Problemas para modelagem em aula - 2024

Aluno: Guilherme Fernandes Alves; Nº USP: 10774361
PNV5761 - Programação matemática aplicada a problemas de transporte.

1 Questão 1

1.1 Enunciado

Considere uma empresa que fabrica um produto cuja demanda é tipicamente sazonal, isto é, ao longo do ano há fortes oscilações na demanda. Para operar neste mercado, a empresa pode utilizar os seguintes procedimentos:

a. demitir operários no início de um mês;
b. contratar operários no início de um mês;
c. utilizar até 35 horas extras por mês de cada operário, cuja jornada normal mensal totaliza 175 horas;
d. estocar o produto de um mês para o mês seguinte;
e. retardar o atendimento de parte da demanda de um mês para o mês seguinte.

Admita conhecidos:

f. o custo da demissão de um operário (despesa para atender a legislação trabalhista);
g. o custo da contratação de um operário (treinamento);
h. o custo médio do homem-hora extra;
i. o custo de manter uma unidade do produto em estoque de um mês para o mês seguinte;
j. a demanda em cada mês do próximo ano;
k. o número de operários e a quantidade de produto em estoque ao fim deste ano;
l. o salário mensal médio de um operário (sem incluir horas extras);
m. o número de homens-hora para fabricar uma unidade do produto;
n. o desconto concedido por unidade do produto cuja entrega é retardada para o mês seguinte ao da demanda;
o. o número máximo de unidades que podem ser mantidas em estoque de um mês para o mês seguinte;
p. o estoque desejado ao fim do próximo ano.

Proponha um modelo matemático para definir o programa de produção e a política de recursos humanos da empresa para o próximo ano.

1.2 Resolução

1.2.1 Simbologia

- C_{dem}: custo da demissão de um operário. (eq. 'f')
- C_{con}: custo da contratação de um operário. (eq. "g")
- C_{hhr}: custo médio do homem-hora extra. (eq. "h")
- C_{arm}: custo de manter uma unidade do produto em estoque de um mês para o mês seguinte. (eq. "i")
- D_t: demanda no mês t, com $t = 1, 2, \ldots, 12$. (eq. "j")
- O_0: número de operários ao fim deste ano. (eq. "k")
- E_0: estoque ao fim deste ano. (eq. "k")
- S_{ope}: salário mensal médio de um operário. (eq. "l")
- H_{hhr}: número de homens-hora para fabricar uma unidade do produto. (eq. "m")
- P_{des}: desconto concedido por unidade do produto cuja entrega é retardada para o mês seguinte ao da demanda. (eq. "n")
- Q: capacidade de armazenamento. Número máximo de unidades que podem ser mantidas em estoque de um mês para o mês seguinte. (eq. "o")
- E_{12}: Estoque desejado ao fim do próximo ano. (eq. "p")

1.2.2 Variáveis de decisão

Seja t uma variável inteira que representa o mês, com $t = 1, 2, \ldots, 12$.

- x_t - inteira - Número de funcionários demitidos no início do mês t
- y_t - inteira - Número de funcionários contratados no início do mês t
- z_t - inteira - Número de horas extras utilizadas no mês t, somadas as horas extras de todos os funcionários
- w_t - inteira - Quantidade de produto estocado no mês t
- u_t - inteira - Quantidade de demanda não atendida no mês i que será atendida no mês $i+1$, com $i = 1, 2, \ldots, 11$

1.2.3 Variáveis auxiliares

1. Número de operários disponíveis no mês t:

   O número de operários disponíveis em um mês t é dado pela quantidade de operários ao fim do ano anterior mais a quantidade de operários contratados até antes do mês t menos a quantidade de operários demitidos até antes do mês t. Ou seja:

$$O_t = O_0 + \sum_{j=1}^{t} y_j - \sum_{k=1}^{t} x_k, \quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z}$$

2. Número de horas disponíveis no mês t:

Tendo posse do número total de funcionários disponíveis, é possível calcular o número total de horas disponíveis no mês t, para isso multiplicamos a quantidade de operários disponíveis no mês t pela jornada normal mensal de cada operário, que é de 175 horas. Soma-se a isso o número de horas extras utilizadas no mês t:

$$H_t = 175 \cdot O_t + z_t, \quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z}$$

3. Quantidade de produto produzido no mês t:

   A produção de um mês é facilmente calculada dividindo-se o número de horas disponíveis no mês t pelo número de homens-hora para fabricar uma unidade do produto:

$$q_t \leq \frac{H_t}{H_{hhr}}, \quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z}$$

4. Demanda atendida no mês t:

   A demanda atendida no mês t é a demanda total do mês menos a quantidade de demanda não atendida no mês t (que será postergada para o mês seguinte):

$$d_t = D_t - u_t, \quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z}$$

5. Quantidade de produto estocado no mês t:

   Já para a quantidade de estoque, devemos tomar em conta que o estoque do mês anterior mais a produção do mês menos a demanda atendida do mês é igual ao estoque do mês atual:

$$E_t = E_0 + \sum_{j=1}^{t} (q_j - d_j - w_j), \quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z}$$

1.2.4 Função objetivo

Minimizar o custo total da empresa, que é a soma dos custos de demissão, contratação, horas extras, armazenamento e penalidades de atraso.

1. **Custo de demissão:**

$$f_{dem} := \sum_{t=1}^{12} C_d \cdot x_t$$

2. **Custo de contratação:**

$$f_{con} := \sum_{t=1}^{12} C_c \cdot y_t$$

3. **Custo relativo ao salario dos funcionários:**

$$f_{sal} := \sum_{t=1}^{12} S_{ope} \cdot O_t$$

4. **Custo de horas extras:**

$$f_{hor} := \sum_{t=1}^{12} C_h \cdot z_t$$

5. **Custo de armazenamento:**

$$f_{arm} := \sum_{t=1}^{12} C_{arm} \cdot w_t$$

6. **Penalidades de atraso da demanda:**

$$f_{pen} := \sum_{t=1}^{11} P_d \cdot u_t$$

A função, portanto, deverá ficar com a seguinte forma:

$$\min\left(f_{dem} + f_{con} + f_{sal} + f_{hor} + f_{arm} + f_{pen}\right) =$$
$$\min\left(\sum_{t=1}^{12} C_d \cdot x_t + \sum_{t=1}^{12} C_c \cdot y_t + \sum_{t=1}^{12} S_{ope} \cdot O_t + \sum_{t=1}^{12} C_h \cdot z_t + \sum_{t=1}^{12} C_{arm} \cdot w_t + \sum_{t=1}^{11} P_d \cdot u_t\right)$$

1.2.5 Restrições

1. Restrição de demanda (eq. "j" e "m")

   Ao final do último mês, todas as demandas devem ser necessariamente atendidas:

$$\sum_{t=1}^{12} d_t = \sum_{t=1}^{12} D_t$$

2. Restrição de horas extras.

   Sabemos que o número de horas extras máximas de cada funcionário é de 35 horas. Portanto:

$$z_t \leq 35 \cdot O_t, \quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z}$$

3. Restrição de capacidade de armazenamento (eq. "o")

Sabemos que o estoque no mes t nunca pode ser superior à capacidade máxima do armazém (Q).

$$w_t \leq Q, \quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z}$$

4. Estoque desejado ao fim do próximo ano (eq. "p")

O estoque do último mês já está definido, portanto:

$$w_{12} = E_{12}$$

5. Espaço das variáveis.

Restrições de não negatividade (estoque, horas extras, contratação, demissão, demanda não atendida)
Apesar de parecer óbvias em muitos dos casos, podemos definir explicitamente:

$$\begin{aligned}
w_t \geq 0, &\quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z} \\
z_t \geq 0, &\quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z} \\
y_t \geq 0, &\quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z} \\
x_t \geq 0, &\quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z} \\
u_t \geq 0, &\quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 11\} \subset \mathbb{Z} \\
E_t \geq 0, &\quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z} \\
O_t \geq 0, &\quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z} \\
H_t \geq 0, &\quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z} \\
d_t \geq 0, &\quad \forall t \in \{1, 2, \ldots, 12\} \subset \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

2 Questão 2

2.1 Enunciado

Uma empresa de navegação precisa de um navio durante 5 anos e pode afretá-lo por períodos múltiplos de 6 meses. Ela sabe que haverá oscilações no mercado de frete e antevê quanto pagará pelo afretamento do navio entre o início do semestre i e o fim do semestre j, para quaisquer $i = 1, 2, ..., 10$ e $j = i, 2, ..., 10$. Estabelecer o modelo matemático para determinar a programação de afretamento do navio.

2.2 Resolução

2.2.1 Simbologia

- Admitido conhecido o valor do frete para cada semestre: c_{ij}, $i = 1, 2, ..., 10$ e $j = i, 2, ..., 10$.

2.2.2 Variáveis de decisão

- x_{ij}- binária - Se um navio é afretado do início do semestre i até o fim do semestre j, $i = 1, 2, ..., 10$ e $j = i, 3, ..., 10$ (note que $j \geq i$, sempre).

2.2.3 Função objetivo

Minimizar o custo total de afretamento do navio durante 5 anos.

$$\min \sum_{i=1}^{10} \sum_{j=i}^{10} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

2.2.4 Restrições

1. O navio deve ser afretado por 5 anos, ou seja, todos os 10 semestres precisam de pelo menos 1 afretamento agendado.

   Como garantir que no semestre m - qualquer - haja um contrato de afretamento?

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m}^{10} x_{ij} \geq 1, \forall m = 1, 2, ..., 10$$

3 Questão 3

3.1 Enunciado

Uma pequena oficina de usinagem fabrica um conjunto formado por 4 peças diferentes e dispõe de 6 máquinas diferentes para executar tal serviço. A máquina i pode fabricar n_{ij} peças do tipo j por dia, se alocada exclusivamente à produção desta peça.

a. Admitindo que seja desprezível o tempo de ajuste de qualquer máquina, quando passa da usinagem de um tipo de peça para outro, formule um modelo matemático para alocar o tempo de cada máquina à produção das diferentes peças.
b. Admitindo, porém, que o tempo de ajuste de qualquer máquina para passar da peça 3 para qualquer tipo de peça (e reciprocamente) fosse muito grande, como deveria ser distribuído o tempo de cada máquina para maximizar o número de conjuntos produzidos num único dia.

3.2 Resolução

Sabemos que $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ (máquinas) e $j = 1, 2, 3, 4$ (peças).

Seja x_{ij} a quantidade de peças do tipo j produzidas pela máquina i, com $x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j$. um subconjunto dos números inteiros.

a. Modelo matemático para alocar o tempo de cada máquina à produção das diferentes peças:

   Definimos uma variável α_{ij} que indica a fração do tempo da máquina i dedicada a produção da peça j. Quantidade de conjuntos montados (y):

$$y = min(x_j) \quad \forall j = 1, 2, 3, 4$$

$$y = min\left(\sum_{i=1}^{6} \alpha_{ij} \cdot n_{ij}\right) \quad \forall j = 1, 2, 3, 4$$

$$max(y)$$

   subject to:

   Convenientemente, podemos linearizar a definição de y, que é uma restrição logica, substituindo por restrições algébricas. Vamos à linearização:

$$y \leq x_j \quad \forall j = 1, 2, 3, 4$$

   Note que: α_{ij} deve ser maior igual a 0. x_{ij} maior igual a zero inteiro e y maior igual a zero inteiro.

b. Modelo com consideração de setup time:

   Aqui podemos fazer algumas hipóteses. Como o enunciado diz que o tempo de setup é muito grande para passar da peça 3 para qualquer outra, podemos considerar que jamais haverá setup de ou para a peça 3. Assim, algumas máquinas podem ser alocadas exclusivamente para a produção da peça 3, enquanto outras podem ser alocadas para a produção das peças 1, 2 e 4.

$$x_3 = \sum_{i=1}^{6} z_i \cdot n_{i3}$$

   Se $z_4 = 1$, a peça 4 somente usina a peça 3. Então quanto vale α_{41}, α_{42} e α_{43}?

$$z_4 + \sum_{j=1 \neq 3}^{4} \alpha_{4j} = 1$$

$$z_i + \alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{iy} \leq 1$$

4 Questão 4

Problema clássico de Naval, bem legal, porém desafiador. Essa questão trata de uma simplificação do problema. O plano de estivagem é um problema bem mais complexo.

4.1 Enunciado

Uma empresa de navegação quer programar o carregamento de um navio porta-contêineres em uma viagem na rota costa leste da América do Sul-Europa. O navio tem capacidade para N contêineres dos quais N_r são refrigerados. Admitindo-se:

- Ordenados os portos da rota, de 1 a n;
- São conhecidas as demandas de transporte de contêineres "dry", d_{ij}, e refrigerados, r_{ij}, entre 2 portos i e j, $i < j$;
- As taxas de frete para esses transportes são f_{ij}^d e f_{ij}^r, respectivamente.

A empresa tem ainda que utilizar o navio para realocar seus contêineres vazios. A oferta ou demanda de contêineres vazios no porto i da rota é representada por v_i. Se $v_i > 0$, v_i representa a oferta de contêineres vazios; em caso contrário, v_i representa a demanda de contêineres vazios. É óbvio que em cada porto, há demanda ou oferta de contêineres vazios do tipo "dry" e do tipo refrigerado. Propor um modelo matemático para fazer a programação do carregamento do navio.

4.2 Resolução

Coisas que eu não sabia: a empresa não cobra para transportar contêineres vazios. Transportar contêineres vazios é uma necessidade de reposicionamento de contêineres.

4.2.1 Simbologia

- N = Número de contêineres
- N_r = Número de contêineres refrigerados
- n = Número de portos
- d_{ij} = Demanda de transporte de contêineres "dry" entre os portos i e j
- r_{ij} = Demanda de transporte de contêineres refrigerados entre os portos i e j
- f_{ij}^d = Taxa de frete para transporte de contêineres "dry" entre os portos i e j
- f_{ij}^r = Taxa de frete para transporte de contêineres refrigerados entre os portos i e j
- v_i^d = Oferta ou demanda de contêineres vazios no porto i
- v_i^r = Oferta ou demanda de contêineres refrigerados vazios no porto i

4.2.2 Variáveis de decisão

- x_{ij}^d = Quantidade de contêineres "dry" transportados entre os portos i e j
- x_{ij}^r = Quantidade de contêineres refrigerados transportados entre os portos i e j
- y_{ij}^d = Quantidade de contêineres "dry" vazios transportados entre os portos i e j
- y_{ij}^r = Quantidade de contêineres refrigerados vazios transportados entre os portos i e j

4.2.3 Função objetivo

Queremos maximizar a receita obtida devido ao frete de contêineres "dry" e refrigerados. Lembre-se que não há custo para transportar contêineres vazios.

$$\max \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \left(f_{ij}^d \cdot x_{ij}^d + f_{ij}^r \cdot x_{ij}^r \right)$$

4.2.4 Restrições

1. A demanda de transporte de contêineres "dry" entre os portos i e j deve ser atendida:

   Perceba que não podemos transportar mais do que o que há de demanda. Deixamos uma inequação para que o modelo tenha mais flexibilidade.

$$x_{ij}^d \leq d_{ij}, \quad \forall j \quad \text{onde} \quad i < j$$

2. A demanda de transporte de contêineres refrigerados entre os portos i e j deve ser atendida:

$$x_{ij}^r \leq r_{ij}, \quad \forall j \quad \text{onde} \quad i < j$$

3. Capacidade do navio

   A quantidade total de contêineres transportados não pode exceder o numero de contêineres disponíveis, isso vale para qualquer trecho e qualquer um dos dois tipos de contêineres.

   Para cada trecho, determinar quais os contêineres que estão sendo transportados e quantos deles forem vazios.

   Determinando os contêineres transportados no trecho i-j:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{n} x_{ij}^r \leq N_r, \quad \forall m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=m+1}^{m} \left(x_{ij}^r + y_{ij}^r + x_{ij}^d + y_{ij}^d \right) \leq N, \quad \forall m \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$$

Agora a gente começa a saga para determinar as restrições de quantidade de contêineres vazios transportados.

Para os portos com oferta de contêineres vazios, devemos atender à demanda

1. Exemplo para o porto 5:

$$y_{45}^n + y_{46}^n + ... + y_{4n}^n \leq v_d$$

2. A oferta (ou demanda) por contêineres "dry" vazios no porto i deve ser atendida:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^d = v_i^d, \quad \forall i$$

3. A oferta (ou demanda) por contêineres refrigerados vazios no porto i deve ser atendida:

$$\sum_{j=1}^{n} y_{ij}^r = v_i^r, \quad \forall i$$

4. A quantidade de contêineres "dry" transportados entre os portos i e j deve ser menor ou igual a quantidade de contêineres "dry" disponíveis no porto i:

$$x_{ij}^d \leq v_i^d, \quad \forall i, j \quad \text{onde} \quad i < j$$

5. A quantidade de contêineres refrigerados transportados entre os portos i e j deve ser menor ou igual a quantidade de contêineres refrigerados disponíveis no porto i:

$$x_{ij}^r \leq v_i^r, \quad \forall i, j \quad \text{onde} \quad i < j$$

5 Questão 5

Essa é uma variação do problema da mochila (tendo uma mochila, como maximizar a utilidade dados os produtos que vamos colocar ali dentro).

5.1 Enunciado

O gerente de publicidade de uma revista semanal precisa resolver o seguinte problema. O número de páginas disponíveis para publicidade em cada uma das próximas semanas é n_t, t = 1, 2, ..., N. A revista recebeu pedidos de m clientes para inserção de propaganda. Cada pedido K especifica:

i. a semana inicial para veiculação do anúncio, i_K;
ii. a duração em semanas da propaganda, d_K;
iii. o tamanho do anúncio, a_K (um quarto de página, meia página ou página inteira);
iv. o preço oferecido p_K.

a. Estabelecer um modelo matemático para selecionar os pedidos que serão aceitos;
b. Admitindo a existência de requisitos de balanceamento de propaganda tais que, se for aceito um pedido do subconjunto S_1, também deverá ser aceito um pedido do subconjunto S_2, que alteração haveria no modelo matemático?

5.2 Resolução

Vamos ignorar o problema de empacotamento para simplificar nossa resolução. Ou seja, não estamos preocupados em alocar os pedidos de forma a maximizar o espaço ocupado em cada semana.

a. O modelo matemático para selecionar os pedidos que serão aceitos é o seguinte:

- Seja x_K uma variável binária que indica se o pedido K foi aceito ou não.
- Seja i_{it} uma variável binária que indica se o pedido K foi aceito para inicio na semana t.

O objetivo é maximizar o lucro total, que é a soma dos lucros de cada pedido aceito:

$$\max \sum_{K=1}^{m} p_K \cdot x_K$$

Sujeito a:

(a) Cada pedido só pode ser aceito uma vez:

$$\sum_{K=1}^{m} x_K \leq 1$$

(b) A duração de cada pedido aceito precisa ser respeitada:

$$\sum_{K=1}^{m} d_K \cdot x_K \leq N - i_{Kt}, \forall t = 1, 2, ..., N$$

(c) Espaço disponivel para publicidade em cada uma das semanas do horizonte

Perceba que os pedidos possuem duração, então precisamos considerar a duração de cada pedido aceito, para sabermos o espaço ocupado em cada semana.
Seja $b_{Kt} = 1$ se t entre o inicio e (inicio + duração) e zero fora disso.
Não podemos utilizar, na semana t, mais do que n_t paginas para publicidade.

$$\sum_{K=1}^{m} a_K \cdot b_{Kt} \cdot x_K \leq n_t, \forall t = 1, 2, ..., N$$

Note que x_K é uma variável binária.

b. Modelo mais complicado:

- Vamos introduzir uma variável binária y_{S1} que indica se ao menos um pedido do subconjunto $S1$ foi aceito.

- Similarmente, y_{S2} indica se ao menos um pedido do subconjunto $S2$ foi aceito.

A função objetivo é a mesma, mas agora temos mais uma restrição:

(a) Se ao menos um pedido do subconjunto $S1$ foi aceito, então um pedido do subconjunto $S2$ também deve ser aceito:

$$y_{S1} \leq y_{S2}$$

6 Questão 6

Problema de designação. Professor menciona que o problema é aparentemente complicado, mas que essa é uma questão clássica. Precisa pensar nos dois casos: máquinas em série e máquinas em paralelo. A formulação muda bastante dependendo do caso.

6.1 Enunciado

Problema de designação para reduzir o gargalo em uma linha de produção. Admita que haja n homens aos quais devem ser designadas n funções em uma linha de produção. Se a tarefa j for atribuída ao homem i, este poderá processar a_{ij} itens por unidade de tempo. O gargalo é aquele homem que na designação efetuada tem a menor produtividade. Estabeleça um modelo de programação linear para maximizar a produção.

6.2 Resolução

A resolução desse problema depende bastante se voce considera que as maquinas estão em paralelo ou em serie. Abaixo fiz uma resolução considerando que as maquinas estão em paralelo. Se caso fizesse com as maquinas em serie, voce estaria enfrentando o problema do gargalo.

6.2.1 Variáveis de decisão

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se a tarefa } j \text{ for atribuída ao homem } i \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

6.2.2 Função objetivo

Queremos maximizar a produção total nessa linha de produção, portanto:

$$\max \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_{ij}$$

6.2.3 Restrições

1. Cada homem deve ser designado a uma tarefa:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

2. Cada tarefa deve ser designada a um homem:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

6.3 Resolução em serie:

A produção da linha está limitada à produção da máquina mais lenta.
maximizar P_l (produção maquina l)

$$P_l \leq P_j, \forall jin1, 2, ..., n$$

7 Problema 07

7.1 Enunciado

Um problema de grande importância em diversos tipos de empresas é a perda de material resultante do corte de bobinas de papel, rolos de tecidos, bobinas metálicas etc. As lâminas das máquinas de corte podem ser ajustadas para que as bobinas sejam cortadas em **diversas tiras de larguras especificadas**.

Considerem o caso de uma empresa que dispões de duas máquinas de corte:

- a máquina A para bobinas de 100 polegadas de largura e
- a máquina B para bobinas de 80 polegadas de largura.

A empresa precisa executar um programa de corte para obter:

- 600 bobinas de 60 polegadas de largura;
- 800 bobinas de 45 polegadas de largura,
- 350 bobinas de 35 polegadas de largura e
- 1200 de 25 polegadas de largura.

Admitir que toda a sobra será inutilizada;
O custo para a empresa de:

- uma bobina de 100 polegadas é R$ 1.350,00 e
- o de uma bobina de 80 polegadas é R$ 1.200,00.

Modelar o problema.

7.2 Resolução

Vamos assumir que todas as bobinas possuem o mesmo comprimento, somente precisamos cortar as bobinas em tiras de larguras especificadas.

7.2.1 Variáveis de decisão

- x_j: quantidade de conjuntos a serem cortados do padrão j

Antes do exercício começar, precisamos definir todos os tipos de padrão de corte possíveis de modo que possam atender às dimensões solicitadas. Esse processamento está feito em um excel anexo a este arquivo. Mas não há muito segredo, temos que determinar padrões para máquina A e máquina B. No meu caso, eu consegui propor 13 padrões para a máquina A e 10 padrões para a máquina B, totalizando 23 padrões.

7.2.2 Demais variáveis

- c_a: custo de uma bobina de 100 polegadas;
- c_b: custo de uma bobina de 80 polegadas.

7.2.3 Função Objetivo

Queremos minimizar o custo.

$$\min \quad C_A + C_B$$

7.2.4 Restrições

Demanda:

1. Devemos produzir ao menos 600 bobinas de 60 polegadas:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_{14} \geq 600$$

2. Devemos produzir ao menos 800 bobinas de 45 polegadas:

$$x_4 + x_5 + x_6 + 2 \cdot x_{10} + x_{15} + x_{16} + x_{23} \geq 800$$

3. Devemos produzir ao menos 350 bobinas de 35 polegadas:

$$x_1 + x_4 + x_7 + x_8 + 2 \cdot x_{11} + x_{15} + x_{17} + x_{18} + 2 \cdot x_{19} \geq 350$$

4. Devemos produzir ao menos 1200 bobinas de 25 polegadas:

$$x_2 + x_5 + x_7 + x_9 + 2 \cdot x_{12} + 3 \cdot x_{13} + x_{16} + x_{17} + x_{19} + 2 \cdot x_{20} + 3 \cdot x_{21} \geq 1200$$

Custos

1. Custo da maquina A:

$$1350 \cdot \sum_{j=1}^{13} x_j$$

2. Custo da maquina B:

$$1200 \cdot \sum_{j=14}^{23} x_j$$

8 Problema 8

8.1 Enunciado

Uma empresa possui 3 fábricas de um mesmo produto a partir das quais abastece diretamente seus n consumidores. Um estudo indicou a necessidade da implantação de centros de distribuição como elementos intermediários no escoamento da produção entre as fábricas e os clientes; há m locais candidatos a receber os centros de distribuição.

A empresa opera num mercado com forte concorrência e **deve colocar seu produto a um mesmo preço em todos os clientes**. Elaborar um modelo para localização dos centro de distribuição da empresa e definição da forma de abastecimento de clientes, conhecendo as seguintes informações:

a. d_j: demanda anual de cada cliente j;
b. cp_i: custo unitário de produção na fábrica i;
c. CP_i: capacidade anual de produção da fábrica i;
d. ct_{ik}: custo unitário de transporte entre fábrica i e eventual centro distribuição k;
e. CF_k: custo fixo anual do centro de distribuição k;
f. cm_k: custo unitário de manipulação do produto no centro distribuição k;
g. CM_k: capacidade anual de manipulação de produtos no centro de distribuição k;
h. cd_{kj}: custo unitário de transporte entre centro de distribuição k e cliente j.

8.1.1 Intervalos

- (i = 1, ... , 3) fábricas
- (j = 1, ... , n) clientes
- (k = 1, ... , m) centros de distribuição

8.2 Resolução

8.2.1 Variáveis de decisão

- x_{ik}: quantidade de produtos enviada da fábrica i para o eventual centro de distribuição k;
- y_{kj}: quantidade de produtos enviada do centro de distribuição k para o cliente j.
- z_k: 1 se o centro de distribuição k for instalado, 0 caso contrário.

8.2.2 Função Objetivo

Queremos minimizar o custo total, que por sua vez pode ser dividido em diversos custos:

- Custo de produção

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{m} cp_i \cdot x_{ik}$$

- Custo de transporte

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{m} ct_{ik} \cdot x_{ik} + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} cd_{kj} \cdot y_{kj}$$

- Custo fixo de centro de distribuição

$$\sum_{k=1}^{m} CF_k \cdot z_k$$

- Custo de manipulação do produto no CD

$$\sum_{k=1}^{m}\left(cm_k \cdot \sum_{j=1}^{n} y_{kj}\right)$$

8.2.3 Restrições

1. Demanda anual de cada cliente j

$$\sum_{k=1}^{m} y_{kj} = d_j, \quad \forall j = 1, ..., n$$

   Observação, fizemos a premissa de que sempre vamos conseguir atender a demanda com o que produzimos.

2. Capacidade anual de produção da fábrica i

$$\sum_{k=1}^{m} x_{ik} \leq CP_i, \quad \forall i = 1, ..., 3$$

3. Capacidade anual de manipulação de produtos no centro de distribuição k

$$\sum_{j=1}^{n} y_{kj} \leq CM_k, \quad \forall k = 1, ..., m$$

   Também poderíamos escrever a mesma restrição olhando para a saída.

4. Balanco de massa do CD

   Tudo que entra, sai. No longo prazo, o CD não é produtor nem consumidor de produtos.

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ik} = \sum_{j=1}^{n} y_{kj}, \quad \forall k = 1, ..., m$$

5. Extra: precisamos de uma restrição que vincule a movimentação do produto no centro de distribuição com a instalação do centro de distribuição.

   Se $\sum_i x_{ik} > 0$, então $z_k = 1$.
   Ou, alternativamente, poderíamos escrever que:

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ik} \leq CM_k \cdot z_k, \quad \forall k = 1, ..., m$$

8.2.4 Espaço das variáveis

Essa é uma parte importante da resolução do problema, que o professor comumente adiciona aqui. Neste exercício, já fizemos isso lá no início.

9 Problema 9

Problema tipico de atendimento de emergências, onde a prioridade não é custo, senão que o atendimento à população.

9.1 Enunciado

9.1.1 Parte A

Em uma cidade, subdividida em m regiões, há n locais candidatos ao recebimento de um posto de corpo de bombeiros. Deseja-se minimizar o custo de instalação garantindo-se, porém, que cada região possa ser atendida por uma viatura dentro de um tempo limite especificado, T. Propor um modelo matemático para definir os locais de instalação de postos de corpo de bombeiros.

Sugestão: Admitir que, para qualquer região j da cidade, são conhecidos os locais candidatos à instalação do posto que satisfazem a restrição de tempo do atendimento. Isto é, admitir que seja conhecida uma matriz $A = [aij]$, i=1,2,...,n; j=1,2,..., m tal que: $a_{ij} = 1$ se $t_{ij} <= T$ e 0 caso contrário.

9.1.2 Parte B

No caso de haver restrição orçamentária que não permita o atendimento de todas as regiões e conhecendo a população p_j de cada região j, proponha o modelo para instalação de q postos de corpo de bombeiros.

9.1.3 Parte C

Se uma região pode ser atendida, dentro do limite de tempo especificado, por um único posto, pode ocorrer que, em caso de acidente na região considerada, se os veículos do posto estão atendendo outra emergência, não haja como controlar o acidente. Por isto, uma outra estratégia de alocação e priorizar a instalação de postos que propiciem cobertura reserva para cada região.

No caso de haver restrição orçamentária que não permita uma cobertura reserva para todas as regiões (embora se possa garantir o atendimento simples de qualquer região) e conhecendo a população p_j de cada região j, proponha o modelo para a instalação de r postos (r < n).

9.2 Resolução

9.2.1 Parte A

Considere a variável binária x_i que indica se o local i foi escolhido para instalação do posto de bombeiros.

9.2.1.1 Função Objetivo Vamos minimizar o numero de postos instalados, já que o enunciado não fala de custos ou coisas do tipo.

$$\min \sum_{i=1}^{m} x_i$$

9.2.1.2 Restrições

Bom, queremos garantir que ao menos um posto atenda cada região. Isso só é possível caso saibamos de antemão que existe pelo menos 1 local que atende a região j, para toda região j. Então:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \geq 1, \forall j = 1, 2, ..., m$$

9.2.1.3 Espaço das variáveis

xi = 0 ou 1

9.2.2 Parte B

Teremos a seguinte restrição:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \leq q, \forall j = 1, 2, ..., m$$

Porém note que essa inequação não garante que todas as regiões serão atendidas. Então definimos a "restrição asterisco" abaixo:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \cdot x_i \geq 1, \forall j = 1, 2, ..., m$$

9.2.2.1 Função objetivo

Queremos maximizar a população coberta.

Queremos maximizar a somatório: $\sum_{j=1}^{m} p_j \cdot y_j$

$y_j = 1$ se a região j é coberta (restrição asterisco é atediada), 0 caso contrario.

Como escrever algebricamente que $y_1 = 1$ somente se a restrição asterisco é satisfatório?

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \geq y_j$$

$$or$$

$$y_j \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i$$

Ou seja, queremos maximizar P_c tal que:

$$P_c = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot y_j$$

sujeito às seguintes restrições:

$$y_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i, \forall j \in 1, 2, ..., n$$

$$q \geq \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Espaço das variáveis: xi = 0 ou 1; yi = 0 ou 1

9.2.3 Parte C

Quero maximizar a população da cidade que tenha cobertura reserva. Diz-se que uma região j tem cobertura reserva se ela pode ser atendida, em intervalo de tempo T, por pelo menos 2 postos de bombeiro.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \geq 2,$$

Introduzimos, então, uma nova variável binária w_j que indica se a região j tem cobertura reserva (restrição acima atendida) ou não.

Agora podemos formalizar matematicamente:

9.2.3.1 Função objetivo: Seja P_{cr} a população coberta com cobertura reserva. Queremos maximizar P_{cr} tal que:

$$P_{cr} = \sum_{j=1}^{m} p_j \cdot w_j$$

9.2.3.2 Restrições Sujeito às seguintes restrições:

$$w_i \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i - 1, \quad \forall j \in 1, 2, ..., n$$

Porém quero garantir que todas as regiões tenham ao menos uma cobertura simples. Poderíamos colocar essa restrição, porem ela seria redundante. Ainda assim, escrevemos:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot x_i \geq 1, \forall j \in 1, 2, ..., n$$

Espaço das variáveis: $x_i = 0$ ou 1; $y_i = 0$ ou 1; $w_j = 0$ ou 1

10 Problema 10

10.1 Enunciado

Uma empresa de geração de energia elétrica fez uma projeção da demanda por energia para 5 anos futuros, em 10ˆ6 kWh, a saber: 80, 100, 120, 140, 160. A empresa possui 4 formas de suprir esta demanda, a partir da construção de usinas, tendo os seguintes custos e capacidades:

Usina	Capacidade (10ˆ6 kwh)	Custo de Construção	Custo Anual de Operação
1	70	20	1.5
2	50	16	0.8
3	60	18	1.3
4	40	14	0.6

10.1.1 Parte A

Formule um modelo de programação matemática para atender a demanda dos 5 anos a um custo mínimo.

10.1.2 Parte B

Suponha que no começo do ano 1 todas estão abertas e que a empresa gestora poderá fechar qualquer uma das usinas ao final de um ano ou abrir uma usina fechada no início de um ano, mediante os custos abaixo mostrados. Como ficaria o modelo, para atender a demanda dos 5 anos a um custo mínimo?

Usina	Custo de Re-abrir	Custo de Fechar
1	1.9	1.7
2	1.5	1.2
3	1.6	1.3
4	1.1	0.8

Todos os custos foram passados em 10ˆ6 $.

10.2 Resolução

10.2.1 Parte A

1. i é uma variável inteira que vai de 1 a 4, representando cada usina.
2. Seja x_{ij} uma variável binária que representa se a usina i foi entregue para a empresa no início do ano j. O custo de construção é lançado no ano j (hipótese simplificadora).
3. y_{ij} é uma variável binária que indica se a usina i vai operar no ano j.

10.2.1.0.1 Função Objetivo Temos que olhar os custos de construção e operação das usinas, assim nessa ordem:

$$min \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} cc_i \cdot x_{ij} + \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} co_i \cdot y_{ij}$$

10.2.1.0.2 Restrições

1. Atendimento da demanda de energia em cada ano j:

$$\sum_{i=1}^{4} cap_i \cdot y_{ij} \geq demanda_j, \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

2. A empresa não pode operar se não for entregue. Ou seja, devemos vincular x e y:

$$y_{i1} \leq x_{i1}, \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}$$
$$y_{i2} \leq x_{i1} + x_{i2}, \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}$$
$$y_{i3} \leq x_{i1} + x_{i2} + x_{i3}, \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}$$
$$y_{i4} \leq x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4}, \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}$$
$$y_{i5} \leq x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} + x_{i5}, \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}$$

ou, matematicamente:

$$y_{ij} \leq \sum_{j=1}^{k} x_{ij}, \quad \forall i \in \{1,2,3,4\}, \forall k \in \{1,2,3,4,5\}$$

10.2.1.0.3 Espaço das variáveis x_{ij} e y_{ij} variáveis binarias

10.2.2 Parte B

- $w_{ij} = 1$ se a usina i é fechada no inicio do ano j
- $w_{ij} = 0$ em caso contrario
- $z_{ij} = 1$ se a usina i é reaberta no inicio do ano j
- $z_{ij} = 0$ em caso contrario

Temos que considerar os custos de operação, fechamento e reabertura.
A expressão de custos de operação será o mesmo do item anterior.

$$min(CT),$$
$$CT = \sum_{i=1}^{4} \sum_{j=1}^{5} co_i \cdot y_{ij} + cf_i \cdot w_{ij} + cr_i \cdot zij$$

Agora que já temos a função objetivo, escrevemos as restrições:

$$\sum_{i=1}^{4} cap_i \cdot y_{ij} > demanda_j,$$

E temos que vincular as diferentes variáveis de decisão.

$$y_{ij} = y_{i,j-1} - wij + zij,$$

j maior igual a 2, pois ela só não vale para $j = 1$ já que não podemos reabrir uma usina no inicio do ano 1.

11 Problema 11

Professor diz que este problema é análogo ao problema do caixeiro viajante, um problema clássico de otimização combinatória.

Uma das restrições mais importantes nesse problema é a questão de se evitar sub-ciclos. Isso porque às vezes podemos ter 2 sub-ciclos que juntos atendem todos os nós de demanda.

Há pelo menos 2 formas de se resolver a questão dos sub-ciclos.

11.1 Enunciado

Uma fábrica de tintas produz diariamente, numa mesma instalação, bateladas de tintas de n cores diferentes. Após cada batelada, é necessário limpar adequadamente a instalação para a produção da nova tinta; ao fim do dia, após a última batelada, adota-se o mesmo procedimento, deixando a instalação preparada para o dia seguinte. Admitindo conhecidos os tempos de preparação da instalação entre dois pares quaisquer de cores i e j, t_{ij}, proponha um modelo matemático para a escolha da sequência diária das cores das bateladas.

11.2 Resolução

Devemos minimizar o tempo total de limpeza da instalação. Contudo, sabemos que durante a noite sempre teremos que limpar a instalação, independente da ordem das cores.

11.2.1 Variáveis de decisão

- x_{ij}: variável binária que indica se a cor i é seguida pela cor j, ou seja, se a cor j for fabricada logo após a cor i.

11.2.2 Função Objetivo

Queremos minimizar o tempo total de limpeza da instalação.

$$\min \quad \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} t_{ij} \cdot x_{ij}; \quad i \neq j$$

11.2.3 Restrições

Note que com as três primeiras restrições, somente, nós ainda podemos ter sub-roteiros.

1. Cada cor pode preceder uma única cor:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

2. Cada cor deve ser precedida por uma única cor:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

3. Demanda

   Ainda que essa restrição possa ser um pouco redundante, é válida escrevê-la aqui. O que queremos é garantir que todas as n cores serão fabricadas.

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = n - 1$$

4. Evitar sub-roteiros

   Seja Q um subconjunto de cores, tal que $|Q| \geq 2$. Vamos garantir que não haja sub-roteiros dentro de Q, para tanto:

$$\sum_{i \in Q} \sum_{j \neq i, j \in Q} x_{ij} \leq |Q| - 1$$

   Essa é a formulação de Danzig, apesar de não ser a única.