Elasticidad y Ley de Hooke

Cuerpo elástico

Definimos como cuerpo elástico aquel que recobra su tamaño y su forma original, cuando deja de actuar sobre él una fuerza deformante. Las bandas de hule, las pelotas de Golf, los trampolines, las pelotas de futbol o los resortes son ejemplos de cuerpos elásticos.

La plastilina, pasta de dientes, la arcilla son ejemplos de cuerpos inelásticos.

Esfuerzo longitudinal (E)

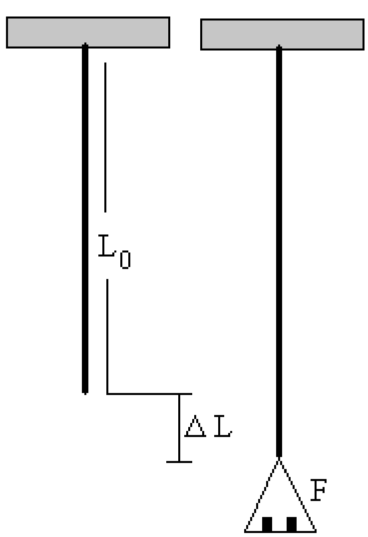
Es la razón de una fuerza aplicada entre el área que actúa (E)

$$E = \frac{F}{A} \quad \textbf{\textit{Unidades}} \quad \left[\frac{N}{m^2}\right] ó \left[\frac{lb}{ft^2}\right]$$

Deformación longitudinal (D)

Es el cambio relativo en las dimensiones o en la forma de un cuerpo como resultado de la aplicación de un esfuerzo.

$$D = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{l_f - l_o}{l_0} \quad \textbf{\textit{Unidades}} \quad \left[\frac{m}{m}\right] = [A\dim ensional]$$



lo =longitud inicial (m)

l_f =longitud final (m)

F=Fuerza Deformante (N)

E= Esfuerzo longitudinal (N/m^2)

A= área de sección transversal del alambre (m^2)

Limite elástico

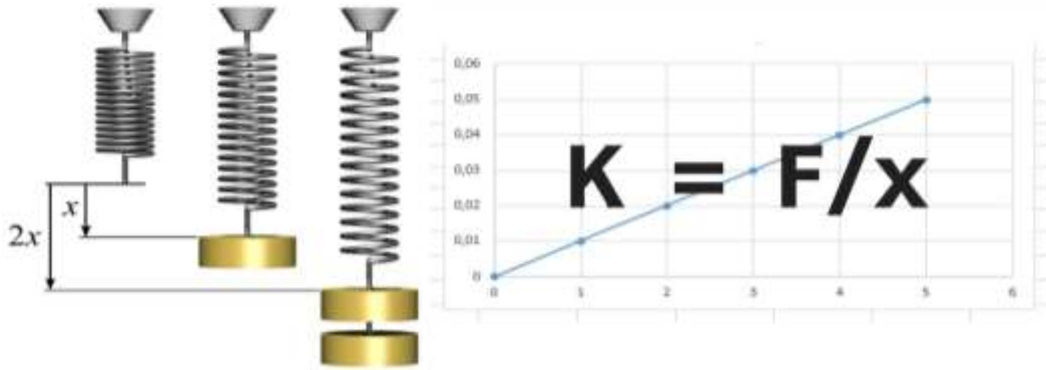
Es el esfuerzo máximo que puede sufrir un cuerpo sin que la deformación sea permanente.

Límite de rotura

Es el mayor esfuerzo al que puede ser sometido un alambre, sin llegar a romperse, pero deformándose permanentemente.

Ley de Hooke

Siempre que no se exceda el límite elástico, una deformación elástica es directamente proporcional a la magnitud de la fuerza aplicada por unidad de área



l_o =longitud inicial del resorte (sin deformación) (m)

l_f =longitud del resorte con deformación (m)

x= Incremento de longitud (l_f - l_o) (m)

F=Fuerza Deformante (pesas) (N)

K= Constante del resorte (N/m)

Módulo de Young (Y)

Es el esfuerzo longitudinal (E), entre la deformación longitudinal específica (D)

$$Y = \frac{E}{D} = \frac{(F/A)}{(\Delta l / l_0)} = \frac{F l_o}{A \Delta l}$$

Las unidades del módulo de Young son las mismas unidades que del esfuerzo longitudinal pero son parámetros completamente distintos $\left[\frac{N}{m^2}\right]$

Ejercicio 1 ***Tippens***

Un alambre de teléfono de 120m de longitud inicial, y de 2mm de diámetro, se estira debido a una fuerza de 380 N.

- ***a)*** ***¿Cuál es el esfuerzo longitudinal (E)?***
- ***b)*** ***¿Cuál es la deformación longitudinal (D) si la longitud del alambre al final es de 120.10 m?***
- ***c)*** ***¿Cuál es el valor del módulo de Young?***

El área de sección transversal es:

$$A = \frac{\pi\phi^2}{4} = \frac{\pi(2x10^{-3}m)^2}{4} = 3.14x10^{-6}m^2$$

$$\phi = Diametro..del..alambre..en..m$$

a) ***Esfuerzo longitudinal*** $E = \frac{F}{A} = \frac{380N}{3.14x10^{-6}m^2} = 1.21x10^8\frac{N}{m^2}$

b) ***Deformación longitudinal*** $D = \frac{\Delta l}{l_o} = \frac{Incremento}{Longitud..inical} = \frac{0.1m}{120m} = 8.333x10^{-4}$ ***Adimensional***

c) ***Módulo de Young*** $Y = \frac{Fl_o}{A\Delta l} = \frac{E}{D} = \frac{1.21x10^8 N/m^2}{8.333x10^{-4}} = 1.45x10^{11}\frac{N}{m^2}$ ***Constante***

Ejercicio 2 ***Tippens***

Un cuerpo de 60 kg de masa, está suspendido de un cable cuyo diámetro es de 9mm; ¿Cuál es el esfuerzo en este caso?

El área de sección transversal es:

$$A = \frac{\pi\phi^2}{4} = \frac{\pi(9x10^{-3}m)^2}{4} = 6.3617x10^{-5}m^2$$

$$\phi = Diametro..del..alambre..en..m$$

Esfuerzo longitudinal $E = \frac{F}{A} = \frac{w}{A} = \frac{peso}{área} = \frac{(60Kg)(9.81m/s^2)}{6.36x10^{-5}m^2} = 9.25x10^6\frac{N}{m^2}$

Ejercicio 3 ***Tippens***

Una masa de 500Kg se ha colgado del extremo de un alambre de metal cuya longitud es de 2m y tiene 1 mm de diámetro. Si el alambre se estira 1.40 cm:

- ***a)*** ***¿Cuál es el esfuerzo?***
- ***b)*** ***¿Cuál es la deformación?***
- ***c)*** ***¿Cuál es el módulo de Young para este metal?***

El área de sección transversal es:

$$A = \frac{\pi\phi^2}{4} = \frac{\pi(1x10^{-3}m)^2}{4} = 7.854x10^{-7}m^2$$

$$\phi = Diametro..del..alambre..en..m$$

a) ***Esfuerzo longitudinal*** $E=\frac{F}{A}=\frac{peso}{área}=\frac{(500kg)(9.81m/s^2)}{7.854x10^{-7}m^2}=6.345x10^9\ \frac{N}{m^2}$

b) ***Deformación específica*** $D=\frac{\Delta l}{l_o}=\frac{Incremento}{Longitud..inical}=\frac{1.40x10^{-2}m}{2m}=7x10^{-3}$ ***Adimensional***

c) ***Módulo de Young*** $Y=\frac{Fl_o}{A\Delta l}=\frac{E}{D}=\frac{6.34x10^9\ N/m^2}{7x10^{-3}}=9.057x10^{11}\ \frac{N}{m^2}$ **CONSTANTE**

Ejercicio 4 **Tippens**

En qué medida se alarga un trozo de alambre de bronce, de 60 cm de longitud y 1.2 mm de diámetro, cuando se cuelga una masa de 3kg de uno de sus extremos. Considerar que el módulo de Young es el siguiente:

$$Y_{Bronce}=10.33x10^{10}\ N/m^2$$

El área de sección transversal es: $A=\frac{\pi\phi^2}{4}=\frac{\pi(1.2x10^{-3}m)^2}{4}=1.130x10^{-6}m^2$

$$\phi = Diametro..del..alambre.en..m$$

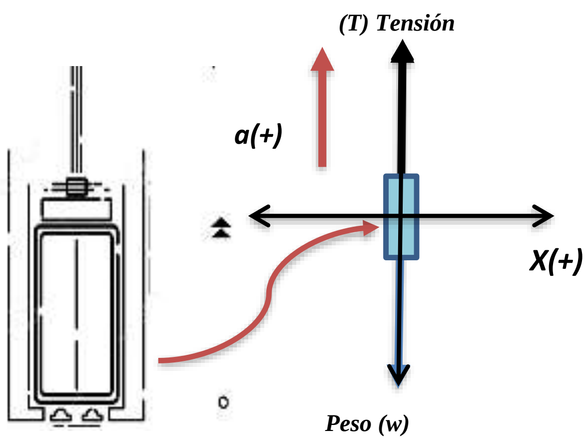
$$Y=\frac{Fl_o}{A\Delta l}\Rightarrow ..Despejando.\Delta l$$

$$\Delta l=\frac{Fl_o}{YA}=\frac{(peso)l_o}{YA}=\frac{(3kg)(9.81m/s^2)(0.6m)}{10.3x10^{10}\ N/m^2(1.130x10^{-6}m^2)}=1.5126x10^{-4}m=0.1512mm$$

Ejercicio 5 ***Ejercicio de libro Harris-Benson***

Un elevador de 800kg de masa cuelga de un cable de acero que puede soportar un esfuerzo de 1.2x10⁸ N/ m². ¿Cuál es el diámetro mínimo necesario si el elevador se acelera hacia arriba a 1.5m / s²?

Diagrama de cuerpo libre



$$F = ma$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$Tsen90° + wsen270° = (+)ma_y$$

$$T - mg = ma_y$$

$$T = mg + ma_y$$

$$T = mg + ma_y$$

$$T = m(g + a)$$

$$T = (800kg)(9.81 + 1.5)m/s^2$$

$$T = 9048N$$

Calculo del Diámetro del alambre sometido a la tensión T.

$$E = \frac{F}{A} = \frac{T}{\left(\frac{\pi\phi^2}{4}\right)} = \frac{4T}{\pi\phi^2}$$

$$E = \frac{4T}{\pi\phi^2}$$

$$\phi = \sqrt{\frac{4T}{\pi E}}$$

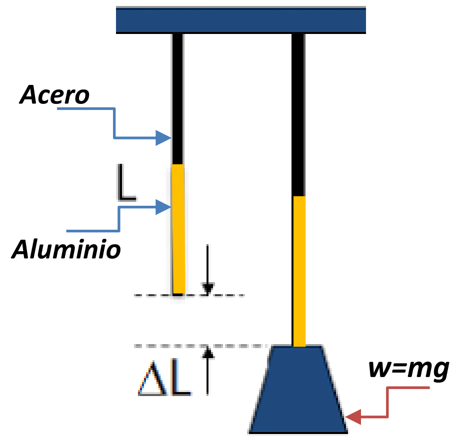
$$\phi = \sqrt{\frac{4T}{\pi E}}$$

$$\phi = \sqrt{\frac{4(9048N)}{\pi(1.2x10^8 N/m^2)}}$$

$$\phi = 0.009798m = 0.9798cm \approx 1cm$$

Ejercicio 6 ***Libro Frnck J. Blatt 10-19***

Un alambre de Aluminio de 1m de longitud y 0.10 mm de diámetro se une a un alambre de acero de dimensiones idénticas, por un extremo para que la longitud total sea de 2m. Si se suspende una masa de 3 kg en este alambre de 2m, ¿Cuál es la elongación total de este alambre?



Para este problema considerar que el peso correspondiente afecta a cada cable de forma independiente.

$Y_{Acero} = 20.x10^{10}\, N/m^2 \qquad Y_{alumninio} = 6.89x10^{10}\, N/m^2$

Se calcula el incremento de longitud de cada uno de los alambres de manera independiente y al final se suman para poder obtener un incremento final

$$Y = \frac{FL_0}{A\Delta l}$$

$$\Delta l = \frac{FL_0}{AY} = \frac{(mg)L_0}{\left(\frac{\pi\phi^2}{4}\right)Y} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \Delta l = \frac{4(mg)L_0}{\pi\phi^2(Y)}$$

$$\Delta l_{ACERO} = \frac{4(3kg)(9.81m/s^2)(1m)}{\pi(1x10^{-4}m)^2(20x10^{10}\,N/m^2)} = 0.01873m \approx 1.873cm$$

$$\Delta l_{Al} = \frac{4(3kg)(9.81m/s^2)(1m)}{\pi(1x10^{-4}m)^2(6.8x10^{10}\,N/m^2)} = 0.05510m \approx 5.510cm$$

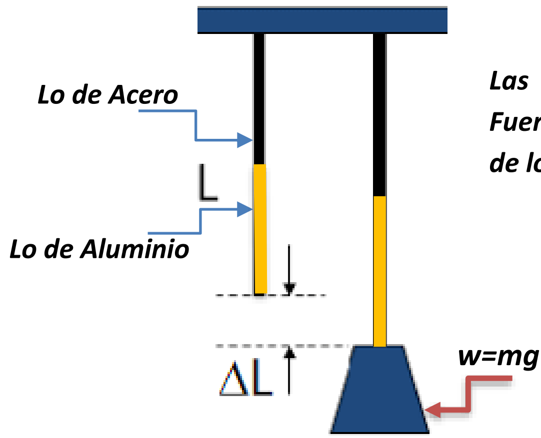
$$\Delta l_{total} = \Delta l_{Acero} + \Delta l_{Aluminio}$$

$$\Delta l_{total} = 1.873cm + 5.510cm$$

$$\Delta l_{total} = 7.383cm$$

Ejercicio 7 ***Libro Franck J. Blatt 10-13***

Un alambre de Aluminio y uno de acero de diámetros idénticos se unen por un extremo. ¿Cuál debe ser la relación de sus longitudes para que ambos segmentos se alarguen la misma cantidad bajo una misma carga determinada (fuerza o Peso)



Las variables en común son: El Diámetro, la Fuerza afecta a los dos por igual y el incremento de longitud debe ser el mismo.

Para este problema considerar que el peso o carga afecta a cada cable de forma independiente.

$$Y_{Acero} = 20.x10^{10}\,N/m^2 \qquad Y_{alumninio} = 6.89x10^{10}\,N/m^2$$

Existen parámetros para los dos alambres que van a ser iguales o en común, como:

$$\Delta l, \phi .y.la..F(Peso)$$

$$Y = \frac{FL_0}{A\Delta l} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \Delta l = \frac{FL_0}{AY}$$

$$\Delta l_{Acero} = \frac{FL_{Acero}}{\left(\frac{\pi\phi_{Acero}^2}{4}\right)Y_{Acero}} = \frac{4FL_{Acero}}{\pi\phi_{Acero}^2 Y_{Acero}} ---1$$

$$Ana\log amente..para..Alu\min io$$

$$Y = \frac{FL_0}{A\Delta l} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \Delta l = \frac{FL_0}{AY}$$

$$\Delta l_{Al} = \frac{4FL_{Al}}{\pi\phi_{Al}^2 Y_{Al}} ---2$$

$$Igualando.1..con..2$$

$$\Delta l_{Acero} = \Delta l_{Al}$$

$$\frac{4FL_{Acero}}{\pi\phi_{Acero}^2 Y_{Acero}} = \frac{4FL_{Al}}{\pi\phi_{Al}^2 Y_{Al}}$$

$$\frac{L_{Acero}}{Y_{Acero}} = \frac{L_{Al}}{Y_{Al}}$$

$$\frac{L_{Acero}}{L_{Al}} = \frac{Y_{Acero}}{Y_{Al}}$$

$$\frac{L_{Acero}}{L_{Al}} = \frac{Y_{Acero}}{Y_{Al}}$$

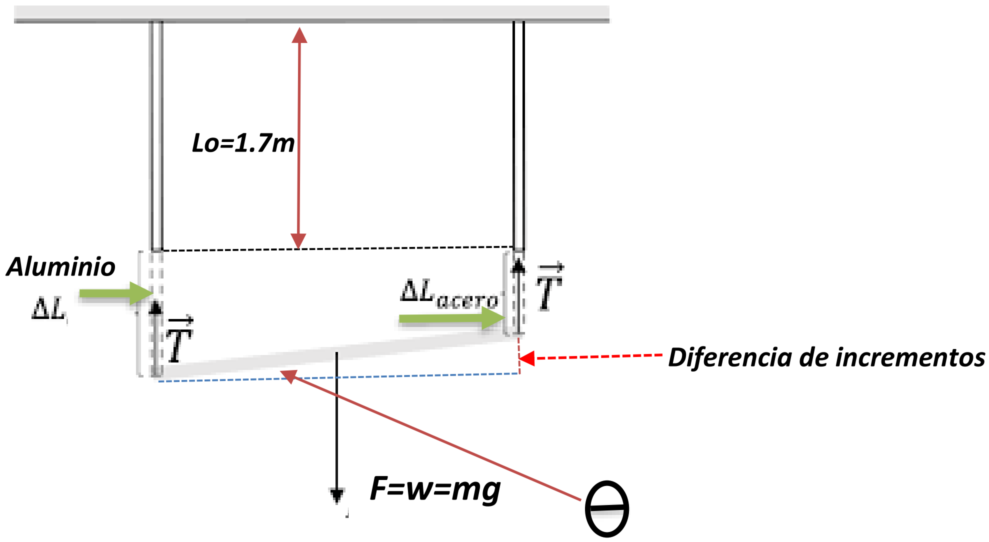
$$\frac{L_{Acero}}{L_{Al}} = \frac{20x10^{10}\,N/m^2}{6.89x10^{10}\,N/m^2}$$

$$\frac{L_{Acero}}{L_{Al}} = \frac{2.9}{1}$$

Físicamente significa que para que los incrementos de longitud sean los mismos, por cada 1m de alambre de Aluminio se requieren 2.9m de alambre de Acero.

Ejercicio 8 ***46 Resnick***

Una barra uniforme de 4.7 kg de masa y 1.3m de longitud está suspendida de los extremos por dos alambres verticales. Un alambre es de acero y tiene un diámetro de 1.2 mm el otro es de aluminio y tiene un diámetro de 0.84 mm. Antes de unirlo a la barra, los alambre eran de la misma longitud de 1.7m Halle el ángulo entre la barra y la horizontal indicados en la figura.



$$Y = \frac{FL_0}{A\Delta l} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \Delta l = \frac{FL_0}{AY}$$

$$\Delta l_{Acero} = \frac{FL_{Acero}}{\left(\frac{\pi\phi^2}{4}\right)Y_{Acero}} = \frac{4FL_{Acero}}{\pi\phi^2 Y_{Acero}} = \frac{4(T)L_{Acero}}{\pi\phi^2 Y_{Acero}} = \frac{4(mg/2)L_{Acero}}{\pi\phi^2 Y_{Acero}}$$

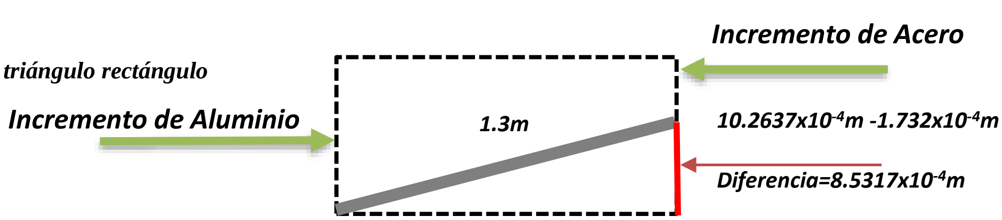
$$\Delta l_{Acero} = \frac{4(23.053N)(1.7m)}{\pi(1.2x10^{-3}m)^2(20x10^{10}N/m^2)} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \Delta l_{Acero} = 1.7325x10^{-4}m$$

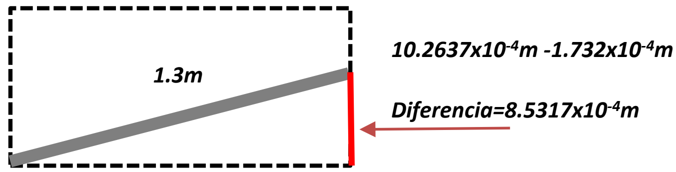
$$Ana\log amente..para..Alu\min io$$

$$\Delta l_{Al} = \frac{FL_{Al}}{\left(\frac{\pi\phi^2}{4}\right)Y_{Al}} = \frac{4FL_{Al}}{\pi\phi^2 Y_{Al}} = \frac{4(T)L_{Al}}{\pi\phi^2 Y_{Al}} = \frac{4(mg/2)L_{Al}}{\pi\phi^2 Y_{Al}}$$

$$\Delta l_{Al} = \frac{4(23.053N)(1.7m)}{\pi(0.84x10^{-3}m)^2(6.89x10^{10}N/m^2)} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \Delta l_{Al} = 10.2637x10^{-4}m$$

Análisis del triángulo rectángulo





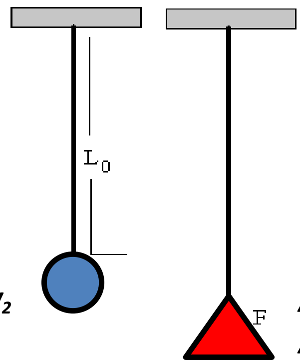
$$sen\theta = \frac{Diferencia}{1.3m}$$

$$\theta = sen^{-1}\left(\frac{8.5317x10^{-4}m}{1.3m}\right) \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \theta = 0.03760^{\circ}$$

***Ejercicio 8** 10.22 Frank J. Blatt*

Dos pesas W_1 y W_2 están colgadas de alambres de longitudes iguales. El alambre que sostiene a la pesa W_1 es de aluminio y el de W_2 es de cobre. El diámetro del alambre de aluminio es de 0.8mm y el de cobre es de 1mm ¿Cuál deberá ser la relación W_1 / W_2 para que ambos alambres se estiren la misma longitud?

Solución:



Existen variables en común para ambos alambres como Lo y El incremento de longitud, ya que deben estirar lo mismo, entonces tenemos que:

Alambre de Cobre con W_2

Alambre de Aluminio con W_1

$$Y_{Aluminio} = 6.89x10^{10}\,N/m^2 \qquad Y_{Cobre} = 12.5x10^{10}\,N/m^2$$

$$Y = \frac{FL_0}{A\Delta l} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \Delta l = \frac{FL_0}{AY}$$

$$\Delta l_{Cobre} = \frac{FL_{Cobre}}{\left(\frac{\pi\phi^2_{Cobre}}{4}\right)Y_{Cobre}} = \frac{4FL_{Cobre}}{\pi\phi^2_{Cobre}Y_{Cobre}} = \frac{4(W_2)L_{Cobre}}{\pi\phi^2_{Cobre}Y_{Cobre}} ---1$$

$$Ana\log amente..para..el..alu\min io$$

$$\Delta l_{Cobre} = \frac{FL_{Al}}{\left(\frac{\pi\phi^2_{Al}}{4}\right)Y_{Al}} = \frac{4FL_{Al}}{\pi\phi^2_{Al}Y_{Al}} = \frac{4(W_1)L_{Al}}{\pi\phi^2_{Al}Y_{Al}} ---2$$

$$\Delta l_{Cobre} = \Delta l_{Al}$$

$$\frac{4(W_2)L_{Cu}}{\pi\phi^2_{Cu}Y_{Cu}} = \frac{4(W_1)L_{Al}}{\pi\phi^2_{Al}Y_{Al}}$$

$$\frac{W_2}{\phi^2_{Cu}Y_{Cu}} = \frac{W_1}{\phi^2_{Al}Y_{Al}}$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{\phi^2_{Al}Y_{Al}}{\phi^2_{Cu}Y_{Cu}}$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{(0.8mm)^2\left(6.89x10^{10}\,N/m^2\right)}{(1mm)^2\left(12.5x10^{10}\,N/m^2\right)}$$

$$\frac{W_1}{W_2} = \frac{0.3527}{1} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow W_2 > W_1$$

Concluimos que para que los incrementos sean iguales, por cada 1N de W_1, debe tenerse 0,3527 N de W_2.

Ejercicio 9 ***10-12 Franck J. Blat***

Un alambre de acero y un alambre de aluminio de igual longitud se unen por un extremo para formar un alambre largo. ¿Cuál debe ser la relación de sus diámetros de los alambres para que ambos segmentos se alarguen la misma cantidad bajo una misma carga?

Variables en común: Longitudes de inicio, Incremento de longitud y Carga (Fuerza)

Carga=Peso=mg

$$Y = \frac{FL_0}{A\Delta l} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \Delta l = \frac{FL_0}{AY}$$

$$\Delta l_{Acero} = \frac{FL_{Acero}}{\left(\frac{\pi\phi_{Acero}^2}{4}\right)Y_{Acero}} = \frac{4FL_{Acero}}{\pi\phi_{Acero}^2 Y_{Acero}} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \Delta l_{Acero} = \frac{4(w)L_{Acero}}{\pi\phi_{Acero}^2 Y_{Acero}} ---1$$

Analogamente..para..alambre.de..aluminio

$$\Delta l_{Al} = \frac{FL_{Al}}{\left(\frac{\pi\phi_{Al}^2}{4}\right)Y_{Al}} = \frac{4FL_{Al}}{\pi\phi_{Al}^2 Y_{Al}} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \Delta l_{Al} = \frac{4(w)L_{Al}}{\pi\phi_{Al}^2 Y_{Al}} ---2$$

Igualando.1..con..2

$$\Delta l_{Acero} = \Delta l_{Al}$$

$$\frac{4(w)L_{Acero}}{\pi\phi_{Acero}^2 Y_{Acero}} = \frac{4(w)L_{Al}}{\pi\phi_{Al}^2 Y_{Al}}$$

$$\frac{1}{\phi_{Acero}^2 Y_{Acero}} = \frac{1}{\phi_{Al}^2 Y_{Al}}$$

$$\frac{\phi_{Al}^2}{\phi_{Acero}^2} = \frac{Y_{Acero}}{Y_{Al}}$$

$$\frac{\phi_{Al}^2}{\phi_{Acero}^2} = \frac{Y_{Acero}}{Y_{Al}}$$

$$\frac{\phi_{Al}}{\phi_{Acero}} = \sqrt{\frac{Y_{Acero}}{Y_{Al}}}$$

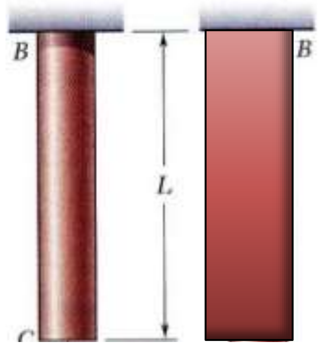
$$\frac{\phi_{Al}}{\phi_{Acero}} = \sqrt{\frac{20x10^{10}\,N/m^2}{6.89x10^{10}\,N/m^2}}$$

$$\frac{\phi_{Al}}{\phi_{Acero}} = \frac{1.70}{1}$$

Por lo tanto concluimos que El alambre de Aluminio debe ser de un diámetro mayor que el alambre de Acero.

Ejercicio 10 ***Tippens 13.4***

Un alambre cuya sección transversal es de 4mm² se estira 0.1mm con cierto peso. ¿Cuánto se alarga un alambre del mismo material y longitud si su sección transversal es de 8mm² y sostiene el mismo peso?



Parámetros en común: Longitud, Carga (fuerza) y como es el mismo material presenta el mismo módulo de Young.

$$Y = \frac{FL_0}{A\Delta l} = \frac{FL_A}{\left(\frac{\pi\phi_A^2}{4}\right)\Delta l_A} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow Y_A = \frac{4FL_A}{\pi\phi_A^2\Delta l_A} ---1$$

$$Ana\log amente..para..B..Y_B = \frac{4FL_B}{\pi\phi_B^2\Delta l_B} ---2$$

$$Igualando.1..con..2$$

$$Y_A = Y_b$$

$$\frac{4FL_A}{\pi\phi_A^2\Delta l_A} = \frac{4FL_B}{\pi\phi_B^2\Delta l_B}$$

$$\frac{1}{\phi_A^2\Delta l_A} = \frac{1}{\phi_B^2\Delta l_B}$$

$$\Delta l_B = \frac{\phi_A^2\Delta l_A}{\phi_B^2}$$

$$\Delta l_B = \frac{(4mm^2)0.1mm}{(8mm^2)} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow \Delta l_B = 0.05mm$$