
FCT - Faculdade de Ciências e Tecnologia
DMC - Departamento de Matemática e Computação
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Trabalho Prático 1
Métodos Computacionais para Equações Diferenciais

Aluno: Guilherme Cesar Tomiasi

Professora: Analice Costacurta Brandi

Presidente Prudente

29 de abril de 2025

Sumário

1. Aproximação de um PVI	3
1.a. Comparação com solução analítica	3
1.a. i. $h = 0.1$	3
1.a. ii. $h = 0.01$	4
1.a. iii. $h = 0.001$	6
1.b. Equiparando Euler com Runge-Kutta	7
1.c. Número de iterações obtido	9
2. Resolução numérica de PVI; Teste de estabilidade	11
3. PVF aproximado por diferenças centradas	15
4. PVF aproximado por outras diferenças finitas	16

1. Aproximação de um PVI

Enunciado Aproxime a solução do PVI

$$\begin{cases} y'(x) = \frac{1}{1+x^2} - 2y^2 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

utilizando os métodos de Euler e Runge-Kutta de 4ª ordem. Escolha apropriadamente h e ilustre graficamente a convergência.

Observação Pelo enunciado, ficou dúvida se apenas um método de Euler deveria ser aplicado (provavelmente, Euler Explícito), ou ambos, visto que a palavra usada foi “métodos”, no plural (podendo se referir a um método de Euler e o de Runge-Kutta, ou ambos de Euler e o de Runge-Kutta). Por essa razão, incluí tanto os métodos de Euler Explícito quanto o de Euler Implícito.

1.a. Comparação com solução analítica

Enunciado Plote a solução para diferentes valores de h e compare com a solução analítica da equação diferencial dada por $y(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Calcule os erros das aproximações.

Resolução Foram escolhidos os seguintes valores de passo de malha: $\{0.1, 0.05, 0.025, 0.0125, 0.01, 0.005, 0.0025, 0.00125, 0.001\}$. A razão de escolher uma quantidade tão alta será mais óbvia no item b. Para simplificar a visualização, são apresentados 3 casos dentre todos os resultados obtidos¹: $[0.1, 0.01, 0.001]$, sendo apresentados, para cada passo:

- **Gráfico da função aproximada:** comparando os métodos com a solução analítica oferecida;
- **Gráfico do erro global:** comparando a precisão dos resultados obtidos por cada método.

Também será apresentada uma tabela com a média do erro de truncamento local de cada método para cada passo.

1.a. i. $h = 0.1$

Os gráficos, dados pela Figura 1 e pela Figura 2, respectivamente, mostram que as aproximações utilizando os métodos de Euler são (esperadamente) muito piores que a do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Enquanto o método de Euler Explícito superestima os valores da função, sua versão implícita subestima os valores. A curva dada pelo método de Runge-Kutta de 4ª ordem sobrepõe a função exata dada pela solução analítica.

¹Os resultados na íntegra serão inclusos em um anexo

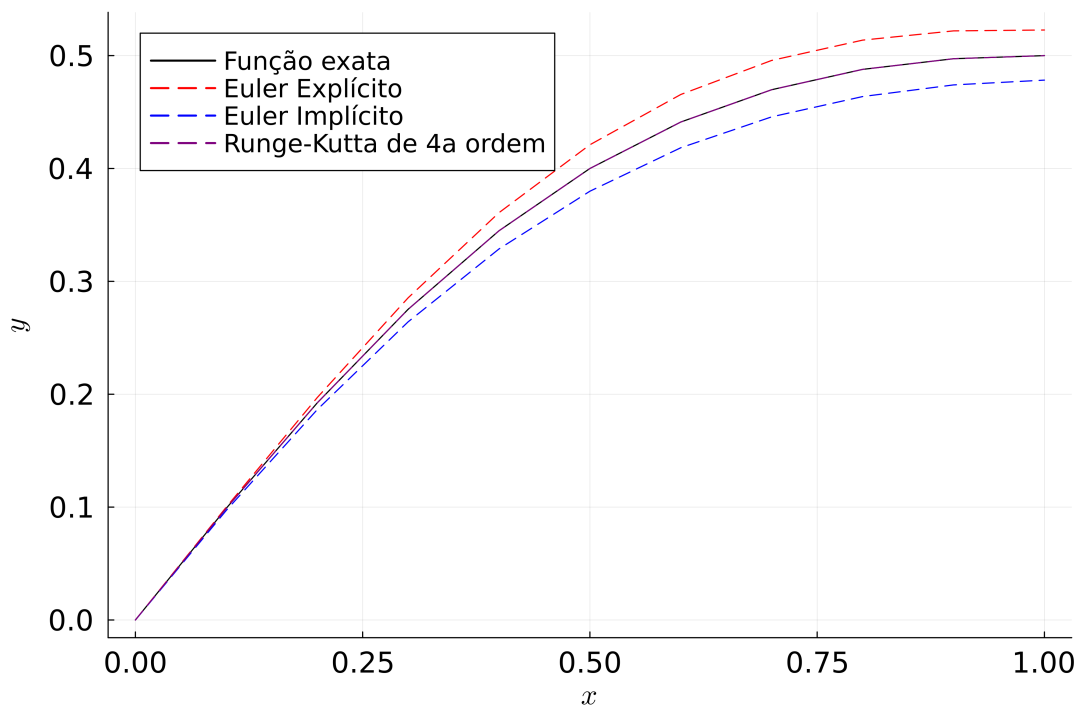


Figura 1: Aproximação do PVI do Exercício 1. com $h = 0.1$

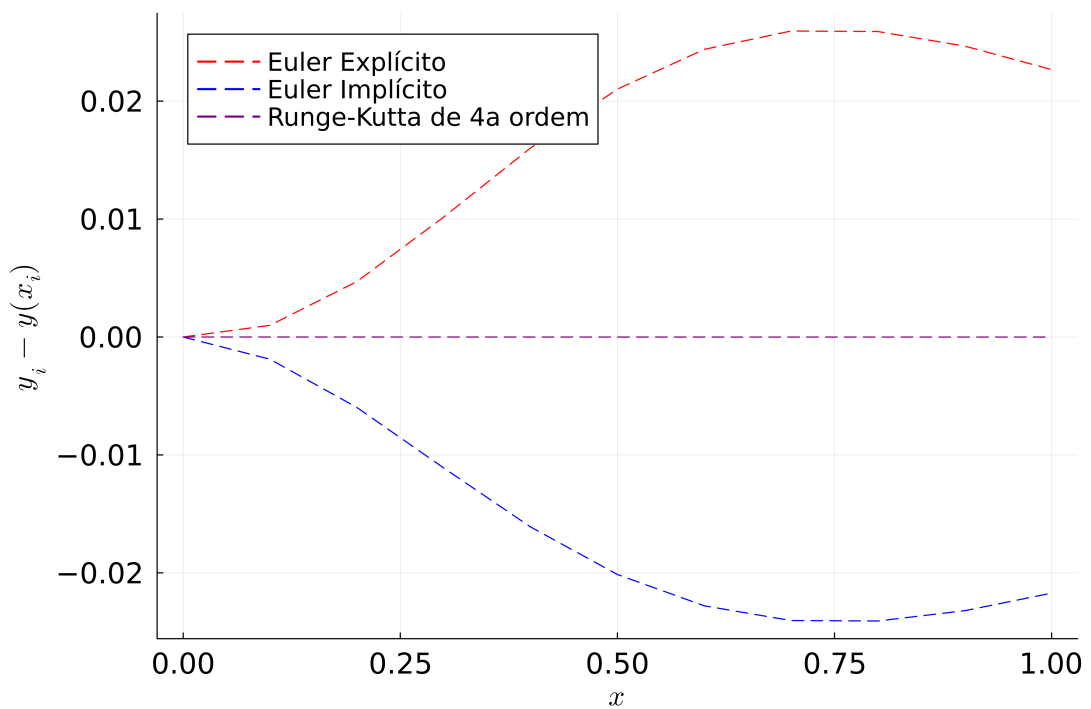


Figura 2: Erro de truncamento global da aproximação do PVI do Exercício 1. com $h = 0.1$

1.a. ii. $h = 0.01$

O comportamento dado pelo caso anterior foi muito atenuado com a redução do tamanho do passo, mas ainda há um erro perceptível dos métodos de Euler quando os comparamos com o método de Runge-Kutta de 4a ordem. O gráfico de erros parece idêntico, com a grande diferença sendo a escala do eixo das ordenadas. Na verdade,

essa tendência se mantém, não importa o quanto a malha seja refinada. Os gráficos estão dispostos na Figura 3 e Figura 4.

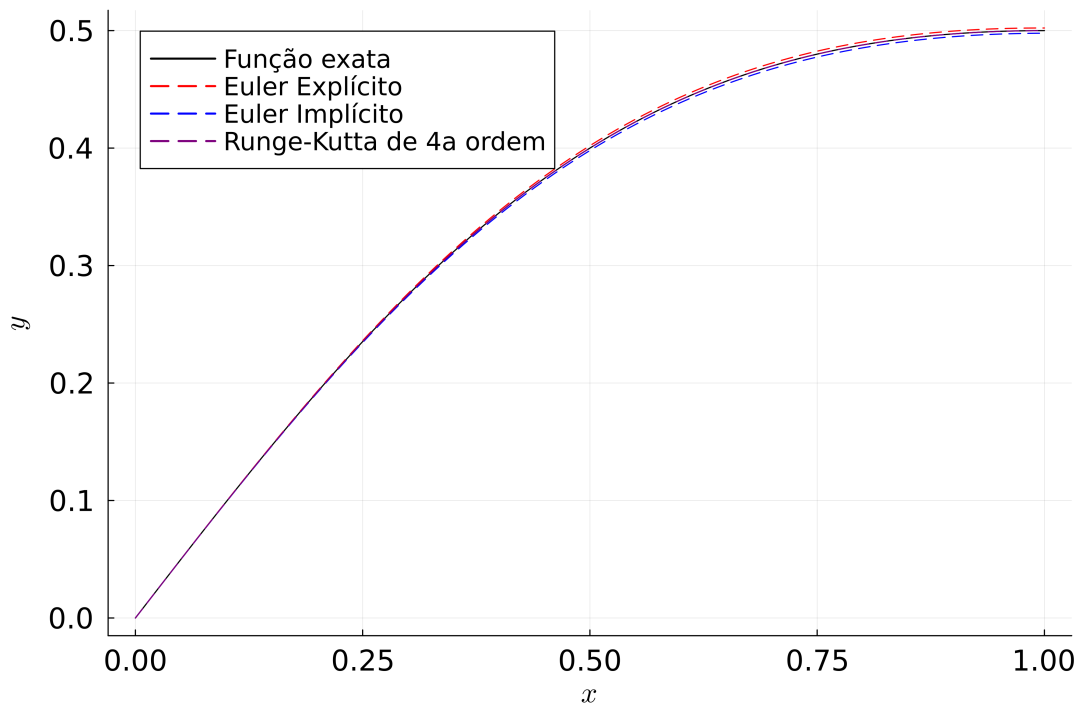


Figura 3: Aproximação do PVI do Exercício 1. com $h = 0.01$

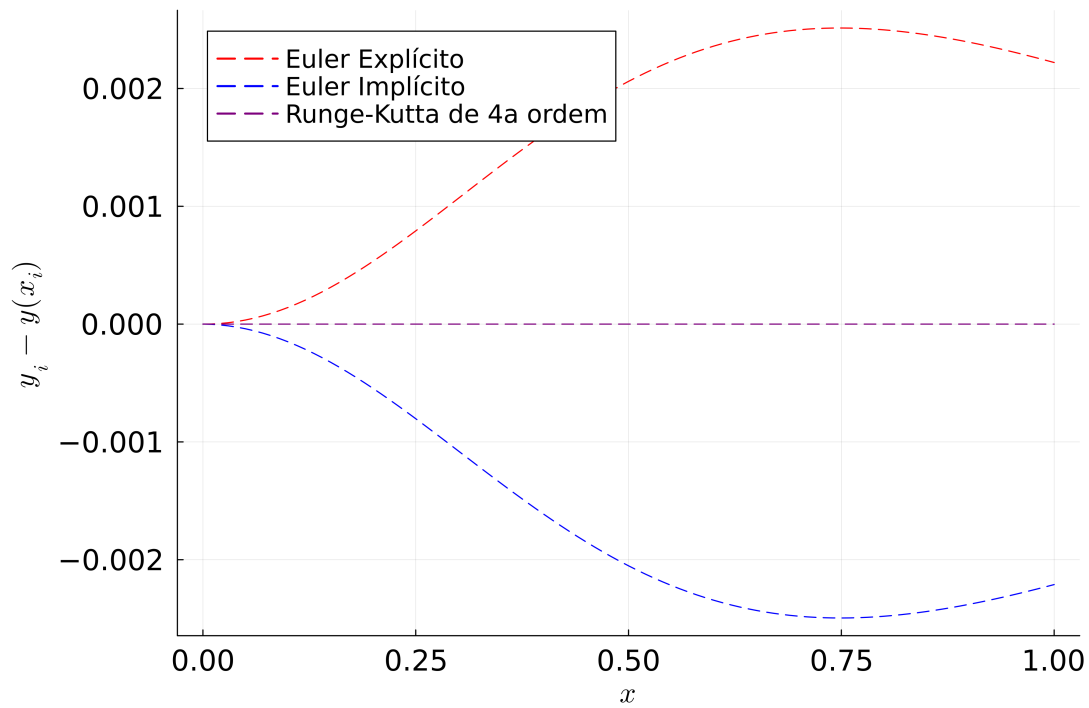


Figura 4: Erro de truncamento global da aproximação do PVI do Exercício 1. com $h = 0.01$

1.a. iii. $h = 0.001$

Nessa etapa, as soluções obtidas por cada método forma visualmente uma única linha, os erros são impercetíveis na escala geral. Como comentado anteriormente, o gráfico de erros globais continua se comportando da mesma maneira, com sua imagem cada vez mais restrita a um intervalo cada vez mais próximo de zero. Os resultados são dados pela Figura 5 e Figura 6.

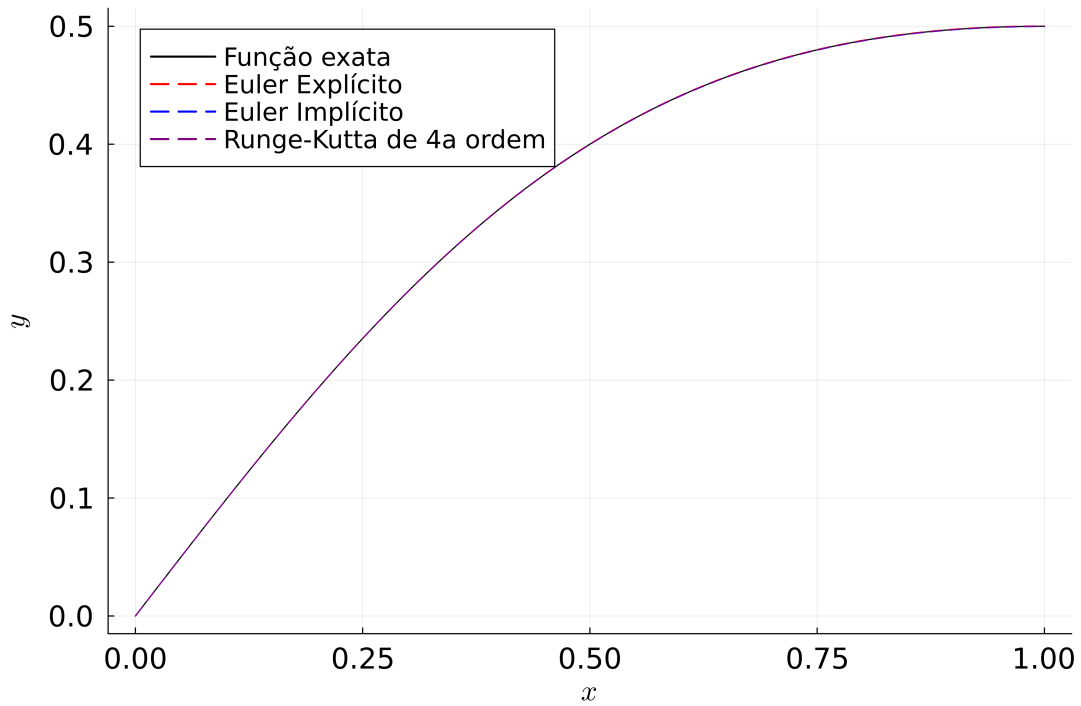


Figura 5: Aproximação do PVI do Exercício 1. com $h = 0.001$

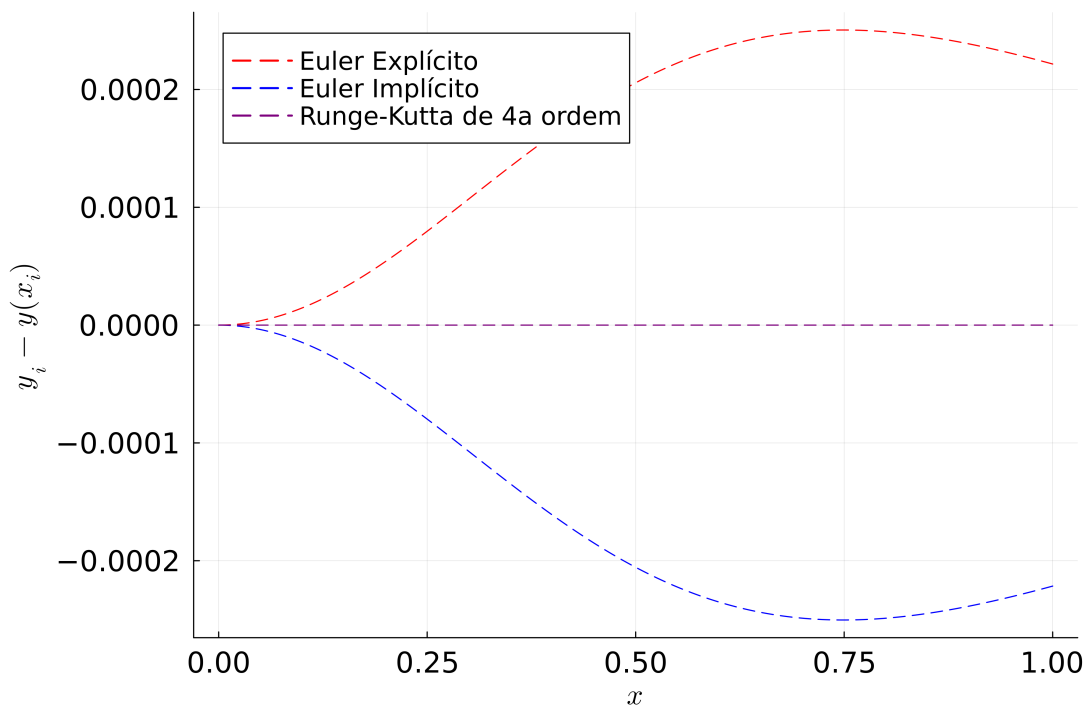


Figura 6: Erro de truncamento global da aproximação do PVI do Exercício 1. com $h = 0.001$

A Tabela 1 apresenta a média dos erros de truncamento locais para cada método, e cada tamanho de malha apresentado nesse relatório.

Método	h	Média do ETL
Euler Explícito	0.1	2.061e-03
Runge-Kutta de 4a Ordem	0.1	3.804e-07
Euler Implícito	0.1	1.974e-03
Euler Explícito	0.01	2.199e-05
Runge-Kutta de 4a Ordem	0.01	3.704e-12
Euler Implícito	0.01	2.189e-05
Euler Explícito	0.001	2.214e-07
Runge-Kutta de 4a Ordem	0.001	3.682e-17
Euler Implícito	0.001	2.213e-07

Tabela 1: Médias dos erros de truncamento locais para o Exercício 1.

1.b. Equiparando Euler com Runge-Kutta

Enunciado Repita o exercício anterior utilizando o método de Euler com diferentes valores de h , de tal forma que a solução seja tão próxima da solução obtida via método de Runge-Kutta quanto possível.

Solução Nesse item, faremos proveito do grande número de malhas abordados no item anterior. Uma primeira intuição para descrever um passo de malha h_e , a ser aplicado sobre o Método de Euler (tanto implícito quanto explícito) para obter um

resultado equivalente a aplicar o passo h_r sobre o método de Runge-Kutta de 4a ordem pode ser obtida apenas observando a Tabela 1: tomando $h_r = 0.1$, obtemos uma média de erro de truncamento local na casa de 10^{-7} . Quando olhamos para o desempenho dos métodos de Euler, um resultado parecido só irá ser atingido quando aplicamos o passo $h_e = 0.001$. Logo, seria preciso de uma malha 100 vezes mais refinada para obter um resultado equivalente.

No entanto, é possível ir além e descrever a relação entre a média do ETL de um método e a média do ETL de outro a partir de uma regressão linear. Como os passos da malha são escolhidos a partir de uma série geométrica, e as médias dos ETL são diretamente proporcionais a esses valores, essa regressão linear não é aplicada sobre uma escala linear, mas sobre uma escala di-log. Para demonstrar isso, a Figura 7 apresenta um gráfico di-log relacionando o refinamento da malha e a queda da média do ETL.

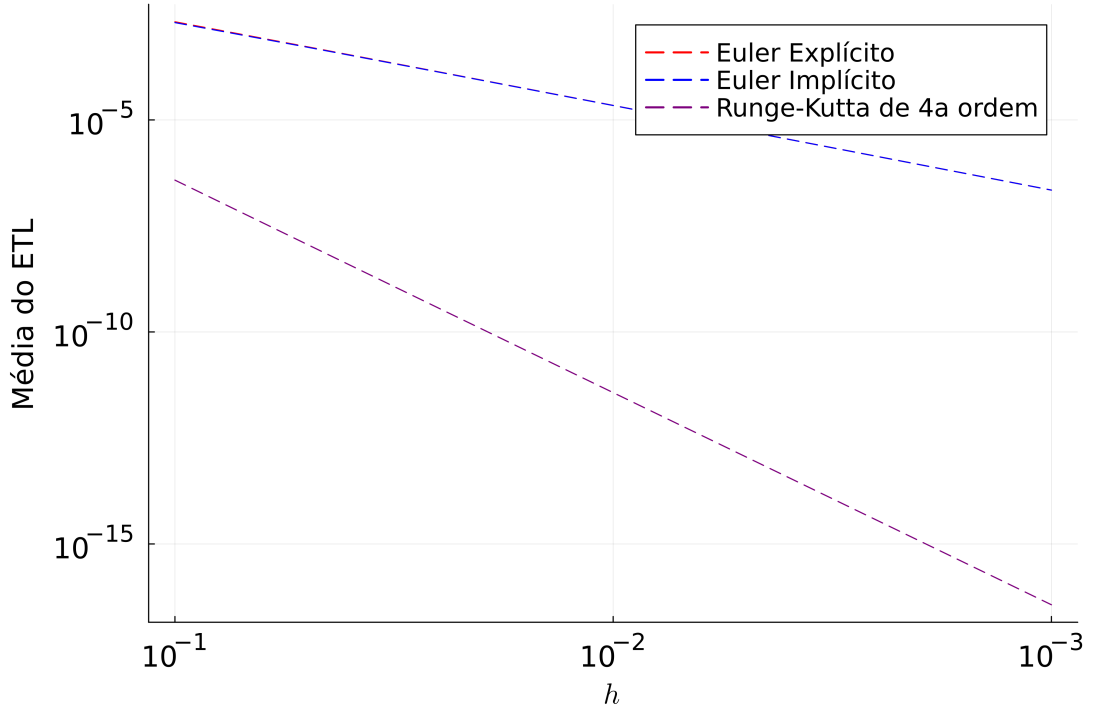


Figura 7: Queda da média dos ETL com refinamento da malha

Como as médias dos métodos de Euler são basicamente sobrepostas, iremos tratá-las como equivalentes, portanto apenas os valores para Euler Explícito serão utilizados a partir desse ponto. Queremos fazer uma regressão linear sobre os valores dos logaritmos de h e da média do ETL, portanto, são construídas as seguintes matrizes e vetores:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \ln(h_1) \\ 1 & \ln(h_2) \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \ln(h_{10}) \end{bmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \ln(\mu(e)_1) \\ \ln(\mu(e)_2) \\ \vdots \\ \ln(\mu(e)_{10}) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Para os conjuntos de médias de ETL do método de Euler Explícito e o método de Runge-Kutta de 4a ordem. É possível calcular o vetor de coeficientes $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ a partir de aproximação por mínimos quadrados:

$$\mathbf{x} = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} \Rightarrow \ln(\mu(e)_i) = a \ln(h_i) + b \quad (2)$$

Dessa forma, serão obtidos os coeficientes a_e, b_e, a_r, b_r que descreverão a relação entre média do ETL e passo da malha. Se queremos encontrar a relação entre h_e e h_r tal que essas médias sejam iguais:

$$\begin{aligned} \ln(\mu_e) &= \ln(\mu_r) \Rightarrow a_e \ln(h_e) + b_e = a_r \ln(h_r) + b_r \\ &\Rightarrow a_e \ln(h_e) = a_r \ln(h_r) + (b_r - b_e) \\ &\Rightarrow \ln(h_e) = \left(\frac{a_r}{a_e} \right) \ln(h_r) + \frac{b_r - b_e}{a_e} \\ \Rightarrow h_e &= \exp \left(\ln \left(h_r^{\left(\frac{a_r}{a_e} \right)} \right) + \frac{b_r - b_e}{a_e} \right) = h_r^{\left(\frac{a_r}{a_e} \right)} \exp \left(\frac{b_r - b_e}{a_e} \right) \\ \therefore h_e &= h_r^{\left(\frac{a_r}{a_e} \right)} \exp \left(\frac{b_r - b_e}{a_e} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

Os valores dos coeficientes resultantes foram:

$$a_e = 1.9873, b_e = -1.5846, a_r = 5.0054, b_r = -3.2668 \quad (4)$$

Então a expressão apresentada pela Equação (3) é aproximadamente:

$$h_e \approx h_r^{2.5187} 0.4289 \quad (5)$$

Podemos validar essa expressão ao tomar $h_r = 0.1$ e verificar o h_e obtido:

$$h_e \approx 0.1^{2.5187} 0.4289 = 1.2991 * 10^{-3} \quad (6)$$

Ao traçar uma linha horizontal sobre a média do ETL do método de Runge-Kutta quando $h = 0.1$ e traçando uma reta vertical sobre o eixo das abcissas sobre o ponto com $h = 1.2991 * 10^{-3}$, obtemos o gráfico apresentado pela Figura 8, o mesmo demonstrando que a nossa expressão atinge quase que perfeitamente a interseção de onde o método de Euler atingiu o mesmo erro que o método de Runge-Kutta.

1.c. Número de iterações obtido

Enunciado Compare o número de iterações, para esse exercício, entre o método de Euler e o de Runge-Kutta.

Solução Sabendo que o número de iterações sobre um determinado intervalo é igual ao número de elementos no intervalo $[a, b]$ discretizado, com exceção do primeiro, podemos descrever essa quantidade de iterações como:

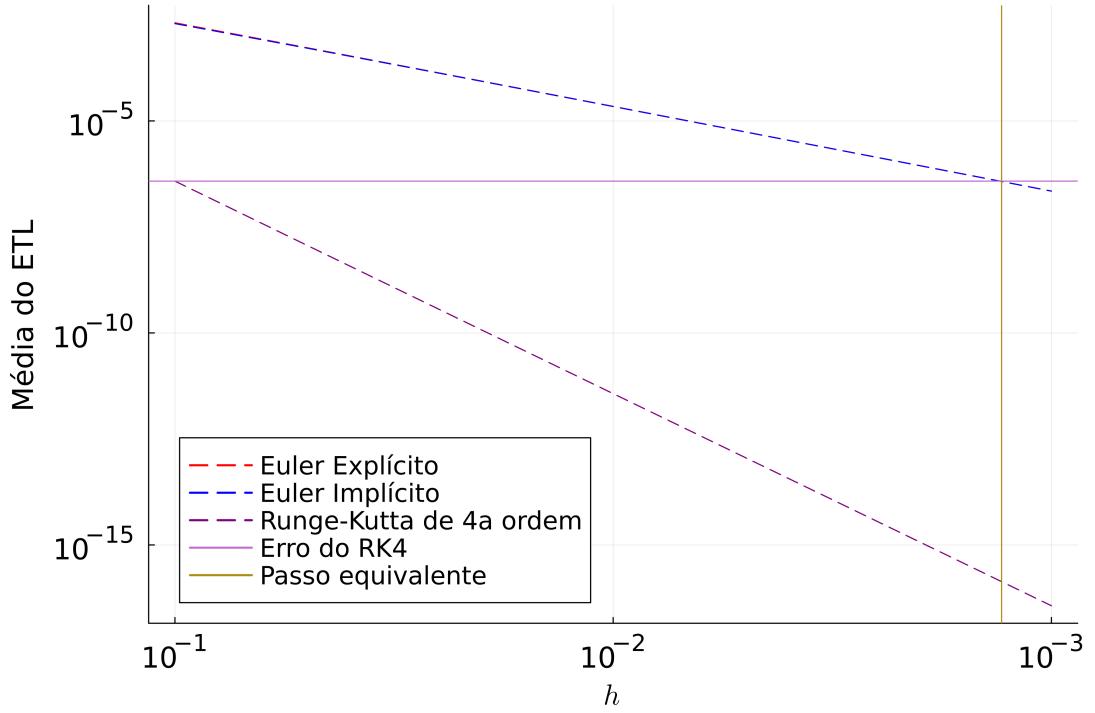


Figura 8: Queda da média dos ETL com refinamento da malha

$$n_i = \left\lfloor \frac{b-a}{h} \right\rfloor$$

Sabemos também a relação entre h_e, h_r , então, podemos descrever a quantidade de iterações do método de Euler (n_e) e do método de Runge-Kutta (n_r) e calcular a razão entre os dois valores:

$$n_e = \left\lfloor \left(\frac{1}{h_r^{2.5187} 0.4289} \right) (b-a) \right\rfloor, n_r = \left\lfloor \frac{b-a}{h_r} \right\rfloor$$

$$\therefore \frac{n_e}{n_r} = \left\lfloor \left(\frac{1}{h_r^{2.5187} 0.4289} \right) (b-a) \right\rfloor \left\lfloor \frac{b-a}{h_r} \right\rfloor^{-1}$$

Para prosseguir, ignoraremos a função piso para reduzir ainda mais a expressão:

$$\frac{n_e}{n_r} = \left(\frac{1}{h_r^{2.5187} 0.4289} \right) (b-a) \left(\frac{b-a}{h_r} \right)^{-1} = \frac{h_r}{h_r^{2.5187} 0.4289} = \frac{h_r^{-1.5187}}{0.4289}$$

Portanto, a razão entre o número de iterações necessário para atingir a mesma precisão é dada pela expressão:

$$\frac{n_e}{n_r} = \frac{h_r^{-1.5187}}{0.4289} \quad (7)$$

Para referência, com $h = 0.1$, o método de Runge-Kutta realiza 10 iterações, portanto, o número estimado de iterações que o método de Euler terá de realizar para obter uma precisão similar seria de aproximadamente $10 * \frac{0.1^{-1.5187}}{0.4289} \approx 769.7398 = 770$ iterações. Para referência, o resultado obtido com $h = 0.001$ realiza 1000 iterações.

2. Resolução numérica de PVI; Teste de estabilidade

Enunciado Resolva numericamente o PVI definido no intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{cases} y' = -y + x \\ y(0) = 1 \end{cases} \quad (8)$$

para diferentes valores de h . E discuta a convergência e a estabilidade do método numérico utilizado em questão.

Resolução: Solução Analítica Antes de avaliar a estabilidade de qualquer método, é necessário saber a solução analítica do PVI apresentado. A Equação Diferencial que define a função é uma EDO linear de primeira ordem, que pode ser escrita como $y' + y = x$. Dado o fator integrante $\mu(x) = e^{\int P(x)dx} = e^{\int 1dx} = e^x$, e multiplicando a EDO por esse fator integrante, obtemos:

$$e^x y' + e^x y = e^x x$$

pela regra do produto, sabe-se que

$$e^x y' + e^x y = \frac{d}{dx}(e^x y)$$

portanto essa expressão torna-se

$$\frac{d}{dx}(e^x y) = e^x x$$

ao integrar ambos os lados, obtemos:

$$e^x y = \int e^x x dx$$

o lado direito pode ser simplificado utilizando integração por partes, definindo $u = x$, de forma que $du = dx$ e $dv = e^x dx$ de forma que $v = e^x$, dessa forma:

$$\int e^x x dx = e^x x - \int e^x dx = e^x x - e^x + C$$

logo

$$y = x - 1 + C e^{-x}$$

como $y(0) = 1$, portanto $1 = -1 + C \Rightarrow C = 2$, resultando na solução analítica:

$$y(x) = x + 2e^{-x} - 1 \quad (9)$$

Resolução numérica Para esse exercício, foram comparadas as estabilidade dos métodos de Euler Explícito e Implícito. Isso pois um deles possui uma região de estabilidade bem definida, e o outro é estável independente do passo de malha escolhido. Foram comparadas malhas com passos $[0.1, 0.05, 0.025, 0.01]$, nesse relatório, são apresentados apenas os resultados para 0.1 e 0.01, para não torná-lo muito extenso.

De forma muito parecida com o exercício anterior, o comportamento de ambos os métodos foram muito parecidos independente da malha escolhida. O método de Euler Explícito tende subestimar o valor da função, enquanto a versão implícita costuma superestimar, como pode ser visto na Figura 9 e Figura 11. Os gráficos dos erros globais, dado pelas Figura 10 e Figura 12 deixam essa noção ainda mais perceptível.

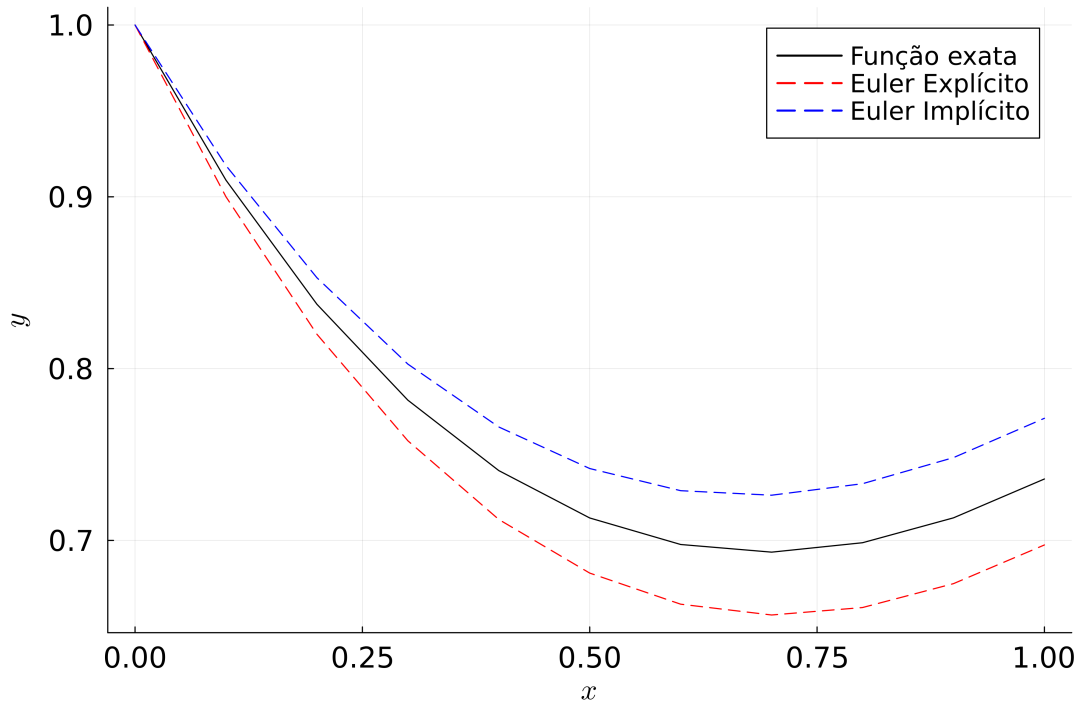


Figura 9: Aproximação do PVI do Exercício 2. com $h = 0.1$

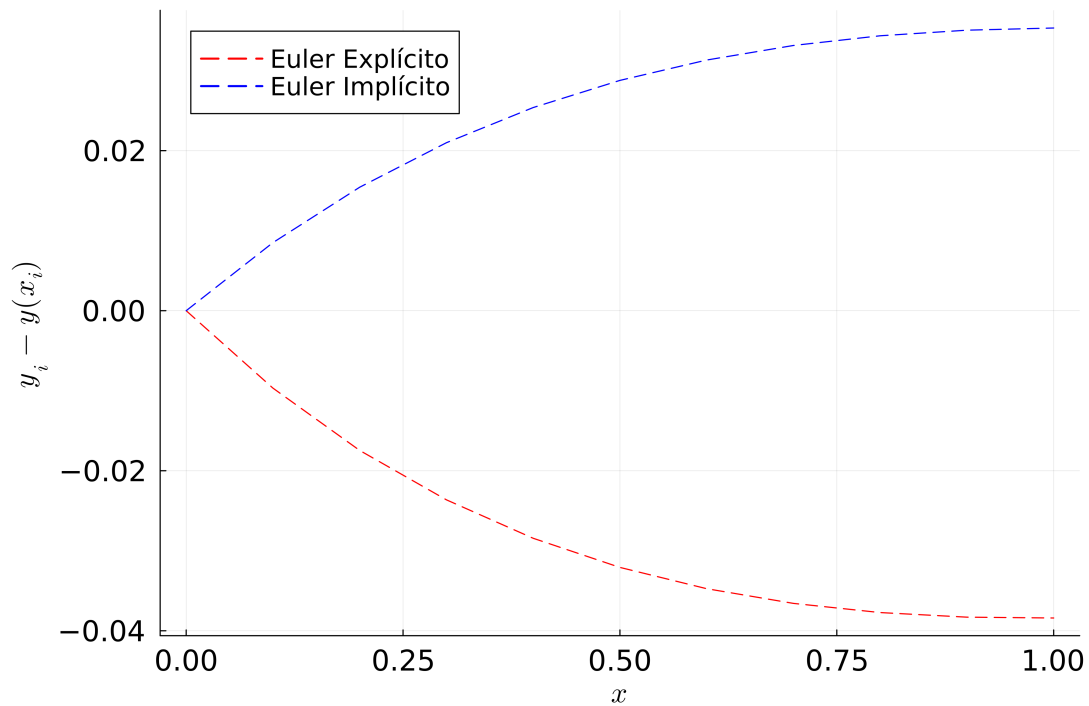


Figura 10: Erro de truncamento global da aproximação do PVI do Exercício 2. com $h = 0.1$

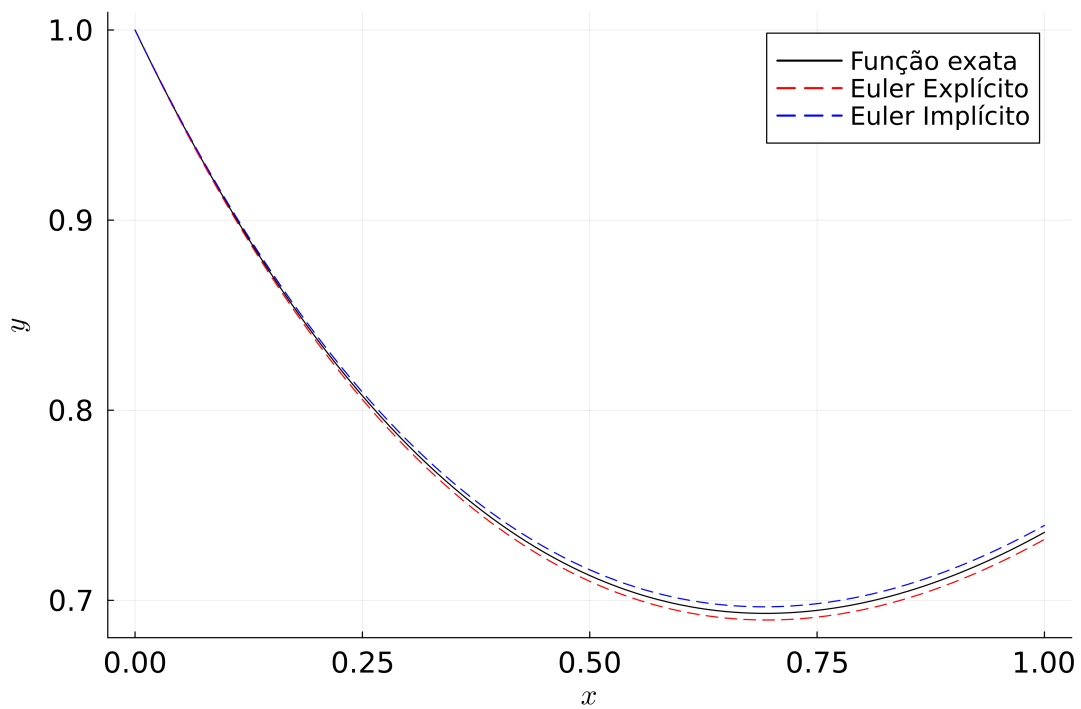


Figura 11: Aproximação do PVI do Exercício 2. com $h = 0.01$

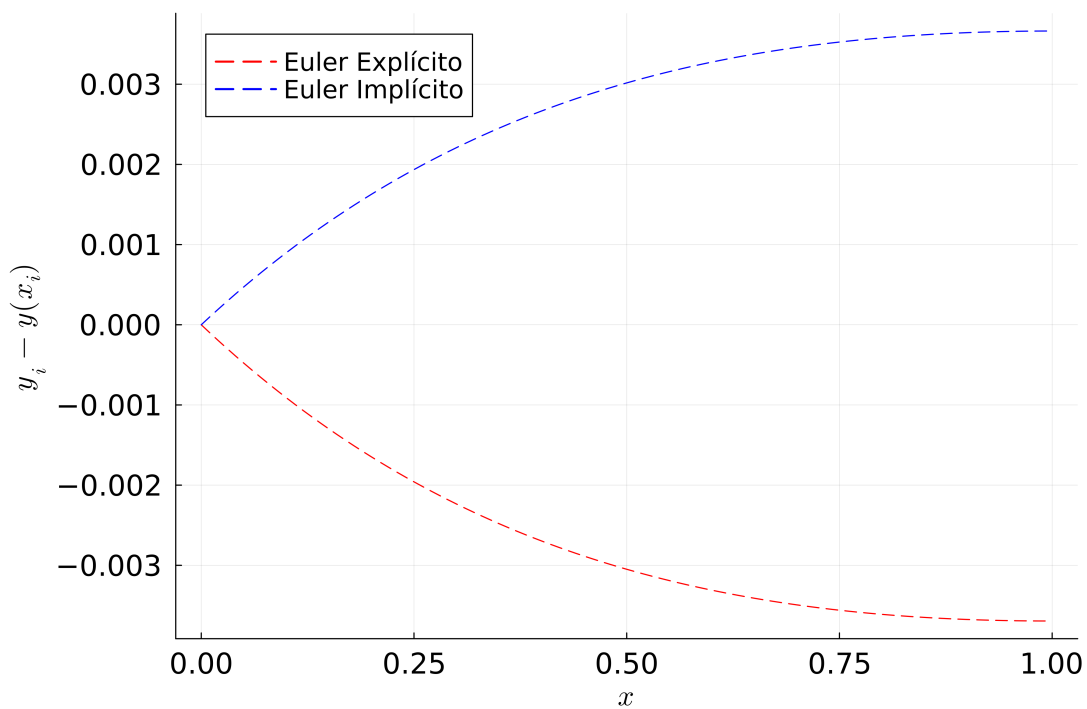


Figura 12: Erro de truncamento global da aproximação do PVI do Exercício 2. com $h = 0.01$

Teste da região de estabilidade Tendo em vista que a solução analítica possui um termo exponencial, podemos comparar o desempenho dos métodos para passos que fogem da região de estabilidade do método de Euler Explícito, que é dada por:

$$-2 \leq h\lambda \leq 0 \Rightarrow 0 \leq h \leq 2 \because \lambda = -1 \quad (10)$$

No entanto, o próprio intervalo de integração do PVI é menor que o passo de malha que foge dessa região de estabilidade. Portanto, para fazer essa demonstração, vamos ampliar esse intervalo de $[0, 1]$ para $[0, 20]$ e testar os passos de $[2.5, 2.0, 1.5]$ em ambos os métodos. Os resultados, apresentados pelas Figura 13, Figura 14 e Figura 15, respectivamente, deixam muito evidente a diferença no comportamento do método explícito conforme o passo adentra a região de estabilidade.

No primeiro caso, o erro global cresce de forma descontrolada, no segundo, o erro alterna de forma periódica, embora não cresça, e no último, o erro tende a ser neutralizado conforme a função cresce. Nota-se também a estabilidade do método implícito, que acompanha a solução analítica de forma muito mais próxima, independente do passo utilizado.

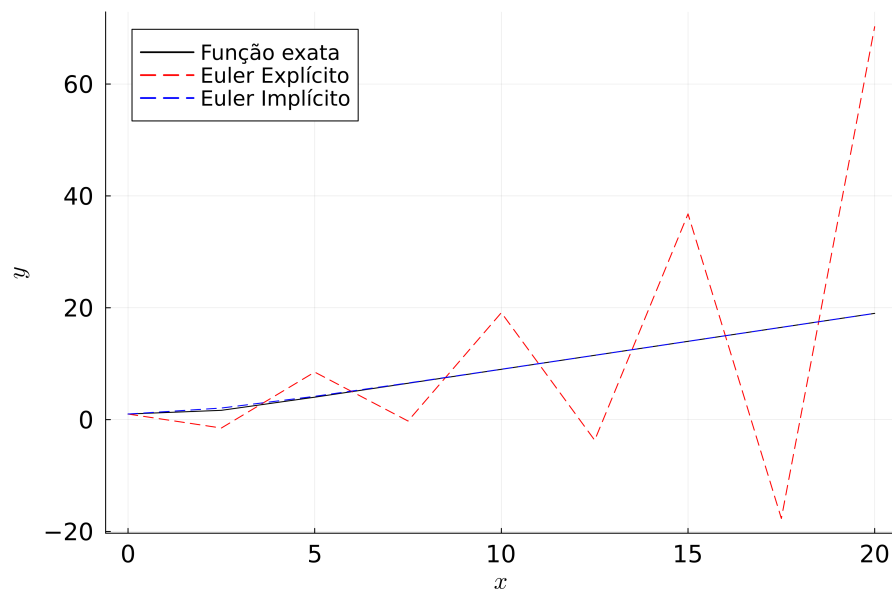


Figura 13: Aproximação do PVI do Exercício 2. com $h = 2.5$

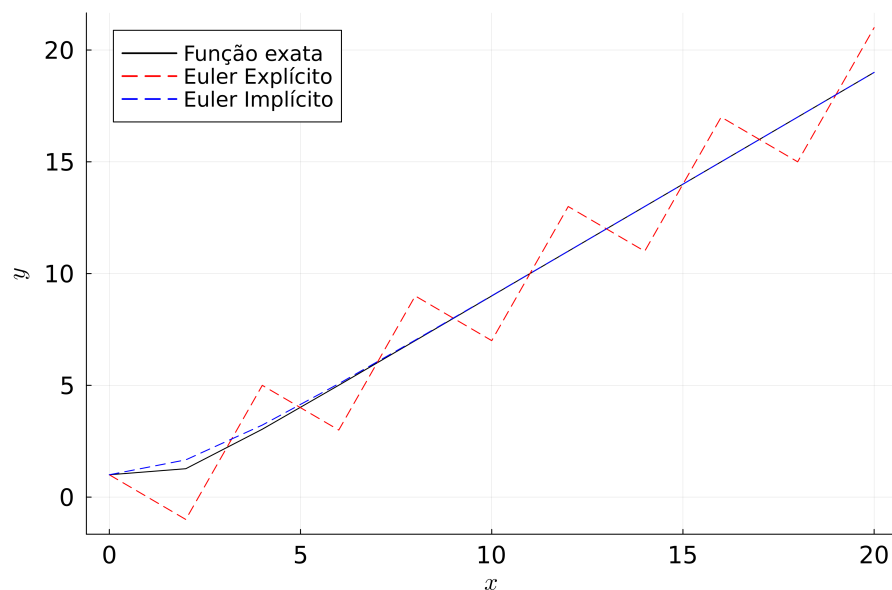


Figura 14: Aproximação do PVI do Exercício 2. com $h = 2.0$

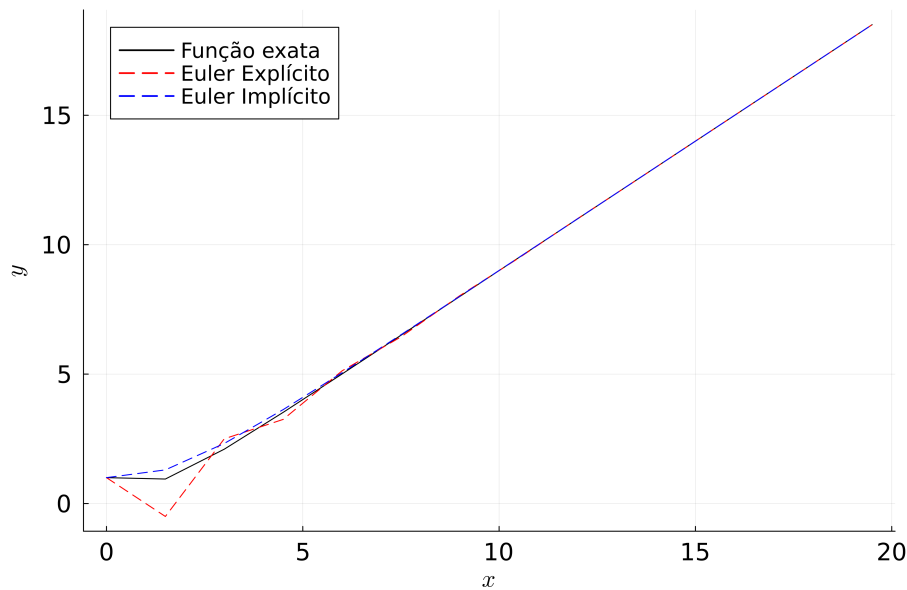


Figura 15: Aproximação do PVI do Exercício 2. com $h = 1.5$

3. PVF aproximado por diferenças centradas

Enunciado Considere o seguinte PVF definido no intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 2x \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases} \quad (11)$$

Aplique o método de diferenças finitas, utilizando diferenças centrais para as derivadas, e resolva numericamente esta equação.

Resolução A forma geral de resolução de PVF a partir de diferenças centradas é definida ao identificar os coeficientes de cada parte da equação geral. A equação dada tem coeficiente unitário em y'' , portanto, é fácil compará-la com a forma geral e extrair as funções que determinam os coeficientes:

$$p(x) = x \quad q(x) = 1 \quad r(x) = 2x \quad (12)$$

aplicando uma discretização onde o domínio é dividido em $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$, podemos escrever as funções coeficientes em torno de $x = x_i$ e os elementos que compõem a matriz esparsa do sistema linear como:

$$a_i = 1 + \frac{h^2}{2} \quad b_i = \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{x_i h}{2}\right) \quad c_i = \left(\frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{x_i h}{2}\right) \quad (13)$$

Onde

- $\mathbf{b} = (-b_2, \dots, -b_n)$ compõe a diagonal imediatamente à esquerda da diagonal principal;
- $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ compõe a diagonal principal (perceba que esse valor não depende de x_i , sendo portanto constante);

- $\mathbf{c} = (-c_1, \dots, -c_{n-1})$ compõe a diagonal imediatamente à direita da diagonal principal.

Para a formação do vetor \mathbf{r} , resultado a multiplicação da matriz A pelo resultado \mathbf{y} , utiliza-se

$$r_i = \begin{cases} -h^2 x_1 + (b_1)(1) & i = 1 \\ -h^2 x_i & i \in [2, n-1] \\ -h^2 x_i + (c_n)(0) & i = n \end{cases} \quad (14)$$

devido às condições de fronteira.

Utilizando $h = 10^{-5}$ e realizando a resolução do sistema linear $\mathbf{y} = A \setminus \mathbf{r}$, obtém-se o resultado apresentado pelo gráfico abaixo:

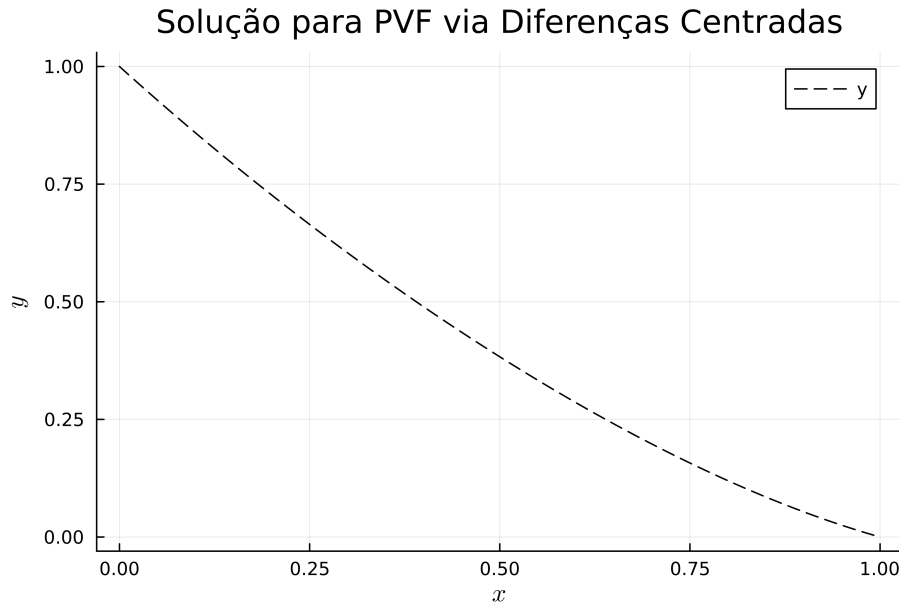


Figura 16: Resultado obtido para o Exercício 3

4. PVF aproximado por outras diferenças finitas

Resolva numericamente o PVF definido no intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{cases} y'' - y' + xy = e^x(x^2 + 1) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = e \end{cases} \quad (15)$$

Aplice o método de diferenças finitas, utilizando as fórmulas avançada, atrasada e centrada para as derivadas, e discuta as soluções aproximadas encontradas.