# Arquitetura e Organização de Computadores

Aula - Aritmética Computacional

Prof. André D'Amato

andredamato@utfpr.edu.br







#### • Exemplo:

Somar 7dec + 6dec

0000 0000 0000 0111

+

0000 0000 0000 0110

#### • Exemplo:

Somar 7dec + 6dec

0000 0000 0000 0111

+

0000 0000 0000 0110

0000 0000 0000 0001

#### • Exemplo:

```
Somar 7dec + 6dec
```

```
1 carry 0000 0000 0000 0111
```

0000 0000 0000 0110

#### • Exemplo:

```
Somar 7dec + 6dec
```

11 carry

0000 0000 0000 0111

+

0000 0000 0000 0110

#### • Exemplo:

```
Somar 7dec + 6dec
```

```
1 carry
```

0000 0000 0000 0111

+

0000 0000 0000 0110

#### • Exemplo:

Subtrair 7dec - 6dec

0000 0000 0000 0111

-

<u>0000 0000 0000 011</u>0

#### • Exemplo:

Subtrair 7dec - 6dec

0000 0000 0000 0111

-

<u>0000 0000 0000 01</u>10

#### • Exemplo:

Subtrair 7dec - 6dec

0000 0000 0000 0<mark>1</mark>11

-

<u>0000 0000 0000 0</u>110

# Subtração Binária

#### • Exemplo:

Subtrair 7dec - 6dec

0000 0000 0000 0111

\_

0000 0000 0000 0110

# Subtração Binária

Exemplo: Subtrair 6dec - 7dec

0000 0000 0000 0110

-

0000 0000 0000 0111 0000 0000 0000 0001

# Subtração Binária

Exemplo: Subtrair 6dec - 7dec

0000 0000 0000 0110

0000 0000 0000 0111

0000 0000 0000 0001 ?????? como saber que é -1

## Representação de números inteiros

Sinal magnitude:

- O primeiro bit é utilizado como bit de sinal
  - Ex:

$$0000~0111 \rightarrow 7 \text{dec}$$

$$1000\ 0111 \to -7 dec$$

#### Representação de números inteiros

Complemento de dois:

- O primeiro bit é utilizado como bit de sinal
  - Ex:

$$0000\ 0111 \rightarrow 7 dec$$

Inverte os bits e soma 1

$$\frac{+1}{1111\ 1001} \rightarrow -7 \text{dec}$$

## Representação de números inteiros

Complemento de dois:

- Inverte os bits e soma 1
  - Ex:

 $0000\ 0010 \to 2 dec$ 

Inverte os bits e soma 1

1111 1101

$$\frac{+1}{1111 \ 1110 \rightarrow -2 dec}$$

```
Ex:1110 (-2)+1111 (-1)
```

```
1110 (-2)
+
1111 (-1)
```

```
1110 (-2)
+
1111 (-1)
01 → Carry 1
```

```
1110 (-2)
+
1111 (-1)
101 → Carry 1
```

```
1110 (-2)
+
1111 (-1)
1101 → Carry 1
```

```
Ex:
```

```
1110 (-2)
+

1111 (-1)

IGNORADO 11101 (-3) \rightarrow Carry 0
```

# Adição (Overflow)

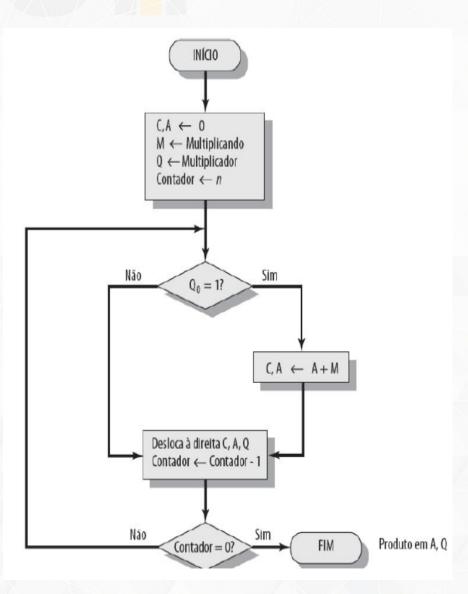
#### Overflow:

- Situação em que dois números com o mesmo sinal forem somados e o seu resultado:
  - Possuir sinal oposto
  - Possuir maior quantidade de bits

# Exercícios Introdutórios: Soma e Subtração

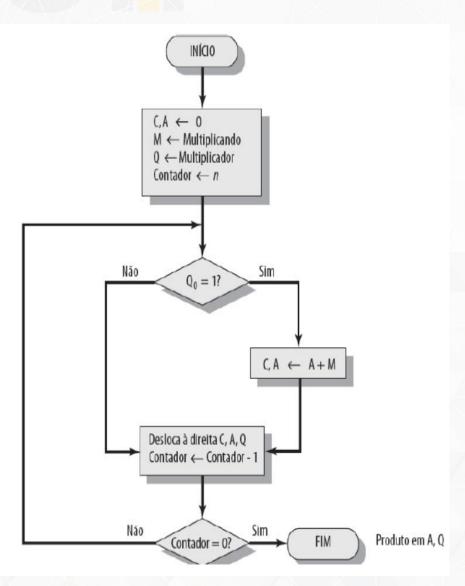
Disponível no moodle

- Os produtos parciais podem ser imediatamente acumulados;
  - Para cada 1 no multiplicador, é necessário realizar uma operação de adição e outra de deslocamento;
  - Para cada 0 no multiplicador, apenas um deslocamento é necessário.



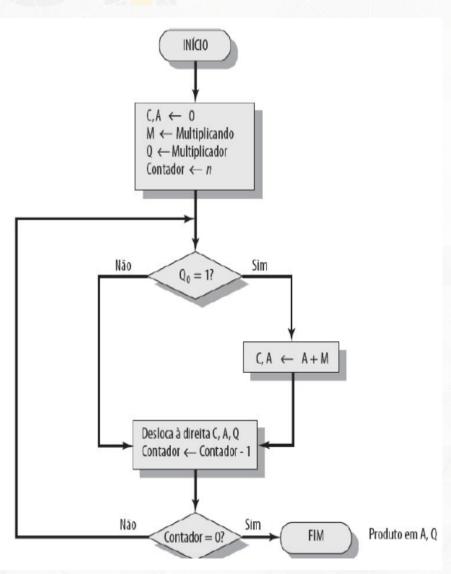
Utilizando o algoritmo ao lado, faça a operação aritmética abaixo:

0101 x 0101 : (5 x 5) A Q 0000 0101



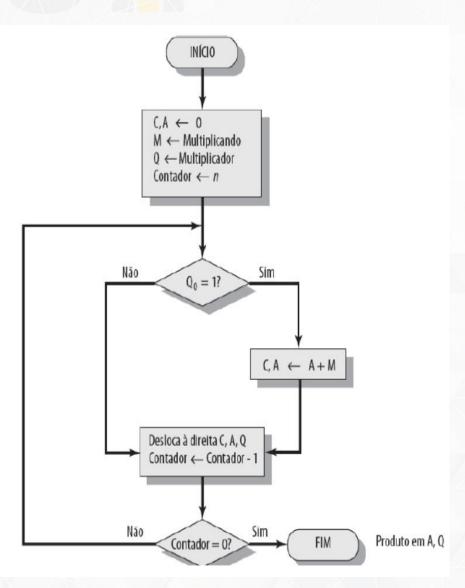
Utilizando o algoritmo ao lado, faça a operação aritmética abaixo:

0101 x 0101 : (5 x 5)A Q 0000 0101 0101 0101  $\rightarrow$  soma



Utilizando o algoritmo ao lado, faça a operação aritmética abaixo:

0101 x 0101 : (5 x 5)A Q 0000 0101 0101 0101  $\rightarrow$  soma 0010 1010  $\rightarrow$  deslocamento



Utilizando o algoritmo ao lado, faça a operação aritmética abaixo:

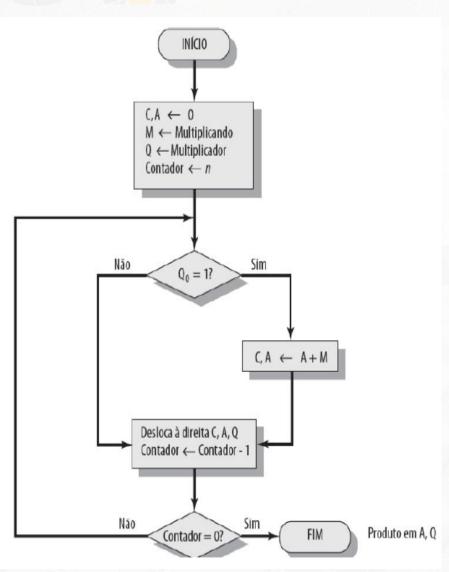
```
0101 x 0101 : (5 x 5)
```

0000 0101

0101 0101 → soma

0010 1010 → deslocamento

0001 0101 → deslocamento



Utilizando o algoritmo ao lado, faça a operação aritmética abaixo:

```
0101 x 0101 : (5 x 5)

A Q

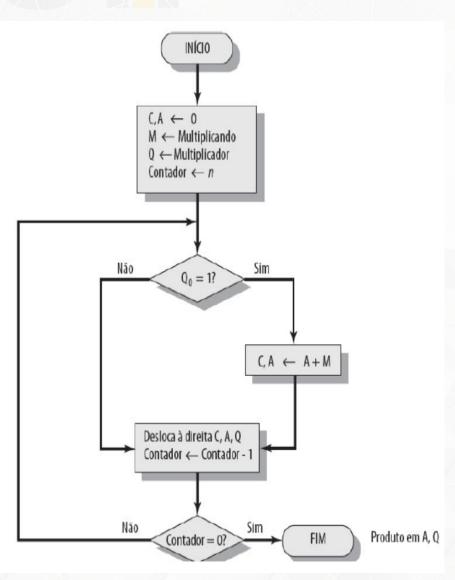
0000 0101

0101 0101 → soma

0010 1010 → deslocamento

0001 0101 → deslocamento

0110 0101 → soma
```



Utilizando o algoritmo ao lado, faça a operação aritmética abaixo:

```
0101 x 0101 : (5 x 5)

A Q

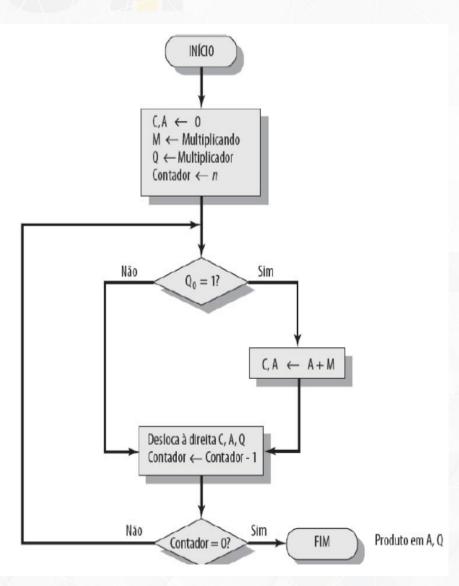
0000 0101

0101 0101 → soma

0010 1010 → deslocamento

0001 0101 → soma
```

 $0011\ 0010 \rightarrow deslocamento$ 



Utilizando o algoritmo ao lado, faça a operação aritmética abaixo:

```
0101 x 0101 : (5 x 5)

A Q

0000 0101

0101 0101 → soma

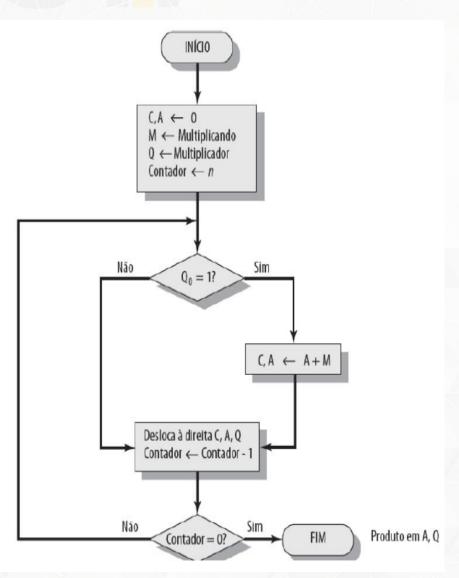
0010 1010 → deslocamento

0001 0101 → soma

0010 0101 → soma

0011 0010 → deslocamento

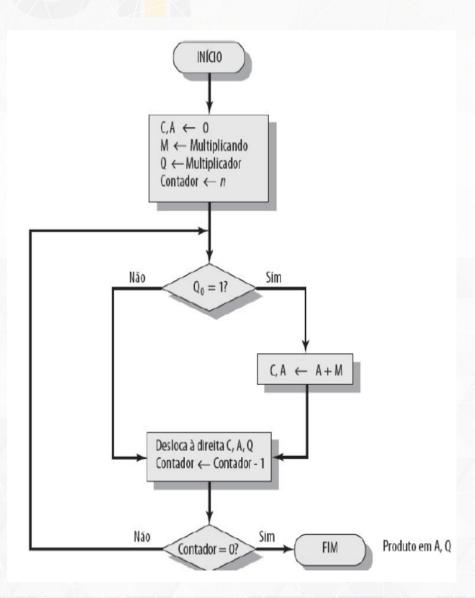
0001 1001 → deslocamento
```



E Agora?

0100 x 1011 (4 x 11)

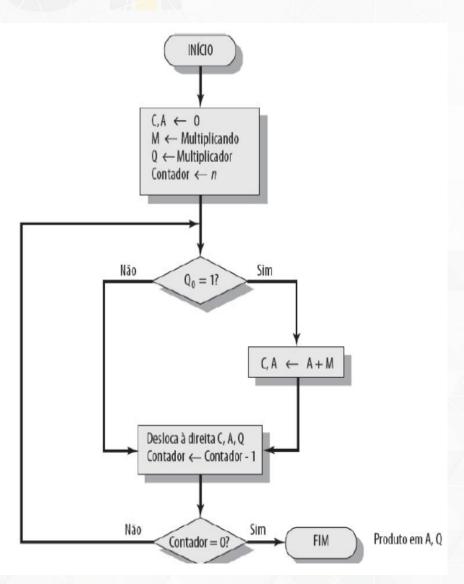
0000 1011



E Agora?

0100 x 1011 (4 x 11)

0000 1011  $0100 1011 \rightarrow soma$ 



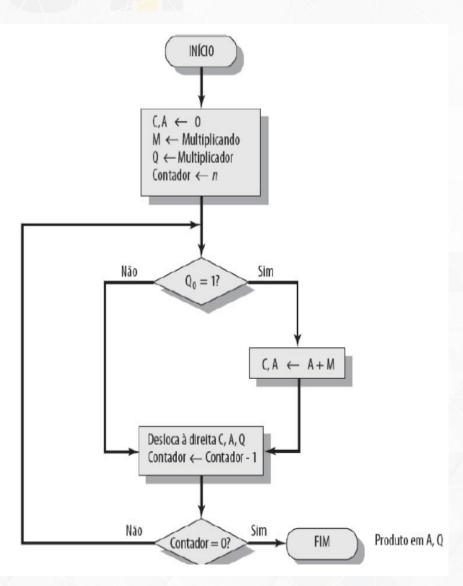
E Agora?

0100 x 1011 (4 x 11)

0000 1011

0100 1011 → soma

0010 0101 → deslocamento



E Agora?

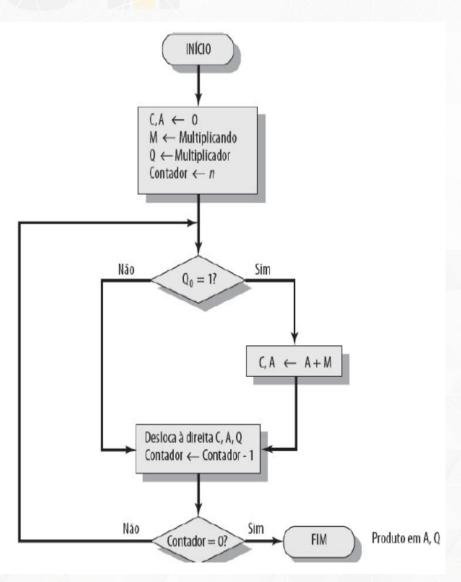
0100 x 1011 (4 x 11)

0000 1011

0100 1011 → soma

 $0010\ 0101 \rightarrow deslocamento$ 

0110 0101 → soma



E Agora?

0100 x 1011 (4 x 11)

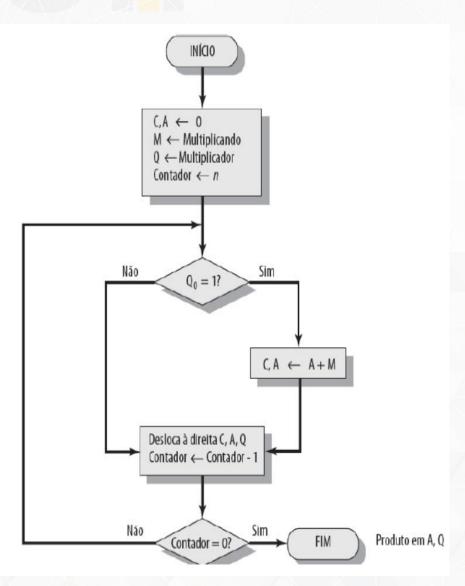
0000 1011

0100 1011 → soma

0010 0101 → deslocamento

0110 0101 → soma

0011 0010 → deslocamento



E Agora?

0100 x 1011 (4 x 11)

0000 1011

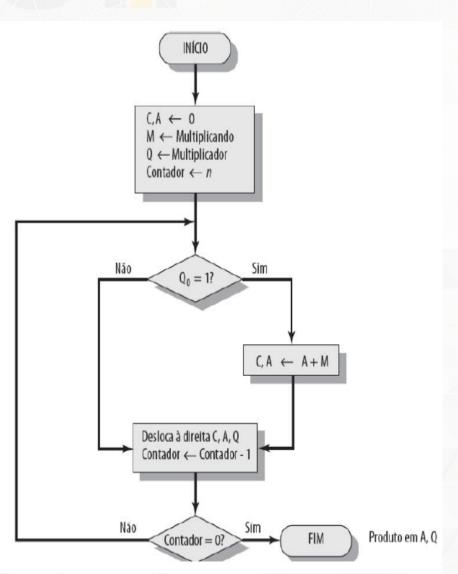
0100 1011 → soma

0010 0101 → deslocamento

0110 0101 → soma

0011 0010 → deslocamento

0001 1001 → deslocamento



E Agora?

0100 x 1011 (4 x 11)

0000 1011

0100 1011 → soma

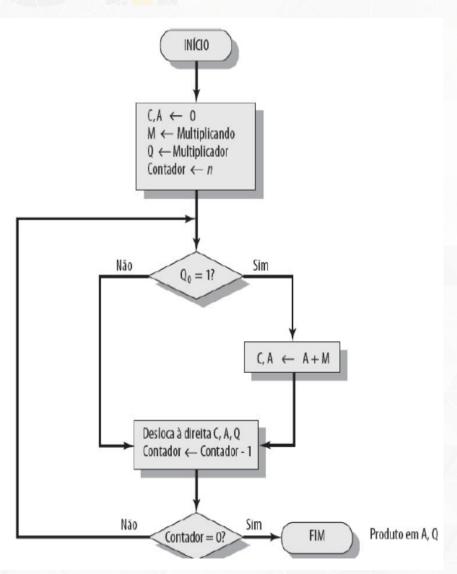
0010 0101 → deslocamento

 $0110\ 0101 \to soma$ 

0011 0010 → deslocamento

0001 1001 → deslocamento

0101 1001 → soma



E Agora?

0100 x 1011 (4 x 11)

0000 1011

0100 1011 → soma

0010 0101 → deslocamento

0110 0101 → soma

0011 0010 → deslocamento

0001 1001 → deslocamento

0101 1001 → soma

0010 1100 → deslocamento

# Exercícios Introdutórios: Multiplicação sem Sinal

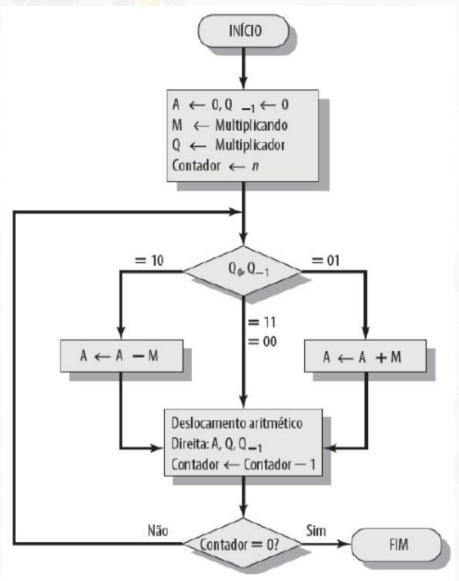
Disponível no moodle

Não podemos utilizar o mesmo algoritmo para complemento de 2:

```
Veja:
1010 (-6)
x <u>1101</u> (-3)
10000010 (-126)
```

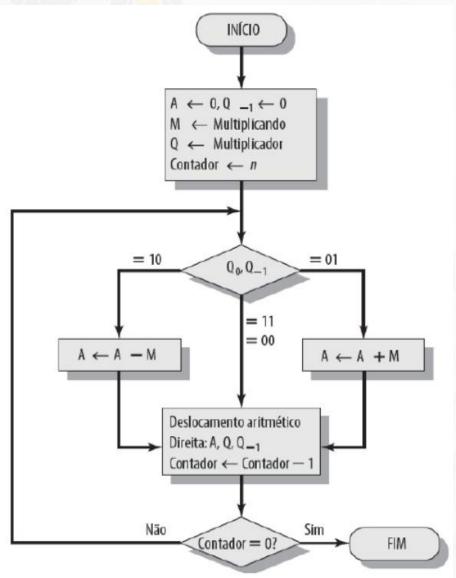
Portanto, devemos utilizar um algoritmo especial como o de Booth

- . Multiplicador e multiplicando são armazenados nos registradores Q e M.
- . Utiliza-se um registrador de 1 bit, posicionado logicamente à direita do bit menos significativo do registrador Q, o qual é designado como Q -1.
- . O resultado da multiplicação é dado nos registradores A e Q.
- . No início, A e Q -1 são inicializados com 0.
- Será examinado o bit menos significativo de Q e o bit de Q -1 :
  - Se os bits forem iguais (1-1 ou 0-0), então todos os bits dos registradores A, Q e Q -1 serão deslocados para a direita.
  - Se os bits forem diferentes, o multiplicando será somado ou
  - subtraído do registrador A (0-1 soma e 1-0 subtrai) e depois os bits
  - serão deslocados para a direita.



Exemplo: Faça as operações aritméticas abaixo utilizando multiplicação de números binários com complemento de 2:

1110 x 1100 (-2 x -4) A Q Q-1 0000 1100  $0 \rightarrow \text{inicial}$ 



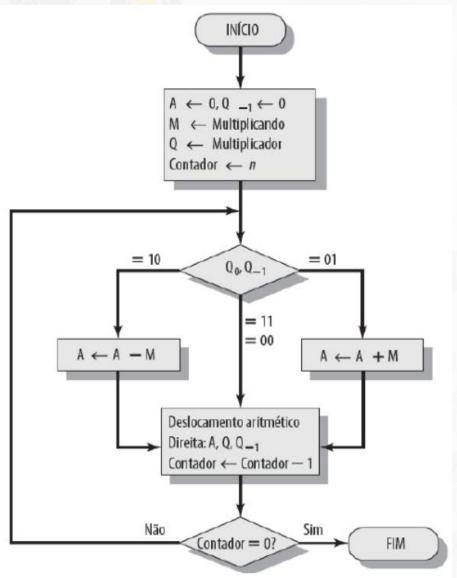
Exemplo: Faça as operações aritméticas abaixo utilizando multiplicação de números binários com complemento de 2:

1110 x 1100 (-2 x -4)

0000 1100 0 → inicial

 $0000\ 0110\ 0 \rightarrow deslocamento$ 

 $0000\ 0011\ 0 \rightarrow deslocamento$ 



Exemplo: Faça as operações aritméticas abaixo utilizando multiplicação de números binários com complemento de 2:

1110 x 1100 (-2 x -4)

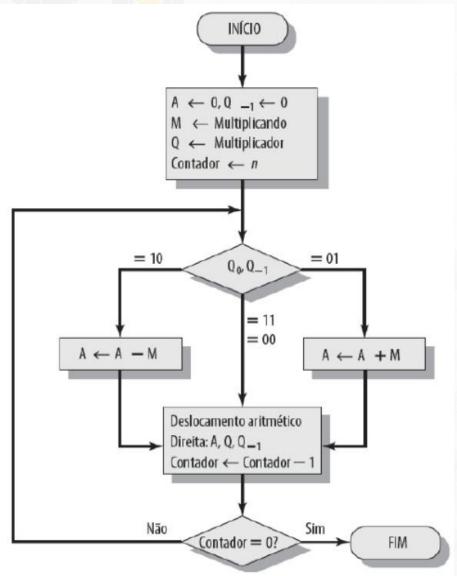
0000 1100 0  $\rightarrow$  inicial

 $0000\ 0110\ 0 \rightarrow deslocamento$ 

 $0000\ 0011\ 0 \rightarrow deslocamento$ 

 $0010\ 0011\ 0 \rightarrow A - M$ 

0001 0001 1  $\rightarrow$  deslocamento



Exemplo: Faça as operações aritméticas abaixo utilizando multiplicação de números binários com complemento de 2:

1110 x 1100 (-2 x -4)

0000 1100  $0 \rightarrow inicial$ 

 $0000\ 0110\ 0 \rightarrow deslocamento$ 

 $0000\ 0011\ 0 \rightarrow deslocamento$ 

 $0010\ 0011\ 0 \to A - M$ 

0001 0001 1  $\rightarrow$  deslocamento

0000 1000 1 → deslocamento

**Produto** 

## Divisão

 Realiza repetidas execuções de adição, subtração e deslocamento.

#### Algoritmo

- 1. O divisor é colocado no registrador M e o dividendo no registrador Q (sem considerar o sinal). O registrador A é iniciado com 0.
- 2. Deslocar o conteúdo dos registradores A e Q, um bit à esquerda.
- 3. Execute  $A \leftarrow A M$ ;
- 4. Se o sinal de A se manteve após a operação em 3, faça Q0 = 1; Senão, restaure o valor de A, ou seja A ← A + M e faça Q0 = 0;
- 5. Repita 2 a 4 de acordo com o tamanho da palavra armazenada em Q.
  - No fim:
    - O resto estará em A.
    - Se o divisor e o dividendo tiverem o mesmo sinal, o quociente estará em Q;

## Divisão

$$\begin{array}{c|c} & 1001_{\text{dec}} & \text{Quociente} \\ \hline \text{Divisor } 1000_{\text{dec}} & \hline 1001010_{\text{dec}} & \text{Dividendo} \\ \hline & 10 \\ & 10 \\ & 101 \\ & 1010 \\ \hline & 10_{\text{dec}} & \\ \hline & 10_{\text{dec}} & \text{Resto} \\ \end{array}$$

## Algoritmo

#### O algoritmo considera que o dividendo e divisor são positivos

- 1. O divisor é colocado no registrador M e o dividendo no registrador Q (sem considerar o sinal). O registrador A é iniciado com 0.
- 2. Deslocar o conteúdo dos registradores A e Q, um bit à esquerda.
- 3. Execute  $A \leftarrow A M$ ;
- Se o sinal de A se manteve após a operação em 3, faça Q0 = 1;
   Senão, restaure o valor de A, ou seja A ← A + M e faça Q0 = 0;
- 5. Repita 2 a 4 de acordo com o tamanho da palavra armazenada em Q.
  - No fim:
  - O resto estará em A.
  - Se o divisor e o dividendo tiverem o mesmo sinal, o quociente estará em Q;
  - Caso contrário, o quociente correto é o complemento de 2 do número armazenado em Q.

## Divisão

#### Exemplos:

Faça as operações aritméticas abaixo utilizando divisão de números binários com complemento de 2:

0111 / 0010 (7 / 2)

A Q

0000 0111 → inicial

0000 1110 → deslocamento

 $1110 \ 1110 \rightarrow A - M$ 

 $0000 \ 1110 \rightarrow restaurar \ Q0 = 0$ 

0001 1100 → deslocamento

1111 1100  $\rightarrow$  A - M

 $0001\ 1100 \rightarrow restaurar\ Q0 = 0$ 

0011 1000 → deslocamento

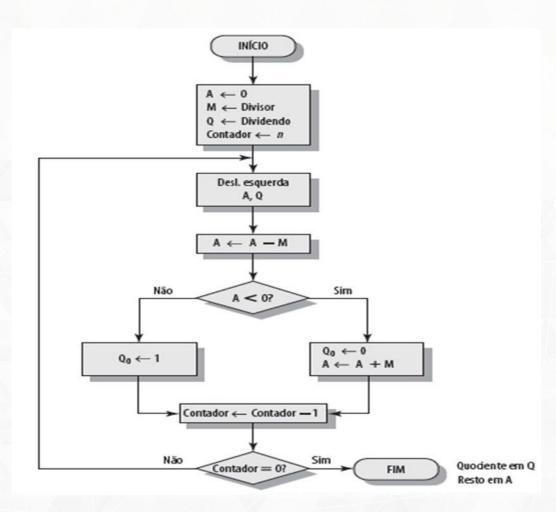
 $0001\ 1000 \to A - M$ 

 $0001\ 1001 \rightarrow Q0 = 1$ 

0011 0010 → deslocamento

 $0001\ 0010 \rightarrow A - M$ 

 $0001\ 0011 \rightarrow Q0 = 1$ 



## Divisão

1101 / 0110 (-3 / 6)

A M

0000 1101 → inicial

0001 1010 → deslocamento

 $1011\ 1010 \rightarrow A - M$ 

0001 1010 → restaurar

0011 0100 → deslocamento

 $1101\ 0100 \to A - M$ 

0011 0100 → restaurar

0110 1000 → deslocamento

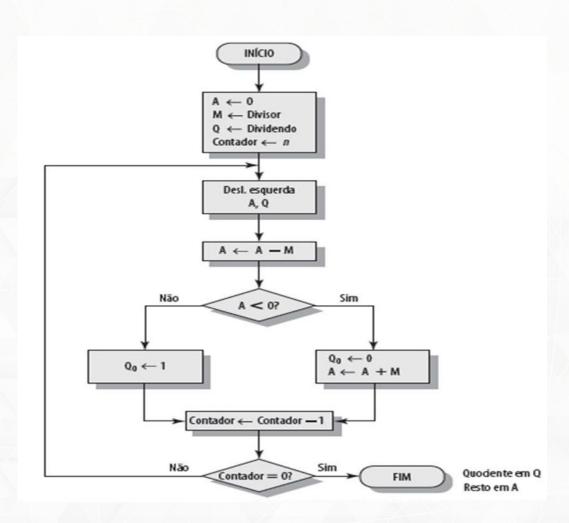
 $0000\ 1000 \to A - M$ 

 $0000\ 1001 \rightarrow Q\ 0 = 1$ 

0001 0010 → deslocamento

 $1011\ 0010 \rightarrow A - M$ 

0001 0010 → restaurar



# Exercícios Fixação: Multiplicação e Divisão

Disponível no moodle

### • Exemplos:

- Normalização: Um número na notação de ponto flutuante que não possui 0s à esquerda do ponto decimal.
- Notação científica: Uma notação que apresenta números com um único dígito à esquerda do ponto decimal.

#### Exemplos:

. 1,0dec ×

OK

• 0,1dec ×

X

 $\cdot$  10,0dec ×

X

- S: Sinal + ou -
- F: Fração (Mantissa)
- E: Expoente (Polarizado)
- B: Base

- S: Sinal + ou -
- F: Fração (Mantissa)
- E: Expoente (Polarizado)
- B: Base



# Representação Binária de Ponto Flutuante

- S: Sinal + ou -
- F: Fração (Mantissa)
- E: Expoente (Polarizado)
- B: Base

#### Polarizado?

- O Intervalo de valor do expoente 0 255.
- Porém a polarização subtrai do expoente o valor 127
  - Porque polarizar? Para não haver necessidade de representar expoentes negativos.
- Intervalo verdadeiro: De -127 a +128.

- Exemplos:
  - 1.6328125 x  $2^{20}$
- Primeiro temos que descobrir quem é a mantissa 0.6328125
  - Para isso temos que usar um processo algorítmico
    - A primeira casa fracionária é o número antes da vírgula
    - Para calcular as próximas devemos subtrair da mantissa o valor fracionário e multiplicar o resultado por 2
    - Assim, achamos a próxima casa fracionária
    - Repita o processo até ZERAR a mantissa

#### • Exemplos:

```
1.6328125 \times 2^{20} 0.6328125 \times 2 = 1.2656250, portanto primeira casa fracionária é 1 (1.2656250-1) = 0.2656250 \times 2 = 0.5312500
```

#### • Exemplos:

```
1.6328125 x 2^{20}

0.6328125 x 2 = 1.2656250 , portanto primeira casa fracionária é 1 (1.2656250-1 ) = 0.2656250 x 2 = 0.5312500 0.5312500 = casa fracionária = 0 \rightarrow0.5312500 - 0
```

#### • Exemplos:

```
1.6328125 \times 2^{20} 0.6328125 \times 2 = 1.2656250 \text{ , portanto primeira casa fracionária é 1} (1.2656250 - 1) = 0.2656250 \times 2 = 0.5312500 0.5312500 = \text{casa fracionária} = 0 \rightarrow 0.5312500 - 0 0.5312500 * 2 = 1.0625000 \text{ casa fracionária} = 1.0625000 - 1 = 0.0625000
```

#### • Exemplos:

```
1.6328125 \times 2^{20} 0.6328125 \times 2 = 1.2656250 \text{ , portanto primeira casa fracionária é 1} (1.2656250 - 1) = 0.2656250 \times 2 = 0.5312500 0.5312500 = \text{casa fracionária} = 0 \rightarrow 0.5312500 - 0 0.5312500 \times 2 = 1.0625000 \text{ casa fracionária} = 1.0625000 - 1 = 0.0625000 0.0625000 \times 2 = 0.125 \rightarrow 0 \rightarrow 0.125 - 0 \times 2 = 0.25
```

```
1.6328125 \times 2^{20} 0.6328125 \times 2 = 1.2656250 \text{ , portanto primeira casa fracionária é 1} (1-1.2656250) = 0.2656250 \times 2 = 0.5312500 0.5312500 = \text{casa fracionária} = 0 \to 0 - 0.5312500 0.5312500 \times 2 = 1.0625000 \text{ casa fracionária} = 1 - 1.0625000 = 0.0625000 0.0625000 \times 2 = 0.125 \to 0 \to 0.125 - 0 \times 2 = 0.25 0.25 = 0 \to 0.25 - 0 = 0.25 \times 2 = 0.5
```

```
1.6328125 x 2^{20}

0.6328125 x 2 = 1.2656250 , portanto primeira casa fracionária é 1

(1-1.2656250 ) = 0.2656250 x 2 = 0.5312500

0.5312500 = casa fracionária = 0 \rightarrow 0 - 0.5312500

0.5312500 * 2 = 1.0625000 casa fracionária = 1 - 1.0625000 = 0.0625000

0.0625000 * 2 = 0.125 \rightarrow 0 \rightarrow 0.125 - 0 * 2 = 0.25

0,25 = 0 \rightarrow 0.25 - 0 = 0.25 * 2 = 0.5

0.5 = 0 \rightarrow 0.5 - 0 = 0.5 * 2 = 1.0
```

```
\begin{array}{l} 1.6328125 \times 2^{20} \\ 0.6328125 \times 2 = 1.2656250 \text{ , portanto primeira casa fracionária é 1} \\ (1-1.2656250) = 0.2656250 \times 2 = 0.5312500 \\ 0.5312500 = casa fracionária = 0 \to 0 - 0.5312500 \\ 0.5312500 * 2 = 1.0625000 \text{ casa fracionária } = 1 - 1.0625000 = 0.0625000 \\ 0.0625000 * 2 = 0.125 \to 0 \to 0.125 - 0 * 2 = 0.25 \\ 0.25 = 0 \to 0.25 - 0 = 0.25 * 2 = 0.5 \\ 0.5 = 0 \to 0.5 - 0 = 0.5 * 2 = 1.0 \\ 1.0 = 1 \to 1.0 - 1 = 0 \text{(acabou)} \\ \text{R: 1010001} = 0,6328125 \\ \end{array}
```

- Exemplos:
  - 1.6328125 x  $2^{20}$  = + 1.1010001 x  $2^{10100}$
- Agora devemos encontrar o expoente
  - Para isso devemos polarizar o seu valor
    - 10100 = 20
    - 20+127 = 147
    - 147-127 = 20
    - Portanto 147 é o valor polarizado 10010011

### • Exemplos:

#### Outros exemplos:

## Normalização

### Normalização

- Números de ponto flutuante geralmente são normalizados:
- O expoente é ajustado de modo que o bit inicial da mantissa seja sempre 1.
- Funciona da mesma forma em notação científica:
  - Os números são normalizados para um único dígito antes do ponto decimal.
  - Ex.:  $3123 = 3{,}123 \times 10^{3}$ .
- Por ser sempre 1, não é preciso armazená-lo.

# Normalização

• Exemplo:

Normalizar 25,5

25,5/2 = 12,75

12,75/2 = 6,375

6,375/2 = 3,1875

3,1875/2 = 1,59375

4 divisões

1,59375 x 2<sup>4</sup> (25,5 normalizado)

## Overflow e underflow

#### Overflow

- $(1,110 \times 2^{120}) \times (1,010 \times 2^{100}) = 1,00011 \times 2^{220}$ 
  - Não da para representar com 32 bits, por o expoente não está entre os limites -126 à 127

#### Underflow

- $(1,110 \times 2^{-120}) \times (1,010 \times 2^{-100}) = 1,00011 \times 2^{-220}$ 
  - No caso do underflow é possível aproximar para zero

- Passos para as Operações de Soma/Subtração
  - 1. Verifique zero;
  - 2. Alinhe a mantissa;
  - 3. Soma ou subtraia mantissa;
  - 4. Normalize resultado.

- A adição e a subtração são idênticas, exceto por uma mudança de sinal:
  - Se essa for uma operação de subtração, o processo começa alterando o sinal do subtraendo;
  - Em seguida, se algum operando for 0, o outro é informado como o resultado.

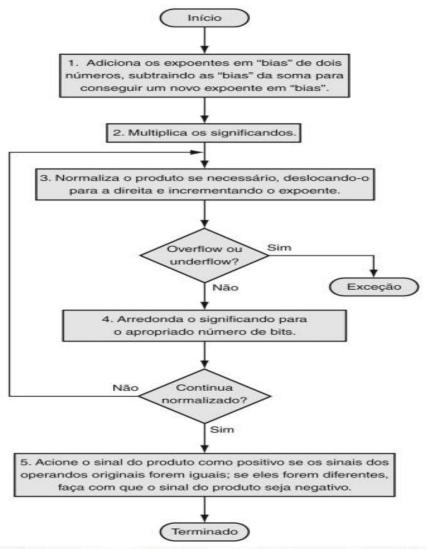
- Operações de Soma/Subtração Alinhamento da mantissa
  - A próxima fase é manipular os números de modo que os dois expoentes sejam iguais.
  - O alinhamento é obtido deslocando repetidamente a parte de magnitude da mantissa 1 dígito para a direita, e aumentando o expoente até que os dois expoentes sejam iguais.
  - Se esse processo resultar em um valor 0 para a mantissa, então o outro número é informado como resultado.

- Operações de Soma/Subtração Adição
  - As duas mantissas são somadas, podendo ocasionar:
    - 1. Resultado 0: Se as mantissas forem iguais em valor, porém diferentes em sinal.
    - 2. Overflow da mantissa por 1 dígito: A soma gerou um carry.
      - Se isso acontecer, a mantissa do resultado é deslocado para a direita e o expoente é incrementado.
    - 3. Overflow de expoente: O expoente foi incrementado e passou do valor máximo.
  - Isso seria informado e a operação encerrada.

- Operações de Soma/Subtração Normalização
  - A fase final normaliza o resultado.
  - Consiste no deslocamento dos dígitos da mantissa para a esquerda até que o dígito mais significativo seja diferente de zero.
  - Cada deslocamento causa um decremento do expoente e, portanto, poderá ocasionar um underflow do expoente.
  - Finalmente, o resultado poderá ser arredondado e depois informado.

- Passos para as Operações de Divisão/Multiplicação
  - 1. Verifique zero.
  - 2. Soma/subtraia expoentes.
  - 3. Multiplique/divida mantissa (observe sinal).
  - 4. Normalize.
  - 5. Arredonde.

# Operações com Ponto Flutuante (Multiplicação e divisão)



- 1. Verifique zero.
- 2. Soma/subtraia expoentes.
- 3. Multiplique/divida significandos (observe sinal).
- 4. Normalize.
- 5. Arredonde.

# Exercícios Fixação: Ponto Flutuante IEEE 754

Disponível no moodle

## Referências

• PATTERSON, David A.; HENNESSY, John L.Organizac, ao e projeto de computadores: ainterface hardware/software, 5. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2017. ISBN 9788535287936.

STALLINGS, William.; Arquitetura e Organização de Computadores. 10.
 ed. São Paulo:Pearson Education do Brasil, 2017. ISBN 9788543020532.

 TANENBAUM, A. S.; AUSTIN, T. Organização Estruturada de Computadores. 6. ed. SãoPaulo: Pearson Education do Brasil, 2013. ISBN 9788581435398.