UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FCT - Faculdade de Ciências e Tecnologia
DMC - Departamento de Matemática e Computação
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Tarefa 3

Métodos Computacionais para Equações Diferenciais

Aluno: Guilherme Cesar Tomiasi
Professora: Analice Costacurta Brandi

Presidente Prudente
22 de abril de 2025

Expandindo algumas Séries de Taylor

Para aproveitar ao máximo as analogias entre os exercícios 1. e 2., realizamos a expansão da Série de Taylor em relação as duas variáveis realizando um passo à frente ou para trás ao mesmo tempo, a partir do operador $\pm$:

$$\begin{aligned} u(x_i \pm h, y_j) = u(x_i, y_j) + (\pm h)\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{(\pm h)^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) \\ + \frac{(\pm h)^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(x_i, y_j) + \frac{(\pm h)^4}{4!}\frac{\partial u^4}{\partial^4 x}(x_i, y_j) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u(x_i, y_j \pm k) = u(x_i, y_j) + (\pm k)\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{(\pm k)^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j) \\ + \frac{(\pm k)^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 y}(x_i, y_j) + \frac{(\pm k)^4}{4!}\frac{\partial u^4}{\partial^4 y}(x_i, y_j) \end{aligned} \tag{2}$$

Direção x

Avançada A partir de Equação 1, tomando o caso da adição, truncando a série até a segunda derivada e depois isolando o termo que descreve a primeira derivada:

$$u(x_i + h, y_j) = u(x_i, y_j) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

$$h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = u(x_i + h, y_j) - u(x_i, y_j) - \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i, y_j) - \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} - \frac{h}{2}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

O ETL pode ser representado pelo último termo ao escolher $\xi_i \in [x_i, x_i + h]$, pelo Teorema do Valor Intermediário

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i, y_j)}{h} \\ \text{ETL: } -\frac{h}{2}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(\xi_i, y_j)\blacksquare \end{gathered} \tag{3}$$

Atrasada A mesma lógica pode ser aplicada, mas utilizando a subtração no lugar da adição para Equação 1:

$$u(x_i - h, y_j) = u(x_i, y_j) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

$$h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = -u(x_i - h, y_j) + u(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{h} + \frac{h}{2}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{h} \\ \text{ETL:}\ \ \frac{h}{2}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(\xi_i, y_j)\blacksquare\end{gathered} \tag{4}$$

Centrada A diferença centrada pode ser obtida a partir de uma combinação das Séries de Taylor expandidas na Equação 1. Tomando ambas as séries até a terceira derivada, e as subtraindo:

$$a : u(x_i + h, y_j) = u(x_i, y_j) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$
$$+\frac{h^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(x_i, y_j)$$

$$b : u(x_i - h, y_j) = u(x_i, y_j) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$
$$-\frac{h^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(x_i, y_j)$$

$$a - b : u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j) = 2h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + 2\frac{h^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(x_i, y_j)$$

$$2h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j) - 2\frac{h^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(x_i, y_j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2h} - \frac{h^2}{6}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(x_i, y_j)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2h} \\ \text{ETL:}\ -\frac{h^2}{6}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(\xi_i, y_j)\blacksquare\end{gathered} \tag{5}$$

Centrada da segunda derivada No item anterior, é possível somar as duas equações ao invés de subtrair, isso nos proporciona:

$$u(x_i + h, y_j) + u(x_i - h, y_j) = 2u(x_i, y_j) + 2\frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

Não consta nenhum termo após a segunda derivada, por isso, adicionamos a soma dos termos da quarta derivada, proveniente da Equação 1

$$u(x_i + h, y_j) + u(x_i - h, y_j) = 2u(x_i, y_j) +$$
$$2\frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) + 2\frac{h^4}{4!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

Isolando a segunda derivada

$$
\begin{aligned}
h^2 \frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) = u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j) \\
-2\frac{h^4}{24}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) \\
\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} \\
-\frac{h^2}{12}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) \\
\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} \\
\text{ETL: } -\frac{h^2}{12}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(\xi_i, y_j)\blacksquare
\end{aligned}
\tag{6}
$$

Direção y

Avançada Caso análogo ao da Direção x, mas utilizando a Equação 2

$$u(x_i, y_j + k) = u(x_i, y_j) + k\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j)$$

$$k\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = u(x_i, y_j + k) - u(x_i, y_j) - \frac{k^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j + k) - u(x_i, y_j) - \frac{k^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j)}{k}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j + k) - u(x_i, y_j)}{k} - \frac{k}{2}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j)$$

O ETL pode ser representado pelo último termo ao escolher $\psi_j \in [y_j, y_j + k]$, pelo Teorema do Valor Intermediário

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j + k) - u(x_i, y_j)}{k} \\ \text{ETL: } -\frac{k}{2}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, \psi_j)\blacksquare\end{gathered} \tag{7}$$

Atrasada A mesma lógica pode ser aplicada, mas utilizando a subtração no lugar da adição para Equação 2:

$$u(x_i, y_j - k) = u(x_i, y_j) - k\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j)$$

$$k\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = -u(x_i, y_j - k) + u(x_i, y_j) + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_j - k)}{k} + \frac{k}{2}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_j - k)}{k} \\ \text{ETL: } \frac{k}{2}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, \psi_j)\blacksquare\end{gathered} \tag{8}$$

Centrada Expandindo a Equação 2 até a terceira derivada, nos casos aditivo e subtrativo.

$$\begin{gathered}a : u(x_i, y_j + k) = u(x_i, y_j) + k\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j) \\ +\frac{k^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 y}(x_i, y_j)\end{gathered}$$

$$b: u(x_i, y_j - k) = u(x_i, y_j) - k\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{k^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j)$$
$$-\frac{k^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 y}(x_i, y_j)$$

$$a - b: u(x_i, y_j + k) - u(x_i, y_j - k) = 2k\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + 2\frac{k^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 y}(x_i, y_j)$$

$$2k\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = u(x_i, y_j + k) - u(x_i, y_j - k) - 2\frac{k^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 y}(x_i, y_j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + k, y_j) - u(x_i, y_j - k)}{2k} - \frac{k^2}{6}\frac{\partial u^3}{\partial^3 y}(x_i, y_j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j + k) - u(x_i, y_j - k)}{2k}$$
$$\text{ETL: } -\frac{k^2}{6}\frac{\partial u^3}{\partial^3 y}(x_i, \psi_j)\blacksquare \tag{9}$$

Centrada da segunda derivada No item anterior, é possível somar as duas equações ao invés de subtrair, isso nos proporciona:

$$u(x_i, y_j + k) + u(x_i, y_j - k) = 2u(x_i, y_j) + 2\frac{k^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j)$$

Não consta nenhum termo após a segunda derivada, por isso, adicionamos a soma dos termos da quarta derivada, proveniente da Equação 2

$$u(x_i, y_j + k) + u(x_i, y_j - k) = 2u(x_i, y_j) +$$
$$2\frac{k^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j) + 2\frac{k^4}{4!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j)$$

Isolando a segunda derivada

$$k^2\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j) = u(x_i, y_j + k) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - k)$$
$$-2\frac{k^4}{24}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j + k) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - k)}{k^2}$$
$$-\frac{k^2}{12}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j)$$

$$\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j + k) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - k)}{k^2}$$

$$\text{ETL: } -\frac{k^2}{12}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, \psi_j)\blacksquare \tag{10}$$

Derivada mista

Dado que $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)$ e sabendo que é possível aplicar os coeficientes de diferença finita para qualquer variável presente nessa função, é possível pegar o valor aproximado entre parênteses e aplicar a derivada da outra variável sobre o mesmo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2h}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \approx \left(\frac{1}{2k}\right)\left(\frac{u(x_i + h, y_j + k) - u(x_i - h, y_j + k)}{2h} - \frac{u(x_i + h, y_j - k) - u(x_i - h, y_j - k)}{2h}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \approx \left(\frac{1}{4kh}\right)\left[u(x_i + h, y_j + k) - u(x_i - h, y_j + k) - u(x_i - h, y_j + k) + u(x_i - h, y_j - k)\right]$$

Como ambas as derivadas foram obtidas utilizando diferenças finitas centradas, um método de erro na ordem de $O(h^2)$, o erro da derivada mista depende de ambos os passos utilizados em cada direção da malha:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \approx \left(\frac{1}{4kh}\right)\left[u(x_i + h, y_j + k) - u(x_i - h, y_j + k) - u(x_i - h, y_j + k) + u(x_i - h, y_j - k)\right] + O(h^2, k^2)\blacksquare \tag{11}$$