Coloração de Arestas

Nemhauser, George L. e Sungsoo Park.
"A polyhedral approach to edge coloring."
Operations Research Letters 10.6 (1991): 315-322.

Guilherme Guidotti Brandt (235970)

IC - Unicamp

Problema da coloração de arestas

Problema da coloração de arestas: Dado um grafo $G = (V, E)$, encontrar uma atribuição de cores às arestas de G com o menor número de cores, de forma que arestas adjacentes tenham cores distintas.

Problema da coloração de arestas

Problema da coloração de arestas: Dado um grafo $G = (V, E)$, encontrar uma atribuição de cores às arestas de G com o menor número de cores, de forma que arestas adjacentes tenham cores distintas.

Equivalente: encontrar uma decomposição por emparelhamentos de G de cardinalidade mínima.

Problema da coloração de arestas

Problema da coloração de arestas: Dado um grafo $G = (V, E)$, encontrar uma atribuição de cores às arestas de G com o menor número de cores, de forma que arestas adjacentes tenham cores distintas.

Equivalente: encontrar uma decomposição por emparelhamentos de G de cardinalidade mínima.

O índice cromático $\chi'(G)$ é o menor número de cores necessário para colorir as arestas do grafo G.

Problema da coloração de arestas

Problema da coloração de arestas: Dado um grafo $G = (V, E)$, encontrar uma atribuição de cores às arestas de G com o menor número de cores, de forma que arestas adjacentes tenham cores distintas.

Equivalente: encontrar uma decomposição por emparelhamentos de G de cardinalidade mínima.

O índice cromático $\chi'(G)$ é o menor número de cores necessário para colorir as arestas do grafo G.

Politopo:

$$P_{\mathrm{ColA}}(G) = \mathrm{conv}\{\chi^C : C \text{ é uma coloração de arestas de } G\}$$

Teorema de Vizing

Teorema (Vizing). Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\Delta(G) + 1$.

Teorema de Vizing

Teorema (Vizing). Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\Delta(G) + 1$.

Prova. Existe um algoritmo que dá uma coloração com $\Delta(G) + 1$ cores para qualquer grafo simples em tempo polinomial (Ehrenfeucht, Faber & Kierstead, 1984; Lovasz, Plummer, 1986). $\square$

Teorema de Vizing

Teorema (Vizing). Se G é um grafo simples, então $\chi'(G) = \Delta(G)$ ou $\Delta(G) + 1$.

Prova. Existe um algoritmo que dá uma coloração com $\Delta(G) + 1$ cores para qualquer grafo simples em tempo polinomial (Ehrenfeucht, Faber & Kierstead, 1984; Lovasz, Plummer, 1986). $\square$

Sobra um problema de decisão: decidir se um grafo simples G pode ser colorido com exatamente $\Delta(G)$ cores.

- Problema NP-completo mesmo quando restrito a grafos 3-regulares (Holyer, 1981).

Formulação com PLI

O problema é equivalente a encontrar uma cobertura das arestas por emparelhamentos maximais no grafo:

$$
\begin{aligned}
\text{(IP)} \quad & \chi'(G) = \min \mathbf{1}x \\
& Ax \geq \mathbf{1} \\
& x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}
\end{aligned}
$$

Onde A é a matriz de incidência das arestas e emparelhamentos de G, i.e., $a_{ij} = 1$ sse a aresta i é parte do emparelhamento j.

Formulação com PLI

O problema é equivalente a encontrar uma cobertura das arestas por emparelhamentos maximais no grafo:

$$\begin{aligned} \text{(IP)} \quad & \chi'(G) = \min \mathbf{1}x \\ & Ax \geq \mathbf{1} \\ & x \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Onde A é a matriz de incidência das arestas e emparelhamentos de G, i.e., $a_{ij} = 1$ sse a aresta i é parte do emparelhamento j. A matriz A tem $|E|$ linhas, e uma coluna para cada emparelhamento maximal em G.

Formulação com PLI

O problema é equivalente a encontrar uma cobertura das arestas por emparelhamentos maximais no grafo:

$$
\begin{aligned}
\text{(IP)} \quad & \chi'(G) = \min \mathbf{1}x \\
& Ax \geq \mathbf{1} \\
& x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}
\end{aligned}
$$

Onde A é a matriz de incidência das arestas e emparelhamentos de G, i.e., $a_{ij} = 1$ sse a aresta i é parte do emparelhamento j. A matriz A tem $|E|$ linhas, e uma coluna para cada emparelhamento maximal em G.

Podemos notar que, em qualquer solução ótima, $x \in \mathbb{B}$.

Formulação com PLI

O problema é equivalente a encontrar uma cobertura das arestas por emparelhamentos maximais no grafo:

$$\begin{aligned} \text{(IP)} \quad & \chi'(G) = \min \mathbf{1}x \\ & Ax \geq \mathbf{1} \\ & x \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \end{aligned}$$

Onde A é a matriz de incidência das arestas e emparelhamentos de G, i.e., $a_{ij} = 1$ sse a aresta i é parte do emparelhamento j. A matriz A tem $|E|$ linhas, e uma coluna para cada emparelhamento maximal em G.

Podemos notar que, em qualquer solução ótima, $x \in \mathbb{B}$.

A cobertura não precisa ser exata: se alguma aresta é escolhida duas vezes, podemos escolher arbitrariamente um dos emparelhamentos da solução em que ela aparece.

Formulação com PLI

Outras formulações são possíveis com número polinomial de variáveis. Por exemplo, com variáveis $x_{e,c} = 1$ sse a aresta e tem a cor c. Um problema desse tipo de formulação é a quantidade de simetrias.

Formulação com PLI

Outras formulações são possíveis com número polinomial de variáveis. Por exemplo, com variáveis $x_{e,c} = 1$ sse a aresta e tem a cor c. Um problema desse tipo de formulação é a quantidade de simetrias.

A formulação (IP) é interessante porque a relaxação linear dá uma aproximação boa de $\chi'(G)$, e permite explorar geração de colunas na solução do problema.

Problema da coloração fracionária de arestas

Temos a seguinte relaxação linear de (IP) e seu dual:

$$
\begin{array}{llll}
\text{(LP)} & \chi'_{\mathrm{LP}}(G) = \min \mathbf{1}x & \text{(DLP)} & z_{\mathrm{DLP}}(G) = \max \mathbf{1}u \\
 & Ax \geq 1 & & A^\top u \leq 1 \\
 & x \geq 0 & & u \geq 0
\end{array}
$$

Note que o dual corresponde a atribuir pesos não-negativos a arestas em G de forma que a soma dos pesos em cada emparelhamento não ultrapasse 1, maximizando a soma dos custos das arestas.

Problema da coloração fracionária de arestas

Temos a seguinte relaxação linear de (IP) e seu dual:

$$\text{(LP)} \quad \begin{aligned} \chi'_{\text{LP}}(G) &= \min \mathbf{1}x \\ Ax &\geq 1 \\ x &\geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(DLP)} \quad \begin{aligned} z_{\text{DLP}}(G) &= \max \mathbf{1}u \\ A^\top u &\leq 1 \\ u &\geq 0 \end{aligned}$$

Note que o dual corresponde a atribuir pesos não-negativos a arestas em G de forma que a soma dos pesos em cada emparelhamento não ultrapasse 1, maximizando a soma dos custos das arestas.

Proposição. $\chi'_{\text{LP}}(G) \geq \Delta(G)$

Prova. O conjunto de arestas incidentes sobre um vértice de grau $\Delta(G)$ em G dá uma solução viável para o dual com custo $\Delta(G)$. $\square$

Problema da coloração fracionária de arestas

Proposição. Se $\chi'_{\mathrm{LP}}(G) > \Delta(G)$, então $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, e se $\chi'_{\mathrm{LP}}(G) = \Delta(G)$ e existe solução ótima inteira de (LP), então $\chi'(G) = \Delta(G)$. $\square$

Problema da coloração fracionária de arestas

Proposição. Se $\chi'_{\mathrm{LP}}(G) > \Delta(G)$, então $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, e se $\chi'_{\mathrm{LP}}(G) = \Delta(G)$ e existe solução ótima inteira de (LP), então $\chi'(G) = \Delta(G)$. $\square$

Teorema. O problema da otimização para o programa linear (LP) pode ser resolvido em tempo polinomial.

Problema da coloração fracionária de arestas

Proposição. Se $\chi'_{\mathrm{LP}}(G) > \Delta(G)$, então $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, e se $\chi'_{\mathrm{LP}}(G) = \Delta(G)$ e existe solução ótima inteira de (LP), então $\chi'(G) = \Delta(G)$. $\square$

Teorema. O problema da otimização para o programa linear (LP) pode ser resolvido em tempo polinomial.

Prova. Basta mostrar que (DLP) é separável em tempo polinomial.

Problema da coloração fracionária de arestas

Proposição. Se $\chi'_{\mathrm{LP}}(G) > \Delta(G)$, então $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, e se $\chi'_{\mathrm{LP}}(G) = \Delta(G)$ e existe solução ótima inteira de (LP), então $\chi'(G) = \Delta(G)$. $\square$

Teorema. O problema da otimização para o programa linear (LP) pode ser resolvido em tempo polinomial.

Prova. Basta mostrar que (DLP) é separável em tempo polinomial. O problema da separação para (DLP) corresponde a, dada uma atribuição de pesos não-negativos para as arestas de G, encontrar um emparelhamento de peso acima de 1.

Problema da coloração fracionária de arestas

Proposição. Se $\chi'_{\mathrm{LP}}(G) > \Delta(G)$, então $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, e se $\chi'_{\mathrm{LP}}(G) = \Delta(G)$ e existe solução ótima inteira de (LP), então $\chi'(G) = \Delta(G)$. □

Teorema. O problema da otimização para o programa linear (LP) pode ser resolvido em tempo polinomial.

Prova. Basta mostrar que (DLP) é separável em tempo polinomial. O problema da separação para (DLP) corresponde a, dada uma atribuição de pesos não-negativos para as arestas de G, encontrar um emparelhamento de peso acima de 1. Isso pode ser feito em tempo polinomial com um algoritmo de emparelhamento de custo máximo (e.g. algoritmo de Edmonds). □

Problema da coloração fracionária de arestas

Proposição. Se $\chi'_{\mathrm{LP}}(G) > \Delta(G)$, então $\chi'(G) = \Delta(G) + 1$, e se $\chi'_{\mathrm{LP}}(G) = \Delta(G)$ e existe solução ótima inteira de (LP), então $\chi'(G) = \Delta(G)$. $\square$

Teorema. O problema da otimização para o programa linear (LP) pode ser resolvido em tempo polinomial.

Prova. Basta mostrar que (DLP) é separável em tempo polinomial. O problema da separação para (DLP) corresponde a, dada uma atribuição de pesos não-negativos para as arestas de G, encontrar um emparelhamento de peso acima de 1. Isso pode ser feito em tempo polinomial com um algoritmo de emparelhamento de custo máximo (e.g. algoritmo de Edmonds). $\square$

Fica um caso remanescente: $\chi'_{\mathrm{LP}}(G) = \Delta(G)$, mas nenhuma solução ótima conhecida é inteira.

Desigualdades válidas

Seja $S \subseteq V$ e $E(S)$ o conjunto de arestas com ambos os extremos em S. Um pareamento qualquer pode cobrir no máximo $\lfloor \frac{1}{2}|U| \rfloor$ arestas de $E(U)$.

Desigualdades válidas

Seja $S \subseteq V$ e $E(S)$ o conjunto de arestas com ambos os extremos em S. Um pareamento qualquer pode cobrir no máximo $\lfloor \frac{1}{2}|U| \rfloor$ arestas de $E(U)$.

Isso nos dá a seguinte família de desigualdades válidas para $P_{ColA}(G)$ (Seymour, 1979; Stahl, 1979):

$$\sum_{\{j:\ M_j \cap E' \neq \emptyset\}} x_j \geq \left\lceil \frac{|E'|}{\lfloor \frac{1}{2}|U| \rfloor} \right\rceil \qquad \forall U \subseteq V, E' \subseteq E(U)$$

onde a variável x_j corresponde ao emparelhamento maximal M_j.

Desigualdades válidas

Em particular, é interessante pensar no caso em que $|U| = k$ é ímpar e o subgrafo $C = (U, E') \subseteq G$ é um ciclo. Nesse caso,

$$\left\lceil \frac{|E'|}{\lfloor \frac{1}{2}|U| \rfloor} \right\rceil = \lceil (2k+1)/k \rceil = 3$$

Desigualdades válidas

Em particular, é interessante pensar no caso em que $|U| = k$ é ímpar e o subgrafo $C = (U, E') \subseteq G$ é um ciclo. Nesse caso,

$$\left\lceil \frac{|E'|}{\lfloor \frac{1}{2}|U| \rfloor} \right\rceil = \lceil (2k+1)/k \rceil = 3$$

e temos a família de restrições de ciclos ímpares

$$\sum_{\{j\colon M_j \cap C \neq \emptyset\}} x_j \geq 3 \qquad \qquad \forall \text{ ciclo ímpar } C$$

Desigualdades válidas

Em particular, é interessante pensar no caso em que $|U| = k$ é ímpar e o subgrafo $C = (U, E') \subseteq G$ é um ciclo. Nesse caso,

$$\left\lceil \frac{|E'|}{\lfloor \frac{1}{2}|U| \rfloor} \right\rceil = \lceil (2k+1)/k \rceil = 3$$

e temos a família de restrições de ciclos ímpares

$$\sum_{\{j:\ M_j \cap C \neq \emptyset\}} x_j \geq 3 \qquad\qquad \forall \text{ ciclo ímpar } C$$

Essas restrições em geral não são combinação cônica das restrições de (LP) (exceto quando $|C| = 3$). Para alguns grafos essas restrições definem faceta (Park, 1989).

Separação para grafos 3-regulares

Seja (ALP) o programa linear obtido adicionando as restrições de cíclos ímpares em (LP) e $\chi'_{\mathrm{ALP}}(G)$ seu valor ótimo.

Teorema. Se G é 3-regular e $\chi'(G) = 4$, então $\chi'_{\mathrm{ALP}}(G) > 3$.

Separação para grafos 3-regulares

Seja (ALP) o programa linear obtido adicionando as restrições de cíclos ímpares em (LP) e $\chi'_{\mathrm{ALP}}(G)$ seu valor ótimo.

Teorema. Se G é 3-regular e $\chi'(G) = 4$, então $\chi'_{\mathrm{ALP}}(G) > 3$.

Com isso, no caso em que G é 3-regular, $\chi_{LP}(G) = 3$ e a solução ótima é facionária, podemos resolver o problema da separação com as restrições de ciclo ímpar: basta remover um emparelhamento com peso positivo para encontrar uma 3-coloração ou uma restrição de ciclo ímpar violada.

Generalização

O teorema anterior pode ser generalizado para grafos de qualquer índice cromático:

Generalização

O teorema anterior pode ser generalizado para grafos de qualquer índice cromático:

Seja $\mathscr{G}_{k-1}$ a família de grafos com $\Delta = k - 1$ e $\chi' = \mathsf{k}$.

Generalização

O teorema anterior pode ser generalizado para grafos de qualquer índice cromático:

Seja $\mathscr{G}_{k-1}$ a família de grafos com $\Delta = k - 1$ e $\chi' = \mathsf{k}$.

Para um grafo G com $\Delta = k$, as desigualdades de ciclos ímpares podem ser generalizadas para:

$$\sum_{\{j:\ M_j \cap H \neq \emptyset\}} x_j \geq k \qquad\qquad \forall H \subseteq G, H \in \mathscr{G}_{k-1}$$

Generalização

O teorema anterior pode ser generalizado para grafos de qualquer índice cromático:
Seja $\mathscr{G}_{k-1}$ a família de grafos com $\Delta = k - 1$ e $\chi' = \mathsf{k}$.
Para um grafo G com $\Delta = k$, as desigualdades de ciclos ímpares podem ser generalizadas para:

$$\sum_{\{j:\ M_j \cap H \neq \emptyset\}} x_j \geq k \qquad \forall H \subseteq G, H \in \mathscr{G}_{k-1}$$

Defina (ALP_k) como o problema linear obtido adicionando essas restrições a (LP). Temos o seguinte teorema:

Teorema. Se G é k-regular e $\chi'(G) = k + 1$, então $\chi'_{\mathrm{ALP_k}}(G) > k$.

Generalização

O teorema anterior pode ser generalizado para grafos de qualquer índice cromático:
Seja $\mathscr{G}_{k-1}$ a família de grafos com $\Delta = k - 1$ e $\chi' = \mathrm{k}$.
Para um grafo G com $\Delta = k$, as desigualdades de ciclos ímpares podem ser generalizadas para:

$$\sum_{\{j:\ M_j \cap H \neq \emptyset\}} x_j \geq k \qquad \forall H \subseteq G, H \in \mathscr{G}_{k-1}$$

Defina (ALP_k) como o problema linear obtido adicionando essas restrições a (LP). Temos o seguinte teorema:

Teorema. Se G é k-regular e $\chi'(G) = k + 1$, então $\chi'_{\mathrm{ALP_k}}(G) > k$.

Infelizmente, a separação nesse caso parece ser bem mais difícil.

Geração de colunas

A formulação *LP* tem um número de variáveis exponencial no tamanho do grafo. Seria inviável resolver normalmente.

Geração de colunas

A formulação LP tem um número de variáveis exponencial no tamanho do grafo. Seria inviável resolver normalmente.

Para contornar isso, podemos executar o Simplex olhando apenas para a base, e "gerar" colunas com custo reduzido negativo conforme necessário.

Geração de colunas

A formulação LP tem um número de variáveis exponencial no tamanho do grafo. Seria inviável resolver normalmente.

Para contornar isso, podemos executar o Simplex olhando apenas para a base, e "gerar" colunas com custo reduzido negativo conforme necessário.

O custo reduzido da variável (coluna) j é dado por

$$r_j = c_j - u^\top A_{*j}$$

Onde c é a direção de otimização, u é o vetor das variáveis duais e A é a matriz que define o poliedro.

Geração de colunas

Podemos encontrar uma coluna com custo reduzido negativo resolvendo o seguinte problema de otimização:

$$(\mathrm{PR}) \quad z(u) = \max u^T a_j$$
$$a_j \in A$$

Isto é, encontrar uma coluna de A cujo produto interno com u^T seja máximo (minimizando o custo reduzido).

Geração de colunas

Podemos encontrar uma coluna com custo reduzido negativo resolvendo o seguinte problema de otimização:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{PR}) \quad z(u) = \max u^T a_j \\
a_j \in A
\end{aligned}
$$

Isto é, encontrar uma coluna de A cujo produto interno com u^T seja máximo (minimizando o custo reduzido).

Se $z(u) > c_j$, a coluna j entra na base; se não, não existe coluna com custo reduzido negativo, e o Simplex termina.

Geração de colunas para (LP)

Temos o seguinte programa linear:

$$
\begin{aligned}
\text{(LP)} \quad & \chi'_{\mathrm{LP}}(G) = \min \mathbf{1}x \\
& Ax \geq 1 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Geração de colunas para (LP)

Temos o seguinte programa linear:

$$\begin{aligned} \text{(LP)} \quad & \chi'_{\mathrm{LP}}(G) = \min \mathbf{1}x \\ & Ax \geq 1 \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

Que nos dá o seguinte problema de precificação:

$$\begin{aligned} \text{(PR)} \quad & z(w) = \max w^T y & \\ & \sum_{e \in \delta(v)} y_e \leq 1 & \forall v \in V \\ & y_e \in \mathbb{B} & \forall e \in E \end{aligned}$$

Geração de colunas para (LP)

Temos o seguinte programa linear:

$$
\begin{aligned}
\text{(LP)} \quad & \chi'_{\mathrm{LP}}(G) = \min \mathbf{1}x \\
& Ax \geq 1 \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Que nos dá o seguinte problema de precificação:

$$
\begin{aligned}
\text{(PR)} \quad & z(w) = \max w^T y & \\
& \sum_{e \in \delta(v)} y_e \leq 1 & \forall v \in V \\
& y_e \in \mathbb{B} & \forall e \in E
\end{aligned}
$$

Que é equivalente a emparelhamento de custo máximo (onde os custos são dados por w, o vetor das variáveis duais no problema mestre).

Geração de colunas para (ALP)

Temos o seguinte programa linear:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{ALP}) \quad & \chi'_{\mathrm{LP}}(G) = \min \mathbf{1}x \\
& Ax \geq 1 \\
& \sum_{\{j:\, M_j \cap C \neq \emptyset\}} x_j \geq 3 \qquad \forall \text{ ciclo ímpar } C \\
& x \geq 0
\end{aligned}
$$

Geração de colunas para (ALP)

Que nos dá o seguinte problema de precificação:

$$
\begin{array}{lll}
\text{(PRA)} & z(w,u) = \max w^T y + u^\top \pi & \\
& \displaystyle\sum_{e \in \delta(v)} y_e \le 1 & \forall v \in V \\
& \displaystyle\sum_{e \in E(S)} y_e \le \frac{1}{2}(|S| - 1) & \forall S \subseteq V, |S| \text{ ímpar} \\
& \pi_C \le \displaystyle\sum_{e \in C} y_e & \forall \text{ ciclo ímpar } C \\
& \pi_C \in \mathbb{B} & \forall \text{ ciclo ímpar } C \\
& y_e \in \mathbb{B} & \forall e \in E
\end{array}
$$

Onde w é o vetor de variáveis duais das restrições de aresta e u das restrições de ciclos ímpares.

Algoritmo para grafos 3-regulares

1. Inicialize o Simplex com um conjunto razoável de colunas que permita uma solução
   - Isso pode ser feito usando o Teorema de Vizing e/ou soluções heurísticas.
2. Resolva a relaxação linear do problema.
3. Se o valor ótimo é 3:
   3.1 Se a solução é inteira ou nenhuma restrição de ciclo ímpar foi violada, termina com $\chi'(G) = 3$.
   3.2 Se a solução não é inteira e alguma restrição de ciclo ímpar foi violada, adiciona ao sistema e volta ao passo 2.
4. Se o valor ótimo é maior que 3, gere uma coluna com o problema de precificação.
   4.1 Se o preço da solução ótima for maior que 1, adicione a coluna e volte ao passo 2.
   4.2 Se não, não existe coluna com preço reduzido negativo, e termina com $\chi'(G) = 4$.