MAE5763 - Modelos Lineares Generalizados - Resolução da Lista 1

Guilherme Marthe - 8661962

9/21/2020

$$f_Z(z_i;\mu,\nu,\pi) = \begin{cases} \pi & \text{se } z_i = 0 \\ (1-\pi)\frac{f_Y(z_i;\mu,\nu)}{1-f_Y(0;\mu,\nu)} & \text{se } z_i > 0 \end{cases}$$

onde $z_i = 0, 1, 2, ...,$ $i = 1, 2, ..., n$ e f_y é:

$$f_Y(y;\mu,\nu) = \frac{\Gamma(\nu+y)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\nu)} \cdot \left(\frac{\mu}{\mu+\nu}\right)^y \left(\frac{\nu}{\mu+\nu}\right)^\nu$$

A estatística do teste de razão de verissimilhança para testar $H_0 : \mu = 1$ contra $H_1 : \mu \neq 1$ é:

$$\xi_{RV} = 2[L(z_i;\hat{\mu},\nu,\hat{\pi}) - L(z_i;1,\nu,\hat{\pi})]$$

No caso de $Z \sim ZANBI(\mu,\nu,\pi)$ o logarítimo da sua função de massa de probabilidade é:

$$log(f_Z(z_i;\mu,\nu,\pi)) = \begin{cases} log(\pi) & \text{se } z_i = 0 \\ log(1-\pi) + log(f_Y(z_i;\mu,\nu)) - log(1-f_Y(0;\mu,\nu)) & \text{se } z_i > 0 \end{cases}$$

Definindo k como o número de observações dentre as n que são zero, isto é os i que $z_i = 0$, ao somarmaos as log verossimilhanças temos:

$$L(z_i;\mu,\nu,\pi) = \sum_{i=1}^{n} f_Z(z_i;\mu,\nu,\pi) =$$

$$k \cdot log(\pi) + (n-k) \cdot log(1-\pi) - (n-k) \cdot log(1 - \left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^\nu) +$$

$$(n-k)log(\delta(\nu,y)) + log(\mu)\sum_{i=1}^{n-k} z_i + (n-k)\nu log(\nu) - (n-k)\nu log(\nu+\mu)$$

Onde definimos $\delta(\nu,y) = \frac{\Gamma(\nu+y)}{\Gamma(y+1)\Gamma(\nu)}$, e $f_Y(0;\mu,\nu) = \left(\frac{\nu}{\nu+\mu}\right)^\nu$.

Com o objetivo de calcular ξ_{RV} realizamos a diferença $2\{L(z_i;\hat{\mu},\nu,\hat{\pi}) - L(z_i;1,\nu,\hat{\pi})\}$. Nesta conta, todos os termos que não dependem de μ são cancelados. Além disso, os termos restantes tem como um de seus fatores o tamanho da amostra não nula $(n-k)$ que é deixado em evidência. Outro aspecto importante é a definição da média amostra não nula $\bar{z}_{z>0} = \frac{1}{(n-k)}\sum_{i=1}^{n-k} z_i$ com $z_i \neq 0$. Então:

$$\begin{aligned} \xi_{RV} &= 2\{L(z_i;\hat{\mu},\nu,\hat{\pi}) - L(z_i;1,\nu,\hat{\pi})\} \\ &= 2(n-k)\left[log\left(\frac{1-\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^\nu}{1-\left(\frac{\nu}{\hat{\mu}+\nu}\right)^\nu}\right) + \bar{z}_{z>0} \cdot log(\hat{\mu}) + \nu \cdot log\left(\frac{1+\nu}{\hat{\mu}+\nu}\right)\right] \end{aligned}$$

Que é a estatística do teste de razão de verossimilhança proposto para testar $H_0 : \mu = 1$ contra $H_1 : \mu \neq 1$.