

# Formelsammlung FEL-3 VO

basierend auf dem Skript von Prof. Reiter

14. Dezember 2022

## 1. Spannungstensor

$$\text{Tensor: } [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

**Spannungsvektor:**  $\vec{\sigma}_n = [\sigma_{ij}] \cdot \vec{n}$      $\sigma_{ni} = \sigma_{ij} n_j$      $\vec{n} \dots$  muss Einheitsvektor sein

**Normalspannung:**  $\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n} = \{[\sigma_{ij}] \cdot \vec{n}\} \cdot \vec{n}$

**Schubspannung:**  $\tau = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2}$  mit  $\sigma = ||\vec{\sigma}_{nn}||$      $\vec{\tau} = \sigma_n - \sigma_{nn} \cdot \vec{n} \rightarrow \tau = ||\vec{\tau}||$

**Hauptnormalspannungen:**  $-\sigma^3 + I_1 \cdot \sigma^2 - I_2 \cdot \sigma + I_3 = 0$  (Eigenwertproblem, lösen mit Rechenknecht)

**Koeffizienten (Invarianten) des Spannungstensors:**

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \text{spur}[\sigma_{ij}]$$

$$I_3 = \det [\sigma_{ij}] = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

$$I_2 = \det \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1$$

**Normalrichtungen zu den Hauptnormalspannungen:**

$$\{[\sigma_{ij}] - \sigma_i \cdot [I]\} \cdot \vec{n}_i = \vec{0} \quad [I] \dots \text{Einheitsmatrix} \quad \sigma_i \dots \text{Einsetzten von } \sigma_1, \sigma_2 \text{ und } \sigma_3 \rightarrow \vec{n}_1, \vec{n}_2 \text{ und } \vec{n}_3$$

**Kesselformeln:**  $\sigma_{xx} = \frac{p \ddot{u}}{2 t} R$      $\sigma_{yy} = \sigma_{\varphi\varphi} = 2 \sigma_{xx}$  (ESZ)     $t \dots$  Wandstärke

**Krümmungsradius: (hier?)**  $R = \frac{E}{\sigma_F} \sqrt{\frac{1}{4} \left[ 3h^2 - M^{EP} \frac{12}{b\sigma_F} \right]}$

## 2. Verzerrungstensor

**Tensor:**  $[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} \quad \varepsilon_i = \vec{n}_i^\top \cdot [\varepsilon_{ij}] \cdot \vec{n}_i$

### Materialgesetz: (isentropie Materiale)

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 - \sigma_3)] + \alpha_T \cdot \Delta T & \varepsilon_{yy} &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 - \sigma_1)] + \alpha_T \cdot \Delta T \\ \varepsilon_{zz} &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 - \sigma_2)] + \alpha_T \cdot \Delta T & \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \cdot \sigma_{xy} = \frac{2 \cdot (1 + \nu)}{E} \cdot \sigma_{xy} \end{aligned}$$

**Materialgesetz 2???**  $G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$  kann nicht stimmen

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \rightarrow \sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

### Vergleichsspannungen

Mises:  $\sigma_{v,M} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)]}$

Mises einfach:  $\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + \zeta \tau^2} \quad \zeta = \left(\frac{\sigma_D}{\tau_D}\right)^2 \text{ oder } = 3 \quad \text{Schweißnaht: } \sigma_{vs} = \sqrt{\sigma_\perp^2 + \tau_\parallel^2 + \tau_\perp^2}$

## 3. Biegungen, Verzerrungen und Energien (?)

**Verzerrung eines Balkens**  $U = \int_{x_1}^{x_2} \frac{N^2}{2EA} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_b^2}{2EJ_b} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_T^2}{2GJ_T} dx + \int_{x_1}^{x_2} \frac{Q^2}{2GA_s} dx$

**Arbeitssatz**  $W = U \quad W = \frac{1}{2} F w_F$

**Castigliano:**  $w_f = \frac{\partial U}{\partial F_i} \quad w_H = \frac{\partial U}{\partial H}$

**Menabrea:**  $\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0$

$X_i \dots$  Auflagekraft; statisch unbestimmte, innere Kraft

**Äußere/Innerlich statische Bestimmtheit:**

2-dimensional:  $N = Z + R - 3 K$

3-dimensional:  $N = Z + R - 6 K$

$Z \dots$  Zwangskräfte

$R \dots$  Reaktionskräfte (Lagerkräfte)

$K \dots$  Körper

**Ritz:** siehe S.176 im Skript

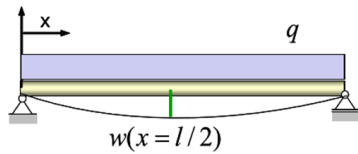
$$\vec{u} \approx \tilde{u}_{(x,y,z)} = \sum_k a_k \vec{\varphi}_{k(x,y,z)} \quad \vec{\varphi}_{k(x,y,z)} \dots \text{Ritz'sche Ansatzfunktion} \quad a_k \dots \text{Koeffizienten}$$

$$V \approx \tilde{V}_{(\vec{u})} = \tilde{V}_{(a_k)} \quad \frac{\partial \tilde{V}_{(a_k)}}{\partial a_k} = 0 \rightarrow a_k$$

## 4. Gesamtpotentiale

### 4.1. Beispiel 1

$$V = \pi^{(i)} + \pi^{(a)}$$



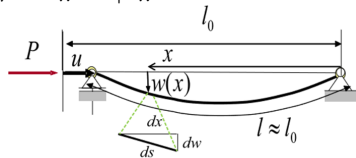
**Inneres Potential  $\pi^{(i)}$ :**  $V_{Biegung} = \int_0^l EJ w''^2 dx$  (Tilde? Dach?)

**Äußeres Potential  $\pi^{(a)}$ :**  $V_{Kraft} = \pm \frac{1}{2} F w_f$   
 Kraft und Verschiebung in verschiedene (+) und gleiche (-) Richtung

$$V_{Streckenlast} = - \int_0^l \tilde{w}(x) q dx$$

### 4.2. Beispiel 2

$$V = \pi^{(i)} + \pi^{(a)}$$



**Inneres Potential  $\pi^{(i)}$**   $V_{Biegung} = \frac{1}{2} \int_0^l EJ w''^2 dx$

**Äußeres Potential  $\pi^{(a)}$**   $V_{Kraft} = -Pu \approx -P \frac{1}{2} \int_0^l w'^2 dx$

#### Mögliche Ansatzfunktionen:

Grundsätzlich kann man jegliche Funktion verwenden, aber diese soll der Biegelinie ähneln.

→ Potenzfunktionen: z.B.  $\varphi(x) = x(l-x)$

→ Trigonometrische Funktionen: z.B.  $\varphi(x) = \sin\left(\frac{x}{l}\pi\right)$

## A. Euler-Knickfälle

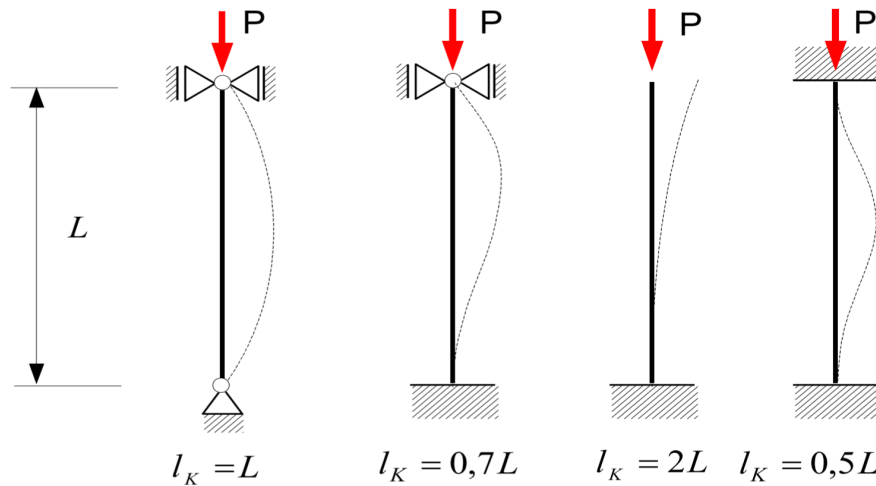


Abbildung 4.9. Kritische Knicklängen  $l_k$  für „Standard-Randbedingungen“

## B. aus MEL2VO

### B.1. Trägheitsmomente

$I_y = \frac{bh^3}{12}$ $I_z = \frac{hb^3}{12}$ $W_y = \frac{bh^2}{6}$ $W_z = \frac{hb^2}{6}$	$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$ $W_y = W_z = \frac{a^3}{6}$ $I_{\bar{y}} = I_{\bar{z}} = \frac{a^4}{12}$ $W_{\bar{y}} = W_{\bar{z}} = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = 0,118 a^3$
$I_y = I_z = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 = 0,5413 R^4$ $W_y = \frac{5}{8} R^3 = 0,625 R^3$ $W_z = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^3 = 0,5413 R^3$	$I_y = I_z = (1+2\sqrt{2}) \frac{R^4}{6} = 0,638 R^4$ $W_y = W_z = 0,5906 R^3$ $I_{\bar{y}} = I_{\bar{z}} = (1+2\sqrt{2}) \frac{R^4}{6} = 0,638 R^4$ $W_{\bar{y}} = W_{\bar{z}} = 0,638 R^3$
$I_y = \frac{bh^3}{36}$ $I_z = \frac{hb^3}{48}$ $W_y = \frac{bh^2}{24} \text{ für } e = \frac{2}{3} h$ $W_z = \frac{hb^2}{24}$	$I_y = \frac{h^3}{36} \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{b_1 + b_2}$ $W_y = \frac{h^2}{12} \frac{b_1^2 + 4b_1b_2 + b_2^2}{2b_1 + b_2}$ <p>für <math>e = \frac{h}{3} \frac{2b_1 + b_2}{b_1 + b_2}</math></p>
$I_y = I_z = \frac{\pi d^4}{64}$ $W_y = W_z = \frac{\pi d^3}{32}$	$I_y = I_z = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{64}$ $W_y = W_z = \frac{\pi (D^4 - d^4)}{32D}$ <p>bei geringer Wanddicke <math>\left(\frac{s}{d_m}\right)^2 \ll 1</math>:</p> $I_y = I_z = \frac{\pi d_m^3 s}{8}, W_y = W_z = \frac{\pi d_m^2 s}{4}$
$I_y = \frac{\pi a^3 b}{4}$ $I_z = \frac{\pi b^3 a}{4}$ $W_y = \frac{\pi a^2 b}{4}$ $W_z = \frac{\pi b^2 a}{4}$	$I_y = \frac{\pi}{4} (a_1^3 b_1 - a_2^3 b_2)$ $W_y = \frac{\pi (a_1^2 b_1 - a_2^2 b_2)}{4 a_1}$ <p>bei geringer Wanddicke:</p> $I_y = \frac{\pi a^2 (a+3b)s}{4}, W_y = \frac{\pi a (a+3b)s}{4}$
$I_y = \left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) r^4 = 0,1098 r^4$ $W_y = I_y / e = 0,1908 r^3$ <p>für <math>e = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) r = 0,5756 r</math></p>	$I_y = 0,1098 (R^4 - r^4) - 0,283 R^2 r^2 \frac{R-r}{R+r}$ $W_{y1,2} = I_y / e_{1,2}$ <p>für <math>e_1 = \frac{4}{3\pi} \frac{R^2 + Rr + r^2}{R+r}</math> bzw. <math>e_2 = R - e_1</math></p>

## B.2. Biegelinien

	Belastungsfall	Gleichung der Biegelinie	Durchbiegung	Neigungswinkel
8		$w(x) = \frac{q l^4}{24 E I_y} \left[ 3 - 4 \frac{x}{l} + \left( \frac{x}{l} \right)^4 \right]$	$f = \frac{q l^4}{8 E I_y}$	$\alpha = \frac{q l^3}{6 E I_y}$
9		$w(x) = \frac{q_2 l^4}{120 E I_y} \left[ 4 - 5 \frac{x}{l} + \left( \frac{x}{l} \right)^5 \right]$	$f = \frac{q_2 l^4}{30 E I_y}$	$\alpha = \frac{q_2 l^3}{24 E I_y}$
10		$w(x) = \frac{q_1 l^4}{120 E I_y} \left[ 11 - 15 \frac{x}{l} + 5 \left( \frac{x}{l} \right)^4 - \left( \frac{x}{l} \right)^5 \right]$	$f = \frac{11}{120} \frac{q_1 l^4}{E I_y}$	$\alpha = \frac{q_1 l^3}{8 E I_y}$
11		$0 \leq x \leq l:$ $w(x) = -\frac{F g l^2}{6 E I_y} \left[ \frac{x}{l} - \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right]$ $0 \leq \bar{x} \leq a:$ $w(\bar{x}) = \frac{F g^3}{6 E I_y} \left[ 2 \frac{l}{a} \frac{\bar{x}}{a} + 3 \left( \frac{\bar{x}}{a} \right)^2 - \left( \frac{\bar{x}}{a} \right)^3 \right]$	$f = \frac{F g^2 (l+a)}{3 E I_y}$ $f_m = \frac{F g l^2}{9 \sqrt{3} E I_y}$ in $x_m = \frac{l}{\sqrt{3}}$	$\alpha = \frac{F g l (2l+3a)}{6 E I_y}$ $\alpha_A = \frac{F g l}{6 E I_y}$ $\alpha_B = \frac{F g l}{3 E I_y}$
12		$0 \leq x \leq l:$ $w(x) = -\frac{q a^2 l^2}{12 E I_y} \left[ \frac{x}{l} - \left( \frac{x}{l} \right)^3 \right]$ $0 \leq \bar{x} \leq a:$ $w(\bar{x}) = \frac{q a^4}{24 E I_y} \left[ 4 \frac{l}{a} \frac{\bar{x}}{a} + 6 \left( \frac{\bar{x}}{a} \right)^2 - 4 \left( \frac{\bar{x}}{a} \right)^3 + \left( \frac{\bar{x}}{a} \right)^4 \right]$	$f = \frac{q a^3 (4l+3a)}{24 E I_y}$ $f_m = \frac{q a^2 l^2}{18 \sqrt{3} E I_y}$ in $x_m = \frac{l}{\sqrt{3}}$	$\alpha = \frac{q a^2 (l+a)}{6 E I_y}$ $\alpha_A = \frac{q a^2 l}{12 E I_y}$ $\alpha_B = \frac{q a^2 l}{6 E I_y}$