

Identificação de Sistema por Erro de Predição com Modelos Racionais

Guilherme de Paoli Beal

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Aprendizado Supervisionado de Modelos Paramétricos

Maio de 2023

Sistema

Sistema SISO, discreto, linear e invariante no tempo:

$$y(t) = G_0(q) u(t) + \nu(t)$$

$$\nu(t) = H_0(q) e(t)$$

$t \in \mathbb{N}$ variável de tempo discreto

q operador de avanço

$y(t)$ sinal de saída

$u(t)$ sinal de entrada

$\nu(t)$ ruído de medição desconhecido

$e(t)$ ruído branco

$G_0(q)$ função de transferência do sistema

$H_0(q)$ função de transferência do filtro

Modelos Racionais

ARX Autorregressivo com Entrada Externa, ou *Autoregressive with Extra Input*

ARMAX Autorregressivo com Média Móvel e Entrada Externa, ou *Autoregressive Moving Average with Extra Input*

OE Erro na Saída, ou *Output Error*

BJ Box-Jenkins

Formato genérico:

$$A(q) y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t)$$

Modelos Racionais

$$A(q) y(t) = \frac{B(q)}{F(q)} u(t) + \frac{C(q)}{D(q)} e(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$y(t) = G(q) u(t) + H(q) e(t)$$

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q) F(q)} \quad H(q) = \frac{C(q)}{A(q) D(q)}$$

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B(q) = q^{-n_k} (b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b})$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

$$D(q) = 1 + d_1 q^{-1} + \cdots + d_{n_d} q^{-n_d}$$

$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{n_f} q^{-n_f}$$

Predição

$$\hat{y}(t) = L_u(q) u(t) + L_y(q) y(t)$$

$$L_u(q) = \frac{G(q)}{H(q)}$$

$$L_y(q) = 1 - \frac{1}{H(q)}$$

Erro de predição:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \\ &= \frac{y(t) - G(q) u(t)}{H(q)}\end{aligned}$$

Erro quadrático médio:

$$J = \frac{1}{N} \sum_{t=0}^{N-1} (\varepsilon(t))^2$$

ARX

► $n_c = 0$

► $n_d = 0$

► $n_f = 0$

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} \quad H(q) = \frac{1}{A(q)}$$

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B(q) = q^{-n_k} (b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b})$$

J é quadrático nos parâmetros

ARMAX

► $n_d = 0$

► $n_f = 0$

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} \quad H(q) = \frac{C(q)}{A(q)}$$

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + \cdots + a_{n_a} q^{-n_a}$$

$$B(q) = q^{-n_k} (b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b})$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \cdots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

Generalização do ARX

Ouput Error

► $n_a = 0$

► $n_c = 0$

► $n_d = 0$

$$G(q) = \frac{B(q)}{F(q)} \quad H(q) = 1$$

$$B(q) = q^{-n_k} (b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b})$$

$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{n_f} q^{-n_f}$$

Assume $\nu(t) = e(t)$

Box-Jenkins

► $n_a = 0$

$$G(q) = \frac{B(q)}{F(q)} \quad H(q) = \frac{C(q)}{D(q)}$$

$$B(q) = q^{-n_k} (b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{n_b} q^{-n_b})$$

$$C(q) = 1 + c_1 q^{-1} + \dots + c_{n_c} q^{-n_c}$$

$$D(q) = 1 + d_1 q^{-1} + \dots + d_{n_d} q^{-n_d}$$

$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \dots + f_{n_f} q^{-n_f}$$

Modelo mais livre

Critério de Informação de Akaike

$$\text{AIC} = N \log(J) + 2k$$

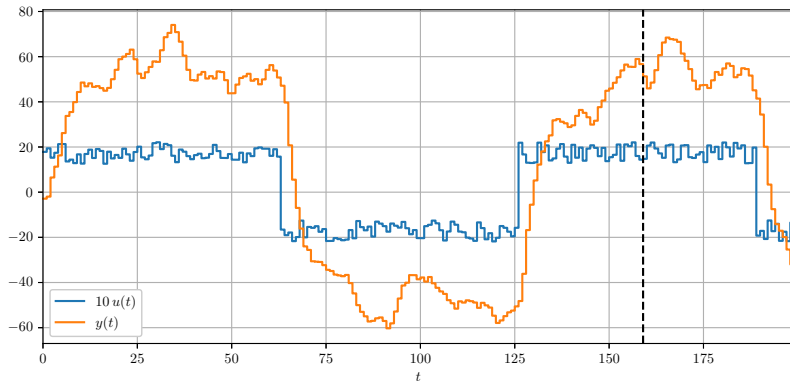
$$\text{AICc} = \text{AIC} + \frac{2k(k+1)}{N-k-1}$$

N Número de amostras

J Erro quadrático médio de predição

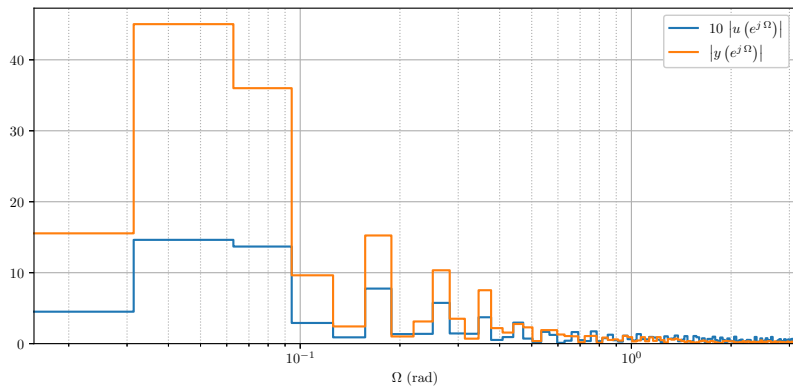
k Número de parâmetros no modelo

Dados



Tracejado: divisão entre dados de identificação e de validação

Dados - Espectro de Amplitud



Identificação - Ordens

Classe	n_a	n_b	n_c	n_d	n_f	n_k	Total
ARX	$[1, 4]$	$[0, 4]$	–	–	–	$[1, 4]$	80
ARMAX	$[1, 4]$	$[0, 4]$	$[1, 4]$	–	–	$[1, 4]$	320
OE	–	$[0, 4]$	–	–	$[1, 4]$	$[1, 4]$	80
BJ	–	$[0, 4]$	$[0, 4]$	$[1, 4]$	$[1, 4]$	$[1, 4]$	1600
Total							2080

Identificação - Resultados por Classe

#	Classe	n_a	n_b	n_c	n_k	$AICc_v$	$AICc_i$	J_v	J_i
24	ARX	2	1	—	1	79,5	288	5,80	5,75
44	ARX	3	1	—	1	80,4	290	5,56	5,74
28	ARX	2	2	—	1	80,6	277	5,59	5,28
20	ARX	2	0	—	1	80,8	290	6,38	5,91
40	ARX	3	0	—	1	81,3	292	6,07	5,88
32	ARX	2	3	—	1	82,1	278	5,41	5,26
160	ARMAX	2	0	1	1	82,4	292	6,24	5,91
240	ARMAX	3	0	1	1	82,4	292	5,85	5,80
192	ARMAX	2	2	1	1	83,3	279	5,58	5,28
144	ARMAX	1	4	1	1	83,4	299	5,20	5,92
112	ARMAX	1	2	1	1	83,6	294	6,02	5,90
336	ARMAX	4	1	1	1	84,0	283	5,28	5,34

Identificação - Resultados por Classe

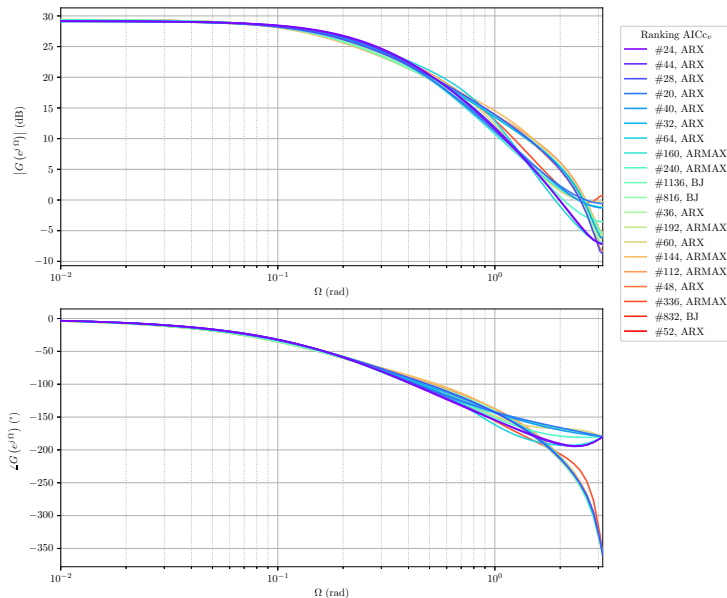
#	Classe	n_b	n_c	n_d	n_f	n_k	$AICc_v$	$AICc_i$	J_v	J_i
465	OE	4	—	—	1	2	204	636	113	49,1
469	OE	4	—	—	2	2	205	637	109	48,9
466	OE	4	—	—	1	3	208	688	127	68,2
468	OE	4	—	—	2	1	211	621	125	44,2
470	OE	4	—	—	2	3	211	690	127	68,2
464	OE	4	—	—	1	1	211	622	137	45,1
1136	BJ	2	0	2	1	1	82,9	277	5,52	5,21
816	BJ	1	0	2	1	1	83,0	274	5,94	5,18
832	BJ	1	0	3	1	1	84,0	276	5,68	5,19
1456	BJ	3	0	2	1	1	84,9	278	5,40	5,17
1140	BJ	2	0	2	2	1	85,8	279	5,52	5,21
848	BJ	1	0	4	1	1	87,0	275	5,68	5,08

Identificação - Resultados Gerais

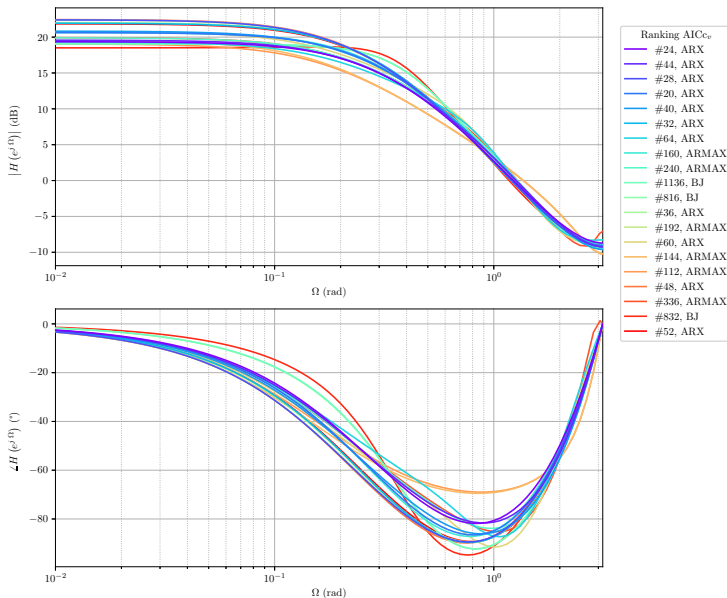
#	Classe	n_a	n_b	n_c	n_d	n_f	$AICc_v$	$AICc_i$	J_v	J_i
24	ARX	2	1	—	—	—	79,5	288	5,80	5,75
44	ARX	3	1	—	—	—	80,4	290	5,56	5,74
28	ARX	2	2	—	—	—	80,6	277	5,59	5,28
20	ARX	2	0	—	—	—	80,8	290	6,38	5,91
40	ARX	3	0	—	—	—	81,3	292	6,07	5,88
32	ARX	2	3	—	—	—	82,1	278	5,41	5,26
64	ARX	4	1	—	—	—	82,1	288	5,42	5,61
160	ARMAX	2	0	1	—	—	82,4	292	6,24	5,91
240	ARMAX	3	0	1	—	—	82,4	292	5,85	5,80
1136	BJ	—	2	0	2	1	82,9	277	5,52	5,21
816	BJ	—	1	0	2	1	83,0	274	5,94	5,18
36	ARX	2	4	—	—	—	83,3	281	5,18	5,30
192	ARMAX	2	2	1	—	—	83,3	279	5,58	5,28

$n_k = 1$ em todos os modelos

Comparação - Resposta em Frequência - $G(q)$

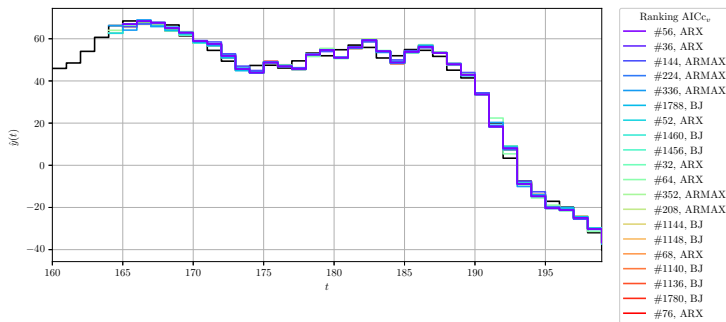


Comparação - Resposta em Frequência - $H(q)$



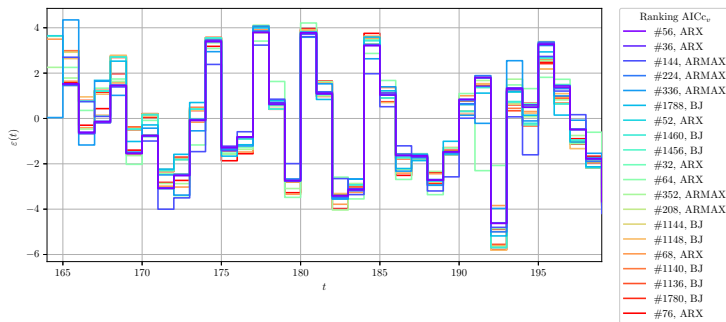
Comparação - Predições

$$\hat{y}(t) = L_u(q) u(t) + L_y(q) y(t)$$
$$L_u(q) = \frac{G(q)}{H(q)} \quad L_y(q) = 1 - \frac{1}{H(q)}$$



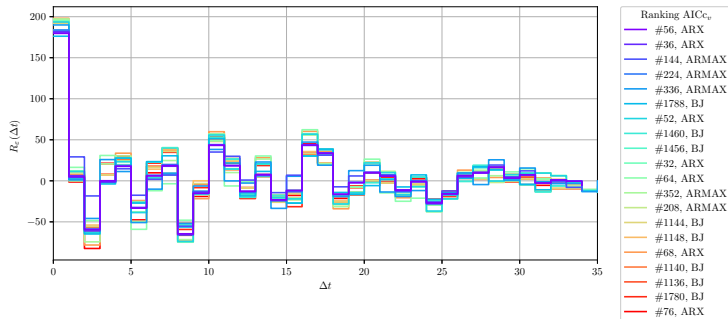
Comparação - Resíduos

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \\ &= \frac{y(t) - G(q)u(t)}{H(q)}\end{aligned}$$



Comparação - Resíduos - Autocorrelação

$$R_{\varepsilon}(\Delta t) = \sum_{t=-N}^N \varepsilon(t) \varepsilon(t + \Delta t)$$



Sistema Verdadeiro

$$\begin{aligned} G_0(q) &= \frac{2q^2 + 2q - 1,5}{q^3 - 1,4q^2 + 0,48q} \\ &= \frac{q^{-1} (2 + 2q^{-1} - 1,5q^{-2})}{1 - 1,4q^{-1} + 0,48q^{-2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_0(q) &= \frac{q^3}{q^3 - 1,4q^2 + 0,48q} \\ &= \frac{1}{1 - 1,4q^{-1} + 0,48q^{-2}} \end{aligned}$$

Sistema Verdadeiro

$$\begin{aligned} G_0(q) &= \frac{2q^2 + 2q - 1,5}{q^3 - 1,4q^2 + 0,48q} \\ &= \frac{q^{-1} (2 + 2q^{-1} - 1,5q^{-2})}{1 - 1,4q^{-1} + 0,48q^{-2}} \\ H_0(q) &= \frac{q^3}{q^3 - 1,4q^2 + 0,48q} \\ &= \frac{1}{1 - 1,4q^{-1} + 0,48q^{-2}} \end{aligned}$$

Menor Modelo de Ordem Completa:

ARX com $n_a = 2$, $n_b = 2$, e $n_k = 1$

$$A(q) = 1 + a_1 q^{-1} + a_2 q^{-2}$$

$$B(q) = q^{-1} (b_0 + b_1 q^{-1} + b_2 q^{-2})$$

Menor Modelo de Ordem Completa

ARX com $n_a = 2$, $n_b = 2$, e $n_k = 1$ equivale ao modelo #28

$$A_{28}(q) = 1 - 1,407 q^{-1} + 0,4826 q^{-2}$$

$$B_{28}(q) = q^{-1} (2,162 + 1,611 q^{-1} - 1,602 q^{-2})$$

$$AIC_{cv} = 80,82 \quad AIC_{ci} = 290,4 \quad J_v = 6,384 \quad J_i = 5,910$$

$$G_{28}(q) = \frac{2,162 q^2 + 1,611 q - 1,602}{q^3 - 1,407 q^2 + 0,4826 q}$$

$$H_{28}(q) = \frac{q^3}{q^3 - 1,407 q^2 + 0,4826 q}$$

Menor Modelo de Ordem Completa

ARX com $n_a = 2$, $n_b = 2$, e $n_k = 1$ equivale ao modelo #28

$$A_{28}(q) = 1 - 1,407 q^{-1} + 0,4826 q^{-2}$$

$$B_{28}(q) = q^{-1} (2,162 + 1,611 q^{-1} - 1,602 q^{-2})$$

$$AICc_v = 80,82 \quad AICc_i = 290,4 \quad J_v = 6,384 \quad J_i = 5,910$$

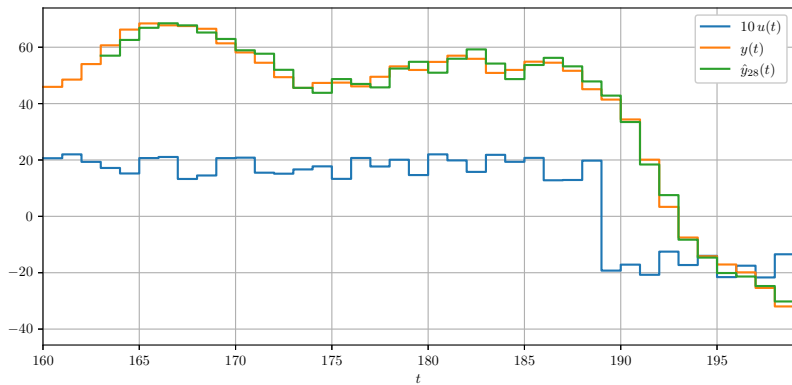
$$G_{28}(q) = \frac{2,162 q^2 + 1,611 q - 1,602}{q^3 - 1,407 q^2 + 0,4826 q}$$

$$H_{28}(q) = \frac{q^3}{q^3 - 1,407 q^2 + 0,4826 q}$$

$$G_0(q) = \frac{2 q^2 + 2 q - 1,5}{q^3 - 1,4 q^2 + 0,48 q}$$

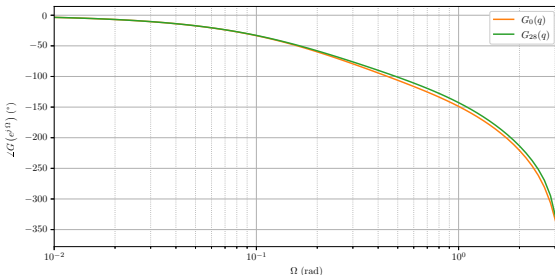
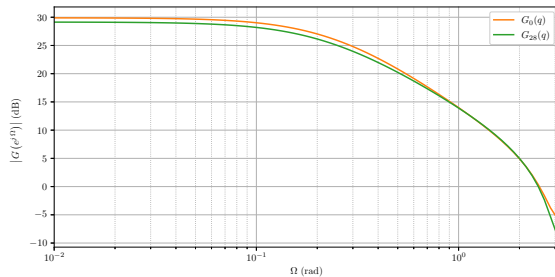
$$H_0(q) = \frac{q^3}{q^3 - 1,4 q^2 + 0,48 q}$$

Menor Modelo de Ordem Completa - Previsão

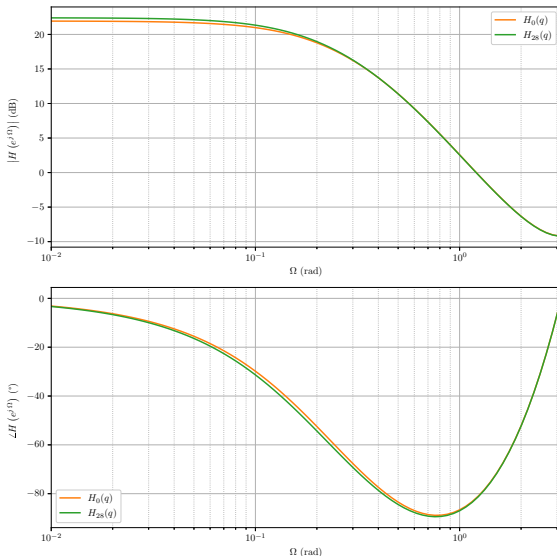


$$J_v = 6,384$$

Menor Modelo de Ordem Completa - Resposta em Frequência - $G(q)$



Menor Modelo de Ordem Completa - Resposta em Frequência - $H(q)$



Identificação de Sistema por Erro de Predição com Modelos Racionais

Guilherme de Paoli Beal

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Aprendizado Supervisionado de Modelos Paramétricos

Maio de 2023