Report

1.1 后验分布 $p(s|x_A, x_V)$ 是正态分布

假设我们有两个关于刺激 s 的独立线索 x_A 和 x_V，它们分别服从以下正态分布：

$$x_A \sim \mathcal{N}(s, \sigma_A^2), \quad x_V \sim \mathcal{N}(s, \sigma_V^2)$$

因为 x_A 和 x_V 是独立的，我们可以写出联合似然 $p(x_A, x_V|s)$ 为两个条件独立分布的乘积：

$$p(x_A, x_V|s) = p(x_A|s) \cdot p(x_V|s)$$

根据贝叶斯公式，后验分布 $p(s|x_A, x_V)$ 可以写成：

$$p(s|x_A, x_V) \propto p(x_A, x_V|s) \cdot p(s)$$

其中 $p(s)$ 为先验分布。题目中给定了 s 的先验分布为均匀分布，因此它为一个常数。于是后验分布的计算简化为求联合似然：

$$p(s|x_A, x_V) \propto p(x_A|s) \cdot p(x_V|s)$$

代入 $p(x_A|s)$ 和 $p(x_V|s)$ 的具体形式：

$$p(x_A|s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_A^2}} \exp\left(-\frac{(x_A - s)^2}{2\sigma_A^2}\right) \quad p(x_V|s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_V^2}} \exp\left(-\frac{(x_V - s)^2}{2\sigma_V^2}\right)$$

则

$$p(s|x_A, x_V) \propto \exp\left(-\frac{(x_A - s)^2}{2\sigma_A^2} - \frac{(x_V - s)^2}{2\sigma_V^2}\right)$$

化简上式的指数部分：

$$-\frac{(x_A - s)^2}{2\sigma_A^2} - \frac{(x_V - s)^2}{2\sigma_V^2} = -\frac{s^2}{2\sigma_A^2} + \frac{x_A s}{\sigma_A^2} - \frac{x_A^2}{2\sigma_A^2} - \frac{s^2}{2\sigma_V^2} + \frac{x_V s}{\sigma_V^2} - \frac{x_V^2}{2\sigma_V^2}$$

合并 s 的相关项，得到：

$$p(s|x_A, x_V) \propto \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_V^2}\right)s^2 + \left(\frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_V}{\sigma_V^2}\right)s\right)$$

这是一个以 s 为变量的二次方程，代表正态分布。我们可以从中提取出后验分布的均值和方差：

$$\text{后验均值} = \frac{\frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_V}{\sigma_V^2}}{\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_V^2}} \quad \text{后验方差} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_V^2}}$$

1.2 MAP 分布的推导

MAP 估计的分布也是正态分布，其均值和方差与上面求得的后验均值和方差一致。因此，MAP 估计的分布为：

$$\text{MAP 均值} = \frac{\frac{x_A}{\sigma_A^2} + \frac{x_V}{\sigma_V^2}}{\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_V^2}} \quad \text{MAP 方差} = \frac{1}{\frac{1}{\sigma_A^2} + \frac{1}{\sigma_V^2}}$$

好的，以下是对 **问题 2** 的详细推导过程：

问题 2: 对数后验比的推导

在这个问题中，我们希望推导出视觉搜索示例中的对数后验比 d，定义如下：

$$d = \log \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} \frac{p(x_j|T_j = 1)}{p(x_j|T_j = 0)}$$

其中：

- x_j是每次试验的观测值；
- $T_j = 1$表示目标存在，$T_j = 0$ 表示目标不存在；
- $p(x_j|T_j = 1)$和$p(x_j|T_j = 0)$分别是当目标存在或不存在时得到 x_j的条件概率。

我们可以通过以下几个步骤来完成推导。

1. 计算每次观测的似然比

在第 j 次观测中，似然比的定义为：

$$\frac{p(x_j|T_j = 1)}{p(x_j|T_j = 0)}$$

这个比值衡量了观测 x_j在目标存在时的可能性相对于目标不存在时的可能性。可以理解为，在假设目标存在和目标不存在的前提下，观察到 x_j 的概率之比。

2. 平均似然比

对于所有 N 个观测值，我们先取所有似然比的平均值：

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{p(x_j|T_j=1)}{p(x_j|T_j=0)}$$

这个表达式代表了在 N 次观测中，目标存在与不存在的平均似然比。

3. 对平均似然比取对数

取对数后，我们得到对数后验比 d：

$$d=\log\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{p(x_j|T_j=1)}{p(x_j|T_j=0)}$$

此时的 d 可以理解为在所有观测值上累积的对数似然比，代表了在目标存在和目标不存在情况下的总体判别信息。

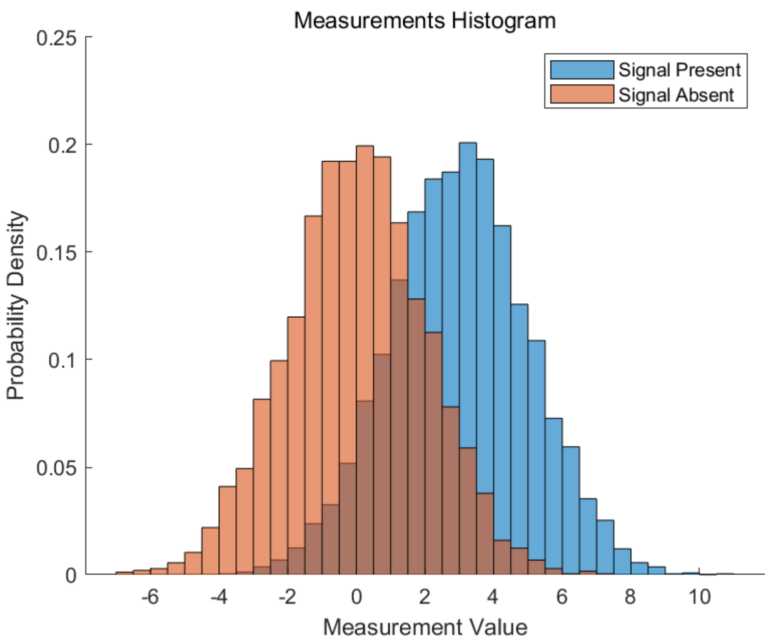
对 d 的解读

对数后验比 d 表示的是在所有观测结果上，目标存在相对于不存在的综合支持度。若 d 的值较大，表明观测结果总体上更倾向于支持目标存在的假设；若 d 值较小或为负，表明观测结果更倾向于目标不存在。

问题3

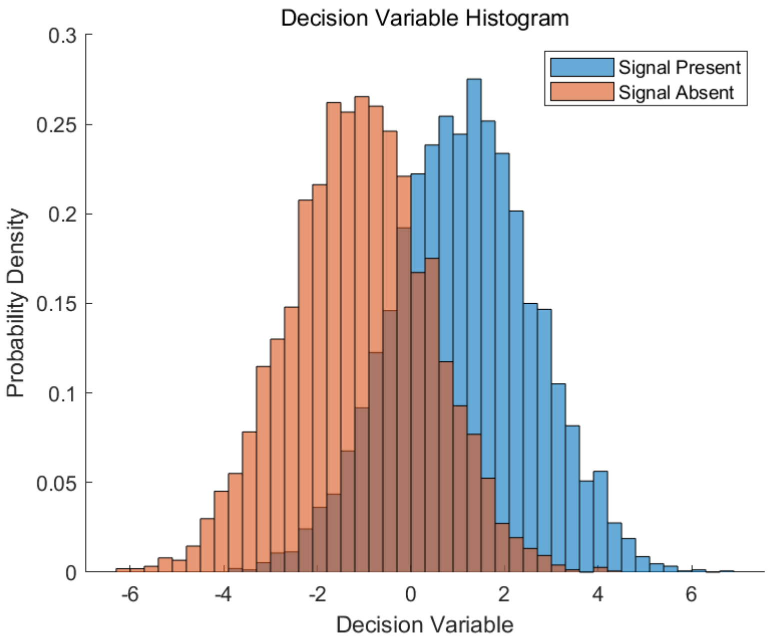
Measurements Histogram

下图展示了信号存在和信号不存在时的测量值直方图：



Decision Variable Histogram

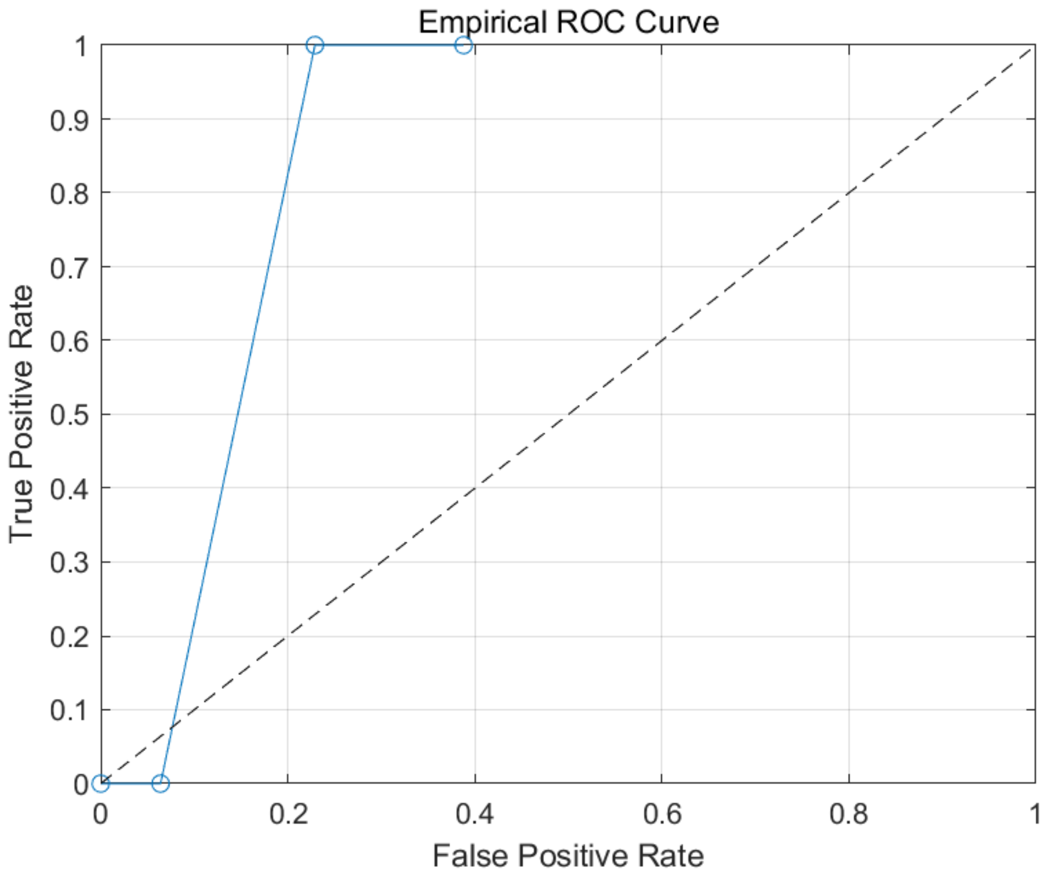
下图展示了决策变量的直方图，比较信号存在与不存在时的分布：



Empirical ROC Curve

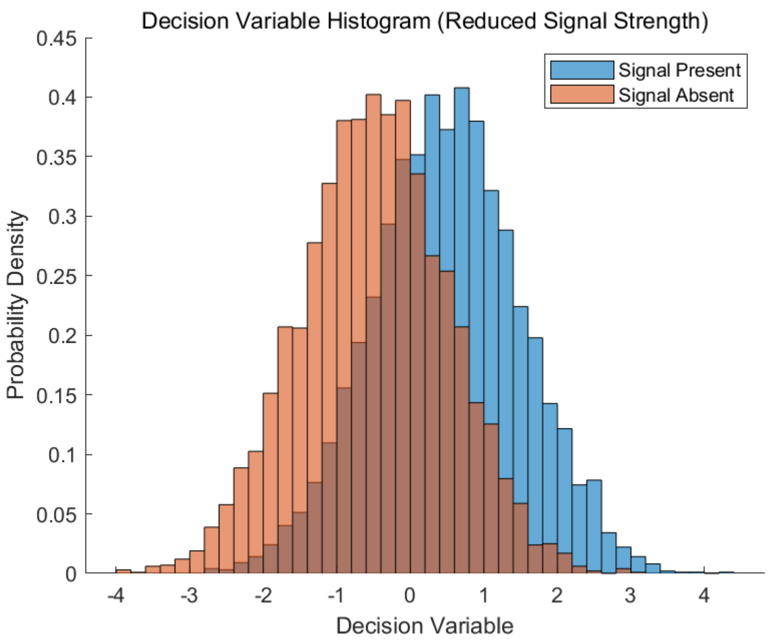
```
2x6 Response Table:
        3150        1476         356           0           0           0
           0           0           0        3175        1499         344
```

下图展示了基于响应表计算的经验 ROC 曲线：



Reduced Signal Strength

将信号强度减小至 s=2s = 2s=2 后的决策变量直方图：



分析: 减小信号强度后，信号和噪声的重叠增多，导致信号存在时的测量值分布和信号不存在时的测量值分布更为接近，从而降低了观察者的检测能力，表现为 ROC 曲线的性能下降。

Discussion

通过上述结果，我们可以观察到：

- **信号与噪声的区分**：直方图显示，信号存在时的测量值明显偏向高值，而信号不存在时的测量值主要集中在低值。
- **决策变量**：信号存在与不存在的决策变量分布具有一定重叠，反映了噪声对信号检测的影响。
- **ROC 曲线**：理想情况下，ROC 曲线应该呈现出优于随机猜测的性能，能够在 (0, 0) 和 (1, 1) 之间展现良好的区分能力。通过减小信号强度至 s=2，我们可以观察到 ROC 曲线的变化，这可能导致信号与噪声的重叠增加，从而降低检测能力。

Conclusion

本实验通过模拟信号检测任务，评估了观察者在不同条件下的表现。结果显示，信号强度和噪声水平对检测能力有显著影响。未来的工作可以探讨其他噪声模型对信号检测的影响，以及更复杂的信号处理方法。