Producto Cruz o Producto Vectorial entre dos vectores $\vec{A}\, y\, \vec{B}$

El producto cruz o producto vectorial entre dos vectores $\vec{A}\, y\, \vec{B}$ ***, da como resultado un tercer vector*** C ***perpendicular a los dos vectores que le dieron origen.***

La magnitud del vector $\vec{C} = \vec{A}\, x\, \vec{B}$***, se obtiene por medio de la siguiente expresión*** $|C| = |A||B| sen\,\theta$***, en donde el ángulo*** θ ***es el ángulo menor entre*** $\vec{A}\, y\, \vec{B}$***.***

El vector C***, con sus respectivas componentes, se obtiene por medio de determinantes, en donde*** $\vec{A}\, x\, \vec{B}$ ***es diferente a*** $\vec{B}\, x\, \vec{A}$***, es decir,*** $\vec{A}\, x\, \vec{B} \neq \vec{B}\, x\, \vec{A}$ ***.***

Ejemplo 1:

Obtener el producto cruz entre el vector A y B, así como la magnitud de **A x B**

Un ejemplo de cómo emplear el producto exterior es que si A =1i + 2j + 3k y B = 3i -2j + 4k son vectores, entonces usando la definición de producto vectorial tenemos:

$$\boldsymbol{AxB} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

Esta suele simplificarse en un determinante de tercer orden de la siguiente manera:

$$\boldsymbol{AxB} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{AxB} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}$$

-

Dando seguimiento a la matriz

$C_x = [(2)(4) - (-2)(3)]i = 14i$ ***Corresponde a la componente i del vector C***

$C_Y = -[(1)(4) - (3)(3)]j = -[-5]j = 5j$ ***Corresponde a la componente j del vector C y siempre antecede un signo negativo a toda la operación.***

$C_K = [(1)(-2) - (3)(2)]k = [(-2) - (6)]k = -8k$ ***Corresponde a la componente K del vector C***

Agrupando todas las componentes para darle sentido al vector resultante, se tiene que:

Vector resultante $\vec{C} = \vec{A}\, x\, \vec{B}$ ***es:*** $\vec{C} = 14i + 5j - 8k$ ***y este vector es perpendicular tanto*** $\vec{A}$ ***a cómo*** $\vec{B}$***.***

Si realizamos la operación contraria, el vector resultante es el mismo en magnitud, pero con componentes de signo contrario, es decir.

$$\vec{B}\, x\, \vec{A} = \begin{vmatrix} i.........j.........k \\ b_1......b_2.......b_3 \\ a_1......a_2.......a_3 \end{vmatrix}$$

$$\vec{B}\,x\,\vec{A} = \begin{vmatrix} i.........j.........k \\ 3.......-2.......4 \\ 1.........2.........3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-2}{2} .. \frac{4}{3} \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \frac{3}{1} .. \frac{4}{3} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{3}{1} .. \frac{-2}{2} \end{vmatrix} k$$

Dando seguimiento a la matriz

$C_x = [(-2)(3) - (2)(4)]i = -14i$ ***Corresponde a la componente i del nuevo vector C***

$C_Y = -[(3)(3) - (1)(4)]j = -[5]j = -5j$ ***Corresponde a la componente j del nuevo vector C y siempre antecede un signo negativo a toda la operación.***

$C_K = [(3)(2) - (1)(-2)]k = [(6) - (-2)]k = 8k$ ***Corresponde a la componente K del nuevo vector C***

Agrupando todas las componentes para darle sentido al vector resultante, se tiene que:

Vector Resultante $\vec{C} = \vec{B}\,x\,\vec{A}$ ***es:*** $\vec{C} = -14i - 5j + 8k$ ***y este vector es perpendicular tanto*** $\vec{A}$ ***a cómo*** $\vec{B}$***.***

Observar que los productos $\vec{A}\,x\,\vec{B} \neq \vec{B}\,x\,\vec{A}$ ***son completamente distintos, los vectores son iguales en magnitud, pero no así en sentido, ya que sus componentes tienen signos contrarios.***

Ejercicio 2 Sears 1,92

Dos vectores A y B tienen magnitudes de 3 cada uno; su producto cruz o vectorial, da como resultado el vector $AxB = 2i - 5k$ ***. ¿Qué ángulo forman A y B?***

$$|C| = |A||B| sen\theta$$
$$ó$$
$$|AxB| = |A||B| sen\theta$$
$$Magnitud.de.|AxB| = |C| = \sqrt{(2)^2 + (0)^2 + (-5)^2}$$
$$|AxB| = |C| = \sqrt{29}$$

$$Despejando.\theta$$
$$\theta = sen^{-1}\left[\frac{|AxB|}{|A||B|}\right]$$
$$\theta = sen^{-1}\left[\frac{\sqrt{29}}{|3||3|}\right]$$
$$\theta = 36.75°, ángulo.menor..entre..A..y..B$$

Ejercicio 3 Resnick 39 manual de ejercicios

Tres vectores están dados por: $\vec{A} = 3i + 3j - 2k$ ***,*** $\vec{B} = -1i - 4j + 2k$ ***y*** $\vec{C} = 2i + 2j + 1k$

$$a) A \bullet (BxC) ... b) Ax(B + C)$$

Resolviendo a)

$$\vec{B} x \vec{C} = \begin{vmatrix} i.........j.........k \\ -1....-4........2 \\ 2.........2.........1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{-4}{2} .. \frac{2}{1} \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} .. \frac{2}{1} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{-1}{2} .. \frac{-4}{2} \end{vmatrix} k$$

Dando seguimiento a la matriz

$D_x = [(-4)(1) - (2)(2)]i = -8i$ ***Corresponde a la componente i del nuevo vector D***

$D_Y = -[(-1)(1) - (2)(2)]j = -[-5]j = 5j$ ***Corresponde a la componente j del nuevo vector D y siempre antecede un signo negativo a toda la operación.***

$D_Z = [(-1)(2) - (2)(-4)]k = [(-2) - (-8)]k = 6k$ ***Corresponde a la componente K del nuevo vector D***

Agrupando todas las componentes para darle sentido al vector resultante, se tiene que:

$$\vec{A} = 3i + 3j - 2k \qquad \vec{B} x \vec{C} = \vec{D} = -8i + 5j + 6k$$

Realizando el producto punto entre Ay D, se tiene que:

$A \bullet D = [(3)(-8)+(3)(5)+(-2)(6)] = -24+15-12 = -21$ **Qué es una ESCALAR**

Realizando b) Ax(B+C) ***por:*** $\vec{A} = 3i+3j-2k$ ***,*** $\vec{B} = -1i-4j+2k$ ***y*** $\vec{C} = 2i+2j+1k$

(B+C) = (-1+ 2)i + (-4+2)j + (2+1)k (B+C) = 1i - 2j + 3k

Realizando Ax(B+C)

Primero realizar la operación Ax(B+C)

$$\vec{A}x(B\vec{+}C) = \begin{vmatrix} i.........j.........k \\ 3.........3........-2 \\ 1........-2.........3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3}{-2} .. \frac{-2}{3} \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \frac{3}{1} .. \frac{-2}{3} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{3}{1} .. \frac{3}{-2} \end{vmatrix} k$$

Dando seguimiento a la matriz

$E_x = [(3)(3)-(-2)(-2)]i = 5i$ ***Corresponde a la componente i del nuevo vector E***

$E_Y = -[(3)(3)-(1)(-2)]j = -[11]j = -11j$ ***Corresponde a la componente j del nuevo vector E y siempre antecede un signo negativo a toda la operación.***

$E_Z = [(3)(-2)-(1)(3)]k = [(-6)-(3)]k = -9k$ ***Corresponde a la componente K del nuevo vector E***

Agrupando todas las componentes para darle sentido al vector resultante, se tiene que:

$$Ax(B\vec{+}C) = E = 5i - 11j - 9k$$

Ejercicio 4

Áreas y volúmenes entre vectores.

Dados los vectores: $\vec{p} = 4i - 2j + k$ ***,*** $\vec{q} = 6i + 2j - k$ ***y*** $\vec{s} = -2i + 2j + 5k$ ***Determinar:***

A) El vector área del paralelogramo generado por p y q

B) El volumen del paralelepípedo formado por p, q y s

Resolución a) implica el realizar el producto pxq y obtener la magnitud de este vector, es decir

$$\left|\vec{p}\, x\, \vec{q}\right| = \left|\vec{D}\right|$$

$$\vec{p}\, x\, \vec{q} = \vec{D} = \begin{vmatrix} i.........j.........k \\ 4......-2.........1 \\ 6........2.........-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} k$$

Dando seguimiento a la matriz

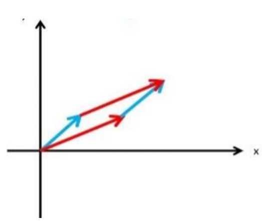
$D_x = [(-2)(-1) - (2)(1)]_i = 0_i$ ***Corresponde a la componente i del nuevo vector D***

$D_Y = -[(4)(-1) - (6)(1)]_j = -[-10]_j = 10_j$ ***Corresponde a la componente j del nuevo vector D y siempre antecede un signo negativo a toda la operación.***

$D_Z = [(4)(2) - (6)(-2)]_k = [(8) - (-12)]_k = 20_k$ ***Corresponde a la componente K del nuevo vector D***

El vector resultante es $\vec{p}\, x\, \vec{q} = \vec{D} = 0i + 10j + 20k$

El área del paralelogramo corresponde a:



$$A = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

$$Area = \left|\vec{p}\, x\, \vec{q}\right| = \left|\vec{D}\right| = \sqrt{(0^2) + (10)^2 + (20)^2}$$

$$Area = \sqrt{500}$$

Resolución b) implica realizar el triple producto escalar y da como resultado el volumen formado por p,q y s, es decir:

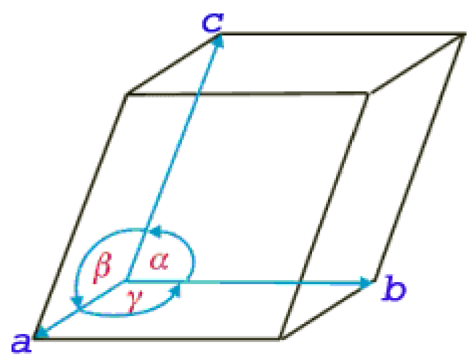
$$\vec{s} \bullet \left(\vec{p} \, x \, \vec{q} \right) = Volúmen,, \, paralelepipedo$$

El producto cruz entre p y q se calculó con antelación, de tal forma que

$$\vec{p} \, x \, \vec{q} = \vec{D} = \begin{vmatrix} i.........j.........k \\ 4......-2.........1 \\ 6........2.........-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & -1 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} k$$

$$\vec{p} \, x \, \vec{q} = \vec{D} = 0i + 10j + 20k$$

El producto punto final es:



$$Volúme.paralelepipedo = \vec{s} \bullet \left(\vec{p} \, x \, \vec{q} \right)$$

$$Volúmen = (-2)(0) + (2)(10) + (5)(20)$$

$$Volúmen.paralelepipedo = 120$$

$$Volúmenparalelepipedo = |120| = 120u^3$$

Si el resultado hubiese dado negativo, se toma el valor absoluto considerando que es una cantidad de tipo escalar

Ejercicio 5

Dados los vectores de posición de una partícula $\vec{A}=5i+8j-6k, \vec{B}=-2i+4j+12k$ ***expresados en metros. Encontrar:***

a) ***Producto punto entre A y B***

b) ***Producto cruz A x B***

c) ***El ángulo entre los vectores A y B***

Respuestas

Resolviendo a)

$$A \bullet B = |A||B|\cos\theta ----1$$
$$A \bullet B = AxBx + AyBy + AzBz ---2$$
$$Utilizando..\exp resión..2$$
$$A \bullet B = (5)(-2)+(8)(4)+(-6)(12)$$
$$A \bullet B = -10+32-72$$
$$A \bullet B = -50$$

Resolviendo b)

$$\vec{A}x\vec{B} = \begin{vmatrix} i.........j.........k \\ 5.........8.......-6 \\ -2.......4.........12 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{8}{4}..\frac{-6}{12} \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} \frac{5}{-2}..\frac{-6}{12} \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} \frac{5}{-2}..\frac{8}{4} \end{vmatrix} k$$

Dando seguimiento a la matriz

$D_x = [(8)(12)-(4)(-6)]_i = 120i$ ***Corresponde a la componente i del nuevo vector D o AxB***

$D_Y = -[(5)(12)-(-2)(-6)]_j = -[48]_j = -48j$ ***Corresponde a la componente j del nuevo vector D y siempre antecede un signo negativo a toda la operación.***

$D_Z = [(5)(4)-(-2)(8)]_k = [(20)-(-16)]_k = 36k$ ***Corresponde a la componente K del nuevo vector D***

Agrupando todas las componentes para darle sentido al vector resultante, se tiene que:

$$\vec{D} = \vec{A}x\vec{B} = 120i - 48j + 36k$$

Resolviendo c) ***Recordemos que AxBx + AyBy + AzBz es igual a producto punto entre A y B***

$$\cos\theta = \frac{(AxBx + AyBy + AzBz)}{|A||B|}$$

$$\theta = \cos^{-1}\left[\frac{A \bullet B}{\sqrt{125}\sqrt{164}}\right] \Rightarrow\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left[\frac{-50}{\sqrt{125}\sqrt{164}}\right] \quad \vec{A} \bullet \vec{B}$$

$$\theta = 110.43°$$

Ejercicios para realizar y practicar

Ejercicio 6

Realizar los siguientes ejercicios y comprobar que las respuestas sean correctas.

I.-Tres vectores están dados por: $\vec{A} = 1_i + 3_k$ **,** $\vec{B} = 3_i - 2_j - 1_k$ ***y*** $\vec{C} = 1_i + 1_j + 1_k$

a) $A \bullet (BxC) \ldots\ldots \text{Re}\,spuesta : 14..es..Escalar$

b) ***El ángulo entre A y B*** ***Respuesta:90°***

II.-Tres vectores están dados por: $\vec{A} = 2_i + 2_j + 1_k$ **,** $\vec{B} = 3_i + 3_j - 2_k$ ***y*** $\vec{C} = -1_i + 4_j + 2_k$

a) $A \bullet (BxC) \ldots\ldots \text{Re}\,spuesta : 35..es..Escalar$

III.-Tres vectores están dados por: $\vec{A} = -2_j + 3_k$ **,** $\vec{B} = 3_i - 2_j - 1_k$ ***y*** $\vec{C} = 1_i + 1_j + 1_k$

a) $B \bullet (AxB) \ldots\ldots \text{Re}\,spuesta : 0cero..es..Escalar$

b) El ángulo entre A y C ***Respuesta: 80.78°***

c)Obtener los ángulos directores para el Vector AxB ***Respuesta:***
$\alpha = 53.51°, \beta = 48.01°, \gamma = 63.51°$

d) El Vector unitario para AxB ***Respuesta:*** $\vec{u} = \frac{8}{\sqrt{181}} i + \frac{9}{\sqrt{181}} j + \frac{6}{\sqrt{181}} k$

e) Obtener $\vec{A} x \vec{A} \ldots y \ldots \vec{A} \bullet \vec{A}$ ***Respuesta:*** $CERO..y..13$ ***respectivamente***

IV.-Tres vectores están dados por: $\vec{F} = 5_i + 4_j - 6_k$ **,** $\vec{G} = -2_i + 2_j + 3_k$ **y** $\vec{H} = 4_i + 3_j + 2_k$

Determinar:

$a)...R = F + 2G - H$

$b)...Obtener..ángulos..directores(\alpha, \beta, \gamma)..de..R$

$c)...Rx(F - H)$

$d)...(FxG) \bullet H$

$e)...(FxG)xH$

Respuestas

$a)...R = -3i + 5j - 2k$

$b)...\alpha = 119.12°, \beta = 35.79°, \gamma = 108.93$

$c)...Rx(F - H) = -38i - 26j - 8k$

$d)...(FxG) \bullet H = 123$

$e)...(FxG)xH = -60i + 24j + 84k$