UNIVERSIDADE ESTADUAL PAULISTA
"JÚLIO DE MESQUITA FILHO"

FCT - Faculdade de Ciências e Tecnologia
DMC - Departamento de Matemática e Computação
Pós-Graduação em Matemática Aplicada e Computacional

Trabalho Prático 1

Métodos Computacionais para Equações Diferenciais

Aluno: Guilherme Cesar Tomiasi
Professora: Analice Costacurta Brandi

Presidente Prudente
29 de abril de 2025

Sumário

1. Aproximação de um PVI

Aproxime a solução do PVI

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} - 2y^2 \\ y(0) \ = 0 \end{cases}$$

utilizando os métodos de Euler e Runge-Kutta de 4ª ordem. Escolha apropriadamente h e ilustre graficamente a convergência.

1.a. Comparação com solução analítica

Plote a solução para diferentes valores de h e compare com a solução analítica da equação diferencial dada por $y(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. Calcule os erros das aproximações.

1.b. Equiparando Euler com Runge-Kutta

Repita o exercício anterior utilizando o método de Euler com diferentes valores de h, de tal forma que a solução seja tão próxima da solução obtida via método de Runge-Kutta quanto possível.

1.c. Número de iterações obtido

Compare o número de iterações, para esse exercício, entre o método de Euler e o de Runge-Kutta.

2. Resolução numérica de PVI; Teste de estabilidade

Resolva numericamente o PVI definido no intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{cases} y' = -y + x \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

para diferentes valores de h. E discuta a convergência e a estabilidade do método numérico utilizado em questão.

3. PVF aproximado por diferenças centradas

Enunciado Considere o seguinte PVF definido no intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{cases} y'' + xy' + y = 2x \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

Aplique o método de diferenças finitas, utilizando diferenças centrais para as derivadas, e resolva numericamente esta equação.

Resolução A forma geral de resolução de PVF a partir de diferenças centradas é definida ao identificar os coeficientes de cada parte da equação geral. A equação dada tem coeficiente unitário em y'', portanto, é fácil compará-la com a forma geral e extrair as funções que determinam os coeficientes:

$$p(x) = x \quad q(x) = 1 \quad r(x) = 2x$$

aplicando uma discretização onde o domínio é dividido em $\boldsymbol{x} = (x_1, ..., x_i, ..., x_n)$, podemos escrever as funções coeficientes em torno de $x = x_i$ e os elementos que compõem a matriz esparsa do sistema linear como:

$$a_i = 1 + \frac{h^2}{2} \quad b_i = \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{x_i h}{2}\right) \quad c_i = \left(\frac{1}{2}\right)\left(1 - \frac{x_i h}{2}\right)$$

Onde

- $\boldsymbol{b} = (-b_2, ..., -b_n)$ compõe a diagonal imediatamente à esquerda da diagonal principal;
- $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)$ compõe a diagonal principal (perceba que esse valor não depende de x_i, sendo portanto constante);
- $\boldsymbol{c} = (-c_1, ..., -c_{n-1})$ compõe a diagonal imediatamente à direita da diagonal principal.

Para a formação do vetor r, resultado a multiplicação da matriz A pelo resultado y, utiliza-se

$$r_i = \begin{cases} -h^2 x_1 + (b_1)(1) & i = 1 \\ -h^2 x_i & i \in [2, n-1] \\ -h^2 x_i + (c_n)(0) & i = n \end{cases}$$

devido às condições de fronteira.

Utilizando $h = 10^{-5}$ e realizando a resolução do sistema linear $y = A \setminus r$, obtém-se o resultado apresentado pelo gráfico abaixo:

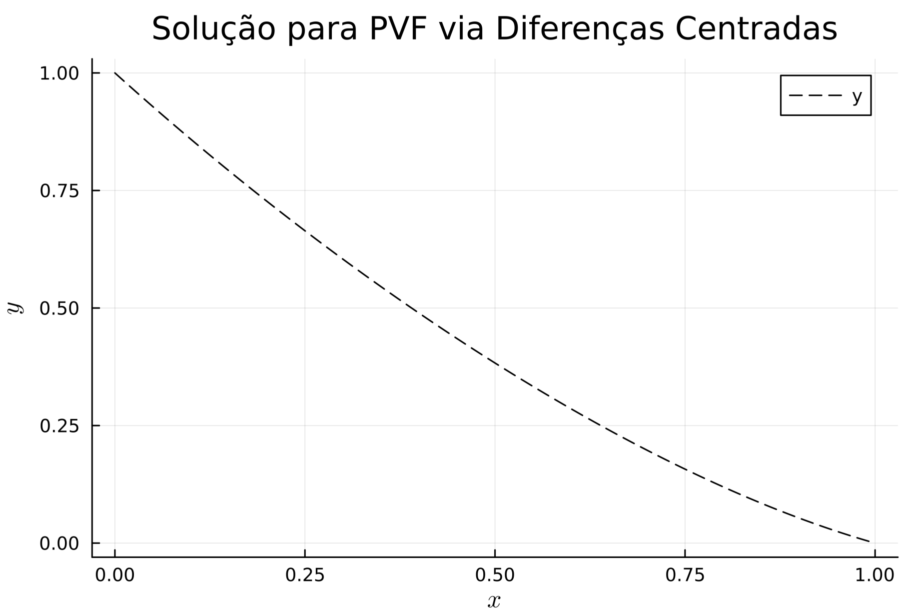

Figura 1: Resultado obtido para o Exercício 3

4. PVF aproximado por outras diferenças finitas

Resolva numericamente o PVF definido no intervalo $[0, 1]$:

$$\begin{cases} y'' - y' + xy = e^x(x^2 + 1) \\ y(0) = 0 \\ y(1) = e \end{cases}$$

Aplique o método de diferenças finitas, utilizando as fórmulas avançada, atrasada e centrada para as derivadas, e discuta as soluções aproximadas encontradas.