1ª série de Problemas - 2024

Disciplina PNV5761 - Programação Matemática Aplicada a Problemas de Transportes.
Aluno: Guilherme Fernandes Alves - Nº USP: 10774361 - guilherme_fernandes@usp.br
Data de entrega: 2 de Agosto de 2024

1ª QUESTÃO

Uma empresa fabrica um produto cujo consumo é sazonal e precisa programar sua produção para os próximos 4 períodos em que a demanda é crescente: $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$.

A empresa mantém uma equipe fixa de N operários, que dá conta da produção nos períodos de demanda baixa; quando a demanda aumenta, a empresa contrata mão de obra temporária. Como se trata de um tipo de trabalho muito específico, parte da equipe fixa é utilizada para treinamento de mão de obra temporária contratada (aprendizes). Cada operário da equipe fixa pode treinar 3 aprendizes durante cada período.

Um operário da equipe fixa produz p unidades por período; se deslocado para o treinamento, ele não produz nada diretamente. Um aprendiz durante o período de treinamento tem uma capacidade de produção q, que cresce em cada período subsequente de uma quantidade r, sem necessidade de treinamento adicional. Cada membro da equipe temporária tem um custo a, enquanto aprendiz, e b em cada período subsequente. No fim do 4º período, toda mão de obra temporária é dispensada, com um custo unitário c para a empresa. A empresa pode armazenar o produto de um período para o seguinte, a um custo unitário f. O estoque inicial e_0, é conhecido e o final, e_4, é fixado, a priori; há ainda um limite e_m, para a capacidade de armazenamento.

Formular um modelo matemático para definir a programação de produção e contratação da empresa.

Admita que a empresa tivesse a alternativa de adiar para o período seguinte, $(j+1)$, a entrega de parte da demanda do período j, concedendo, porém, um desconto, por unidade entregue fora do prazo. Como ficaria o modelo matemático do problema?

Resolução

- e_j: estoque no início do período j.
- p: produção de um operário da equipe fixa enquanto não está treinando.
- $q + k \cdot r$: produção de um aprendiz após k períodos após o treinamento. A produção vai crescer em uma taxa constante mesmo sem receber novos treinamentos.
- a: custo de um aprendiz no período de treinamento.
- b: custo de um aprendiz após o período de treinamento.
- c: custo de demissão de um aprendiz.
- f: custo de armazenamento de uma unidade por período.
- e_m: capacidade máxima de armazenamento.

- P_j: produção total da empresa no período j.

Variáveis de decisão

- x_j: quantidade de operários temporários contratados no período j.
- d_j^{post}: demanda do mês j que será atendida somente no mês seguinte.

Restrições

1. Produtividade:

   A produtividade dos funcionários fixos deve ser determinada em função da quantidade de funcionários temporários contratados e da quantidade em cada mês, visto que 1 funcionário fixo é sempre responsável por treinar até 3 funcionários temporários e durante esse período não produz nada.

   $$Q_j^{fixo} = p \cdot \left[N - \text{roundup}\left(\frac{1}{3} \cdot x_j\right)\right], \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

   Note que tivemos que utilizar um operador lógico (roundup) para garantir que a quantidade de funcionários fixos treinando seja o menor inteiro que satisfaça a condição de que cada funcionário fixo treina até 3 funcionários. Isso faz com que o modelo deixe de ser linear, então precisamos linearizar. Para tal, introduzimos uma variável inteira w_j e fazemos:

   $$w_j \geq \frac{1}{3} \cdot x_j$$
   $$w_j - 1 \leq \frac{1}{3} \cdot x_j$$

   Deste modo garantimos que w_j é o menor inteiro que satisfaça a condição de que cada funcionário fixo treina até 3 funcionários. Podemos então reescrever a restrição de produtividade dos funcionários fixos como:

   $$Q_j^{fixo} = p \cdot (N - w_j), \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

   Também podemos calcular a produtividade dos funcionários temporários, que é dada pela quantidade de funcionários temporários contratados no período multiplicada pela produtividade de um aprendiz após k períodos de treinamento.

   $$Q_j^{temp} = q \cdot x_j + \sum_{k=2}^{j} r \cdot x_k, \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

   Note que o fator r somente é considerado a partir do segundo período, pois no primeiro período a produtividade dos aprendizes é apenas q.

2. Produção

De antemão já vamos assumir que a empresa não produzirá mais do que o necessário, neste caso, já fixamos que a produção será o equivalente à soma de todas as demandas dos períodos mais o balanço de estoque entre os períodos. A produção varia de acordo com a quantidade de operários disponíveis e a quantidade de aprendizes treinados.

$$\sum_{j=1}^{4} P_j = \sum_{j=1}^{4} d_j + e_4 - e_0$$

Ademais, vamos atrelar a produção à produtividade dos funcionários fixos e temporários.

$$P_j = Q_j^{fixo} + Q_j^{temp}, \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

3. Atendimento demanda em cada mês

   A demanda de cada mês deve ser atendida, seja no próprio mês ou no mês seguinte. Para atender a demanda eu utilizo a produção do mês e parte do estoque disponível.

   $$d_j - d_j^{post} = P_j + e_{j-1} - e_j, \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

   Note que não podemos atrasar a demanda do último mês, não faz sentido em termos de planejamento. Então:

   $$d_4^{post} = 0$$

4. Estoque

   O estoque no início de cada período é dado pela soma do estoque do período anterior com a produção excedente do período, sendo que o excedente é a diferença entre a produção e a demanda atendida naquele mês.

   $$e_j = e_{j-1} + P_j - (d_j - d_{j-1}^{post}), \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

   Devemos também lembrar que e_0 e e_4 são fixos e pré-determinados.

5. Capacidade máxima de armazenamento

   Em nenhum momento podemos ultrapassar a capacidade máxima de armazenamento.

   $$e_j \leq e_m, \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

6. Número máximo de operários temporários em treinamento.

Como conhecemos de antemão o número de operários fixos, N, e a capacidade de treinamento de cada um, podemos limitar o número de funcionários temporários que podem ser contratados de uma só vez em um período.

$$x_j \leq 3 \cdot N, \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Função objetivo

Queremos minimizar os custos da empresa. Vamos considerar os seguintes custos: demanda atendida com atraso, contratação, estocagem, demissão de temporários,

O custo de demissão dos temporários será a soma de todos os funcionários contratados vezes o custo de demissão. Note que a demanda é sempre crescente, portanto não faria sentido demitir um funcionário da equipe temporária antes do último período.

Primeiro calculamos o custo de demissão dos temporários:

$$C_d = c \cdot \sum_{j=1}^{4} x_j$$

Em seguida podemos calcular o custo de "manutenção" desses funcionários temporários, que é o custo de se manter um funcionário temporário em um período. Perceba que o custo varia pois o funcionário temporário passa a custar de a para b após o primeiro período.

$$C_m = \sum_{j=1}^{4} \left(a \cdot x_j) + b \cdot \sum_{k=2}^{j} x_k \right), \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Agora calculamos o custo de armazenamento ou estoque:

$$C_e = f \cdot \sum_{j=1}^{4} e_j$$

Agora, assumimos que há um custo de perda de receita por demanda atendida com atraso, que é dado por:

$$C_{atraso} = \sum_{j=1}^{4} d_j^{post} \cdot \text{K}$$

onde K é o custo por unidade de demanda atendida com atraso.

Sendo assim, a função objetivo é:

$$\min \quad C_d + C_m + C_e + C_{atraso}$$

Espaço das variáveis

A quantidade de operários contratados é um número inteiro e positivo, portanto:

$$x_j \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall j \in \{1, 2, 3, 4\}$$

A demanda atendida em atraso é um número real podendo ser positivo ou nulo, portanto:

$$d_j^{post} \in \mathbb{R}^+, \quad \forall j \in \{1,2,3,4\}$$

Lembre-se que introduzimos uma variável auxiliar w_j para garantir que a quantidade de funcionários fixos treinando seja o menor inteiro que satisfaça a condição de que cada funcionário fixo treina até 3 funcionários. Portanto:

$$w_j \in \mathbb{Z}^+, \quad \forall j \in \{1,2,3,4\}$$

É possível comentar que existem outras formas de se garantir essa tal restrição, eventualmente sem a necessidade de tal variável auxiliar, mas a abordagem aqui foi satisfatórias.

2ª QUESTÃO

João é fiel comprador de um modelo tradicional de automóvel, com pouquíssimas modificações de um ano para outro, e é muito metódico. Assim, ele consegue fazer boas previsões das despesas anuais de manutenção e do preço de revenda do carro em **função do tempo de uso**. É importante destacar que João somente compra carro novo. João tem hoje um carro com exatamente 2 anos de uso e deseja programar as aquisições e revendas de carro para os próximos 10 anos. Proponha um modelo matemático para ajudar João a resolver seu problema.

Observação: Como você vai trabalhar com fluxo de dinheiro ao longo do tempo, admita que todas as cifras referentes a despesas ou receitas futuras já estejam referenciadas ao valor presente.

Resolução

Vamos assumir que João pode comprar ou vender um carro em qualquer início de ano, sempre ao início do primeiro ano. Não há possibilidade de comprar ou vender um carro ao longo do ano.

Também não queremos que João fique sem carro, então ele sempre terá um carro em mãos. Bem como não queremos que João tenha mais de um carro em mãos, ainda que isso possa vir a ser vantajoso em termos financeiros em algum ano, isso não é prático e queremos evitar.

Notação

- t é o índice do ano, com $t = 1, 2, \ldots, 10$.
- Ca_t é o custo de aquisição de um carro no ano t. Esse custo supomos conhecido por João e representa o preço de um carro de mesma categoria no ano t.
- Pr_t é o preço de revenda de um carro no ano t. Esse será o preço pelo qual conseguimos vender um carro usado no ano t.
- Cm_k é o custo de manutenção e depreciação de um carro após k anos de uso.
- Cf_t é o custo fixo de manter um carro por ano. Estamos supondo que este custo já é previamente conhecido por João e não varia de acordo com o tempo de uso do carro.

Variáveis de decisão

- x_t é uma variável binária que indica se João comprou um carro no início do ano t ou não. Se $x_t = 1$, João comprou um carro no ano t. Se $x_t = 0$, João não comprou um carro no ano t.
- y_t é uma variável binária que indica se João vendeu um carro no início do ano t ou não. Se $y_t = 1$, João vendeu um carro no ano t. Se $y_t = 0$, João não vendeu um carro no ano t.

Função objetivo

Queremos maximizar o lucro total de João ao final dos 10 anos. O lucro será a diferença entre o somatório de revendas e o somatório de custos. Assim:

$$\max \sum_{t=1}^{10} (Pr_t \cdot y_t - Ca_t \cdot x_t - Cm_t - Cf_t)$$

Estamos assumindo que os custos de manutenção não variam de acordo com o tempo de uso do carro. Isto dado que um carro de menos de 10 anos de uso em geral não tem custos de manutenção muito diferentes de um carro novo. Entretanto, há depreciação do valor do carro ao longo do tempo, que é capturado pela diminuição do preço de revenda.

Aqui vale notar que a hipótese de que João compra sempre um carro de modelo similar é exatamente importante, pois estamos desconsiderando que João sempre poderá optar por diferentes modelos de carro e que isso impacta drasticamente os custos e preços.

Restrições

1. João não pode comprar um carro no início do ano 1, pois ele já tem um carro.

$$x_1 = 0$$

2. João sempre deve ter ao menos 1 carro em mãos.

   Para qualquer ano m entre 1 e 10, precisamos que o saldo de carros em mãos seja sempre positivo.

$$\sum_{t=1}^{m} (1 + x_t - y_t) \geq 1, \quad \forall m \in \{1, \ldots, 10\}$$

   É importante notar que o número 1 no somatório é o saldo inicial de carros em mãos, que é 1.

3. João pode ter no máximo 1 carro em mãos.

   De forma similar, impomos que o saldo de carros em mãos em qualquer ano m seja no máximo 1.

$$\sum_{t=1}^{m} (1 + x_t - y_t) \leq 1, \quad \forall m \in \{1, \ldots, 10\}$$

4. Queremos impor que João permaneça com um carro ao final do $10^{\underline{o}}$ ano.

   Precisamos impor isso senão o modelo pode querer que João venda o carro no último ano para obter maior receita, porém não queremos corre o risco de João ficar sem carro após os 10 anos.

$$y_{10} = 0$$

5. Preço de revenda

   O preço de revenda depende dos anos de uso do veículo. Vamos calcular o tempo de uso do carro em cada ano.

$$u_1 = 2$$
$$u_t = (1 - x_t) \cdot (u_{t-1} + 1), \quad \forall t \in \{2, \dots, 10\}$$

   Agora temos que o preço de revenda é dado por:

$$Pr_t = Ca_t \cdot (10 - Cm_{u_t})$$

Espaço das variáveis

- $t \in \{1, 2, \dots, 10\} \subset \mathbb{N}$.
- $x_t \in \{0, 1\} \forall t$.
- $y_t \in \{0, 1\} \forall t$.
- m é um índice de ano, com $m = 1, 2, \dots, 10$.

3ª QUESTÃO

Uma empresa de transporte aéreo dispõe de uma frota de N_v aeronaves; a aeronave v, $v = 1, 2, \dots, N_v$, dispõe de K_v poltronas para o transporte de passageiros. A empresa oferece um serviço sem escalas e opera voos entre m pares de cidades (o voo entre a cidade A e a cidade B, para efeito dessa contagem, é distinto do voo entre a cidade B e a cidade A)

A empresa utiliza uma única cidade-base para sua frota e os primeiros voos do dia de cada aeronave começam e os últimos voos do dia terminam nessa cidade; fora essas restrições, cada aeronave pode, ao longo do dia, ser utilizada em diversos trechos da malha aérea coberta pela empresa.

Numa etapa inicial, para programar a operação da frota, foi desenvolvido um estudo que determinou, para cada avião da frota, os diversos roteiros diários viáveis, começando e terminando na cidade-base. Cada roteiro viável j de uma aeronave v é identificado por um parâmetro c_{vj}, que representa o seu custo operacional e um vetor A_{vij}, cujos componentes, $i = 1, 2, \dots, m$, indicam o número de vezes que cada trecho i é percorrido no roteiro j do avião v.

Complete agora o estudo para a programação de operação da frota, admitindo conhecidas as demandas $d_i, i = 1, ..., m$, entre cada par de cidades da malha aérea coberta pela empresa.

Comente eventual analogia entre o modelo matemático proposto e modelos de problemas já examinados.

Resolução

Existe uma parte interessante desse problema que é o aproveitamento dos voos. Aproveitamento é definido, em engenharia de transporte aéreo, como o número de assentos ocupados divido pelo número de assentos disponíveis. No nosso caso vamos ignorar o aproveitamento dos voos e assumir que o mais importante é que tenhamos assentos (ou poltronas) suficientes para atender a demanda entre cada par de cidades.

Notação

- v é o índice da aeronave, com $v = 1, 2, \ldots, N_v$.
- K_v é o número de poltronas disponíveis na aeronave v.
- m é o número de pares de cidades, com $m = 1, 2, \ldots, m$.
- d_i é a demanda entre o par de cidades i, com $i = 1, 2, \ldots, m$.
- c_{vj} é o custo operacional do roteiro j da aeronave v.
- A_{vij} é o número de vezes que o trecho i é percorrido no roteiro j da aeronave v.

Perceba que o índice j representa todos os roteiros viáveis para a aeronave v e o índice i representa todos os pares de cidades.

Variáveis de decisão

Seja x_{vj} é uma variável binária que indica se o roteiro j da aeronave v é escolhido ou não.

Função objetivo

Queremos minimizar o custo total de operação da frota, que neste caso será representado pelo somatório de custos operacionais de cada roteiro selecionado. Existe uma série de custos fixos associados a cada aeronave que será ignorada por simplicidade e porque o enunciado não fornece informações suficientes para modelar esses custos. Sendo assim, a função objetivo é:

$$\min \sum_{v=1}^{N_v} \sum_{j} c_{vj} \cdot x_{vj}, \quad \forall v \in \{1, \ldots, N_v\} \quad \forall j$$

O índice j representa todos os roteiros viáveis para a aeronave v. Não é fornecido no enunciado o número de roteiros viáveis para cada aeronave, então vamos deixar o somatório sobre j sem limites, assim subentende-se que estamos somando para todos os roteiros j.

Restrições

1. Atendimento da demanda

   O mais óbvio do problema é que precisamos atender a demanda. Aqui existe uma sutileza que é o fato de que o exercício não fala qual a unidade de medida da demanda, poderia ser passageiros ou número de voos. Conhecendo o problema, é mais intuitivo pensar que a demanda é o número de passageiros que precisa ser transportado entre o par de cidades. Sendo assim, queremos que o número de voos vezes o numero de poltronas disponíveis seja maior ou igual a demanda entre cada par de cidades.

$$\sum_{v=1}^{N_v} \sum_j A_{vij} \cdot x_{vj} \cdot K_v \geq d_i, \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}$$

2. Capacidade

   É verdade que o enunciado não fala nada sobre capacidade ou limite de roteiros que uma aeronave pode fazer, mas é razoável pensar que uma aeronave não pode fazer mais de um roteiro por dia.

$$\sum_j x_{vj} \leq 1, \quad \forall v \in \{1, \ldots, N_v\}$$

Espaço das variáveis

$$x_{vj} \in \{0, 1\}, \quad \forall v \in \{1, \ldots, N_v\} \quad \forall j$$

Comentários

O um problema complexo que foi bastante simplificado pelo fato de que os possíveis roteiros para cada aeronave já foram determinados previamente. caso não tivessem sido determinados, o problema seria análogo a um problema de roteirização de veículos.

Este exercício é parecido com o exercício 6 visto em classe, pois trata-se de um problema de designação. Para cada aeronave, vou designar um dos j possíveis roteiros. De certa forma, também é bastante parecido com o exercício 7 de corte das bobinas, somente com a mudança de que dessa vez a matrix A_{vij} já foi determinada pelo enunciado.

4ª QUESTÃO

Uma empresa dispõe de uma frota homogênea para fazer entrega de seus produtos a partir de um determinado depósito. Num dado dia, a empresa deve atender m clientes e um "roteirista" já identificou, preliminarmente, todos os n roteiros viáveis $R_1, R_2, \ldots R_n$, com custos $c_1, c_2, \ldots c_n$, respectivamente, cada qual atendendo um certo subconjunto de clientes.

Um roteiro R_j é caracterizado por um vetor $Aj = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots a_{mj}]^T$ em que $a_{ij} = 1$ se o roteiro j passa pelo cliente i e $a_{ij} = 0$, em caso contrário. Por motivo específico, dois desses m clientes, r e s respectivamente, devem ser colocados num mesmo roteiro.

Formular o modelo matemático para determinar a melhor forma de atender os clientes.

Resolução

Variáveis de decisão

Considere a variável binária x_j que indica se o roteiro j foi escolhido ou não.

Função objetivo

Queremos minimizar o custo total:

$$\min \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot x_j, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

Restrições

1. Cada cliente deve ser atendido:

   Para cada cliente, quero que o somatório de vezes em que algum roteiro passa por ele seja maior ou igual a 1.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \geq 1, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}$$

2. Cada cliente é atendido uma única vez:

   Para cada cliente, quero que o somatório de vezes em que algum roteiro passa por ele seja menor ou igual a 1.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_j \leq 1, \quad \forall j \in \{1, \ldots, m\}$$

3. Os clientes r e s devem ser atendidos no mesmo roteiro:

   Essa é uma complicação do modelo. Para garantir que os clientes r e s sejam atendidos no mesmo roteiro, podemos garantir que o produto dos vetores x_j e a_{rj} seja igual ao produto dos vetores x_j e a_{sj}. Ou seja, para qualquer roteiro escolhido, os clientes r e s devem ser atendidos juntos.

$$x_j \cdot a_{rj} = x_j \cdot a_{sj}, \quad \forall j \in \{1, \ldots, n\}$$

5ª QUESTÃO

Uma empresa está realizando seu planejamento mensal de produção de um determinado modelo de calça jeans masculina.

Há uma demanda d_i para as partes $i = 1, ..., 75$, necessárias para atender às diversas combinações de tamanho de cintura e comprimento. Estas partes são cortadas a partir de camadas de 60 a 70 peças de tecidos, que são dispostos nas máquinas de corte.

A empresa dispõe de um conjunto de padrões de corte (moldes), sendo que cada padrão define a forma como as várias partes podem ser cortadas. Cada padrão de corte $m = 1, \ldots, 350$, gera a_{im} cópias da parte i por camada de tecido, e gera uma perda de ω_m cm^2 de tecido.

Formule um modelo de programação matemática para definir um plano de corte que minimiza as perdas de tecido.

Resolução

Este é um problema bastante parecido com o problema da bobina visto em aula. Porém aqui já sabemos de antemão quais são os padrões de corte possíveis.

Notação

- i: índice das partes, com $i = 1, 2, \ldots, 75$.
- m: índice dos padrões de corte, com $m = 1, 2, \ldots, 350$.

Variáveis de decisão

- x_m: número de camadas de tecido cortadas com o padrão de corte m. Essa variável é inteira e não negativa.

Função objetivo

Queremos minimizar as perdas totais de tecido:

$$\min \sum_{m=1}^{350} \omega_m \cdot x_m$$

Restrições

1. Atendimento da demanda

   Queremos atender a demanda de todas as partes:

$$\sum_{m=1}^{350} a_{im} \cdot x_m \geq d_i, \forall i \in \{1, 2, \ldots, 75\}$$

6ª QUESTÃO

Uma empresa precisa acondicionar caixas de mesma largura, mesma altura e comprimentos diversos em contêineres de **20 pés de comprimento**, para exportação. Dispondo-se as caixas com o comprimento na direção longitudinal do contêiner é possível colocar **5 fileiras** de caixas na direção transversal; na direção vertical, é **possível empilhar 4 caixas**.

A empresa vai exportar:

- 1200 caixas de 8.0 pés de comprimento,
- 2800 caixas de 7.0 pés de comprimento,
- 3000 caixas de 5.5 pés de comprimento e
- 4000 caixas de 3.5 pés de comprimento.

Para um melhor acondicionamento das caixas, todas as fileiras e todas as camadas, num mesmo contêiner, devem ter o mesmo arranjo.

Apresente sua proposta para acondicionamento das caixas nos contêineres.

Resolução

É um problema clássico de empacotamento, o problema pode começar pela geração dos possíveis arranjos. O posicionamento no contêiner é unidimensional.

Notação

- Seja i um índice do comprimento de caixa, com $i = 1, 2, 3, 4$ representando caixas de 8.0, 7.0, 5.5 e 3.5 pés de comprimento, respectivamente.
- Seja j um índice do arranjo de caixas, com $j = 1, 2, ...$ representando os possíveis arranjos de caixas no contêiner.
- Seja l_i o comprimento da caixa de comprimento i.

Arranjos possíveis

Criaremos o vetor $A = [a_{ij}]$ que indica a quantidade de caixas de comprimento i que compõem o arranjo j.

Vamos determinar o numero de arranjos possíveis. Existem diversas formas de se fazer isso, vamos tentar enunciar de uma forma que seja abstrata porém compreensível.

Pegamos o menor comprimento de caixa, que é 3.5 pés. Dividindo 20 pés por 3.5 pés, temos que é possível colocar no máximo 5 caixas do menor comprimento sem exceder o comprimento do contêiner. Deste modo, podemos concluir que todos os arranjos possíveis devem ter no máximo 5 caixas.

Em termos de combinatória, imaginamos 5 espaços para caixas e 5 categorias de caixas (8.0, 7.0, 5.5, 3.5 pes ou nenhuma caixa). O número de arranjos possíveis é o número de combinações com repetição, ou seja:

$$C_{n+r-1,r} = \binom{n+r-1}{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Para o nosso caso, temos que $n = 5$ e $r = 5$, logo:

$$\binom{5+5-1}{5} = \frac{(5+5-1)!}{5!(5-1)!} = \frac{9!}{5!4!} = 126$$

Em outras palavras, queremos escolher 5 caixas dentre 5 categorias, podendo repetir as categorias. É similar ao problema de se escolher **até** 5 bolas de sorvete em uma sorveteria com 4 sabores. No exemplo especifico, temos 126 arranjos possíveis.

Seria possível, evidentemente, elaborar uma matriz com todas as combinações possíveis e até mesmo verificar quais combinações maximizariam o espaço utilizado no contêiner, porem isso seria desnecessário e ineficiente. Para a sequencia do execício, basta saber que temos 126 arranjos possíveis.

Variáveis de decisão

Seja x_j uma variável inteira que indica a quantidade de contêineres selecionados com o arranjo j, com $j = 1, 2, ..., 126$.

Função objetivo

Queremos minimizar o número de contêineres utilizados.

$$\min \sum_{j=1}^{126} x_j$$

Restrições

1. Atendimento da demanda

   Evidentemente precisamos garantir que a demanda seja completamente atendida.

$$\sum_{j=1}^{126} a_{i=8.0,j} \cdot x_j \geq 1200$$

$$\sum_{j=1}^{126} a_{i=7.0,j} \cdot x_j \geq 2800$$

$$\sum_{j=1}^{126} a_{i=5.5,j} \cdot x_j \geq 3000$$

$$\sum_{j=1}^{126} a_{i=3.5,j} \cdot x_j \geq 4000$$

2. Capacidade dos contêineres

   Cada contêiner tem no máximo 20m de comprimento. Assim, qualquer arranjo escolhido deve ter no máximo 20m de comprimento quando soma-se o comprimento de todas as caixas.

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ij} \cdot l_i \cdot x_j \leq 20$$

3. Nao queremos enviar mais do que a demanda

   Essa é uma parte bastante interessante do problema e que não pode ser ignorada. A demanda é conhecida, e não queremos enviar mais do que a demanda. Assim, precisamos garantir que a quantidade de caixas enviadas não exceda a demanda.

$$\sum_{j=1}^{126} a_{ij} \cdot x_j \leq d_i, \forall i \in \{8.0, 7.0, 5.5, 3.5\}$$

Espaço das variáveis

De maneira mais simples, é possível afirmar que a variável x deve ser sempre um numero inteiro.

$$x \in \mathbb{N}$$

Entretanto, podemos restringir ainda mais o espaço dessa variável uma vez que já calculamos a quantidade maxima de arranjos que se pode fazer com as caixas disponíveis.

$$x \in \{1, 2, ..., 126\} \subset \mathbb{N}$$

7ª QUESTÃO

Conforme visto em aula, a principal preocupação com o modelo matemático do problema do caixeiro viajante é a seleção do conjunto de restrições para impedir a formação de roteiros que não contenham todas as cidades (formação de sub-roteiros). Uma formulação diferente para evitar a formação de sub-roteiros introduz variáveis y_{ij}, para representar o fluxo entre os nós i e j, e admite que há uma oferta de $(n-1)$ unidades de um produto na cidade base (nó 1) e que cada uma das outras $(n-1)$ cidades tenha uma demanda igual a 1. As restrições para evitar a formação de sub-roteiros são:

$$\sum_{j=2}^{n} y_{1j} = n - 1$$

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} y_{ij} - \sum_{k=1, k\neq i}^{n} y_{ki} = -1, \quad \forall i \in \{2, 3, \ldots, n\}$$

$$y_{ij} \leq M \cdot x_{ij}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}, i \neq j$$

em que M é qualquer real maior ou igual a $n - 1$.

Interprete como essas restrições evitam a formação de sub-roteiros.

Resolução

Essa é a abordagem de problema de transbordo para o problema do caixeiro viajante.

1. Restrição de oferta na cidade base:

$$\sum_{j=2}^{n} y_{1j} = n - 1$$

   Essa restrição garante que a cidade base (nó 1) envia exatamente $n-1$ unidades para as outras cidades, o que significa que todas as outras cidades (2 a n) devem receber exatamente uma unidade cada uma. Isso assegura que o fluxo total que sai da cidade base corresponde ao número de cidades a serem visitadas, garantindo a inclusão de todas as cidades no roteiro.

2. Restrição de fluxo para cada cidade:

$$\sum_{j=1, j\neq i}^{n} y_{ij} - \sum_{k=1, k\neq i}^{n} y_{ki} = -1, \quad \forall i \in 2, 3, \ldots, n$$

Essas restrições garantem que cada cidade diferente da cidade base (cidades 2 a n) recebe duas unidades e envia exatamente uma unidade. Isso força o modelo de modo que cada cidade deve ter um saldo de uma unidade após receber e enviar unidades, mantendo o ciclo único que passa por todas as cidades. Isso evita sub-roteiros pois cada cidade passa a estar de certa forma "conectada" a cidade base. Contudo, ainda é necessário manter a restrição de que cada nó só pode ser visitado uma vez.

3. Restrição de vínculo entre fluxo e rota:

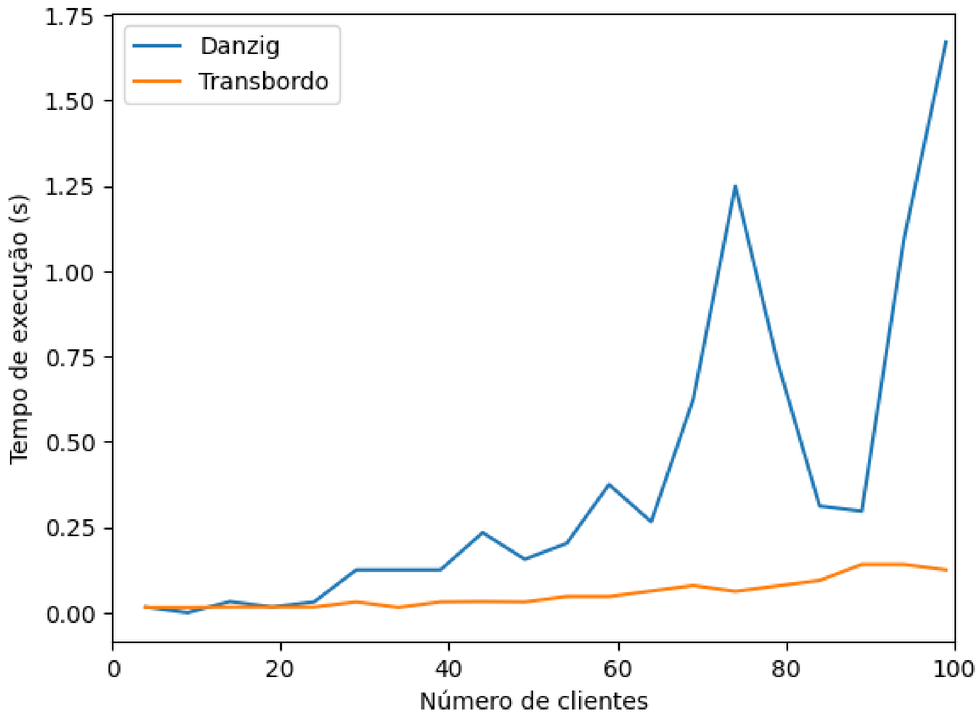
$$y_{ij} \leq M \cdot x_{ij}, \quad \forall i, j \in 1, 2, \ldots, n, i \neq j$$

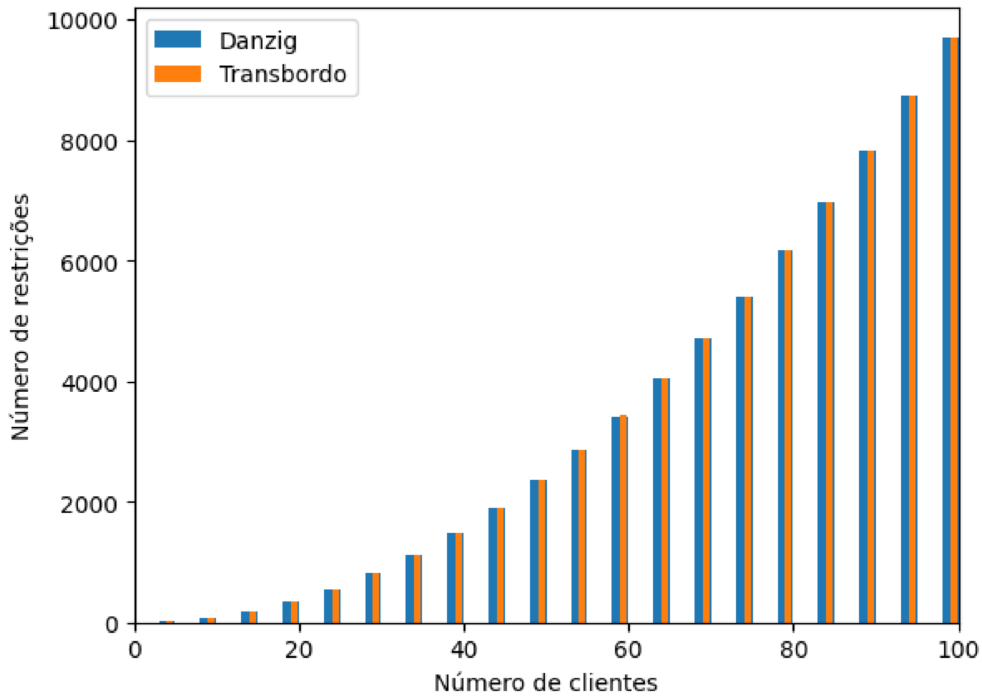
Essa restrição vincula as variáveis de fluxo y_{ij} às variáveis de decisão x_{ij} (que determinam se uma rota entre as cidades i e j é usada). O valor M assegura que o fluxo entre duas cidades só pode existir se a rota correspondente estiver incluída no roteiro do caixeiro viajante.

Comparação

Essa abordagem é uma forma mais eficiente de se garantir que não hajam sub-ciclos, pois haverá menos alternativas de solução. Vamos compará-la com o modelo Danzig-Fulkerson-Johnson que vimos em aula.

Com auxílio do software CPLEX, vamos resolver o problema do caixeiro viajante para um conjunto de cidades aleatórias e comparar as soluções obtidas com os dois modelos.





Para um teste de até 100 nós (cidades) clientes, podemos ver pelas imagens que o método estudado nesta questão, baseado no problema do transbordo, é mais computacionalmente eficiente do que o método visto anteriormente. Enquanto o tempo de execução do método tradicional de Danzig cresce exponencialmente, o método de transbordo cresce de forma mais controlada.

8ª QUESTÃO

Uma empresa de navegação, cujos navios porta-contêineres fazem escalas no porto de Santos, está examinando a construção de um terminal de contêineres vazios no interior do estado de São Paulo. Atualmente, a empresa dispõe de um terminal na baixada Santista.

Na importação, os contêineres são transferidos, inicialmente, do porto para os clientes; os contêineres vazios retornam ao terminal para inspeção e eventuais reparos antes de serem reutilizados. Na exportação, a empresa encaminha os contêineres vazios para os clientes a partir do mencionado terminal; os contêineres cheios são encaminhados ao porto.

Para a construção do novo terminal, já há 3 locais pré-selecionados em função de uma análise preliminar da malha viária e da distribuição espacial dos clientes da empresa. Cabe agora aprofundar o estudo, propondo um modelo matemático que ajude a empresa a decidir se deve construir e onde o novo terminal de contêineres; mesmo em caso de construção de um novo terminal, o atual pode ser mantido para atendimento de uma parte dos clientes da empresa.

Especifique as informações necessárias para a tomada de decisões e elabore o modelo matemático correspondente.

Resolução

O enunciado é bastante aberto e portanto teremos que definir nós mesmos quais seriam os dados relevantes para a tomada de decisão.

Considere as variáveis a seguir:

- T: Período de retorno. É o tempo que se estima que o novo terminal de contêineres vazios será utilizado. Por exemplo, se o terminal for utilizado por 10 anos, então $T = 10$. Geralmente essa é um parâmetro importante em projetos de engenharia. Esse tempo começa a contar a partir da inauguração do terminal.
- j: índice que representa o local de construção do terminal de contêineres vazios. Com $j = 1, 2, 3$.
- t: índice que representa o ano. Com $t = 1, 2, \ldots, T$.
- C_j^c: custo de construção do terminal de contêineres vazios no local j.
- c_{jt}^{op}: custo de operação anual do terminal de contêineres vazios no local j no ano t.
- d_t^{imp}: demanda anual de contêineres vazios para importação no ano t.
- d_t^{exp}: demanda anual de contêineres vazios para exportação no ano t.
- C_0^{trans}: custo de transporte de um contêiner vazio que chega ou sai do terminal antigo.
- C_j^{trans}: custo de transporte de um contêiner vazio que chega ou sai do terminal novo no local j.
- Q_t: quantidade de contêineres vazios movimentados em um ano t.

Variáveis de decisão

- z_j: variável binária que indica se o terminal de contêineres vazios será construído no local j (1) ou não (0). Com $j = 1, 2, 3$.
- x_{jt}: variável inteira que indica a quantidade de contêineres movimentados no terminal novo no local j no ano t.
- y_t: variável inteira que indica a quantidade de contêineres movimentados no terminal antigo no ano t.

Função objetivo

Queremos minimizar o custo total para a empresa.

1. Custo de construção:

$$C^c = \sum_{j=1}^{3} C_j^c \cdot z_j$$

2. Custo de operação:

   O custo de operação do terminal antigo assumiremos fixo e invariantes em relação a construção do novo terminal. Porém o custo de operação do terminal novo depende se ele for construído ou não, do tempo de

$$C^{op} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{t=1}^{T} c_{jt}^{op} \cdot z_j$$

3. Custo de transporte

   O custo de transporte é calculado em função da quantidade de contêineres movimentados no terminal antigo e no terminal novo. Podemos assumir que o custo de transporte total em um local será o custo unitário vezes a demanda.

$$C^{transp} = \sum_{t=1}^{T} \left(C_0^{trans} \cdot y_t + \sum_{j=1}^{3} C_j^{trans} \cdot x_{jt} \cdot z_j \right)$$

4. Custo total:

Sendo assim, a função objetivo será:

$$\min \left(C^c + C^{op} + C^{transp} \right)$$

Restrições

1. Número de terminais novos:

Queremos construir no máximo 1 terminal novo. Perceba que podemos construir 0 terminais novos.

$$\sum_{j=1}^{3} z_j \leq 1$$

2. Atendimento da demanda:

A quantidade de contêineres movimentados no terminal antigo e no terminal novo deve ser suficiente para atender a demanda.

$$\sum_{t=1}^{T} y_t \geq \sum_{t=1}^{T} d_t^{imp} + \sum_{t=1}^{T} d_t^{exp}$$

$$\sum_{t=1}^{T} \sum_{j=1}^{3} x_{jt} \cdot z_j \geq \sum_{t=1}^{T} d_t^{imp} + \sum_{t=1}^{T} d_t^{exp}$$

Espaço das variáveis

- $z_j \in \{0, 1\}$ para todo $j = 1, 2, 3$.
- $x_{jt} \geq 0$ para todo $j = 1, 2, 3$ e $t = 1, 2, \ldots, T$.
- $y_t \geq 0$ para todo $t = 1, 2, \ldots, T$.

Comentários

Podemos complicar o modelo tanto quanto quisermos. Possíveis formas de se complicar o modelo aqui proposto seria:

- Definir capacidades máxima de contêineres que podem ser armazenados no terminal novo (para cada candidato) e antigo.
- Definir custos de transporte entre pares de origem e destino. Ou seja, determinar nós de demanda e associar custos entre eles e os nós que representam os candidatos e o terminal antigo. Isso tornaria o problema bastante parecido com o exercício do Centro de Distribuição (CD) visto em aula.

- Definir custos de transporte variáveis em função da quantidade de contêineres movimentados.

É importante manter um equilíbrio entre a complexidade do modelo e a relevância das restrições e variáveis consideradas. Em geral, começa-se com um modelo mais simples e vai-se adicionando complexidade conforme a necessidade, evitando assim construir um modelo desnecessariamente complexo.