Formelsammlung FEL-3

basierend auf dem Skript von Prof. Reiter

7. Dezember 2022

1 Spannungstensor

Tensor: $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$

Spannungsvektor: $\vec{\sigma}_n = [\sigma_{ij}] \cdot \vec{n}$ $\quad \vec{n}$ ... muss Einheitsvektor sein

Normalspannung: $\sigma_{nn} = \vec{\sigma}_n \cdot \vec{n}$

Schubspannung: $\tau = \sqrt{\sigma^2 - \sigma_n^2}$ mit $\sigma = ||\vec{\sigma}_{nn}||$ $\qquad \vec{\tau} = \sigma_n - \sigma_{nn} \cdot \vec{n} \quad \rightarrow \quad \tau = ||\vec{\tau}||$

Hauptnormalspannungen: $-\sigma^3 + I_1 \cdot \sigma^2 - I_2 \cdot \sigma + I_3 = 0$ (Eigenwertproblem, lösen mit Rechenknecht)

Koeffizienten (Invarianten) des Spannungstensors:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = Spur\,[\sigma_{ij}]$$

$$I_3 = \det\,[\sigma_{ij}] = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3$$

$$I_2 = \det \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} + \det \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1$$

Normalrichtungen zu den Hauptnormalspannungen:

$\{[\sigma_{ij}] - \sigma_i \cdot [I]\} \cdot \vec{n}_i = \vec{0}$ $\quad [I]$ ... Einheitsmatrix $\quad \sigma_i$ ... Einsetzten von σ_1, σ_2 und $\sigma_3 \rightarrow \vec{n}_1,\ \vec{n}_2$ und $\vec{n}_3$

Kesselformeln: $\sigma_{xx} = \dfrac{p_{ü}}{2\,t} R$ $\qquad \sigma_{yy} = \sigma_{\varphi\varphi} = 2\ \sigma_{xx}$ $\qquad$ (ESZ) $\qquad t$ ... Wandstärke

2 Verzerrungstensor

Tensor: $[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{\gamma_{xy}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_{yy} & \frac{\gamma_{yz}}{2} \\ \frac{\gamma_{zx}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$ $\qquad \varepsilon_i = \vec{n}_i^\top \cdot [\varepsilon_{ij}] \cdot \vec{n}_i$

Materialgesetz: (isentrope Materiale)

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\sigma_1}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_2}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_3}{E} + \alpha_T \cdot \Delta T \qquad \varepsilon_{yy} = \frac{\sigma_2}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_3}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_1}{E} + \alpha_T \cdot \Delta T$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_3}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_1}{E} - \nu \cdot \frac{\sigma_2}{E} + \alpha_T \cdot \Delta T \qquad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \cdot \sigma_{xy} = \frac{2 \cdot (1+\nu)}{E} \cdot \sigma_{xy}$$

Vergleichsspannungen

Mises: $\sigma_{v,M} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6 \cdot ({\tau_{xy}}^2 + {\tau_{xz}}^2 + {\tau_{yz}}^2)\right]}$

Mises einfach: $\sigma_v = \sqrt{\sigma^2 + \zeta\ \tau^2}$ $\quad \zeta = \left(\frac{\sigma_D}{\tau_D}\right)^2$ oder $= 3$ $\qquad$ Schweißnaht: $\sigma_{vs} = \sqrt{\sigma_\perp^2 + \tau_\parallel^2 + \tau_\perp^2}$

3 Biegungen, Verzerrungen und Energien (?)

Verzerrung eines Balkens $U = \int_{x_1}^{x_2} \frac{N^2}{2\ E\ A} \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_b^2}{2\ E\ J_b} \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_T^2}{2\ G\ J_T} \mathrm{d}x + \int_{x_1}^{x_2} \frac{Q^2}{2\ G\ A_s} \mathrm{d}x$

Arbeitssatz $W = U \qquad W = \frac{1}{2}\ F\ w_F$

Castigliano: $w_f = \frac{\partial U}{\partial F_i} \qquad w_H = \frac{\partial U}{\partial H}$

Menabrea: $\frac{\partial U}{\partial X_i} = 0$

$X_i \ldots$ Auflagekraft; statisch unbestimmte, innere Kraft

Äußere/Innerlich statische Bestimmtheit:

2-dimensional: $N = Z + R - 3\ K$ $\qquad$ 3-dimensional: $N = Z + R - 6\ K$

$Z \ldots$ Zwangskräfte $\qquad R \ldots$ Reaktionskräfte (Lagerkräfte) $\qquad K \ldots$ Körper

Ritz: siehe S.176 im Skript

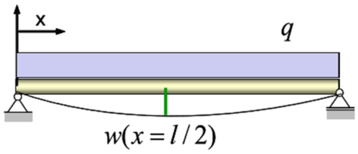
$\vec{u} \approx \tilde{u}_{(x,y,z)} = \sum_k a_k\ \vec{\varphi}_{k(x,y,z)}$ $\qquad \vec{\varphi}_{k(x,y,z)} \ldots$ Ritz'sche Ansatzfunktion $\qquad a_k \ldots$ Koeffizienten

$V \approx \tilde{V}_{(\tilde{u})} = \tilde{V}_{(a_k)} \qquad \frac{\partial \tilde{V}_{(a_k)}}{\partial a_k} = 0 \rightarrow a_k$

4 Gesamtpotentiale

4.1 Beispiel 1

$V = \pi^{(i)} + \pi^{(a)}$



Inneres Potential $\pi^{(i)}$: $V_{Biegung} = \int_0^l E\ J\ w''^{\,2}\ \mathrm{d}x$ (Tilde? Dach?)

Äußeres Potential $\pi^{(a)}$: $V_{Kraft} = \pm\frac{1}{2}\ F\ w_{(f)}$

Kraft und Verschiebung in verschiedene (+) und gleiche (−) Richtung

$V_{Streckenlast} = -\int_0^l \tilde{w}_{(x)}\ q\ \mathrm{d}x$

4.2 Beispiel 2

$V = \pi^{(i)} + \pi^{(a)}$