Estimativa da Região de Atração de Sistema Não-Linear em formato DAR por LMIs

Guilherme de Paoli Beal

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
ELE312 – Sistemas Não-Lineares

Junho de 2023

Definição do Problema

- Sistema não-linear, autônomo e não-forçado

$$\dot{\vec{\mathbf{x}}} = \vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right)$$

- A origem é um ponto de equilíbrio estável

$$\vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{0}}\right) = \vec{\mathbf{0}}$$

- *Região de Atração da Origem*

$$\vec{\mathbf{x}}(t_0) \in \mathcal{R} \implies \lim_{t \to \infty} \vec{\mathbf{x}}(t) = \vec{\mathbf{0}}$$

- $\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$ – Estados
- $\mathcal{B}_x \subset \mathbb{R}^n$ – Região politópica
- $\vec{\mathbf{f}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ – Função dinâmica localmente Lipschitz
- $\mathcal{R} \subset \mathcal{B}_x$ – Região de Atração da Origem

Representação Diferencial Algébrica (DAR)

- Vetor auxiliar contendo termos polinômiais e racionais em $\vec{\mathbf{x}}$
- Matrizes afins em $\vec{\mathbf{x}}$

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{z}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) \\ \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{\Omega}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{\Omega}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{z}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) \end{cases}$$

$$\rho\left(\mathbf{\Omega}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\right) = n_z\ \ \forall\, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$$

$$\vec{\mathbf{z}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = -\mathbf{\Omega}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right)^{-1}\mathbf{\Omega}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{x}}$$

- $\vec{\mathbf{z}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_z}$
- $\mathbf{A}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$
- $\mathbf{A}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n_z}$
- $\mathbf{\Omega}_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_z\times n}$
- $\mathbf{\Omega}_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_z\times n_z}$

Representação Diferencial Algébrica (DAR)

Exemplo 1

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_1(\vec{\mathbf{x}})\ \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_2(\vec{\mathbf{x}})\ \vec{\mathbf{z}}(\vec{\mathbf{x}}) \\ \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{\Omega}_1(\vec{\mathbf{x}})\ \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{\Omega}_2(\vec{\mathbf{x}})\ \vec{\mathbf{z}}(\vec{\mathbf{x}}) \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 + \frac{1}{3}\, {x_1}^3 \end{bmatrix} \qquad \vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad n = 2$$

- Vetor auxiliar polinomial em $\vec{\mathbf{x}}$

$$\vec{\mathbf{z}}(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} {x_1}^2 \end{bmatrix} \qquad n_z = 1$$

- Matrizes afins em $\vec{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{A}_1(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_2(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}\, x_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_1(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Omega}_2(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

Representação Diferencial Algébrica (DAR)

Exemplo 1

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_1(\vec{\mathbf{x}})\ \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_2(\vec{\mathbf{x}})\ \vec{\mathbf{z}}(\vec{\mathbf{x}}) \\ \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{\Omega}_1(\vec{\mathbf{x}})\ \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{\Omega}_2(\vec{\mathbf{x}})\ \vec{\mathbf{z}}(\vec{\mathbf{x}}) \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{f}}(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 + \frac{1}{3}\,{x_1}^3 \end{bmatrix} \qquad \vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad n = 2$$

- Vetor auxiliar polinomial em $\vec{\mathbf{x}}$

$$\vec{\mathbf{z}}(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} {x_1}^2 \\ {x_1}^3 \end{bmatrix} \qquad n_z = 2$$

- Matrizes afins em $\vec{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{A}_1(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_2(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_1(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Omega}_2(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

Representação Diferencial Algébrica (DAR)

Exemplo 2

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{z}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) \\ \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{\Omega}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{\Omega}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{z}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 - x_2 - {x_1}^2\, x_2 + 0{,}1\, {x_1}^4\, x_2 \end{bmatrix} \qquad \vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad n = 2$$

- Vetor auxiliar polinomial em $\vec{\mathbf{x}}$

$$\vec{\mathbf{z}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right)^T = \begin{bmatrix} {x_1}^2 & {x_1}^3 & {x_1}^4 \end{bmatrix} \qquad\qquad n_z = 3$$

- Matrizes afins em $\vec{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{A}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 0{,}1\, x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Omega}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x_1 & -1 & 0 \\ 0 & x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

Função de Lyapunov

- Função definida positiva

$$V\left(\vec{\mathbf{x}}\right) > 0 \ \forall \, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x \setminus \left\{\vec{\mathbf{0}}\right\}$$

$$V\left(\vec{\mathbf{0}}\right) = 0$$

- Derivada da função negativa definida

$$\dot{V}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) < 0 \ \forall \, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x \setminus \left\{\vec{\mathbf{0}}\right\}$$

$$\dot{V}\left(\vec{\mathbf{0}}\right) = 0$$

- Estimativa da região de atração da origem

$$\hat{\mathcal{R}} = \left\{\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x : V\left(\vec{\mathbf{x}}\right) \leq 1\right\}$$

- $V : \mathcal{B}_x \to \mathbb{R}$ – Função de Lyapunov
- $\hat{\mathcal{R}} \subset \mathcal{R}$ – Estimativa da região de Atração da Origem

Função de Lyapunov

Função Quadrática

$$V\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \vec{\mathbf{x}}^T \, \mathbf{P} \, \vec{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \succ 0$$

$$\begin{aligned} \dot{V}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) &= \dot{\vec{\mathbf{x}}}^T \, \mathbf{P} \, \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{x}}^T \, \mathbf{P} \, \dot{\vec{\mathbf{x}}} \\ &= \vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right)^T \, \mathbf{P} \, \vec{\mathbf{x}} + \vec{\mathbf{x}}^T \, \mathbf{P} \, \vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) \end{aligned}$$

- $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

Função de Lyapunov

Função Quadrática – Representação Estendida

- Vetor estendido

$$\vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{x}} \\ \dot{\vec{\mathbf{x}}} \\ \vec{\mathbf{z}}(\vec{\mathbf{x}}) \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1(\vec{\mathbf{x}}) & -\mathbf{I}_n & \mathbf{A}_2(\vec{\mathbf{x}}) \\ \boldsymbol{\Omega}_1(\vec{\mathbf{x}}) & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_2(\vec{\mathbf{x}}) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}})\ \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{0}$$

- Função de Lyapunov

$$V(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}})^T \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{P})\, \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) \geq 0 \quad \dot{V}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}})^T \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{P})\, \vec{\zeta}(\vec{\mathbf{x}}) \leq 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n_z} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{P}) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_n & \mathbf{P} & \mathbf{0} \\ \mathbf{P} & \mathbf{0}_n & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}_{n_z} \end{bmatrix}$$

- $\vec{\zeta} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2\,n+n_z}$
- $\boldsymbol{\mathcal{M}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{(n+n_z)\times(2\,n+n_z)}$
- $\boldsymbol{\Sigma} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{(2\,n+n_z)\times(2\,n+n_z)}$
- $\boldsymbol{\Lambda} : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{(2\,n+n_z)\times(2\,n+n_z)}$

Politopo

- Região delimitada por suas n_e faces $\vec{\mathbf{h}}_k$

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \colon \vec{\mathbf{h}}_k^{\,T} \, \vec{\mathbf{x}} \leq 1 \, , \; k = 1, \ldots, n_e \right\}$$

- Ajustando para o vetor estendido

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n \colon \vec{\boldsymbol{\vartheta}} \left(\vec{\mathbf{h}}_k \right)^T \vec{\boldsymbol{\zeta}} \left(\vec{\mathbf{x}} \right) \leq 1 \, , \; k = 1, \ldots, n_e \right\}$$

$$\vec{\boldsymbol{\vartheta}} \left(\vec{\mathbf{h}}_k \right) = \begin{bmatrix} \vec{\mathbf{h}}_k \\ \vec{\mathbf{0}}_n \\ \vec{\mathbf{0}}_{n_z} \end{bmatrix}$$

- $\vec{\mathbf{h}}_k \in \mathbb{R}^n$
- $n_e \in \mathbb{N}$
- $\vec{\boldsymbol{\vartheta}} \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2\,n + n_z}$

Estimativa da Região de Atração da Origem

- O interior de uma curva de nível da função de Lyapunov no interior do politopo é uma estimativa da região de atração da origem

$$\hat{\mathcal{R}} \subset \mathcal{B}_x$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{\mathbf{h}}_k{}^T \, \vec{\mathbf{x}} \leq 1 \;\; \forall \, \vec{\mathbf{x}} : V\left(\vec{\mathbf{x}}\right) \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$\vec{\boldsymbol{\vartheta}}\left(\vec{\mathbf{h}}_k\right)^T \vec{\boldsymbol{\zeta}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) \leq 1 \;\; \forall \, \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \; \vec{\boldsymbol{\zeta}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right)^T \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{P}) \, \vec{\boldsymbol{\zeta}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) \leq 1$$

$$\Updownarrow$$

$$2\,\vec{\boldsymbol{\vartheta}}\left(\vec{\mathbf{h}}_k\right)^T \vec{\boldsymbol{\zeta}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) - 2 \leq 0 \;\; \forall \, \vec{\mathbf{x}} : \; \vec{\boldsymbol{\zeta}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right)^T \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{P}) \, \vec{\boldsymbol{\zeta}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) - 1 \leq 0$$

$$k = 1, \ldots, n_e$$

Estimativa da Região de Atração da Origem

- *S-Procedure*

$$\vec{\mathbf{v}}^T\,\mathbf{T}_1\,\vec{\mathbf{v}} + 2\,\vec{\mathbf{u}}_1{}^T\,\vec{\mathbf{v}} + w_1 \le 0 \implies \vec{\mathbf{v}}^T\,\mathbf{T}_2\,\vec{\mathbf{v}} + 2\,\vec{\mathbf{u}}_2{}^T\,\vec{\mathbf{v}} + w_2 \le 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{v}}\\ 1\end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix}\mathbf{T}_1 & \vec{\mathbf{u}}_1\\ \vec{\mathbf{u}}_1{}^T & w_1\end{bmatrix} + \lambda\begin{bmatrix}\mathbf{T}_2 & \vec{\mathbf{u}}_2\\ \vec{\mathbf{u}}_2{}^T & w_2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\vec{\mathbf{v}}\\ 1\end{bmatrix},\ \lambda \ge 0$$

- Curva de nível no interior do politopo

$$\vec{\zeta}\,(\vec{\mathbf{x}})^T\,\mathbf{\Sigma}(\mathbf{P})\,\vec{\zeta}\,(\vec{\mathbf{x}}) - 1 \le 0 \implies 2\,\vec{\vartheta}\left(\vec{\mathbf{h}}_k\right)^T\vec{\zeta}\,(\vec{\mathbf{x}}) - 2 \le 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix}\vec{\zeta}\,(\vec{\mathbf{x}})\\ 1\end{bmatrix}^T \left(\begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma}(\mathbf{P}) & \vec{\mathbf{0}}\\ \vec{\mathbf{0}}^T & -1\end{bmatrix} + \nu\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \vec{\vartheta}\left(\vec{\mathbf{h}}_k\right)\\ \vec{\vartheta}\left(\vec{\mathbf{h}}_k\right)^T & -2\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\vec{\zeta}\,(\vec{\mathbf{x}})\\ 1\end{bmatrix},$$

$$\nu \ge 0$$

Estimativa da Região de Atração da Origem

- Vetor estendido

$$\vec{\varsigma}\,(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \vec{\zeta}\,(\vec{\mathbf{x}}) \\ 1 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\mathcal{N}}\,(\vec{\mathbf{x}}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1\,(\vec{\mathbf{x}}) & -\mathbf{I}_n & \mathbf{A}_2\,(\vec{\mathbf{x}}) & \vec{\mathbf{0}} \\ \boldsymbol{\Omega}_1\,(\vec{\mathbf{x}}) & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_2\,(\vec{\mathbf{x}}) & \vec{\mathbf{0}} \\ -\mathbf{I}_n & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \vec{\mathbf{x}} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{N}}\,(\vec{\mathbf{x}})\;\vec{\varsigma}\,(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

- Curva de nível no iterior do politopo

$$\vec{\varsigma}\,(\vec{\mathbf{x}})^T\,\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{P}, \vec{\mathbf{h}}_k, \nu)\,\vec{\varsigma}\,(\vec{\mathbf{x}}) \geq 0\,,\;\; k = 1, \ldots, n_e$$

$$\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{P}, \vec{\mathbf{h}}_k, \nu) = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{P}) & -\nu\,\vec{\boldsymbol{\vartheta}}(\vec{\mathbf{h}}_k) \\ -\nu\,\vec{\boldsymbol{\vartheta}}(\vec{\mathbf{h}}_k)^T & 2\,\nu - 1 \end{bmatrix}$$

- $\vec{\varsigma}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2\,n+n_z+1}$
- $\boldsymbol{\Pi}: \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{(2\,n+n_z+1)\times(2\,n+n_z+1)}$
- $\boldsymbol{\mathcal{N}}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{(2\,n+n_z)\times(2\,n+n_z+1)}$
- $\nu \in \mathbb{R}^+$

Inequações Matriciais Lineares (LMIs)

- Lema de Finsler

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}})^T \, \mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) \, \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}) > 0 \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}(\vec{\mathbf{x}}) \, \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}} \end{cases} \quad \forall \, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathbf{K} \, \boldsymbol{\mathcal{O}}(\vec{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\mathcal{O}}(\vec{\mathbf{x}})^T \, \mathbf{K}^T \succ 0 \;\; \forall \, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

- Função de Lyapunov positiva definida

$$\begin{cases} \vec{\boldsymbol{\zeta}}(\vec{\mathbf{x}})^T \, \boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{P}) \, \vec{\boldsymbol{\zeta}}(\vec{\mathbf{x}}) > 0 \\ \boldsymbol{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}}) \, \vec{\boldsymbol{\zeta}}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}} \end{cases} \quad \forall \, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{P}) + \mathbf{L} \, \boldsymbol{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}})^T \, \mathbf{L}^T \succ 0 \;\; \forall \, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

- $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{(2\,n+n_z)\times(n+n_z)}$

Inequações Matriciais Lineares (LMIs)

- Lema de Finsler

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}})^T\,\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}})\,\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}) > 0 \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}(\vec{\mathbf{x}})\,\vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}} \end{cases} \forall\,\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathbf{K}\,\boldsymbol{\mathcal{O}}(\vec{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\mathcal{O}}(\vec{\mathbf{x}})^T\,\mathbf{K}^T \succ 0\ \forall\,\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

- Derivada da função de Lyapunov negativa definida

$$\begin{cases} -\vec{\boldsymbol{\zeta}}(\vec{\mathbf{x}})^T\,\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{P})\,\vec{\boldsymbol{\zeta}}(\vec{\mathbf{x}}) > 0 \\ \boldsymbol{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}})\,\vec{\boldsymbol{\zeta}}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}} \end{cases} \forall\,\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$$

$$\Downarrow$$

$$-\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{P}) + \mathbf{W}\,\boldsymbol{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}})^T\,\mathbf{W}^T \succ 0\ \forall\,\vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

- $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{(2\,n+n_z)\times(n+n_z)}$

Inequações Matriciais Lineares (LMIs)

- Lema de Finsler

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}})^T \, \mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) \, \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}) > 0 \\ \boldsymbol{\mathcal{O}}(\vec{\mathbf{x}}) \, \vec{\mathbf{v}}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}} \end{cases} \quad \forall \, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbf{T}(\vec{\mathbf{x}}) + \mathbf{K} \, \boldsymbol{\mathcal{O}}(\vec{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\mathcal{O}}(\vec{\mathbf{x}})^T \, \mathbf{K}^T \succ 0 \;\; \forall \, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

- Curva de nível da função de Lyapunov no interior do politopo

$$\begin{cases} \vec{\varsigma}(\vec{\mathbf{x}})^T \, \boldsymbol{\Pi}(\mathbf{P}, \vec{\mathbf{h}}_k, \nu) \, \vec{\varsigma}(\vec{\mathbf{x}}) > 0 \\ \boldsymbol{\mathcal{N}}(\vec{\mathbf{x}}) \, \vec{\varsigma}(\vec{\mathbf{x}}) = \vec{\mathbf{0}} \end{cases} \quad \forall \, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{B}_x$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{P}, \vec{\mathbf{h}}_k, \nu) + \mathbf{R}_k \, \boldsymbol{\mathcal{N}}(\vec{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\mathcal{N}}(\vec{\mathbf{x}})^T \, \mathbf{R}_k{}^T \succ 0 \;\; \forall \, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x),$$

$$k = 1, \ldots, n_e$$

- $\mathbf{R}_k \in \mathbb{R}^{(2\,n+n_z+1)\times(2\,n+n_z)}$

Inequações Matriciais Lineares (LMIs)

Otimização

- A função de Lyapunov quadrática resulta em uma estimativa elipsoidal da região de atração da origem
- Maximização do tamanho dessa região
  - maximização do menor eixo
  - maximização do volume
  - maximização em alguma direção
  - minimização do traço

$$\min_{\mathbf{P}} \operatorname{tr}(\mathbf{P})$$

Inequações Matriciais Lineares (LMIs)

Resumo

$$\min_{\mathbf{P}} \operatorname{tr}(\mathbf{P})$$

$$\mathbf{P} = \mathbf{P}^T \succ 0$$

$$\nu > 0$$

$$\boldsymbol{\Sigma}(\mathbf{P}) + \mathbf{L}\,\boldsymbol{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}})^T\,\mathbf{L}^T \succ 0 \;\; \forall\, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

$$-\boldsymbol{\Lambda}(\mathbf{P}) + \mathbf{W}\,\boldsymbol{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\mathcal{M}}(\vec{\mathbf{x}})^T\,\mathbf{W}^T \succ 0 \;\; \forall\, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x)$$

$$\boldsymbol{\Pi}(\mathbf{P}, \vec{\mathbf{h}}_k, \nu) + \mathbf{R}_k\,\boldsymbol{\mathcal{N}}(\vec{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\mathcal{N}}(\vec{\mathbf{x}})^T\,{\mathbf{R}_k}^T \succ 0$$

$$\forall\, \vec{\mathbf{x}} \in \mathcal{V}(\mathcal{B}_x),\;\; k = 1, \ldots, n_e$$

- O politopo é desconhecido
  - Inicializa pequeno e aumenta enquanto o problema é factível

Exemplos
Politopo

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \vec{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^n : \vec{\mathbf{h}}_k^{\,T} \vec{\mathbf{x}} \leq 1\,,\ k = 1, \ldots, n_e \right\}$$

- Politopo losangular
  - centrado na origem
  - aresta de tamanho a

$$n_e = 4$$

$$\vec{\mathbf{h}}_1 = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \vec{\mathbf{h}}_2 = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{\mathbf{h}}_3 = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad \vec{\mathbf{h}}_4 = \frac{1}{a}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{B}_x) = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -a \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -a \end{bmatrix} \right\}$$

- Nos exemplos, $a_0 = 0{,}1$, $a_i = a_{i-1} + 0{,}1$

Representação Diferencial Algébrica (DAR)

Exemplo 1

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{z}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) \\ \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{\Omega}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{\Omega}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{z}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_1 - x_2 + \frac{1}{3}\,{x_1}^3 \end{bmatrix} \qquad \vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad n = 2$$

- Vetor auxiliar polinomial em $\vec{\mathbf{x}}$

$$\vec{\mathbf{z}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} {x_1}^2 \end{bmatrix} \qquad n_z = 1$$

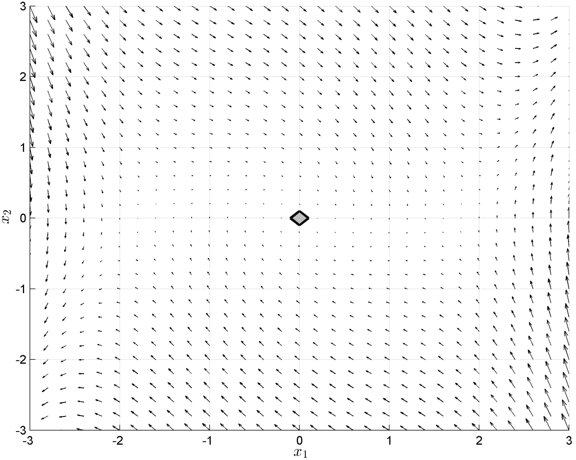
- Matrizes afins em $\vec{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{A}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{3}\,x_1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Omega}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} -1 \end{bmatrix}$$

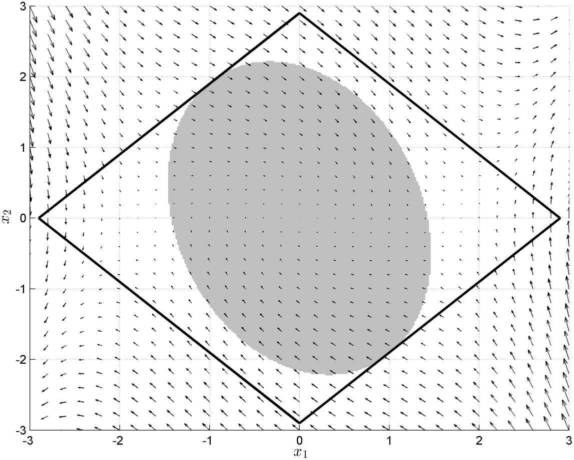
Exemplos

Exemplo 1



Exemplos

Exemplo 1



$$a = 2{,}9$$

Representação Diferencial Algébrica (DAR)

Exemplo 2

$$\begin{cases} \dot{\vec{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{A}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{z}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) \\ \vec{\mathbf{0}} = \mathbf{\Omega}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{x}} + \mathbf{\Omega}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right)\ \vec{\mathbf{z}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) \end{cases}$$

$$\vec{\mathbf{f}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} -x_2 \\ x_1 - x_2 - {x_1}^2\, x_2 + 0{,}1\, {x_1}^4\, x_2 \end{bmatrix} \quad \vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad n = 2$$

- Vetor auxiliar polinomial em $\vec{\mathbf{x}}$

$$\vec{\mathbf{z}}\left(\vec{\mathbf{x}}\right)^T = \begin{bmatrix} {x_1}^2 & {x_1}^3 & {x_1}^4 \end{bmatrix} \qquad n_z = 3$$

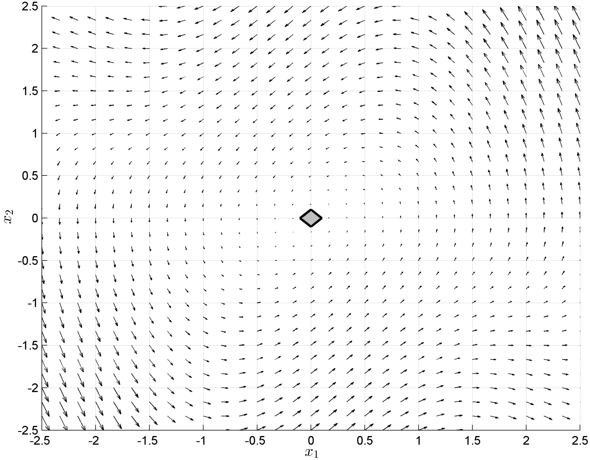
- Matrizes afins em $\vec{\mathbf{x}}$

$$\mathbf{A}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{A}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -x_2 & 0 & 0{,}1\, x_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{\Omega}_1\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{\Omega}_2\left(\vec{\mathbf{x}}\right) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ x_1 & -1 & 0 \\ 0 & x_1 & -1 \end{bmatrix}$$

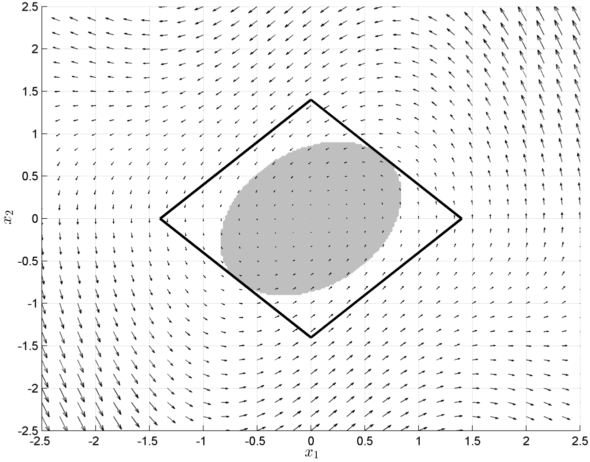
Exemplos

Exemplo 2



Exemplos

Exemplo 2



$$a = 1{,}4$$

Estimativa da Região de Atração de Sistema Não-Linear em formato DAR por LMIs

Guilherme de Paoli Beal

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
ELE312 – Sistemas Não-Lineares

Junho de 2023