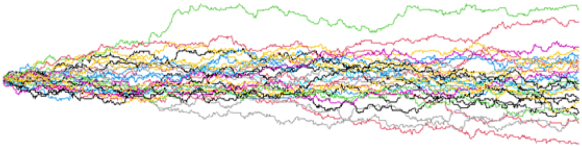
Parte III: IA e Incerteza.

Prof. Fabiano Araujo Soares, Dr. / FGA 0221 - Inteligência Artificial

Universidade de Brasília

2025

Raciocínio probabilístico ao longo do tempo



Como modelos de IA lidam com incertezas que evoluem com o tempo, e que tipos de ferramentas estruturam o raciocínio para estimar estados, prever comportamentos e guiar decisões em ambientes dinâmicos?

Em problemas reais, o estado muda ao longo do tempo e as informações são parciais e ruidosas. Modelos dinâmicos, ajudam a estimar estados, prever evoluções e orientar decisões com base em dados que chegam sequentialmente, conectando teoria estatística a aplicações em IA.

Motivação: Incerteza ao longo do tempo

- **Pergunta norteadora**: Por que entender e raciocinar sobre estados que mudam no tempo e são observados com ruído é crucial para IA em aplicações reais?
- **Ponto-chave**: A incerteza temporal aparece em sensores, ambientes dinâmicos e decisões autônomas; modelos dinâmicos permitem estimar o estado atual, prever evoluções e guiar ações com base em evidências que chegam progressivamente.
- **Impacto prático**: Técnicas como cadeias de Markov, filtros de Kalman e redes bayesianas dinâmicas conectam teoria estatística a aplicações em processamento de sinais, visão computacional e sistemas autônomos, melhorando robustez e adaptabilidade.

Tempo e Incerteza

- **Problemas estáticos**: situações onde o estado do sistema é suposto fixo ao longo do tempo (ex.: diagnóstico de falha de um componente, onde o estado não muda durante o processo de diagnóstico).
- **Problemas dinâmicos**: o estado evolui com o tempo (ex.: monitoramento de Diabetes, com variações em insulina, dieta e atividade; ou sistemas de sensores em tempo real).
- **Conexão com IA**: modelos dinâmicos (cadeias de Markov, Kalman, redes bayesianas dinâmicas) permitem estimar estados, prever evoluções e orientar decisões com base em evidências que chegam ao longo do tempo.

Estados e observações

- Por enquanto, vamos considerar problemas de tempo discreto. E vamos enumerar apenas as amostras temporais como $(0, 1, 2, ...)$, O Δ entre amostras será considerado o mesmo (por exemplo 1/30 segundos);
- Cada amostra temporal em um modelo de probabilidade de tempo discreto contém um conjunto de variáveis aleatórias, alguns **observáveis** e outros **não observáveis**;
- Para simplificar, vamos supor que o mesmo subconjunto de variáveis são observáveis em cada amostra temporal;

Estados e observações

- Usaremos X_t para denotar o conjunto de variáveis de estado no tempo t, que não são observáveis e E_t para denotar o conjunto de variáveis observáveis.
- A observação no tempo t é $E_t = e_t$ para algum conjunto de valores e_t.
- Vamos assumir que nossas sequências temporais iniciam em $t = 0$;
- Vamos também utilizar a notação $a : b$ para denotar um intervalo de variáveis, por exemplo $U_{1:3}$ corresponde a $U1, U2, U3$;
- Evidências (valores observados) começam a chegar a partir do instante de tempo $t = 1$;

Modelo de transição e Modelo de sensores

- Com o conjunto de variáveis de estado e evidência para um determinado problema decidido, o próximo passo é
  - Especificar como o mundo evolui (o modelo de transição) e
  - Como as variáveis de evidência recebem seus valores (o modelo de sensor).
- O modelo de transição especifica a distribuição de probabilidade das variáveis de estado mais recentes, dados os valores anteriores, ou seja $P(X_t \mid X_{0:t-1})$.
- **Agora temos um problema**: o conjunto $X_{0:t-1}$ aumenta de tamanho à medida que t aumenta.
- Resolvemos o problema fazendo uma **suposição de Markov** — o estado atual depende apenas de um número fixo finito de estados anteriores.

- A forma mais simples para essa suposição são os **processos de Markov de 1ª ordem**. Nesse caso, o estado atual depende apenas do estado anterior, logo:

$$P(X_t \mid X_{0:t-1}) = P(X_t \mid X_{t-1}).$$

- Ou seja, o modelo de transição é a distribuição condicional $P(X_t \mid X_{t-1})$.
- O modelo de transição para um processo de Markov de segunda ordem é a distribuição condicional $P(X_t \mid X_{t-2}, X_{t-1})$.

Modelo de transição e Modelo de sensores

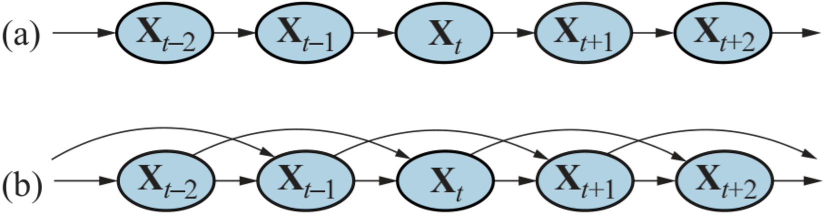


Figure 14.1 (a) Bayesian network structure corresponding to a first-order Markov process with state defined by the variables $\mathbf{X}_t$. (b) A second-order Markov process.

Modelo de transição e Modelo de sensores

- Mesmo com a **suposição de Markov**, ainda há um problema: existem infinitas possibilidades.
- Evitamos este problema assumindo que as mudanças no estado do mundo são causadas por um processo de tempo homogêneo isto é, um processo de mudança que é governado por leis que não mudam com o tempo (invariantes no tempo);
- Para o **modelo de sensor** podemos fazer a seguinte **suposição de sensor de Markov**:

$$P(E_t \mid X_{0:t}, E_{1:t-1}) = P(E_t \mid X_t).$$

Modelo de transição e Modelo de sensores

- Ou seja, qualquer estado é suficiente para gerar seus valores de sensores;
- Portanto, $P(E_t \mid X_t)$ é nosso **modelo de sensor** (ou **modelo de observação**);

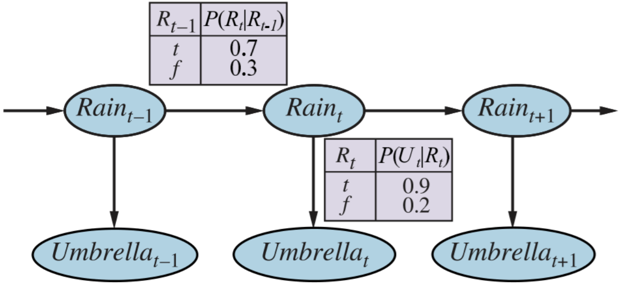


Figure 14.2 Bayesian network structure and conditional distributions describing the umbrella world. The transition model is $\mathbf{P}(Rain_t \mid Rain_{t-1})$ and the sensor model is $\mathbf{P}(Umbrella_t \mid Rain_t)$.

Modelo de transição e Modelo de sensores

- Além de especificar os modelos de transição e sensores, precisamos dizer como tudo começa: A distribuição de probabilidade a priori no tempo 0, $P(X_0)$;
- Com isso, temos uma especificação da distribuição conjunta completa sobre todas as variáveis. Lembrando de:

$$P(x_1, ..., x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid parentes(X_i)).$$

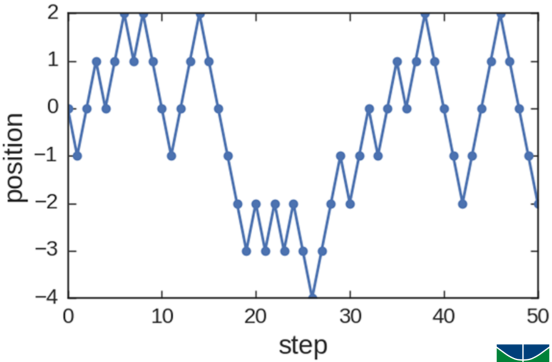
- Chegamos a

$$P(X_{0:t}, E_{1:t}) = P(X_0) \prod_{i=1}^{t} P(X_i \mid X_{i-1}) P(E_i \mid X_i).$$

- Os três termos do lado direito são i) **Modelo de estado inicial** $P(X_0)$; ii) O **Modelo de transição** $P(X_i \mid X_{i-1})$ e iii) **Modelo de sensor** $P(E_i \mid X_i)$.

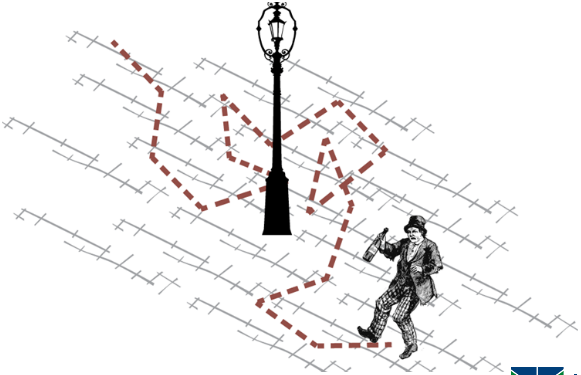
Modelo de Markov – Exemplo: *random walking*

- A estrutura do mundo do guarda-chuva é um **processo de Markov de primeira ordem** – presumiu-se que a probabilidade de chuva é dependente de chuva no dia anterior;
- Outros mundos possíveis são: Partícula andando em um eixo;
- mudando sua posição em ± 1 a cada passo de tempo. Processo de Markov de primeira ordem.



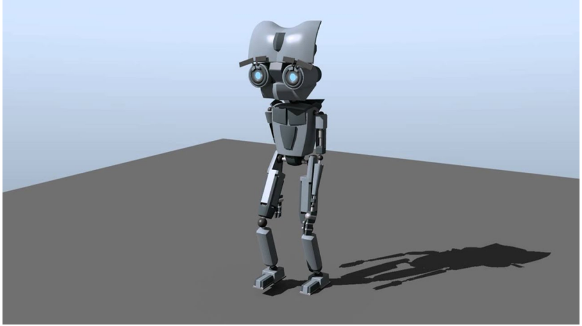
Modelo de Markov – Exemplo: Caminhar do bêbado

- Pode-se propor que a posição e a velocidade são um conjunto suficiente de variáveis de estado;
- Pode-se simplesmente usar as leis de Newton para calcular a nova posição, e a velocidade pode mudar de forma imprevisível.



Modelo de Markov – Exemplo: Robô com bateria

- Consumo da bateria pode influenciar na mudança de velocidade $\rightarrow$ **Propriedade de Markov violada!**
- Para restaurar, devemos incluir a variável $Bateria_t$ $\rightarrow$ Isso ajuda a prever o movimento do robô mas é necessário modelar como a bateria é consumida.



- O estado oculto evolui no tempo. Observações chegam com ruído. Inferência atualiza estimativas. Decisão baseada na evidência mais recente.

$$
\begin{tikzcd}
x_t \text{ (Estado oculto)} \arrow[r, "\text{Inferência}"] \arrow[d, "\text{Observação}"'] & \hat{x}_t \text{ (Inferência)} \arrow[r, "\text{Decisão}"] & \textbf{Ação} \\
y_t \text{ (Observação)} \arrow[ur, "\text{Atualização}"] & &
\end{tikzcd}
$$

Modelos Dinâmicos de Estado

- Modelo de estado-espacial (linear/Gaussiano) e variantes não lineares.
- Equações centrais (linear):

$$\mathrm{x}_t = \mathrm{F}\mathrm{x}_{t-1} + \mathrm{w}_t, \qquad \mathrm{w}_t \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{Q})$$

$$\mathrm{y}_t = \mathrm{H}\mathrm{x}_t + \mathrm{v}_t, \qquad \mathrm{v}_t \sim \mathcal{N}(0, \mathrm{R})$$

- Nota: o estado x_t é estimado a partir de x_{t-1} com ruído w_t; a observação y_t é função de x_t com ruído v_t.
- Não-linearidade (Não será explorado): $\mathrm{f}(\cdot)$ e $\mathrm{h}(\cdot)$.
  - EKF (Filtro de Kalman Estendido): Focaliza a linearização local de f e h.
  - UKF (Filtro de Kalman Não Linear com unscented transform): usa *unscented transform* para melhor aproximação não linear.
  - PF (Filtros de Partículas): filtros de partículas para distribuições não gaussinas.

Conclusões

- A inferência temporal combina projeção (previsão do estado) com atualização (incorporação de nova evidência).
- Modelos lineares/Gaussianos oferecem soluções eficientes; variantes não lineares (EKF/UKF/PF) estendem o alcance a problemas reais.
- A prática envolve escolhas entre desempenho computacional, precisão da modelagem e robustez a ruídos.

Inferência em modelos temporais

- **Filtragem (ou estimação de estados)**: Computar o estado de crença $P(X_t \mid e_{1:t})$ — A distribuição a posteriori do estado mais recente dado todas as evidências até o momento;
- **Predição**: Cálculo da distribuição a posteriori de um estado futuro dado todas as evidências até o instante de tempo atual. Ou seja, desejamos calcular $P(X_{t+k} \mid e_{1:t})$ para algum $k > 0$;
- **Suavização**: Computar a distribuição a posteriori de um estado passado, dado todas as evidências até o instante de tempo atual, ou seja $P(X_k \mid e_{1:t})$ para algum k onde $0 \geq k < t$;
- **Explicação mais provável**: Dada uma sequência de observações, podemos encontrar a sequência de estados que mais provavelmente gerou essas observações. Ou seja, desejamos calcular $argmax_{x_{1:t}} P(x_{1:t} \mid e_{1:t})$;
- **Aprendizado**: Os modelos de transição e sensor podem ser aprendidos (ou corrigidos) por meio de observação.

Filtragem e predição

- um algoritmo de filtragem útil precisa manter o estado atual e atualizá-lo, ao invés de voltar ao longo de todo o histórico de percepções para cada atualização.
- Ou seja, dado o resultado da filtragem até o tempo t, o agente precisa calcular o resultado para $t+1$ a partir da nova evidência e_{t+1}. Logo:

$$P(X_{t+1} \mid e_{1:t+1}) = f(e_{t+1}, P(X_t \mid e_{1:t}))$$

  Para alguma função f.
- Podemos ver esse cálculo como sendo composto de duas partes: primeiro, a distribuição de estados é projetada para frente, de t para $t+1$, então ela é atualizada usando a nova evidência e_{t+1}.

Filtragem e predição

- Podemos ver essa atualização de forma mais clara reorganizando a equação:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{t+1} \mid \boldsymbol{e}_{1:t+1}) &= \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{t+1} \mid \boldsymbol{e}_{1:t}, \boldsymbol{e}_{t+1}) && \text{(dividindo a evidência)} \\
&= \alpha \boldsymbol{P}(\boldsymbol{e}_{t+1} \mid \boldsymbol{X}_{t+1}, \boldsymbol{e}_{1:t}) \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{t+1} \mid \boldsymbol{e}_{1:t}) && \text{(regra de Bayes dado } e_{1:t}\text{)} \\
&= \alpha \underbrace{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{e}_{t+1} \mid \boldsymbol{X}_{t+1})}_{\text{update}} \underbrace{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{t+1} \mid \boldsymbol{e}_{1:t})}_{\text{prediction}} && \text{(suposição de sensores de Markov)}
\end{aligned}
$$

Filtragem e predição

- Agora, inserimos uma expressão para a predição de um passo $P(X_{t+1} \mid e_{1:t})$, obtida pelo condicionamento no estado atual X_t — Mensagem para frente.

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{e}_{1:t+1}) &= \alpha\, \mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1}) \sum_{x_t} \mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{x}_t, \mathbf{e}_{1:t}) \mathbf{P}(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{e}_{1:t}) \\
&= \alpha\, \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{e}_{t+1} \mid \mathbf{X}_{t+1})}_{\text{modelo de sensor}} \sum_{x_t} \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{X}_{t+1} \mid \mathbf{x}_t)}_{\text{modelo de transição}} \underbrace{\mathbf{P}(\mathbf{x}_t \mid \mathbf{e}_{1:t})}_{\text{recursão}} \text{(Suposição de Markov).}
\end{aligned}$$

Filtragem e predição

- Nesta expressão, todos os termos vêm do modelo ou da estimativa de estado anterior.
- Vamos ilustrar esse procedimento a partir de dois passos do exemplo "Mundo do guarda-chuva":
- **Dia 0**: Não temos observações, iniciamos com um "chute" inicial: $P(R_0) = \langle 0.5, 0.5 \rangle$.
- **Dia 1**: O operador aparece com o guarda-chuva, logo $U_1 = \mathit{verdadeiro}$. A previsão de $t = 0$ para $t = 1$ é

$$P(R_1) = \sum_{R_0} P(R_1 \mid r_0) P(r_0) = \langle 0.7, 0.3 \rangle \times 0.5 + \langle 0.3, 0.7 \rangle \times 0.5 = \langle 0.5, 0.5 \rangle.$$

Filtragem e predição

- Então o passo de atualização multiplica pela probabilidade da evidência para $t = 1$ e normaliza:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(R_1 \mid u_1) &= \alpha \boldsymbol{P}(u_1 \mid R_1)\boldsymbol{P}(R_1) = \alpha\langle 0.9, 0.2\rangle\langle 0.5, 0.5\rangle \\ &= \alpha\langle 0.45, 0.1\rangle \approx \alpha\langle 0.818, 0.182\rangle\end{aligned}$$

- **Dia 2**: O operador está novamente com o guarda-chuva, logo $U_2 = \textit{verdadeiro}$. A previsão de $t = 1$ para $t = 2$ é

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(R_2 \mid u_1) &= \sum_{r_1} \boldsymbol{P}(R_2 \mid r_1)\boldsymbol{P}(r_1 \mid u_1) \\ &= \langle 0.7, 0.3\rangle \times 0.818 + \langle 0.3, 0.7\rangle \times 0.182 \approx \langle 0.627, 0.373\rangle.\end{aligned}$$

- E atualizando esse resultado com a evidência para $t = 2$ nos dá:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(R_2 \mid u_1, u_2) &= \alpha \boldsymbol{P}(u_2 \mid R_2)\boldsymbol{P}(R_2 \mid u_1) = \alpha\langle 0.9, 0.2\rangle\langle 0.627, 0.373\rangle \\ &= \alpha\langle 0.565, 0.075\rangle \approx \langle 0.883, 0.117\rangle.\end{aligned}$$

Usos reais da filtragem e inferência temporal

- **Rastreamento de objetos em vídeo (Visão Computacional)**: estimar posição e velocidade de um objeto com ruído de sensor.
- **Localização e mapeamento em robótica**: manter estimativas de posição em tempo real com sensores diversos.
- **Sinais biomédicos**: monitoramento contínuo (por exemplo, sinais vitais) com fusão de múltiplos sensores.
- **Controle de sistemas**: previsão de estados para atuadores, mantendo estabilidade sob incerteza.

Em muitos problemas, é fundamental estimar estados passados de um sistema dinâmico, utilizando todas as evidências observadas até o presente.

Isso é especialmente útil quando observações futuras trazem informação relevante sobre o passado, melhorando a precisão da estimativa dos estados.

Definição de Suavização

Suavização (*smoothing*) busca calcular:

$$P(X_k \mid e_{1:t})$$

Onde X_k é o estado no tempo $k < t$ e $e_{1:t}$ são as evidências do tempo 1 até t.

Objetivo: Melhorar a estimativa de estados anteriores usando toda a sequência de observações disponível.

UnB

UnB - FCTE
Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia
conhecimento em movimento
sociedade em transformação

- Para suavização, podemos dividir o cálculo em duas partes – As evidencias até o instante k e as evidências do instante $k+1$ até t:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(X_k \mid \boldsymbol{e}_{1:t}) &= \boldsymbol{P}(X_k \mid \boldsymbol{e}_{1:k}, \boldsymbol{e}_{k+1:t}) \\
&= \alpha \boldsymbol{P}(X_k \mid \boldsymbol{e}_{1:k}) \boldsymbol{P}(\boldsymbol{e}_{k+1:t} \mid \boldsymbol{X}_k, \boldsymbol{e}_{1:k}) \text{ (regra de Bayes dado } e_{1:k}) \\
&= \alpha \boldsymbol{P}(X_k \mid \boldsymbol{e}_{1:k}) \boldsymbol{P}(\boldsymbol{e}_{k+1:t} \mid \boldsymbol{X}_k) \text{ (independência condicional)}
\end{aligned}$$

Suavização

- Podemos então criar um processo recursivo que retorna a partir de t:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{P}(\mathbf{e}_{k+1:t} \mid \boldsymbol{X}_k) &= \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} \boldsymbol{P}(\mathbf{e}_{k+1:t} \mid \boldsymbol{X}_k, \mathbf{x}_{k+1})\boldsymbol{P}(\mathbf{x}_{k+1} \mid \boldsymbol{X}_k) \text{ (condicionado em } \boldsymbol{X}_{k+1}\text{)} \\
&= \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} P(\mathbf{e}_{k+1:t} \mid \mathbf{x}_{k+1})\boldsymbol{P}(\mathbf{x}_{k+1} \mid \boldsymbol{X}_k) \text{ (independência condicional)} \\
&= \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} P(\mathbf{e}_{k+1}, \mathbf{e}_{k+2:t} \mid \mathbf{x}_{k+1})\boldsymbol{P}(\mathbf{x}_{k+1} \mid \boldsymbol{X}_k) \\
&= \sum_{\mathbf{x}_{k+1}} \underbrace{P(\mathbf{e}_{k+1} \mid \mathbf{x}_{k+1})}_{\text{modelo de sensor}} \underbrace{P(\mathbf{e}_{k+2:t} \mid \mathbf{x}_{k+1})}_{\text{recorrência}} \underbrace{\boldsymbol{P}(\mathbf{x}_{k+1} \mid \boldsymbol{X}_k)}_{\text{modelo de transição}} \quad \text{(mensagem reversa)}
\end{aligned}
$$

- onde o último passo é seguido pela independência condicional de e_{k+1} e $e_{k+2:t}$, dado x_{k+1}.

- Para a inicialização da fase de retorno, temos $P(e_{t+1:t} \mid X_t) = P(\mid X_t) = 1$, onde 1 é um vetor de 1$s$. A razão para isso é que $e_{t+1:t}$ é uma sequência vazia, então a probabilidade de observá-lo é 1.
- Vamos aplicar esse algoritmo ao exemplo do mundo do guarda-chuva calculando a estimativa suavizada para probabilidade de chuva em $k = 1$, dada as observações do guarda-chuva nos dias 1 e 2. Temos então:

$$\boldsymbol{P}(R_1 \mid u_1, u_2) = \alpha \boldsymbol{P}(R_1 \mid u_1) \boldsymbol{P}(u_2 \mid R_1).$$

Suavização

- O primeiro termo já conhecemos $\langle 0.818, 0.182\rangle$, o segundo termo pode ser calculado aplicando a recursão retroativa

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}(u_2 \mid R_1) &= \sum_{r_2} P(u_2 \mid r_2) P(\quad \mid r_2) P(r_2 \mid R_1) \\
&= (0.9 \times 1 \times \langle 0.7, 0.3\rangle) + (0.2 \times 1 \times \langle 0.3, 0.7\rangle) = \langle 0.69, 0.41\rangle.
\end{aligned}
$$

- Finalmente:

$$
\mathbf{P}(R_1 \mid u_1, u_2) = \alpha \langle 0.818, 0.182\rangle \times \langle 0.69, 0.41\rangle \approx \langle 0.883, 0.117\rangle.
$$

Algoritmo Forward-Backward

O cálculo pode ser decomposto em duas componentes:

$$P(X_k \mid e_{1:t}) = P(X_k \mid e_{1:k}) \cdot P(e_{k+1:t} \mid X_k, e_{1:k})$$

- $P(X_k \mid e_{1:k})$: filtragem (mensagem para frente)
- $P(e_{k+1:t} \mid X_k, e_{1:k})$: mensagem para trás (*backward message*)

Mensagem Para Trás (Backward Message)

A mensagem para trás (β) é definida recursivamente por:

$$\beta_k(X_k) = P(e_{k+1:t} \mid X_k)$$

e pode ser calculada via propagação reversa no tempo:

$$\beta_k(X_k) = \sum_{x_{k+1}} P(x_{k+1} \mid X_k) P(e_{k+1} \mid x_{k+1}) \beta_{k+1}(x_{k+1})$$

Isso permite combinar evidências futuras para refinar a estimativa dos estados anteriores.

Resumo

- Suavização permite estimar estados anteriores de um processo estocástico usando todas as observações.
- O algoritmo forward-backward utiliza mensagens para frente e para trás, sendo a mensagem para trás crucial para incorporar informações futuras.
- Exemplos demonstram a superioridade da suavização sobre a filtragem isolada.

Sequência Mais Provável

Problema: Dada uma sequência de evidências, determinar a trajetória mais provável dos estados ocultos.

Formalmente:

$$\underset{x_{1:t}}{\operatorname{argmax}}\ P(x_{1:t} | e_{1:t})$$

Essencial para aplicações como reconhecimento de voz e análise biomédica.

Encontrando a sequência mais provável

- Para encontrar a sequência mais provável devemos considerar probabilidades conjuntas em todos os passos de tempo.
- Vamos considerar o "Mundo do guarda-chuva" considerando a observação do operador possuir ou não guarda-chuva durante 5 dias;
- Vamos nos concentrar nos caminhos que chegam ao estado: $Rain_5 = true$;
- Por causa da propriedade de Markov, o caminho mais provável para o estado $Rain_5 = true$ consiste no caminho mais provável para algum estado no tempo 4 seguido por uma transição para $Rain_5 = true$;
- E o estado no tempo 4 que se tornará parte do caminho para $Rain_5 = true$ é o que maximizar a probabilidade desse caminho.

UnB

UnB - FCTE
Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia
conhecimento em movimento
sociedade em transformação

Encontrando a sequência mais provável

- Em outras palavras, existe uma relação recursiva entre os caminhos mais prováveis para cada estado x_{t+1} e os caminhos mais prováveis para cada estado x_t.
- Vamos definir uma mensagem para frente de um tempo para outro como $m_{1:t}$ tal que

$$\boldsymbol{m}_{1:t} = \max_{\boldsymbol{x}_{1:t-1}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_{1:t-1}, \boldsymbol{X}_t, \boldsymbol{e}_{1:t})$$

- Para obter a relação recursiva entre $m_{1:t+1}$ e $m_{1:t}$ Seguimos a ideia do filtro de suavização.

Encontrando a sequência mais provável

- Temos então

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{m}_{1:t+1} &= \max_{\boldsymbol{x}_{1:t}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_{1:t}, \boldsymbol{X}_{t+1}, \boldsymbol{e}_{1:t+1}) = \max_{\boldsymbol{x}_{1:t}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_{1:t}, \boldsymbol{X}_{t+1}, \boldsymbol{e}_{1:t}, e_{t+1}) \\
&= \max_{\boldsymbol{x}_{1:t}} \boldsymbol{P}(e_{t+1} \mid \boldsymbol{x}_{1:t}, \boldsymbol{X}_{t+1}, \boldsymbol{e}_{1:t}) \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_{1:t}, \boldsymbol{X}_{t+1}, \boldsymbol{e}_{1:t}) \\
&= \boldsymbol{P}(e_{t+1} \mid \boldsymbol{X}_{t+1}) \max_{\boldsymbol{x}_{1:t}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{t+1} \mid \boldsymbol{x}_t) P(\boldsymbol{x}_{1:t}, \boldsymbol{e}_{1:t}) \\
&= \boldsymbol{P}(e_{t+1} \mid \boldsymbol{X}_{t+1}) \max_{\boldsymbol{x}_t} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{t+1} \mid \boldsymbol{x}_t) \max_{\boldsymbol{x}_{1:t-1}} P(\boldsymbol{x}_{1:t-1}, \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{e}_{1:t})
\end{aligned}$$

- Onde o termo final $\max_{\boldsymbol{x}_{1:t-1}} \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_{1:t-1}, \boldsymbol{x}_t, \boldsymbol{e}_{1:t})$ é exatamente a entrada para um estado particular $\boldsymbol{x}_t$ no vetor mensagem $\boldsymbol{m}_{1:t}$.

Encontrando a sequência mais provável

- O algoritmo inicia no instante de tempo 0 com a probabilidade *a priori*:

$$\boldsymbol{m}_{1:0} = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_0)$$

- Esse algoritmo é chamado de **Algoritmo de Viterbi**;
- Retornando ao "mundo do guara-chuva" vamos considerar a sequência de observações como [true,true,false,true,true], ou seja, o operador só não trouxe o guarda-chuvano 3° dia.

Algoritmo de Viterbi: Passos

Ideia central: Propaga recursivamente o caminho mais provável para cada estado em cada instante no tempo, armazenando as decisões para reconstrução posterior.

1. Inicialização

Define as probabilidades *a priori* dos estados iniciais, ou seja, a chance do sistema começar em cada estado.

2. Recorrência (Parte 1)

Para cada estado no tempo t:

- Calcula o produto da maior probabilidade do caminho até o estado anterior s' no tempo $t-1$,
- Multiplica pela **probabilidade de transição** do modelo de transição $P(X_t = s \mid X_{t-1} = s')$.

UnB

UnB - FCTE
Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia

conhecimento em movimento
sociedade em transformação

Algoritmo de Viterbi: Passos

2. Recorrência (Parte 2)

- Multiplica pela **probabilidade de emissão** do modelo de sensor $P(E_t \mid X_t = s)$.
- Seleciona a maior dessas probabilidades para determinar o caminho mais provável até o estado atual.
- **Armazena o ponteiro**, que indica o estado s' que maximiza a probabilidade e que será usado para reconstruir a sequência.

3. Reconstrução (traceback)

No último instante, escolhe o estado com maior probabilidade acumulada.

- Utiliza os **ponteiros** armazenados para voltar no tempo e recuperar a sequência completa de estados mais provável.

Nota: Os ponteiros indicam o estado anterior com maior probabilidade de transição para o estado atual.

Encontrando a sequência mais provável

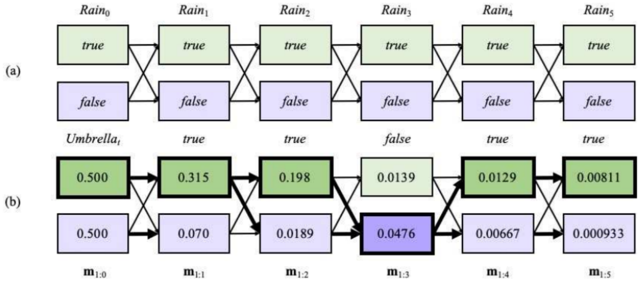


Figure 14.5 (a) Possible state sequences for $Rain_t$ can be viewed as paths through a graph of the possible states at each time step. (States are shown as rectangles to avoid confusion with nodes in a Bayes net.) (b) Operation of the Viterbi algorithm for the umbrella observation sequence $[true, true, false, true, true]$, where the evidence starts at time 1. For each t, we have shown the values of the message $\mathbf{m}_{1:t}$, which gives the probability of the best sequence reaching each state at time t. Also, for each state, the bold arrow leading into it indicates its best predecessor as measured by the product of the preceding sequence probability and the transition probability. Following the bold arrows back from the most likely state in $\mathbf{m}_{1:5}$ gives the most likely sequence, shown by the bold outlines and darker shading.

Exemplo passo a passo

Descrição: Problema do Guarda-chuva

Estados ocultos: Chuva (R), Sem chuva ($\neg R$) **Observações:** Com guarda-chuva (U), Sem guarda-chuva ($\neg U$)

Sequência observada: $[U, U, \neg U]$

Probabilidades de Transição

Modelo de Transição: $P(X_t \mid X_{t-1})$:

$$P(R_t \mid R_{t-1}) = 0.7, P(R_t \mid \neg R_{t-1}) = 0.3, P(\neg R_t \mid R_{t-1}) = 0.3, P(\neg R_t \mid \neg R_{t-1}) = 0.7$$

UnB

UnB - FCTE
Faculdade de Ciências e Tecnologias em Engenharia
conhecimento em movimento
sociedade em transformação

Exemplo passo a passo

Probabilidades de Emissão

Matriz de emissão $P(O_t|X_t)$:

$$P(U_t \mid R_t) = 0.9, P(\neg U_t \mid R_t) = 0.1, P(U_t \mid \neg R_t) = 0.2, P(\neg U_t \mid \neg R_t) = 0.8$$

Inicialização (t=1), $U_1 = True$

$$V_1(R) = P(R_1) \cdot P(U \mid R) = 0.5 \times 0.9 = 0.45$$

$$V_1(\neg R) = P(\neg R_1) \cdot P(U \mid \neg R) = 0.5 \times 0.2 = 0.1$$

Exemplo passo a passo

Inicialização (t=2), $U_2 = True$

$$V_2(R) = max(0.45 \times 0.7, 0.1 \times 0.3) \times 0.9 = 0.2835$$

$$V_2(\neg R) = max(0.45 \times 0.3, 0.1 \times 0.7) \times 0.2 = 0.027$$

Inicialização (t=3), $U_3 = False$

$$V_3(R) = max(0.2835 \times 0.7, 0.027 \times 0.3) \times 0.1 = 0.019845$$

$$V_3(\neg R) = max(0.2835 \times 0.3, 0.027 \times 0.7) \times 0.8 = 0.06804$$

Decisão Final e Interpretação

Como $V_3(\neg R) > V_3(R)$, a sequência mais provável termina em Não Chuva no instante 3.

Caminho mais provável: $[R, R, \neg R]$

- **Transição**: probabilidade de mudança entre estados ocultos.
- **Emissão**: probabilidade do estado oculto produzir a observação.
- O algoritmo multiplica transição e emissão para propagar o caminho mais provável.

Modelo Oculto de Markov (HMM)

Definição: Um HMM é um modelo probabilístico temporal em que o estado real do processo não é diretamente observável, mas inferido através de variáveis de evidência.

- Estado oculto X_t: variável aleatória discreta (não observável)
- Evidência E_t: variável observada relacionada ao estado
- Matriz de transição: $P(X_t|X_{t-1})$
- Matriz de observação: $P(E_t|X_t)$

Estrutura Matricial do HMM

Com estados numerados $1, \ldots, S$:

- Matriz de transição T: $T_{ij} = P(X_t = j | X_{t-1} = i)$
- Matriz de observação O_t: $O_{ii} = P(E_t | X_t = i)$
- Mensagem para frente $f_{1:t}$ e para trás $b_{1:t}$ são vetores/matrizes

Permite implementar algoritmos de inferência de forma eficiente.

Modelo oculto de Markov

- O modelo oculto de Markov (Ou **HMM**, do inglês *hidden Markov model*) é um modelo probabilístico temporal em que o estado do processo é descrito por uma única variável aleatória discreta;
- Os valores possíveis da variável são os possíveis estados do mundo.
- O exemplo do "mundo do guarda-chuva" é um exemplo de processo **HMM** pois ele possui uma única variável de estado "chuva";
- Caso o modelo possua duas ou mais variáveis, você ainda pode utilizar **HMM** combinando as variáveis em uma única "megavariável" cujos valores são todas as tuplas possíveis de valores das variáveis de estado individuais.
- Embora os **HMMs** exijam que o estado seja uma única variável aleatória discreta, não há restrição para as variáveis de evidência;
- Isso ocorre porque as variáveis de evidência são sempre observadas, o que significa que não há necessidade de acompanhar qualquer distribuição sobre seus valores.

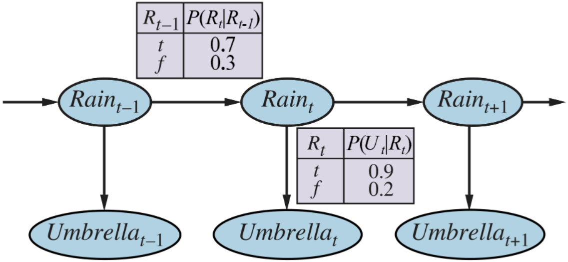
- Com uma única variável de estado discreta X_t, podemos dar forma concreta às representações do modelo de transição, o modelo de sensor e as mensagens para frente e para trás nos modelos temporais;
- Consideremos a variável de estado X_t com valores denotados por inteiros $1, \ldots, S$, onde S é o número de estados possíveis. O modelo de transição $P(X_t \mid X_{t-1})$ torna-se uma matriz $S \times S$ $\boldsymbol{T}$, onde

$$\boldsymbol{T}_{ij} = P(X_t = j \mid X_{t-1} = i).$$

- Ou seja, $\boldsymbol{T}_{i,j}$ é a probabilidade de transição do estado i para o estado j.

- Por exemplo, se numerarmos $Rain = true$ e $Rain = false$ como os estados de valores 1 e 2 respectivamente, a matriz de transição será

$$\boldsymbol{T} = P(X_t \mid X_{t-1}) = \begin{pmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{pmatrix} .$$



Modelo oculto de Markov

- Podemos fazer o mesmo com o modelo de sensor;
- Neste caso, como o valor da variável de evidência E_t é conhecida no tempo t, precisamos especificar para cada estado apenas, a probabilidade que o estado faz com que e_t apareça, ou seja, $P(e_t \mid X_t = i)$ para cada estado i;
- Para tanto, criamos a matriz de observação $\boldsymbol{O}_t$ de dimensões $S \times S$, Uma para cada passo;
- A i-ésima entrada diagonal de $\boldsymbol{O}_t$ é $P(e_t \mid X_t = i)$ e as outras entradas são 0.

- Por exemplo, Se considerarmos o "mundo do guarda-chuva" com as variáveis $U_1 = true$ e $U_3 = false$ teremos:

$$\boldsymbol{O}_1 = \begin{pmatrix} 0.9 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{O}_3 = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.8 \end{pmatrix}.$$

- Se considerarmos ainda a estimação filtrada $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_t \mid \boldsymbol{e}_{1:t})$ como uma mensagem para frente $\boldsymbol{f}_{1:t}$ e a estimação suavizada $P(\boldsymbol{e}_{k+2:t} \mid \boldsymbol{x}_{k+1})$como uma mensagem para trás $\boldsymbol{b}_{k+1:t}$, podemos simplificar as equações de recursividade como

Modelo oculto de Markov — Algoritmos Matriciais Simplificados

- Para frente: $\boldsymbol{f}_{1:t+1} = \alpha \boldsymbol{O}_{t+1} \boldsymbol{T}^\top \boldsymbol{f}_{1:t}$
- Usado em filtragem:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{t+1} \mid \boldsymbol{e}_{1:t+1}) = \alpha \underbrace{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{e}_{t+1} \mid \boldsymbol{X}_{t+1})}_{\text{modelo de sensor}} \sum_{\boldsymbol{x}_t} \underbrace{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{X}_{t+1} \mid \boldsymbol{x}_t)}_{\text{modelo de transição}} \underbrace{P(\boldsymbol{X}_t \mid \boldsymbol{e}_{1:t})}_{\text{recursão}}$$

- Para trás: $\boldsymbol{b}_{k+1:t} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{O}_{k+1}\boldsymbol{b}_{k+2:t}$.
- Usado em suavização:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{e}_{k+1:t} \mid \boldsymbol{X}_k) = \sum_{\boldsymbol{x}_{k+1}} \underbrace{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{e}_{k+1} \mid \boldsymbol{X}_{k+1})}_{\text{modelo de sensor}} \underbrace{P(\boldsymbol{e}_{k+2:t} \mid \boldsymbol{x}_{k+1})}_{\text{recursão}} \underbrace{\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_{k+1} \mid \boldsymbol{X}_k)}_{\text{modelo de transição}}$$

Resumo

- O HMM modela o estado oculto de sistemas dinâmicos com evidências ruidosas.
- A estrutura matricial simplifica a implementação dos algoritmos.

Referências

- Russell, S., Norvig, P. Artificial Intelligence: A Modern Approach.
- Bishop, C.M. Pattern Recognition and Machine Learning.
- Durbin, J., Koopman, S.J. Time Series Analysis by State Space Methods.
- Santana, L.A.R. Aplicação de Modelos Markovianos para Análise Temporal.
- Jurafsky D. & Martin, J. H. Hidden Markov Models. 2021.
- Stamp, M. A Revealing Introduction to Hidden Markov Models. 2021.
- Zucchini, W. and MacDonald, I. L. Hidden Markov Models for Time Series: An Introduction Using R. 2009.
- **Aulas**:
- Hidden Markov Model Clearly Explained! Part – 5 (https://www.youtube.com/watch?v=RWkHJnFj5rY)
- Hidden Markov Model in Python (https://www.youtube.com/watch?v=1-ldEjzEkYE)
- **Código**: UmbrellaWorld.py (https://github.com/brandhaug/umbrella-world-hmm/blob/master/umbrella-world.py)

Obrigado!

E-mail: fabianosoares@unb.br

LinkedIn: https://www.linkedin.com/in/fabiano-soares-06b6a821a/

Site do curso: https://www.fabianosoares.eng.br/fga0221-inteligência-artificial