Практическая задача №1

№ 1.5

В файле main.py представлен расчет $(X-2)^9$ методом Горнера:
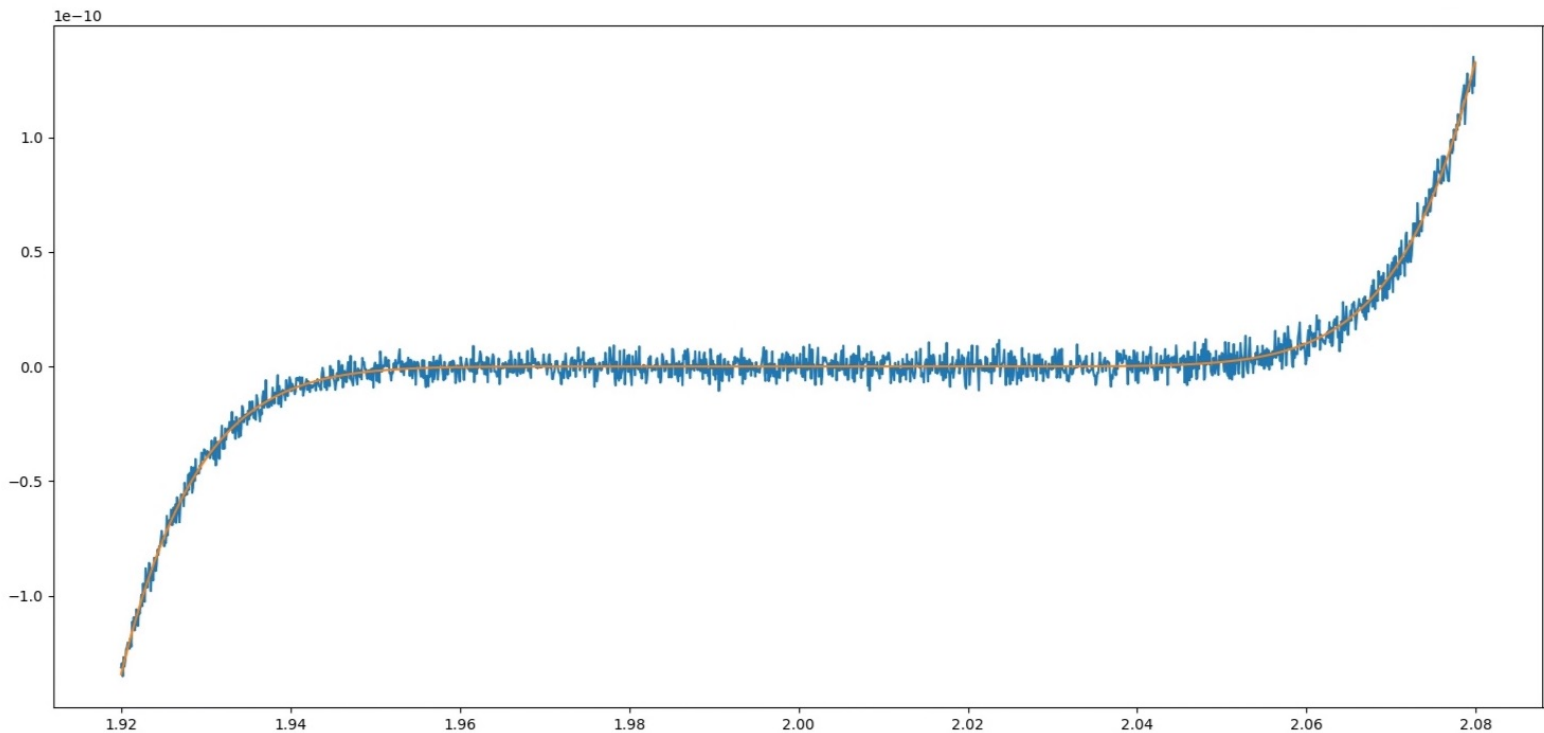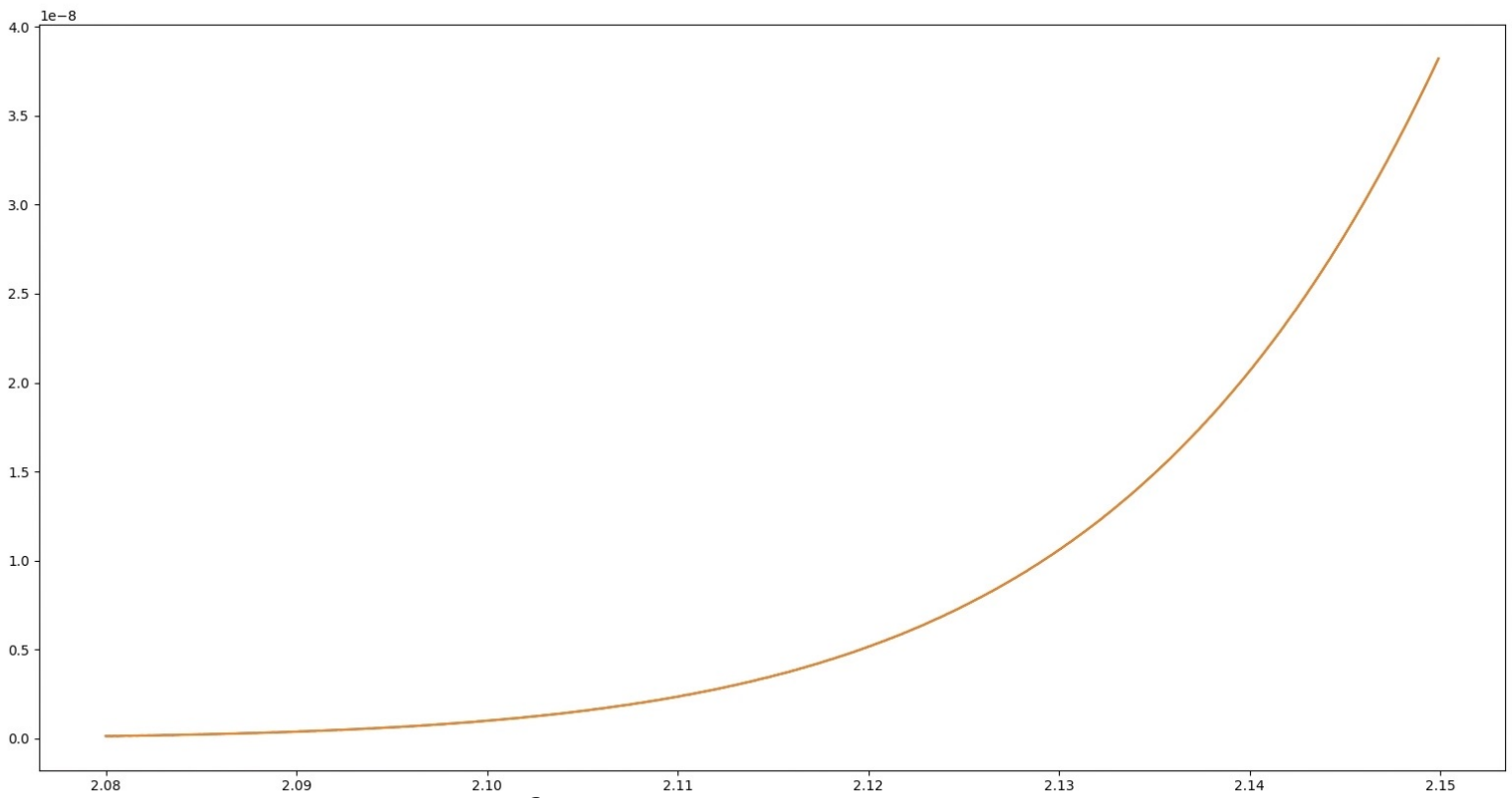

Рис 1

оранжевый — прямой подсчет
синий — методом Горнера

Как видно, в окрестности точки $x = 2$ разброс довольно большой. Однако если перейти к отрезку $[2,08; 2,15]$ то получаем, что метод Горнера почти полностью совпадает с прямым вычислением (рис. 2)

Рис 2

Делаем вывод, что алгоритм непригоден для $u(2)$. Попытаемся объяснить.

Из номера 6.5 : $\dfrac{a - a^*}{a^*} \leqslant 2^{-p} = \mathcal{E}_м$

Сделаем оценку отклонения значения по методу Горнера $\mathcal{H}(p, x)$ от $p(x) = (x - 2)^9$

Пусть:

$$f_{2n} = \dfrac{2n\mathcal{E}_м}{1 - 2n\mathcal{E}_м} \overset{n=9}{=} \dfrac{2 \cdot 9 \cdot 2^{-52}}{1 - 2 \cdot 9 \cdot 2^{-52}} \overset{n << \frac{1}{\mathcal{E}_м}}{\approx} 9 \cdot 2^{-51}$$

$$|\mathcal{H}(p, x) - p(x)| \leqslant f_{2n} \cdot \sum_{i=0}^{n} |a_i x^i| = 9 \cdot 2^{-51} \cdot$$

$$\cdot (\,|x^9| + 18\,x^8 + 144|x^7| + 672\,x^6 + 2016|x|^5 + 4032 x^4 +$$

$$+ 5376|x^3| + 4606\,x^2 + 2304|x| + 512\,)$$

Оценка предполагает отдельное выполнение сложения и умножения, поэтому в J берем $2n$

Теперь посмотрим на величину погрешности относительно значений. В файле test.py произведем вычисления и построим график (рис. 3)
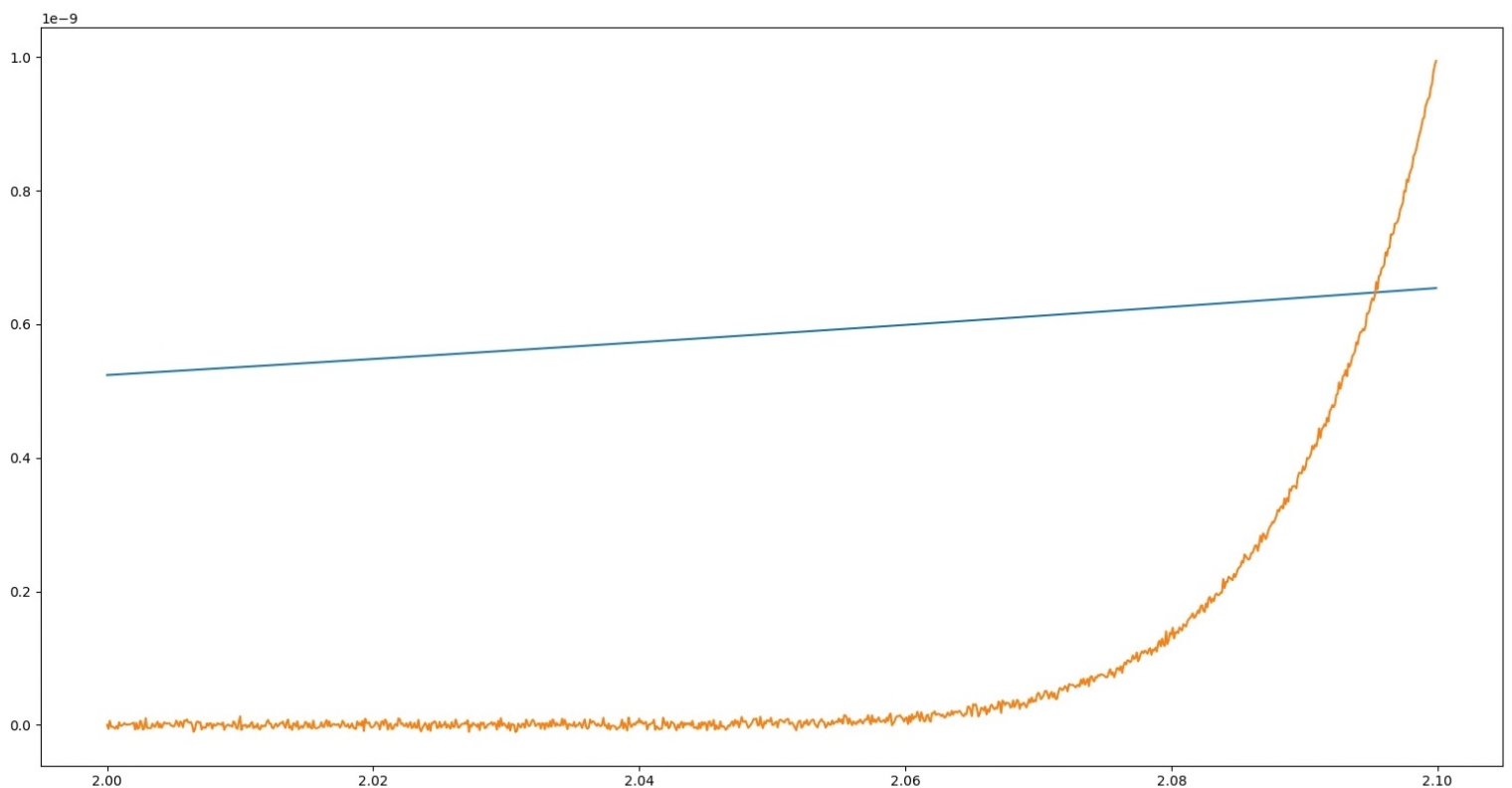

Рис 3.

Здесь:
• оранжевый — метод Бортнера
• синий — погрешность

Мы оцениваем правую полуокрестность. По графику мы видим, что до $X = 2.08$ модуль погрешности превосходит

модуль значения функции Горнера. То есть на отрезке $[1,92; 2,08]$ погрешность не позволяет оценить значение функции. Однако после $x = 2,08$ значение функции Горнера растет стремительнее абсолютной погрешности. Из-за этого при $x > 2.08$ относительная погрешность уменьшается. В силу этого метод снова применим.