Identificação de Sistema por Erro de Predição com Modelos Polinomiais

Guilherme de Paoli Beal

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Aprendizado Supervisionado de Modelos Paramétricos

Maio de 2023

Sistema

Sistema SISO, discreto, linear e invariante no tempo:

$$y(t) = G_0(q)\,u(t) + \nu(t)$$
$$\nu(t) = H_0(q)\,e(t)$$

$t \in \mathbb{N}$	variável de tempo discreto
q	operador de avanço
$y(t)$	sinal de saída
$u(t)$	sinal de entrada
$\nu(t)$	ruído de medição desconhecido
$e(t)$	ruído branco
$G_0(q)$	função de transferência do sistema
$H_0(q)$	função de transferência do filtro

Modelos Polinomiais

- **ARX** Autorregressivo com Entrada Externa, ou *Autoregressive with Extra Input*
- **ARMAX** Autorregressivo com Média Móvel e Entrada Externa, ou *Autoregressive Moving Average with Extra Input*
- **OE** Erro na Saída, ou *Output Error*
- **BJ** Box-Jenkins

Formato genérico:

$$A(q)\, y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}\, u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}\, e(t)$$

Modelos Polinomiais

$$A(q)\,y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}\,u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}\,e(t)$$

$$\Updownarrow$$

$$y(t) = G(q)\,u(t) + H(q)\,e(t)$$

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)\,F(q)} \qquad H(q) = \frac{C(q)}{A(q)\,D(q)}$$

$$A(q) = 1 + a_1\,q^{-1} + \cdots + a_{n_a}\,q^{-n_a}$$
$$B(q) = q^{-n_k}\,\left(b_0 + b_1\,q^{-1} + \cdots + b_{n_b}\,q^{-n_b}\right)$$
$$C(q) = 1 + c_1\,q^{-1} + \cdots + c_{n_c}\,q^{-n_c}$$
$$D(q) = 1 + d_1\,q^{-1} + \cdots + d_{n_d}\,q^{-n_d}$$
$$F(q) = 1 + f_1\,q^{-1} + \cdots + f_{n_f}\,q^{-n_f}$$

Predição

$$\hat{y}(t) = L_u(q)\,u(t) + L_y(q)\,y(t)$$

$$L_u(q) = \frac{G(q)}{H(q)}$$
$$L_y(q) = 1 - \frac{1}{H(q)}$$

Erro de predição:

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \\ &= \frac{y(t) - G(q)\,u(t)}{H(q)}\end{aligned}$$

Erro quadrático médio:

$$J = \frac{1}{N}\sum_{t=0}^{N-1}(\varepsilon(t))^2$$

ARX

- $n_c = 0$
- $n_d = 0$
- $n_f = 0$

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} \qquad H(q) = \frac{1}{A(q)}$$

$$A(q) = 1 + a_1\, q^{-1} + \cdots + a_{n_a}\, q^{-n_a}$$
$$B(q) = q^{-n_k}\, \left(b_0 + b_1\, q^{-1} + \cdots + b_{n_b}\, q^{-n_b}\right)$$

J é quadrático nos parâmetros

ARMAX

- $n_d = 0$
- $n_f = 0$

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)} \qquad H(q) = \frac{C(q)}{A(q)}$$

$$\begin{aligned}
A(q) &= 1 + a_1\, q^{-1} + \cdots + a_{n_a}\, q^{-n_a} \\
B(q) &= q^{-n_k}\, \left(b_0 + b_1\, q^{-1} + \cdots + b_{n_b}\, q^{-n_b}\right) \\
C(q) &= 1 + c_1\, q^{-1} + \cdots + c_{n_c}\, q^{-n_c}
\end{aligned}$$

Generalização do ARX

Ouput Error

- $n_a = 0$
- $n_c = 0$
- $n_d = 0$

$$G(q) = \frac{B(q)}{F(q)} \qquad H(q) = 1$$

$$B(q) = q^{-n_k} \left(b_0 + b_1 q^{-1} + \cdots + b_{n_b} q^{-n_b}\right)$$
$$F(q) = 1 + f_1 q^{-1} + \cdots + f_{n_f} q^{-n_f}$$

Assume $\nu(t) = e(t)$

Box-Jenkins

- $n_a = 0$

$$G(q) = \frac{B(q)}{F(q)} \qquad H(q) = \frac{C(q)}{D(q)}$$

$$\begin{aligned}
B(q) &= q^{-n_k}\,\left(b_0 + b_1\,q^{-1} + \cdots + b_{n_b}\,q^{-n_b}\right)\\
C(q) &= 1 + c_1\,q^{-1} + \cdots + c_{n_c}\,q^{-n_c}\\
D(q) &= 1 + d_1\,q^{-1} + \cdots + d_{n_d}\,q^{-n_d}\\
F(q) &= 1 + f_1\,q^{-1} + \cdots + f_{n_f}\,q^{-n_f}
\end{aligned}$$

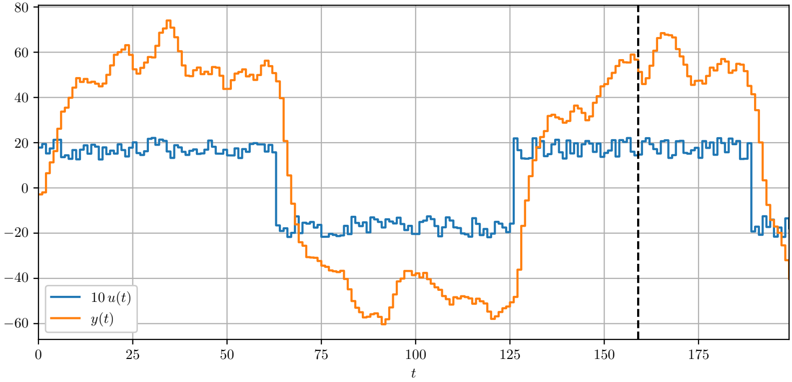
Modelo mais livre

Critério de Informação de Akaike

$$\text{AIC} = N\,\log(J) + 2\,k$$
$$\text{AICc} = \text{AIC} + \frac{2\,k\,(k+1)}{N-k-1}$$

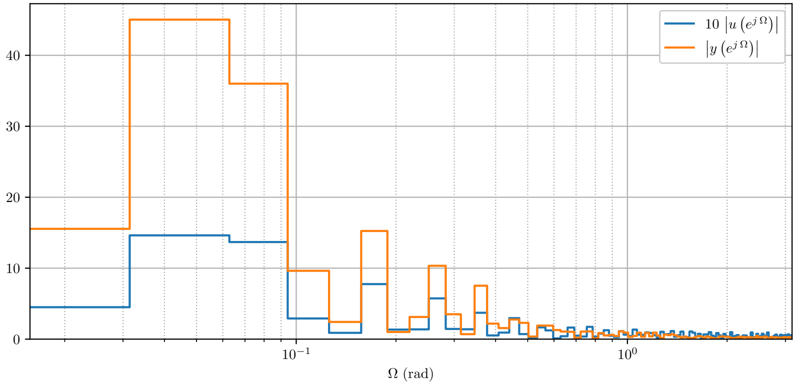
- N Número de amostras
- J Erro quadrático médio de predição
- k Número de parâmetros no modelo

Dados



Tracejado: divisão entre dados de identificação e de validação

Dados - Espectro de Amplitude



Identificação - Ordens

Classe	n_a	n_b	n_c	n_d	n_f	n_k	Total
ARX	$[1, 4]$	$[0, 4]$	–	–	–	$[1, 4]$	80
ARMAX	$[1, 4]$	$[0, 4]$	$[1, 4]$	–	–	$[1, 4]$	320
OE	–	$[0, 4]$	–	–	$[1, 4]$	$[1, 4]$	80
BJ	–	$[0, 4]$	$[0, 4]$	$[1, 4]$	$[1, 4]$	$[1, 4]$	1600
Total							2080

Identificação - Resultados por Classe

#	Classe	n_a	n_b	n_c	n_k	AICc$_v$	AICc$_i$	J_v	J_i
24	ARX	2	1	–	1	79,5	288	5,80	5,75
44	ARX	3	1	–	1	80,4	290	5,56	5,74
28	ARX	2	2	–	1	80,6	277	5,59	5,28
20	ARX	2	0	–	1	80,8	290	6,38	5,91
40	ARX	3	0	–	1	81,3	292	6,07	5,88
32	ARX	2	3	–	1	82,1	278	5,41	5,26
160	ARMAX	2	0	1	1	82,4	292	6,24	5,91
240	ARMAX	3	0	1	1	82,4	292	5,85	5,80
192	ARMAX	2	2	1	1	83,3	279	5,58	5,28
144	ARMAX	1	4	1	1	83,4	299	5,20	5,92
112	ARMAX	1	2	1	1	83,6	294	6,02	5,90
336	ARMAX	4	1	1	1	84,0	283	5,28	5,34

Identificação - Resultados por Classe

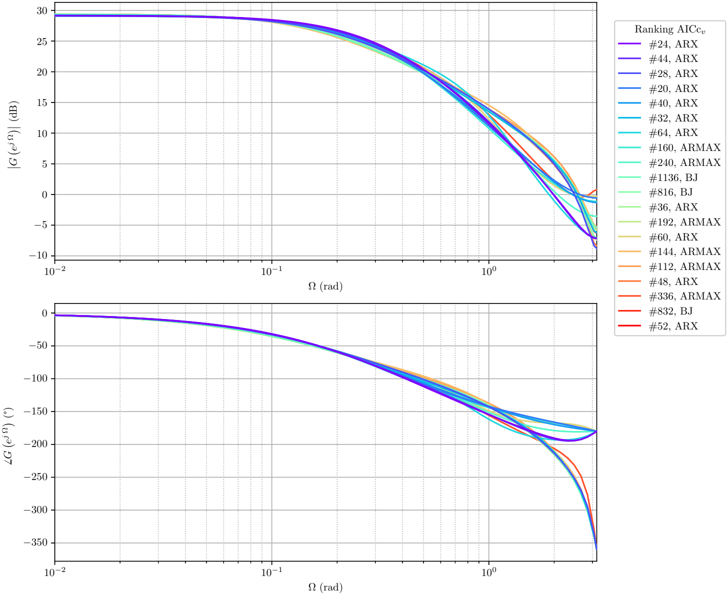
#	Classe	n_b	n_c	n_d	n_f	n_k	AICc$_v$	AICc$_i$	J_v	J_i
465	OE	4	–	–	1	2	204	636	113	49,1
469	OE	4	–	–	2	2	205	637	109	48,9
466	OE	4	–	–	1	3	208	688	127	68,2
468	OE	4	–	–	2	1	211	621	125	44,2
470	OE	4	–	–	2	3	211	690	127	68,2
464	OE	4	–	–	1	1	211	622	137	45,1
1136	BJ	2	0	2	1	1	82,9	277	5,52	5,21
816	BJ	1	0	2	1	1	83,0	274	5,94	5,18
832	BJ	1	0	3	1	1	84,0	276	5,68	5,19
1456	BJ	3	0	2	1	1	84,9	278	5,40	5,17
1140	BJ	2	0	2	2	1	85,8	279	5,52	5,21
848	BJ	1	0	4	1	1	87,0	275	5,68	5,08

Identificação - Resultados Gerais

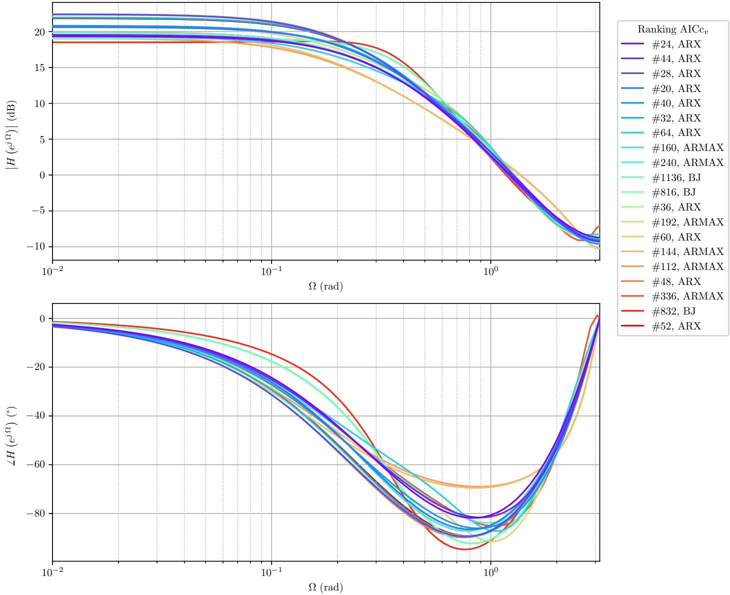
#	Classe	n_a	n_b	n_c	n_d	n_f	AICc$_v$	AICc$_i$	J_v	J_i
24	ARX	2	1	–	–	–	79,5	288	5,80	5,75
44	ARX	3	1	–	–	–	80,4	290	5,56	5,74
28	ARX	2	2	–	–	–	80,6	277	5,59	5,28
20	ARX	2	0	–	–	–	80,8	290	6,38	5,91
40	ARX	3	0	–	–	–	81,3	292	6,07	5,88
32	ARX	2	3	–	–	–	82,1	278	5,41	5,26
64	ARX	4	1	–	–	–	82,1	288	5,42	5,61
160	ARMAX	2	0	1	–	–	82,4	292	6,24	5,91
240	ARMAX	3	0	1	–	–	82,4	292	5,85	5,80
1136	BJ	–	2	0	2	1	82,9	277	5,52	5,21
816	BJ	–	1	0	2	1	83,0	274	5,94	5,18
36	ARX	2	4	–	–	–	83,3	281	5,18	5,30
192	ARMAX	2	2	1	–	–	83,3	279	5,58	5,28

$n_k = 1$ em todos os modelos

Comparação - Resposta em Frequência - $G(q)$



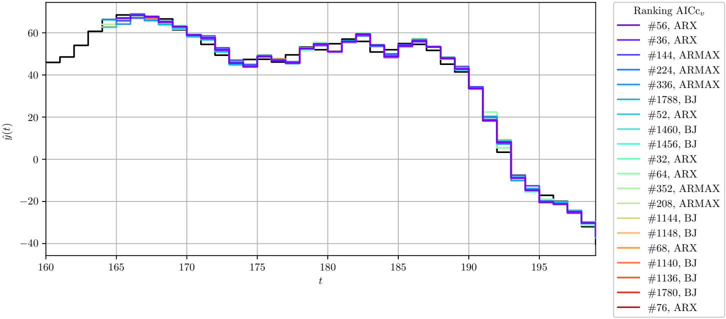
Comparação - Resposta em Frequência - $H(q)$



Comparação - Predições

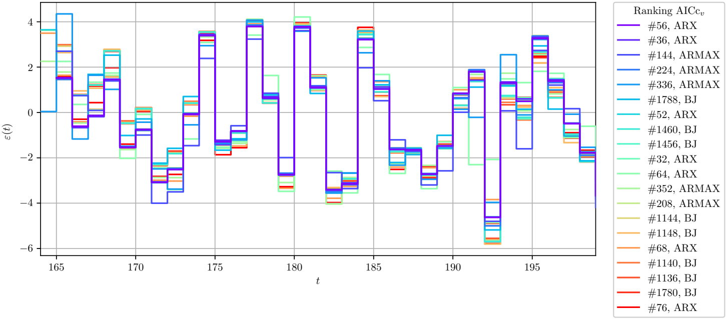
$$\hat{y}(t) = L_u(q)\, u(t) + L_y(q)\, y(t)$$

$$L_u(q) = \frac{G(q)}{H(q)} \qquad L_y(q) = 1 - \frac{1}{H(q)}$$



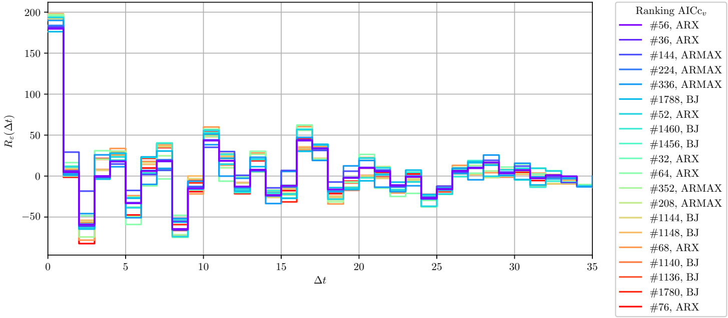
Comparação - Resíduos

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= y(t) - \hat{y}(t) \\
&= \frac{y(t) - G(q)\,u(t)}{H(q)}
\end{aligned}
$$



Comparação - Resíduos - Autocorrelação

$$R_\varepsilon(\Delta t) = \sum_{t=-N}^{N} \varepsilon(t)\,\varepsilon(t+\Delta t)$$



Sistema Verdadeiro

$$
\begin{aligned}
G_0(q) &= \frac{2\,q^2 + 2\,q - 1{,}5}{q^3 - 1{,}4\,q^2 + 0{,}48\,q} \\
&= \frac{q^{-1}\,\left(2 + 2\,q^{-1} - 1{,}5\,q^{-2}\right)}{1 - 1{,}4\,q^{-1} + 0{,}48\,q^{-2}} \\
H_0(q) &= \frac{q^3}{q^3 - 1{,}4\,q^2 + 0{,}48\,q} \\
&= \frac{1}{1 - 1{,}4\,q^{-1} + 0{,}48\,q^{-2}}
\end{aligned}
$$

Sistema Verdadeiro

$$G_0(q) = \frac{2\,q^2 + 2\,q - 1{,}5}{q^3 - 1{,}4\,q^2 + 0{,}48\,q}$$
$$= \frac{q^{-1}\,\left(2 + 2\,q^{-1} - 1{,}5\,q^{-2}\right)}{1 - 1{,}4\,q^{-1} + 0{,}48\,q^{-2}}$$
$$H_0(q) = \frac{q^3}{q^3 - 1{,}4\,q^2 + 0{,}48\,q}$$
$$= \frac{1}{1 - 1{,}4\,q^{-1} + 0{,}48\,q^{-2}}$$

Menor Modelo de Ordem Completa:
ARX com $n_a = 2$, $n_b = 2$, e $n_k = 1$

$$A(q) = 1 + a_1\,q^{-1} + a_2\,q^{-2}$$
$$B(q) = q^{-1}\,\left(b_0 + b_1\,q^{-1} + b_2\,q^{-2}\right)$$

Menor Modelo de Ordem Completa

ARX com $n_a = 2$, $n_b = 2$, e $n_k = 1$ equivale ao modelo #28

$$A_{28}(q) = 1 - 1{,}407\, q^{-1} + 0{,}4826\, q^{-2}$$
$$B_{28}(q) = q^{-1}\left(2{,}162 + 1{,}611\, q^{-1} - 1{,}602\, q^{-2}\right)$$

$\mathsf{AICc}_v = 80{,}82$ $\quad$ $\mathsf{AICc}_i = 290{,}4$ $\quad$ $J_v = 6{,}384$ $\quad$ $J_i = 5{,}910$

$$G_{28}(q) = \frac{2{,}162\, q^2 + 1{,}611\, q - 1{,}602}{q^3 - 1{,}407\, q^2 + 0{,}4826\, q}$$
$$H_{28}(q) = \frac{q^3}{q^3 - 1{,}407\, q^2 + 0{,}4826\, q}$$

Menor Modelo de Ordem Completa

ARX com $n_a = 2$, $n_b = 2$, e $n_k = 1$ equivale ao modelo #28

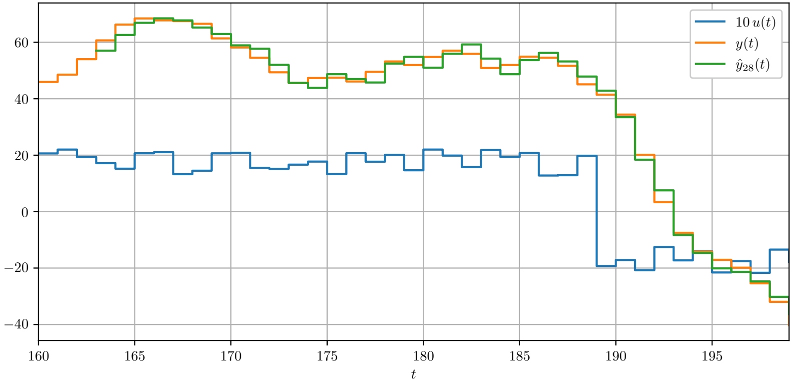
$$A_{28}(q) = 1 - 1{,}407\, q^{-1} + 0{,}4826\, q^{-2}$$
$$B_{28}(q) = q^{-1} \left(2{,}162 + 1{,}611\, q^{-1} - 1{,}602\, q^{-2}\right)$$

$\mathrm{AICc}_v = 80{,}82$ $\quad$ $\mathrm{AICc}_i = 290{,}4$ $\quad$ $J_v = 6{,}384$ $\quad$ $J_i = 5{,}910$

$$G_{28}(q) = \frac{2{,}162\, q^2 + 1{,}611\, q - 1{,}602}{q^3 - 1{,}407\, q^2 + 0{,}4826\, q}$$
$$H_{28}(q) = \frac{q^3}{q^3 - 1{,}407\, q^2 + 0{,}4826\, q}$$

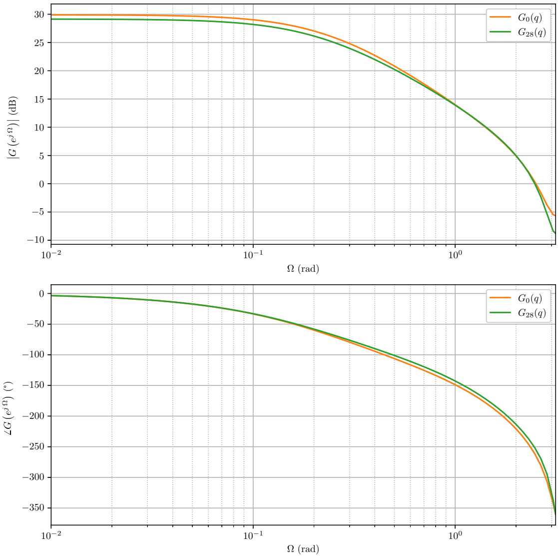
$$G_0(q) = \frac{2\, q^2 + 2\, q - 1{,}5}{q^3 - 1{,}4\, q^2 + 0{,}48\, q}$$
$$H_0(q) = \frac{q^3}{q^3 - 1{,}4\, q^2 + 0{,}48\, q}$$

Menor Modelo de Ordem Completa - Previsão

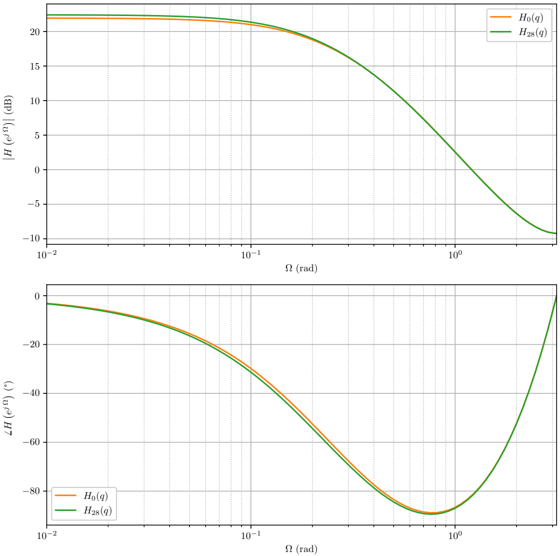


$$J_v = 6{,}384$$

Menor Modelo de Ordem Completa - Resposta em Frequência - $G(q)$



Menor Modelo de Ordem Completa - Resposta em Frequência - $H(q)$



Identificação de Sistema por Erro de Predição com Modelos Polinomiais

Guilherme de Paoli Beal

Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Aprendizado Supervisionado de Modelos Paramétricos

Maio de 2023