

dos se ajustam ao modelo, então um segmento finito dos dados pode ser usado para determinar os parâmetros do modelo e, conseqüentemente, também seu espectro. Especificamente, no caso determinístico

$$|\hat{S}(e^{j\omega})|^2 = |H(e^{j\omega})|^2 |V(e^{j\omega})|^2 = |H(e^{j\omega})|^2 \quad (11.54)$$

já que  $|V(e^{j\omega})|^2 = 1$  para uma excitação impulso unitário do sistema do modelo. De modo similar, para sinais aleatórios, o espectro de potência da saída do modelo é

$$P_{ss}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2 P_{ww}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2, \quad (11.55)$$

pois  $P_{ww}(e^{j\omega}) = 1$  para a entrada ruído branco. Assim, podemos obter uma estimativa do espectro de um sinal  $s[n]$  calculando um modelo só-polos para o sinal e, depois, calculando a magnitude quadrática da resposta em frequência do sistema do modelo. Tanto para o caso determinístico quanto para o caso aleatório, a estimativa de espectro toma a forma

$$\text{Estimativa de espectro} = |H(e^{j\omega})|^2 = \left| \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^p a_k e^{-j\omega k}} \right|^2. \quad (11.56)$$

Para entender a natureza da estimativa de espectro da Equação 11.56 para o caso determinístico, é útil lembrar que a TFTD do sinal de comprimento finito  $s[n]$  é

$$S(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^M s[n] e^{-j\omega n}. \quad (11.57)$$

Além disso, note que

$$r_{ss}[m] = \sum_{n=0}^{M-|m|} s[n+m] s[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S(e^{j\omega})|^2 e^{j\omega m} d\omega, \quad (11.58)$$

em que, por causa do comprimento finito de  $s[n]$ ,  $r_{ss}[m] = 0$  para  $|m| > M$ . Os valores de  $r_{ss}[m]$  para  $m = 0, 1, 2, \dots, p$  são usados no cálculo do modelo só-polos usando o método da autocorrelação. Assim, é razoável supor que existe uma relação entre o espectro de Fourier do sinal,  $|S(e^{j\omega})|^2$ , e o espectro do modelo só-polos,  $|\hat{S}(e^{j\omega})|^2 = |H(e^{j\omega})|^2$ .

Uma abordagem para esclarecer essa relação é obter uma expressão para o erro de predição médio em termos da TFTD do sinal  $s[n]$ . Lembre-se de que o erro de predição é  $e[n] = h_A[n] * s[n]$ , em que  $h_A[n]$  é a resposta ao impulso do filtro de erro de predição. Pelo Teorema de Parseval, o erro de predição médio é

$$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{M+p} (e[n])^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |S(e^{j\omega})|^2 |A(e^{j\omega})|^2 d\omega, \quad (11.59)$$

em que  $S(e^{j\omega})$  é a TFTD de  $s[n]$  como dada na Equação 11.57. Como  $H(z) = G/A(z)$ , a Equação 11.59 pode ser expressa em termos de  $H(e^{j\omega})$  como

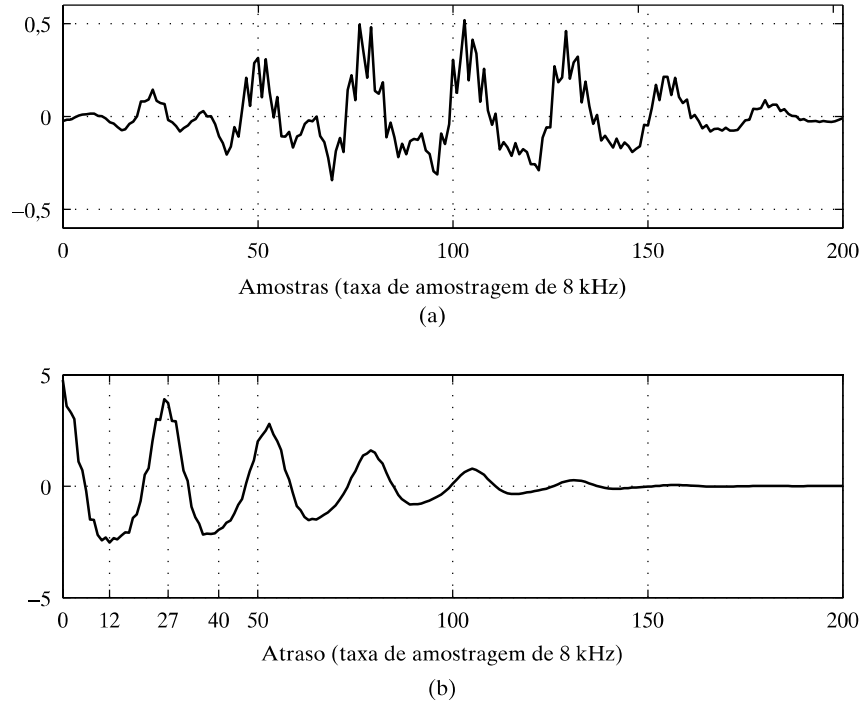
$$\mathcal{E} = \frac{G^2}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|S(e^{j\omega})|^2}{|H(e^{j\omega})|^2} d\omega. \quad (11.60)$$

Como o integrando na Equação 11.60 é positivo, e  $|H(e^{j\omega})|^2 > 0$  para  $-\pi < \omega \leq \pi$ , conclui-se, portanto, pela Equação 11.60 que a minimização de  $\mathcal{E}$  é equivalente à minimização da razão entre o espectro de energia do sinal  $s[n]$  e a magnitude quadrática da resposta em frequência do sistema linear no modelo só-polos. A implicação desse fato é que o espectro de modelo só-polos tentará casar o espectro de energia do sinal mais proximamente nas frequências em que o espectro do sinal é forte, pois as frequências em que  $|S(e^{j\omega})|^2 > |H(e^{j\omega})|^2$  contribuem mais para o erro quadrático médio do que as frequências em que acontece o oposto. Assim, a estimativa de espectro do modelo só-polos favorece um bom ajuste em torno dos picos do espectro do sinal. Isso será ilustrado pela discussão na Seção 11.5.1. Análise e raciocínio similares também se aplicam ao caso em que  $s[n]$  é aleatório.

### 11.5.1 Análise só-polos de sinais de voz

A modelagem só-polos é amplamente usada no processamento de voz, tanto para codificação de voz, em que frequentemente é usado o termo codificação preditiva linear (LPC, do inglês *linear predictive coding*), quanto para análise espectral. (Veja Atal e Hanauer, 1971, Makhoul, 1975, Rabiner e Schafer, 1978, e Quatieri, 2002.) Para ilustrar muitas das ideias discutidas neste capítulo, discutimos com alguns detalhes o uso da modelagem só-polos para a análise espectral de sinais de voz. Esse método tipicamente é aplicado de uma maneira dependente do tempo pela seleção periódica de segmentos curtos do sinal de voz para análise quase da mesma forma como é feito na análise de Fourier dependente do tempo discutida na Seção 10.3. Como a transformada de Fourier dependente do tempo é basicamente uma sequência de TFTDs de segmentos de comprimento finito, a discussão sobre a relação entre a TFTD e o espectro só-polos caracteriza também a relação entre a análise de Fourier dependente do tempo e a análise espectral do modelo só-polos dependente do tempo.

Na Figura 11.11 é mostrado um segmento de 201 pontos obtido pelo janelamento usando uma janela de Hamming de um sinal de voz  $s[n]$  no gráfico superior e a função de autocorrelação correspondente  $r_{ss}[m]$  no gráfico inferior. Durante esse intervalo de tempo, o sinal de voz é sonoro (as cordas vocais vibram), como evidenciado pela natureza periódica do sinal. Essa periodicidade



**Figura 11.11** (a) Forma de onda de voz sonora janelada. (b) Função de autocorrelação correspondente (amostras conectadas por segmentos de reta).

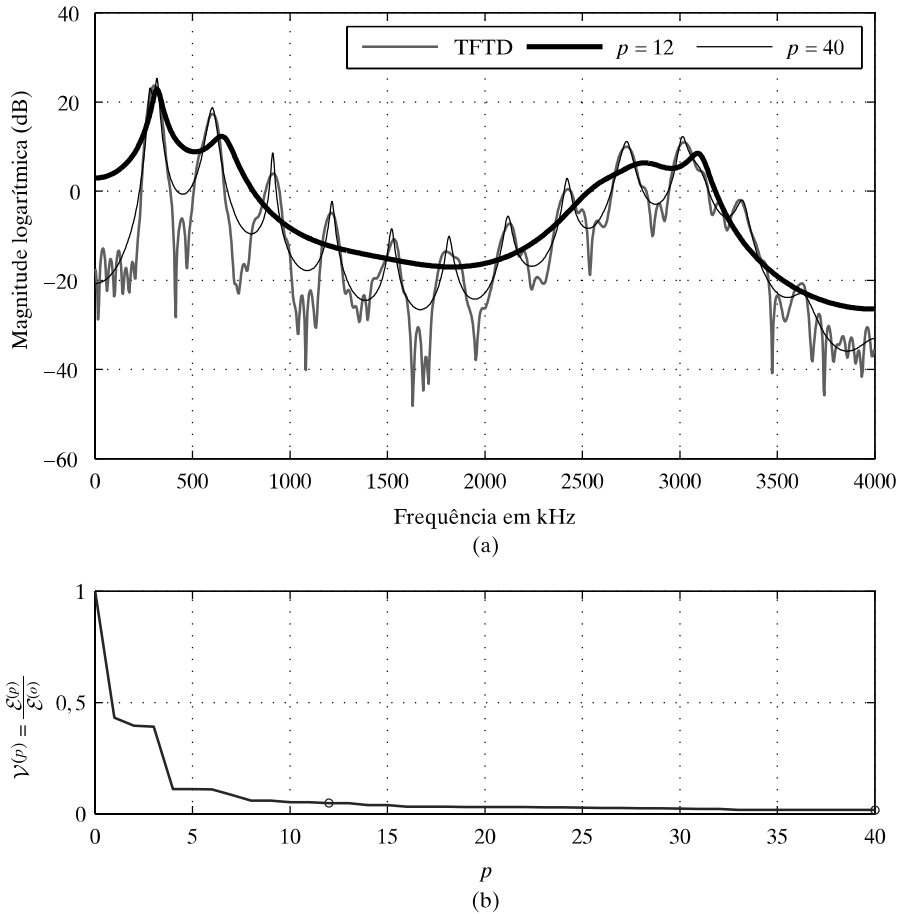
aparece na função de autocorrelação como o pico em torno de 27 amostras ( $27/8 = 3,375$  ms para uma taxa de amostragem de 8 kHz) e seus múltiplos inteiros.

Ao aplicar a modelagem só-polos à voz sonora, é útil pensar o sinal como determinístico, mas com uma função de excitação que é um trem de impulsos periódico. Essa escolha dá conta da natureza periódica da função de autocorrelação quando vários períodos do sinal são incluídos na janela, como na Figura 11.11(a).

Na Figura 11.12 mostra-se uma comparação da TFTD do sinal da Figura 11.11(a) com espectros calculados a partir da modelagem só-polos com duas ordens de modelo diferentes e usando a função de autocorrelação da Figura 11.11(b). Note que a TFTD de  $s[n]$  mostra picos em múltiplos da frequência fundamental  $F_0 = 8 \text{ kHz}/27 = 296 \text{ Hz}$ , bem como muitos outros picos e vales menos proeminentes que podem ser atribuídos aos efeitos do janelamento discutidos na Seção 10.2.1. Se as 13 primeiras amostras de  $r_{ss}[m]$  na Figura 11.11(b) são usadas para calcular um espectro de modelo só-polos ( $p = 12$ ), o resultado é a curva suave mostrada com a linha grossa na Figura 11.12(a). Com a ordem de filtro como 12 e o período fundamental de 27 amostras, essa estimativa espectral de fato ignora a estrutura espectral devida à periodicidade do sinal e produz uma estimativa de espectro muito mais suave. Contudo, se 41 valores de  $r_{ss}[m]$  são usados, obtemos o espectro mostrado com a linha fina. Como o período do sinal é 27, um

valor de  $p = 40$  inclui o pico de periodicidade na função de autocorrelação e, assim, o espectro só-polos tende a representar grande parte do detalhe fino no espectro da TFTD. Note que os dois casos sustentam nossa afirmação anterior de que a estimativa de espectro do modelo só-polos tende a favorecer a boa representação dos picos do espectro da TFTD.

Esse exemplo ilustra que a escolha da ordem do modelo  $p$  controla o grau de suavização do espectro da TFTD. Na Figura 11.12(b) mostra-se que, quando  $p$  aumenta, o erro quadrático médio de predição diminui rapidamente e depois nivela-se, como em nosso exemplo anterior. Lembre-se de que, nas seções 11.2.4 e 11.2.5, argumentamos que o modelo só-polos com ganho adequadamente escolhido resulta em um casamento entre as funções de autocorrelação do sinal e o modelo só-polos até  $p$  atrasos de correlação, como na Equação 11.39. Isso implica que, quando  $p$  aumenta, o espectro do modelo só-polos se aproximará do espectro da TFTD e, quando  $p \rightarrow \infty$ , conclui-se que  $r_{hh}[m] = r_{ss}[m]$  para todo  $m$ , e, portanto,  $|H(e^{j\omega})|^2 = |S(e^{j\omega})|^2$ . Porém, isso não significa que  $H(e^{j\omega}) = S(e^{j\omega})$  porque  $H(z)$  é um sistema IIR, e  $S(z)$  é a transformada  $z$  de uma sequência de comprimento finito. Além disso, note que, quando  $p \rightarrow \infty$ , o erro de predição médio não se aproxima de zero, embora  $|H(e^{j\omega})|^2 \rightarrow |S(e^{j\omega})|^2$ . Como discutimos, isso ocorre porque o erro total na Equação 11.11 é o erro de predição  $\tilde{e}[n]$  menos  $Gv[n]$ . Em outras palavras, o predi-



**Figura 11.12** (a) Comparação entre a TFTD e os espectros do modelo só-polos para o segmento de voz sonora da Figura 11.11(a). (b) Erro de predição normalizado em função de  $p$ .

tor linear deve sempre prever a primeira amostra não nula a partir das amostras nulas que o precedem.

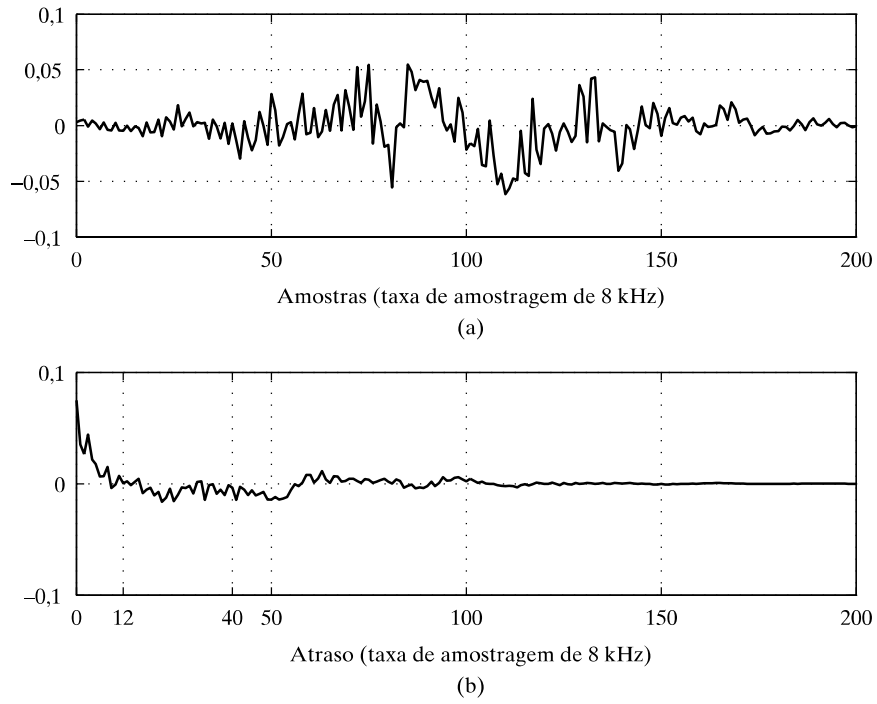
A outra classe principal dos sons de voz é composta dos sons surdos como os fricativos. Esses sons são produzidos criando-se fluxo turbulento aleatório de ar no trato vocal; portanto, eles são mais bem modelados em termos de um sistema só-polos excitado por ruído branco. Na Figura 11.13 mostra-se um exemplo de segmento de voz surdo com 201 pontos janelados usando-se uma janela de Hamming e sua função de autocorrelação correspondente. Note que a função de autocorrelação não mostra indícios de periodicidade nem na forma de onda do sinal nem na função de autocorrelação. Uma comparação da TFTD do sinal na Figura 11.13(a) com dois espectros do modelo só-polos calculados a partir da função de autocorrelação na Figura 11.13(b) é mostrada na Figura 11.14(a). Do ponto de vista de análise espectral dos sinais aleatórios, a magnitude quadrática da TFTD é um periodograma. Assim, ela contém um componente que varia aleatoriamente com a frequência. Novamente, pela escolha da

ordem do modelo, o periodograma pode ser suavizado em qualquer grau desejado.

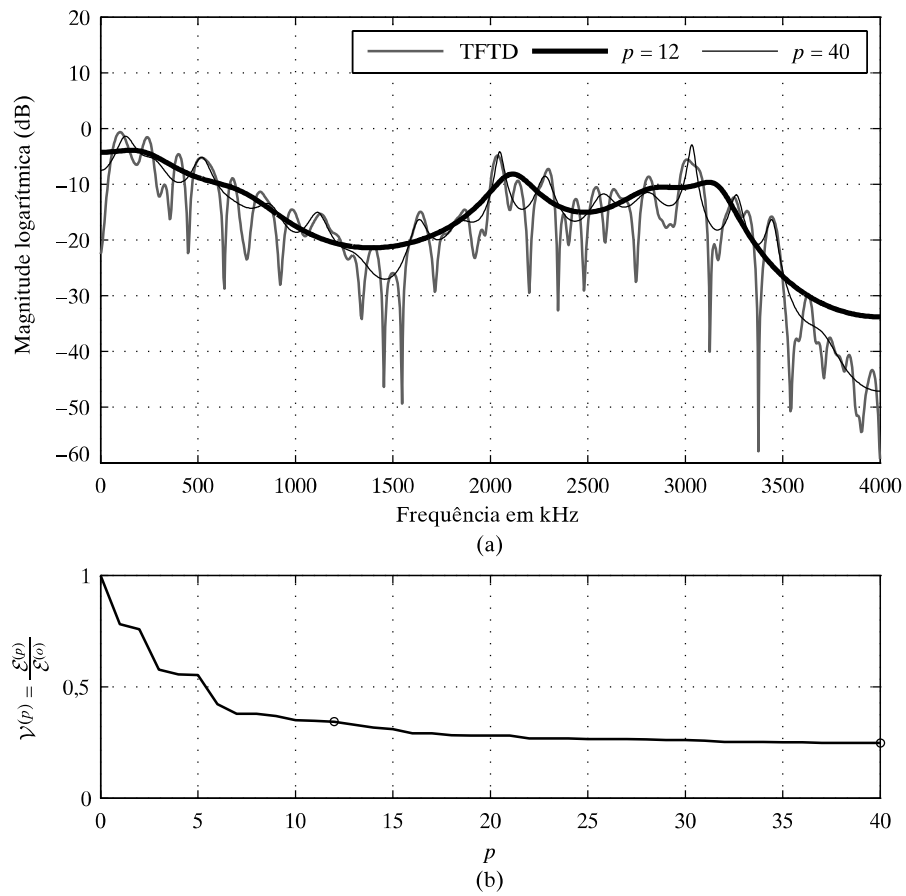
### 11.5.2 Localização dos polos

No processamento de voz, os polos do modelo só-polos têm uma relação estreita com as frequências de ressonância do trato vocal, assim, frequentemente é útil fatorar o polinômio  $A(z)$  para obter seus zeros para representação como na Equação 11.50. Como discutido na Seção 11.3.3, os zeros  $z_k$  do filtro de erro de predição são os polos da função de sistema do modelo só-polos. São os polos da função de sistema os responsáveis pelos picos nas estimativas de espectro discutidas na Seção 11.5.1. Quanto mais perto um polo estiver da circunferência unitária, maior o pico do espectro para as frequências próximas do ângulo do polo.

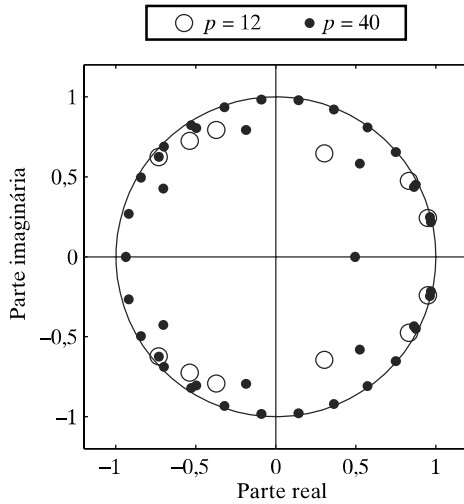
Na Figura 11.15 mostram-se os zeros da função de sistema de erro de predição  $A(z)$  (polos do sistema do modelo) para as duas estimativas de espectro da Figura 11.12(a). Para  $p = 12$ , os zeros de  $A(z)$  são denotados por círculos vazios. Cinco pares de zeros complexos



**Figura 11.13** Forma de onda de voz surda janelada. (b) Função de autocorrelação correspondente (amostras conectadas por segmentos de reta).



**Figura 11.14** (a) Comparação entre a TFTD e espectros do modelo só-polos para o segmento de voz surda da Figura 11.13(a). (b) Erro de predição normalizado em função de  $p$ .



**Figura 11.15** Zeros dos filtros de erro de predição (polos dos sistemas do modelo) usados para obter as estimativas do espectro da Figura 11.12.

conjugados estão próximos da circunferência unitária, e suas manifestações como polos ficam claramente evidentes na curva de linha grossa da Figura 11.12(a). Para o caso  $p = 40$ , os zeros de  $A(z)$  são denotados pelos círculos menores preenchidos. Observe que a maioria dos zeros está próxima da circunferência unitária, e que eles estão distribuídos mais ou menos uniformemente em torno da circunferência unitária. Isso produz os picos no espectro de modelo que são espaçados aproximadamente em múltiplos da frequência em radianos normalizada correspondente à frequência fundamental do sinal de voz; isto é, em ângulos  $2\pi(296 \text{ Hz})/8 \text{ kHz}$ .

### 11.5.3 Modelagem só-polos dos sinais senoidais

Como outro exemplo importante, consideramos o uso dos polos de um modelo só-polos para estimar frequências de sinais senoidais. Para entender por que isso é possível, considere a soma de duas senoides

$$s[n] = [A_1 \cos(\omega_1 n + \theta_1) + A_2 \cos(\omega_2 n + \theta_2)] u[n]. \quad (11.61)$$

A transformada  $z$  de  $s[n]$  tem a forma

$$S(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + b_3 z^{-3}}{(1 - e^{j\omega_1} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_1} z^{-1})(1 - e^{j\omega_2} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_2} z^{-1})}. \quad (11.62)$$

Isto é, a soma de duas senoides pode ser representada como a resposta ao impulso de um sistema LIT cuja função de sistema tem polos e zeros. O polinômio do numerador seria uma função um tanto complicada das amplitudes, frequências e deslocamentos de fase. O

que é importante para nossa discussão é que o numerador seja um polinômio de 3º grau e o denominador seja um polinômio de 4º grau, cujas raízes estejam sobre a circunferência unitária em ângulos iguais a  $\pm\omega_1$  e  $\pm\omega_2$ . A equação de diferenças que descreve esse sistema com excitação impulso tem a forma

$$s[n] - \sum_{k=1}^4 a_k s[n-k] = \sum_{k=0}^3 b_k \delta[n-k] \quad (11.63)$$

em que os coeficientes  $a_k$  resultariam da multiplicação dos fatores no denominador. Note que

$$s[n] - \sum_{k=1}^4 a_k s[n-k] = 0 \quad \text{para } n \geq 4, \quad (11.64)$$

o que sugere que o sinal  $s[n]$  pode ser predito sem erro por um preditor de quarta ordem, exceto bem no início ( $0 \leq n \leq 3$ ). Os coeficientes do denominador podem ser estimados a partir do sinal pela aplicação do método da covariância a um segmento curto do sinal selecionado de modo a não incluir as primeiras quatro amostras. No caso ideal para o qual a Equação 11.61 representa o sinal com precisão (por exemplo, para uma alta SNR), as raízes do polinômio resultante fornecem boas estimativas das frequências dos componentes senoidais.

Na Figura 11.16(a) é mostrado um gráfico de 101 amostras do sinal<sup>8</sup>

$$s[n] = 20 \cos(0,2\pi n - 0,1\pi) + 22 \cos(0,22\pi n + 0,9\pi). \quad (11.65)$$

Como as duas frequências estão muito próximas, é preciso usar um grande número de amostras para resolver as duas frequências pela análise de Fourier. Porém, como o sinal se ajusta perfeitamente ao modelo só-polos, o método da covariância pode ser usado para obter estimativas muito precisas das frequências a partir de segmentos muito curtos do sinal. Isso é ilustrado na Figura 11.16(b).

A TFTD das 101 amostras (com janela retangular) não mostra indícios de que existem duas frequências senoidais distintas em torno de  $\omega = 0,21\pi$ . Lembre-se de que a largura do lóbulo principal para uma janela retangular de  $(M+1)$  pontos é  $\Delta\omega = 4\pi/(M+1)$ . Consequentemente, uma janela retangular de 101 pontos pode claramente resolver duas frequências somente se elas não estiverem mais próximas do que cerca de  $0,04\pi$  rad/s. De modo correspondente, a TFTD não mostra dois picos espectrais.

De modo similar, o uso do método da autocorrelação resulta na estimativa de espectro mostrada pela linha grossa. Essa estimativa também contém apenas um

<sup>8</sup> O decaimento do segmento de sinal na Figura 11.16(a) não é resultado de janelamento. Ele é causado pelo “batimento” dos dois cossenos quase da mesma frequência. O período da frequência de batimento (diferença entre  $0,22\pi$  e  $0,2\pi$ ) é de 100 amostras.

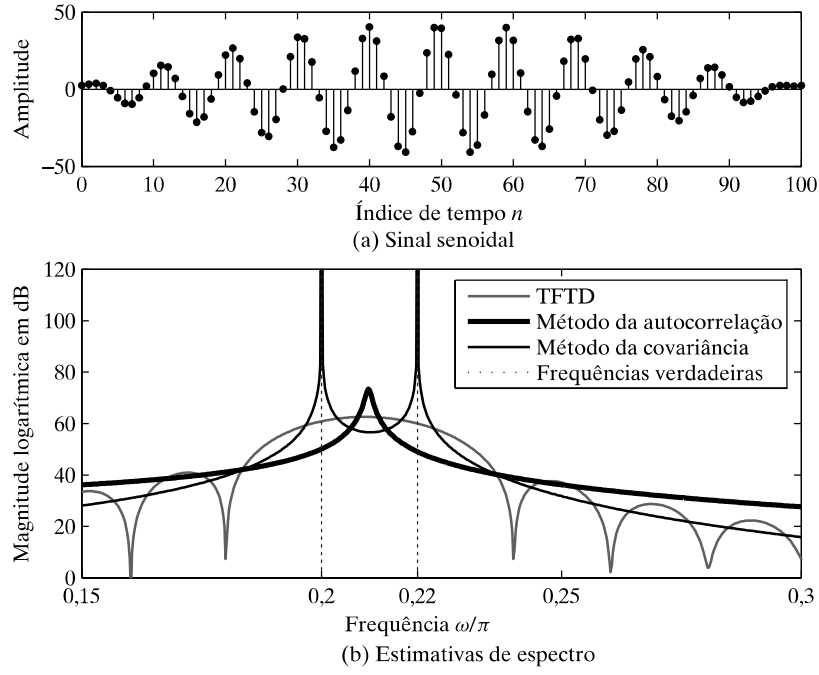


Figura 11.16 Estimativa de espectro para um sinal senoidal.

pico espectral. O polinômio do erro de predição (em forma fatorada) obtido pelo método da autocorrelação é

$$A_a(z) = (1 - 0,998e^{j0,21\pi}z^{-1})(1 - 0,998e^{-j0,21\pi}z^{-1}) \cdot (1 - 0,426z^{-1})(1 - 0,1165z^{-1}) \quad (11.66)$$

Os dois polos reais não contribuem com picos, e os polos complexos estão próximos da circunferência unitária, mas em  $\pm 0,21\pi$ , que está a meio caminho entre as duas frequências. Assim, o janelamento inerente ao método da autocorrelação faz com que o modelo resultante fique travado na frequência média  $0,21\pi$ .

Por outro lado, o polinômio fatorado do erro de predição obtido com o método da covariância (com arredondamento das magnitudes e ângulos) é dado por

$$A_c(z) = (1 - e^{j0,2\pi}z^{-1})(1 - e^{-j0,2\pi}z^{-1}) \cdot (1 - e^{j0,22\pi}z^{-1})(1 - e^{-j0,22\pi}z^{-1}). \quad (11.67)$$

Nesse caso, os ângulos dos zeros são quase exatamente iguais às frequências das duas senoides. Na Figura 11.16(b) também é mostrada a resposta em frequência do modelo, isto é,

$$|H_{\text{cov}}(e^{j\omega})|^2 = \frac{1}{|A_{\text{cov}}(e^{j\omega})|^2}, \quad (11.68)$$

representada em dB. Nesse caso, o erro de predição é muito próximo de zero, o que, se usado para estimar o ganho do modelo só-polos, levaria a uma estimativa indeterminada. Portanto, o ganho é definido arbitrariamente como unitário, o que leva a um gráfico da Equação

11.68 em uma escala similar às outras estimativas. Como os polos estão quase exatamente sobre a circunferência unitária, o espectro de magnitude torna-se excessivamente alto nas frequências dos polos. Note que as raízes do polinômio de erro de predição dão uma estimativa precisa das frequências. Esse método, naturalmente, não oferece informações precisas sobre as amplitudes e fases dos componentes senoidais.

## 11.6 Solução das equações normais da autocorrelação

Tanto no método da autocorrelação quanto no da covariância para o cálculo dos valores de correlação, os coeficientes do preditor que minimizam o erro quadrático médio do filtro inverso e, de modo equivalente, o erro de predição satisfazem um conjunto de equações lineares na forma geral:

$$\begin{bmatrix} \phi_{ss}[1, 1] & \phi_{ss}[1, 2] & \phi_{ss}[1, 3] & \cdots & \phi_{ss}[1, p] \\ \phi_{ss}[2, 1] & \phi_{ss}[2, 2] & \phi_{ss}[2, 3] & \cdots & \phi_{ss}[2, p] \\ \phi_{ss}[3, 1] & \phi_{ss}[3, 2] & \phi_{ss}[3, 3] & \cdots & \phi_{ss}[3, p] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \phi_{ss}[p, 1] & \phi_{ss}[p, 2] & \phi_{ss}[p, 3] & \cdots & \phi_{ss}[p, p] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{ss}[1, 0] \\ \phi_{ss}[2, 0] \\ \phi_{ss}[3, 0] \\ \vdots \\ \phi_{ss}[p, 0] \end{bmatrix}. \quad (11.69)$$

Em notação matricial, essas equações lineares têm a representação

$$\Phi \mathbf{a} = \boldsymbol{\psi}. \quad (11.70)$$

Como  $\phi[i, k] = \phi[k, i]$ , tanto no método da autocorrelação quanto no da covariância, a matriz  $\Phi$  é simétrica e, como surge em um problema de mínimos quadrados, ela também é positiva definida, o que garante que é invertível. Em geral, isso leva a métodos de solução eficientes, como a decomposição de Cholesky (veja Press et al., 2007), que são baseados em fatoração matricial e são aplicáveis quando  $\Phi$  é simétrica e positiva definida. Porém, no caso específico do método da autocorrelação ou em qualquer método para o qual  $\phi_{ss}[i, k] = r_{ss}[|i - k|]$ , as equações 11.69 tornam-se as equações normais da autocorrelação (também chamadas de equações de Yule–Walker).

$$\begin{bmatrix} r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & r_{ss}[2] & \cdots & r_{ss}[p-1] \\ r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & \cdots & r_{ss}[p-2] \\ r_{ss}[2] & r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & \cdots & r_{ss}[p-3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{ss}[p-1] & r_{ss}[p-2] & r_{ss}[p-3] & \cdots & r_{ss}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{ss}[1] \\ r_{ss}[2] \\ r_{ss}[3] \\ \vdots \\ r_{ss}[p] \end{bmatrix}. \quad (11.71)$$

Nesse caso, além de a matriz  $\Phi$  ser simétrica e positiva definida, ela também é uma matriz Toeplitz, isto é, todos os elementos em cada subdiagonal são iguais. Essa propriedade leva a um algoritmo eficiente, conhecido como recursão de Levinson–Durbin, para a resolução das equações.

### 11.6.1 Recursão de Levinson–Durbin

O algoritmo de Levinson–Durbin para o cálculo dos coeficientes do preditor que minimizam o erro quadrático total de predição resulta do alto grau de simetria na matriz  $\Phi$  e, além disso, como a Equação 11.71 confirma, do fato de os elementos do vetor do membro direito  $\boldsymbol{\Psi}$  serem essencialmente os valores que preenchem a matriz  $\Phi$ . As equações L–D.1 a L–D.6 na Figura 11.17 definem os cálculos. Uma dedução dessas equações é dada na Seção 11.6.2, mas antes de desenvolver os detalhes da dedução, é útil simplesmente examinar os passos do algoritmo.

#### Algoritmo de Levinson–Durbin

$$\mathcal{E}^{(0)} = r_{ss}[0] \quad (\text{L–D.1})$$

for  $i = 1, 2, \dots, p$

$$k_i = \left( r_{ss}[i] - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{(i-1)} r_{ss}[i-j] \right) / \mathcal{E}^{(i-1)} \quad (\text{L–D.2})$$

$$a_i^{(i)} = k_i \quad (\text{L–D.3})$$

if  $i > 1$  then for  $j = 1, 2, \dots, i-1$

$$a_j^{(i)} = a_j^{(i-1)} - k_i a_{i-j}^{(i-1)} \quad (\text{L–D.4})$$

end

$$\mathcal{E}^{(i)} = (1 - k_i^2) \mathcal{E}^{(i-1)} \quad (\text{L–D.5})$$

end

$$a_j = a_j^{(p)} \quad j = 1, 2, \dots, p \quad (\text{L–D.6})$$

Figura 11.17 Equações definindo o algoritmo de Levinson–Durbin.

**(L–D.1)** Esse passo inicializa o erro quadrático médio de predição como a energia do sinal. Isto é, um preditor de ordem zero (nenhum preditor) não gera redução na energia de erro de predição, pois o erro de predição  $e[n]$  é idêntico ao sinal  $s[n]$ .

A próxima linha na Figura 11.17 enuncia que os passos L–D.2 a L–D.5 são repetidos  $p$  vezes, com cada repetição desses passos aumentando a ordem do preditor em uma unidade. Em outras palavras, o algoritmo calcula um preditor de ordem  $i$  a partir do preditor de ordem  $i-1$  começando com  $i-1 = 0$ .

**(L–D.2)** Esse passo calcula uma quantidade  $k_i$ . A sequência de parâmetros  $k_i, i = 1, 2, \dots, p$  a que chamamos de parâmetros  $k$ , desempenha um papel-chave na geração do próximo conjunto de coeficientes do preditor.<sup>9</sup>

**(L–D.3)** Essa equação enuncia que  $a_i^{(i)}$ , o  $i$ -ésimo coeficiente do preditor de ordem  $i$ , é igual a  $k_i$ .

**(L–D.4)** Nessa equação,  $k_i$  é usado para calcular os coeficientes restantes do preditor de ordem  $i$  como uma combinação dos coeficientes do preditor de ordem  $(i-1)$  com aqueles mesmos coeficientes em ordem reversa.

**(L–D.5)** Essa equação atualiza o erro de predição para o preditor de ordem  $i$ .

**(L–D.6)** Esse é o passo final em que o preditor de ordem  $p$  é definido como o resultado após  $p$  iterações do algoritmo.

O algoritmo de Levinson–Durbin é de grande valor porque é um método de solução eficiente para as equações normais da autocorrelação e também pela

<sup>9</sup> Por motivos a ser discutidos na Seção 11.7, os parâmetros  $k$  também são chamados de *coeficientes PARCOR* (do inglês *PARTIAL CORrelation*) ou, também, *coeficientes de reflexão*.

compreensão que ele fornece sobre as propriedades da predição linear e modelos só-polos. Por exemplo, pela Equação L-D.5, pode-se mostrar que o erro de predição quadrático médio para um preditor de ordem  $p$  é o produto dos erros quadráticos médios de predição para todos os preditores de ordem mais baixa, do que conclui-se que  $0 < \mathcal{E}^{(i)} \leq \mathcal{E}^{(i-1)} < \mathcal{E}^{(p)}$  e

$$\mathcal{E}^{(p)} = \mathcal{E}^{(0)} \prod_{i=1}^p (1 - k_i^2) = r_{ss}[0] \prod_{i=1}^p (1 - k_i^2). \quad (11.72)$$

Como  $\mathcal{E}^{(i)} > 0$ , precisa ser verdadeiro que  $-1 < k_i < 1$  para  $i = 1, 2, \dots, p$ . Isto é, os parâmetros  $k$  são estritamente menores que um em magnitude.

### 11.6.2 Dedução do algoritmo de Levinson–Durbin

Pela Equação 11.30, os coeficientes do preditor ótimo satisfazem o conjunto de equações

$$r_{ss}[i] - \sum_{k=1}^p a_k r_{ss}[i - k] = 0 \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (11.73a)$$

e o mínimo erro quadrático médio de predição é dado por

$$r_{ss}[0] - \sum_{k=1}^p a_k r_{ss}[k] = \mathcal{E}^{(p)}. \quad (11.73b)$$

Como a Equação 11.73(b) contém os mesmos valores de correlação que a Equação 11.73(a), é possível juntá-las e escrever um novo conjunto de  $p + 1$  equações que são satisfeitas pelos  $p$  coeficientes desconhecidos do preditor e pelo erro quadrático médio desconhecido correspondente  $\mathcal{E}^{(p)}$ . Essas equações têm a forma matricial

$$\begin{bmatrix} r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & r_{ss}[2] & \cdots & r_{ss}[p] \\ r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & \cdots & r_{ss}[p-1] \\ r_{ss}[2] & r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & \cdots & r_{ss}[p-2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{ss}[p] & r_{ss}[p-1] & r_{ss}[p-2] & \cdots & r_{ss}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1^{(p)} \\ -a_2^{(p)} \\ \vdots \\ -a_p^{(p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}^{(p)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.74)$$

É esse conjunto de equações que pode ser resolvido recursivamente pelo algoritmo de Levinson–Durbin. Isso é feito incorporando-se sucessivamente um novo valor de correlação a cada iteração e resolvendo para o próximo preditor de ordem mais alta em termos do novo valor de correlação e do preditor encontrado anteriormente.

Para qualquer ordem  $i$ , o conjunto de equações na Equação 11.74 pode ser representado em notação matricial como

$$\mathbf{R}^{(i)} \mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}. \quad (11.75)$$

Queremos mostrar como a  $i$ -ésima solução pode ser deduzida da solução  $(i - 1)$ . Em outras palavras, dado  $\mathbf{a}^{(i-1)}$ , a solução para  $\mathbf{R}^{(i-1)} \mathbf{a}^{(i-1)} = \mathbf{e}^{(i-1)}$ , queremos deduzir a solução para  $\mathbf{R}^{(i)} \mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}$ .

Primeiro, escreva as equações  $\mathbf{R}^{(i-1)} \mathbf{a}^{(i-1)} = \mathbf{e}^{(i-1)}$  em forma expandida como

$$\begin{bmatrix} r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & r_{ss}[2] & \cdots & r_{ss}[i-1] \\ r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & \cdots & r_{ss}[i-2] \\ r_{ss}[2] & r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & \cdots & r_{ss}[i-3] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{ss}[i-1] & r_{ss}[i-2] & r_{ss}[i-3] & \cdots & r_{ss}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1^{(i-1)} \\ -a_2^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}^{(i-1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.76)$$

Depois, anexe um 0 ao vetor  $\mathbf{a}^{(i-1)}$  e multiplique pela matriz  $\mathbf{R}^{(i)}$  para obter

$$\begin{bmatrix} r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & r_{ss}[2] & \cdots & r_{ss}[i] \\ r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & \cdots & r_{ss}[i-1] \\ r_{ss}[2] & r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & \cdots & r_{ss}[i-2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{ss}[i-1] & r_{ss}[i-2] & r_{ss}[i-3] & \cdots & r_{ss}[1] \\ r_{ss}[i] & r_{ss}[i-1] & r_{ss}[i-2] & \cdots & r_{ss}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1^{(i-1)} \\ -a_2^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{E}^{(i-1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma^{(i-1)} \end{bmatrix}. \quad (11.77)$$

em que, para satisfazer a Equação 11.77,

$$\gamma^{(i-1)} = r_{ss}[i] - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{(i-1)} r_{ss}[i - j]. \quad (11.78)$$

É na Equação 11.78 que o novo valor de autocorrelação  $r_{ss}[i]$  é introduzido. Contudo, a Equação 11.77 ainda não está na forma desejada  $\mathbf{R}^{(i)} \mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}$ . O passo-chave na dedução é reconhecer que, por causa da simetria especial da matriz Toeplitz  $\mathbf{R}^{(i)}$ , as equações podem ser escritas na ordem reversa (primeira equação por último e última equação em primeiro, e assim por diante), e a matriz para o conjunto resultante de equações ainda é  $\mathbf{R}^{(i)}$ ; isto é,



$$\begin{bmatrix} r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & r_{ss}[2] & \cdots & r_{ss}[i] \\ r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & r_{ss}[1] & \cdots & r_{ss}[i-1] \\ r_{ss}[2] & r_{ss}[1] & r_{ss}[0] & \cdots & r_{ss}[i-2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ r_{ss}[i-1] & r_{ss}[i-2] & r_{ss}[i-3] & \cdots & r_{ss}[1] \\ r_{ss}[i] & r_{ss}[i-1] & r_{ss}[i-2] & \cdots & r_{ss}[0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \\ -a_{i-2}^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_1^{(i-1)} \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma^{(i-1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathcal{E}^{(i-1)} \end{bmatrix}. \quad (11.79)$$

Agora, a Equação 11.77 é combinada com a Equação 11.79 de acordo com

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^{(i)} \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1^{(i-1)} \\ -a_2^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix} - k_i \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \\ -a_{i-2}^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_1^{(i-1)} \\ 1 \end{bmatrix} &= \\ = \begin{bmatrix} \mathcal{E}^{(i-1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \gamma^{(i-1)} \end{bmatrix} - k_i \begin{bmatrix} \gamma^{(i-1)} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mathcal{E}^{(i-1)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (11.80)$$

A Equação 11.80 agora está se aproximando da forma desejada  $\mathbf{R}^{(i)} \mathbf{a}^{(i)} = \mathbf{e}^{(i)}$ . Tudo o que resta é escolher  $\gamma^{(i-1)}$ , de modo que o vetor no segundo membro tenha apenas uma única entrada não nula. Isso requer que

$$k_i = \frac{\gamma^{(i-1)}}{\mathcal{E}^{(i-1)}} = \frac{r_{ss}[i] - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{(i-1)} r_{ss}[i-j]}{\mathcal{E}^{(i-1)}}, \quad (11.81)$$

o que garante o cancelamento do último elemento do vetor do segundo membro, fazendo com que o primeiro elemento seja

$$\mathcal{E}^{(i)} = \mathcal{E}^{(i-1)} - k_i \gamma^{(i-1)} = \mathcal{E}^{(i-1)} (1 - k_i^2). \quad (11.82)$$

Com essa escolha de  $\gamma^{(i-1)}$ , conclui-se que o vetor de coeficientes de predição de ordem  $i$  é

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -a_1^{(i)} \\ -a_2^{(i)} \\ \vdots \\ -a_{i-1}^{(i)} \\ -a_i^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -a_1^{(i-1)} \\ -a_2^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \\ 0 \end{bmatrix} - k_i \begin{bmatrix} 0 \\ -a_{i-1}^{(i-1)} \\ -a_{i-2}^{(i-1)} \\ \vdots \\ -a_1^{(i-1)} \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11.83)$$

Pela Equação 11.83, podemos escrever o conjunto de equações para atualizar os coeficientes como

$$a_j^{(i)} = a_j^{(i-1)} - k_i a_{i-j}^{(i-1)} \quad j = 1, 2, \dots, i-1, \quad (11.84a)$$

e

$$a_i^{(i)} = k_i. \quad (11.84b)$$

As equações 11.81, 11.84(b), 11.84(a) e 11.82 são as equações-chave do algoritmo de Levinson–Durbin. Elas correspondem às equações L–D.2, L–D.3, L–D.4 e L–D.5 na Figura 11.17, em que se mostra como são usadas recursivamente em ordem no cálculo dos coeficientes de predição ótimos e também dos erros quadráticos médios de predição e coeficientes  $k_i$  para todos os preditores lineares até a ordem  $p$ .

## 11.7 Filtros em treliça

Entre os muitos conceitos interessantes e úteis que emergem do algoritmo de Levinson–Durbin está a sua interpretação em termos de estruturas em treliça introduzidas na Seção 6.6. Lá, mostramos que qualquer filtro FIR com função de sistema na forma

$$A(z) = 1 - \sum_{k=1}^M \alpha_k z^{-k} \quad (11.85)$$

pode ser implementado por uma estrutura em treliça, como a representada na Figura 6.37. Além disso, mostramos que os coeficientes da função de sistema FIR estão relacionados aos parâmetros  $k$  de um filtro em treliça correspondente por uma recursão dada na Figura 6.38, que é repetida por conveniência na metade inferior da Figura 11.18. Revertendo-se os passos no algoritmo de  $k$ -para- $\alpha$ , obtivemos um algoritmo dado na Figura 6.39 para calcular os parâmetros  $k$  a partir dos coeficientes  $\alpha_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, M$ . Assim, existe uma relação única entre os coeficientes da representação na forma direta e a representação em treliça de um filtro FIR.

Neste capítulo, mostramos que um filtro de erro de predição de ordem  $p$  é um filtro FIR com função de sistema

$$A^{(p)}(z) = 1 - \sum_{k=1}^p a_k^{(p)} z^{-k},$$

cujos coeficientes podem ser calculados a partir da função de autocorrelação de um sinal por meio de um processo que chamamos de algoritmo de Levinson–Durbin. Um subproduto do cálculo de Levinson–Durbin é um conjunto de parâmetros que também denotamos com  $k_i$  e chamamos de parâmetros  $k$ . Uma comparação entre os dois algoritmos na Figura 11.18 mostra que seus passos são idênticos, exceto por um detalhe importante. No algoritmo deduzido no Capítulo 6, começamos com o filtro em treliça com coeficientes conhecidos  $k_i$

**Algoritmo de Levinson–Durbin**

```

 $\mathcal{E}^{(0)} = r_{ss}[0]$ 
for  $i = 1, 2, \dots, p$ 
     $k_i = \left( r_{ss}[i] - \sum_{j=1}^{i-1} a_j^{(i-1)} r_{ss}[i-j] \right) / \mathcal{E}^{(i-1)}$  Eq. 11.81
     $a_i^{(i)} = k_i$  Eq. 11.84(b)
    if  $i > 1$  then for  $j = 1, 2, \dots, i-1$ 
         $a_j^{(i)} = a_j^{(i-1)} - k_i a_{i-j}^{(i-1)}$  Eq. 11.84(a)
    end
     $\mathcal{E}^{(i)} = (1 - k_i^2) \mathcal{E}^{(i-1)}$  Eq. 11.82
end
 $a_j = a_j^{(p)} \quad j = 1, 2, \dots, p$ 
    
```

**Algoritmo  $k$ -para- $\alpha$** 

```

Dados  $k_1, k_2, \dots, k_M$ 
for  $i = 1, 2, \dots, M$ 
     $\alpha_i^{(i)} = k_i$  Eq. 6.66(b)
    if  $i > 1$  then for  $j = 1, 2, \dots, i-1$ 
         $\alpha_j^{(i)} = \alpha_j^{(i-1)} - k_i \alpha_{i-j}^{(i-1)}$  Eq. 6.66(a)
    end
end
 $\alpha_j = \alpha_j^{(M)} \quad j = 1, 2, \dots, M$  Eq. 6.68(b)
    
```

**Figura 11.18** Comparação do algoritmo de Levinson–Durbin com o algoritmo para converter parâmetros  $k$  de uma estrutura em treliça em coeficientes da resposta ao impulso FIR da Equação 11.85.

e deduzimos a recursão para obter os coeficientes do filtro FIR na forma direta correspondente. No algoritmo de Levinson–Durbin, começamos com a função de autocorrelação de um sinal e calculamos os parâmetros  $k$  recursivamente como um resultado intermediário no cálculo dos coeficientes do filtro de erro de predição FIR. Como os dois algoritmos dão um resultado único após  $p$  iterações, e como existe uma relação única entre os parâmetros  $k$  e os coeficientes de um filtro FIR, conclui-se que, se  $M = p$  e  $a_j = \alpha_j$  para  $j = 1, 2, \dots, p$ , os parâmetros  $k$  produzidos pelo algoritmo de Levinson–Durbin precisam ser os parâmetros  $k$  de uma implementação de filtro em treliça do filtro de erro de predição FIR  $A^{(p)}(z)$ .

**11.7.1 Rede em treliça do erro de predição**

Para explorar ainda mais a interpretação do filtro em treliça, suponha que tenhamos uma função de sistema do erro de predição de ordem  $i$

$$A^{(i)}(z) = 1 - \sum_{k=1}^i a_k^{(i)} z^{-k}. \quad (11.86)$$

A representação por transformada  $z$  do erro de predição<sup>10</sup> seria

$$E^{(i)}(z) = A^{(i)}(z)S(z), \quad (11.87)$$

e a equação de diferenças no domínio do tempo para esse filtro FIR é

$$e^{(i)}[n] = s[n] - \sum_{k=1}^i a_k^{(i)} s[n-k]. \quad (11.88)$$

A sequência  $e^{(i)}[n]$  recebe o nome mais específico *erro de predição progressiva*, pois é o erro na predição de  $s[n]$  a partir de  $i$  amostras anteriores.

As equações 11.84(a) e (b) são a fonte para a interpretação por filtro em treliça, pois, se substituídas na Equação 11.86, levam à seguinte relação entre  $A^{(i)}(z)$  e  $A^{(i-1)}(z)$ :

$$A^{(i)}(z) = A^{(i-1)}(z) - k_i z^{-i} A^{(i-1)}(z^{-1}). \quad (11.89)$$

Esse não é um resultado surpreendente se considerarmos a representação matricial do polinômio  $A^{(i)}(z)$  na Equação 11.83.<sup>11</sup> Agora, se a Equação 11.89 for substituída no lugar de  $A^{(i)}(z)$  na Equação 11.87, o resultado será

$$E^{(i)}(z) = A^{(i-1)}(z)S(z) - k_i z^{-i} A^{(i-1)}(z^{-1})S(z). \quad (11.90)$$

A primeira parcela na Equação 11.90 é  $E^{(i-1)}(z)$ , isto é, o erro de predição para um filtro de ordem  $(i-1)$ . A segunda parcela tem uma interpretação similar se definirmos

$$\tilde{E}^{(i)}(z) = z^{-i} A^{(i)}(z^{-1})S(z) = B^{(i)}(z)S(z), \quad (11.91)$$

em que definimos  $B^{(i)}(z)$  como

$$B^{(i)}(z) = z^{-i} A^{(i)}(z^{-1}). \quad (11.92)$$

A interpretação no domínio do tempo da Equação 11.91 é

$$\tilde{e}^{(i)}[n] = s[n-i] - \sum_{k=1}^i a_k^{(i)} s[n-i+k]. \quad (11.93)$$

A sequência  $\tilde{e}^{(i)}[n]$  é chamada de *erro de predição regressiva*, pois a Equação 11.93 sugere que  $s[n-i]$  é “predito” (usando os coeficientes  $a_k^{(i)}$ ) a partir das  $i$  amostras que se seguem à amostra  $n-i$ .

Com essas definições, conclui-se pela Equação 11.90 que

$$E^{(i)}(z) = E^{(i-1)}(z) - k_i z^{-i} \tilde{E}^{(i-1)}(z) \quad (11.94)$$

<sup>10</sup> As equações usando transformada  $z$  são utilizadas supondo que as transformadas  $z$  de  $e[n]$  e  $s[n]$  existem. Embora isso não seja verdade no caso de sinais aleatórios, as relações entre as variáveis permanecem válidas para o sistema. A notação da transformada  $z$  facilita o desenvolvimento dessas relações.

<sup>11</sup> As manipulações algébricas para deduzir esse resultado são sugeridas como um exercício no Problema 11.21.

e, portanto,

$$e^{(i)}[n] = e^{(i-1)}[n] - k_i \tilde{e}^{(i-1)}[n-1]. \quad (11.95)$$

Substituindo a Equação 11.89 na Equação 11.91, obtemos

$$\tilde{E}^{(i)}(z) = z^{-1} \tilde{E}^{(i-1)}(z) - k_i E^{(i-1)}(z), \quad (11.96)$$

que, no domínio do tempo, corresponde a

$$\tilde{e}^{(i)}[n] = \tilde{e}^{(i-1)}[n-1] - k_i e^{(i-1)}[n]. \quad (11.97)$$

As equações de diferenças na Equação 11.95 e na Equação 11.97 expressam os erros de predição progressiva e regressiva de ordem  $i$  em termos de  $k_i$  e dos erros de predição progressivas e regressivas de ordem  $(i-1)$ . Esse par de equações de diferenças é representado pelo diagrama de fluxo de sinais da Figura 11.19. Portanto, a Figura 11.19 representa um par de equações de diferenças que incorporam uma iteração da recursão de Levinson–Durbin. Assim como na recursão de Levinson–Durbin, começamos com um preditor de ordem zero para o qual

$$e^{(0)}[n] = \tilde{e}^{(0)}[n] = s[n]. \quad (11.98)$$

Com  $e^{(0)}[n] = s[n]$  e  $\tilde{e}^{(0)}[n] = s[n]$  como entradas para um primeiro estágio como representado na Figura 11.19 com  $k_1$  como coeficiente, obtemos  $e^{(1)}[n]$  e  $\tilde{e}^{(1)}[n]$  como saídas. Essas são as entradas requeridas para o estágio 2. Podemos usar  $p$  estágios sucessivos de estrutura como na Figura 11.19 para montar um sistema cuja saída seja o sinal de erro de predição de ordem  $p$  desejado,  $e[n] = e^{(p)}[n]$ . Tal sistema, como representado na

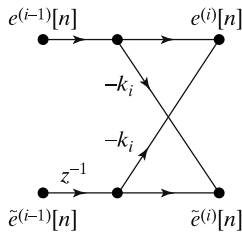


Figura 11.19 Diagrama de fluxo de sinais do cálculo do erro de predição.

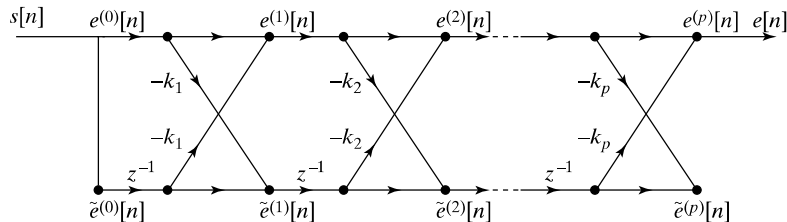


Figura 11.20 Diagrama de fluxo de sinais da implementação por rede em treliça do cálculo do erro de predição de ordem  $p$ .

Figura 11.20, é idêntico à rede em treliça da Figura 6.37 da Seção 6.6.<sup>12</sup> Em resumo, a Figura 11.20 é uma representação por diagrama de fluxo de sinais das equações

$$e^{(0)}[n] = \tilde{e}^{(0)}[n] = s[n] \quad (11.99a)$$

$$e^{(i)}[n] = e^{(i-1)}[n] - k_i \tilde{e}^{(i-1)}[n-1] \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (11.99b)$$

$$\tilde{e}^{(i)}[n] = \tilde{e}^{(i-1)}[n-1] - k_i e^{(i-1)}[n] \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (11.99c)$$

$$e[n] = e^{(p)}[n], \quad (11.99d)$$

em que, se os coeficientes  $k_i$  forem determinados pela recursão de Levinson–Durbin, as variáveis  $e^{(i)}[n]$  e  $\tilde{e}^{(i)}[n]$  serão os erros de predição progressiva e regressiva para o preditor ótimo de ordem  $i$ .

## 11.7.2 Rede em treliça do modelo só-polos

Na Seção 6.6.2, mostramos que a rede em treliça da Figura 6.42 é uma implementação da função de sistema só-polos  $H(z) = 1/A(z)$ , em que  $A(z)$  é a função de sistema de um sistema FIR; isto é,  $H(z)$  é o inverso exato de  $A(z)$  e, no contexto presente, é a função de sistema do modelo só-polos com  $G = 1$ . Nesta seção, revisamos a estrutura em treliça só-polos em termos da notação de erro de predição progressiva e regressiva.

Se substituirmos os nomes das variáveis de nó  $a^{(i)}[n]$  e  $b^{(i)}[n]$  na Figura 6.42 pelos correspondentes  $e^{(i)}[n]$  e  $\tilde{e}^{(i)}[n]$ , obteremos o diagrama de fluxo da Figura 11.21, que representa o conjunto de equações

$$e^{(p)}[n] = e[n] \quad (11.100a)$$

$$e^{(i-1)}[n] = e^{(i)}[n] + k_i \tilde{e}^{(i-1)}[n-1] \quad i = p, p-1, \dots, 1 \quad (11.100b)$$

$$\tilde{e}^{(i)}[n] = \tilde{e}^{(i-1)}[n-1] - k_i e^{(i-1)}[n] \quad i = p, p-1, \dots, 1 \quad (11.100c)$$

$$s[n] = e^{(0)}[n] = e^{(0)}[n]. \quad (11.100d)$$

Como discutimos na Seção 6.6.2, qualquer sistema só-polos estável pode ser implementado por uma estrutura em treliça como a da Figura 11.21. Para esses sistemas, a garantia de estabilidade inerente na condição  $|k_i| < 1$  é particularmente importante. Embora a estrutura em treliça requeira o dobro do número de multipli-

<sup>12</sup> Note que, na Figura 6.37, as variáveis de nó foram indicadas como  $a^{(i)}[n]$  e  $b^{(i)}[n]$  em vez de  $e^{(i)}[n]$  e  $\tilde{e}^{(i)}[n]$ , respectivamente.

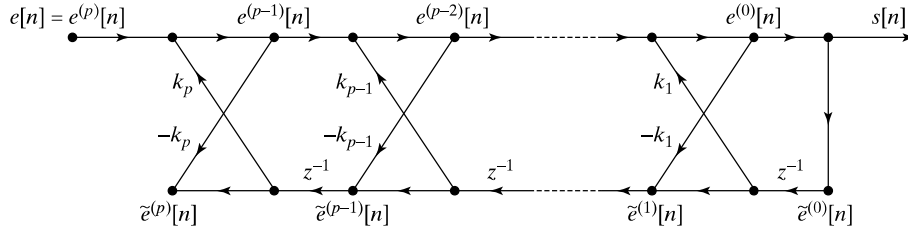


Figura 11.21 Sistema em treliça só-polos.

cações por amostra de saída do que a forma direta, essa pode ser a implementação preferida quando os coeficientes precisam ser digitalizados de forma grosseira. A resposta em frequência da forma direta é extremamente sensível à digitalização dos coeficientes. Além disso, vimos que os sistemas IIR de alta ordem na forma direta podem se tornar instáveis em decorrência da digitalização de seus coeficientes. Isso não ocorre com a rede em treliça, desde que a condição  $|k_i| < 1$  seja mantida para os parâmetros  $k$  digitalizados. Além disso, a resposta em frequência da rede em treliça é relativamente insensível à digitalização dos parâmetros  $k$ .

### 11.7.3 Cálculo direto dos parâmetros $k$

A estrutura do diagrama de fluxo na Figura 11.20 é uma consequência direta da recursão de Levinson-Durbin, e os parâmetros  $k_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , podem ser obtidos a partir dos valores de autocorrelação  $r_{ss}[m]$ ,  $m = 0, 1, \dots, p$ , por meio de iterações do algoritmo da Figura 11.17. Pela nossa discussão até aqui, os parâmetros  $k_i$  têm sido uma consequência auxiliar do cálculo dos parâmetros do preditor. Porém, Itakura e Saito (1968, 1970) mostraram que os parâmetros  $k_i$  podem ser calculados diretamente a partir dos erros de predição progressiva e regressiva da Figura 11.20. Além disso, graças à estrutura iterativa como uma cascata de estágios na Figura 11.19, os parâmetros  $k_i$  podem ser calculados sequencialmente a partir de sinais disponibilizados pelos estágios anteriores da treliça. O cálculo direto do parâmetro  $k_i$  é obtido com a seguinte equação:

$$k_i^P = \frac{\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(i-1)}[n] \tilde{e}^{(i-1)}[n-1]}{\left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} (e^{(i-1)}[n])^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\tilde{e}^{(i-1)}[n-1])^2 \right\}^{1/2}}. \quad (11.101)$$

Observe que a Equação 11.101 está na forma da correlação cruzada com energia normalizada entre os erros de predição progressiva e regressiva na saída do estágio  $i$ . Por esse motivo,  $k_i^P$ , calculado usando a Equação 11.101, é chamado de coeficiente PARCOR (do inglês *PARTIAL CORrelation*) ou, mais precisamente,

*coeficiente de correlação parcial*. A Figura 11.20 tem a interpretação de que a correlação em  $s[n]$ , representada pela função de autocorrelação  $r_{ss}[m]$ , é removida passo a passo pelo filtro em treliça. Para uma discussão mais detalhada do conceito de correlação parcial, veja Stoica e Moses (2005) ou Markel e Gray (1976).

A Equação 11.101 para calcular  $k_i^P$  é a média geométrica entre um valor  $k_i^f$  que minimiza o erro quadrático médio de predição progressiva e um valor  $k_i^b$  que minimiza o erro quadrático médio de predição regressiva. A dedução desse resultado é considerada no Problema 11.28. Note que mostramos os limites nas somas como infinito simplesmente para enfatizar que *todas* as amostras de erro estão envolvidas na soma. Para ser mais específico, todas as somas na Equação 11.101 poderiam começar em  $n = 0$  e terminar em  $n = M + i$ , pois esse é o intervalo no qual a saída do sinal de erro dos preditores de ordem  $i$  tanto da predição progressiva quanto regressiva seria não nula. Essa é a mesma hipótese que foi feita na preparação do método da autocorrelação para sequências de comprimento finito. De fato, o Problema 11.29 esboça uma prova de que  $k_i^P$  calculado pela Equação 11.101 gera, identicamente, o mesmo resultado de  $k_i$  calculado pela Equação 11.81 ou pela Equação L-D.2 na Figura 11.17. Portanto, a Equação 11.101 pode ser substituída pela Equação L-D.2 na Figura 11.17, e o conjunto resultante de coeficientes de predição será idêntico àqueles calculados a partir da função de autocorrelação.

Para usar a Equação 11.101, é necessário de fato calcular os erros de predição progressiva e regressiva empregando os cálculos da Figura 11.19. Em resumo, os passos a seguir resultam no cálculo dos coeficientes PARCOR  $k_i^P$  para  $i = 1, 2, \dots, p$ :

**PARCOR.0** Inicialize com  $e^{(0)}[n] = \tilde{e}^{(0)}[n] = s[n]$  para  $0 \leq n \leq M$ .

Para  $i = 1, 2, \dots, p$  repetir os passos a seguir.

**PARCOR.1** Calcule  $e^{(i)}[n]$  e  $\tilde{e}^{(i-1)}[n]$  usando a Equação 11.99(b) e a Equação 11.99(c) respectivamente para  $0 \leq n \leq M + i$ . Salve essas duas sequências como entradas para o próximo estágio.

**PARCOR.2** Calcule  $k_i^P$  usando a Equação 11.101.

Outra abordagem para calcular os coeficientes na Figura 11.20 foi introduzida por Burg, 1975, que formulou o problema de modelagem só-polos em termos do princípio da máxima entropia. Ele propôs usar a estrutura da Figura 11.20, que incorpora o algoritmo de Levinson–Durbin, com coeficientes  $k_i^B$  que minimizam a soma dos erros médios quadráticos de predição progressivas e regressivas na saída de cada estágio. O resultado é dado pela equação

$$k_i^B = \frac{2 \sum_{n=i}^N e^{(i-1)}[n] \tilde{e}^{(i-1)}[n-1]}{\sum_{n=i}^N (e^{(i-1)}[n])^2 + \sum_{n=i}^N (\tilde{e}^{(i-1)}[n-1])^2} \quad (11.102)$$

O procedimento para uso dessa equação para se obter a sequência  $k_i^B$ ,  $i = 1, 2, \dots, p$ , é o mesmo que o método PARCOR. No passo PARCOR.2,  $k_i^P$  é simplesmente substituído por  $k_i^B$  da Equação 11.102. Nesse caso, o operador média é o mesmo que o do método da covariância, o que significa que segmentos muito curtos de  $s[n]$  podem ser usados mantendo-se alta resolução espectral.

Embora o método de Burg use uma análise do tipo covariância, a condição  $|k_i^B| < 1$  é válida, o que implica que o modelo só-polos implementado pelo filtro em treliça será estável. (Veja Problema 11.30.) Assim como no caso do método PARCOR, a Equação 11.102 pode ser substituída pela Equação L–D.2 da Figura 11.17 para calcular os coeficientes de predição. Embora os coeficientes resultantes sejam diferentes daqueles obtidos pela função de autocorrelação ou a partir da Equação 11.101, o modelo só-polos resultante ainda será estável. A dedução da Equação 11.102 é o assunto do Problema 11.30.

## 11.8 Resumo

Este capítulo fornece uma introdução à modelagem paramétrica de sinais. Enfatizamos os modelos só-polos, mas muitos dos conceitos discutidos se aplicam a técnicas mais gerais, que envolvem funções de sistema racionais. Mostramos que os parâmetros de um modelo só-polos podem ser calculados por um processo em dois passos. O primeiro passo é o cálculo dos valores de correlação a partir de um sinal de comprimento finito. O segundo passo é a resolução de um conjunto de equações lineares, em que os valores de correlação são os coeficientes. Mostramos que as soluções obtidas dependem de como os valores de correlação são calculados, e, também, que, se os valores de correlação forem valores de autocorrelação verdadeiros, um algoritmo particularmente útil, chamado algoritmo de Levinson–Durbin, pode ser deduzido para a solução das equações. Além

disso, enfatizou-se que a estrutura do algoritmo de Levinson–Durbin esclarece muitas propriedades úteis do modelo só-polos. A modelagem paramétrica de sinais possui uma rica história, uma extensa literatura e muitas aplicações, o que a torna um tema que vale a pena ser aprofundado em estudos avançados.

## Problemas

### Problemas básicos com respostas

- 11.1.**  $s[n]$  é um sinal de energia finita conhecido para todo  $n$ .  $\phi_{ss}[i, k]$  é definida como

$$\phi_{ss}[i, k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n-i]s[n-k].$$

Mostre que  $\phi_{ss}[i, k]$  pode ser expressa como uma função de  $|i - k|$ .

- 11.2.** Em geral, o erro quadrático médio de predição é definido na Equação 11.36 como

$$\mathcal{E} = \left\langle \left( s[n] - \sum_{k=1}^p a_k s[n-k] \right)^2 \right\rangle. \quad (\text{P11.2-1})$$

- (a) Expanda a Equação P11.2-1 e use o fato de que  $\langle s[n-i]s[n-k] \rangle = \phi_{ss}[i, k] = \phi_{ss}[k, i]$  para mostrar que

$$\mathcal{E} = \phi_{ss}[0, 0] - 2 \sum_{k=1}^p a_k \phi_{ss}[0, k] + \sum_{i=1}^p a_i \sum_{k=1}^p a_k \phi_{ss}[i, k] \quad (\text{P11.2-2})$$

- (b) Mostre que, para os coeficientes do preditor ótimo, que satisfazem as equações 11.20, a Equação P11.2-2 torna-se

$$\mathcal{E} = \phi_{ss}[0, 0] - \sum_{k=1}^p a_k \phi_{ss}[0, k]. \quad (\text{P11.2-3})$$

- 11.3.** A resposta ao impulso de um modelo só-polos causal na forma da Figura 11.1 e da Equação 11.3 com parâmetros do sistema  $G$  e  $\{a_k\}$  satisfaz a equação de diferenças

$$h[n] = \sum_{k=1}^p a_k h[n-k] + G\delta[n] \quad (\text{P11.3-1})$$

- (a) A função de autocorrelação da resposta ao impulso do sistema é

$$r_{hh}[m] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]h[n+m]$$

Substituindo a Equação P11.3-1 na equação para  $r_{hh}[-m]$  e aproveitando o fato de que  $r_{hh}[-m] = r_{hh}[m]$ , mostre que

$$\sum_{k=1}^p a_k r_{hh}[|m-k|] = r_{hh}[m], \quad m = 1, 2, \dots, p \quad (\text{P11.3-2})$$

- (b) Usando a mesma abordagem de (a), agora mostre que

$$r_{hh}[0] - \sum_{k=1}^p a_k r_{hh}[k] = G^2. \quad (\text{P11.3-3})$$

- 11.4.** Considere um sinal  $x[n] = s[n] + w[n]$ , em que  $s[n]$  satisfaz a equação de diferenças

$$s[n] = 0,8s[n-1] + v[n].$$

$v[n]$  é uma sequência ruído branco com média nula e variância  $\sigma_v^2 = 0,49$  e  $w[n]$  é uma sequência ruído branco com média nula e variância  $\sigma_w^2 = 1$ . Os processos  $v[n]$  e  $w[n]$  são não correlacionados. Determine as sequências de autocorrelação  $\phi_{ss}[m]$  e  $\phi_{xx}[m]$ .

- 11.5.** A abordagem de filtro inverso para a modelagem só-polos de um sinal determinístico  $s[n]$  é discutida na Seção 11.1.2 e representada na Figura 11.2. A função de sistema do filtro inverso é dada na Equação 11.5.

- (a) Com base nessa abordagem, determine os coeficientes  $a_1$  e  $a_2$  do melhor modelo só-polos para  $s[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$  com  $p = 2$ .  
 (b) Novamente, com base nessa abordagem, determine os coeficientes  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  do melhor modelo só-polos para  $s[n] = \delta[n] + \delta[n-2]$  com  $p = 3$ .

- 11.6.** Suponha que você tenha calculado os parâmetros  $G$  e  $a_k, k = 1, 2, \dots, p$  do modelo só-polos

$$H(z) = \frac{G}{1 - \sum_{k=1}^p a_k z^{-k}}.$$

Explique como você poderia usar a TFD para calcular a estimativa de espectro só-polos  $|H(e^{j\omega_k})|$  em  $N$  frequências  $\omega_k = 2\pi k/N$  para  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

- 11.7.** Considere uma resposta ao impulso causal desejada  $h_d[n]$  que queiramos aproximar por um sistema com resposta ao impulso  $h[n]$  e função de sistema

$$H(z) = \frac{b}{1 - az^{-1}}.$$

Nosso critério de otimização é minimizar a função de erro dada por

$$\mathcal{E} = \sum_{n=0}^{\infty} (h_d[n] - h[n])^2.$$

- (a) Suponha que  $a$  seja dado e queiramos determinar o parâmetro desconhecido  $b$  que minimiza  $\mathcal{E}$ . Suponha que  $|a| < 1$ . Isso resulta em um conjunto de equações não lineares? Em caso positivo, mostre por quê. Se não, determine  $b$ .  
 (b) Suponha que  $b$  seja dado e queiramos determinar o parâmetro desconhecido  $a$  que minimiza  $\mathcal{E}$ . Este é um problema não linear? Em caso positivo, mostre por quê. Se não, determine  $a$ .  
**11.8.** Suponha que  $s[n]$  seja uma sequência de comprimento finito (janelada) que é nula fora do intervalo  $0 \leq n \leq M-1$ . A sequência de erro de predição linear regressiva de ordem  $p$  para esse sinal é definida como

$$\tilde{e}[n] = s[n] - \sum_{k=1}^p \beta_k s[n+k]$$

Isto é,  $s[n]$  é “predita” a partir das  $p$  amostras que se seguem à amostra  $n$ . O erro quadrático médio de predição regressiva é definido como

$$\tilde{\mathcal{E}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} (\tilde{e}[m])^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left( s[m] - \sum_{k=1}^p \beta_k s[m+k] \right)^2$$

em que os limites infinitos indicam que a soma é feita sobre todos os valores não nulos de  $(\tilde{e}[m])^2$ , como no método da autocorrelação usado na “predição progressiva”.

- (a) A sequência de erro de predição  $\tilde{e}[n]$  é nula fora do intervalo finito  $N_1 \leq n \leq N_2$ . Determine  $N_1$  e  $N_2$ .  
 (b) Seguindo a abordagem usada neste capítulo para deduzir o preditor linear progressivo, deduza o conjunto de equações normais que são satisfeitas pelos  $\beta_k$  que minimizam o erro quadrático médio de predição  $\tilde{\mathcal{E}}$ . Dê sua resposta final de forma concisa e bem definida, em termos de valores de autocorrelação.  
 (c) Com base no resultado do item (b), descreva como os coeficientes do preditor regressivo  $\{\beta_k\}$  estão relacionados com os coeficientes do preditor progressivo  $\{\alpha_k\}$ .

### Problemas avançados

- 11.9.** Considere um sinal  $s[n]$  que modelamos como a resposta ao impulso de um sistema só-polos de ordem  $p$ . Indique a função de sistema do modelo só-polos de ordem  $p$  como  $H^{(p)}(z)$  e a resposta ao impulso correspondente como  $h^{(p)}[n]$ . Denote o inverso de  $H^{(p)}(z)$  como  $H_{\text{inv}}^{(p)}(z) = 1/H^{(p)}(z)$ . A resposta ao impulso correspondente é  $h_{\text{inv}}^{(p)}[n]$ . O filtro inverso, caracterizado por  $h_{\text{inv}}^{(p)}[n]$ , é escolhido de forma a minimizar o erro quadrático total  $\mathcal{E}^{(p)}$  dado por

$$\mathcal{E}^{(p)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [\delta[n] - g^{(p)}[n]]^2,$$

em que  $g^{(p)}[n]$  é a saída do filtro  $H_{\text{inv}}^{(p)}(z)$  quando a entrada é  $s[n]$ .

- (a) A Figura P11.9 representa um diagrama de fluxo de sinais da implementação do filtro em treliça de  $H_{\text{inv}}^{(4)}(z)$ . Determine  $h_{\text{inv}}^{(4)}[1]$ , a resposta ao impulso em  $n = 1$ .  
 (b) Suponha que agora queiramos modelar o sinal  $s[n]$  como a resposta ao impulso de um filtro só-polos de segunda ordem. Esboce um diagrama de fluxo de sinais da implementação do filtro em treliça de  $H_{\text{inv}}^{(2)}(z)$ .  
 (c) Determine a função de sistema  $H^{(2)}(z)$  do filtro só-polos de segunda ordem.

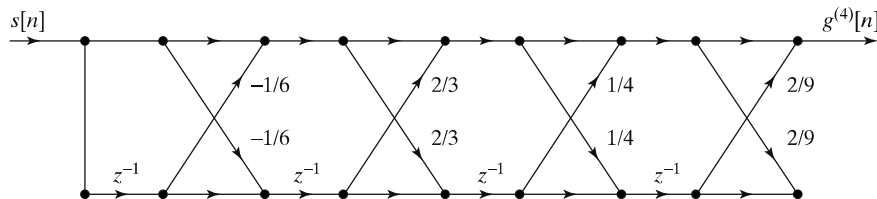


Figura P11.9

- 11.10.** Considere um preditor de ordem  $i$  com função de sistema do erro de predição

$$A^{(i)}(z) = 1 - \sum_{j=1}^i a_j^{(i)} z^{-j} = \prod_{j=1}^i (1 - z_j^{(i)} z^{-1}) \quad (\text{P11.10-1})$$

Pela recursão de Levinson–Durbin, conclui-se que  $a_i^{(i)} = k_i$ . Use esse fato juntamente com a Equação P11.10-1 para mostrar que, se  $|k_i| \geq 1$ , necessariamente é verdade que  $|z_j^{(i)}| \geq 1$  para algum  $j$ . Isto é, mostre que a condição  $|k_i| < 1$  é uma condição *necessária* para que  $A^{(i)}(z)$  tenha todos os seus zeros estritamente *dentro* da circunferência unitária.

- 11.11.** Considere um sistema LIT com função de sistema  $H(z) = h_0 + h_1 z^{-1}$ . O sinal  $y[n]$  é a saída desse sistema graças a uma entrada que é ruído branco com média nula e variância unitária.

- (a) Qual é a função de autocorrelação  $r_{yy}[m]$  do sinal de saída  $y[n]$ ?  
 (b) O erro de predição progressiva de segunda ordem é definido como

$$e[n] = y[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2].$$

Sem usar as equações de Yule–Walker diretamente, encontre  $a_1$  e  $a_2$ , tais que a variância de  $e[n]$  seja minimizada.

- (c) O filtro de predição regressiva para  $y[n]$  é definido como

$$\tilde{e}[n] = y[n] - b_1 y[n+1] - b_2 y[n+2].$$

Determine  $b_1$  e  $b_2$  de modo que a variância de  $\tilde{e}[n]$  seja minimizada. Compare esses coeficientes com aqueles determinados no item (b).

- 11.12.(a)** É dada a função de autocorrelação,  $r_{yy}[m]$ , de um processo aleatório estacionário em sentido amplo  $y[n]$  com média nula. Em termos de  $r_{yy}[m]$ , escreva as equações de Yule–Walker que resultam da modelagem do processo aleatório como resposta a uma sequência ruído branco de um modelo só-polos de terceira ordem com função de sistema

$$H(z) = \frac{A}{1 - az^{-1} - bz^{-3}}.$$

- (b) Um processo aleatório  $v[n]$  é a saída do sistema mostrado na Figura P11.12-1, em que  $x[n]$  e  $z[n]$  são sinais ruído branco independentes, com variância unitária e média nula, e  $h[n] = \delta[n-1] + \frac{1}{2}\delta[n-2]$ . Encontre  $r_{vv}[m]$ , a autocorrelação de  $v[n]$ .

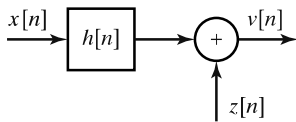


Figura P11.12-1

- (c) O processo aleatório  $y_1[n]$  é a saída do sistema mostrado na Figura P11.12-2, em que  $x[n]$  e  $z[n]$  são sinais ruído branco independentes, com variância unitária e média nula, e

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - az^{-1} - bz^{-3}}.$$

Os mesmos  $a$  e  $b$  encontrados no item (a) são usados para a modelagem só-polos de  $y_1[n]$ . O erro de modelagem inverso,  $w_1[n]$ , é a saída do sistema mostrado na Figura P11.12-3.  $w_1[n]$  é branco?  $w_1[n]$  tem média nula? Explique.

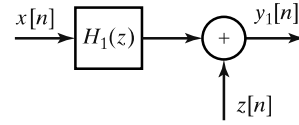


Figura P11.12-2

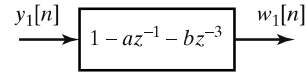


Figura P11.12-3

- (d) Qual é a variância de  $w_1[n]$ ?

- 11.13.** Observamos as seis primeiras amostras de um sinal causal  $s[n]$  dado por  $s[0] = 4, s[1] = 8, s[2] = 4, s[3] = 2, s[4] = 1$  e  $s[5] = 0,5$ . Para os primeiros itens deste problema, modelaremos o sinal usando um sistema estável, causal, de fase mínima e dois polos, tendo resposta ao impulso  $\hat{s}[n]$  e função de sistema

$$H(z) = \frac{G}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}.$$

A abordagem consiste em minimizar o erro de modelagem  $\mathcal{E}$  dado por

$$\mathcal{E} = \min_{a_1, a_2, A} \sum_{n=0}^5 (g[n] - G\delta[n])^2,$$

em que  $g[n]$  é a resposta do sistema inverso para  $s[n]$ , e o sistema inverso tem função de sistema

$$A(z) = 1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}.$$

- (a) Escreva  $g[n] - G\delta[n]$  para  $0 \leq n \leq 5$ .  
 (b) Com base em seu trabalho no item (a), escreva as equações lineares para os parâmetros desejados  $a_1$ ,  $a_2$  e  $G$ .  
 (c) Quanto vale  $G$ ?  
 (d) Para esse  $s[n]$ , sem resolver as equações lineares do item (b), discuta se você espera que o erro de modelagem  $\mathcal{E}$  seja nulo.

Para o restante deste problema, modelaremos o sinal usando um sistema diferente estável, causal, de fase mínima, com resposta ao impulso  $\hat{s}_2[n]$  e função de sistema

$$H_2(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1}}{1 - az^{-1}}.$$

O erro de modelagem a ser minimizado nesse caso é  $\mathcal{E}_2$ , dado por

$$\mathcal{E}_2 = \min_{a, b_0, b_1} \sum_{n=0}^5 (g[n] - r[n])^2,$$

em que  $g[n]$  é a resposta do sistema inverso a  $s[n]$ , e o sistema inverso agora tem função de sistema

$$A(z) = 1 - az^{-1}.$$

Além disso,  $r[n]$  é a resposta ao impulso de um sistema com função de sistema

$$B(z) = b_0 + b_1 z^{-1}.$$

- (e) Para esse modelo, escreva  $g[n] - r[n]$  para  $0 \leq n \leq 5$ .
- (f) Calcule os valores dos parâmetros  $a$ ,  $b_0$  e  $b_1$  que minimizam o erro de modelagem.
- (g) Calcule o erro de modelagem  $\mathcal{E}_2$  no item (f).

**11.14.** No Exemplo 11.1, consideramos a sequência  $s_d[n] = \alpha^n u[n]$ , que é a resposta ao impulso de um sistema só-polos de primeira ordem com função de sistema

$$H(z) = \frac{1}{1 - \alpha z^{-1}}.$$

Neste problema, consideramos a estimação dos parâmetros de um modelo só-polos para o sinal  $s_d[n]$  conhecido apenas no intervalo  $0 \leq n \leq M$ .

- (a) Primeiro, considere a estimação de um modelo de primeira ordem pelo método da autocorrelação. Para começar, mostre que a função de autocorrelação da sequência de comprimento finito  $s[n] = s_d[n](u[n] - u[n - M - 1]) = \alpha^n(u[n] - u[n - M - 1])$  é

$$r_{ss}[m] = \alpha^{|m|} \frac{1 - \alpha^{2(M-|m|+1)}}{1 - \alpha^2}. \quad (\text{P11.14-1})$$

- (b) Use a função de autocorrelação determinada em (a) na Equação 11.34 e resolva para o coeficiente  $a_1$  do preditor de primeira ordem.
- (c) Você deverá descobrir que o resultado obtido em (b) não é o valor exato (isto é,  $a_1 \neq \alpha$ ) como aquele obtido no Exemplo 11.1, quando a função de autocorrelação foi calculada usando a sequência infinita. Mostre, porém, que  $a_1 \rightarrow \alpha$  para  $M \rightarrow \infty$ .
- (d) Use os resultados de (a) e (b) na Equação 11.38 para determinar o erro quadrático médio mínimo de predição para esse exemplo. Mostre que, para  $M \rightarrow \infty$ , o erro se aproxima do mínimo erro quadrático médio encontrado no Exemplo 11.1 para a função de autocorrelação exata.
- (e) Agora, considere o método da covariância para estimar a função de correlação. Mostre que, para  $p = 1$ ,  $\phi_{ss}[i, k]$  na Equação 11.49 é dada por

$$\phi_{ss}[i, k] = \alpha^{2-i-k} \frac{1 - \alpha^{2M}}{1 - \alpha^2} \quad 0 \leq (i, k) \leq 1. \quad (\text{P11.14-2})$$

- (f) Use o resultado de (e) na Equação 11.20 para encontrar o coeficiente do preditor de primeira ordem ótimo. Compare seu resultado com o resultado de (b) e com o resultado do Exemplo 11.1.
- (g) Use os resultados de (e) e (f) na Equação 11.37 para encontrar o mínimo erro quadrático médio de predição. Compare seu resultado com o resultado em (d) e com o resultado do Exemplo 11.1.

**11.15.** Considere o sinal

$$s[n] = 3 \left( \frac{1}{2} \right)^n u[n] + 4 \left( -\frac{2}{3} \right)^n u[n].$$

- (a) Queremos usar um modelo só-polos causal, de segunda ordem, isto é, um modelo na forma

$$H(z) = \frac{A}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}},$$

para representar otimamente o sinal  $s[n]$ , no sentido do erro quadrático mínimo. Encontre  $a_1$ ,  $a_2$  e  $A$ .

- (b) Agora, suponha que queiramos usar um modelo só-polos causal, de terceira ordem, isto é, um modelo na forma

$$H(z) = \frac{B}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - b_3 z^{-3}},$$

para representar otimamente o sinal  $s[n]$ , no sentido do erro quadrático mínimo. Encontre  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  e  $B$ .

**11.16.** Considere o sinal

$$s[n] = 2 \left( \frac{1}{3} \right)^n u[n] + 3 \left( -\frac{1}{2} \right)^n u[n]. \quad (\text{P11.16-1})$$

Queremos modelar esse sinal usando um modelo só-polos de segunda ordem ( $p = 2$ ) ou, de modo equivalente, usando predição linear de segunda ordem.

Para este problema, como recebemos uma expressão analítica para  $s[n]$ , e  $s[n]$  é a resposta ao impulso de um filtro só-polos, podemos obter os coeficientes de predição linear diretamente a partir da transformada  $z$  de  $s[n]$ . (Será pedido que você faça isso no item (a).) Em situações práticas, tipicamente recebemos dados, isto é, um conjunto de valores de sinal, e não uma expressão analítica. Nesse caso, mesmo quando o sinal a ser modelado é a resposta ao impulso de um filtro só-polos, precisamos realizar cálculos sobre os dados, usando métodos como aqueles discutidos na Seção 11.3, para determinar os coeficientes de predição lineares.

Há também situações em que uma expressão analítica está disponível para o sinal, mas o sinal não é a resposta ao impulso de um filtro só-polos, e gostaríamos de modelá-lo como tal. Nesse caso, novamente precisamos executar cálculos como aqueles discutidos na Seção 11.3.

- (a) Para o sinal  $s[n]$  dado na Equação P11.16-1, determine os coeficientes de predição linear  $a_1$ ,  $a_2$  diretamente pela transformada  $z$  de  $s[n]$ .
- (b) Escreva as equações normais para  $p = 2$  a fim de obter equações para  $a_1$ ,  $a_2$  em termos de  $r_{ss}[m]$ .
- (c) Determine os valores de  $r_{ss}[0]$ ,  $r_{ss}[1]$  e  $r_{ss}[2]$  para o sinal  $s[n]$  dado na Equação P11.16-1.
- (d) Resolva o sistema de equações do item (b) usando os valores que você encontrou no item (c), para obter valores para os  $a_k$ s.
- (e) Os valores de  $a_k$  do item (d) são os que você esperaria para esse sinal? Justifique sua resposta com clareza.
- (f) Suponha que você queira modelar o sinal agora com  $p = 3$ . Escreva as equações normais para esse caso.
- (g) Determine o valor de  $r_{ss}[3]$ .
- (h) Encontre os valores de  $a_k$  quando  $p = 3$ .
- (i) Os valores de  $a_k$  obtidos no item (h) são os que você esperaria para o sinal  $s[n]$  dado? Justifique sua resposta com clareza.
- (j) Os valores de  $a_1$ ,  $a_2$  que você determinou em (h) mudariam se modelássemos o sinal com  $p = 4$ ?



- 11.17.**  $x[n]$  e  $y[n]$  são sequências amostras de processos aleatórios de média nula, conjuntamente estacionários no sentido amplo. A informação a seguir é conhecida sobre a função de autocorrelação  $\phi_{xx}[m]$  e sobre a correlação cruzada  $\phi_{yx}[m]$ :

$$\phi_{xx}[m] = \begin{cases} 0 & m \text{ ímpar} \\ \frac{1}{2|m|} & m \text{ par} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \phi_{yx}[-1] &= 2 & \phi_{yx}[0] &= 3 & \phi_{yx}[1] &= 8 & \phi_{yx}[2] &= -3 \\ \phi_{yx}[3] &= 2 & \phi_{yx}[4] &= -0,75 \end{aligned}$$

- (a) A estimativa linear de  $y$  dado  $x$  é indicada por  $\hat{y}_x$ . Ela é projetada para minimizar

$$\mathcal{E} = E \left( |y[n] - \hat{y}_x[n]|^2 \right), \quad (\text{P11.17-1})$$

em que o  $\hat{y}_x[n]$  é formado pelo processamento de  $x[n]$  com um filtro FIR cuja resposta ao impulso  $h[n]$  tem comprimento 3 e é dada por

$$h[n] = h_0\delta[n] + h_1\delta[n-1] + h_2\delta[n-2].$$

Determine  $h_0, h_1$  e  $h_2$  para minimizar  $\mathcal{E}$ .

- (b) Neste item,  $\hat{y}_x$ , a estimativa linear de  $y$  para um dado  $x$ , novamente é projetada para minimizar  $\mathcal{E}$  na Equação P11.17-1, mas com hipóteses diferentes sobre a estrutura do filtro linear. Aqui, a estimativa é formada pelo processamento de  $x[n]$  com um filtro FIR cuja resposta ao impulso  $g[n]$  tem comprimento 2 e é dada por

$$g[n] = g_1\delta[n-1] + g_2\delta[n-2].$$

Determine  $g_1$  e  $g_2$  para minimizar  $\mathcal{E}$ .

- (c) O sinal,  $x[n]$ , pode ser modelado como a saída de um filtro de dois polos  $H(z)$  cuja entrada é  $w[n]$ , um sinal ruído branco estacionário no sentido amplo, de média nula e variância unitária.

$$H(z) = \frac{1}{1 - a_1z^{-1} - a_2z^{-2}}$$

Determine  $a_1$  e  $a_2$  com base no modelo inverso dos mínimos quadrados da Seção 11.1.2.

- (d) Queremos implementar o sistema mostrado na Figura P11.17, em que os coeficientes  $a_i$  são do modelo só-polos no item (c) e os coeficientes  $h_i$  são os valores da resposta ao impulso do estimador linear no item (a). Esboce uma implementação que minimize o custo total dos atrasos, sendo que o custo de cada atraso individual é ponderado linearmente por sua taxa de clock.

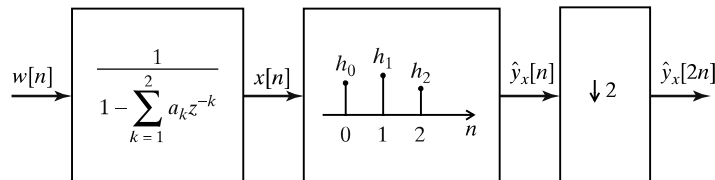


Figura P11.17

- (e) Seja  $\mathcal{E}_a$  o custo no item (a) e seja  $\mathcal{E}_b$  o custo no item (b), sendo cada  $\mathcal{E}$  definido como na Equação P11.17-1.  $\mathcal{E}_a$  é maior, igual ou menor do que  $\mathcal{E}_b$ , ou não existem informações suficientes para compará-los?
- (f) Calcule  $\mathcal{E}_a$  e  $\mathcal{E}_b$  quando  $\phi_{yy}[0] = 88$ . (Dica: Os filtros FIR ótimos calculados nos itens (a) e (b) são tais que  $E[\hat{y}_x[n](y[n] - \hat{y}_x[n])] = 0$ .)

- 11.18.** Um canal de comunicação de tempo discreto com resposta ao impulso  $h[n]$  deve ser compensado com um sistema LIT com resposta ao impulso  $h_c[n]$ , como indicado na Figura P11.18. Sabe-se que o canal  $h[n]$  é um atraso de uma amostra, isto é,

$$h[n] = \delta[n-1].$$

O compensador  $h_c[n]$  é um filtro FIR causal de  $N$  pontos, isto é,

$$H_c(z) = \sum_{k=0}^{N-1} a_k z^{-k}.$$

O compensador  $h_c[n]$  é projetado para inverter (ou compensar) o canal. Especificamente,  $h_c[n]$  é projetado de modo que, com  $s[n] = \delta[n]$ ,  $\hat{s}[n]$  seja o mais “próximo” possível de um impulso; isto é,  $h_c[n]$  é projetado de modo que o erro

$$\mathcal{E} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{s}[n] - \delta[n]|^2$$

seja minimizado. Encontre o compensador ótimo de comprimento  $N$ , isto é, determine  $a_0, a_1, \dots, a_{N-1}$  para minimizar  $\mathcal{E}$ .

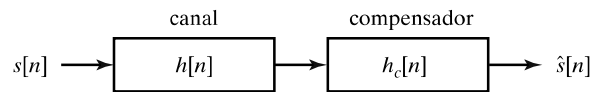


Figura P11.18

- 11.19.** Um sinal de voz foi amostrado com uma taxa de amostragem de 8 kHz. Um segmento de 300 amostras foi selecionado de um som de vogal e multiplicado por uma janela de Hamming, como mostra a Figura P11.19. A partir desse sinal, um conjunto de preditores lineares

$$P^{(i)}(z) = \sum_{k=1}^i a_k^{(i)} z^{-k},$$

com ordens de  $i = 1$  a  $i = 11$ , foi calculado pelo método da autocorrelação. Esse conjunto de preditores é mostrado na Tabela 11.1, em uma forma que sugere a recursão de Levinson–Durbin.