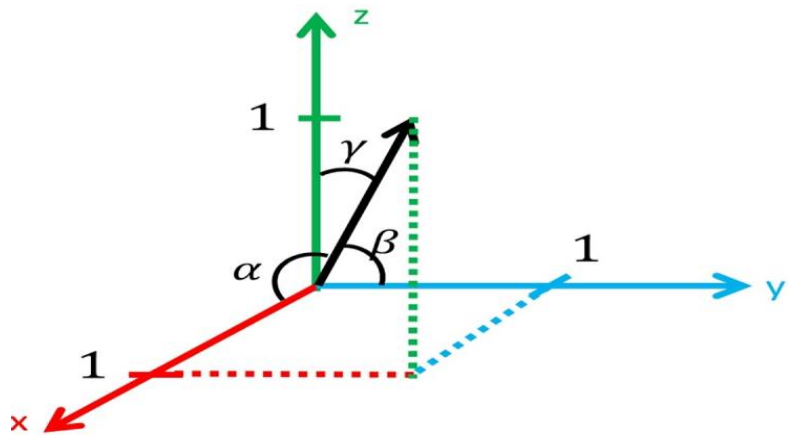
Cosenos y Ángulos directores de un vector

Sea un vector $\vec{A}$ ***con componentes unitarios*** $\vec{A} = Ax_i + Ay_j + Az_k$ ***y de magnitud*** $\left|\vec{A}\right|$



$$Cos\alpha = \frac{A_x}{|A|}, Cos\beta = \frac{A_y}{|A|}, Cos\gamma = \frac{A_z}{|A|}$$

$$\alpha = Cos^{-1}\left[\frac{A_x}{|A|}\right], \beta = Cos^{-1}\left|\frac{A_y}{|A|}\right|, \gamma = Cos^{-1}\left|\frac{A_z}{|A|}\right|$$

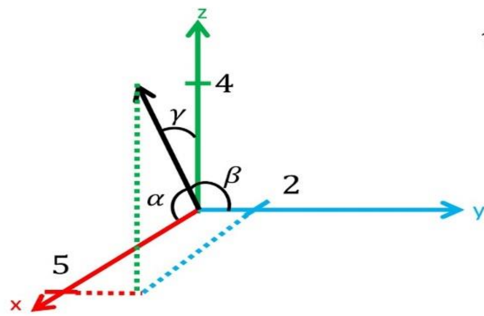
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$$

$$\left(\frac{Ax}{|A|}\right)^2 + \left(\frac{Ay}{|A|}\right)^2 + \left(\frac{Az}{|A|}\right)^2 = 1 \approx 0.999$$

Ejemplo 1

Obtener los cosenos y ángulos directores del siguiente vector



$$\vec{v} = 5\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 4\vec{k}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{|\vec{v}|}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{v}|}$$

La magnitud del vector propuesto es $\left|\vec{V}\right| = \sqrt{(5)^2 + (2)^2 + (4)^2} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \left|\vec{V}\right| = \sqrt{45}$

$$Cos\alpha = \frac{A_x}{|A|}.Cos\beta = \frac{A_y}{|A|}, Cos\gamma = \frac{A_z}{|A|}$$

$$Cos\alpha = \frac{5}{\left|\sqrt{45}\right|}, Cos\beta = \frac{2}{\left|\sqrt{45}\right|}, Cos\gamma = \frac{4}{\left|\sqrt{45}\right|}$$

$$comprobación$$

$$Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1$$

$$(\cos\alpha)^2 + (\cos\beta)^2 + (\cos\gamma)^2 = 1$$

$$\left[\frac{5}{\sqrt{45}}\right]^2 + \left[\frac{2}{\sqrt{45}}\right]^2 + \left[\frac{4}{\sqrt{45}}\right]^2 = 1$$

$$\frac{25}{45} + \frac{4}{45} + \frac{16}{45} = 1$$

$$\frac{45}{45} = 1$$

$$Ángulos..con..los..ejes$$

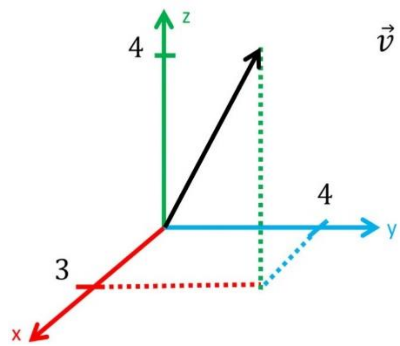
$$\alpha = Cos^{-1}\left[\frac{A_x}{|A|}\right], \beta = Cos^{-1}\left|\frac{A_y}{|A|}\right|, \gamma = Cos^{-1}\left|\frac{A_z}{|A|}\right|$$

$$\alpha = Cos^{-1}\left[\frac{5}{\sqrt{45}}\right], \beta = Cos^{-1}\left[\frac{2}{\sqrt{45}}\right], \gamma = \cos^{-1}\left[\frac{4}{\sqrt{45}}\right]$$

$$\alpha = 41.81°, \beta = 72.65°, \gamma = 53.39°$$

Ejercicio 2

Obtener los cosenos y ángulos directores del siguiente vector velocidad



$$\vec{v} = 3\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 4\vec{k}$$

La magnitud del vector propuesto es $\left|\vec{V}\right| = \sqrt{(3)^2 + (4)^2 + (4)^2} = \sqrt{41}$

$$Cos\alpha = \frac{A_x}{|A|}.Cos\beta = \frac{A_y}{|A|}, Cos\gamma = \frac{A_z}{|A|}$$

$$Cos\alpha = \frac{3}{|\sqrt{41}|}, Cos\beta = \frac{4}{|\sqrt{41}|}, Cos\gamma = \frac{4}{|\sqrt{41}|}$$

$$comprobación$$

$$Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1$$

$$\left[\frac{3}{\sqrt{41}}\right]^2 + \left[\frac{4}{\sqrt{41}}\right]^2 + \left[\frac{4}{\sqrt{41}}\right]^2 = 1$$

$$\frac{9}{41} + \frac{16}{41} + \frac{16}{41} = 1$$

$$\frac{41}{41} = 1$$

$$Ángulos..con..los..ejes$$

$$\alpha = Cos^{-1}\left[\frac{A_x}{|A|}\right], \beta = Cos^{-1}\left|\frac{A_y}{|A|}\right|, \gamma = Cos^{-1}\left|\frac{A_z}{|A|}\right|$$

$$\alpha = Cos^{-1}\left[\frac{3}{\sqrt{41}}\right], \beta = Cos^{-1}\left[\frac{4}{\sqrt{41}}\right], \gamma = \cos^{-1}\left[\frac{4}{\sqrt{41}}\right]$$

$$\alpha = 62.06°, \beta = 51.34°, \gamma = 51.34°$$

Ejercicio 3

Se sabe que el modulo (magnitud) del vector A es de 7unidades y los ángulos $\alpha..y..\beta$ ***son*** $\alpha = 70°, \beta = 45°$ ***Calcular:***

a) ***Componente del vector en el eje Z***
b) ***Expresar el vector en términos de sus tres componentes (Axi Ayj +Azk)***
c) ***El ángulo que forma el vector A con el eje Z. Angulo (*** γ ***)***

Solución:

$$\alpha = 70° \Rightarrow \cos\alpha = 0.3420$$
$$\beta = 45° \Rightarrow \cos\beta = 0.7071$$

c) ***De la siguiente expresion, tenemos que:***

$$Cos^2\alpha + Cos^2\beta + Cos^2\gamma = 1$$
$$[\cos\alpha]^2 + [\cos\beta]^2 + [\cos\gamma]^2 = 1$$
$$[0.3420]^2 + [0.7071]^2 + [\cos\gamma]^2 = 1$$
$$[\cos\gamma]^2 = 1 - [0.3420]^2 - [0.7071]^2$$
$$[\cos\gamma]^2 = 0.3830$$
$$\cos\gamma = \sqrt{0.3830}$$
$$\gamma = \cos^{-1}\left[\sqrt{0.3830}\right]$$
$$\gamma = 51.77°$$

a) ***Para calcular la componente Az del vector, tenemos que:***

$$\cos\gamma = \frac{Az}{|A|}$$
$$Az = (\cos\gamma)|A|$$
$$Az = [7]\cos(51.77°)$$
$$Az = 4.332$$

b) ***Para poder expresar el vector en sus tres componentes, el mismo procedimiento anterior, se realiza para los ángulos*** $\alpha.y.\beta$

$$\cos\alpha = \frac{Ax}{|A|} \qquad \cos\beta = \frac{Ay}{|A|}$$
$$Ax = (\cos\alpha|)A| \qquad Ay = (\cos\beta)|A|$$
$$Ax = [7]\cos(70°) \qquad Ay = [7]\cos(45°)$$
$$Ax = 2.394 \qquad Ay = 4.95$$

$$A = 2.394i + 4.95j + 4.33k$$

Ejercicio 4

Determine la magnitud y los ángulos directores de la fuerza resultante que actua sobre un anillo, si las fuerzas son: $F_1 = (60j + 80k)lb..y..F_2 = (50i - 40j + 180k)lb$

$$\mathrm{Re}\,sul\tan te$$

$$F_1 + F_2 = R = 50i + 20j + 260k$$

$$Magnitud..de..la..resul\tan te$$

$$|F_1 + F_2| = |R| = \sqrt{(50)^2 + (20)^2 + (260)^2}$$
$$|R| = 265.51$$

$$\acute{A}ngulos..con..los..ejes$$
$$\alpha = Cos^{-1}\left[\frac{A_x}{|A|}\right], \beta = Cos^{-1}\left|\frac{A_y}{|A|}\right|, \gamma = Cos^{-1}\left|\frac{A_z}{|A|}\right|$$
$$\alpha = Cos^{-1}\left[\frac{50}{265.51}\right], \beta = Cos^{-1}\left[\frac{20}{265.51}\right], \gamma = \cos^{-1}\left[\frac{260}{265.51}\right]$$
$$\alpha = 79.14°, \beta = 85.68°, \gamma = 11.69°$$

Vector Unitario $\vec{u}$

Un vector unitario es aquél que tiene módulo o magnitud de 1 (uno). Para hallar un vector unitario a partir de cualquier vector, hay que dividir cada componente de este entre su módulo o magnitud.

Ejemplo 5

Encuentre un vector unitario con la misma dirección que el vector indicado $\vec{u}$

$$\vec{a} = 2\vec{\imath} + 3\vec{\jmath}$$

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{4 + 9}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{13}$$

$$\vec{u} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{\imath} + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{\jmath}$$

SI calculamos la magnitud o modulo del vector unitario $\left|\vec{u}\right|$, comprobamos que es de 1.

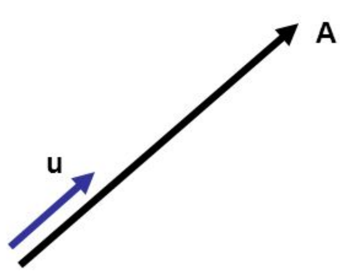
$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2}$$

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)^2 + (0)^2}$$

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\left(\frac{4}{13}\right) + \left(\frac{9}{13}\right) + 0} = \sqrt{\frac{13}{13}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\left|\vec{u}\right| = 1$$

Cabe mencionar que los ángulos directores del vector a, corresponden a los ángulos directores del vector unitario (u), es decir, la magnitud disminuye a la unidad, pero la dirección y sentido, sigue siendo los mismos.



Dado un vector **A**, entonces, el vector

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}$$

es un vector unitario en la dirección y sentido de **A**

Ejemplo 6

Determinar el vector unitario que tenga la misma dirección de A+B

$$A=(8i + 5j) \quad y \quad B=(3i - j)$$

$$\text{Re}\,sul\tan te$$

$$A + B = R = 11i + 4j + 0k$$

$$R = 11i + 4j$$

$$Magnitud..de..la..resul\tan te$$

$$|A + B| = |R| = \sqrt{(11)^2 + (4)^2 + (0)^2}$$

$$|R| = \sqrt{137}$$

$$Vector..unitario$$

$$\vec{u} = \frac{11}{\sqrt{137}} i + \frac{4}{\sqrt{137}} j$$

Magnitud del vector unitario para comprobar

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2}$$

$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\left(\frac{11}{\sqrt{137}}\right)^2 + \left(\frac{4}{\sqrt{137}}\right)^2 + (0)^2}$$

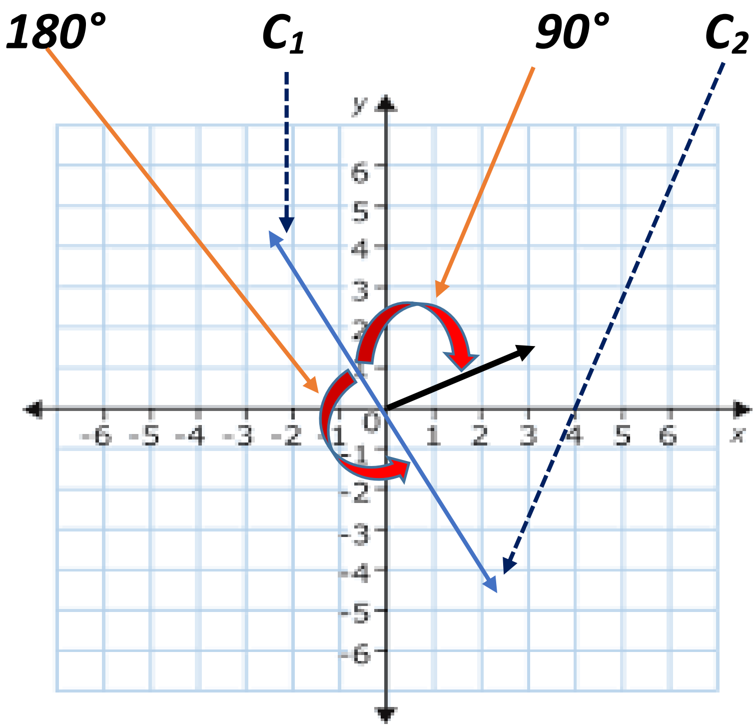
$$\left|\vec{u}\right| = \sqrt{\left(\frac{121}{137}\right) + \left(\frac{16}{137}\right) + 0} = \sqrt{\frac{137}{137}} = 1$$

$$\left|\vec{u}\right| = 1$$

Ejercicio 9 48 del Resnick capitulo 3

Dos vectores A y B tienen componentes en unidades arbitrarias $Ax = 3.2, Ay = 1.6; Bx = 0.5, By = 4.5$ ***Hallar las componentes de un vector C que sea perpendicular a A y que se encuentre en el plano xy y que tenga una magnitud de 5 unidades.***

Respuestas a) $C_1 = -2.24i + 4.47j$ ***y*** $C_2 = 2.24i - 4.47j$



Calculando el ángulo en sentido antihorario, para el vector A, tenemos que $Ax = 3.2, Ay = 1.6$

$$\theta = tg^{-1}\left[\frac{Ay}{Ax}\right]$$

$$\theta = tg^{-1}\left[\frac{1.6}{3.2}\right]$$

$$\theta = 26.56°$$

Para primer vector C_1

Considerando $|C_1| = |C_2| = |C| = 5$

Segundo cuadrante

$$\acute{a}ngula.para..C_1$$
$$\theta = 90° + 26.56° = 116.56°$$
$$|C_1| = 5$$
$$C_1 = |C_1|\cos 116.56° + |C_1| sen 116.56°$$
$$C_1 = |5|\cos 116.56° + |5| sen 116.56°$$
$$C_1 = -2.24i + 4.47j$$

Para segundo vector C_2

Cuarto cuadrante

$$\acute{a}ngula.para..C_2$$
$$\theta = 90° + 26.56° + 180° = 296.56°$$
$$|C_2| = 5$$
$$C_2 = |C_1|\cos 296.56° + |C_2| sen 296.56°$$
$$C_2 = |5|\cos 296.56° + |5| sen 296.56°$$
$$C_2 = 2.24i4.47j$$

Respuestas a) $C_1 = -2.24i + 4.47j$ ***y*** $C_2 = 2.24i - 4.47j$