Expandindo algumas Séries de Taylor

Para aproveitar ao máximo as analogias entre os exercícios 1. e 2., realizamos a expansão da Série de Taylor em relação as duas variáveis realizando um passo à frente ou para trás ao mesmo tempo, a partir do operador $\pm$:

$$\begin{aligned} u(x_i \pm h, y_j) = u_i(x_i, y_j) + (\pm h)\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{(\pm h)^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) \\ + \frac{(\pm h)^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(x_i, y_j) + \frac{(\pm h)^4}{4!}\frac{\partial u^4}{\partial^4 x}(x_i, y_j) \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} u(x_i, y_j \pm k) = u_i(x_i, y_j) + (\pm k)\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) + \frac{(\pm k)^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 y}(x_i, y_j) \\ + \frac{(\pm k)^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 y}(x_i, y_j) + \frac{(\pm k)^4}{4!}\frac{\partial u^4}{\partial^4 y}(x_i, y_j) \end{aligned} \tag{2}$$

Direção x

Avançada A partir de Equação 1, tomando o caso da adição, truncando a série até a segunda derivada e depois isolando o termo que descreve a primeira derivada:

$$u(x_i + h, y_j) = u_i(x_i, y_j) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

$$h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = u(x_i + h, y_j) - u_i(x_i, y_j) - \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - u_i(x_i, y_j) - \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)}{h}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - u_i(x_i, y_j)}{h} - \frac{h}{2}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

O ETL pode ser representado pelo último termo ao escolher $\xi_i \in [x_i, x_i + h]$, pelo Teorema do Valor Intermediário

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - u_i(x_i, y_j)}{h} \\ \text{ETL: } -\frac{h}{2}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(\xi_i, y_j) \blacksquare \end{gathered} \tag{3}$$

Atrasada A mesma lógica pode ser aplicada, mas utilizando a subtração no lugar da adição para Equação 1:

$$u(x_i - h, y_j) = u_i(x_i, y_j) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

$$h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = -u(x_i - h, y_j) + u_i(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u_i(x_i, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{h} + \frac{h}{2}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u_i(x_i, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{h} \\ \text{ETL: } \frac{h}{2}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(\xi_i, y_j)\blacksquare \end{gathered} \tag{4}$$

Centrada A diferença centrada pode ser obtida a partir de uma combinação das Séries de Taylor expandidas na Equação 1. Tomando ambas as séries até a terceira derivada, e as subtraindo:

$$\begin{gathered} a : u(x_i + h, y_j) = u_i(x_i, y_j) + h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) \\ + \frac{h^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(x_i, y_j) \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} b : u(x_i - h, y_j) = u_i(x_i, y_j) - h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) \\ - \frac{h^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(x_i, y_j) \end{gathered}$$

$$a - b : u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j) = 2h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + 2\frac{h^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(x_i, y_j)$$

$$2h\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j) - 2\frac{h^3}{3!}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(x_i, y_j)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2h} - \frac{h^2}{6}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(x_i, y_j)$$

$$\begin{gathered} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2h} \\ \text{ETL: } -\frac{h^2}{6}\frac{\partial u^3}{\partial^3 x}(\xi_i, y_j)\blacksquare \end{gathered} \tag{5}$$

Centrada da segunda derivada No item anterior, é possível somar as duas equações ao invés de subtrair, isso nos proporciona:

$$u(x_i + h, y_j) + u(x_i - h, y_j) = 2u_i(x_i, y_j) + 2\frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j)$$

Não consta nenhum termo após a segunda derivada, por isso, adicionamos a soma dos termos da quarta derivada, proveniente da Equação 1

$$\begin{gathered} u(x_i + h, y_j) + u(x_i - h, y_j) = 2u_i(x_i, y_j) + \\ 2\frac{h^2}{2!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) + 2\frac{h^4}{4!}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) \end{gathered}$$

Isolando a segunda derivada

$$\begin{aligned} h^2 \frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) &= u(x_i + h, y_j) - 2u_i(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j) \\ &\quad -2\frac{h^4}{24}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) \\ \frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) &= \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u_i(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} \\ &\quad -\frac{h^4}{12}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) \\ \frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(x_i, y_j) &= \frac{u(x_i + h, y_j) - 2u_i(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j)}{h^2} \\ &\quad \text{ETL: } -\frac{h^4}{12}\frac{\partial u^2}{\partial^2 x}(\xi_i, y_j)\blacksquare \end{aligned} \tag{6}$$

Direção y

Só inverte as ordem, porra.

Derivada mista

Dado que $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ e sabendo que é possível aplicar os coeficientes de diferença finita para qualquer variável presente nessa função, é possível pegar o valor aproximado entre parênteses e aplicar a derivada da outra variável sobre o mesmo:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{u(x_i + h, y_j) - u(x_i - h, y_j)}{2h}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &\approx \left(\frac{1}{2k}\right)\left(\frac{u(x_i + h, y_j + k) - u(x_i - h, y_j + k)}{2h} - \right. \\ &\quad \left. \frac{u(x_i + h, y_j - k) - u(x_i - h, y_j - k)}{2h}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) &\approx \left(\frac{1}{4kh}\right)[u(x_i + h, y_j + k) - u(x_i - h, y_j + k) - \\ &\quad u(x_i - h, y_j + k) + u(x_i - h, y_j - k)] \end{aligned}$$

Como ambas as derivadas foram obtidas utilizando diferenças finitas centradas, um método de erro na ordem de $O(h^2)$, o erro da derivada mista depende de ambos os passos utilizados em cada direção da malha:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \approx \left(\frac{1}{4kh}\right)\big[u\big(x_i + h, y_j + k\big) - u\big(x_i - h, y_j + k\big) - u\big(x_i - h, y_j + k\big) + u\big(x_i - h, y_j - k\big)\big] + O(h^2, k^2)\blacksquare \tag{7}$$