



UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
“JÚLIO DE MESQUITA FILHO”

FCT - Faculdade de Ciências e Tecnologia
DMC - Departamento de Matemática e Computação
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Trabalho Prático 2
Métodos Computacionais para Equações Diferenciais

Aluno: Guilherme Cesar Tomiasi

Professora: Analice Costacurta Brandi

Presidente Prudente
03 de junho de 2025

Sumário

1) Resolução de Equação do Calor	3
1.a) Aplicando discretizações	3
1.a.a) Método Explícito	3
1.a.b) Método Implícito	4
1.a.c) Crank-Nicolson	4
1.b) Soluções numéricas nos pontos solicitados	5
1.c) Erro relativo máximo, Norma L2	7
1.d) Análises de consistências	8
1.d.a) Método Explícito	8
1.d.b) Método implícito	9
1.d.c) Crank-Nicolson	10
1.e) Análise de estabilidades	12
1.e.a) Método explícito	12
1.e.b) Método implícito	13
1.e.c) Crank-Nicolson	13
1.f) Teste prático da estabilidade dos métodos	14
1.g) Tempos de execução	18
2) Equação do Calor sobre uma barra delgada	18
2.a) Discretizações	19
2.a.a) Método Explícito	19
2.a.b) Método Implícito	19
2.a.c) Método de Crank-Nicolson	19
2.b) Mapa de calor	19
2.c) Erro relativo máximo, Norma L2	21
2.d) Teste de estabilidades	23
2.e) Tempos de execução	26

1) Resolução de Equação do Calor

Enunciado Considere a equação do calor, com os parâmetros $L = 1$ e $\alpha = 1$ e as seguintes condições auxiliares:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0 \quad (1)$$

Condições de contorno:

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (2)$$

Condição inicial:

$$u(x, 0) = \sin(\pi x) \quad (3)$$

- Resolver numericamente o problema utilizando os métodos Explícito, Implícito e Crank-Nicolson.
- Comparar a solução numérica com a solução analítica:

$$u(x, t) = \sin(\pi x) e^{-\pi^2 t} \quad (4)$$

- Para cada método:
 - Plotar soluções numéricas em $t = 0.8, 0.5, 0.1$;
 - Calcular o erro relativo máximo e o erro em norma L^2 ;
 - Verificar consistência, estabilidade e custo computacional dos métodos numéricos utilizados no problema.

Solução Na solução desse exercício e no próximo, será utilizada uma notação dada por $u(t, x) \rightarrow u_{t,x}$ ao invés de $u_{i,j}$. Dessa forma, na matriz U , a primeira linha representa o primeiro momento no tempo, e cada coluna representa um local específico.

1.a) Aplicando discretizações

Nessa seção, iremos obter a expressão matemática que descreve como um valor de $u_{t,x}$ varia ao longo do tempo.

1.a.a) Método Explícito

Aplicando diferença finita avançada para discretizar a derivada temporal e diferença finita centrada para a derivada espacial, obtemos o seguinte passo de iteração:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{u_{t+1,x} - u_{t,x}}{k} &= \alpha \left(\frac{u_{t,x-1} - 2u_{t,x} + u_{t,x+1}}{h^2} \right) \\ \Rightarrow u_{t+1,x} &= u_{t,x} + \frac{\alpha k}{h^2} (u_{t,x-1} - 2u_{t,x} + u_{t,x+1}) \\ u_{t+1,x} &= u_{t,x} + \sigma (u_{t,x-1} - 2u_{t,x} + u_{t,x+1}) \end{aligned} \quad (5)$$

1.a.b) Método Implícito

De forma análoga, podemos utilizar a diferença atrasada para discretizar a derivada temporal. O efeito prático na fórmula obtida pode ser notado no lado direito, onde são utilizados valores do mesmo passo temporal que se deseja obter o valor:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{u_{t+1,x} - u_{t,x}}{k} &= \alpha \left(\frac{u_{t+1,x-1} - 2u_{t+1,x} + u_{t+1,x+1}}{h^2} \right) \\ u_{t,x} &= u_{t+1,x} - \frac{\alpha k}{h^2} (u_{t+1,x-1} - 2u_{t+1,x} + u_{t+1,x+1}) \\ u_{t,x} &= -\sigma u_{t+1,x-1} + (1 + 2\sigma) u_{t+1,x} - \sigma u_{t+1,x+1} \end{aligned} \quad (6)$$

Como os valores do próximo passo temporal não podem ser descritos de forma explícita, é necessário formar um sistema linear que descreve cada um dos valores a partir da Equação 6. Tomando $\beta = 1 + 2\sigma$, podemos descrever os valores no interior do domínio a partir de:

$$\begin{pmatrix} \beta & -\sigma & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma & \beta & -\sigma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\sigma & \beta & -\sigma & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\sigma & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{t+1,2} \\ u_{t+1,3} \\ u_{t+1,4} \\ \vdots \\ u_{t+1,N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma u_{t+1,1} + u_{t,2} \\ u_{t,3} \\ u_{t,4} \\ \vdots \\ u_{t,N-1} + \sigma u_{t+1,N} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Os termos em vermelho apresentam a contribuição dos valores presentes na fronteira, que são conhecidos previamente, portanto, são movidos para o vetor resultado da multiplicação matricial. No caso do exercício, esses valores são iguais a 0, podendo ser omitidos do sistema.

1.a.c) Crank-Nicolson

O método de Crank-Nicolson mantém uma discretização temporal avançada, mas utiliza uma média aritmética da discretização centrada no espaço para melhorar a precisão obtida. Dessa maneira, obtemos a seguinte relação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{u_{t+1,x} - u_{t,x}}{k} &= \\ \frac{\alpha}{2} \left(\frac{u_{t+1,x-1} - 2u_{t+1,x} + u_{t+1,x+1}}{h^2} + \frac{u_{t,x-1} - 2u_{t,x} + u_{t,x+1}}{h^2} \right) \\ u_{t,x} &= u_{t+1,x} - \frac{\alpha k}{2h^2} (u_{t+1,x-1} - 2u_{t+1,x} + u_{t+1,x+1} + u_{t,x-1} - 2u_{t,x} + u_{t,x+1}) \\ u_{t,x} &= u_{t+1,x} - \lambda u_{t+1,x-1} + 2\lambda u_{t+1,x} - \lambda u_{t+1,x+1} - \lambda u_{t,x-1} + 2\lambda u_{t,x} - \lambda u_{t,x+1} \\ &\quad \lambda u_{t,x-1} + (1 - 2\lambda) u_{t,x} + \lambda u_{t,x+1} = \\ &\quad -\lambda u_{t+1,x-1} + (1 + 2\lambda) u_{t+1,x} - \lambda u_{t+1,x+1} \end{aligned} \quad (8)$$

De forma parecida ao caso do método implícito, podemos formar um sistema linear para descobrir os termos no passo temporal $t + 1$. Tomando $\varphi = 1 + 2\lambda$; $\psi = 1 - 2\lambda$:

$$\begin{pmatrix} \varphi & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & \varphi & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \varphi & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{t+1,2} \\ u_{t+1,3} \\ u_{t+1,4} \\ \vdots \\ u_{t+1,N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda u_{t+1,1} + \lambda u_{t,1} + \psi u_{t,2} + \lambda u_{t,3} \\ \lambda u_{t,2} + \psi u_{t,3} + \lambda u_{t,4} \\ \lambda u_{t,3} + \psi u_{t,4} + \lambda u_{t,5} \\ \vdots \\ \lambda u_{t,N-2} + \psi u_{t,N-1} + \lambda u_{t,N} + \lambda u_{t+1,N} \end{pmatrix} \quad (9)$$

Onde novamente, os termos em vermelho descrevem a contribuição dos valores na fronteira para o cálculo do próximo passo. Como esse valor é 0 em qualquer instante temporal, tanto os valores no instante t quanto instante $t + 1$ são anulados, podendo ser omitidos.

1.b) Soluções numéricas nos pontos solicitados

Os resultados obtidos para cada um dos métodos foram dados pelas Figura 1, Figura 2 e Figura 3, respectivamente.

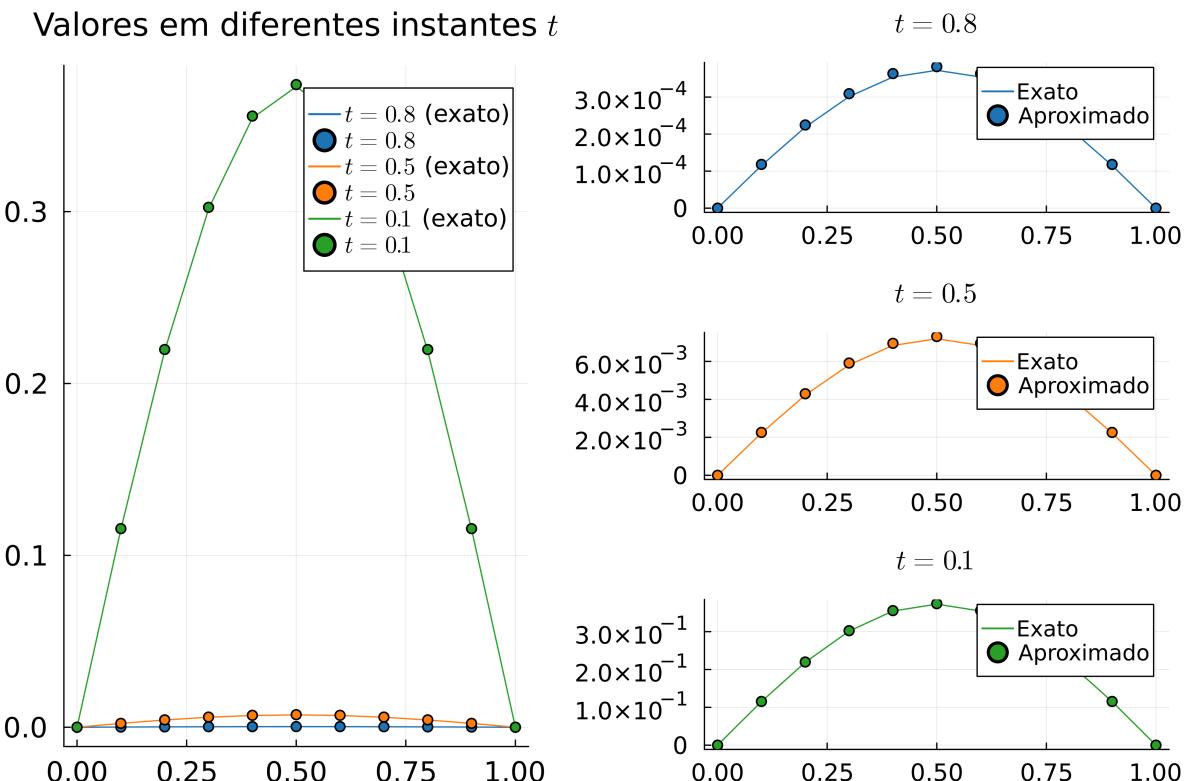


Figura 1: Resolução nos pontos solicitados; **Método Explícito**

Valores em diferentes instantes t

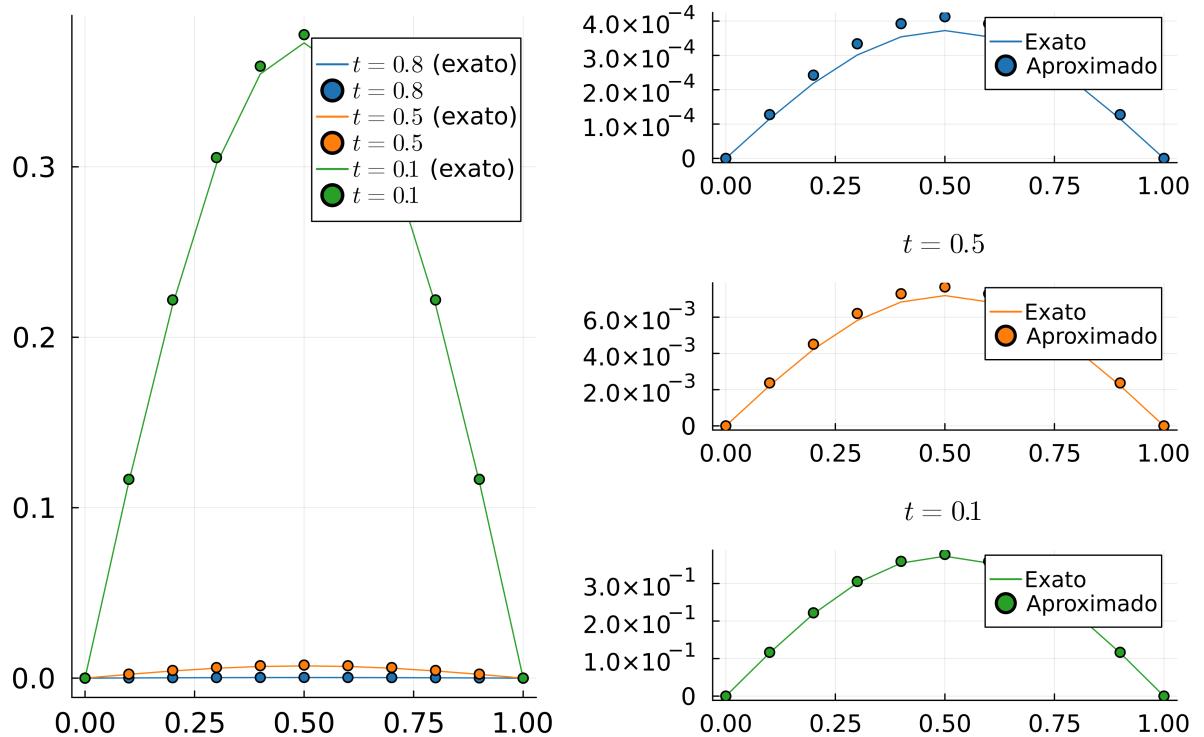


Figura 2: Resolução nos pontos solicitados; **Método Implícito**

Valores em diferentes instantes t

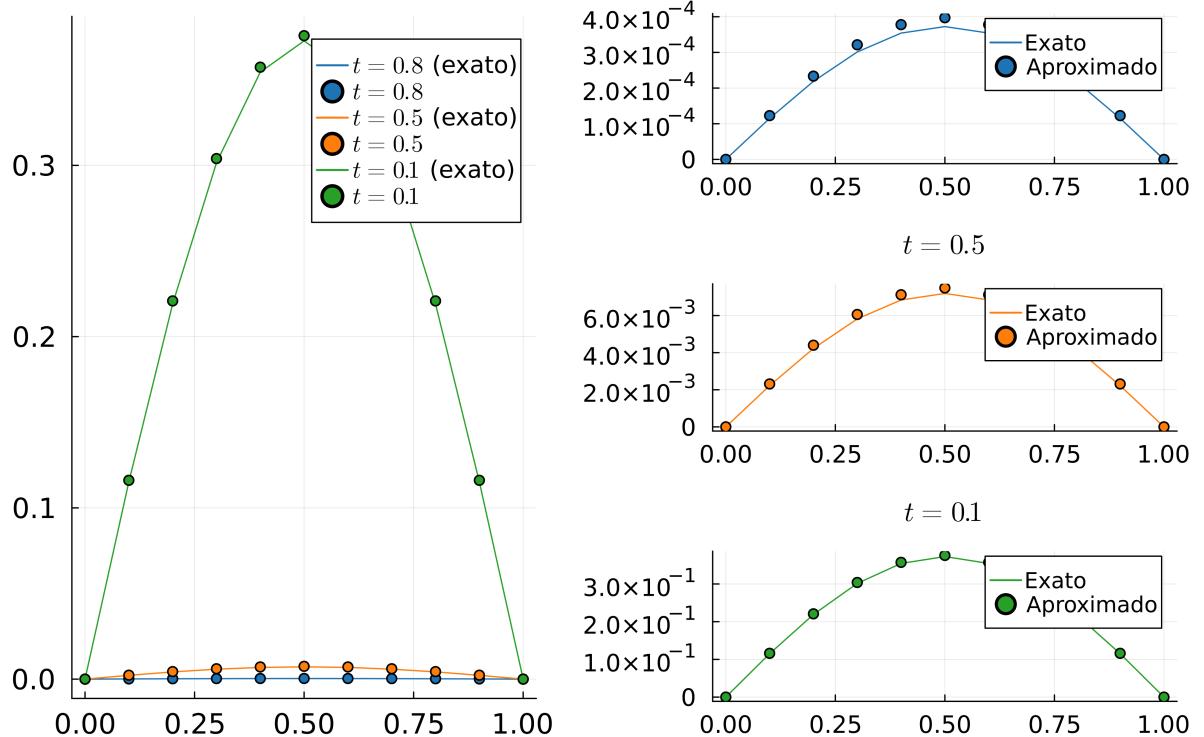


Figura 3: Resolução nos pontos solicitados; **Método de Crank-Nicolson**

1.c) Erro relativo máximo, Norma L2

Na mesma ordem, os erros para cada um dos métodos estão dispostos nas Figura 4, Figura 5 e Figura 6, respectivamente.

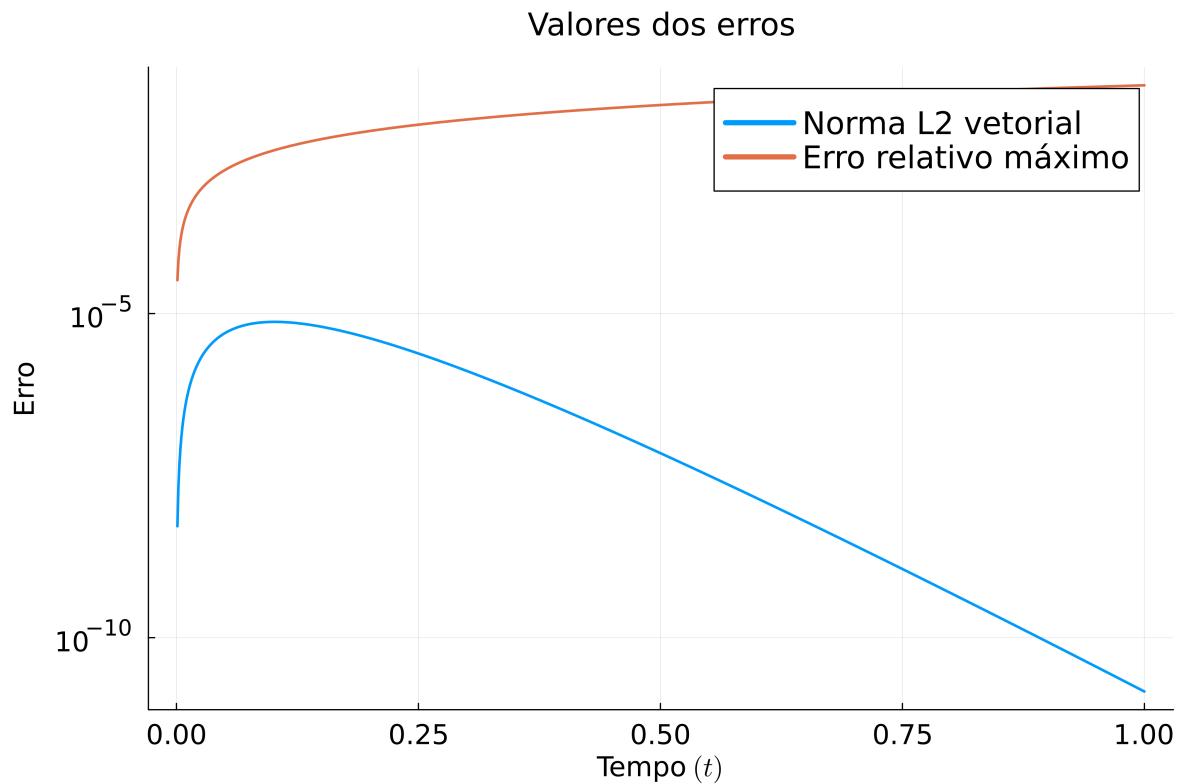


Figura 4: Erro obtido pelo **Método Explícito**

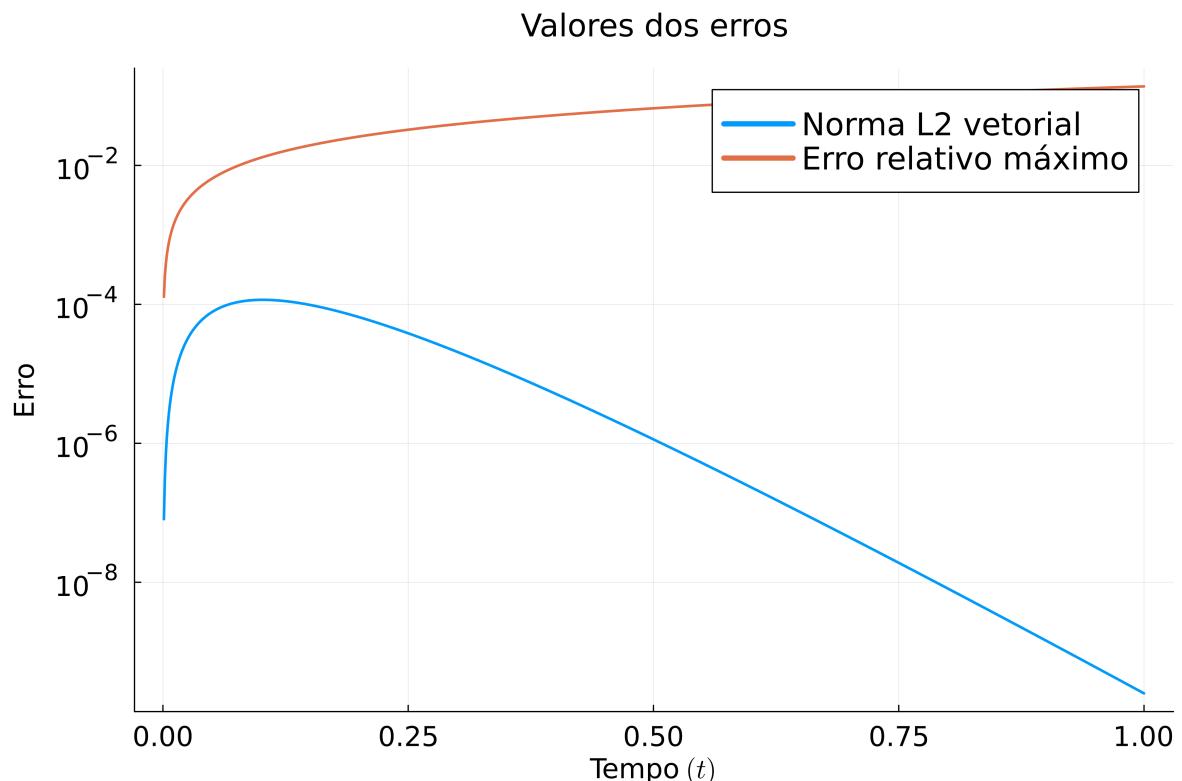


Figura 5: Erro obtido pelo **Método Implícito**

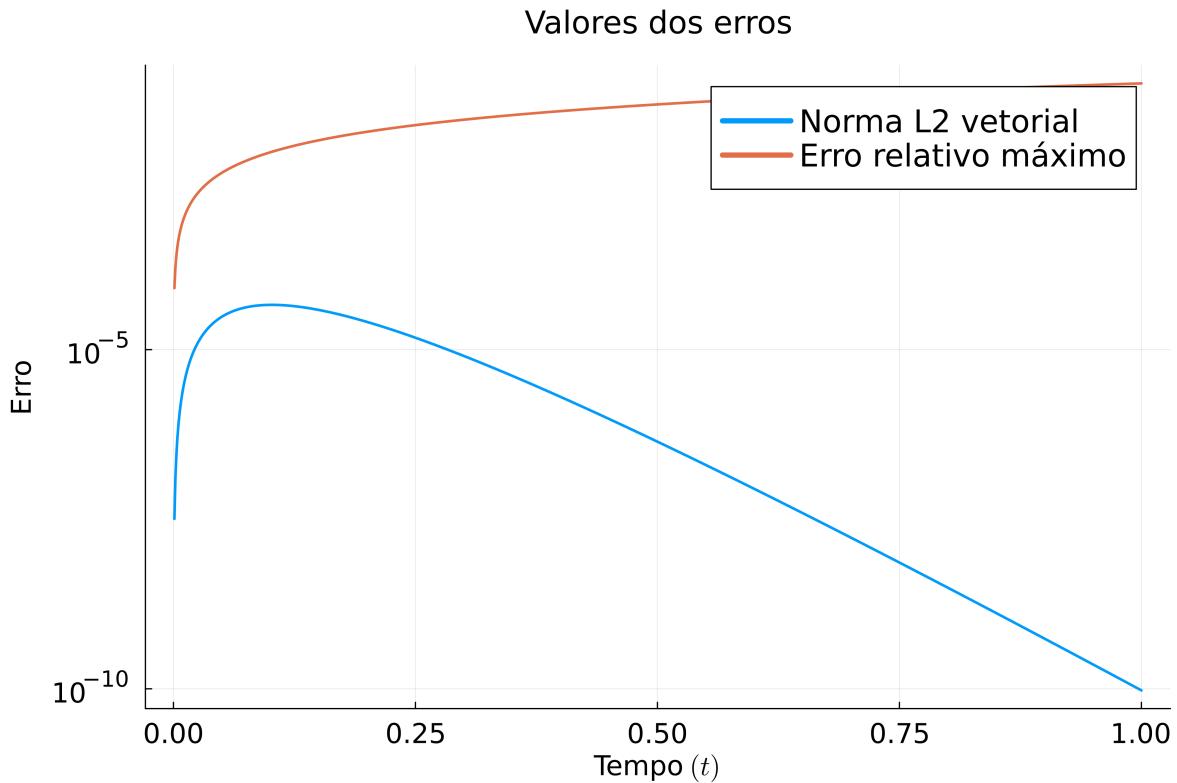


Figura 6: Erro obtido pelo **Método de Crank-Nicolson**

De maneira surpreendente, o erro que obteve menor valor ao longo da resolução foi o método explícito. Isso não é esperado dado que o erro de Crank-Nicolson, por possuir ordem superior aos métodos explícito e implícito, costuma oferecer uma melhor aproximação. Não foi encontrado nenhum erro específico no código que pudesse explicar esse comportamento.

Geralmente, erros no processo de discretização costumam gerar erros grotescos, que não é o caso observado. Dessa forma, é possível imaginar que talvez esse erro esteja associado ao processo resolução do sistema esparsa, feito por uma biblioteca externa. Também ser advindo de arredondamentos, visto que, para cumprir com o critério de estabilidade para o método explícito (que veremos futuramente), foi utilizado um valor consideravelmente baixo para o k .

1.d) Análises de consistências

Nessa seção, avaliamos a consistência de cada método utilizado. Um método é consistente caso seu erro tenda a zero quando as diferenças entre pontos da malha também tendem a zero. Para obter uma notação mais concisa, adotaremos u^t para representar $\frac{\partial u}{\partial t}$, u^x para representar $\frac{\partial u}{\partial x}$, u^{tt} para representar $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, e assim por diante.

1.d.a) Método Explícito

Dada a discretização obtida pelo método explícito, dada anteriormente pela Equação 5:

$$u_{t+1,x} = u_{t,x} + \sigma(u_{t,x-1} - 2u_{t,x} + u_{t,x+1})$$

se escrevermos os termos $u_{t+1,x}, u_{t,x+1}, u_{t,x-1}$ em torno de $u_{t,x}$, a partir de expansões da Série de Taylor:

$$u_{t+1,x} = u_{t,x} + ku^t(t, x) + \frac{k^2}{2}u^{tt}(\varepsilon_1, x) \quad (10)$$

$$\begin{aligned} u_{t,x+1} &= u_{t,x} + hu^x(t, x) + \frac{h^2}{2}u^{xx}(t, x) \\ &\quad + \frac{h^3}{6}u^{xxx}(t, x) + \frac{h^4}{24}u^{xxxx}(t, \varepsilon_2) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} u_{t,x-1} &= u_{t,x} - hu^x(t, x) + \frac{h^2}{2}u^{xx}(t, x) \\ &\quad - \frac{h^3}{6}u^{xxx}(t, x) + \frac{h^4}{24}u^{xxxx}(t, \varepsilon_3) \end{aligned} \quad (12)$$

Ao substituir as três expressões na equação do método em si, obtemos a seguinte expressão, que pode ser simplificada ao anular os termos que possuem cores iguais:

$$\begin{aligned} \textcolor{orange}{u_{t,x}} + ku^t(t, x) + \frac{k^2}{2}u^{tt}(\varepsilon_1, x) &= \textcolor{orange}{u_{t,x}} + \frac{\alpha k}{h^2} \\ \left[\left(\textcolor{red}{u_{t,x}} - hu^x(t, x) + \frac{h^2}{2}u^{xx}(t, x) - \frac{h^3}{6}u^{xxx}(t, x) + \frac{h^4}{24}u^{xxxx}(t, \varepsilon_3) \right) \right. \\ \left. - 2\textcolor{red}{u_{t,x}} + \right. \\ \left. \left(\textcolor{red}{u_{t,x}} + hu^x(t, x) + \frac{h^2}{2}u^{xx}(t, x) + \frac{h^3}{6}u^{xxx}(t, x) + \frac{h^4}{24}u^{xxxx}(t, \varepsilon_2) \right) \right] \end{aligned}$$

o que resulta em:

$$ku^t(t, x) + \frac{k^2}{2}u^{tt}(\varepsilon_1, x) = \alpha k \left(u^{xx}(t, x) + \frac{h^2}{12}u^{xxxx}(t, \varepsilon_4) \right)$$

dividindo todos os termos por k :

$$\begin{aligned} u^t(t, x) + \frac{k}{2}u^{tt}(\varepsilon_1, x) &= \alpha u^{xx}(t, x) + \alpha \frac{h^2}{12}u^{xxxx}(t, \varepsilon_4) \\ \Rightarrow \textcolor{blue}{u^t(t, x)} &= \alpha u^{xx}(t, x) - \frac{k}{2}u^{tt}(\varepsilon_1, x) + \alpha \frac{h^2}{12}u^{xxxx}(t, \varepsilon_4) \end{aligned} \quad (13)$$

Onde a porção em azul representa o problema original, a porção em vermelho representa a parte do erro dependente de k e o trecho laranja laranja a parte do erro dependente de h . Como ambas as porções do erro tendem a 0 quando k, h tendem a 0, logo o método é **incondicionalmente consistente**.

1.d.b) Método implícito

Dada a discretização obtida pelo método implícito, descrita por uma simplificação da expressão abaixo:

$$u_{t,x} = u_{t+1,x} - \frac{\alpha k}{h^2} (u_{t+1,x-1} - 2u_{t+1,x} + u_{t+1,x+1})$$

Ao subtrair todos os índices temporais em uma unidade:

$$u_{t-1,x} = u_{t,x} - \frac{\alpha k}{h^2} (u_{t,x-1} - 2u_{t,x} + u_{t,x+1})$$

Como já sabemos a expansão em torno de $u_{t,x-1}, u_{t,x+1}$, basta expandirmos $u_{t-1,x}$:

$$u_{t-1,x} = u_{t,x} - ku^t(t, x) + \frac{k^2}{2}u^{tt}(\varepsilon_1, x) \quad (14)$$

e como fizemos anteriormente, substituir na expressão anterior, anulando termos de mesma cor:

$$\begin{aligned} u_{t,x} &= \textcolor{brown}{u}_{t,x} - ku^t(t, x) + \frac{k^2}{2}u^{tt}(\varepsilon_1, x) + \frac{\alpha k}{h^2} \\ &\left[\left(\textcolor{red}{u}_{t,x} - hu^x(t, x) + \frac{h^2}{2}u^{xx}(t, x) - \frac{h^3}{6}u^{xxx}(t, x) + \frac{h^4}{24}u^{xxxx}(t, \varepsilon_3) \right) \right. \\ &\quad \left. - 2\textcolor{red}{u}_{t,x} + \right. \\ &\quad \left. \left(\textcolor{red}{u}_{t,x} + hu^x(t, x) + \frac{h^2}{2}u^{xx}(t, x) + \frac{h^3}{6}u^{xxx}(t, x) + \frac{h^4}{24}u^{xxxx}(t, \varepsilon_2) \right) \right] \end{aligned}$$

que por fim se torna

$$\begin{aligned} 0 &= -ku^t(t, x) + \frac{k^2}{2}u^{tt}(\varepsilon_1, x) + \frac{\alpha k}{h^2} \left(h^2u^{xx}(t, x) + \frac{h^4}{12}u^{xxxx}(t, \varepsilon_2) \right) \\ \Rightarrow ku^t(t, x) &= \frac{k^2}{2}u^{tt}(\varepsilon_1, x) + \alpha k \left(u^{xx}(t, x) + \frac{(h)^2}{12}u^{xxxx}(t, \varepsilon_2) \right) \end{aligned}$$

Novamente, ao dividir toda a equação por k :

$$\begin{aligned} u^t(t, x) &= \frac{k}{2}u^{tt}(\varepsilon_1, x) + \alpha u^{xx}(t, x) + \alpha \frac{h^2}{12}u^{xxxx}(t, \varepsilon_2) \\ \Rightarrow \textcolor{blue}{u}^t(t, x) &= \alpha u^{xx}(t, x) + \frac{k}{2}u^{tt}(\varepsilon_1, x) + \alpha \frac{h^2}{12}u^{xxxx}(t, \varepsilon_2) \quad (15) \end{aligned}$$

Novamente, as porções em vermelho e laranja tendem a 0 quando k e h tendem a 0, respectivamente. Dessa maneira, o método é **incondicionalmente consistente**.

1.d.c) Crank-Nicolson

Dada a discretização obtida pelo método de Crank-Nicolson, obtida por uma simplificação da expressão abaixo:

$$u_{t+1,x} = u_{t,x} + \frac{\alpha k}{2h^2} [(u_{t+1,x+1} + u_{t+1,x-1}) - 2(u_{t+1,x} + u_{t,x}) + (u_{t,x+1} + u_{t,x-1})]$$

Ao invés de expandir todos os termos diferentes de $u_{t,x}$, é possível expandir os termos diferentes de $u_{t,x}, u_{t+1,x}$ em relação ao passo temporal adequado, evitando expansão com derivadas mistas (muito mais longas). Sabendo a aproximação em torno de um ponto, é trivial apresentar a aproximação em torno de outro. Por exemplo, a aproximação dos termos $u_{t+1,x+1}, u_{t+1,x-1}$ são dadas por:

$$\begin{aligned} u_{t+1,x+1} &= u_{t+1,x} + hu^x(t+k, x) + \frac{h^2}{2}u^{xx}(t+k, x) + \\ &\quad \frac{h^3}{6}u^{xxx}(t+k, x) + \frac{h^4}{24}u^{xxxx}(t+k, \varepsilon_1) \end{aligned} \tag{16}$$

$$\begin{aligned} u_{t+1,x-1} &= u_{t+1,x} - hu^x(t+k, x) + \frac{h^2}{2}u^{xx}(t+k, x) + \\ &\quad - \frac{h^3}{6}u^{xxx}(t+k, x) + \frac{h^4}{24}u^{xxxx}(t+k, \varepsilon_2) \end{aligned} \tag{17}$$

Ao substituir esses termos, além dos termos já conhecidos por expansões anteriores, na equação que descreve o método de Crank-Nicolson, obtemos:

$$\begin{aligned} u_{t+1,x} &= u_{t,x} + \frac{\alpha k}{2h^2} \left[\right. \\ &\quad \left(\cancel{2u_{t+1,x}} + h^2u^{xx}(t+k, x) + \frac{h^4}{12}u^{xxxx}(t+k, \varepsilon_3) \right) + \\ &\quad \cancel{-2(u_{t+1,x} + u_{t,x})} + \\ &\quad \left. \left(\cancel{2u_{t,x}} + h^2u^{xx}(t, x) + \frac{h^4}{12}u^{xxxx}(t, \varepsilon_4) \right) \right] \end{aligned}$$

Anulando os termos de mesma cor, e recombinação de forma que o lado esquerdo apresente uma aproximação da derivada temporal (subtraindo ambos os lados por $u_{t,x}$ e posteriormente dividindo por k):

$$\begin{aligned} \frac{u_{t+1,x} - u_{t,x}}{k} &= \alpha \frac{1}{2} (u^{xx}(t+k, x) + u^{xx}(t, x)) + \\ &\quad \frac{h^2}{6} (\cancel{u^{xxxx}(t+k, \varepsilon_3)} + \cancel{u^{xxxx}(t, \varepsilon_4)}) \end{aligned} \tag{18}$$

Nota-se que a porção em vermelho, que representa o erro associado ao método, tende a 0 quando h tende a 0. Não há dependência direta do k na expressão do erro de truncamento, portanto, o método é incondicionalmente consistente.

1.e) Análise de estabilidades

Da mesma maneira, avaliamos a estabilidade de cada método pelo **critério de estabilidade de Von Neumann**. Esse critério estabelece que para a equação do calor original, assumimos uma solução do tipo:

$$u_{t,j} = G^t e^{i\beta j h} \quad (19)$$

Onde, se $|G| > 1$, a solução cresce de forma ilimitada e a solução não é estável. Portanto, $|G| \leq 1$ é condição **necessária** para que o método seja estável.

1.e.a) Método explícito

Aplicando a forma geral sobre a Equação 5, que apresenta a relação do método explícito, obtemos:

$$\begin{aligned} u_{t+1,x} &= \sigma u_{t,x-1} + (1 - 2\sigma) u_{t,x-1} + \sigma u_{t,x+1} \\ \Rightarrow G^{t+1} e^{i\beta j h} &= \sigma G^t e^{i\beta(j-1)h} + (1 - 2\sigma) G^t e^{i\beta j h} + \sigma G^t e^{i\beta(j+1)h} \\ &= G^t e^{i\beta j h} (\sigma e^{-i\beta h} + (1 - 2\sigma) + \sigma e^{i\beta h}) \end{aligned}$$

Assumindo $G^t e^{i\beta j h} \neq 0$, dividindo pelo termo dos 2 lados:

$$G = \sigma e^{-i\beta h} + \sigma e^{i\beta h} + (1 - 2\sigma)$$

Pela propriedade de Euler, sabe-se que:

$$e^{-i\beta h} = \cos(\beta h) - \sin(\beta h) \quad (20)$$

e que

$$e^{i\beta h} = \cos(\beta h) + \sin(\beta h) \quad (21)$$

portanto a soma desses termos é $2 \cos(\beta h)$, dessa maneira:

$$G = 1 - 2\sigma + 2\sigma \cos(\beta h) \quad (22)$$

Se $|G| > 1$, a solução cresce de forma exponencial, de maneira que a solução é estável somente se $|G| \leq 1$. Dado que $-1 \leq \cos(\beta h) \leq 1$, logo $1 - 4\sigma \leq G \leq 1 + 4\sigma$. Dessa maneira, para que $|G| \leq 1$, é necessário que $|1 - 4\sigma| \leq 1$. A partir da seguinte sequência de simplificações dessa inequação:

$$-1 \leq 1 - 4\sigma \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 2 - 4\sigma \leq 2 \Rightarrow 0 \geq 2\sigma - 1 \geq 1 \Rightarrow 2\sigma \leq 1 \Rightarrow \sigma \leq \frac{1}{2}$$

E assumindo que α, k, h são todos positivos, logo essa expressão pode ser simplificada para:

$$\sigma = \frac{\alpha k}{h^2} \leq \frac{1}{2} \quad (23)$$

que denota a região de estabilidade da equação do calor quando utilizando o método explícito. Logo, o método é **condicionalmente estável**.

1.e.b) Método implícito

Aplicando a forma geral de solução sobre a equação do método implícito, dada por:

$$u_{t,x} = -\sigma u_{t+1,x-1} + (1 + 2\sigma)u_{t+1,x} - \sigma u_{t+1,x+1}$$

obtemos a seguinte expressão:

$$G^t e^{i\beta j h} = -\sigma G^{t+1} e^{i\beta(j-1)h} + (1 + 2\sigma)G^{t+1} e^{i\beta j h} - \sigma G^{t+1} e^{i\beta(j+1)h}$$

onde podemos reescrever o lado direito em torno do termo $G^{t+1} e^{i\beta j h}$

$$G^t e^{i\beta j h} = G^{t+1} e^{i\beta j h} (-\sigma e^{-i\beta h} + (1 + 2\sigma) - \sigma e^{i\beta h})$$

ao cancelar o termo $e^{i\beta j h}$ em ambos os lados e dividir por G^t , obtemos a seguinte expressão:

$$1 = G(-\sigma e^{-i\beta h} + (1 + 2\sigma) - \sigma e^{i\beta h})$$

Isolando o termo G :

$$G = \frac{1}{(1 + 2\sigma) - \sigma(e^{-i\beta h} + e^{i\beta h})}$$

e substituindo novamente o valor da soma das identidades de Euler

$$e^{-i\beta h} + e^{i\beta h} = 2 \cos(\beta h)$$

obtemos a seguinte expressão, cujo denominador pode ser fatorado

$$G = \frac{1}{1 + 2\sigma - 2\sigma \cos(\beta h)} = \frac{1}{1 + 2\sigma(1 - \cos(\beta h))}$$

Ao analisar o módulo do termo G :

$$|G| = \left| \frac{1}{1 + 2\sigma(1 - \cos(\beta h))} \right| \quad (24)$$

Nota-se que o denominador é limitado pelo valor do cosseno:

$$\cos(\beta h) = 1 \Rightarrow 1 + 2\sigma(1 - 1) = 1 + 2\sigma(0) = 1$$

$$\cos(\beta h) = -1 \Rightarrow 1 + 2\sigma(1 + 1) = 1 + 2\sigma(2) = 1 + 4\sigma$$

Com a mesma premissa assumida anteriormente ($\alpha, h, k > 0 \Rightarrow \sigma > 0$), vemos que no pior caso, o denominador é igual a 1, e no pior caso, é maior que 1. Como o numerador é 1, qualquer valor obtido para σ será suficiente para cumprir com o critério de estabilidade.

Portanto, o método implícito é **incondicionalmente estável**.

1.e.c) Crank-Nicolson

O método de Crank-Nicolson é uma média entre os métodos explícito e implícito. Sua forma não-reduzida, dada por

$$u_{t+1,j} = u_{t,j} + \frac{\alpha k}{2h^2} (u_{t,j-1} - 2u_{t,j} + u_{t,j+1} + u_{t+1,j-1} - 2u_{t+1,j} + u_{t+1,j+1})$$

definindo $\sigma = \frac{\alpha k}{h^2}$, a equação se reescreve como:

$$u_{t+1,j} = u_{t,j} + \frac{\sigma}{2} (u_{t,j-1} - 2u_{t,j} + u_{t,j+1} + u_{t+1,j-1} - 2u_{t+1,j} + u_{t+1,j+1})$$

aplicando a forma geral de Von Neumann sobre essa expressão, obtemos:

$$G^{t+1}e^{i\beta jh} = G^t e^{i\beta jh} + G^t \frac{\sigma}{2} ((e^{i\beta(j-1)h} - 2e^{i\beta jh} + e^{i\beta(j+1)h}) + G(e^{i\beta(j-1)h} - 2e^{i\beta jh} + e^{i\beta(j+1)h}))$$

Dividindo ambos os lados da equação por $G^t e^{i\beta jh}$

$$G = 1 + \frac{\sigma}{2} ((e^{-i\beta h} - 2 + e^{i\beta h}) + G(e^{-i\beta h} - 2 + e^{i\beta h}))$$

e aplicando novamente a soma das identidades de Euler, obtemos

$$\begin{aligned} G &= 1 + \frac{\sigma}{2} ((2\cos(\beta h) - 2) + G(2\cos(\beta h) - 2)) \\ &= 1 + \sigma(\cos(\beta h) - 1) + \sigma G(\cos(\beta h) - 1) \end{aligned}$$

Sabendo que $\cos(\beta h) - 1 = -(1 - \cos(\beta h))$, podemos reescrever:

$$G = 1 - \sigma(1 - \cos(\beta h)) - \sigma G(1 - \cos(\beta h))$$

Isolando o termo G :

$$G + \sigma G(1 - \cos(\beta h)) = 1 - \sigma(1 - \cos(\beta h))$$

$$G(1 + \sigma(1 - \cos(\beta h))) = 1 - \sigma(1 - \cos(\beta h))$$

Por fim:

$$G = \frac{1 - \sigma(1 - \cos(\beta h))}{1 + \sigma(1 - \cos(\beta h))}$$

Como $1 - \cos(\beta h) \in [0, 2]$ e $\sigma > 0$, o numerador é sempre menor ou igual ao denominador, e ambos são reais positivos, garantindo $|G| \leq 1$.

Portanto o método de Crank-Nicolson é **incondicionalmente estável**.

1.f) Teste prático da estabilidade dos métodos

De acordo com o que foi visto anteriormente, ao utilizarmos um critério que fuja da região de estabilidade do método explícito, o mesmo deve apresentar um resultado caótico. No caso original, utilizamos $h = 0.1$; $k = 0.001$. Para testar o caso instável, iremos aplicar $h = 0.1$; $k = 0.05$, que resulta em $\sigma = 5 > \frac{1}{2}$. O resultado obtido para essa nova malha está disposta nas Figura 7, Figura 8, Figura 9, Figura 10, Figura 11, Figura 12.

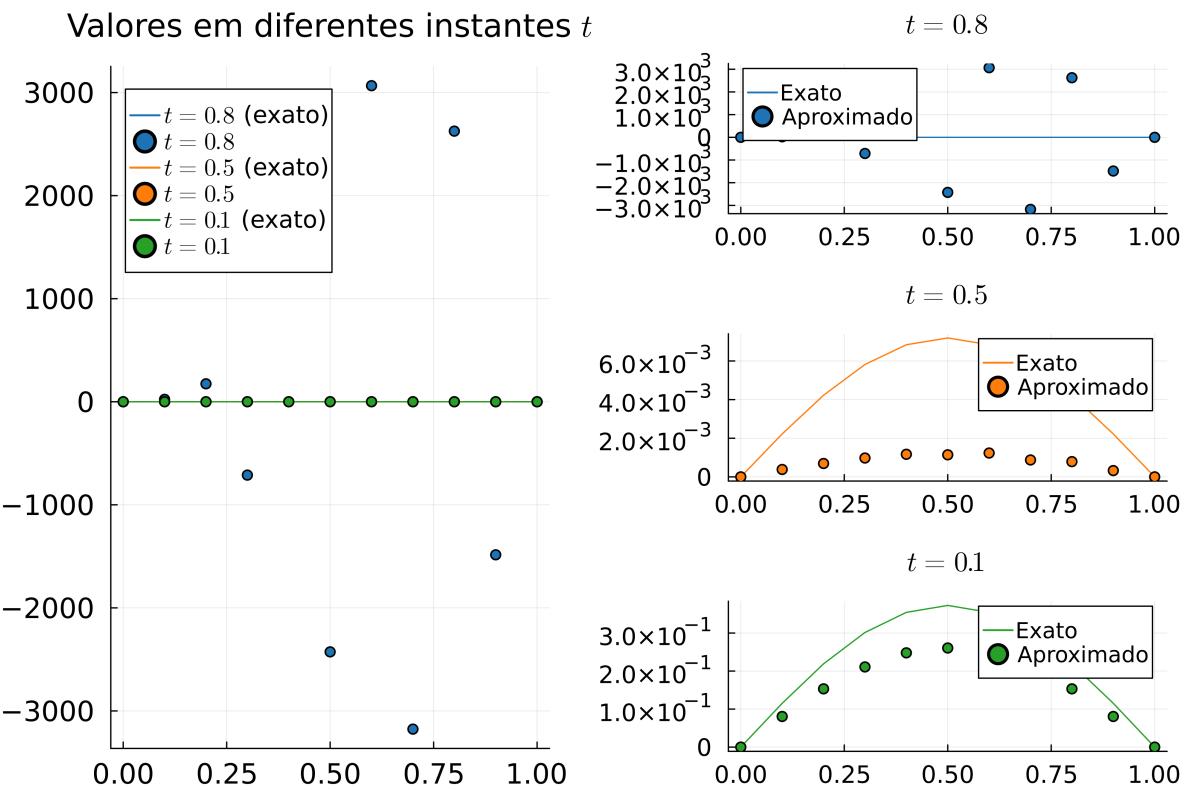


Figura 7: Demonstração de instabilidade; **Método Explícito**

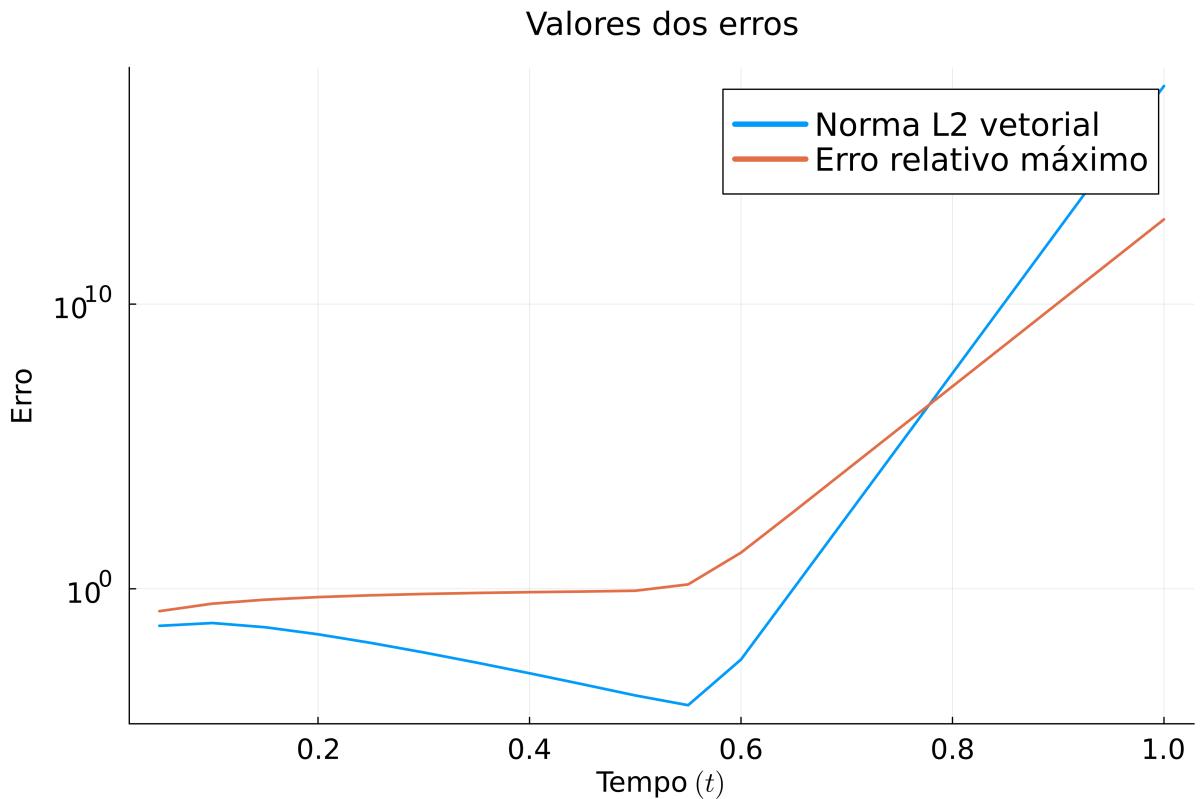


Figura 8: Erros no caso instável; **Método Explícito**

Valores em diferentes instantes t

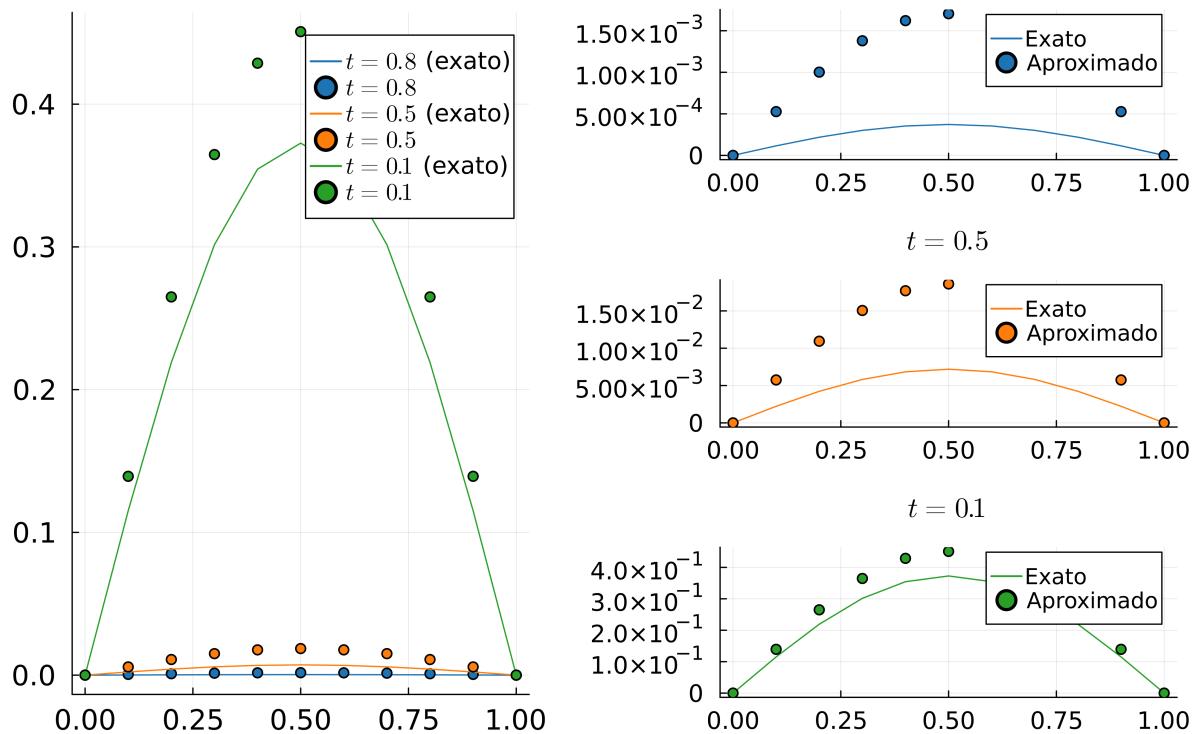


Figura 9: Demonstração de estabilidade; **Método Implícito**

Valores dos erros

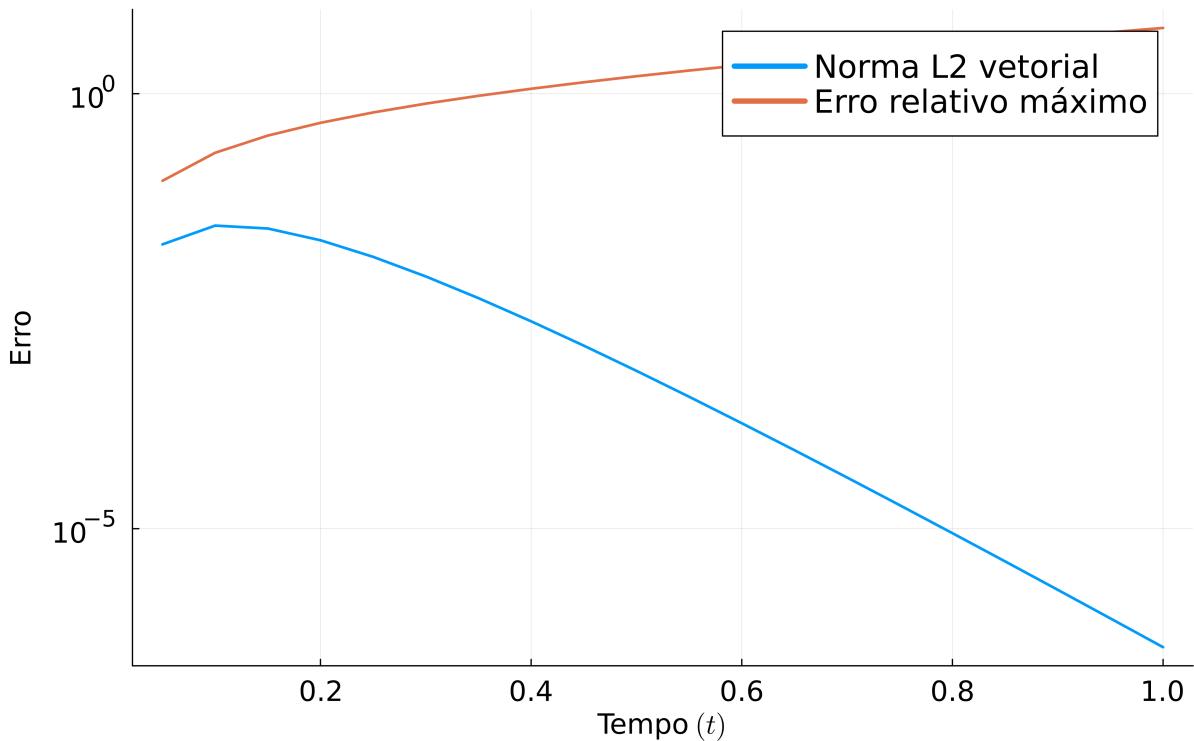


Figura 10: Erros no caso de malha grossa; **Método Implícito**

Valores em diferentes instantes t

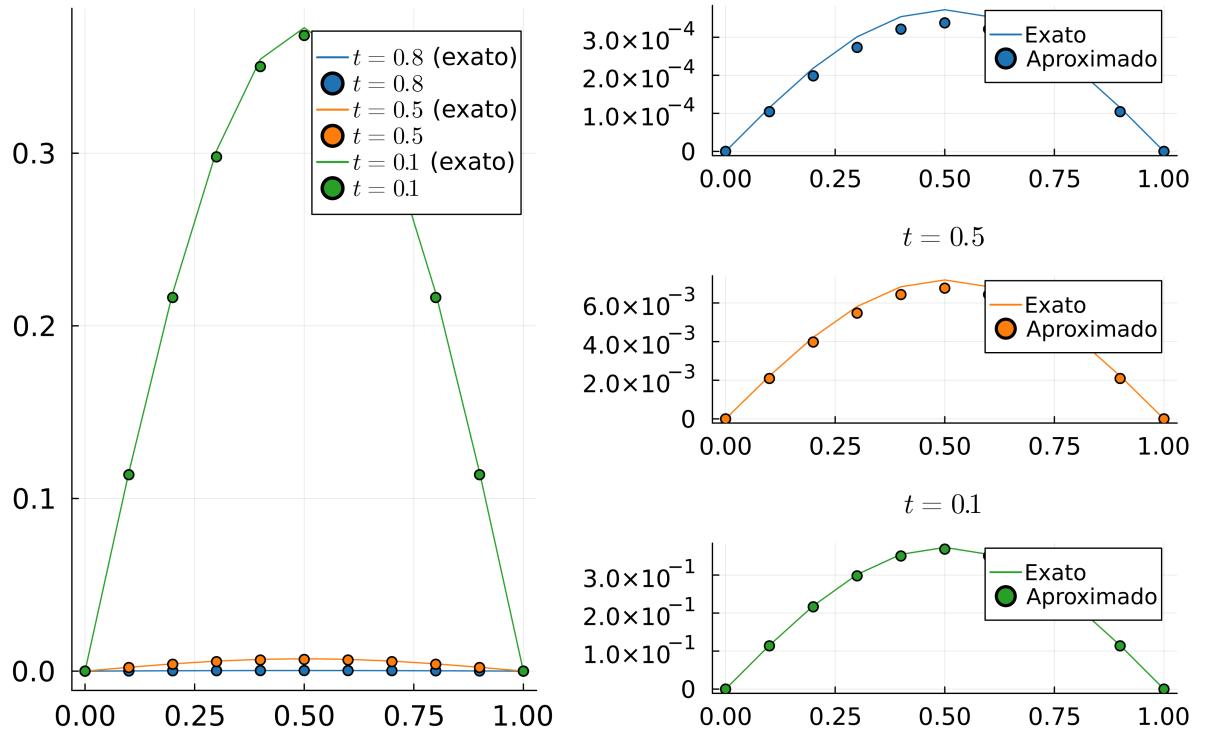


Figura 11: Demonstração de estabilidade; **Método de Crank-Nicolson**

Valores dos erros

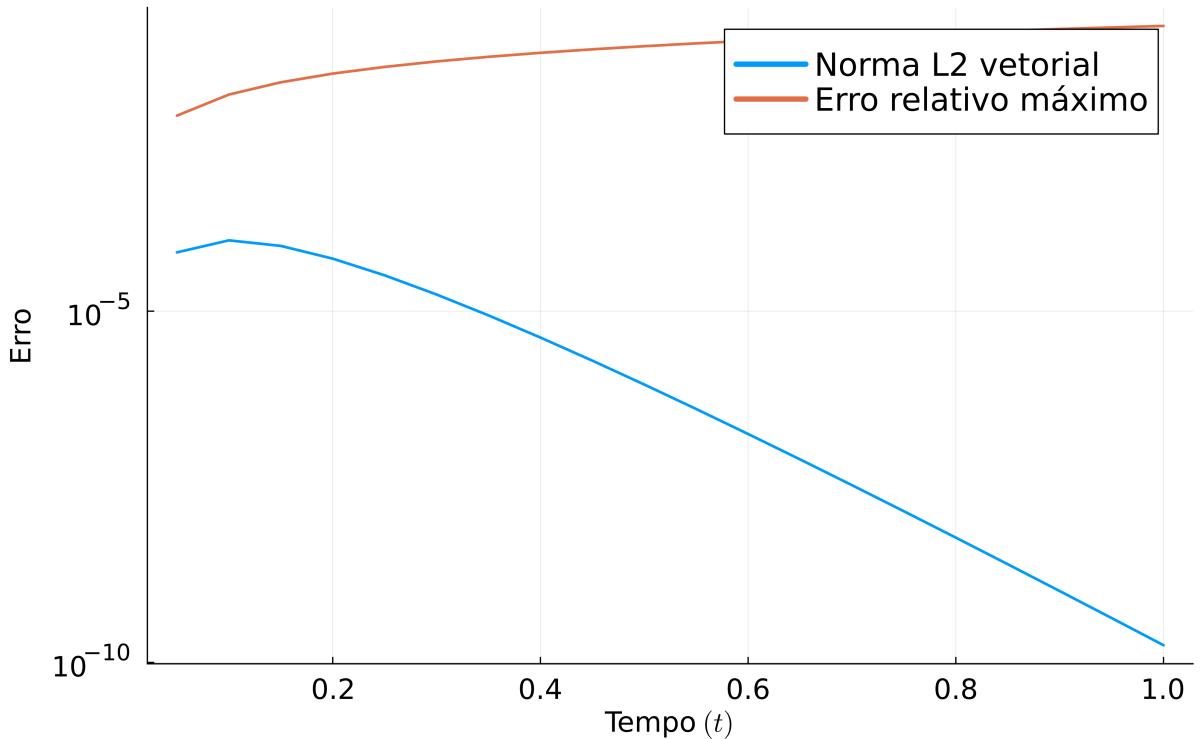


Figura 12: Erros no caso de malha grossa; **Método de Crank-Nicolson**

De acordo com o esperado, o método explícito é o único que apresenta um comportamento errático. Outro ponto importante é analisar a diferença dos erros do método

implícito e de Crank-Nicolson. Embora no caso original o Método de Crank-Nicolson não tivesse mostrado melhora por sua ordem superior, aqui ela foi muito evidente: ao reduzir o tamanho da malha, seu erro aumentou de forma muito menos notável que o erro para o Método Implícito.

1.g) Tempos de execução

Por fim, para analisar o custo computacional envolvido, foi medido o tempo de execução em milissegundos para cada aplicação dos métodos. Os tempos de execução para cada método estão dispostos na Tabela 1.

Método	h	k	Tempo de execução (ms)
Método Explícito	0.1	0.001	233
Método Explícito	0.1	0.05	217
Método Implícito	0.1	0.001	685
Método Implícito	0.1	0.05	678
Método de Crank-Nicolson	0.1	0.001	800
Método de Crank-Nicolson	0.1	0.05	779

Tabela 1: Tempos de execução para cada método

Nota-se que o método explícito é o mais rápido pois não demanda a resolução de um sistema linear. O método implícito apresenta tempo de execução inferior ao de Crank-Nicolson, mas não muito. Por fim, ao aumentar o valor de k , todos os métodos apresentam redução no tempo de execução, mesmo que pequena.

2) Equação do Calor sobre uma barra delgada

Enunciado Considere uma barra delgada, de comprimento $L = 1\text{m}$, inicialmente a temperatura uniforme $T_{\text{init}} = 0^{\circ}\text{C}$.

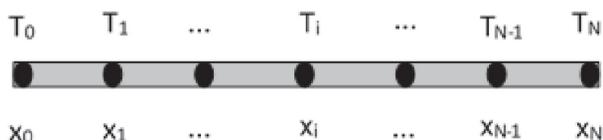


Figura 13: Discretização de uma barra

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (25)$$

A extremidade esquerda ($x = 0$) é mantida à temperatura fixa $T_0 = 0^{\circ}\text{C}$

A extremidade direita ($x = L$) é mantida à temperatura fixa $T_N = 100^{\circ}\text{C}$

A difusividade térmica é $\alpha = 0.0834 \text{ m}^2/\text{s}$

- Resolva numericamente o problema utilizando os métodos de Explícito, Implícito e de Crank-Nicolson
- Compare a solução numérica com a solução analítica:

$$T(x, t) = \frac{x}{L} T_N + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2T_N}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) e^{-\alpha t \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2} \quad (26)$$

- Para cada método:
 - A partir da temperatura no estado inicial, determine a distribuição de temperatura na barra em vários intantes de tempo;
 - Calcular o erro relativo máximo e o erro em norma L^2 ;
 - Verificar consistência, estabilidade e custo computacional dos métodos numéricos utilizados no problema.

Resolução Para evitar muitas repetições do que foi feito no Exercício 1, iremos reaproveitar:

- Os esquemas de discretização para cada método (apenas mudando os valores de $\alpha \Rightarrow \sigma, \beta, \lambda, \psi, \varphi$);
- As análises de consistência e estabilidade

2.a) Discretizações

A única alteração necessária na discretização é que agora os termos que antes estavam grafados em vermelho não podem ser omitidos.

2.a.a) Método Explícito

A discretização de método explícito é a única a não ser afetada, visto que atua diretamente sobre o vetor de valores no tempo anterior. Alterando os valores iniciais desse vetor, todo o restante será devidamente adaptado.

2.a.b) Método Implícito

Alterando a equação do sistema linear para incluir as condições de fronteira, obtemos:

$$\begin{pmatrix} \beta & -\sigma & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma & \beta & -\sigma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\sigma & \beta & -\sigma & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\sigma & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{t+1,2} \\ u_{t+1,3} \\ u_{t+1,4} \\ \vdots \\ u_{t+1,N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{\sigma u_{t+1,1}} + u_{t,2} \\ u_{t,2} \\ u_{t,3} \\ u_{t,4} \\ \vdots \\ u_{t,N-1} + 100\sigma \end{pmatrix} \quad (27)$$

2.a.c) Método de Crank-Nicolson

Da mesma forma que no caso implícito, temos uma breve alteração no sistema anterior:

$$\begin{pmatrix} \varphi & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\lambda & \varphi & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\lambda & \varphi & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{t+1,2} \\ u_{t+1,3} \\ u_{t+1,4} \\ \vdots \\ u_{t+1,N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \color{red}{\lambda u_{t+1,1} + \lambda u_{t,1} + \psi u_{t,2} + \lambda u_{t,3}} \\ \lambda u_{t,2} + \psi u_{t,3} + \lambda u_{t,4} \\ \lambda u_{t,3} + \psi u_{t,4} + \lambda u_{t,5} \\ \vdots \\ \lambda u_{t,N-2} + \psi u_{t,N-1} + 200\lambda \end{pmatrix} \quad (28)$$

2.b) Mapa de calor

O mapa de calor é uma forma de representar todos os valores de uma determinada matriz a partir da atribuição de uma cor para cada número. Dessa maneira, podemos

representar todas as linhas e colunas em um mesmo gráfico. No nosso caso, atribuímos às temperaturas mais altas, cores mais próximas do amarelo/laranja, temperaturas entre a mais fria (0 graus) e a mais quente (100 graus) são denotadas por tons de vermelho. Os resultados estão postos nas Figura 14, Figura 15 e Figura 16.

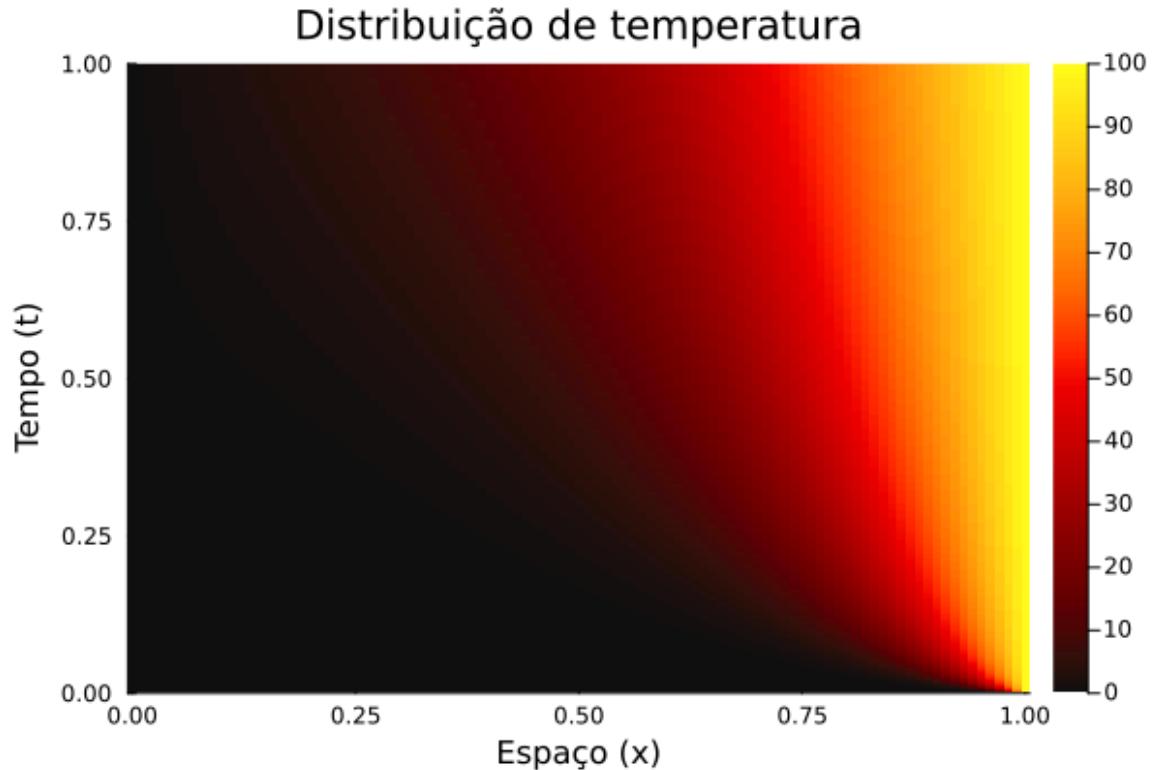


Figura 14: Mapa de calor da resolução; **Método Explícito**

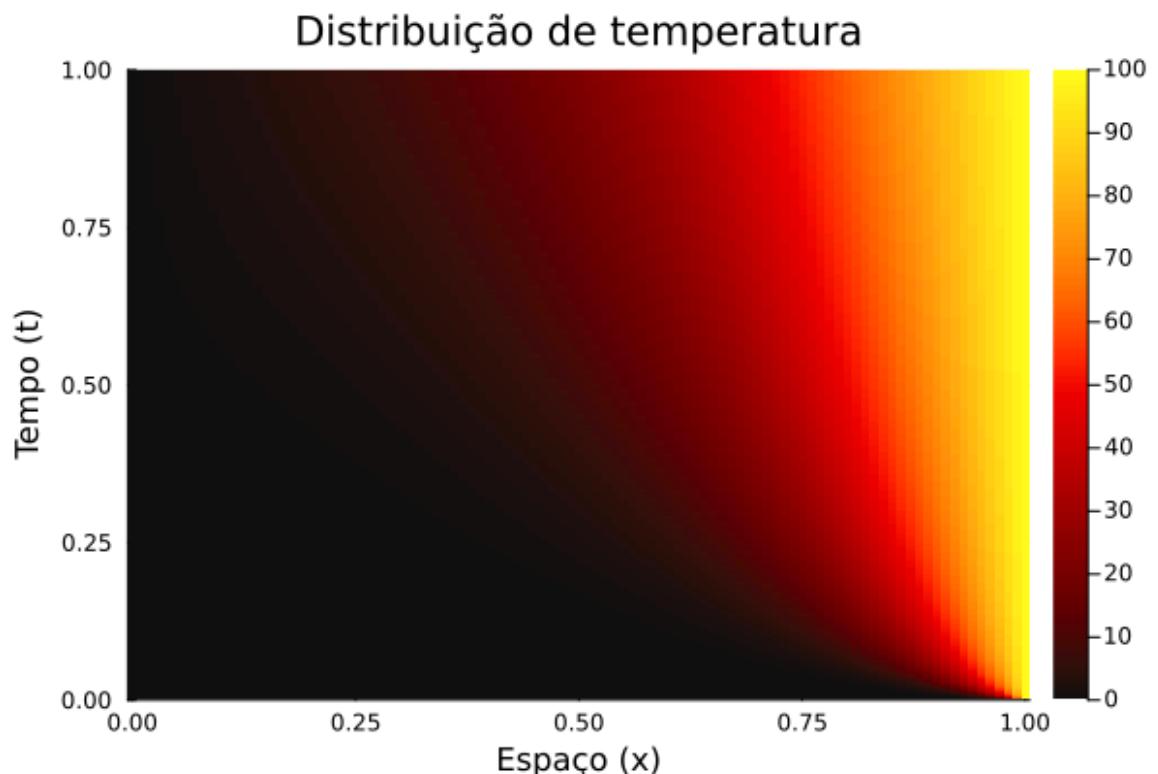


Figura 15: Mapa de calor da resolução; **Método Implícito**

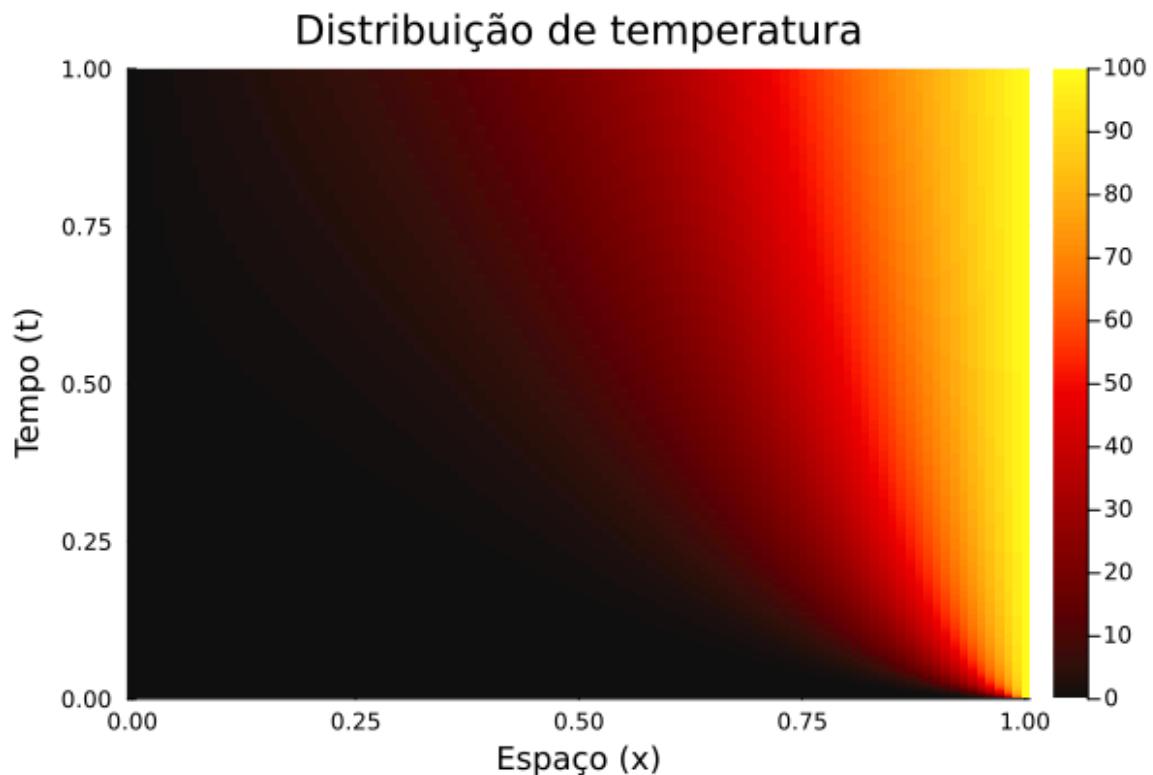


Figura 16: Mapa de calor da resolução; **Método de Crank-Nicolson**

2.c) Erro relativo máximo, Norma L2

Na mesma ordem, os erros para cada um dos métodos estão dispostos nas Figura 17, Figura 18 e Figura 19, respectivamente.

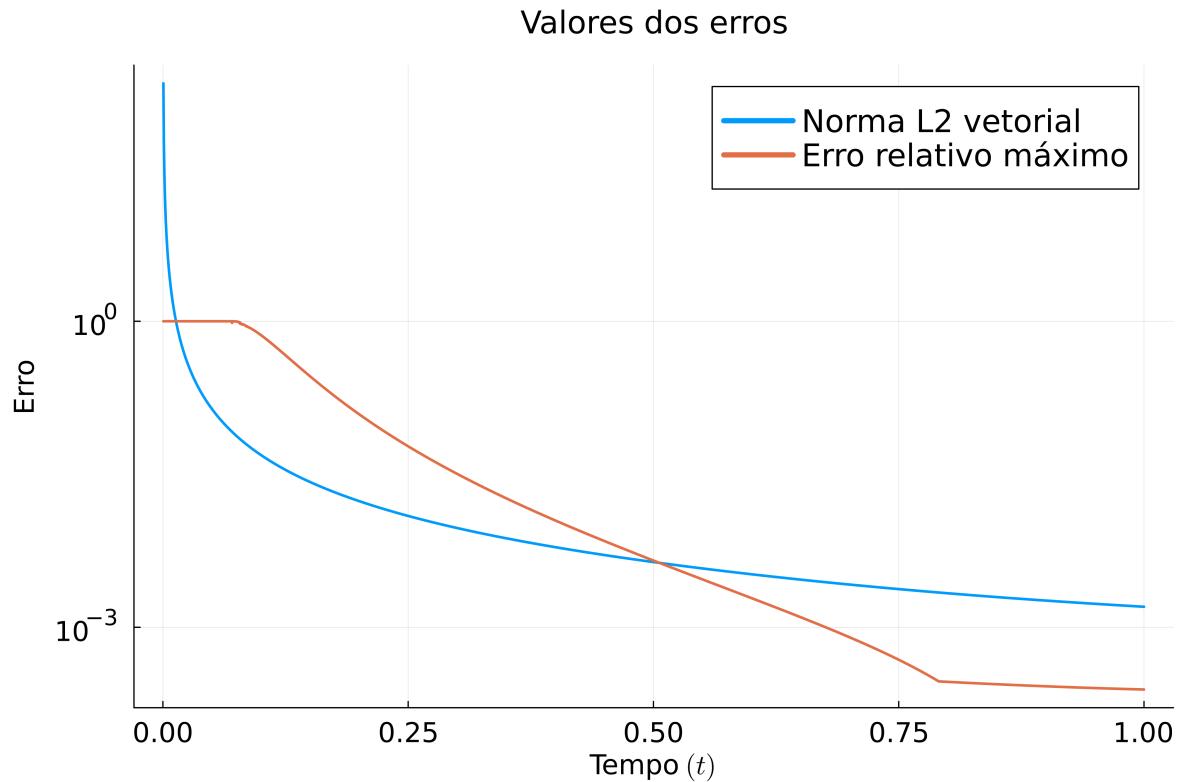


Figura 17: Erro obtido pelo **Método Explícito**

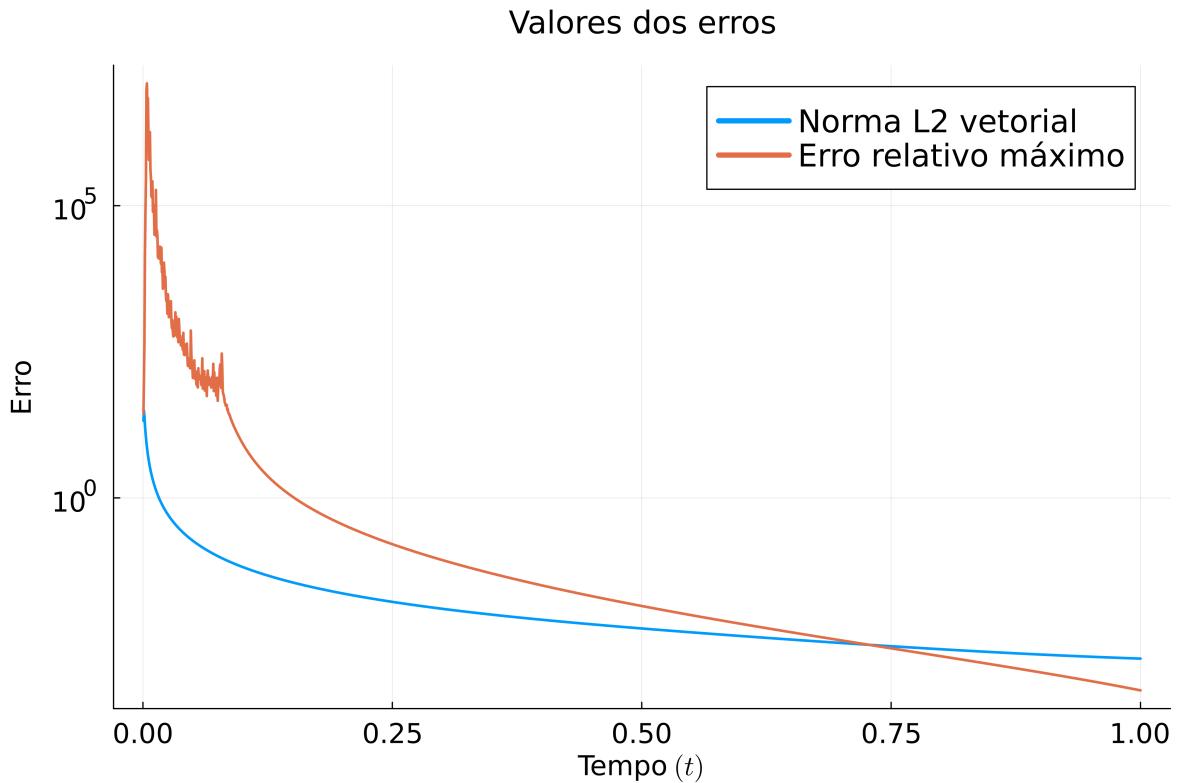


Figura 18: Erro obtido pelo **Método Implícito**

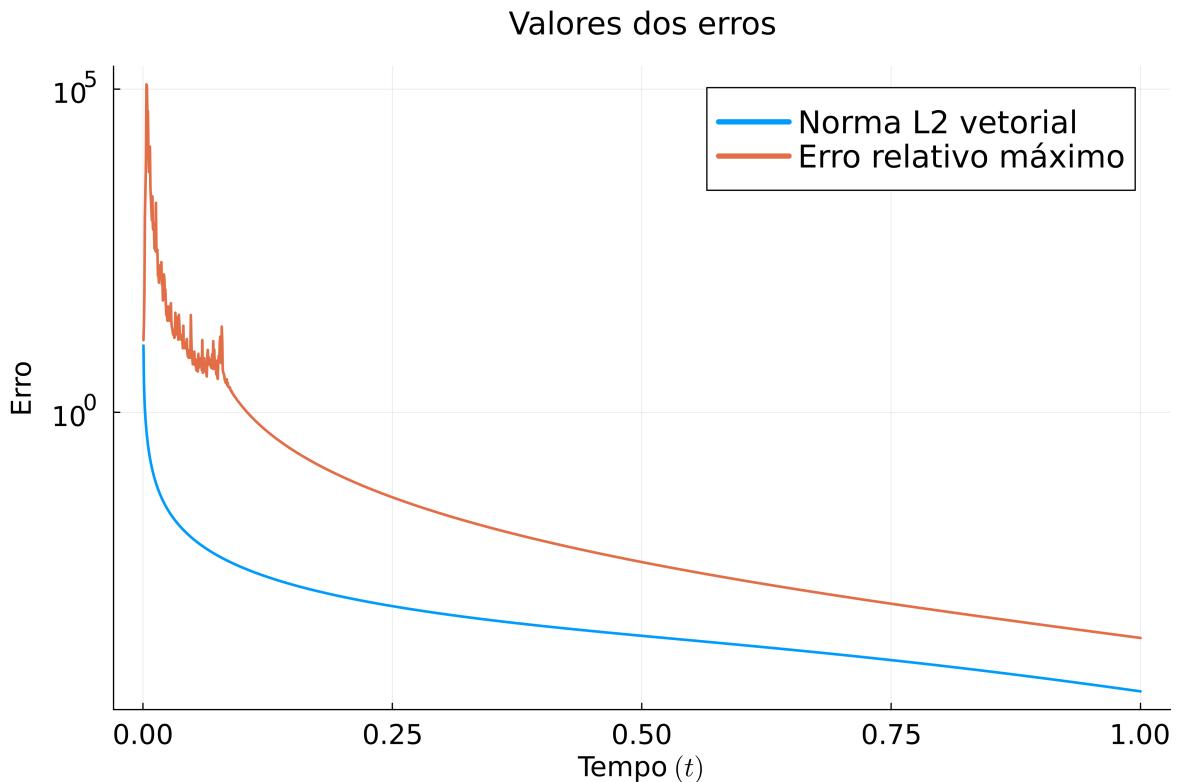


Figura 19: Erro obtido pelo **Método de Crank-Nicolson**

Novamente, observamos uma tendência estranha do erro de relativo máximo ser inferior no caso do Método Explícito. No entanto, os erros em norma L2 são melhores no caso do Crank-Nicolson.

2.d) Teste de estabilidades

Tendo em vista que o parâmetro α foi alterado, a região de estabilidade do método explícito também foi. Aplicando o novo parâmetro sobre a expressão $\sigma = \frac{\alpha k}{h^2} \leq \frac{1}{2}$, podemos ver que se fixarmos $h = 0.01$, k pode ser no máximo 5.9952×10^{-4} . No caso apresentado anteriormente, utilizamos $h = 0.01, k = 0.0005$, o que cumpre o critério de estabilidade. Para testarmos a diferença no caso instável, selecionamos $h = 0.01, k = 0.001$. Dessa maneira, obtemos $\sigma = 0.834 > \frac{1}{2}$.

As Figura 20, Figura 21 e Figura 22 apresentam os mapas de calor obtidos, e as Figura 23, Figura 24 e Figura 25 apresentam os erros em norma L2 vetorial e relativo máximo para os métodos explícito, implícito e de Crank-Nicolson, respectivamente.

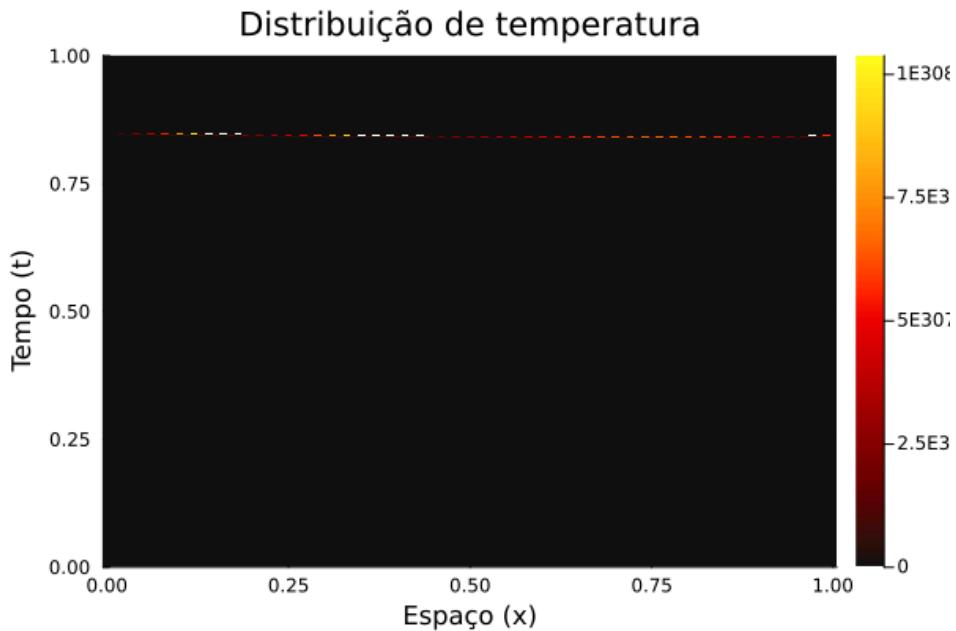


Figura 20: Mapa de calor da resolução; **Método Explícito** (caso instável)

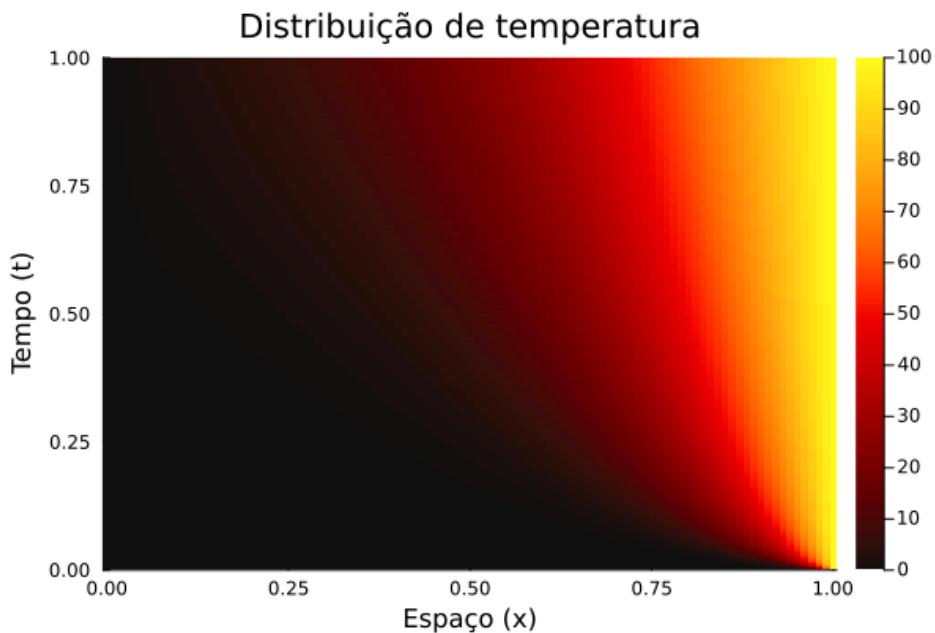


Figura 21: Mapa de calor da resolução; **Método Implícito** (malha grossa)

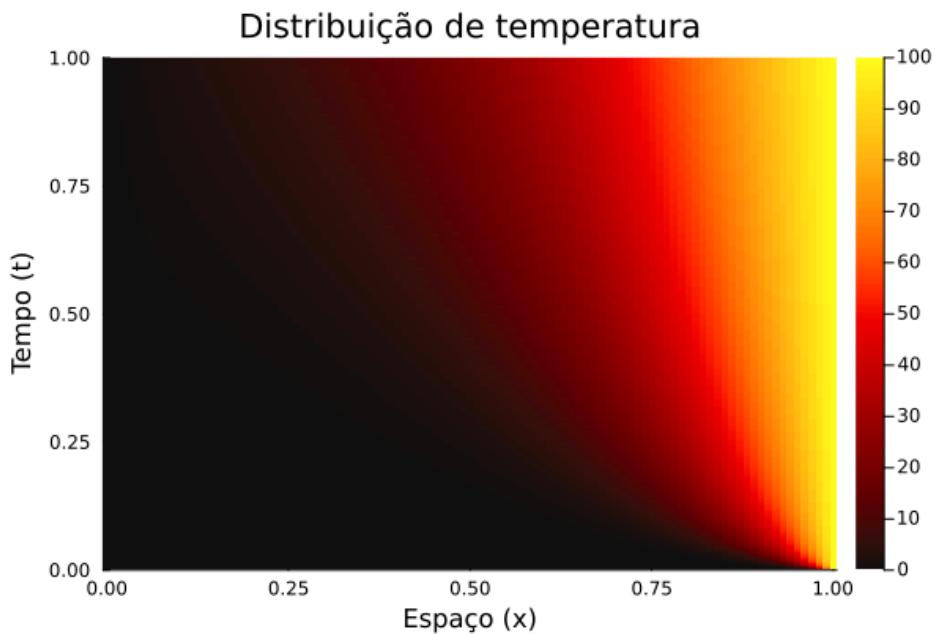


Figura 22: Mapa de calor da resolução; **Método de Crank-Nicolson** (malha grossa)

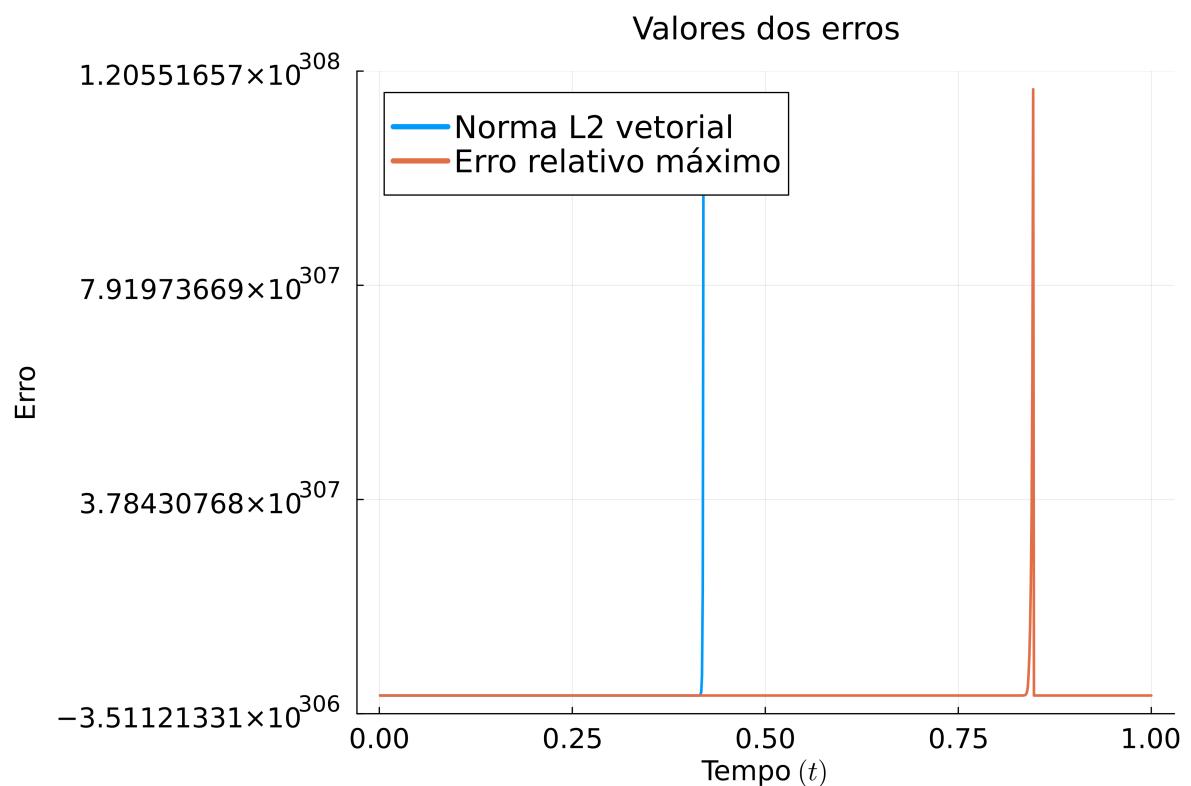


Figura 23: Erro obtido pelo **Método Explícito** (caso instável)

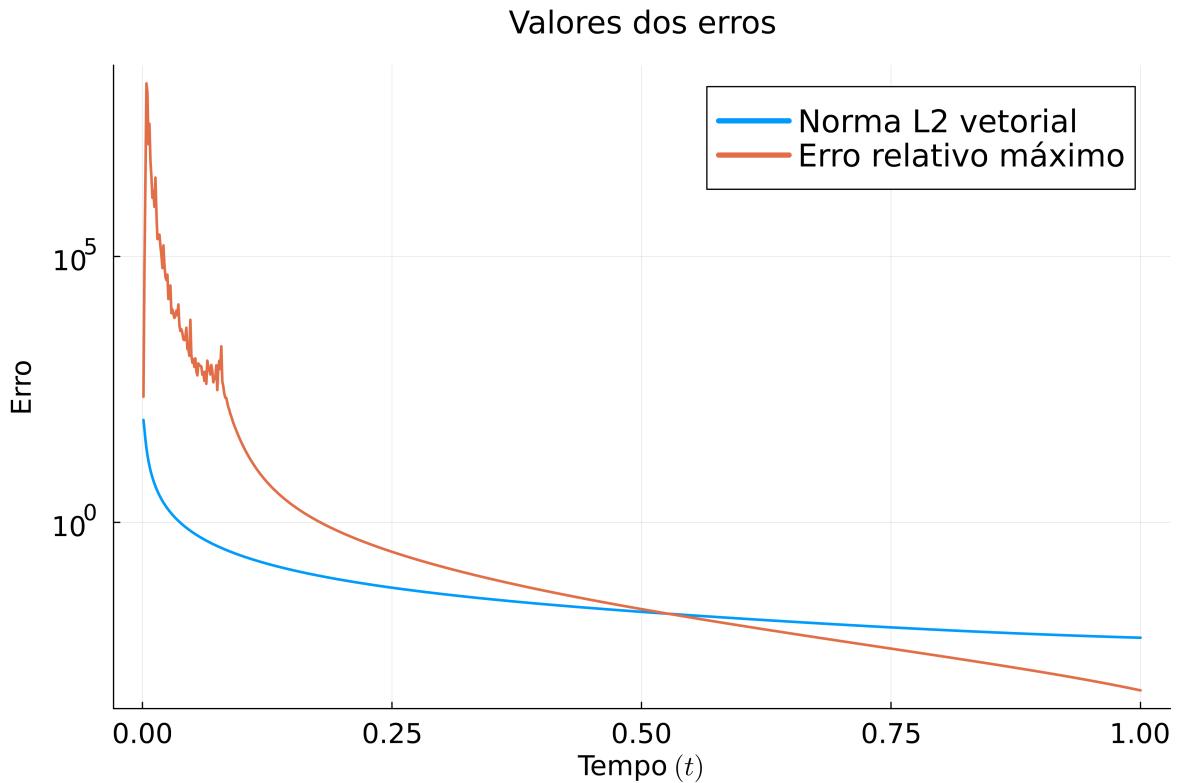


Figura 24: Erro obtido pelo **Método Implícito** (malha grossa)

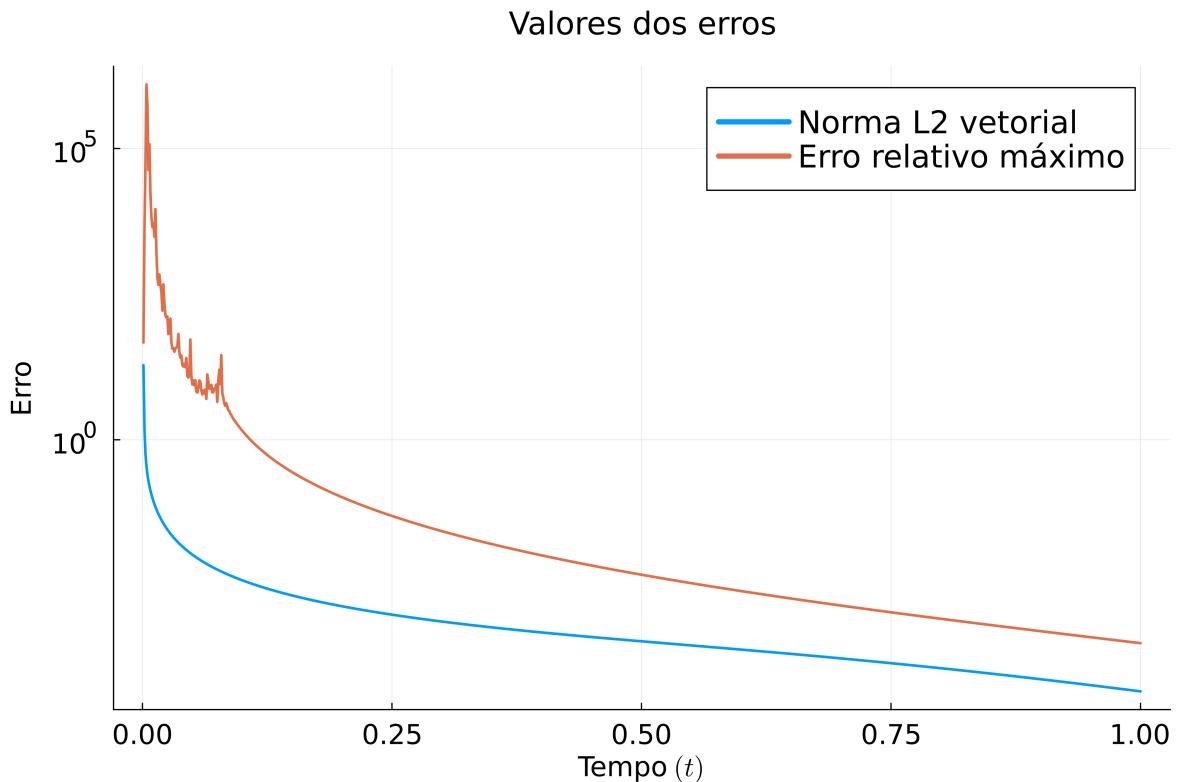


Figura 25: Erro obtido pelo **Método de Crank-Nicolson** (malha grossa)

Novamente, os métodos incondicionalmente estáveis não tiveram comportamentos erráticos, enquanto o método explícito teve. O erro do Método de Crank-Nicolson cresceu de forma menos acentuada, devido a sua ordem em comparação com o método implícito.

2.e) Tempos de execução

Da mesma maneira que no primeiro exercício, a Tabela 2 apresenta os tempos de execução para cada método, tendo variado os valores de h, k .

Método	h	k	Tempo de execução (ms)
Método Explícito	0.01	0.0005	221
Método Explícito	0.01	0.001	208
Método Implícito	0.01	0.0005	630
Método Implícito	0.01	0.001	590
Método de Crank-Nicolson	0.01	0.0005	741
Método de Crank-Nicolson	0.01	0.001	734

Tabela 2: Tempos de execução para cada método