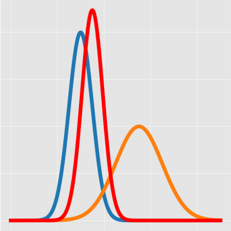
Parte III: IA e Incerteza.

Prof. Fabiano Araujo Soares, Dr. / FGA 0221 - Inteligência Artificial

Universidade de Brasília

2025

UnB - FCTE
Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia
conhecimento em movimento
sociedade em transformação



Como uma máquina pode "adivinhar" o futuro quando suas medições são ruidosas e imperfeitas?

Ela não adivinha – ela estima. O Filtro de Kalman permite que sistemas inteligentes mesclem previsões matemáticas e observações reais para descobrir o estado mais provável do mundo, mesmo frente à incerteza e ao ruído.

Motivação

- Em sistemas reais, dificilmente temos acesso direto a todas as variáveis de interesse.
- Sensores estão sujeitos a **ruídos**, atrasos e medições indiretas.
- É necessário um método que combine:
  - o **modelo matemático** do sistema (conhecimento teórico),
  - as **medições observadas** (dados do mundo real),
  - e uma estratégia que **corrija** continuamente os erros.
- O **Filtro de Kalman** é esse método: um **estimador ótimo** que produz a melhor estimativa possível do estado de um sistema dinâmico, no sentido de **minimizar o erro médio quadrático (MSE)**.
- Ele ajusta previsões e medições de forma recursiva, obtendo a resposta mais provável mesmo sob **incerteza e ruído**.

Resultado: estimativas suaves, consistentes e estatisticamente ótimas do estado real do sistema.

O que é um Filtro de Kalman?

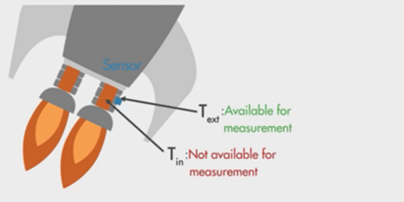
- O filtro de Kalman é um algoritmo **recursivo**, que estima o estado oculto de sistemas dinâmicos lineares sujeitos a ruído gaussiano.
- Ele calcula a **melhor estimativa** possível do estado, no sentido formal de **minimizar o erro médio quadrático** (estimativa ótima).
- A estimativa é uma combinação balanceada entre:
  - **Previsão** baseada no modelo dinâmico do sistema (como o sistema evolui com o tempo),
  - **Correção** das observações ruidosas e parciais capturadas pelos sensores.
- O filtro é **adaptativo** e **atualiza** a cada nova medição, refinando continuamente as estimativas.

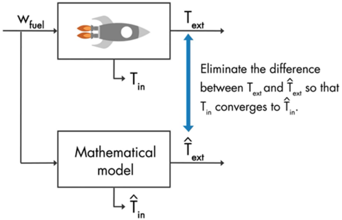
Em suma: o filtro de Kalman é um poderoso método probabilístico que combina o conhecimento do modelo e os dados observados para **fornecer a melhor previsão do estado real do sistema**.

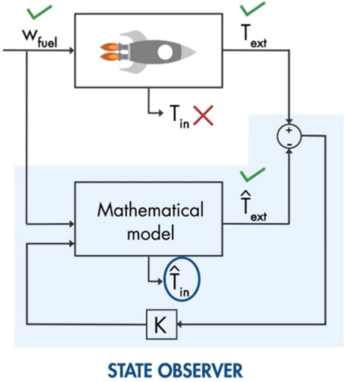
Filtro de Kalman - Histórico e Aplicações

- Desenvolvido por Rudolf E. Kálmán (1930-2016) que publicou seu trabalho em 1960:
  - **Kalman, Rudolph**, A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, Transactions of the ASME–Journal of Basic Engineering, Vol. 82, Serie D,Páginas 35-45, 1960;
- Aplicações comuns incluem: sistemas de navegação e piloto automático, visão computacional, monitoramento, rastreamento e processamento de sinais;
- Uma das primeiras aplicações do filtro de Kalman foi para estimar trajetórias do foguete da missão Apollo 11 que levou o homem a lua.

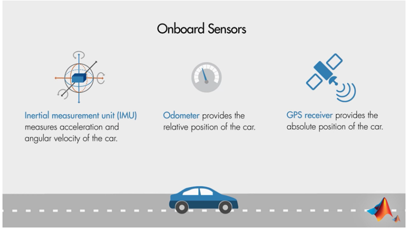
Filtro de Kalman - Principais Usos — **Estimação de Estados**:

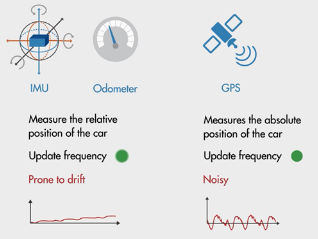




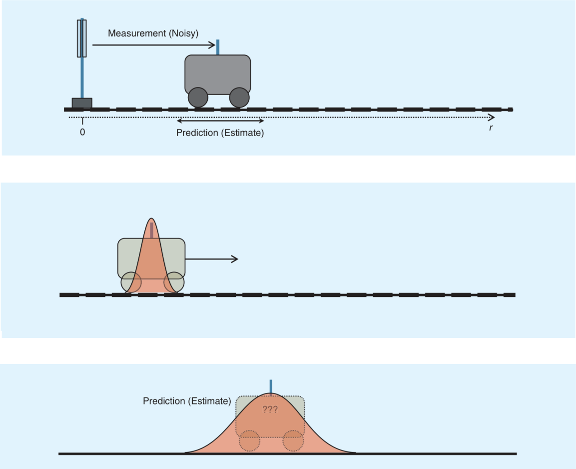


Filtro de Kalman - Principais Usos — **Fusão de Sensores**:



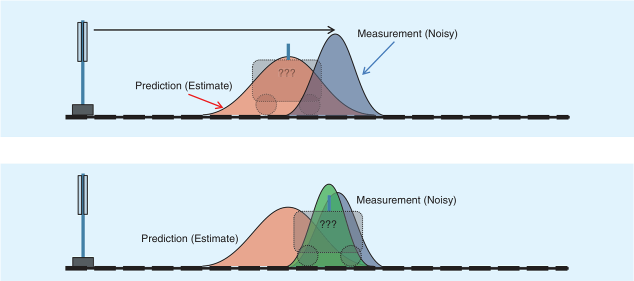


Filtro de Kalman - Como funciona?



- **Fig 2:** O conhecimento inicial do sistema no instante $t = 0$. A distribuição gaussiana vermelha representa a PDF que fornece a confiança inicial na estimativa da posição do trem. A seta apontando para a direita representa a velocidade inicial conhecida do trem.
- **Fig 3:** A previsão da localização do trem no instante $t = 1$ e o nível de incerteza dessa previsão são mostrados. A confiança no conhecimento da posição do trem diminuiu, pois não temos certeza se o trem sofreu alguma aceleração ou desaceleração no período de $t = 0$ a $t = 1$.

Filtro de Kalman - Como funciona?



- **Fig 4:** Medição da localização do trem no instante $t = 1$ e o nível de incerteza nessa medição ruidosa, representado pela PDF Gaussiana azul.
- **Fig 5:** Mostra a nova PDF (verde) gerado pela multiplicação das PDFs associados à previsão e medição da localização do trem no instante $t = 1$. Esta nova PDF fornece a melhor estimativa da localização do trem, combinando os dados da previsão e da medição.

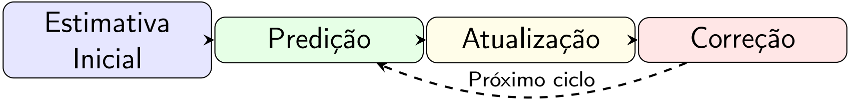
Passos do Filtro de Kalman — Parte I

- O filtro de Kalman segue um ciclo contínuo de estimativa dos estados de um sistema dinâmico.
- Começa com uma **estimativa inicial** — o melhor palpite (chute) do estado e de sua incerteza, com base nas informações disponíveis até o momento.
- Em seguida, realiza a etapa de **predição**:
  - Usa o modelo matemático do sistema para prever o próximo estado.
  - Gera a chamada *estimativa a priori*, ou seja, a previsão antes de considerar as novas medições.
- Essa previsão leva em conta tanto a dinâmica do sistema quanto o ruído de processo (incertezas internas).

O objetivo é antecipar o comportamento do sistema antes da chegada de novas observações.

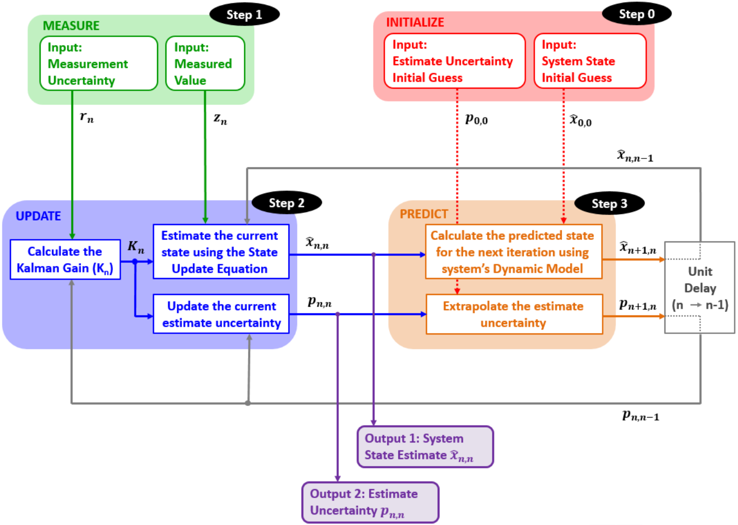
Passos do Filtro de Kalman — Parte II

- Quando uma nova medição é recebida, o filtro entra na fase de **atualização**:
  - Compara o valor previsto com o medido.
  - Calcula a diferença (**erro**) e ajusta o peso entre confiança no modelo e nas medições.
- Em seguida ocorre a **correção**, obtendo uma estimativa refinada e mais próxima do estado real.
- O ciclo é então reiniciado com a nova estimativa servindo de ponto de partida.



O filtro combina previsões e medições de forma recursiva e estatisticamente ótima.

Filtro de Kalman - Diagrama



Modelagem Matemática

Modelo Dinâmico Linear Discreto:

$$x_k = Ax_{k-1} + Bu_{k-1} + w_{k-1}$$

$$z_k = Hx_k + v_k$$

- x_k: vetor de estados do sistema
- u_{k-1}: comando de controle (opcional)
- z_k: vetor de medições (sensores)
- w_{k-1}: ruído do processo ($w \sim \mathcal{N}(0, Q)$)
- v_k: ruído de medição ($v \sim \mathcal{N}(0, R)$)
- Matrizes A, B, H: descrevem a dinâmica do sistema e sensoriamento

Ciclo do Filtro de Kalman

Para cada passo de tempo k:

1. **Previsão (prediction):**

$$\hat{x}_{k|k-1} = A\hat{x}_{k-1|k-1} + Bu_{k-1}$$
$$P_{k|k-1} = AP_{k-1|k-1}A^T + Q$$

2. **Atualização (correction):**

$$K_k = P_{k|k-1}H^T(HP_{k|k-1}H^T + R)^{-1} \quad \text{(Ganho de Kalman)}$$
$$\hat{x}_{k|k} = \hat{x}_{k|k-1} + K_k(z_k - H\hat{x}_{k|k-1})$$
$$P_{k|k} = (I - K_kH)P_{k|k-1}$$

O filtro alterna entre previsão com base no modelo e correção segundo as medições.

Filtro de Kalman – Notação

Significado dos simbolos e suas dimensões.

Símbolo	Variável	Dimensão	Tipo
x	Variável de estado	n x 1	Saída
P	Matriz de covariância de estados	n x n	Saída
z	medida	m x 1	Entrada
A	Matriz de transição de estados	n x n	Modelo do sistema
H	Matriz estado para medida	m x n	Modelo do sistema
R	Matriz de covariância de medidas	m x m	entrada
Q	Matriz de covariância de ruído de processo	n x n	Modelo do sistema
K	Ganho de Kalman	n x m	Interno
u	Variável de entrada	k x 1	Entrada (opcional)
B	Matriz de Controle	n x k	Modelo do sistema (opcional)

Propriedades do Filtro de Kalman

- O Filtro de Kalman é um **estimador linear ótimo** para sistemas dinâmicos sob ruído gaussiano, ou seja, minimiza o erro médio quadrático (MSE) das estimativas de estado.
- É um algoritmo **recursivo**: a cada nova medição, atualiza as estimativas sem necessidade de armazenar todo o histórico de dados.
- Fornece não apenas o estado estimado, mas também a **incerteza associada** (matriz de covariância), permitindo quantificar a confiabilidade da estimativa.
- A combinação ponderada entre modelo e medições é feita pelo **ganho de Kalman**, ajustado automaticamente a cada iteração.
- Sua formulação é **probabilística**, baseada em inferência Bayesiana sobre estados contínuos.

Em resumo: o filtro de Kalman fornece uma estimativa ótima e dinâmica do estado real, mesmo em cenários com ruído e incerteza.

Principais Aplicações

- **Controle e Navegação Autônoma:**
  - Estima posição e velocidade de veículos, drones e robôs.
  - Fusão de dados entre sensores como GPS, acelerômetros e giroscópios.
- **Rastreamento de Objetos:**
  - Usado em visão computacional e radares para prever e suavizar trajetórias.
  - Aplicações incluem vigilância, reconhecimento e realidade aumentada.
- **Sinais Biomédicos:**
  - Filtragem adaptativa de ECG, EEG e outros sinais ruidosos.
  - Estima estados fisiológicos ocultos a partir de medições indiretas.
- **Modelos Econômicos e Financeiros:**
  - Aplicado na previsão de séries temporais e estimativa de parâmetros variantes no tempo.

A versatilidade do Filtro de Kalman permite aplicações em engenharia, ciência de dados, finanças e biomedicina.

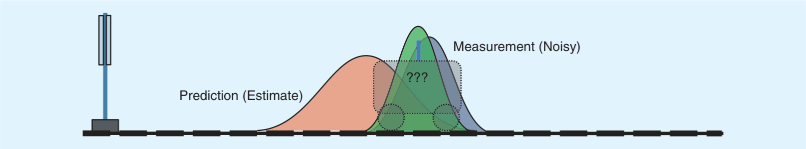
Intuição Visual – Parte I

- O filtro de Kalman realiza uma **fusão inteligente** entre duas fontes de informação:
  - o **modelo de previsão** (baseado nas equações do sistema),
  - e as **medições reais** (afetadas por ruído e incertezas).
- A confiança atribuída a cada uma depende de suas respectivas **incertezas (variâncias)**:
  - Quando o **sensor é ruidoso**, o filtro dá mais peso ao modelo.
  - Quando o **modelo é impreciso**, o filtro confia mais nas observações.
- O resultado é uma estimativa equilibrada, **mais precisa que ambas isoladamente**.

O princípio da fusão ótima: combinar previsão e medição para reduzir a incerteza.

Intuição Visual – Parte II

- O filtro de Kalman pode ser interpretado de forma geométrica e probabilística:
  - Cada fonte (modelo e sensor) representa uma **distribuição Gaussiana** de probabilidade sobre o estado.
  - A estimativa final corresponde à **interseção ponderada** dessas distribuições.
- O ganho de Kalman atua como o **peso ótimo** nessa fusão:
  - Ele ajusta-se dinamicamente a cada iteração,
  - minimizando o erro médio quadrático da estimativa.

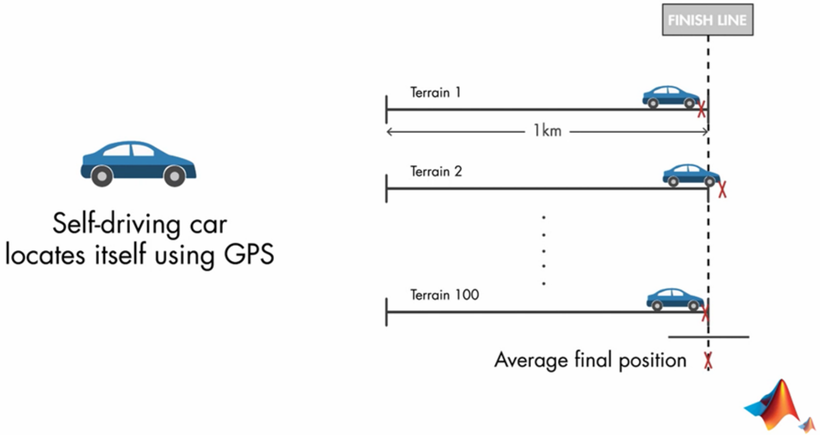


A nova estimativa surge no ponto onde o conhecimento do modelo e as medições se sobrepõem.

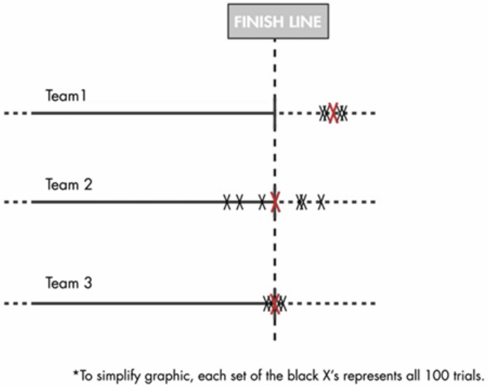
Filtro de Kalman: Exemplo Conceitual

- Você foi contratado para construir um sistema de piloto automático de um carro que utiliza GPS como entrada do sistema;
- O teste para o sistema é fazer o carro andar 1 km em diferentes terrenos e verificar o quão próximo ele termina da linha de chegada que fica a exatos 1 km de distância;
- Diferentes times fazem propostas para o projeto.

Filtro de Kalman: Exemplo Conceitual



Filtro de Kalman: Exemplo Conceitual

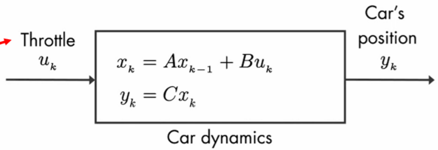


Observe que:

- **Team 1**: [Acurácia (-) Precisão (+)];
- **Team 2**: [Acurácia (+) Precisão (-)];
- **Team 3**: [Acurácia (+) Precisão (+)].

Filtro de Kalman: Exemplo Conceitual

Acelerador



$$x_k = \begin{bmatrix} velocity \\ position \end{bmatrix}$$

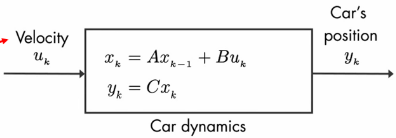
A, B e C são matrizes

Para esse sistema
Temos múltiplos estados

Filtro de Kalman: Exemplo Conceitual

SIMPLIFICAÇÃO DIDÁTICA DO MODELO

velocidade



A, B e C são matrizes

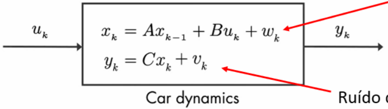
Único estado:
posição

$$x_k = [position]$$

$$C = 1$$

Desejamos conhecer **y** o mais preciso e acurado possível

Filtro de Kalman: Exemplo Conceitual

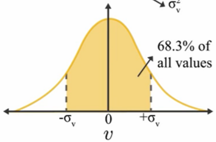


Ruído de processo (vento, aceleração, etc).

Ruído de medição

$v \sim N(0, R)$ → σ_v^2

$w \sim N(0, Q)$ → σ_w^2

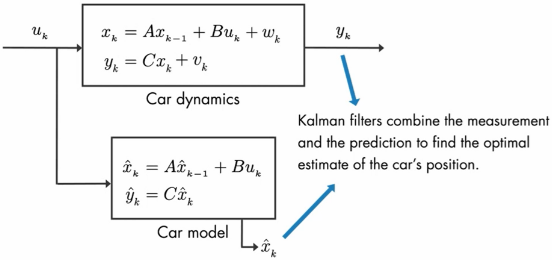


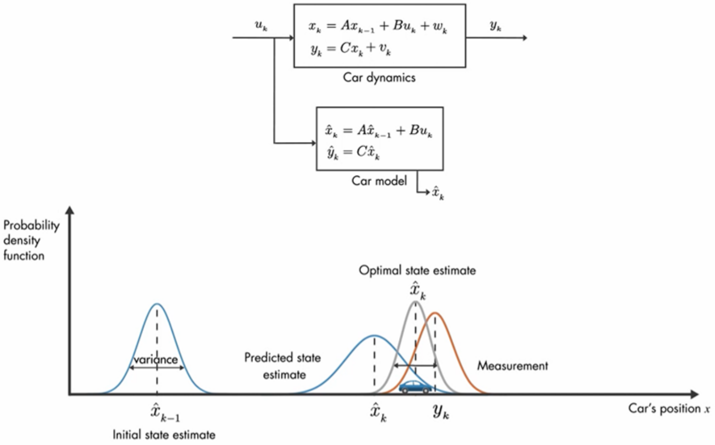
Como temos apenas uma variável de saída, R é um escalar igual a variância do ruído de medição, idem para Q.

Como a medição é ruidosa, a medida não reflete a verdadeira posição do carro.

Filtro de Kalman: Exemplo Conceitual

Se conhecemos o modelo matemático do carro, podemos estimar sua posição, mas essa estimação também não será perfeita devido ao ruído de processo.




u_k
$x_k = Ax_{k-1} + Bu_k + w_k$
$y_k = Cx_k + v_k$
y_k
Car dynamics
$\hat{x}_k = A\hat{x}_{k-1} + Bu_k$
$\hat{y}_k = C\hat{x}_k$
Car model
$\hat{x}_k$
Probability density function
Optimal state estimate
$\hat{x}_k$
variance
Predicted state estimate
Measurement
$\hat{x}_{k-1}$
Initial state estimate
$\hat{x}_k$
y_k
Car's position x

Para explicar o algoritmo passo a passo, vamos considerar o seguinte exemplo didático:

- Tomaremos como base o passo a passo de um Filtro de Kalman usado para rastrear aviões e objetos próximos a aeroportos. As saídas do sistema são exibidas aos operadores de controle de tráfego aéreo que monitoram o espaço aéreo.
- Para este exemplo, o radar emitirá suas medições em coordenadas cartesianas 2-D, x e y. Essas medições serão representadas como um vetor de coluna z (2×1). A matriz R de covariância de medidas associada a essas medições também será fornecida pelo radar junto com o instante de tempo em que a medição ocorreu, t. O subscrito m denota os parâmetros de medição. E o subscrito k denota a ordem da medição.

$$z_k = \begin{bmatrix} x_{m_k} \\ y_{m_k} \end{bmatrix}, R_k = \begin{bmatrix} \sigma_{x_m} & \sigma_{xy_m} \\ \sigma_{xy_m} & \sigma_{y_m} \end{bmatrix}, t_k = t_{m_k}$$

Algoritmo passo-a-passo - II

- O Filtro de Kalman estima a posição e a velocidade dos objetos com base nas medições do radar. A estimativa é representada por um vetor coluna (4×1), $\boldsymbol{x}$. Sua matriz de covariância de estados associada é representada por uma matriz (4×4), $\boldsymbol{P}$. Além disso, a estimativa do estado tem o instante de tempo de ocorrência denotada como T.

$$x_k = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, P_k = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{x\dot{x}} & \sigma_{x\dot{y}} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{y\dot{x}} & \sigma_{y\dot{y}} \\ \sigma_{x\dot{x}} & \sigma_{y\dot{x}} & \sigma_{\dot{x}}^2 & \sigma_{\dot{x}\dot{y}} \\ \sigma_{x\dot{y}} & \sigma_{y\dot{y}} & \sigma_{\dot{x}\dot{y}} & \sigma_{\dot{y}}^2 \end{bmatrix}, T_k$$

UnB

UnB - FCTE
Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia
conhecimento em movimento
sociedade em transformação

Algoritmo passo-a-passo - III

Passo 1: Inicializando o sistema

- Existem formas diferentes de inicializar um filtro de kalman;
- Em nosso exemplo iniciaremos o sistema com a primeira medida.
- Neste exemplo de rastreamento de radar, as medições de entrada contêm apenas informações de posição. O estado do sistema de saída conterá a posição e a velocidade do objeto.
- Quando ocorre a primeira medição, a única informação conhecida sobre o objeto é a posição naquele momento. A estimativa do estado do sistema será definida para a posição de entrada após a primeira estimativa. A covariância de erro de estado do sistema será definida para a precisão da posição da primeira medição.

Algoritmo passo-a-passo - IV

Passo 1: Inicializando o sistema

$$z_1 = \begin{bmatrix} x_{m_1} \\ y_{m_1} \end{bmatrix}, R_1 = \begin{bmatrix} \sigma_{x_m} & \sigma_{xy_m} \\ \sigma_{xy_m} & \sigma_{y_m} \end{bmatrix}, t_1 = t_{m_1}$$

$$x_1 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{m_1} \\ y_{m_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, P_1 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{x\dot{x}} & \sigma_{x\dot{y}} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{y\dot{x}} & \sigma_{y\dot{y}} \\ \sigma_{x\dot{x}} & \sigma_{y\dot{x}} & \sigma_{\dot{x}}^2 & \sigma_{\dot{x}\dot{y}} \\ \sigma_{x\dot{y}} & \sigma_{y\dot{y}} & \sigma_{\dot{x}\dot{y}} & \sigma_{\dot{y}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_m}^2 & \sigma_{xy_m} & 0 & 0 \\ \sigma_{xy_m} & \sigma_{y_m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, T_1 = t_{m_1}$$

Algoritmo passo-a-passo - V

Passo 2: Reinicializando o sistema

- A estimativa de estado do sistema é reinicializada porque uma estimativa de velocidade precisa de uma segunda medição de posição para cálculo;
- A estimativa do estado do sistema atualizado será a posição da segunda medição e a velocidade calculada;
- A covariância de erro de estado do sistema atualizada será a precisão da posição da segunda medição e uma precisão de velocidade aproximada;
- Para refletir um nível alto de incerteza na estimativa da velocidade, vamos atribuir os valores da matriz de covariância de estado para 10^4 nessas medidas.

Passo 2: Reinicializando o sistema

$$z_2 = \begin{bmatrix} x_{m_2} \\ y_{m_2} \end{bmatrix}, R_2 = \begin{bmatrix} \sigma_{x_m} & \sigma_{xy_m} \\ \sigma_{xy_m} & \sigma_{y_m} \end{bmatrix}, t_2 = t_{m_2}$$

$$x_2 = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{m_2} \\ y_{m_2} \\ \frac{x_{m_2} - x_{m_1}}{\Delta T} \\ \frac{y_{m_2} - y_{m_1}}{\Delta T} \end{bmatrix}, P_2 = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{x\dot{x}} & \sigma_{x\dot{y}} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{y\dot{x}} & \sigma_{y\dot{y}} \\ \sigma_{x\dot{x}} & \sigma_{y\dot{x}} & \sigma_{\dot{x}}^2 & \sigma_{\dot{x}\dot{y}} \\ \sigma_{x\dot{y}} & \sigma_{y\dot{y}} & \sigma_{\dot{x}\dot{y}} & \sigma_{\dot{y}}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{x_m}^2 & \sigma_{xy_m} & 0 & 0 \\ \sigma_{xy_m} & \sigma_{y_m}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10^4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^4 \end{bmatrix},$$

$$T_2 = t_{m_2}, \Delta T = T_2 - T_1.$$

Passo 3: Predição de estado do sistema

- Quando a terceira medição é recebida, a estimativa de estado do sistema é propagada para frente para alinhá-la no tempo com a medição. Esse alinhamento é feito para que a medição e a estimativa de estado possam ser combinadas.

$$x_p = Ax_{k-1}$$

$$P_p = AP_{k-1}A^T + Q$$

Algoritmo passo-a-passo - VIII

Passo 3: Predição de estado do sistema

$$z_3 = \begin{bmatrix} x_{m_3} \\ y_{m_3} \end{bmatrix}, \; R_3 = \begin{bmatrix} \sigma^2_{x_m} & \sigma_{xy_m} \\ \sigma_{xy_m} & \sigma^2_{y_m} \end{bmatrix}, \; t_3 = t_{m_3}, \; H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$x_p = Ax_2 = \begin{bmatrix} x + \dot{x}\Delta T \\ y + \dot{y}\Delta T \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}, \; A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; Q = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{bmatrix},$$

$$P_p = AP_2A^T + Q = \begin{bmatrix} \sigma^2_x + 10^4 \cdot \Delta T^2 + 10 & \sigma_{xy} & 10^4 \cdot \Delta T & 0 \\ \sigma_{xy} & \sigma^2_y + 10^4 \cdot \Delta T^2 + 10 & 0 & 10^4 \cdot \Delta T \\ 10^4 \cdot \Delta T & 0 & 10025 & 0 \\ 0 & 10^4 \cdot \Delta T & 0 & 10025 \end{bmatrix},$$

$$T_3 = t_{m_3}, \; \Delta T = T_3 - T_2.$$

UnB

UnB - FCTE
Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia
conhecimento em movimento
sociedade em transformação

Passo 3: Predição de estado do sistema

- Observe que a matriz H transforma x_k em $\hat{z}_k$:

$$z_3 = Hx_3 + v_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x + \dot{x}\Delta T \\ y + \dot{y}\Delta T \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} + v_k = \begin{bmatrix} x_{m_3} \\ y m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 + \dot{x}\Delta T \\ y_2 + \dot{y}\Delta T \end{bmatrix} + v_k.$$

- Observe ainda que:

$$x_p = Ax_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \Delta T \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x \\ y \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x + \dot{x}\Delta T \\ y + \dot{y}\Delta T \\ \dot{x} \\ \dot{y} \end{bmatrix}$$

Passo 4: Calculando o ganho de Kalman

- O Filtro de Kalman calcula um ganho de Kalman para cada nova medição que determina o quanto a medição de entrada influenciará a estimativa do estado do sistema.
- Em outras palavras, quando uma medição altamente ruidosa chega para atualizar o estado do sistema, o sistema confiará mais em sua estimativa de estado atual e vice versa.

$$K = P_p H^T (H P_p H^T + R)^{-1}$$

Passo 5:

Estimando o estado do sistema e a matriz de covariância do erro do estado do sistema

- O Filtro de Kalman usa o ganho de Kalman para estimar o estado do sistema e a matriz de covariância de erro para o tempo da medição de entrada.

$$x_k = x_p + K(z_k - Hx_p)$$

$$P_k = P_p - KHP_p$$

Algoritmo passo-a-passo - XI

Retorne ao passo 3:

- A partir desse ponto, retornamos ao passo de predição.

$$x_p = Ax_{k-1}$$

$$P_p = AP_{k-1}A^T + Q$$

- Vamos retornar ao modelo de carro andando com velocidade constante em uma pista retilínea;
- O carrinho está andando com velocidade constante sobre a pista mas existe ruído associado (deslizamento dos pneus, atrito, etc);
- Temos um sensor tipo radar que afere a posição do carro mas também possui um erro associado;
- Queremos estimar a posição do carro de acordo com nosso modelo e nossas medidas e também queremos estimar a velocidade do carro.

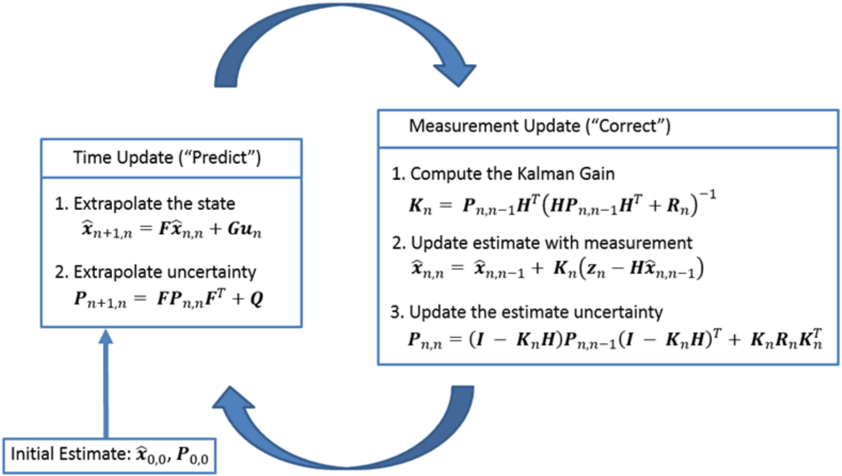
Filtro de Kalman: Exemplo em Python – 2

- Vamos retornar agora ao modelo de radar rastreando posição e velocidade de aviões em um eixo cartesiano;
- O radar identifica a posição (evidência) e estima a velocidade (variável oculta) a medida e a estimação possuem erro associado;
- Queremos estimar a posição e a velocidade dos aviões de acordo com nosso modelo e nossas medidas.

Resumo da Aula: Filtro de Kalman

- O filtro de Kalman é um algoritmo recursivo fundamental em Inteligência Artificial para estimar estados de sistemas dinâmicos sob ruído e incerteza.
- Ele fornece uma estimativa **ótima em média quadrática**, combinando predições do modelo com dados observados de forma probabilística.
- Permite a **fusão eficiente de múltiplas fontes de informações** (sensores heterogêneos) e é base para diversas soluções reais de navegação, rastreamento, controle e automação.
- Suas principais aplicações incluem:
  - Veículos autônomos, drones e robótica para localização e controle de movimento preciso.
  - Rastreamento em tempo real de objetos em visão computacional e sistemas de defesa.
  - Processamento de sinais biomédicos, como ECG e EEG, para filtragem adaptativa.
  - Previsão e modelagem em finanças e econometria.
- Expansões modernas se destacam como:
  - **Filtro de Kalman Estendido (EKF)**, para lidar com sistemas não lineares.
  - **Filtros de Partículas** e técnicas avançadas em aprendizado de máquina.

Filtro de Kalman - Diagrama Completo



Filtro de Kalman - Diagrama Completo

	Equation	Equation Name	Alternative names
Predict	$\hat{\boldsymbol{x}}_{n+1,n} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{x}}_{n,n} + \boldsymbol{G}\boldsymbol{u}_n$	State Extrapolation	Predictor Equation Transition Equation Prediction Equation Dynamic Model State Space Model
	$\boldsymbol{P}_{n+1,n} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_{n,n}\boldsymbol{F}^T + \boldsymbol{Q}$	Covariance Extrapolation	Predictor Covariance Equation
Update (correction)	$\hat{\boldsymbol{x}}_{n,n} = \hat{\boldsymbol{x}}_{n,n-1} + \boldsymbol{K}_n(\boldsymbol{z}_n - \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{x}}_{n,n-1})$	State Update	Filtering Equation
	$\boldsymbol{P}_{n,n} = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_n\boldsymbol{H})\,\boldsymbol{P}_{n,n-1}(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_n\boldsymbol{H})^T + \boldsymbol{K}_n\boldsymbol{R}_n\boldsymbol{K}_n^T$	Covariance Update	Corrector Equation
	$\boldsymbol{K}_n = \boldsymbol{P}_{n,n-1}\boldsymbol{H}^T\left(\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}_{n,n-1}\boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{R}_n\right)^{-1}$	Kalman Gain	Weight Equation
Auxiliary	$\boldsymbol{z}_n = \boldsymbol{H}\boldsymbol{x}_n$	Measurement Equation	
	$\boldsymbol{R}_n = E\left(\boldsymbol{v}_n\boldsymbol{v}_n^T\right)$	Measurement Covariance	Measurement Error
	$\boldsymbol{Q}_n = E\left(\boldsymbol{w}_n\boldsymbol{w}_n^T\right)$	Process Noise Covariance	Process Noise Error
	$\boldsymbol{P}_{n,n} = E\left(\boldsymbol{e}_n\boldsymbol{e}_n^T\right) = E\left((\boldsymbol{x}_n - \hat{\boldsymbol{x}}_{n,n})(\boldsymbol{x}_n - \hat{\boldsymbol{x}}_{n,n})^T\right)$	Estimation Covariance	Estimation Error

Filtro de Kalman - Diagrama Completo

Term	Name	Alternative term	Dimensions
$\boldsymbol{x}$	State Vector		$n_x \times 1$
$\boldsymbol{z}$	Measurements Vector	$\boldsymbol{y}$	$n_z \times 1$
$\boldsymbol{F}$	State Transition Matrix	$\boldsymbol{\Phi}, \boldsymbol{A}$	$n_x \times n_x$
$\boldsymbol{u}$	Input Variable		$n_u \times 1$
$\boldsymbol{G}$	Control Matrix	$\boldsymbol{B}$	$n_x \times n_u$
$\boldsymbol{P}$	Estimate Covariance	$\boldsymbol{\Sigma}$	$n_x \times n_x$
$\boldsymbol{Q}$	Process Noise Covariance		$n_x \times n_x$
$\boldsymbol{R}$	Measurement Covariance		$n_z \times n_z$
$\boldsymbol{w}$	Process Noise Vector	$\boldsymbol{y}$	$n_x \times 1$
$\boldsymbol{v}$	Measurement Noise Vector		$n_z \times 1$
$\boldsymbol{H}$	Observation Matrix	$\boldsymbol{C}$	$n_z \times n_x$
$\boldsymbol{K}$	Kalman Gain		$n_x \times n_z$
$\boldsymbol{n}$	Discrete-Time Index	$\boldsymbol{k}$	

Dimensions notation:

- n_x is a number of states in a state vector
- n_z is a number of measured states
- n_u is a number of elements of the input variable

Tipos de Filtros de Kalman

Tipo de Filtro	Modelo do Sistema	Abordagem principal	Vantagens	Desvantagens
Kalman Discreto	Linear (Tempo Discreto)	Algoritmo recursivo com etapas de predição e atualização para sistemas discretos	Simples de implementar, otimizado para computação rápida	Inadequado para sistemas não lineares
Kalman Contínuo	Linear (Tempo Contínuo)	Solução recursiva para sistemas em tempo contínuo, baseado em equações diferenciais	Ideal para sistemas descritos por equações diferenciais contínuas	Geralmente discretizado para implementação computacional
Kalman Estendido (EKF)	Não Linear	Lineariza o modelo usando o jacobiano	Mais fácil de implementar e com menor custo computacional que métodos mais avançados	Pode ser impreciso em sistemas altamente não lineares
Kalman Unscented (UKF)	Não Linear	Usa a Transformada Unscented com pontos sigma para propagação das incertezas	Mais preciso que o EKF em sistemas altamente não lineares	Um pouco mais complexo e pode ter custo computacional maior
Filtro de Partículas (PF)	Não Linear (Não Gaussiano)	Método de Monte Carlo, usando amostras ponderadas para representar distribuições	Pode lidar com qualquer tipo de não linearidade e distribuição	Exige maior poder computacional e pode ser difícil de implementar

Referências

- Russell, S., Norvig, P., "Artificial Intelligence: A Modern Approach", 4th ed., Person, 2022.
- Simon, D., "Optimal state Estimation", Wiley, 2006.
- Franklin, W. Kalman Filter Made Easy, 2022.
- Becker, A. "Kalman Filter from the Ground Up", 2023.
- Faragher, R. "Understanding the Basis of the Kalman Filter Via a Simple and Intuitive Derivation", IEEE Sig. Proc. Mag., 2012.

- **Aulas**: Understanding Kalman Filters
  - Understanding Kalman Filters: `https://www.youtube.com/watch?v=mwn8xhgNpFY`
  - Visually Explained: Kalman Filters: `https://www.youtube.com/watch?v=IFeCIbljreY`

Obrigado!

E-mail: fabianosoares@unb.br

LinkedIn: https://www.linkedin.com/in/fabiano-soares-06b6a821a/

Site do curso: https://www.fabianosoares.eng.br/fga0221-inteligência-artificial