COMPTE RENDU TP 2*
Processus stationnaires au sens large

Guilhem MARION et ClÃľment LE MOINE VEILLON

October 9, 2018

1 Observation de processus, calcul des moyennes et des covariances (simuproc.m)

1.1 Bruit blanc $W(n)$ de variance σ^2

$M_W = 0$ pour un bruit blanc
$cov(W(n_1), W(n_2)) = \mathbb{E}[W(n_1)^2 W(n_2)^2] = \sigma^2 \delta(n_1, n_2)$

1.2 Processus AR1 causal dÃľfini par $H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}}$

AprÃĺs calcul on trouve la relation $Y(n) = \sum_{i=0}^{n} a^i W(n-i)$
La moyenne du processus est donc trivialement nulle comme somme de moyennes nulles de bruits blancs.
La covariance : $cov(X(n_1), X(n_2)) = \frac{1-a^{n_1}}{1-a^{n_1-n_2}}$

1.3 Processus sinusoidal $X(n) = b\cos(2\pi\nu_0 n + \phi)$ oÃź $\nu_0 \in [0, 0.5[, \phi$ Ãľtant une v.a. uniforme sur $[0, 2]$ indÃľpendante des $W(n)$

$M_X(n) = b\int_0^{2\pi} \cos(2\pi\nu_0 n + \phi)\frac{\mathrm{d}\phi}{2\pi} + 0 = 0$
Il vient par calcul que $cov(X(n_1), X(n_2)) = 0$

*Le code est en libre accÃĺs sur https://github.com/GuiMarion/SignalProcessing

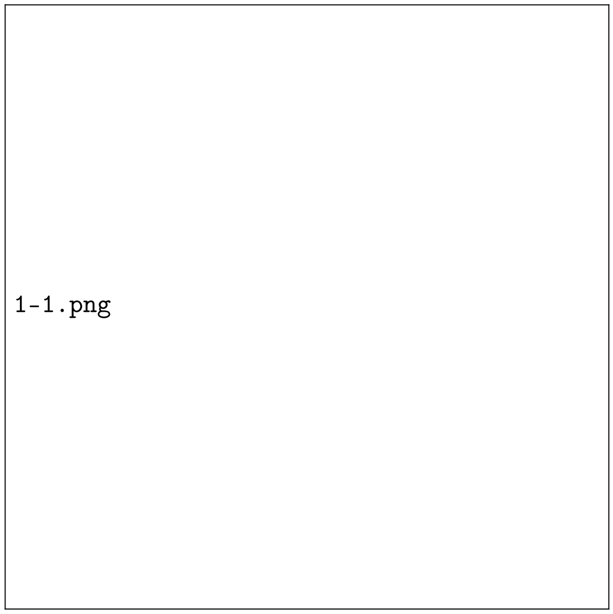

Figure 1: Bruit Blanc

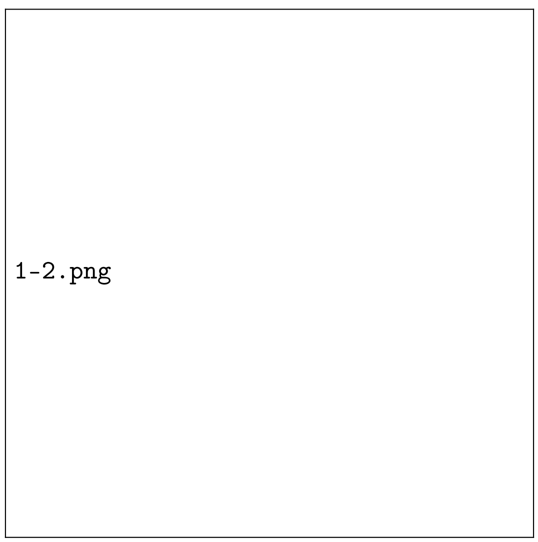

Figure 2: Processus AR1 causal

2 Estimation de la densitÃl’ spectrale de puissance, pÃl’riodogramme

2.1 Expression de $I_X(e^{2i\pi\nu})$ en fonction de la TFTD de X

$$
\begin{aligned}
I_X(e^{2i\pi\nu}) &= \sum_{p=-N+1}^{N-1} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N-p} X_{i+p}\bar{X}_i e^{-2i\pi\nu p} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{p=-N+1}^{N-1} \sum_{i=1}^{N-p} X_{i+p}\bar{X}_i e^{-2i\pi\nu p}
\end{aligned}
$$

1-3.png

Figure 3: Processus sinusoÃŕdal

On fait un changement de variable :

$$\left\{ \begin{array}{rcr} p & = & n_2 - n_1 \\ i & = & n_1 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned}
I_X(e^{2i\pi\nu}) &= \frac{1}{N} \sum_{p=-N+1}^{N-1} \sum_{i=max(0,-p)}^{N-1+min(0,-p)} X_{n_2} \bar{X_{n_1}} e^{-2i\pi\nu p} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{n_1=0}^{N-1} \sum_{n_2=0}^{N-1} X_{n_2} \bar{X_{n_1}} e^{-2i\pi\nu(n_2-n_1)} \\
&= \frac{1}{N} \left(\sum_{n_1=0}^{N-1} \bar{X_{n_1}} e^{2i\pi\nu n_1} \right) \left(\sum_{n_2=0}^{N-1} X_{n_2} e^{-2i\pi\nu n_2} \right) \\
&= \frac{1}{N} \overline{\left(\sum_{n_1=0}^{N-1} X_{n_1} e^{2i\pi\nu n_1} \right)} \left(\sum_{n_2=0}^{N-1} X_{n_2} e^{-2i\pi\nu n_2} \right) \\
&= \frac{1}{N} |TFTD[X(n)]|^2
\end{aligned}$$

2.2 Algorithme de calcul de $I_X(e^{2i\pi\nu})$

Le code suivant permet d'obtenir $I_X(e^{2i\pi\nu})$ Ãă partir de la TFD en posant $\nu = \frac{k}{M}$ oÃź $k \in [0, N-1]$ et $M \geq N$, on obtient Ãľgalement la variance :

```
TFD = fft(X, m);
          IX = (1/n)*abs(TFD).^2  ;

          Variance = var(IX);
```

Ensuite on teste le code pour les 3 processus de la partie 1 :

2-2.png

Figure 5: Processus AR1 causal

Figure 4: Bruit blanc

2-2-3.png

Figure 6: Processus sinusoÃŕdal

2.3 Calcul de la sÃľquence des autocovariances estimÃľes biaisÃľes $R_{xx}(p)$ Ãă partir de $I_X(e^{2i\pi\frac{k}{M}})$

Le code suivant permet d'obtenir la sÃľquence :

```
RXX = ifft(IX, m);
```

2.4 variance du pÃľriodogramme d'un bruit blanc pour plusieurs horizons d'observation N

On calcule la moyenne des variances sur 1000 rÃľpÃľtitions en fonction de N.

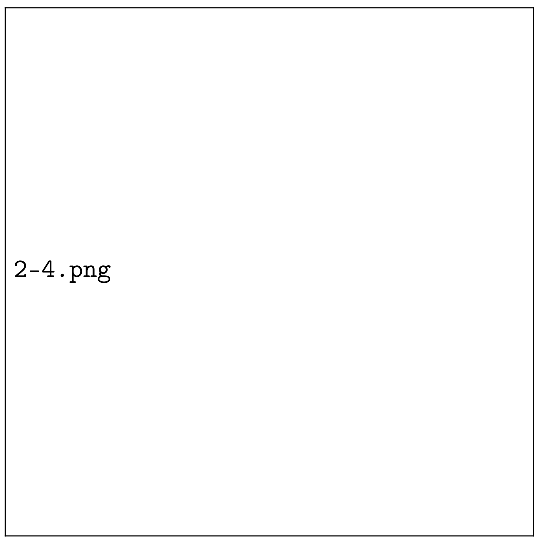

Figure 7: Moyenne des variances en Ãľchelle log2

3 Filtrage des processus, modÃľlisation AR de la parole

3.1 Equations de Yule-Walker

Montrons que pour tout $k \leq 1$ on a $\mathbb{E}[X(n-k)W(n)] = 0$:

On prend $k \leq 1$ donc $X(n-k)$ et $W(n)$ sont indÃľpendantes et W est un bruit blanc , par suite :

$$\mathbb{E}[X(n-k)W(n)] = \mathbb{E}[X(n-k)]\mathbb{E}[W(n)] \ et \ \mathbb{E}[W(n)] = 0$$

Alors :

$$\mathbb{E}[X(n-k)W(n)] = 0$$

On en dÃľduit une relation entre les $R_{xx}(k)$ ... $R_{xx}(k-p)$ pour $k \geq 1$:

$$X_n = \sum_{m=1}^{p} a_m X_{n-m} + W_n$$
$$\mathbb{E}[X_n \bar{X}_{n-k}] = \sum_{m=1}^{p} a_m \mathbb{E}[X_{n-m} \bar{X}_{n-k}] + \mathbb{E}[W_n \bar{X}_{n-k}]$$

On pose $n_1 = n - k$

Or $\mathbb{E}[X_{n-m} \bar{X}_{n-k}] = \mathbb{E}[X_{n_1+k-m} \bar{X}_{n_1}] = R_X(k-m)$ et $\mathbb{E}[W_n \bar{X}_{n-k}] = 0$ par la question prÃľcÃľdente, il vient que :

$$\mathbb{E}[X_{n_1} \bar{X}_{n_1-k}] = \sum_{m=1}^{p} a_m R_X(k-m)$$

Et

$$\mathbb{E}[X_{n_1} \bar{X}_{n_1-k}] = \mathbb{E}[X_{n+k} \bar{X}_n]$$

Donc

$$\mathbb{E}[X_{n+k} \bar{X}_n] = \sum_{m=1}^{p} a_m R_X(k-m)$$

On en dÃľduit que :

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{R}_X(k)] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1}\mathbb{E}[\bar{X_n}X_{n+k}] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1}\left(\sum_{m=1}^{p} a_m R_X(k-m)\right) \\
&= \frac{N-k}{N}\sum_{m=1}^{p} a_m R_X(k-m)
\end{aligned}
$$

En passant la limite quand N tend vers l’infini dans les deux membres de l’ÃľgalitÃľ, on obtient finalement :

$$
R_X(k) = \sum_{m=1}^{p} a_m R_X(k-m)
$$

cas $k = 0$

$$
\mathbb{E}[X_n W_n] = \sum_{m=1}^{p} a_m \mathbb{E}[X_{n-m}W_n] + \mathbb{E}[W_n W_n]
$$

Or $\mathbb{E}[X_{n-m}W_n] = 0$ car X et W sont indÃľpendantes pusique $m \geq 1$
Et $\mathbb{E}[W_n W_n] = \sigma^2$

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\hat{R}_X(0)] &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1}\mathbb{E}[\bar{X_n}X_n] \\
&= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-k-1}\left(\sum_{m=1}^{p} a_m R_X(-m) + \sigma^2\right) \\
&= \frac{N-k}{N}\left(\sum_{m=1}^{p} a_m R_X(k-m) + \sigma^2\right)
\end{aligned}
$$

En passant la limite quand N tend vers l’infini dans les deux membres de l’ÃľgalitÃľ, on obtient finalement :

$$
R_X(0) = \sum_{m=1}^{p} a_m R_X(-m) + \sigma^2
$$

Pour rÃľsumer, on a :

$$\begin{cases} R_X(0) & = & \sum_{m=1}^{p} a_m R_X(-m) + \sigma^2 \\ R_X(k) & = & \sum_{m=1}^{p} a_m R_X(k-m) \qquad \textit{pour } k \geq 1 \end{cases}$$

Forme matricielle du problÃĺme : Les rangs k correspondent aux lignes de la matrice, il y en a donc $p+1$, les colonnes correspondent aux indices i des a_i, il y en Ãľgalement p+1. Pour s'en convaincre on peut rÃľÃľcrire le systÃĺme prÃľcÃľdent :

$$\begin{cases} R_X(0) - \sum_{m=1}^{p} a_m R_X(-m)) & = & \sigma^2 \\ R_X(k) - \sum_{m=1}^{p} a_m R_X(k-m) & = & 0 \qquad \textit{pour } k \geq 1 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} R_X(0) & -a_1 R_X(-1) & \cdots & -a_p R_X(-p) \\ R_X(1) & -a_1 R_X(0) & \cdots & -a_p R_X(1-p) \\ R_X(2) & -a_1 R_X(1) & \cdots & -a_p R_X(2-p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_X(p) & -a_1 R_X(p-1) & \cdots & -a_p R_X(0) \end{pmatrix} = [\sigma^2 \ 0 \ ... \ 0]^T$$

$$R = \begin{pmatrix} R_X(0) & R_X(-1) & \cdots & R_X(-p) \\ R_X(1) & R_X(0) & \cdots & R_X(1-p) \\ R_X(2) & R_X(1) & \cdots & R_X(2-p) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_X(p) & R_X(p-1) & \cdots & R_X(0) \end{pmatrix}$$

$$R \ [1 \ -a_1 ... - a_p]^T = [\sigma^2 \ 0 \ ... \ 0]^T$$

R est bien une matrice Toeplitz.

3.2 Estimation

GÃľnÃľration d'un processus AR-4 :

Le code suivant permet de gÃľnÃľrer un processus AR-4 en fontion d'un vecteur a donnÃľ en entrÃľe :

```
function[R] = genAR(p, N, a)

    R = zeros(1, N);
```

```
    sigma = 1;

    W =  sigma.*randn(1,N);
    for n=1:N

        for i=1:min(n-1,p)
            R(n) = R(n) + a(i)*R(n-i);

        end

        R(n) = R(n) +W(n);

    end

end
```

Matrice Toeplitz estimÃľe :

```
p = 4;
N = 1000000;
NbRepet = 1000

for poi=1:NbRepet
    [X, phi] = genAR(p,N);

    Autocov = acovb(X);

    R = toeplitz(Autocov(1:p+1));
end
```

RÃľsolution du systÃĺme (1) :

$$
\begin{aligned}
\hat{R}\ [1\ \ -a_1 ... -a_p]^T &= [\sigma^2\ 0\ ...\ 0]^T \\
\hat{R}^{-1}\ \hat{R}\ [1\ \ -a_1 ... -a_p]^T &= \hat{R}^{-1}\ [\sigma^2\ 0\ ...\ 0]^T \\
[1\ \ -a_1 ... -a_p]^T &= \hat{R}^{-1}\ [\sigma^2\ 0\ ...\ 0]^T \\
[\frac{1}{\sigma^2}\ \frac{-a_1}{\sigma^2} ... \frac{-a_p}{\sigma^2}]^T &= \hat{R}^{-1}\ [1\ 0\ ...\ 0]^T
\end{aligned}
$$

donc $v = [\frac{1}{\sigma^2}\ \frac{-a_1}{\sigma^2} ... \frac{-a_p}{\sigma^2}]^T$

Comparaison :

On obtient une erreur quadratique moyenne (sur 1000 rÃľpÃľtitions) de 0.2884 pour les valeurs estimÃľes des coefficients du vecteur a. Ce qui semble plutÃťt convainquant, surtout qu'il semble que certains cas pathologiques (Ãă dÃľcouvrir) font grimper drastiquement cette moyenne.

Application Ãă la parole La synthÃĺse du signal en suivant la procÃľdure *analyse-synthÃĺse* semble trÃĺs convainquante du fait qu'on entend disctinctement la phrase du signal original dans le signal synthÃĺtisÃľ. On retrouvera ici les figures correspondantes (fig. 7).

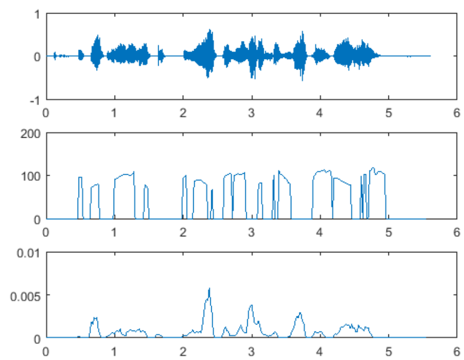

Figure 8: Analyse-synthÃĺse

Nous avons tentÃľ de modifier les intonations de la voix en changeant les valeurs des frÃľquences de voisement. Dans un premier temps en construisant un algorithme non-deterministe qui tente d'inverser les tendances des frÃľquences de voisement (i.e. produit une courbe ascendante quand il lit une coube descendante, cf. fig. 8).
Et aussi une fonction affine croissante (fig. 9).
On remarquera qu'Ãă l'Ãľcoute les intonations ne sont que partiellement modifiÃľes et que selon la fonction utilisÃľe on entend surout un filtre balayant les frÃľquences.

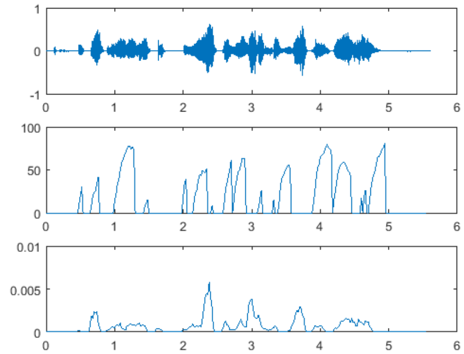

Figure 9: Analyse-synthÃĺse tendances inversÃľes

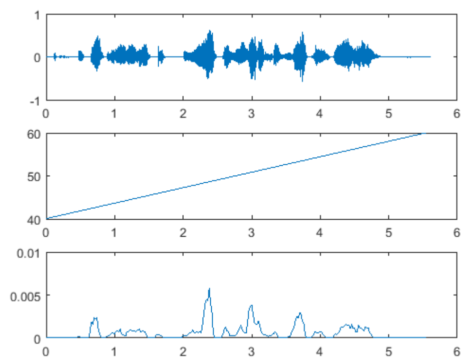

Figure 10: Analyse-synthÃĺse fonction affine