UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FCT - Faculdade de Ciências e Tecnologia
DMC - Departamento de Matemática e Computação
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Trabalho Prático 2

Métodos Computacionais para Equações Diferenciais

Aluno: Guilherme Cesar Tomiasi
Professora: Analice Costacurta Brandi

Presidente Prudente

xx

Sumário

1. Resolução de Equação do Calor

Discretização (Euler Explícito)

Irei utilizar $u(t, x) \to u_{t,x}$ ao invés de $u_{i,j}$ para evitar confusão. A primeira linha representa o primeiro momento no tempo.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{u_{t+1,x} - u_{t,x}}{k} = \alpha \left(\frac{u_{t,x-1} - 2u_{t,x} + u_{t,x+1}}{h^2} \right)$$

$$u_{t+1,x} = u_{t,x} + \frac{\alpha k}{h^2} \left(u_{t,x-1} - 2u_{t,x} + u_{t,x+1} \right)$$

$$u_{t+1,x} = u_{t,x} + \sigma \left(u_{t,x-1} - 2u_{t,x} + u_{t,x+1} \right)$$

Discretização (Euler Implícito)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{u_{t+1,x} - u_{t,x}}{k} = \alpha \left(\frac{u_{t+1,x-1} - 2u_{t+1,x} + u_{t+1,x+1}}{h^2} \right)$$

$$u_{t,x} = u_{t+1,x} - \frac{\alpha k}{h^2} \left(u_{t+1,x-1} - 2u_{t+1,x} + u_{t+1,x+1} \right)$$

$$u_{t,x} = -\sigma u_{t+1,x-1} + (1 + 2\sigma) u_{t+1,x} - \sigma u_{t+1,x+1}$$

Forma-se o sistema linear ($\beta = 1 + 2\sigma$)

$$\begin{pmatrix} \beta & -\sigma & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\sigma & \beta & -\sigma & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\sigma & \beta & -\sigma & 0 & \dots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\sigma & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{t+1,2} \\ u_{t+1,3} \\ u_{t+1,4} \\ \vdots \\ u_{t+1,N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{t,2} \\ u_{t,3} \\ u_{t,4} \\ \vdots \\ u_{t,N-1} \end{pmatrix}$$

Discretização (Crank-Nicolson)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Rightarrow \frac{u_{t+1,x} - u_{t,x}}{k} =$$
$$\frac{\alpha}{2} \left(\frac{u_{t+1,x-1} - 2u_{t+1,x} + u_{t+1,x+1}}{h^2} + \frac{u_{t,x-1} - 2u_{t,x} + u_{t,x+1}}{h^2} \right)$$

$$u_{t,x} = u_{t+1,x} - \frac{\alpha k}{2h^2} \left(u_{t+1,x-1} - 2u_{t+1,x} + u_{t+1,x+1} + u_{t,x-1} - 2u_{t,x} + u_{t,x+1} \right)$$

$$u_{t,x} = u_{t+1,x} - \lambda u_{t+1,x-1} + 2\lambda u_{t+1,x} - \lambda u_{t+1,x+1} - \lambda u_{t,x-1} + 2\lambda u_{t,x} - \lambda u_{t,x+1}$$

$$\lambda u_{t,x-1} + (1 - 2\lambda) u_{t,x} + \lambda u_{t,x+1} =$$
$$-\lambda u_{t+1,x-1} + (1 + 2\lambda) u_{t+1,x} - \lambda u_{t+1,x+1}$$

Forma-se o sistema linear ($\varphi = 1 + 2\lambda, \psi = 1 - 2\lambda$)

$$
\begin{pmatrix}
\varphi & -\lambda & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
-\lambda & \varphi & -\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & -\lambda & \varphi & -\lambda & 0 & \dots & 0 \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\
0 & \dots & 0 & 0 & 0 & -\lambda & \varphi
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
u_{t+1,2} \\ u_{t+1,3} \\ u_{t+1,4} \\ \vdots \\ u_{t+1,N-1}
\end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
{\color{red}\lambda u_{t,1}} + \psi u_{t,2} + \lambda u_{t,3} \\
\lambda u_{t,2} + \psi u_{t,3} + \lambda u_{t,4} \\
\lambda u_{t,3} + \psi u_{t,4} + \lambda u_{t,5} \\
\vdots \\
\lambda u_{t,N-2} + \psi u_{t,N-1} + {\color{red}\lambda u_{t,N}}
\end{pmatrix}
$$

Onde os valores anotados em vermelho são iguais a 0. Os termos foram mantidos para manter a simetria da notação. Como o valor no contorno é 0, não é necessário representar os valores de $u_{t+1,1}, u_{t+1,N}$, como anteriormente.