Notas de aula - PNV5761

1 Leitura pré-aula 01

Diretrizes básicas aplicadas a diversos problemas:

1. **Identifique as variáveis de decisão do problema**
2. **Identifique a função objetivo e a escreva em termos das variáveis de decisão**
3. **Identifique as restrições do problema e as escreva em termos das variáveis de decisão**

Note

Não esqueça das restrições triviais, como por exemplo, a não negatividade das variáveis de decisão.

2 Aula 01

- 18 de Junho de 2024.
- PNV5761 - Programação Matemática Aplicada a Problemas de Transporte.
- Prof. Marco Brinati (professor aposentado mas que continua dando aula como professor sênior).
- **Tópicos de hoje:**
    - Aula inaugural.
    - Resolução de exemplos enviados por e-mail antes da aula.

2.1 Tópico 1 - O que nós vamos ver nessa disciplina

- **Módulo 1: Modelagem matemática para problemas de otimização de sistemas**
    - De 3 a 4 aulas
    - Este tende a ser o módulo mais difícil, os outros têm muitos mias textos. Esse requer experiência, pois não há uma teoria absoluta sobre isso.
- **Módulo 2: Programação Linear (PL)**
    - De 5 a 6 aulas

  - "Um problema novo em PL é sempre muito difícil. Você precisa ter experiência para resolver."

- **Módulo 3: Problemas de fluxo em rede (são um caso particular de PL)**
  - em torno de 4 aulas

2.1.1 Avaliação

- **Provas**
  - Representam 40% da nota
  - Serão 3 provas até o final desse quadrimestre.
  - As provas somente são aplicadas quando o modulo for encerrado. O professor deve avisar antecipadamente.
  - O terceiro modulo não tem prova, enquanto o segundo tem duas.
  - Cada prova tem em torno de 1 hora e meia, começando as 11hrs.
  - **As provas têm mais relação com as listas de problemas de modelagem em aula do que com a serie de problemas**. Estude sobre as aulas para poder ir bem nas provas.

- **Series de problemas**
  - Representam 60% da nota
  - Serão cerca de 5 series de problemas.
  - Em geral as series têm 2 semanas para serem resolvidas.
  - Além de resolver as questões, precisa resolver muito bem resolvido e deixar de uma forma bastante apresentável. O professor valorizará a apresentação do trabalho.

2.2 Tópico 2 - Introdução

- Para poder entender e analisar um problema real, devemos associá-lo a um modelo matemático.

- **Na construção de um modelo matemático, devemos identificar:**
  - as variáveis de decisão
  - quais restrições as variáveis devem obedecer (cuidado para não esquecer das restrições óbvias)
  - a função objetivo, para podermos comparar as diversas soluções.

- A ideia do modelo é capturar o essencial do problema real, sem se preocupar com detalhes que não são relevantes.

- Na nossa disciplina, vamos trabalhar com apenas uma única função objetivo. Saiba que existem problemas múltiplo objetivo, mas que não vamos trabalhar aqui.

2.3 Tópico 3 - Exemplos de modelagem

- **Começamos com o problema 4.1**
    - q: que outras informações poderíamos passar para o problema, de modo que ele fique mais real?
    - a: Por exemplo, o custo de *setup time*.

- Problemas 4.2 e 4.3 também foram resolvidos.

- Problema 4.4 foi pulado, pois já está na lista de modelagem "em aula".

- Problemas 4.5 e 4.6 foram resolvidos.

Para problemas em que a demanda for muito alta, exitem basicamente 3 opções:

- Hora extra
- Contratar mais gente
- Adiar a entrega e compensar para o cliente.

2.4 Perguntas e Respostas

1. Qual a diferença entre essa disciplinas e a disciplina de Modelagem em Sistemas Logísticos? R: Essa disciplina não é tão aplicável, então não vamos chegar a resolver os problemas.
2. Qual o limite da sofisticação do modelo? Prof. é questionado sobre o problema do bagaço de cana (problema 4.6) R: Existe um compromisso entre a qualidade do modelo e a dificuldade de resolvê-lo. Problemas recorrentes em geral recebem modelos de melhoria contínua.

2.5 Tarefas para a próxima aula

- Resolver os exercícios de 1 a 6 da lista de exercícios "em aula".

3 Aula 02

25 de Junho de 2024.

- Professor vai resolver os 6 primeiros exercícios da primeira aula.
- Percebi que errei feio os exercícios 2 e 3. O 3 era um dos mais difíceis mesmo.
- Essencialmente foram erros e interpretação do enunciado.
- A questão 4 foi a mais complexa, professor deixou para o final.
- Sempre substitua os operadores lógicos por restrições algébricas.
- Por exemplo, os operadores "min" e "max".

As questões da serie de problemas ele não vai responder duvidas.
mabrinat@usp.br

4 Aula 03

2 de julho de 2024

Professor começa pela questão de numero 7

Vi que o prof escolheu 8 e 6 padrões de corte diferentes.

1a serie de problemas possui data de entrega para o dia 23/julho. "Fazer em pouco tempo é muito difícil, quanto mais tempo vc tem, mais vc consegue melhorar."

- Prof agora ataca o numero 8
- Depois disso atacamos o numero 9. Paramos para o intervalo na metade do exercício 9.
- Esse exercício 9 foi bem mais complicado do que o restante.
- Prof pulou o exercício 10 e foi direto para o 11, devido ao tempo ser curto.

5 Aula 04

Data: 16/julho/2024

Na semana passada não tivemos aula pois era feriado em SP.

Hoje na primeira parte da aula vamos falar dos problemas 10 e 11.

Além disso, na segunda parte vamos iniciar o tema de Programação Linear.

5.1 Problema de transbordo

Tenho uma rede orientada. Professor não explicou muito sobre esse exemplo. Esse tipo de problema será estudado no terceiro modulo da materia.

5.2 Programação Linear

A ideia da disciplina é que vamos ver a base fundamental da resolução de problemas vistos até aqui.

Até aqui, criamos modelos que possuem funções objetivo lineares em torno da variável de decisão, bem como restrições lineares.

Vamos trabalhar com variáveis inteiras, reais não negativas e binarias.

A primeira etapa será trabalhar com variáveis reais não negativas.

5.2.1 Forma padrão do problema de programação linear

Na forma padrão, vamos minimizar a função objetivo

todas as variáveis sao não negativas.

todas as restrições sao equações (ao invés de inequações).

Também podemos escrever isso na forma matricial.

Definição 1:

Diz-se que x' é solução viável do problema de programação linear (PPL) na forma padrão s

Ax = b e x' >= 0.

"A solução ótima deve ser procurada no conjunto das soluções viáveis"
Seja F (vem de "feasible") o conjunto das soluções viáveis.
Definição 2:

Diz-se que x* é solução viável do problema de programação linear (PPL) na forma padrão s
x* in F cx* <= cx' para todo x' in F

Obs.: Note que essa definição não garante que x* seja único.

5.3 Formas alternativas de problema de programação linear

Essas formas são equivalente ou correspondente à forma padrão.
caso 1 -> Problema de maximização
caso 2 -> Restrições de desigualdade: colocamos uma variável de folga ou residual, seja somando (caso de <=) ou subtraindo (caso de >=) a variável de folga.
'importante que a variável s_r mantenha a mesma assinatura da '

caso 3 -> quando uma determinada variável pode assumir valores positivos e negativos.

- neste caso, podemos introduzir um par de variáveis substituindo essa variável.

5.4 Exemplo numérico na forma padrão

Quero minimizar uma função z
minimizar z
z = -4x1 + 6x2 + 6x3 - 4x4 + (9/5)x5
subject to

4x1 + (5/6)x2 + 3x3 + 2x4 + 4x5 = 29 -2x1 + (23/6)x2 + 3x3 - 2x4 + 4x5 = 11

-(7/2)x1 + 7x2 + 6x3 - 4x4 + 6x5 = 18
todo x é maior igual a 0
Vamos fazer esse problema ficar expressado em termos de x1 e x2 apenas.
Professor vai usar o método de Gauss-Jordan, porem ...
Passo 1: fazer com que x3 tenha coeficiente 1 e não apareça nas equações 2 e 3

6 Aula 05

23 de Julho de 2024.

6.1 Programação Linear

- **Na aula passada nós definimos uma forma padrão para o problema de programação lin**
  - Todas as restrições sao na forma de igualdade
  - Trata-se de problemas de minimização.

    - Todas as variáveis sao não negativas.

- Porem, qualquer problema de programação linear pode ser transformado para a forma padrão.

- Na semana passada, também, nós começamos a falar sobre o método Gauss Jordan

- O método Gauss Jordan é uma forma de resolver sistemas lineares e que faz parte do Simplex.

- **Professor fez a representação gráfica de um problema e desenhou a região viável.**

    - A região viável é o lugar geométrico que contem todos os pontos que satisfazem as

- Professor fala sobre funções equipotenciais.

- Feixe de retas paralelas

- Se altero a função objetivo do problema, eu acabo alterando somente a inclinação da reta.

- A solução geométrica somente pode ser feita se eu conseguir estabelecer 2 ou 3 variáveis isoladas. Mais do que isso, não consigo plotar

- Os vertices da figura sao os pontos que maximizam ou minimizam a função objetivo.

- Para o exemplo em questão, foram binômio(5 2) = 10 possíveis vertices, já que temos 5 variáveis. Porem somente 5 vertices sao de fato pertencentes a região viável.

- Queremos agora construir um método que seja algébrico e não geométrico para encontrar a solução ótima,

Procedimento algébrico para resolver o problema introdutório

1. Escolher duas das 5 variáveis e atribuir valor nulo a essas duas variáveis.
2. Resolver o sistema de equações com 3 variáveis para as outras variáveis
3. verificar se as variáveis sao >= 0. Se todas forem >= 0, passar para o passo 4. Se não, abandonar a solução e voltar para o passo 1.
4. Calcular a função objetivo z (z* = min(z*, z))
5. Voltar ao passo 1

Ou seja, eu não preciso desenhar a região viável. Eu posso simplesmente testar todos os candidatos a vertices e verificar qual deles é o melhor para a função objetivo.

Como voce generalizaria esse procedimento se estou num sistema com N equações e M variáveis?

Apos essa nossa primeira descoberta, chegamos a um numero: binômio(n n-m) = binômio(n m) alternativas

Ainda assim, vai ser totalmente inviável testar todas as alternativas. Precisamos de um método mais eficiente: Simplex.

Nao vamos querer comparar soluções, o simplex vai me entregar o resultado ótimo do problema.

6.2 Busca por um algoritmo eficiente para resolver o Problema de Programação Linear na forma padrão

6.2.0.1 Características desejáveis 1 - saiba reconhecer que uma solução básica viável é ótima ao se deparar com ele (sem necessidade de compara-la com outra solução). 2 - Saiba passar de uma solução básica viável não ótima para uma solução básica viável ótima.

6.3 Professor faz aqui um exemplo introdutório

"Forma canônica com relação às variáveis básicas x3, x4 e x5." x1 e x2 sao chamadas variáveis não básicas.

a função objetivo é função somente das variáveis não básicas

A uma forma canônica, vamos ter associada 1 solução básica. Para tanto, impõe-se valor nulo às variáveis não básicas. No caso, x2 = x2 = 0 e obtém-se os valores das variáveis básicas.

Se os valores de todas as variáveis básicas sao não negativas, diz-se que a solução básica é viável.

Associação entre geometria e algebra: - Um vértice esta associado ao uma solução básica - Um vértice viável esta associado a uma solução básica viável

Professor resolve um exemplo numérico. Mostra que temos que decidir se vamos seguir caminhando pela esquerda ou pela direita. Em media, olhar somente o primeiro caso já é suficiente para resolver o problema. Ou seja, a regra muito simples é "começa no 0 e aumenta a variável que tem o coeficiente mais negativo na função objetivo." Exemplo com z = - 7/8*x1 - 1/2*x2

Constatada que a solução básica na viável inicial (x1=x2=0 portanto x3=4, x4=9/2, x5=2) não é solução ótima de ..., pela analise dos conjuntos de x1 e x2 na função objetivo, manter y2=0 e aumentar x1 (caminhando por um lado da região viável. Para saber onde interromper a caminhada temos que examinar as especificações do problema (impondo x2 =0).

"Eu olho para uma solução básica viável e pergunto: Ela é ótima?"

7 Aula 06

- **Data**: 30 de julho de 2024.
- Professor inicia a aula com uma pequena revisão do conteúdo visto até o momento no tema de programação linear.
- Reduzimos o problema a "buscar vértices".
- Candidatos à solução ótima são os vértices da região viável.
- N equações e M variáveis: tenho n-m variáveis nulas e m variáveis não nulas.

- Essa descoberta geométrica é um bom começo, mas ainda não é suficiente para resolver problemas de grande dimensão.
- Numero de candidatos: Binômio (n m) = binômio (n n-m)
- Em busca de uma solução mais eficiente, vamos querer olhar para um vértice e dizer se ele é ótimo ou não.
- Os vértices são chamados de soluções básicas.
- Vamos precisar saber caminhar de uma solução básica viável não ótima para uma solução básica viável melhor. Queremos cainhar sobre as arestas da região viável.
- O simplex exige que o problema esteja escrito na forma canônica viável.

8 Aula 07

- Data: 06 de agosto de 2024.

Hoje vimos o segundo exemplo numérico de simplex
Maximizar L

L = 5x{1} + 4x2 + 8x3 + 6x4

Sujeito a:

5x1 + 1x2 + 5x3 + 10x4 <= 80000 1x1 + 4x2 + 10x3 + 5x4 <= 100000 5x1 + 3x2 + 6x3 + 5x4 <= 60000

xj >= 0 e j in {1,2,3,4}
Passo 1: precisamos passar o problema para a forma padrão.

1) passar a função objetivo para "minimizar"

   z = -5x1 - 4x2 - 8x3 - 6x4
   ou seja, z = -L

2) cuidar das restrições (colocando variáveis de folga)

   5x1 + 1x2 + 5x3 + 10x4 + x5 = 80000 1x1 + 4x2 + 10x3 + 5x4 + x6 = 100000 5x1 + 3x2 + 6x3 + 5x4 + x7 = 60000
   xj >= 0 com j in {1,...,7}

Pronto, agora o problema já esta na forma padrão!! Perceba que, além de ser uma forma padrão, nos já chegamos em uma forma canônica e que por coincidência é tbm canônica. Ela é viável pois o sistema de equações está resolvido para x5, x6 e x7 em função de x1, x2, x3 e x4 e a função z somente depende de x1, x2, x3 e x4.

Vamos montar as tabelinhas do simplex agora...

8.0.0.0.1 -z | -5 | -4 | -8 | -6 | | | | 0

x5 | 5 | 1 | 5 | 10 | 1| | | 80000 x6 | 1 | 4 | 10 | 5 | | 1 | | 100000 x7 | 5 | 3 | 6 | 5 | | | 1 | 60000 x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7

Variáveis nao básicas: x1 = x2 = x3 = x4 = 0

Vamos olhar pela coluna do -8 pois é a coluna mais negativa. que é a coluna relativa ao x3.

Professor escolheu o pivô como sendo o numero 10. Na linha do pivô, precisa dividir tudo pelo pivô. Nas outras linhas, vai rolar uma substituição pesada para zerar as variáveis que precisamos.

8.0.0.0.2 -z | -42/10 | -8/10 | | -2 | | 4/5 | | 80000

x5 | 45/10 | -1 | | 75/10 | 1 | -5/10 | | 30000 x6 | 1/10 | 4/10 | 1 | 5/10 | | 1/10 | | 10000 x7 | 44/10 | 6/10 | | 2 | | -6/10 | 1 | 0 variável básica nula x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7

Solução básica viável: - Nao básicas: x1 = x2 = x4 = x6 - Básicas: (x5 = 30000, x3 = 10000, x7 = 0)

TABELA III da pagina 49 (escrito a mao) do PDF continuação 1

TABELA IV (quarta solução básica viável)

A solução 4 é ótima ou nao? Sim, pois não dá para melhorar mais.

Como se explica geometricamente uma solução básica degenerada?

8.1 Estudar:

- Soluções degeneradas vs nao degeneradas?
- Método das duas fases

9 Aula 08

- Data: 13 de agosto de 2024.
- Professor começa a aula com considerações sobre a segunda serie de problemas.
- "os candidatos a solução ótima sao soluções básicas"
- Questão 2: "eu quero caminhar no sentido decrescente da função objetivo". Ja decidi a direção mas ainda nao sei qual o sentido que vou caminhar: cy < cx'
- sempre que chego em uma solução que é nao básica, exste alguma solução alternativa que é melhor que ela.

9.1 Método das duas fases

...

10 Aula 09

- Data: 20 de agosto de 2024.

10.1 Análise de Sensibilidade

Na aula da semana passada nós começamos a estudar o último tópico: análise de Sensibilidade.

Vamos fazer modificações no modelo matemático da forma padrão.

Precisamos saber quais são as relações entre os coeficientes da forma canônica (coeficientes da tabela simplex) e os coeficientes da forma padrão.

A gente modifica os coeficientes da tabela anteriormente ótima. Problemas? 1. Perder otimalidade (surgir um bar{c}_{j} < 0). 2. Perder viabilidade (surgir um bar{b}_{i} < 0).

Se a gente perde otimalidade, a gente precisa fazer um novo passo simplex a partir da tabela alterada. Agora, se surgir um bar{b}_{i} < 0, a gente precisa de um novo algoritmo (dual simplex). O simplex não dá conta de resolver problema fora da região viável. Apesar de que o método das duas fases também resolve problemas fora da região viável, ele é muito mais lento.

Essa é, basicamente, a nossa forma de fazer análise de sensibilidade.

As equações 8 e 9 do pdf continuação 3 são essenciais para realizar a análise de sensibilidade.

O vetor pi (multiplicadores simplex) é peça fundamental do algoritmo simplex revisado.

Falamos sobre o problema exemplo dessa lista.

A tabela do simplex revisado tem que ter sempre p-1 e o vetor pi.

Teve uma hora ali por volta da pagina 93 +/- em que a encerra o paragrafo com "15", mas o prof disse para considerar como "19"

10.2 O algoritmo dual simplex

11 Aula 10

Já terminamos o segundo módulo da disciplina, agora vamos para o último tópico, que será problemas de fluxo em redes (problemas de transbordo).

11.1 O Problema do Transbordo

- **Cada nó tem:**
  - um conjunto de arcos entrando
  - um conjunto de arcos saindo.
  - um parâmetro indicando oferta (positivo) ou demanda (negativo).
- Cada arco tem um custo unitário associado.
- No exemplo inicial, há um equilíbrio entre oferta e demanda
- O problema consiste em: como atender todas aas demandas gastando o mínimo possível?
- As variáveis de decisão são o fluxo em cada arco.
- Função objetivo: minimizar o custo total. Multiplicar o custo unitário pelo fluxo em cada arco.

- Convenção: escrever primeiro o arco que sai, depois o que entra: x_{ij} é o fluxo de i para j.
- **Como restrições, temos:**
  - Balanço de massa: a soma dos fluxos que entram em um nó é igual à soma dos fluxos que saem.
  - Não negatividade: $x_{ij} \geq 0$.
- a natureza das restrições: x_ij - A_ij, onde A_ij sempre terá uma componente positiva e outra negativa para cada coluna.
- Essas são restrições muito bem estruturada.
- O simplex revisado funciona bem para matrizes pouco densas.
- A ideia vai ser particularizar o simplex revisado para o problema do transbordo.
- Não precisamos de todas as equações, sempre uma delas é redundante. Professor não quer perder tempo provando este ponto.
- Vamos manter todas as restrições (i.e. todos os pis), mesmo que haja redundância em uma das restrições.
- Fazer Gauss Jordan dá trabalho... Podemos fazer de modo mais rápido ainda.
- Vamos verificar a otimalidade da solução.
- Precisamos formalizar o algoritmo.
- O problema todo é encontrar uma solução básica inicial para o problema, o que não é nada trivial.

12 Aula 11

Árvore é um conjunto de vértices e arestas que conectam todos os vértices sem formar ciclos.