

# Identificação de Sistema por Erro de Predição com Modelos Polinomiais

Guilherme de Paoli Beal  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica  
Aprendizado Supervisionado de Modelos Paramétricos

**Resumo**—Este trabalho busca identificar um sistema por erro de predição, a partir de um conjunto de dados de entrada e saída, com a saída corrompida por ruído de medição. As classes de modelo ARX, ARMAX, Output Error e Box-Jenkins, com diferentes ordens, são avaliadas. As identificações são realizadas pelo pacote `pysid` em linguagem Python. Os resultados são comparados pelo erro quadrático médio de predição e pelo critério de informação de Akaike ajustado para dados com poucas amostras.

**Palavras-chave**—Identificação por Erro de Predição, `pysid`, ARX, ARMAX, Output Error, Box-Jenkins

## I. INTRODUÇÃO

Este trabalho visa à aplicação de identificação de um sistema discreto, linear e invariante no tempo, através do método de erro de predição, ou *Prediction Error Method* (PEM). Uma batelada de dados de um sistema, supostamente desconhecido, é fornecida, em que a saída está contaminada por ruído de medição. A identificação é realizada utilizando diferentes classes de modelo e ordens e os resultados são comparados.

As implementações são desenvolvidas em Python, versão 3.9.12. A identificação por erro de predição utiliza o pacote `pysid` em versão de desenvolvimento 0.1.0. O código deste projeto está publicado em [github.com/GuiBeal/system-identification](https://github.com/GuiBeal/system-identification).

## II. IDENTIFICAÇÃO POR ERRO DE PREDIÇÃO

Considere um sistema discreto, linear, invariante no tempo, com uma única entrada e uma única saída. A resposta deste sistema é dada por

$$y(t) = G_0(q) u(t) + \nu(t), t \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

em que  $y(t)$  é o sinal de saída,  $G_0(q)$  é a função de transferência do sistema,  $u(t)$  é o sinal de entrada,  $\nu(t)$  é um ruído de medição desconhecido,  $q$  é o operador de avanço — de modo que  $qx(t) = x(t+1)$  — e  $t \in \mathbb{N}$  é a variável de tempo discreto. O ruído de medição é gerado a partir de ruído branco filtrado, como

$$\nu(t) = H_0(q) e(t),$$

em que  $H_0(q)$  é a função de transferência do filtro e  $e(t)$  é ruído branco.

G. Beal, [guilherme.beal@ufrgs.br](mailto:guilherme.beal@ufrgs.br)

### A. Modelos Polinomiais

O modelo busca representar o sistema real  $G_0(q)$  expresso em (1). Em particular, na identificação por erro de predição, o modelo procurar caracterizar também o ruído  $\nu(t)$  através da identificação de  $H_0(q)$ .

Quatro diferentes classes de modelo polinomiais são exploradas neste trabalho:

- Autorregressivo com Entrada Externa, ou *Autoregressive with Extra Input* (ARX);
- Autorregressivo com Média Móvel e Entrada Externa, ou *Autoregressive Moving Average with Extra Input* (ARMAX);
- Erro na Saída, ou *Output Error* (OE); e
- Box-Jenkins (BJ).

Essas classes são casos particulares de um modelo mais genérico, definido por

$$A(q) y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t). \quad (2)$$

Os polinômios têm os formatos

$$\begin{aligned} A(q) &= 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{n_a} q^{-n_a}, \\ B(q) &= q^{-n_k} (b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b}), \\ C(q) &= 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c}, \\ D(q) &= 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_d} q^{-n_d}, \text{ e} \\ F(q) &= 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f}, \end{aligned}$$

em que  $n_a, n_b, n_c, n_d$  e  $n_f$  são suas ordens e  $n_k$  é o número de atrasos da entrada para a saída. Definindo as funções de transferência

$$\begin{aligned} G(q) &= \frac{B(q)}{A(q) F(q)}, \text{ e} \\ H(q) &= \frac{C(q)}{A(q) D(q)}, \end{aligned}$$

então (2) pode ser reescrita como

$$y(t) = G(q) u(t) + H(q) e(t).$$

Note que  $G(q)$  visa a caracterizar o sistema real  $G_0(q)$ . Por sua vez, o ruído de medição  $\nu(t)$  é representado como ruído branco  $e(t)$  filtrado por  $H(q)$ .

Pelas definições dos polinômios,

$$H(\infty) = 1. \quad (3)$$

Outrossim, se o modelo representa um sistema amostrado, então  $G(q)$  deve ser estritamente própria — isto é, o grau

de seu denominador é maior que o de seu numerador — o que é garantido com  $n_k \geq 1$ .

Ressalta-se que este modelo genérico pode apresentar definições e notações diferentes, como em [1]–[3]. A definição aqui apresentada corresponde ao formato dos polinômios retornados pelas funções do pacote `pysid`.

### B. Predição

A predição é realizada aplicando

$$\hat{y}(t) = L_u(q) u(t) + L_y(q) y(t) \quad (4)$$

com

$$L_u(q) = \frac{G(q)}{H(q)}, \text{ e}$$

$$L_y(q) = 1 - \frac{1}{H(q)}.$$

Embora isso não seja diretamente evidenciado por (4), o fato de  $G(q)$  ser estritamente própria juntamente com (3) garante que a predição  $\hat{y}(t)$  no instante  $t = t_0$  depende somente de valores de  $u(t)$  e  $y(t)$  em instantes  $t < t_0$  — isto é, a predição é realizado a partir de valores anteriores dos sinais de entrada e saída medidos.

O erro de predição é definido como

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = \frac{y(t) - G(q) u(t)}{H(q)}.$$

Assim, o erro quadrático médio de predição é definido por

$$J = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N (\varepsilon(t))^2, \quad (5)$$

em que  $N$  é o número de amostras preditas.

### C. Identificação

A identificação por erro de predição visa, a partir de um conjunto de dados de entrada  $u(t)$  e de saída  $y(t)$  medidos do processo, a identificar os parâmetros dos polinômios do modelo de forma a minimizar o custo expresso em (5). O algoritmo aplicado neste processo depende da classe do modelo e está fora do escopo deste trabalho. Estes são implementados pelo pacote `pysid`.

### D. Classes de Modelos

As quatro classes de modelo são obtidas fixando determinadas ordens no modelo genérico.

1) *ARX*: Neste modelo, há liberdade nas escolhas de  $n_a$ ,  $n_b$  e  $n_k$ , enquanto  $n_c = n_d = n_f = 0$ . Assim, as funções de transferência tornam-se

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}, \text{ e}$$

$$H(q) = \frac{1}{A(q)}.$$

Esta classe tem a vantagem de fazer com que (5) seja quadrática nos parâmetros, os quais podem, portanto, ser calculados por mínimos quadrados.

2) *ARMAX*: Este modelo requer a arbitração das ordens  $n_a$ ,  $n_b$ ,  $n_c$  e  $n_k$ , com  $n_d = n_f = 0$ . Portanto, as funções de transferência são

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}, \text{ e}$$

$$H(q) = \frac{C(q)}{A(q)}.$$

3) *Output Error*: Para este modelo são escolhidas as ordens  $n_b$ ,  $n_f$  e  $n_k$ , fixando  $n_a = n_c = n_d = 0$ . Nesse caso, tem-se

$$G(q) = \frac{B(q)}{F(q)}, \text{ e}$$

$$H(q) = 1.$$

Note que este modelo considera que o ruído de medição é ruído branco.

4) *Box-Jenkins*: Finalmente, neste modelo arbitra-se  $n_b$ ,  $n_c$ ,  $n_d$ ,  $n_f$  e  $n_k$ , com  $n_a = 0$ . Com isso, obtém-se

$$G(q) = \frac{B(q)}{F(q)}, \text{ e}$$

$$H(q) = \frac{C(q)}{D(q)}.$$

## III. CRITÉRIO DE INFORMAÇÃO DE AKAIKE

Para avaliar a qualidade dos modelos identificados será utilizado o critério de informação de Akaike, ou *Akaike Information Criterion* (AIC). Este critério pondera a qualidade de predição junto à ordem do modelo, penalizando critérios de maior ordem. Considerando o erro de predição, o critério é definido por

$$\text{AIC} = N \log(J) + 2k,$$

em que  $N$  é o número de amostras preditas,  $k$  é o número de parâmetros do modelo e  $J$  é o erro médio quadrático de predição definido em (5) [4].

Para conjuntos com poucas amostras, pode-se utilizar um critério adaptado, definido por

$$\text{AICc} = \text{AIC} + \frac{2k(k+1)}{N-k-1}. \quad (6)$$

Note que  $N \rightarrow \infty \implies \text{AICc} \rightarrow \text{AIC}$  — isto é, o critério adaptado se aproxima do critério original à medida que cresce o número de amostras considerado.

## IV. DADOS

Os dados são apresentados na Figura 1, em que o sinal  $u(t)$  é multiplicado por um fator de 10 para melhor visualização. Ambos os sinais  $u(t)$  e  $y(t)$  contêm 200 amostras. Note que a entrada  $u(t)$  é similar a uma onda quadrada.

Na Figura 1, a linha tracejada vertical divide os dados em dois conjuntos. Para a identificação dos modelos, utilizam-se os dados à esquerda desta linha, correspondentes às primeiras 160 amostras. As 40 amostras restantes são aplicadas na validação dos modelos identificados.

A Figura 2 mostra o espectro de amplitude dos dados — isto é, a magnitude da transformada de Fourier dos sinais — em escala logarítmica. Note como ambos os sinais possuem um conteúdo elevado em baixas frequências, seguidos de picos pontuais que decrescem com o aumento da frequência.

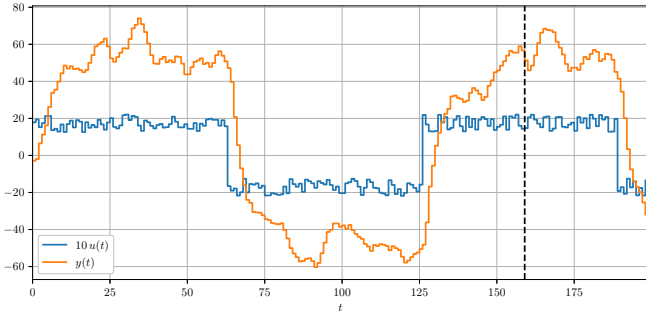


Figura 1. Dados de entrada e saída.

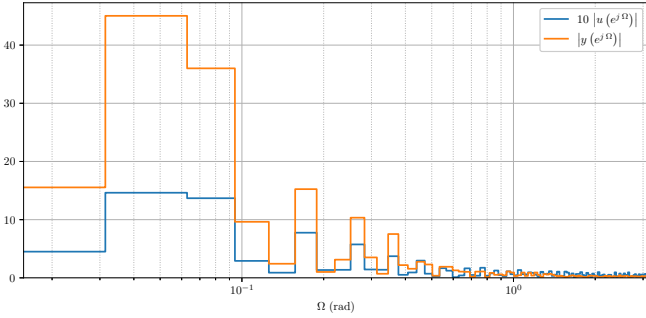


Figura 2. Espectro de amplitude dos dados de entrada e saída.

## V. RESULTADOS

Diversas identificações são realizadas, variando as ordens dos polinômios e o atraso entre as quatro classes de modelos. A Tabela I sintetiza os intervalos de variação desses valores para cada modelo. A fim de considerar sistemas amostrados, todos os sistemas tem atraso de pelo menos um amostra — isto é,  $n_k \geq 1$ .

Tabela I  
INTERVALO DE VARIAÇÃO DAS ORDENS DOS POLINÔMIOS

| Classe | $n_a$  | $n_b$  | $n_c$  | $n_d$  | $n_f$  | $n_k$  | Total |
|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|-------|
| ARX    | [1, 4] | [0, 4] | —      | —      | —      | [1, 4] | 80    |
| ARMAX  | [1, 4] | [0, 4] | [1, 4] | —      | —      | [1, 4] | 320   |
| OE     | —      | [0, 4] | —      | —      | [1, 4] | [1, 4] | 80    |
| BJ     | —      | [0, 4] | [0, 4] | [1, 4] | [1, 4] | [1, 4] | 1600  |
| Total  |        |        |        |        |        |        | 2080  |

Destaca-se que dentre as 1600 identificações realizadas com a classe BJ 960 apresentaram algum problema de implementação interno ao pacote `pysid`. Nesses casos, os modelos foram descartados. Assim, o total de modelos efetivamente identificados é de 1120.

Para cada identificação são calculados o erro quadrático médio, conforme (5), e o critério de informação de Akaike para pequenos conjuntos de dados, conforme (6). Ambos são realizados tanto para o conjunto de dados de identificação — denotado pelo subíndice  $i$  — como para o conjunto de validação — denotado pelo subíndice  $v$ .

Para cada uma das quatro classes, a Tabela II apresenta os seis melhores modelos resultantes, com base no critério

de informação de Akaike com os dados de validação — isto é,  $AICc_v$ . Os modelos são unicamente identificados por um índice, exibidos na primeira coluna.

Comparando a ordem de grandeza de cada critério de qualidade na Tabela II, nota-se que os modelos ARX, ARMAX e BJ apresentam um desempenho consideravelmente melhor que os modelos OE; isto é um indicativo de que o ruído de medição não é branco, conforme supõe esse último modelo. Além disso, para os modelos ARX, ARMAX e BJ, todos as identificações presentes na Tabela II têm  $n_k = 1$  — isto é, um atraso da entrada para a saída de apenas uma amostra. Destaca-se, ainda, que entre os modelos ARMAX e BJ presentes na Tabela II todas as identificações têm  $n_c$  partindo de seu valor mínimo — 1 para ARMAX e 0 para BJ —, levando à interpretação de que o numerador de  $H(q)$  tem ordem pequena.

A Tabela III mostra as 20 melhores identificações, novamente classificadas pelo critério de informação de Akaike adaptado com os dados de validação —  $AICc_v$ . Note a prevalência de modelos ARX, bem como das características discutidas no parágrafo anterior.

A partir das identificações, são obtidas as funções de transferência do sistema  $G(q)$  e do ruído  $H(q)$ . A fim de compará-las visualmente, as Figuras 3 e 4 apresentam suas respostas em frequência, considerando as identificações na Tabela III.

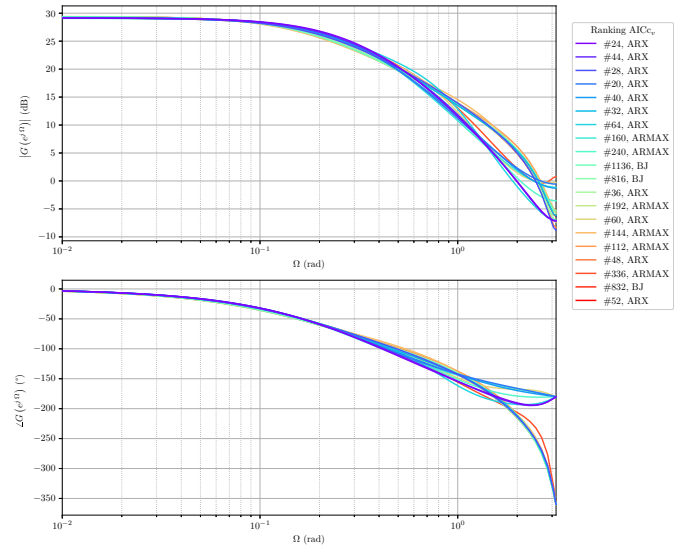


Figura 3. Respostas em frequência de  $G(q)$  a partir das identificações na Tabela III.

Note, através da Figura 3, que, entre todas as identificações, o comportamento do sistema  $G(q)$  é semelhante nas baixas frequências mas discordante nas altas frequências. Isso está em consonância com o fato de que os dados trazem mais informações nas baixas frequências, conforme visto na Figura 2. Por outro lado, a Figura 4 mostra que o sistema  $H(q)$  é mais diverso entre as diferentes identificações.

### A. Escolha de Modelos Adequados

Através das observações anteriores, procura-se arbitrar classes de modelo razoáveis para representar o sistema efetivo,

Tabela II  
MELHORES RESULTADOS POR CLASSE COM BASE NO CRITÉRIO AICC<sub>v</sub>

| #    | Classe | $n_a$ | $n_b$ | $n_c$ | $n_d$ | $n_f$ | $n_k$ | AICC <sub>v</sub> | AICC <sub>i</sub> | $J_v$   | $J_i$  |
|------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------|-------------------|---------|--------|
| 24   | ARX    | 2     | 1     | –     | –     | –     | 1     | 79,463            | 288,142           | 5,801   | 5,750  |
| 44   | ARX    | 3     | 1     | –     | –     | –     | 1     | 80,358            | 289,971           | 5,556   | 5,740  |
| 28   | ARX    | 2     | 2     | –     | –     | –     | 1     | 80,596            | 276,503           | 5,589   | 5,276  |
| 20   | ARX    | 2     | 0     | –     | –     | –     | 1     | 80,820            | 290,423           | 6,384   | 5,910  |
| 40   | ARX    | 3     | 0     | –     | –     | –     | 1     | 81,303            | 291,572           | 6,074   | 5,875  |
| 32   | ARX    | 2     | 3     | –     | –     | –     | 1     | 82,077            | 278,289           | 5,410   | 5,264  |
| 160  | ARMAX  | 2     | 0     | 1     | –     | –     | 1     | 82,406            | 292,387           | 6,244   | 5,905  |
| 240  | ARMAX  | 3     | 0     | 1     | –     | –     | 1     | 82,440            | 291,698           | 5,853   | 5,802  |
| 192  | ARMAX  | 2     | 2     | 1     | –     | –     | 1     | 83,302            | 278,685           | 5,579   | 5,277  |
| 144  | ARMAX  | 1     | 4     | 1     | –     | –     | 1     | 83,435            | 299,330           | 5,199   | 5,922  |
| 112  | ARMAX  | 1     | 2     | 1     | –     | –     | 1     | 83,574            | 294,450           | 6,021   | 5,902  |
| 336  | ARMAX  | 4     | 1     | 1     | –     | –     | 1     | 84,031            | 282,669           | 5,277   | 5,337  |
| 465  | OE     | –     | 4     | –     | –     | 1     | 2     | 203,538           | 635,576           | 112,710 | 49,103 |
| 469  | OE     | –     | 4     | –     | –     | 2     | 2     | 205,126           | 637,238           | 108,924 | 48,942 |
| 466  | OE     | –     | 4     | –     | –     | 1     | 3     | 208,209           | 688,227           | 126,671 | 68,237 |
| 468  | OE     | –     | 4     | –     | –     | 2     | 1     | 210,717           | 620,915           | 125,264 | 44,195 |
| 470  | OE     | –     | 4     | –     | –     | 2     | 3     | 211,195           | 690,408           | 126,771 | 68,234 |
| 464  | OE     | –     | 4     | –     | –     | 1     | 1     | 211,208           | 622,115           | 136,532 | 45,141 |
| 1136 | BJ     | –     | 2     | 0     | 2     | 1     | 1     | 82,909            | 276,778           | 5,524   | 5,214  |
| 816  | BJ     | –     | 1     | 0     | 2     | 1     | 1     | 83,040            | 273,646           | 5,941   | 5,183  |
| 832  | BJ     | –     | 1     | 0     | 3     | 1     | 1     | 84,041            | 276,120           | 5,683   | 5,193  |
| 1456 | BJ     | –     | 3     | 0     | 2     | 1     | 1     | 84,939            | 277,505           | 5,398   | 5,167  |
| 1140 | BJ     | –     | 2     | 0     | 2     | 2     | 1     | 85,844            | 278,965           | 5,521   | 5,214  |
| 848  | BJ     | –     | 1     | 0     | 4     | 1     | 1     | 86,957            | 274,874           | 5,677   | 5,083  |

Tabela III  
MELHORES RESULTADOS GERAIS COM BASE NO CRITÉRIO AICC<sub>v</sub>

| #    | Classe | $n_a$ | $n_b$ | $n_c$ | $n_d$ | $n_f$ | $n_k$ | AICC <sub>v</sub> | AICC <sub>i</sub> | $J_v$ | $J_i$ |
|------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------------------|-------------------|-------|-------|
| 24   | ARX    | 2     | 1     | –     | –     | –     | 1     | 79,463            | 288,142           | 5,801 | 5,750 |
| 44   | ARX    | 3     | 1     | –     | –     | –     | 1     | 80,358            | 289,971           | 5,556 | 5,740 |
| 28   | ARX    | 2     | 2     | –     | –     | –     | 1     | 80,596            | 276,503           | 5,589 | 5,276 |
| 20   | ARX    | 2     | 0     | –     | –     | –     | 1     | 80,820            | 290,423           | 6,384 | 5,910 |
| 40   | ARX    | 3     | 0     | –     | –     | –     | 1     | 81,303            | 291,572           | 6,074 | 5,875 |
| 32   | ARX    | 2     | 3     | –     | –     | –     | 1     | 82,077            | 278,289           | 5,410 | 5,264 |
| 64   | ARX    | 4     | 1     | –     | –     | –     | 1     | 82,145            | 288,495           | 5,419 | 5,611 |
| 160  | ARMAX  | 2     | 0     | 1     | –     | –     | 1     | 82,406            | 292,387           | 6,244 | 5,905 |
| 240  | ARMAX  | 3     | 0     | 1     | –     | –     | 1     | 82,440            | 291,698           | 5,853 | 5,802 |
| 1136 | BJ     | –     | 2     | 0     | 2     | 1     | 1     | 82,909            | 276,778           | 5,524 | 5,214 |
| 816  | BJ     | –     | 1     | 0     | 2     | 1     | 1     | 83,040            | 273,646           | 5,941 | 5,183 |
| 36   | ARX    | 2     | 4     | –     | –     | –     | 1     | 83,283            | 281,484           | 5,179 | 5,297 |
| 192  | ARMAX  | 2     | 2     | 1     | –     | –     | 1     | 83,302            | 278,685           | 5,579 | 5,277 |
| 60   | ARX    | 4     | 0     | –     | –     | –     | 1     | 83,403            | 291,217           | 5,995 | 5,784 |
| 144  | ARMAX  | 1     | 4     | 1     | –     | –     | 1     | 83,435            | 299,330           | 5,199 | 5,922 |
| 112  | ARMAX  | 1     | 2     | 1     | –     | –     | 1     | 83,574            | 294,450           | 6,021 | 5,902 |
| 48   | ARX    | 3     | 2     | –     | –     | –     | 1     | 83,698            | 278,625           | 5,634 | 5,275 |
| 336  | ARMAX  | 4     | 1     | 1     | –     | –     | 1     | 84,031            | 282,669           | 5,277 | 5,337 |
| 832  | BJ     | –     | 1     | 0     | 3     | 1     | 1     | 84,041            | 276,120           | 5,683 | 5,193 |
| 52   | ARX    | 3     | 3     | –     | –     | –     | 1     | 84,774            | 280,442           | 5,376 | 5,263 |

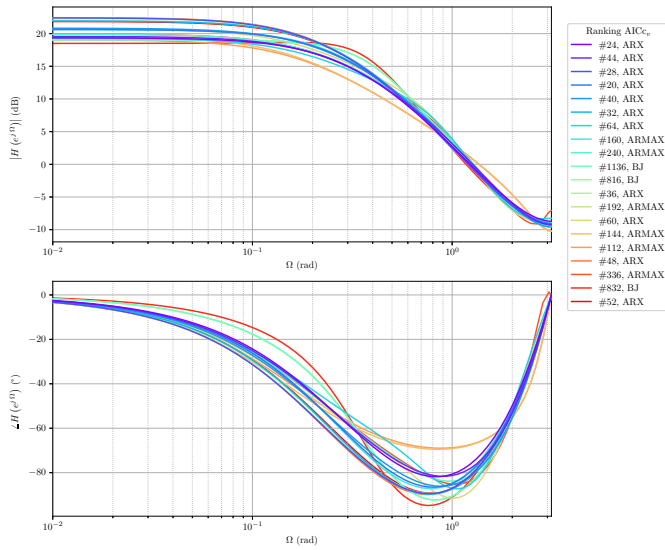


Figura 4. Respostas em frequência de  $H(q)$  a partir das identificações na Tabela III.

ainda desconhecido. Os modelos OE são logo descartados devido ao seu desempenho inferior. Ademais, o atraso é arbitrado como  $n_k = 1$  pois esse valor prevalece nos modelos bem-classificados.

Conforme já citado, o numerador de  $H(q)$  parece ser de ordem pequena. Em particular, com a prevalência de modelos ARMAX com  $n_c = 0$  — o que equivale a  $C(q) = 1$ , sem parâmetros — e de modelos ARX, descarta-se também a classe ARMAX. Restam, portanto, modelos ARX e modelos BJ com  $n_c = 0$ ; em ambos,  $n_k = 1$ . A diferença entre esses dois casos é que o primeiro requer que os denominadores de  $G(q)$  e  $H(q)$  sejam iguais, enquanto o segundo permite que sejam independentes.

Finalmente, por apresentar melhores classificações gerais com estrutura mais simples, sugere-se a utilização do modelo ARX. Pelos resultados, sugere-se uma ordem  $n_a$  entre 2 e 3. A ordem  $n_b$  pode ser escolhida entre 0 e 3. Ressalta-se que a arbitração de ordens mais elevadas permite contemplar uma quantidade maior de modelos na classe, ao custo de exigir a identificação de mais parâmetros. Conforme já mencionado, o atraso sugerido é  $n_k = 1$ .

### B. Desempenho do Menor Modelo de Ordem Completa

As funções de transferência que efetivamente geraram os dados são agora reveladas como

$$\begin{aligned} G_0(q) &= \frac{2q^2 + 2q - 1,5}{q^3 - 1,4q^2 + 0,48q} \\ &= \frac{q^{-1}(2 + 2q^{-1} - 1,5q^{-2})}{1 - 1,4q^{-1} + 0,48q^{-2}}, \text{ e} \\ H_0(q) &= \frac{q^3}{q^3 - 1,4q^2 + 0,48q} \\ &= \frac{1}{1 - 1,4q^{-1} + 0,48q^{-2}}. \end{aligned}$$

Observe que os denominadores de  $G_0(q)$  e  $H_0(q)$  são idênticos. Além disso, no formato de potências negativas, o

numerador de  $H_0(q)$  é unitário. Assim, a classe de modelo ARX com  $n_a = 2$ ,  $n_b = 2$  e  $n_k = 1$  é a menor classe que contém o sistema efetivo.

Note, através das Tabelas II e III, que essa classe corresponde à identificação de índice 28. Além disso, é a terceira melhor classificada tanto entre os modelos ARX como no geral. Seus polinômios são

$$A_{28}(q) = 1 - 1,40683q^{-1} + 0,482612q^{-2}, \text{ e}$$

$$B_{28}(q) = q^{-1}(2,16247 + 1,61084q^{-1} - 1,60164q^{-2}),$$

os quais resultam nas funções de transferência

$$\begin{aligned} G_{28}(q) &= \frac{2,16247q^2 + 1,61084q - 1,60164}{q^3 - 1,40683q^2 + 0,482612q} \\ &= \frac{q^{-1}(2,16247 + 1,61084q^{-1} - 1,60164q^{-2})}{1 - 1,40683q^{-1} + 0,482612q^{-2}}, \text{ e} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_{28}(q) &= \frac{q^3}{q^3 - 1,40683q^2 + 0,482612q} \\ &= \frac{1}{1 - 1,40683q^{-1} + 0,482612q^{-2}}. \end{aligned}$$

A Figura 5 mostra a previsão da saída, obtida pela aplicação de (4), a partir do resultado desta identificação, em comparação aos dados de validação. Conforme consta nas Tabelas II e III, o erro quadrático médio associado é 5,589.

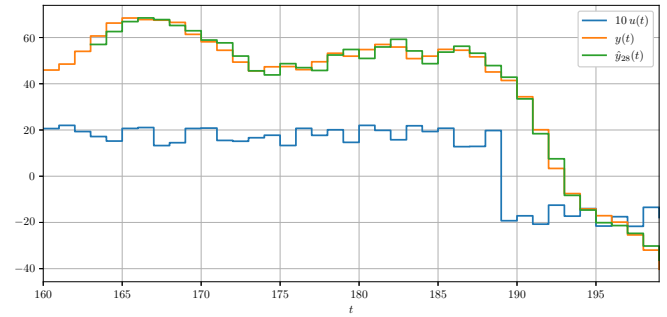


Figura 5. Previsão obtida com o menor modelo de ordem completa.

A comparação com os sistemas efetivos é realizada pelas respostas em frequência das funções de transferência, as quais são exibidas nas Figuras 6 e 7. Observe que a função  $G_{28}(q)$  apresenta um ganho estático visivelmente abaixo de  $G_0(q)$ .

## VI. CONCLUSÕES

A determinação da classe do modelo é um desafio ao projetista, ainda mais quando a ordem do sistema a ser identificado é desconhecida. O erro quadrático médio de predição e o critério de informação de Akaike permitem avaliar a qualidade dos modelos obtidos.

Tendo sido realizada uma única identificação por classe, sempre a partir do mesmo conjunto de dados de identificação e validação, os resultados têm um fator considerável de aleatoriedade. A aleatoriedade poderia ser reduzida com a divisão do conjunto de dados em múltiplos subconjuntos de identificação e validação — procedimento este denominado validação cruzada — e posterior comparação dos vários resultados obtidos para cada classe.

## REFERÊNCIAS

- [1] L. Ljung, *System identification: theory for the user*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ, Estados Unidos da América: Prentice Hall PTR, 1999.
- [2] L. A. Aguirre, *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*, 3rd ed. Belo Horizonte, MG, Brasil: Editora UFMG, 2007.
- [3] The MathWorks, Inc., “What are polynomial models?” Natick, MA, Estados Unidos da América, 2022. [Online]. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/ident/ug/what-are-polynomial-models.html>
- [4] T. Söderström and P. Stoica, *System Identification*. Hemel Hempstead, Reino Unido: Prentice Hall, 1989.

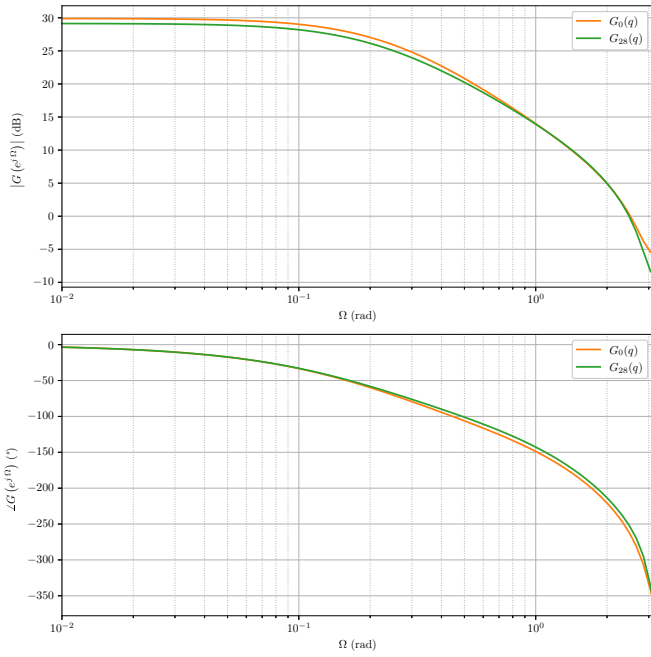


Figura 6. Resposta em frequências de  $G(q)$  a partir da identificação com o menor modelo de ordem completa.

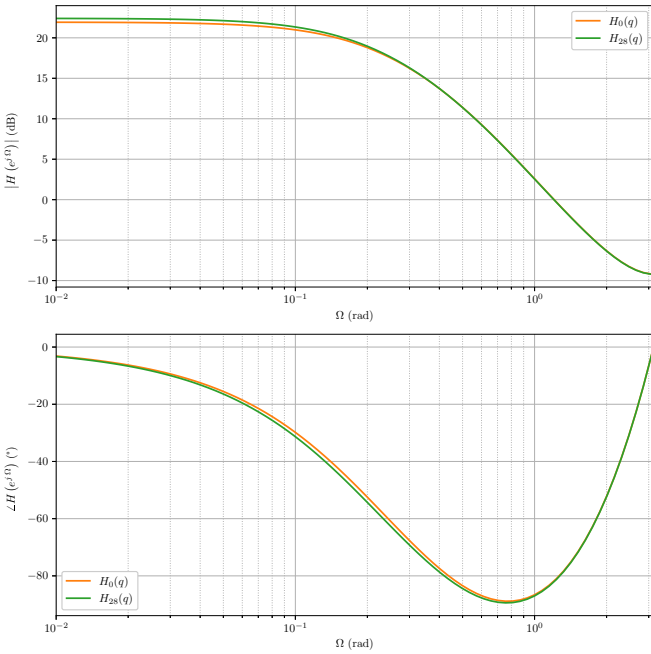


Figura 7. Resposta em frequências de  $H(q)$  a partir da identificação com o menor modelo de ordem completa.