정리

OA anstaz에서 기본적인 전제는 다음과 같은 관계를 가진다

$$a_n = a^n$$

$$a_2 = a_1^2$$

$$a_n = \langle z^n \rangle = e^{-n^2\sigma^2/2}$$

$$A_n = \eta e^{-n^2\sigma^2/2} + (1-\eta)e^{-in\pi}e^{-n^2\sigma^2/2}$$

$$a_1 = \langle z^1 \rangle = e^{-1\sigma^2/2}, a_2 = \langle z^2 \rangle = e^{-4\sigma^2/2}$$

$$a_2 = e^{-2\sigma^2} = (e^{-\sigma^2/2})^4$$

$$a_3 = e^{-9\sigma^2/2} = (e^{-\sigma^2/2})^9$$

$$a^{(n+2)} = e^{-(n+2)^2\sigma^2/2} = e^{-(n^2+4n+4)\sigma^2/2} = e^{-n^2\sigma^2/2}e^{-(2n+2)\sigma^2}$$

$$a^{(n+2)} = a^{(n)}e^{-(4n+4)\sigma^2/2} = a^{(n)}a_1^{(4n+4)}$$

$$a^{(n)} = e^{-n^2\sigma^2/2} = a_1^{n^2}$$

$$a^{(n-2)} = e^{-(n-2)^2\sigma^2/2} = e^{-(n^2-4n+4)\sigma^2/2} = e^{-(n^2)\sigma^2/2}e^{-(-2n+2)\sigma^2}$$

$$a^{(n-2)} = a^{(n)}e^{-(4n+4)\sigma^2/2} = a^{(n)}a_1^{(-4n+4)}$$

OA anstaz의 식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial f_\sigma}{\partial t} + \frac{\partial\left(v_\sigma f_\sigma\right)}{\partial\theta} = 0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\dot{a}_\sigma^{(n)} + n\cdot\ ia_\sigma^{(n)}\omega + \frac{nK}{2}\left(H_\sigma e^{-i\alpha}a_\sigma^{(n+2)} - H_\sigma^* e^{i\alpha}a_\sigma^{(n-2)}\right)\right)e^{ni\theta}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\dot{a}_\sigma^{(n)} + n\cdot\ ia_\sigma^{(n)}\omega + \frac{nK}{2}\left(H_\sigma e^{-i\alpha}a_\sigma^{(n+2)} - H_\sigma^* e^{i\alpha}a_\sigma^{(n-2)}\right)\right)e^{ni\theta} + c.c.$$

$$\dot{a^{(n)}} = n^2 a_1^{n^2-1} \dot{a}_1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(n^2 a_1^{n^2-1} \dot{a}_1 + n \cdot \ i a_1^{n^2} \omega + \frac{nK}{2} \left(H_\sigma e^{-i\alpha} a_1^{(n+2)^2} - H_\sigma^* e^{i\alpha} a_\sigma^{(n-2)^2} \right) \right) e^{ni\theta} + c.c.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 a_1^{n^2-1}}{2\pi} \left(\dot{a}_1 + \frac{1}{n} i a_1 \omega + \frac{K}{2n} \left(H_\sigma e^{-i\alpha} a_1^{(4n+5)} - H_\sigma^* e^{i\alpha} a_\sigma^{(4n-3)} \right) \right) e^{ni\theta} + c.c.$$

다음과 같이 정리가 되며 OA ansatz와 달리 기본 분포가 gaussian distribution이라고 가정할때 OA ansatz는 하나의 phase reduction equation으로 정리되지 않는다