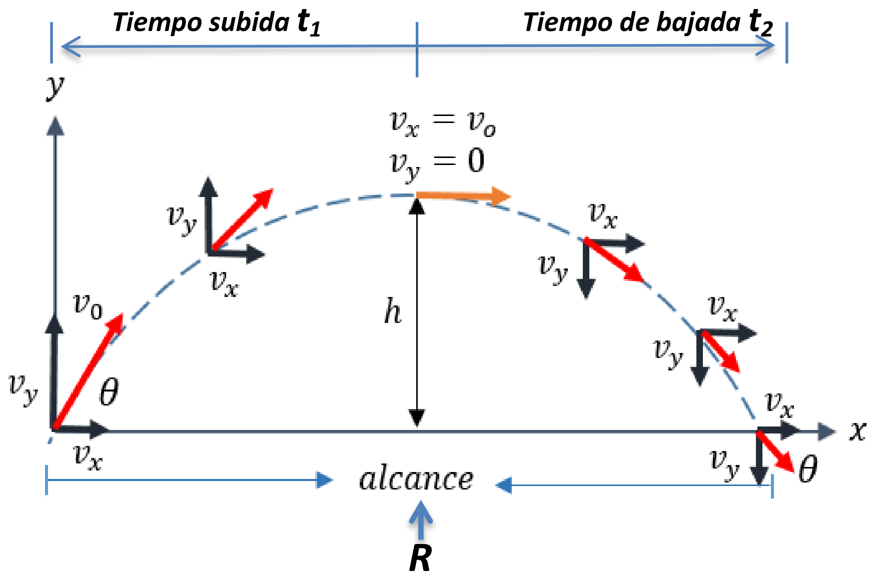


Características del movimiento en dos dimensiones

Es aquel movimiento de un cuerpo que describe una trayectoria parabólica, cuyo comportamiento en ausencia de fricción del aire se mantiene constante en forma horizontal, es decir $a_x = 0$ ***, mientras que verticalmente es el de un tiro vertical y/o caída libre, por tanto, su velocidad estará sometida a una aceleración*** $a_y = -g$

El objeto tendría una velocidad V_o ***y un ángulo*** θ ***respecto a la horizontal, cuyos componentes de velocidad son*** $V_{ox} = |V_o| \cos\theta$ ***y*** $V_{oy} = |V_o| sen\,\theta$**.**

La aceleración horizontal tiene un valor de cero $a_x = 0$***, pues no habrá ninguna fuerza que lo obligue a cambiar la velocidad, por lo tanto la componente de velocidad horizontal no cambiara y permanecerá como*** $V_{ox} = V_x$ ***ó*** $V_{ox} = |V_o| \cos\theta = V_x$

Cuando la partícula llega a la cúspide de su trayectoria, tenemos que el cuerpo sólo se moverá horizontalmente, como lo indica la figura, de tal forma que en el punto más alto las componentes de la velocidad son:

$$V_{oy} = 0 \quad \textbf{\textit{y}} \quad V_x = V_{ox} = |V_o| \cos\theta$$

Si tomamos como referencia el piso y el cuerpo o partícula parte de piso y llega a piso, se tiene un alcance R ***y ese alcance depende del tiempo que le toma al cuerpo realizar toda la trayectoria, a este tiempo se le denomina tiempo de vuelo o el tiempo en que el cuerpo o partícula dura en el aire*** t_{vuelo} ***, por lo tanto el alcance es*** $R = V_x t_{vuelo}$ ***ó*** $R = |V_o| \cos\theta (t_{vuelo})$

El movimiento vertical de la partícula o el cuerpo en cuestión, será afectado por la aceleración debido a la fuerza de gravedad $a_y = -g$, por lo cual su velocidad vertical variará en todo momento, es decir, conforme el cuerpo sube la velocidad vertical disminuirá $V_y \downarrow$ hasta llegar a la cúspide y alcanzar una velocidad $V_y = 0$, después de ello su velocidad aumentara negativamente hasta impactarse.

Si el cuerpo o partícula parte de piso y llega piso, es decir inicia y termina en mismo nivel de referencia, el tiempo que tarda en llevar a la cúspide es el mismo tiempo que tarda en caer desde la cúspide. Y el tiempo total se le denomina como tiempo de vuelo t_{vuelo}. Bajo esta consideración $t_{vuelo} = t_{sube} + t_{baja}$ ó $t_{vuelo} = t_1 + t_2$.

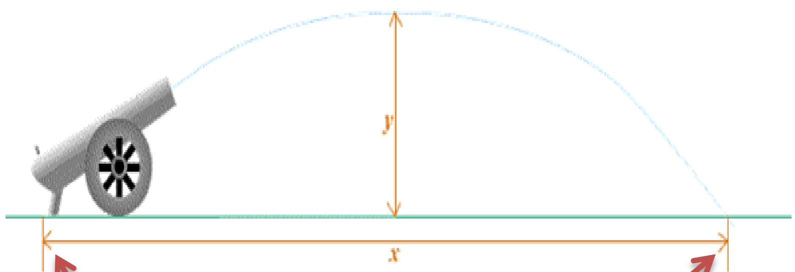
Expresiones para el movimiento parabólico en función a condiciones de arranque V_{oy}, t_o, y_o y de término V_y, t, y

$$V_{ox} = |V_o| \cos\theta$$
$$V_{oy} = |V_o| sen\theta$$
$$R = V_{ox}(t_v) = |V_o| \cos\theta \bullet t_v$$
$$y = y_o + V_{oy}(t - t_o) - \frac{g}{2}(t - t_o)^2$$
$$V_y^2 - V_{oy}^2 = -2g(y - y_o)$$
$$-g = \frac{V_y - V_{oy}}{t - t_o}$$
$$V_y = V_{oy} - g(t - t_o)$$

Serway 6ª Edición pp 65

Un cañón de juguete, dispara una bala a una velocidad promedio de 25m/s a un ángulo de 58° con respecto a la horizontal. Calcular:

a) El tiempo de Vuelo considerando que llega al mismo nivel de referencia
b) El tiempo de altura máxima
c) El alcance máximo
d) La altura máxima de disparo
e) Las componentes de la velocidad a los 2 segundos de vuelo



Condiciones Inicio

$$V_o = 25m/s,$$
$$t_o = 0s$$
$$y_o = 0m$$
$$\theta = 58°$$

Condiciones termino

$$R = ?$$
$$t_v = ?$$
$$y = ?$$

Calculando primero tiempo de vuelo Tv previo cálculo de Vox y Voy y considerando que parte de piso y llega a piso, tenemos que:

$$V_{ox} = |V_o|\cos\theta$$
$$V_{ox} = (25m/s)\cos 58°$$
$$V_{ox} = 13.2479 m/s$$

$$V_{oy} = |V_o| sen\theta$$
$$V_{oy} = (25m/s) sen 58°$$
$$V_{oy} = 21.201 m/s$$

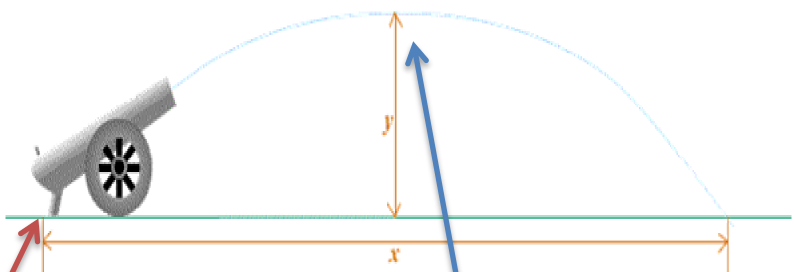
$a)$

$$y = y_o + V_{oy}(t - t_o) - \frac{g}{2}(t - t_o)^2$$
$$0m = 0m + \left(21.20\frac{m}{s}\right)(t_v - 0s) - \left(\frac{9.81}{2}\frac{m}{s^2}\right)(t_v - 0s)^2$$
$$0 = \left(21.20\frac{m}{s}\right)t_v - 4.905\frac{m}{s^2}t_v^2 ..despejando$$
$$4.905\frac{m}{s^2}t_v^2 = 21.20\frac{m}{s}(t_v)...E\lim inando.un.t_v$$
$$t_v = \frac{21.20m/s}{4.905m/s^2} = 4.3221s$$
$$tiempo..de..vuelo..t_v = 4.322s$$

Cálculo de alcance R y Y_{max}

$$b)$$
$$R = V_{ox} t_v$$
$$R = 13.2479 \frac{m}{s}(4.3223s)$$
$$R = 57.2590m$$

Para el cálculo de Y_{max}, el tiempo que tarda en subir=tiempo que tarda en bajar por lo Tanto t subida = (4,3223/2) t_1 =2,16115s. Considerando el inicio y el termino el punto máximo.



Condiciones Inicio

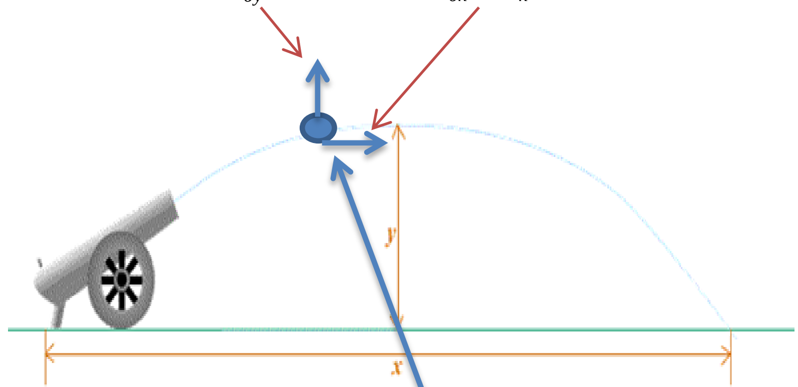
$$V_o = 25m/s,$$
$$t_o = 0s$$
$$y_o = 0m$$
$$\theta = 58°$$

Condiciones termino

$$t_1 = 2.1611s$$
$$y_{\max} = ?$$

$$c)$$
$$y = y_o + V_{oy}(t - t_o) - \frac{g}{2}(t - t_o)^2$$
$$y_{\max} = 0m + \left(21.20 \frac{m}{s}\right)(t_1 - 0s) - \left(\frac{9.81}{2} \frac{m}{s^2}\right)(t_1 - 0s)^2$$
$$y_{\max} = \left(21.20 \frac{m}{s}\right)(2.161s) - 4.905 \frac{m}{s^2}(2.161s)^2$$
$$y_{\max} = 22.907m$$

Para el cálculo del d), se tiene que a los 2 segundos la bala de cañón aun va de subida con dos componentes que son V_{oy} ***y*** $V_{ox} = V_x$



Condiciones Inicio

$$V_o = 25m/s,$$
$$t_o = 0s$$
$$y_o = 0m$$
$$\theta = 58^\circ$$

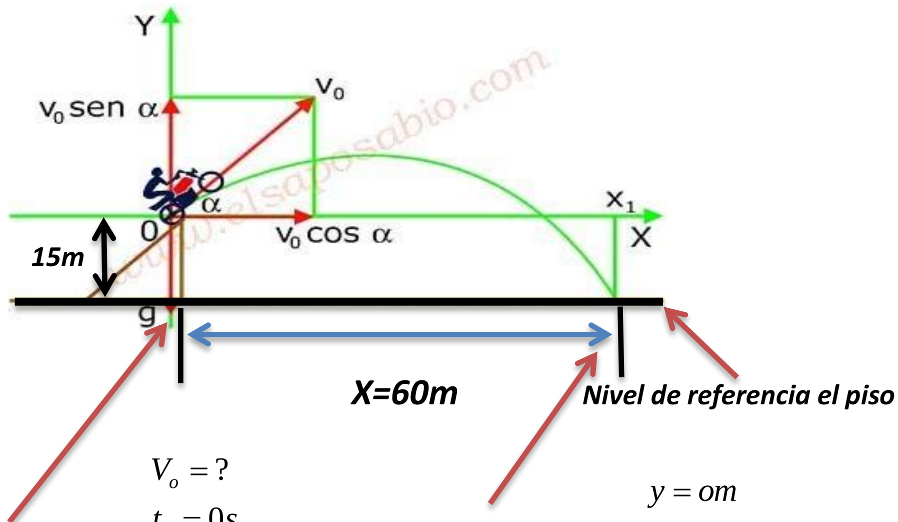
Condiciones termino $t = 2s$

Cálculo de componentes a los t=2s. La componente en siempre permanece constante sin cambio, mientras que siempre es variable, por lo tanto tenemos que:

$$V_{ox} = |V_o| \cos\theta$$
$$V_{ox} = (25m/s)\cos 58^\circ$$
$$V_{ox} = V_x = 13.2479m/s$$

$$V_y = V_{oy} - g(t - t_o)$$
$$V_y = 21.20m/s - 9.81\frac{m}{s^2}(2s - 0s)$$
$$V_y = 1.58\frac{m}{s}$$

Un motociclista planea saltar sobre una motocicleta el cañón que se muestra en la figura. Se desea que el tiempo que este en el aire es de 3 segundos, Calcular el ángulo α correcto de vuelo si X=60m. (Considerar el nivel de referencia el piso)



Condiciones Inicio

$$V_o = ?$$
$$t_o = 0s$$
$$y_o = 15m$$
$$\alpha = ?$$

Condiciones termino

$$y = om$$
$$t_v = 3s$$
$$x = 60m$$

Para este tipo de ejercicio, consideramos que el nivel de referencia es el piso y en base al esquema, las condiciones de inicio se marcan en el propio esquema en donde se desconocen el ángulo y Vo; por otro lado las condiciones de termino se dan cuando la moto llega a piso en la parte derecha del esquema y las condiciones de termino se indican también en el esquema.

Calculo de V_{oy} ***y*** V_{ox}

$$R = V_{0x} t_v$$
$$X = V_{0x}(t_v)$$
$$60m = V_{0x}(3s)$$
$$V_{0x} = \frac{60m}{3s}$$
$$V_{0x} = 20\frac{m}{s}$$

$$y = y_o + V_{oy}(t - t_o) - \frac{g}{2}(t - t_o)^2$$
$$0m = 15m + (V_{0y})(3s - 0s) - \left(\frac{9.81}{2}\frac{m}{s^2}\right)(3s - 0s)^2$$
$$0m = 15m + (V_{0y})(3) - 44.14s$$
$$Despejando.V_{0y}$$
$$V_{0y} = \frac{15 - 44.14}{-3}$$
$$V_{oy} = 9.715m/s$$

Calculo de ángulo α ***partiendo de*** V_{oy} ***y*** V_{ox}

$$V_{0x} = 20\,\frac{m}{s}$$
$$V_0 \cos\alpha = 20\, {}^{m}\!/_{s}$$
$$V_0 = \frac{20m/s}{\cos\alpha} \;........I$$

$$V_{0y} = 9.715\,\frac{m}{s}$$
$$V_0 sen\alpha = 9.715\, {}^{m}\!/_{s}$$
$$V_0 = \frac{9.715m/s}{sen\alpha} \;........II$$

$Igualando..I..y..II$

$$\frac{20m/s}{\cos\alpha} = \frac{9.715m/s}{sen\alpha}$$
$$\frac{sen\alpha}{\cos\alpha} = \frac{9.715m/s}{20m/s}$$
$$\tan\alpha = 0.4858$$
$$\alpha = \tan^{-1}[0.4858]$$
$$\alpha = 26°$$

Calculo de V_{oy} ***a partir de I***

$$V_0 = \frac{20m/s}{\cos\alpha} \;........I$$
$$V_0 = \frac{20m/s}{\cos(26°)}$$
$$V_0 = 22.25m/s \approx 80km/h$$

Tippens 6-28 pp 147

Una pelota de beisbol sales despedida de un bate con una velocidad de 20m/s. en un tiempo de 0.25s. (Para este problema considerar que el bateo es completamente horizontal y paulatinamente va descendiendo la pelota hasta tocar el piso)

a) A que altura fue el batazo con respecto al piso
b) Que distancia horizontal recorrió la pelota considerando que el nivel de referencia es el piso

Nivel de referencia el piso

Condiciones Inicio

$$V_o = 20m/s$$
$$t_o = 0s$$
$$y_o = ?$$
$$\theta = 0°$$

Condiciones termino

$$y = 0m$$
$$t_v = 0.25s$$
$$x = ?$$

Alcance Horizontal X ***Altura del Batazo*** y_o

$a)$

$$R = V_{0x} t_v$$
$$X = V_{0x}(t_v)$$
$$X = V_0 \cos\theta (t_v)$$
$$X = (20m/s)\cos 0°(0.25s)$$
$$X = 5m$$

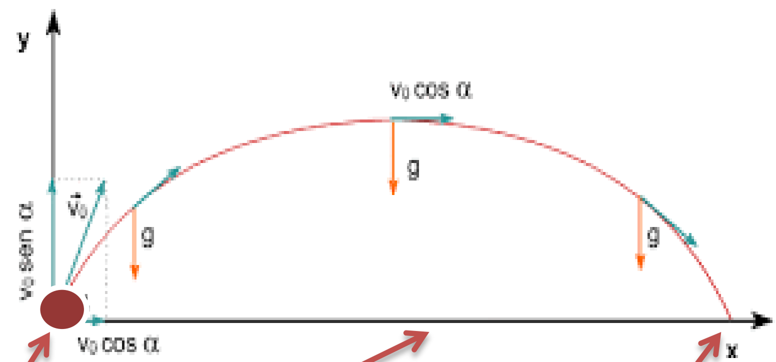
$b)$

$$y = y_o + V_{oy}(t - t_o) - \frac{g}{2}(t - t_o)^2$$
$$0m = y_o + (V_0) sen 0°(0.25s - 0s) - \left(\frac{9.81}{2}\frac{m}{s^2}\right)(0.25s - 0s)^2$$
$$0m = y_o + 0 - 0.3065m$$
$$Despejando..y_o$$
$$y_o = 0.3065m$$

Tippens 6-34 pp.147

Una piedra se le imprime una velocidad de 20m/s a un ángulo de 58° Calcular: (considerar que parte de piso y llega a piso o parte y llega al mismo nivel de referencia)

a) El Alcance R
b) El tiempo de vuelo
c) Altura máxima
d) Su distancia horizontal X y su altura Y a los 3s



Nivel de referencia el piso

Condiciones Inicio

$$V_o = 20m/s$$
$$t_o = 0s$$
$$y_o = 0m$$
$$\alpha = \theta = 58°$$

Condiciones termino

$$y = 0m$$
$$t_v = ?$$
$$x = ?$$

Calculando primero tiempo de vuelo Tv previo cálculo de Vox y Voy y considerando que parte de piso y llega a piso, tenemos que:

$$V_{ox} = |V_o|\cos\theta$$
$$V_{ox} = (20m/s)\cos 58°$$
$$V_{ox} = 10.598m/s$$

$$V_{oy} = |V_o| sen\theta$$
$$V_{oy} = (20m/s) sen 58°$$
$$V_{oy} = 16.960m/s$$

$b)$

$$y = y_o + V_{oy}(t - t_o) - \frac{g}{2}(t - t_o)^2$$

$$0m = 0m + \left(16.96\frac{m}{s}\right)(t_v - 0s) - \left(\frac{9.81}{2}\frac{m}{s^2}\right)(t_v - 0s)^2$$

$$0 = \left(16.96\frac{m}{s}\right)t_v - 4.905\frac{m}{s^2}t_v^2 ..despejando$$

$$4.905\frac{m}{s^2}t_v^2 = 16.96\frac{m}{s}(t_v)...Eliminando.un.t_v$$

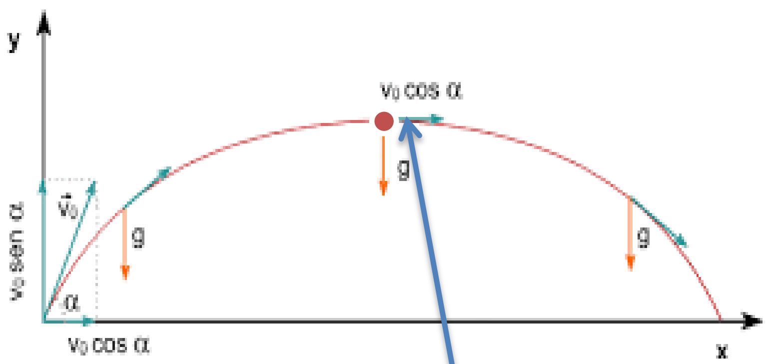
$$t_v = \frac{16.96m/s}{4.905m/s^2} = 3.457s$$

$$tiempo..de..vuelo..t_v = 3.457s$$

Cálculo de alcance R y Y_{max}

$$b)$$
$$R = V_{ox} t_v$$
$$R = 10.598 \frac{m}{s}(3.457 s)$$
$$R = 36.637 m$$

Para el cálculo de Y_{max}, el tiempo que tarda en subir=tiempo que tarda en bajar por lo Tanto t subida = (3.457/2) t_1 =1,7285s. Considerando el inicio y el termino el punto máximo.



Condiciones Inicio

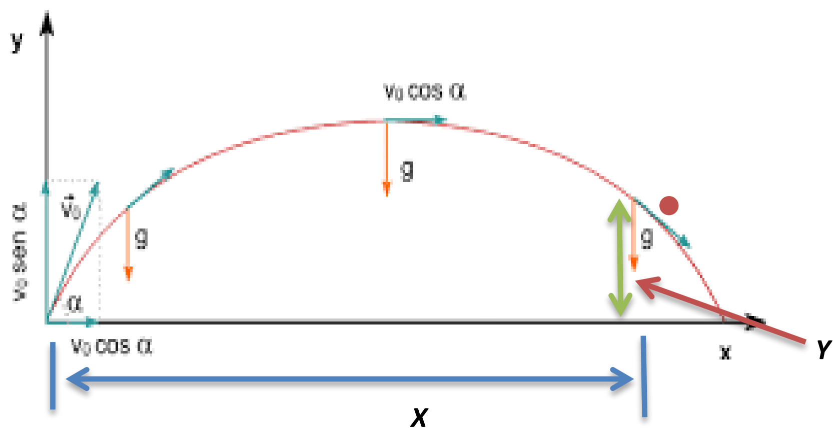
$$V_o = 20 m/s,$$
$$t_o = 0s$$
$$y_o = 0m$$
$$\theta = \alpha = 58°$$

Condiciones termino

$$t_1 = 1.7285 s$$
$$y_{\max} = ?$$

$$c)$$
$$y = y_o + V_{oy}(t - t_o) - \frac{g}{2}(t - t_o)^2$$
$$y_{\max} = 0m + \left(16.96 \frac{m}{s}\right)(t_1 - 0s) - \left(\frac{9.81}{2} \frac{m}{s^2}\right)(t_1 - 0s)^2$$
$$y_{\max} = \left(16.96 \frac{m}{s}\right)(1.7285 s) - 4.905 \frac{m}{s^2}(1.7285 s)^2$$
$$y_{\max} = 14.66 m$$

Para el cálculo de Y y X en el tiempo t=3s, implica el poder realizar estos cálculos cuando el cuerpo va bajando, instante antes de que impacte con la tierra o nivel de referencia



Condiciones Inicio

$$V_o = 20m/s,$$
$$t_o = 0s$$
$$y_o = 0m$$
$$\theta = \alpha = 58°$$

Condiciones termino

$$t_1 = 3s$$
$$Y = ?$$
$$X = ?$$

$d)$

$$X = V_{ox} t_v$$
$$X = 10.598 \frac{m}{s}(3.0s)$$
$$X = 31.794m$$

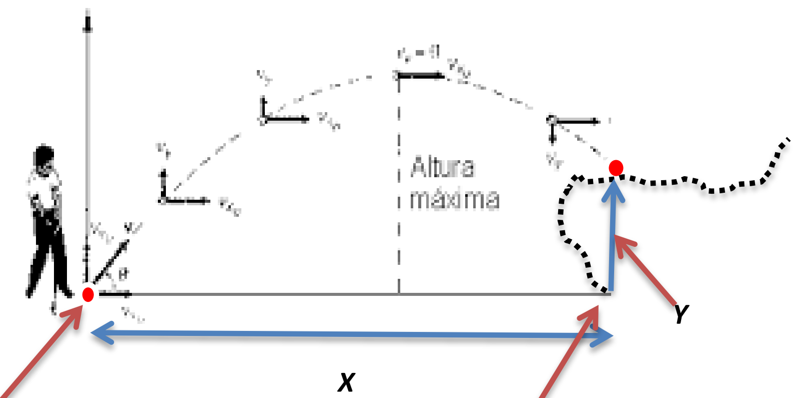
$d)$

$$y = y_o + V_{oy}(t - t_o) - \frac{g}{2}(t - t_o)^2$$
$$y = 0m + \left(16.96 \frac{m}{s}\right)(3s - 0s) - \left(\frac{9.81}{2} \frac{m}{s^2}\right)(3s - 0s)^2$$
$$y = \left(16.96 \frac{m}{s}\right)(3s) - 4.905 \frac{m}{s^2}(3s)^2$$
$$y = 6.735m$$

Tippens 6-37 pp 147

Una pelota de Golf sale del punto de partida al ser golpeada con una velocidad de 40m/s a 65°. Si cae en un punto localizado a 10m por encima del punto inicial, Calcular:

- ***a) El tiempo que permaneció en el aire (tiempo de vuelo)***
- ***b) La distancia Horizontal X recorrida con respecto al punto inicial***



Condiciones Inicio

$$V_o = 40m/s, \quad t_o = 0s \quad y_o = 0m \quad \theta = 65°$$

Condiciones termino

$$t_1 = ? \quad Y = 10 \quad X = ?$$

$a)$

$$y = y_o + V_{oy}(t - t_o) - \frac{g}{2}(t - t_o)^2$$

$$y = y_0 + V_o sen\theta (t_v - t_o) - \frac{g}{2}(t_v - t_o)^2$$

$$10m = 0 + \left(40\frac{m}{s}\right)sen65°(t_v - 0s) - 4.905\frac{m}{s^2}(t_v - 0s)^2$$

$$10m = 36.252t_v - 4.905t_v^2$$

$$4{,}905t_v^2 - 36.252t_v + 10m = 0 \Rightarrow Ec..cuadratica$$

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$t_1 = 7.103s..y..t_2 = 0.287s..por..lo..\tan to..hay..dos..resultados..posibles..y..dos$$
$$dis\tan cias..horizontales..posibles.$$

Cálculo de Distancias horizontales para cada tiempo

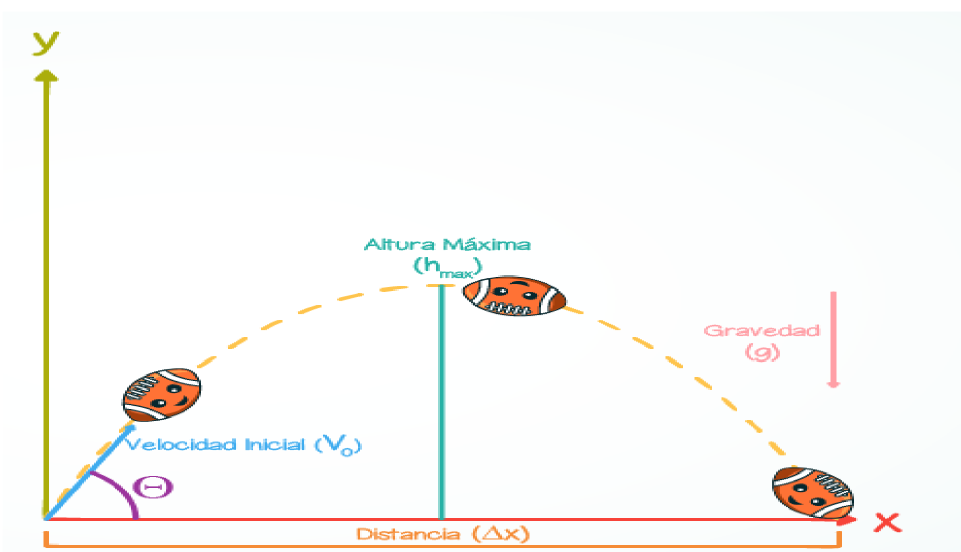
$d)$	$d)$
$X = V_{ox} t_v$	$X = V_{ox} t_v$
$X = V_0 \cos\theta (t_1)$	$X = V_0 \cos\theta (t_1)$
$X_1 = (40m/s)\cos 65° (7.103s)$	$X_2 = (40m/s)\cos 65° (0.287s)$
$X_1 = 120.074m$	$X_2 = 4.851m$

Realizar los siguientes ejercicios del manual de trabajo y subirlos como fecha límite el Domingo 21 de Junio del 2020, a la hora indicada en Ed modo.

Agustín Vázquez pp106

Un pateador de futbol americano imprime una velocidad inicial al balón de 20m/s en un ángulo de 40° con respecto a la horizontal, como se muestra en la figura. Calcular:

- ***a) Tiempo de vuelo si el balón parte de piso y llega a piso***
- ***b) La altura máxima Y_{max}***
- ***c) El alcance R***
- ***d) Componentes de la velocidad después de transcurridos 2s.***

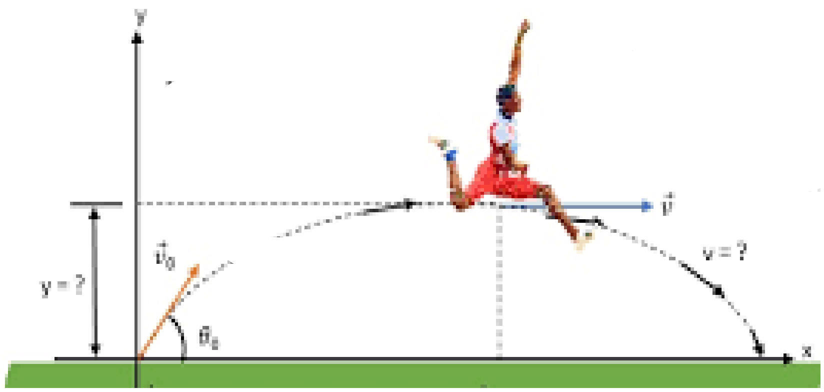


Respuestas a)2.62s b)8.423m c) 40.14072m d) V_x=15.32m/s y V_y=-6.75m/s

Agustín Vázquez pp106

Un atleta ejecuta un salto de longitud como se muestra en la figura, el ángulo de despegue es 40° sobre la horizontal y su velocidad inicial es de 9.10m/s. Si parte del piso el atleta, calcular:

a) ***Altura máxima del atleta***
b) ***Su alcance horizontal, considerando que llega a piso nuevamente***



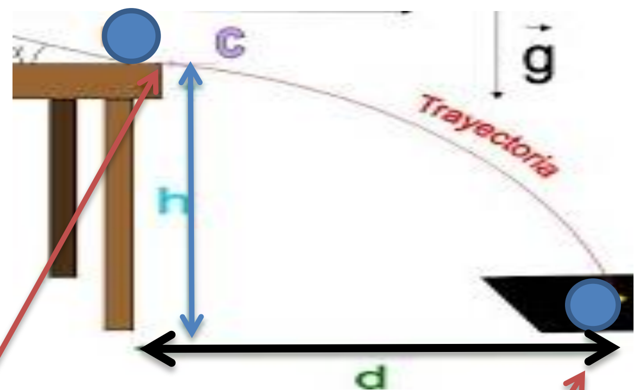
Respuestas a) Ymax=1.75m b) R=8.32m

Agustín Vázquez pp112

Sobre una mesa se pone a rodar una pelota de golf con una rapidez inicial de 1.2m/s hasta que finalmente cae realizando la trayectoria indicada; cae a una distancia horizontal de 0.6m. Calcular:

a) ***Tiempo que tarda en caer la pelota al suelo***
b) ***Altura de la mesa***

Hacer énfasis a las consideraciones inicio y finales del dibujo



X=d

Condiciones Inicio

$$V_o = 1.2m/s,$$
$$t_o = 0s$$
$$y_o = h = ?$$
$$\theta = 0°$$

Condiciones termino

$$t_1 = ?$$
$$Y = 0m$$
$$X = d = 0.6m$$

Respuestas a) t=0.5s b) Y=h=1.2m