

# Estimativa da Região de Atração de Sistema Não-Linear em formato DAR por LMIs

Guilherme de Paoli Beal

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
ELE312 – Sistemas Não-Lineares

Junho de 2023

## Definição do Problema

- ▶ Sistema não-linear, autônomo e não-forçado

$$\dot{\vec{x}} = \vec{f}(\vec{x})$$

- ▶ A origem é um ponto de equilíbrio estável

$$\vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$$

- ▶ *Região de Atração da Origem*

$$\vec{x}(t_0) \in \mathcal{R} \implies \lim_{t \rightarrow \infty} \vec{x}(t) = \vec{0}$$

- ▶  $\vec{x} \in \mathcal{B}_x$  – Estados
- ▶  $\mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^n$  – Região politópica
- ▶  $\vec{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  – Função dinâmica localmente Lipschitz
- ▶  $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$  – Região de Atração da Origem

# Representação Diferencial Algébrica (DAR)

- ▶ Vetor auxiliar contendo termos polinômiais e racionais em  $\vec{x}$
- ▶ Matrizes afins em  $\vec{x}$

$$\begin{cases} \vec{z} = \mathbf{A}_1(\vec{x}) \vec{x} + \mathbf{A}_2(\vec{x}) \vec{z}(\vec{x}) \\ \vec{0} = \boldsymbol{\Omega}_1(\vec{x}) \vec{x} + \boldsymbol{\Omega}_2(\vec{x}) \vec{z}(\vec{x}) \\ \rho(\boldsymbol{\Omega}_2(\vec{x})) = n_z \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{B}_x \\ \vec{z}(\vec{x}) = -\boldsymbol{\Omega}_2(\vec{x})^{-1} \boldsymbol{\Omega}_1(\vec{x}) \vec{x} \end{cases}$$

- ▶  $\vec{z}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_z}$
- ▶  $\mathbf{A}_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$
- ▶  $\mathbf{A}_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n_z}$
- ▶  $\boldsymbol{\Omega}_1: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_z \times n}$
- ▶  $\boldsymbol{\Omega}_2: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n_z \times n_z}$

# Representação Diferencial Algébrica (DAR)

Exemplo 1

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \mathbf{A}_1(\vec{x}) \vec{x} + \mathbf{A}_2(\vec{x}) \vec{z}(\vec{x}) \\ \vec{0} = \boldsymbol{\Omega}_1(\vec{x}) \vec{x} + \boldsymbol{\Omega}_2(\vec{x}) \vec{z}(\vec{x}) \end{cases}$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 + \frac{1}{3}x_1^3 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad n = 2$$

- Vetor auxiliar polinomial em  $\vec{x}$

$$\vec{z}(\vec{x}) = [x_1^2] \quad n_z = 1$$

- Matrizes afins em  $\vec{x}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_2(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}x_1 \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\Omega}_1(\vec{x}) &= [x_1 \ 0] & \boldsymbol{\Omega}_2(\vec{x}) &= [-1] \end{aligned}$$

# Representação Diferencial Algébrica (DAR)

Exemplo 1

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \mathbf{A}_1(\vec{x}) \vec{x} + \mathbf{A}_2(\vec{x}) \vec{z}(\vec{x}) \\ \vec{0} = \boldsymbol{\Omega}_1(\vec{x}) \vec{x} + \boldsymbol{\Omega}_2(\vec{x}) \vec{z}(\vec{x}) \end{cases}$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 + \frac{1}{3} x_1^3 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad n = 2$$

- Vetor auxiliar polinomial em  $\vec{x}$

$$\vec{z}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1^2 \\ x_1^3 \end{bmatrix} \quad n_z = 2$$

- Matrizes afins em  $\vec{x}$

$$\mathbf{A}_1(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\Omega}_1(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega}_2(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

# Representação Diferencial Algébrica (DAR)

Exemplo 2

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \mathbf{A}_1(\vec{x}) \vec{x} + \mathbf{A}_2(\vec{x}) \vec{z}(\vec{x}) \\ \vec{0} = \mathbf{\Omega}_1(\vec{x}) \vec{x} + \mathbf{\Omega}_2(\vec{x}) \vec{z}(\vec{x}) \end{cases}$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 - x_2 - x_1^2 x_2 + 0,1 x_1^4 x_2 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad n = 2$$

- Vetor auxiliar polinomial em  $\vec{x}$

$$\vec{z}(\vec{x})^T = [x_1^2 \quad x_1^3 \quad x_1^4] \quad n_z = 3$$

- Matrizes afins em  $\vec{x}$

$$\mathbf{A}_1(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 0,1 x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_1(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Omega}_2(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x_1 & -1 & 0 \\ 0 & x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

# Função de Lyapunov

- ▶ Função positiva definida

$$V(\vec{x}) > 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{B}_x \setminus \{\vec{0}\}$$
$$V(\vec{0}) = 0$$

- ▶ Derivada da função negativa definida

$$\dot{V}(\vec{x}) < 0 \quad \forall \vec{x} \in \mathcal{B}_x \setminus \{\vec{0}\}$$
$$\dot{V}(\vec{0}) = 0$$

- ▶ Estimativa da região de atração da origem

$$\hat{\mathcal{R}} = \{\vec{x} \in \mathcal{B}_x : V(\vec{x}) \leq 1\}$$

- ▶  $V: \mathcal{B}_x \rightarrow \mathbb{R}$  – Função de Lyapunov
- ▶  $\hat{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}$  – Estimativa da região de Atração da Origem

# Função de Lyapunov

## Função Quadrática

$$V(\vec{x}) = \vec{x}^T \mathbf{P} \vec{x}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \succ 0$$

$$\begin{aligned}\dot{V}(\vec{x}) &= \dot{\vec{x}}^T \mathbf{P} \vec{x} + \vec{x}^T \mathbf{P} \dot{\vec{x}} \\ &= \vec{f}(\vec{x})^T \mathbf{P} \vec{x} + \vec{x}^T \mathbf{P} \vec{f}(\vec{x})\end{aligned}$$

- ▶  $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

# Função de Lyapunov

## Função Quadrática – Representação Estendida

- Vetor estendido

$$\vec{\zeta}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \vec{x} \\ \dot{\vec{x}} \\ \vec{z}(\vec{x}) \end{bmatrix} \quad \mathcal{M}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(\vec{x}) & -\mathbf{I}_n & \mathbf{A}_2(\vec{x}) \\ \mathbf{\Omega}_1(\vec{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_2(\vec{x}) \end{bmatrix}$$
$$\mathcal{M}(\vec{x}) \vec{\zeta}(\vec{x}) = \vec{0}$$

- Função de Lyapunov

$$V(\vec{x}) = \vec{\zeta}(\vec{x})^T \Sigma(\mathbf{P}) \vec{\zeta}(\vec{x}) \geq 0 \quad \dot{V}(\vec{x}) = \vec{\zeta}(\vec{x})^T \Lambda(\mathbf{P}) \vec{\zeta}(\vec{x}) \leq 0$$

$$\Sigma(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n_z} \end{bmatrix} \quad \Lambda(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n_z} \end{bmatrix}$$

- $\vec{\zeta}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+n_z}$
- $\mathcal{M}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(n+n_z) \times (2n+n_z)}$
- $\Sigma: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{(2n+n_z) \times (2n+n_z)}$
- $\Lambda: \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{(2n+n_z) \times (2n+n_z)}$

# Politopo

- Região delimitada por suas  $n_e$  faces  $\vec{\mathbf{h}}_k$

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \vec{\mathbf{h}}_k^T \vec{\mathbf{x}} \leq 1, k = 1, \dots, n_e \right\}$$

- Ajustando para o vetor estendido

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \vec{\vartheta}(\vec{\mathbf{h}}_k)^T \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) \leq 1, k = 1, \dots, n_e \right\}$$

$$\vec{\vartheta}(\vec{\mathbf{h}}_k) = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{h}}_k \\ \vec{\mathbf{0}}_n \\ \vec{\mathbf{0}}_{n_z} \end{bmatrix}$$

- $\vec{\mathbf{h}}_k \in \mathbb{R}^n$
- $n_e \in \mathbb{N}$
- $\vec{\vartheta} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+n_z}$

# Estimativa da Região de Atração da Origem

- O interior de uma curva de nível da função de Lyapunov no interior do politopo é uma estimativa da região de atração da origem

$$\hat{\mathcal{R}} \subset \mathcal{B}_x$$

$\Updownarrow$

$$\vec{\mathbf{h}}_k^T \vec{\mathbf{x}} \leq 1 \quad \forall \vec{\mathbf{x}}: V(\vec{\mathbf{x}}) \leq 1$$

$\Updownarrow$

$$\vec{\vartheta} \left( \vec{\mathbf{h}}_k \right)^T \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) \leq 1 \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n: \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}})^T \Sigma(\mathbf{P}) \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) \leq 1$$

$\Updownarrow$

$$2 \vec{\vartheta} \left( \vec{\mathbf{h}}_k \right)^T \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) - 2 \leq 0 \quad \forall \vec{\mathbf{x}}: \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}})^T \Sigma(\mathbf{P}) \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) - 1 \leq 0$$

$$k = 1, \dots, n_e$$

# Estimativa da Região de Atração da Origem

## ► S-Procedure

$$\vec{v}^T \mathbf{T}_1 \vec{v} + 2 \vec{u}_1^T \vec{v} + w_1 \leq 0 \implies \vec{v}^T \mathbf{T}_2 \vec{v} + 2 \vec{u}_2^T \vec{v} + w_2 \leq 0$$

$\Updownarrow$

$$\begin{bmatrix} \vec{v} \\ 1 \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \vec{u}_1 \\ \vec{u}_1^T & w_1 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{T}_2 & \vec{u}_2 \\ \vec{u}_2^T & w_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \vec{v} \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0, \quad \lambda \geq 0$$

## ► Curva de nível no interior do politopo

$$\vec{\zeta}(\vec{x})^T \Sigma(\mathbf{P}) \vec{\zeta}(\vec{x}) - 1 \leq 0 \implies 2 \vec{v}^T (\vec{h}_k)^T \vec{\zeta}(\vec{x}) - 2 \leq 0$$

$\Updownarrow$

$$\begin{bmatrix} \vec{\zeta}(\vec{x}) \\ 1 \end{bmatrix}^T \left( \begin{bmatrix} \Sigma(\mathbf{P}) & \vec{0} \\ \vec{0}^T & -1 \end{bmatrix} - \nu \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \vec{v}(\vec{h}_k) \\ \vec{v}(\vec{h}_k)^T & -2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \vec{\zeta}(\vec{x}) \\ 1 \end{bmatrix} \geq 0,$$

$$\nu \geq 0$$

# Estimativa da Região de Atração da Origem

- Vetor estendido

$$\vec{\zeta}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \vec{\zeta}(\vec{x}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathcal{N}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(\vec{x}) & -\mathbf{I}_n & \mathbf{A}_2(\vec{x}) & \vec{0} \\ \mathbf{\Omega}_1(\vec{x}) & \mathbf{0} & \mathbf{\Omega}_2(\vec{x}) & \vec{0} \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vec{x} \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{N}(\vec{x}) \vec{\zeta}(\vec{x}) = \vec{0}$$

- Curva de nível no interior do politopo

$$\vec{\zeta}(\vec{x})^T \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{P}, \vec{\mathbf{h}}_k, \nu) \vec{\zeta}(\vec{x}) \geq 0, \quad k = 1, \dots, n_e$$

$$\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{P}, \vec{\mathbf{h}}_k, \nu) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{P}) & -\nu \vec{\vartheta}(\vec{\mathbf{h}}_k) \\ -\nu \vec{\vartheta}(\vec{\mathbf{h}}_k)^T & 2\nu - 1 \end{bmatrix}$$

- $\vec{\zeta}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n+n_z+1}$
- $\boldsymbol{\Pi}: \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{(2n+n_z+1) \times (2n+n_z+1)}$
- $\mathcal{N}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{(2n+n_z) \times (2n+n_z+1)}$
- $\nu \in \mathbb{R}^+$

# Inequações Matriciais Lineares (LMIs)

- Lema de Finsler

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}})^T \mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}) > 0 \\ \mathcal{O}(\vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}} \end{cases} \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$$

↓

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathbf{K} \mathcal{O}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathcal{O}(\vec{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}^T \succ 0 \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

- Função de Lyapunov positiva definida

$$\begin{cases} \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}})^T \Sigma(\mathbf{P}) \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) > 0 \\ \mathcal{M}(\vec{\mathbf{x}}) \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}} \end{cases} \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$$

↓

$$\Sigma(\mathbf{P}) + \mathbf{L} \mathcal{M}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathcal{M}(\vec{\mathbf{x}})^T \mathbf{L}^T \succ 0 \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

- $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{(2n+n_z) \times (n+n_z)}$

# Inequações Matriciais Lineares (LMIs)

- Lema de Finsler

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}})^T \mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}) > 0 \\ \mathcal{O}(\vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{0} \end{cases} \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$$

↓

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathbf{K} \mathcal{O}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathcal{O}(\vec{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}^T \succ 0 \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

- Derivada da função de Lyapunov negativa definida

$$\begin{cases} -\vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}})^T \Lambda(\mathbf{P}) \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) > 0 \\ \mathcal{M}(\vec{\mathbf{x}}) \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{0} \end{cases} \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$$

↓

$$-\Lambda(\mathbf{P}) + \mathbf{W} \mathcal{M}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathcal{M}(\vec{\mathbf{x}})^T \mathbf{W}^T \succ 0 \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

- $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{(2n+n_z) \times (n+n_z)}$

# Inequações Matriciais Lineares (LMIs)

## ► Lema de Finsler

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}})^T \mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}) > 0 \\ \mathcal{O}(\vec{\mathbf{x}}) \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{0} \end{cases} \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$$

$\Downarrow$

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathbf{K} \mathcal{O}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathcal{O}(\vec{\mathbf{x}})^T \mathbf{K}^T \succ 0 \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

## ► Curva de nível da função de Lyapunov no interior do politopo

$$\begin{cases} \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}})^T \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{P}, \vec{\mathbf{h}}_k, \nu) \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) > 0 \\ \mathcal{N}(\vec{\mathbf{x}}) \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{0} \end{cases} \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$$

$\Downarrow$

$$\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{P}, \vec{\mathbf{h}}_k, \nu) + \mathbf{R}_k \mathcal{N}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathcal{N}(\vec{\mathbf{x}})^T \mathbf{R}_k^T \succ 0 \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x),$$

$$k = 1, \dots, n_e$$

## ► $\mathbf{R}_k \in \mathbb{R}^{(2n+n_z+1) \times (2n+n_z)}$

# Inequações Matriciais Lineares (LMIs)

## Otimização

- ▶ A função de Lyapunov quadrática resulta em uma estimativa elipsoidal da região de atração da origem
- ▶ Maximização do tamanho dessa região
  - ▶ maximização do menor eixo
  - ▶ maximização do volume
  - ▶ maximização em alguma direção
  - ▶ minimização do traço

$$\min_{\mathbf{P}} \text{tr} (\mathbf{P})$$

# Inequações Matriciais Lineares (LMIs)

## Resumo

$$\min_{\mathbf{P}} \text{tr}(\mathbf{P})$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \succ 0$$

$$\nu > 0$$

$$\Sigma(\mathbf{P}) + \mathbf{L} \mathcal{M}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathcal{M}(\vec{\mathbf{x}})^T \mathbf{L}^T \succ 0 \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

$$-\Lambda(\mathbf{P}) + \mathbf{W} \mathcal{M}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathcal{M}(\vec{\mathbf{x}})^T \mathbf{W}^T \succ 0 \quad \forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

$$\Pi(\mathbf{P}, \vec{\mathbf{h}}_k, \nu) + \mathbf{R}_k \mathcal{N}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathcal{N}(\vec{\mathbf{x}})^T \mathbf{R}_k^T \succ 0$$

$$\forall \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x), \quad k = 1, \dots, n_e$$

- ▶ O politopo é desconhecido
  - ▶ Inicializa pequeno e aumenta enquanto o problema é factível

# Exemplos

## Politopo Losangular

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{h}_k^T \vec{x} \leq 1, k = 1, \dots, n_e \right\}$$

- ▶ Politopo losangular
  - ▶ centrado na origem
  - ▶ aresta de tamanho  $a$

$$n_e = 4$$

$$\vec{h}_1 = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{h}_2 = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{h}_3 = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{h}_4 = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix} \right\}$$

# Exemplos

## Politopo Quadrado

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{h}_k^T \vec{x} \leq 1, k = 1, \dots, n_e \right\}$$

- ▶ Politopo quadrado
  - ▶ centrado na origem
  - ▶ aresta de tamanho  $a$

$$n_e = 4$$

$$\vec{h}_1 = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{h}_2 = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{h}_3 = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \vec{h}_4 = \frac{1}{a} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a \\ -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a \\ -a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a \\ a \end{bmatrix} \right\}$$

# Exemplos

## Exemplo 1

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \mathbf{A}_1(\vec{x}) \vec{x} + \mathbf{A}_2(\vec{x}) \vec{z}(\vec{x}) \\ \vec{0} = \mathbf{\Omega}_1(\vec{x}) \vec{x} + \mathbf{\Omega}_2(\vec{x}) \vec{z}(\vec{x}) \end{cases}$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 + \frac{1}{3}x_1^3 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad n = 2$$

- Vetor auxiliar polinomial em  $\vec{x}$

$$\vec{z}(\vec{x}) = [x_1^2] \quad n_z = 1$$

- Matrizes afins em  $\vec{x}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_1(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} & \mathbf{A}_2(\vec{x}) &= \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}x_1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{\Omega}_1(\vec{x}) &= [x_1 \ 0] & \mathbf{\Omega}_2(\vec{x}) &= [-1] \end{aligned}$$

# Exemplos

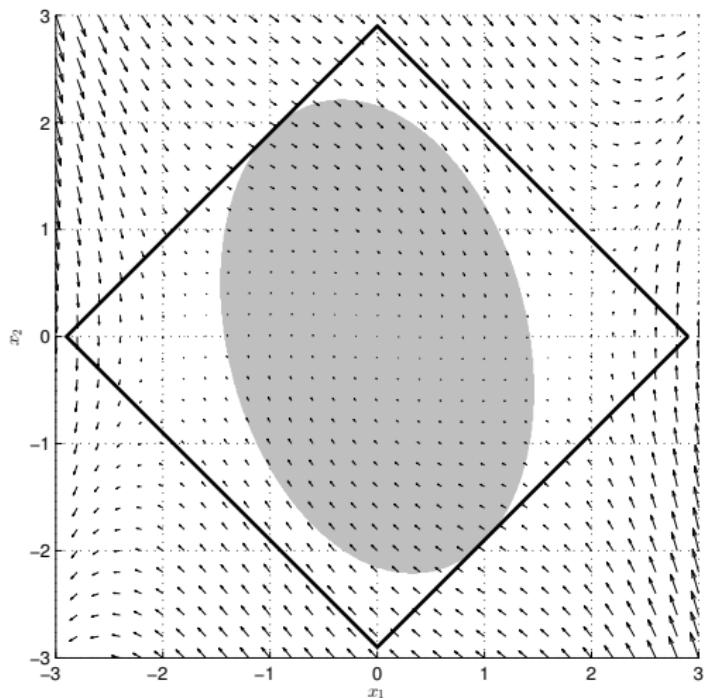
## Exemplo 1 - Politopo Losangular

# Exemplos

## Exemplo 1 - Politopo Quadrado

# Exemplos

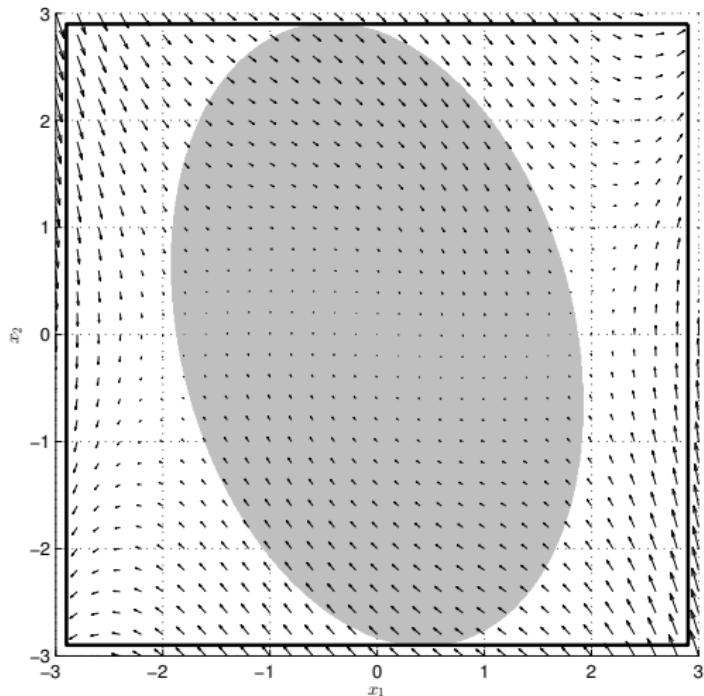
## Exemplo 1 - Politopo Losangular



$$a = 2,9$$

# Exemplos

## Exemplo 1 - Politopo Quadrado



$$a = 2,9$$

# Exemplos

## Exemplo 2

$$\begin{cases} \dot{\vec{x}} = \mathbf{A}_1(\vec{x}) \vec{x} + \mathbf{A}_2(\vec{x}) \vec{z}(\vec{x}) \\ \vec{0} = \mathbf{\Omega}_1(\vec{x}) \vec{x} + \mathbf{\Omega}_2(\vec{x}) \vec{z}(\vec{x}) \end{cases}$$

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 - x_2 - x_1^2 x_2 + 0,1 x_1^4 x_2 \end{bmatrix} \quad \vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad n = 2$$

- Vetor auxiliar polinomial em  $\vec{x}$

$$\vec{z}(\vec{x})^T = [x_1^2 \quad x_1^3 \quad x_1^4] \quad n_z = 3$$

- Matrizes afins em  $\vec{x}$

$$\mathbf{A}_1(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2(\vec{x}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 0,1 x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_1(\vec{x}) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Omega}_2(\vec{x}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x_1 & -1 & 0 \\ 0 & x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

# Exemplos

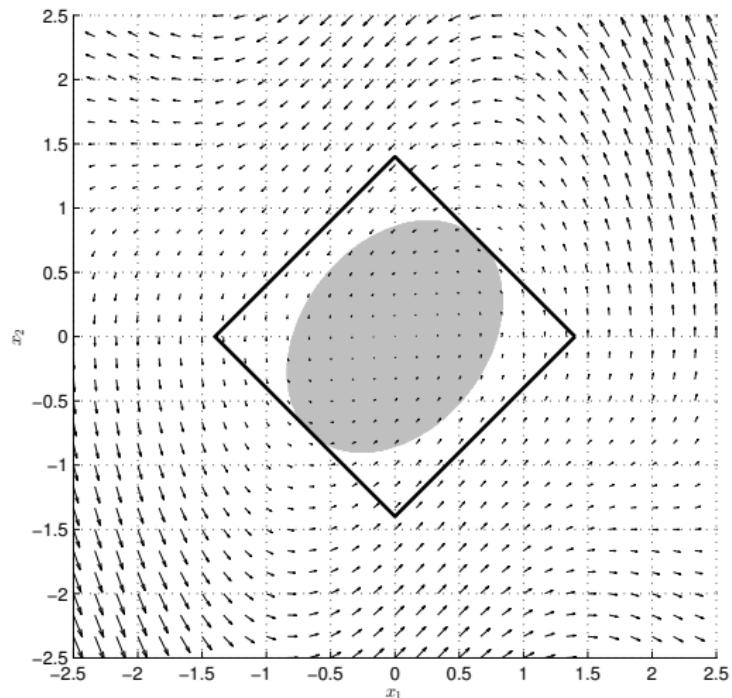
## Exemplo 2 - Politopo Losangular

# Exemplos

## Exemplo 2 - Politopo Quadrado

# Exemplos

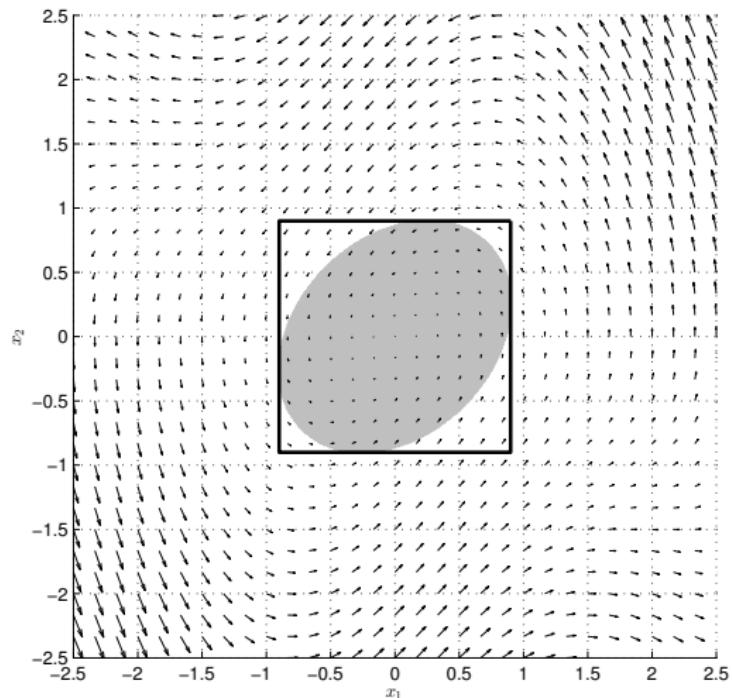
## Exemplo 2 - Politopo Losangular



$$a = 1,4$$

# Exemplos

## Exemplo 2 - Politopo Quadrado



$$a = 0,9$$

# Estimativa da Região de Atração de Sistema Não-Linear em formato DAR por LMIs

Guilherme de Paoli Beal

Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
ELE312 – Sistemas Não-Lineares

Junho de 2023