Identificação de Sistema Linear por Erro de Predição

Guilherme de Paoli Beal
Universidade Federal do Rio Grande do Sul

***Resumo*—Aqui vai o resumo.**

***Palavras-chave*—Identificação, Sistema Linear**

I. Introdução

As implementações são desenvolvidas em Python, versão 3.9.12. A identificação por erro de predição utiliza o pacote `pysid` em versão de desenvolvimento 0.1.0. O código deste projeto está publicado em `github.com/GuiBeal/system-identification`.

II. Identificação por Erro de Predição

Considere um sistema discreto, linear, invariante no tempo, com uma única entrada e uma única saída. A resposta deste sistema é dada por

$$y(t) = G_0(z)\, u(t) + \nu(t),\, t \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

em que $y(t)$ é o sinal de saída, $G_0(z)$ é a função de transferência do sistema, $u(t)$ é o sinal de entrada, $\nu(t)$ é um ruído de medição desconhecido, z é o operador de avanço — de modo que $z\, x(t) = x(t+1)$ — e $t \in \mathbb{N}$ é a variável de tempo discreto.

A. Modelos

O modelo busca representar o sistema real $G_0(q)$ expresso em (1). Em particular, na identificação por erro de predição, o modelo procurar caracterizar também o ruído $\nu(t)$.

Quatro diferentes classes de modelo são exploradas neste trabalho:

- Autorregressivo com Entrada Externa, ou *Autoregressive with Extra Input* (ARX);
- Autorregressivo com Média Móvel e Entrada Externa, ou *Autoregressive Moving Average with Extra Input* (ARMAX);
- Erro na Saída, ou *Output Error* (OE); e
- Box-Jenkins (BJ).

Essas classes são casos particulares de um modelo mais genérico, definido por

$$A(q)\, y(t) = \frac{B(q)}{F(q)}\, u(t) + \frac{C(q)}{D(q)}\, e(t), \tag{2}$$

G. Beal, guilherme.beal@ufrgs.br

em que $e(t)$ é ruído branco. Os polinômios têm os formatos

$$\begin{aligned}
A(q) &= 1 + a_1\, q^{-1} + \cdots + a_{n_a}\, q^{-n_a},\\
B(q) &= q^{-n_k}\, \left(b_0 + b_1\, q^{-1} + \cdots + b_{n_b}\, q^{-n_b}\right),\\
C(q) &= 1 + c_1\, q^{-1} + \cdots + c_{n_c}\, q^{-n_c},\\
D(q) &= 1 + d_1\, q^{-1} + \cdots + d_{n_d}\, q^{-n_d}, \text{ e}\\
F(q) &= 1 + f_1\, q^{-1} + \cdots + f_{n_f}\, q^{-n_f},
\end{aligned}$$

em que n_a, n_b, n_c, n_d e n_f são as ordens dos polinômios e n_k é o número de atrasos da entrada para a saída. Definindo as funções de transferência

$$\begin{aligned}
G(q) &= \frac{B(q)}{A(q)\, F(q)}, \text{ e}\\
H(q) &= \frac{C(q)}{A(q)\, D(q)},
\end{aligned}$$

então (2) pode ser reescrita como

$$y(t) = G(q)\, u(t) + H(q)\, e(t).$$

Note que $G(q)$ caracteriza o sistema real $G_0(q)$. Por sua vez, o ruído de medição $\nu(t)$ é representado como ruído branco $e(t)$ filtrado por $H(q)$:

$$\nu(t) = H(q)\, e(t).$$

Pelas definições dos polinômios,

$$H(\infty) = 1. \tag{3}$$

Outrossim, se o modelo representa um sistema amostrado, então $G(q)$ deve ser estritamente própria — isto é, o grau de seu denominador é maior que o de seu numerador — o que é garantido com $n_k \geq 1$.

Ressalta-se que este modelo genérico pode apresentar definições e notações diferentes, como em [1]–[3]. A definição aqui apresentada corresponde aos formatos dos polinômios retornados pelas funções do pacote `pysid`.

B. Predição

A predição é realizada aplicando

$$\hat{y}(t) = L_u(q)\, u(t) + L_y(q)\, y(t) \tag{4}$$

com

$$\begin{aligned}
L_u(q) &= \frac{G(q)}{H(q)}, \text{ e}\\
L_y(q) &= 1 - \frac{1}{H(q)}.
\end{aligned}$$

Embora isso não seja diretamente evidenciado por (4), o fato de $G(q)$ ser estritamente própria juntamente com (3) garante que a predição $\hat{y}(t)$ no instante $t = t_0$ depende somente de valores de $u(t)$ e $y(t)$ em instantes $t < t_0$ — isto é, a predição é realizado a partir de valores anteriores dos sinais de entrada e saída medidos.

O erro de predição é definido como

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = \frac{y(t) - G(q)\,u(t)}{H(q)}.$$

Assim, o erro quadrático médio de predição é definido por

$$J = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} (\varepsilon(t))^2. \tag{5}$$

C. Identificação

A identificação por erro de predição visa, a partir de um conjunto de dados de entrada $u(t)$ e de saída $y(t)$ medidos do processo, a identificar os parâmetros dos polinômios do modelo de forma a minimizar o custo expresso em (5). O algoritmo aplicado neste processo depende da classe do modelo e está fora do escopo deste trabalho. Estes são implementados pelo pacote `pysid`.

D. Classes de Modelos

1) ARX: No modelo ARX há liberdade nas escolhas de n_a, n_b e n_k, enquanto $n_c = n_d = n_f = 0$. Assim, as funções de transferência tornam-se

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}, \text{ e}$$
$$H(q) = \frac{1}{A(q)}.$$

Esta classe tem a vantagem de resultar numa minimização linear nos parâmetros, os quais podem ser obtidos por mínimos quadrados.

2) ARMAX: O modelo ARMAX requer a arbitração das ordens n_a, n_b, n_c e n_k, com $n_d = n_f = 0$. Portanto, as funções de transferência são

$$G(q) = \frac{B(q)}{A(q)}, \text{ e}$$
$$H(q) = \frac{C(q)}{A(q)}.$$

3) Output Error*:* Para o modelo OE são escolhidas as ordens n_b, n_f e n_k, fixando $n_a = n_c = n_d = 0$. Nesse casso, tem-se

$$G(q) = \frac{B(q)}{F(q)}, \text{ e}$$
$$H(q) = 1.$$

Note que este modelo considera que o ruído de medição é ruído branco.

4) Box-Jenkins: Finalmente, no modelo BJ arbitra-se n_b, n_c, n_d, n_f e n_k, com $n_a = 0$. Com isso, obtém-se

$$G(q) = \frac{B(q)}{F(q)}, \text{ e}$$
$$H(q) = \frac{C(q)}{F(q)}.$$

III. Dados

Os dados são apresentados na Figura 1, em que o sinal $u(t)$ é multiplicado por um fator de 10 para melhor visualização. Ambos os sinais $u(t)$ e $y(t)$ contêm 200 amostras.

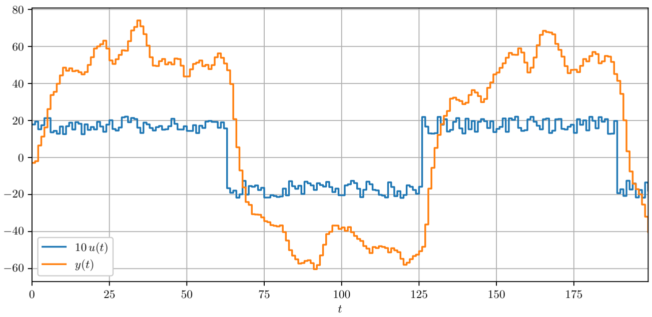

Figura 1. Dados de entrada e saída.

IV. Resultados

Tabela I
Modelos ARX melhor classificados.

#	n_a	n_b	n_k

V. Conclusões

Referências

[1] L. Ljung, *Sytem identification: theory for the user*, 2nd ed. Upper Saddle River, NJ, Estados Unidos da América: Prentice Hall PTR, 1999.

[2] L. A. Aguirre, *Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*, 3rd ed. Belo Horizonte, MG, Brasil: Editora UFMG, 2007.

[3] The MathWorks, Inc., "What are polynomial models?" Natick, MA, Estados Unidos da América, 2022. [Online]. Disponível em: https://www.mathworks.com/help/ident/ug/what-are-polynomial-models.html