

### Consideraciones

- Para este tipo de movimiento se toma como referencia el piso y a partir de este se realizan mediciones para las variables como velocidad, tiempo o desplazamiento vertical que es la altura  $h$ .
- Parte de un punto de inicio, donde la  $V_0 \neq 0m/s$  y la altura y tiempo por lo general son cero, a menos que se indique lo contrario.  $h_0 = 0m, t_0 = 0s$
- Conforme incrementa la altitud, el tiempo aumento y la velocidad disminuye hasta llegar a la cúspide o altura máxima de la trayectoria.
- En la cúspide o altura máxima, se tiene que la velocidad es de cero, para dar inicio a la caída libre.  $V_{\max} = 0m/s$  y  $t_{\max}$
- Cuando un cuerpo que va en tiro vertical- caída libre partiendo y llegando a un mismo nivel de referencia, para una misma altura con respecto al piso, se tienen las mismas velocidades pero en sentido contrario por ejemplo:

$$t_0 = 0s, V_0 = 39.2m/s (\text{Subiendo}) \uparrow \Leftrightarrow t_{8s} = 8s, V_{8s} = -39.2m/s (\text{bajando}) \downarrow$$

$$t_{1s} = 1s, V_{1s} = 29.4m/s (\text{Subiendo}) \uparrow \Leftrightarrow t_{7s} = 7s, V_{7s} = -29.4m/s (\text{bajando}) \downarrow$$

f) Cuando el cuerpo parte de piso y llega a piso o parte de un nivel de referencia y termina en ese mismo nivel de referencia, el tiempo de subida es igual al tiempo de bajada, como en el esquema anterior, tenemos que  $t_{subida} = 4s = t_{bajada}$

g) La aceleración gravitacional en todo momento es igual a  $g = 9.81m/s^2 \dots 32.2ft/s^2$

### Fórmulas de Tiro vertical-Caída Libre y Analogía con MRUA

MRUA (Mov. Rectilíneo uniformemente acelerado)	
$x_f = x_0 + v_0(t_f - t_0) + \frac{1}{2} \cdot a \cdot (t - t_0)^2$	Ecuación de posición
Ecuación de la velocidad (también llamada «Ecuación de la velocidad instantánea») $v_f = v_0 + a \cdot (t - t_0)$ $v_f^2 = v_0^2 + 2 \cdot a \cdot (x_f - x_0)$	Ecuaciones de la velocidad
Ecuación de la velocidad media $v_{med} = \frac{x_f - x_0}{t_f - t_0}$	
$a = \frac{v_f - v_0}{t_f - t_0}$	Ecuación de la aceleración

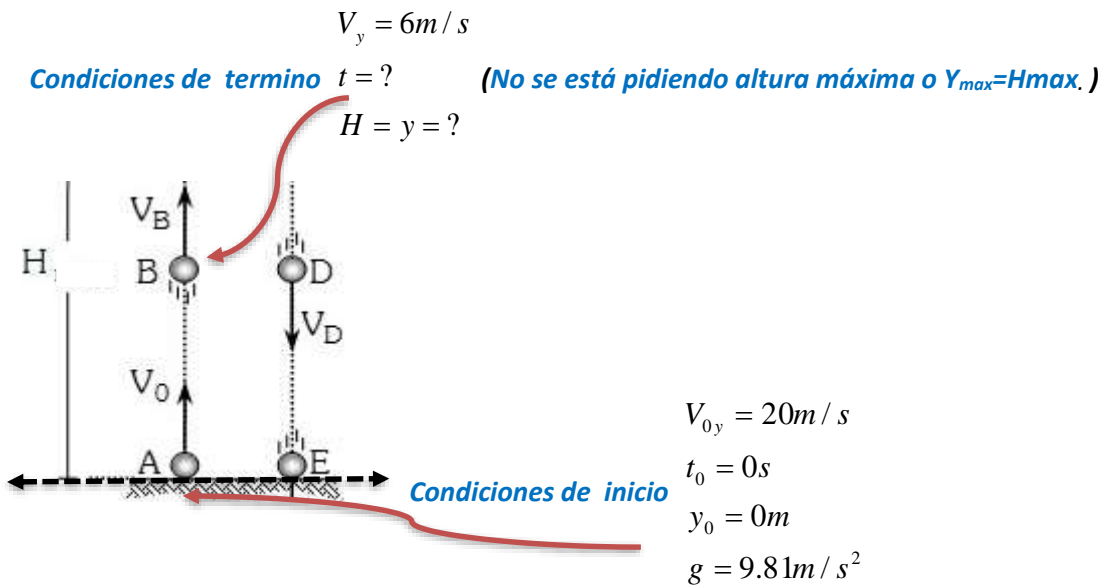
MRUA (Tiro Vertical caída libre)	
$y = y_0 + V_{0y}(t_f - t_0) - g \frac{1}{2}(t - t_0)^2$	Ecuación de posición o de altura <b>Y=H</b>
$V_y = V_{0y} - g(t_f - t_0)$ $V_y^2 = V_{0y}^2 - 2g(y_f - y_0)$	Ecuación de velocidad final <b>V<sub>y</sub></b>
$V_{med} = \frac{y_f - y_0}{t_f - t_0}$	Velocidad media en <b>V<sub>med</sub></b>
$-g = \frac{V_y - V_{0y}}{t_f - t_0}$	Ecuación de la aceleración <b>g</b>

### Ejemplo 1 Mayoral 24

Una piedra se lanza verticalmente hacia arriba con una velocidad de 20m/s.

- ¿Cuándo tendrá una velocidad de 6m/s?
- ¿A qué altura se encontrara cuando tenga la velocidad de 6 m/s?
- Calcular el tiempo ( $t_{max}$ ) para llegar a la altura máxima ( $H_{max}$  o  $Y_{max}$ )
- Calcular la altura máxima  $H_{max}$  o  $Y_{max}$

Realizando un esquema del lanzamiento y marcando condiciones de arranque y de termino, se tiene que



Al observar el esquema, podemos ver que a una misma altura  $H$ , la piedra tendrá la misma velocidad de 6m/s cuando sube en punto B o cuando baja en punto D, la diferencia es que cambia el sentido, es decir  $V_B = 6m/s$  (sube) y en  $V_D = -6m/s$  (baja), por lo tanto existen dos tiempos en  $t_B$  y  $t_D$  donde  $t_B < t_D$ :

Pero b) lo podemos calcular directamente, para posteriormente calcular los tiempos  $t_B$  y  $t_D$

a)..y..b)

$$V_y^2 = V_{oy}^2 - 2g(y_f - y_o)$$

como.. $y_0 = 0m$ .,,despejando.. $y_f = H$

$$H = y_f = \frac{V_y^2 - V_{oy}^2}{-2g} + y_o$$

$$H = \frac{(6m/s)^2 - (20m/s)^2}{-2(9.81m/s^2)} + 0m$$

$$H = 18.55m.$$

$$y = y_0 + V_{oy}(t_f - t_o) - g \frac{1}{2}(t_f - t_o)^2$$

considerando..arranque.y..termino

$$y_0 = 0m \rightarrow t_o = 0s$$

$$y = 18.55m \rightarrow t = ?$$

$$y = V_{oy}(t_f) - \frac{g}{2}(t_f)^2$$

$$18.55 = 20(t) - \frac{g}{2}(t)^2$$

$$\frac{g}{2}t^2 - 20t + 18.55 = 0$$

$$4.905t^2 - 20t + 18.55 = 0$$

**Resolviendo la ecuación cuadrática, obtenemos los tiempos cuando la pelota se encuentra en punto B con una velocidad  $V=6m/s$  de subida y en el punto D cuanto se encuentra de bajada con una velocidad de  $V=-6m/s$ ; en estos dos puntos la altura es de  $H=18.55m$  con respecto al piso.**

$$4.905t^2 - 20t + 18.55 = 0$$

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$t_1 = t_B = 1.426s...Cuando..sube \uparrow$$

$$t_2 = t_D = 2.65s...Cuando..baja \downarrow$$

$$t_B < t_D$$

### Resolución c) y d)

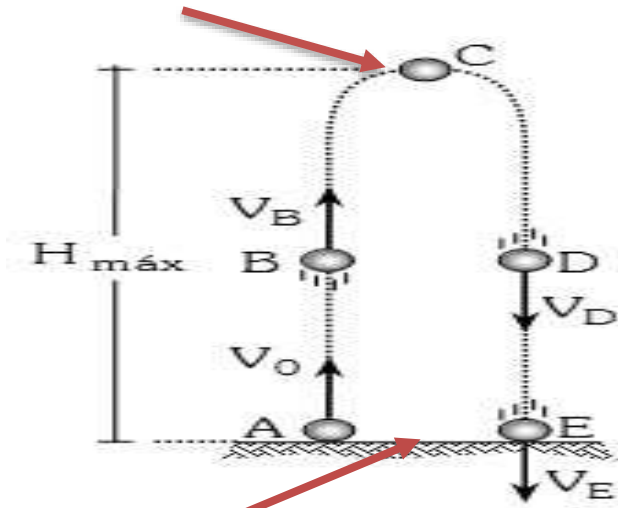
Para c) y d), debemos considerar toda la trayectoria de la piedra, desde que parte de piso y llega a piso, de tal forma que al llegar al punto C, es la cúspide y en este punto tenemos que

$V_{y_{\max}} = 0 \text{ m/s} \dots t_{\max} = ? \dots H_{\max} = y_c = ?$  por lo tanto, las condiciones de arranque no cambian

### Condiciones de termino

pero si las condiciones finales que son condiciones en la cúspide ó Condiciones de termino

$V_C = 0 \text{ m/s} \dots t_{\max} = ? \dots H_{\max} = y_{\max} = ?$



Condiciones de inicio  $V_0 = 20 \text{ m/s} \dots t_0 = 0 \text{ s} \dots y_0 = 0 \text{ m}$

c) y d)

$$V_y^2 = V_{oy}^2 - 2g(y_f - y_o)$$

como  $y_0 = 0 \text{ m}$  y despejando  $y_f = H_{\max}$

$$H_{\max} = y_{\max} = \frac{V_C^2 - V_{oy}^2}{-2g} + y_o$$

$$H_{\max} = y_{\max} = \frac{(0 \text{ m/s})^2 - (20 \text{ m/s})^2}{-2(9.81 \text{ m/s}^2)} + (0 \text{ m})$$

$$H_{\max} = y_{\max} = 20.3873 \text{ m}$$

$$y = y_0 + V_{oy}(t_f - t_o) - g \frac{1}{2}(t - t_0)^2$$

considerando arranque y termino

$$y_0 = 0 \text{ m} \rightarrow t_0 = 0 \text{ s}$$

$$y_{\max} = 20.38 \text{ m} \rightarrow t_{\max} = ?$$

$$y = +V_{oy}(t_{\max}) - \frac{g}{2}(t_{\max})^2$$

$$20.38 = 20(t_{\max}) - \frac{g}{2}(t_{\max})^2$$

$$\frac{g}{2}t^2 - 20t + 20.3873 = 0$$

$$4.905t^2 - 20t + 20.3873 = 0$$

*Resolviendo la ecuación cuadrática solamente tenemos un solo tiempo que es  $T_c=2.035s$  que es el tiempo en que la pelota alcanza la cúspide con una altura  $H_{max}=20.3873m$*

$$4.905t^2 - 20t + 20.3873 = 0$$

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

$$t = t_c = 2.035s..es..un..único..tiempo$$

***Este tiempo se encuentra entre  $t_B$  y  $t_D$***       $t_B < t_c < t_D$

**Ejercicio 2** Mayoral 26 (*Ejercicios con globos o cohetes en ascenso que es el mismo principio*)

Un hombre parado en el techo de un edificio tira una pelota verticalmente hacia arriba, con una velocidad de 40 ft/s. la bola llega 4.25s. más tarde al piso. (*considerar que los 4.25 s son desde que se lanzó hasta que cae en el suelo*). Calcular:

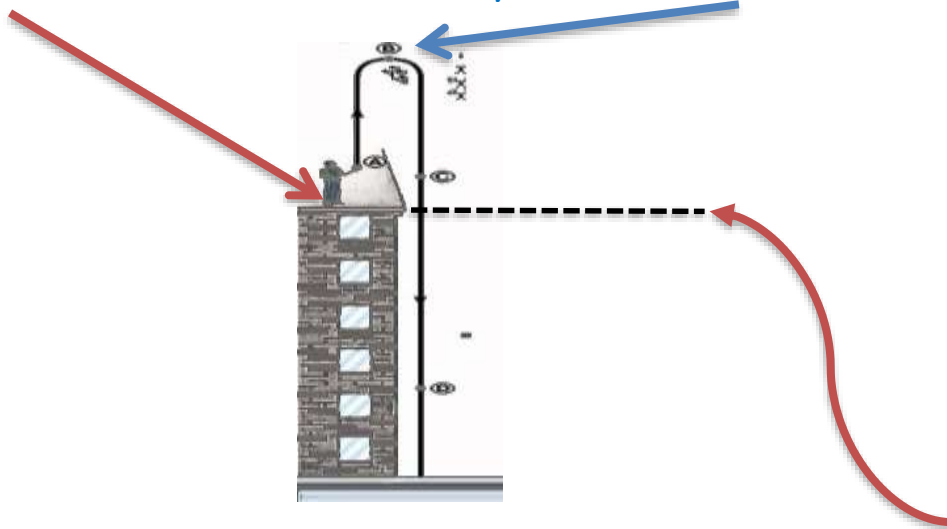
- a) La máxima altura que alcanza medido desde el **techo del edificio** y el tiempo en alcanzar la altura máxima.
- b) Qué altura tiene el edificio
- c) Con qué velocidad chocará en el piso

**Condiciones de arranque o inicio**

$$V_{0y} = 40 \text{ ft/s} \dots t_0 = 0 \text{ s} \dots y_0 = 0 \text{ ft}$$

**Condiciones de término o finales**

$$V_{\text{max}} = 0 \text{ ft/s} \dots t_{\text{max}} = ? \dots y_{\text{max}} = H = ?$$



Si consideramos que las condiciones de arranque es desde el techo del edificio (**Referencia**), entonces  $V_0 = 40 \text{ ft/s} \dots t_0 = 0 \text{ s} \dots y_0 = 0 \text{ ft} \dots g = 32.2 \text{ ft/s}^2$  si las condiciones de término corresponden a la cúspide o el punto más alto de la trayectoria, entonces tenemos que:

$$V_{\text{max}} = 0 \text{ ft/s} \dots t_{\text{max}} = ? \dots y_{\text{max}} = ?$$

a)

$$V_y^2 = V_{oy}^2 - 2g(y_f - y_o)$$

como..  $y_0 = 0 \text{ ft}$ ..  $y_f$ .. despejando..  $y_f$

$$V_{\max} = 0 \text{ ft/s} \dots Y_{\max} = H = ?$$

$$H = y_{\max} = \frac{V_{\max}^2 - V_{oy}^2}{-2g} + y_o$$

$$H = y_{\max} = \frac{(0 \text{ ft/s})^2 - (40 \text{ ft/s})^2}{-2(32.2 \text{ ft/s}^2)} + (0 \text{ ft})$$

$$H = y_{\max} = 24.85 \text{ ft.}$$

Esta..es..la..altura..medido..desde..el..techo..

al..punto..máximo..de..la..trayectoria –

*Cálculo..tiempo..de*

*subida*

$$V_y = V_{oy} - g(t_f - t_o)$$

$$V_{\max} = V_{oy} - g(t_{\max} - t_o)$$

$$0 \text{ ft/s} = 40 \text{ ft/s} - 32.2 \text{ ft/s}^2 (t_{\max} - 0 \text{ s})$$

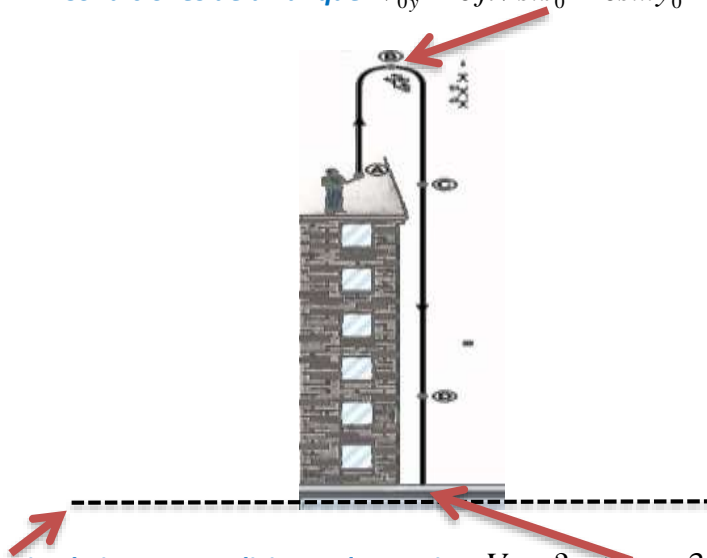
*Despejando*

$$32.2 \text{ ft/s}^2 (t_{\max}) = 40 \text{ ft/s}$$

$$t_{\max} = \frac{(40 \text{ ft/s})}{(32.2 \text{ ft/s}^2)} \Rightarrow t_{\max} = t_s = 1.242 \text{ s}$$

Para el inciso b), podemos cambiar el sistema **de referencia**, que es lo que nos permite conocer condiciones de arranque y de termino con respecto al piso que será nuestro nuevo nivel de referencia, por lo tanto tenemos que:

**Condiciones de arranque**  $V_{oy} = 0 \text{ ft/s} \dots t_0 = 0 \text{ s} \dots y_0 = 24.85 \text{ ft} + Y_{\text{Edificio}}$



**Nivel de Referencia el piso**

**Condiciones de termino**  $V_y = ? \text{ s} \dots t_{\text{caída}} = 3.008 \approx 3 \text{ s} \dots y_{\text{final}} = 0 \text{ ft}$

El tiempo total de toda la trayectoria desde que se lanzó hasta que cae en el suelo es de 4.25s y el tiempo en que alcanza la cúspide o el punto más alto desde que fue lanzado es de 1.242 s, por lo tanto el tiempo de caída es:

$$t_{\text{caída}} = t_{\text{trayectoria}} - t_{\text{subida}}$$

$$t_{\text{caída}} = 4.25 \text{ s} - 1.242 \text{ s}$$

$$t_{\text{caída}} = 3.008 \text{ s} \approx 3 \text{ s} \Rightarrow t_{\text{caída}} = 3 \text{ s}$$



**Cálculo del  $V_{\text{Impacto}}$  se tiene que**

*Cálculo.Velocidad..impacto*

$$V_y = V_{0y} - g(t_f - t_0)$$

$$V_{\text{Im pacto}} = 0 \text{ ft/s} - 32.2 \text{ ft/s}^2(t_{\text{caída}} - 0 \text{ s})$$

$$V_{\text{Im pacto}} = -32.2 \text{ ft/s}^2(3 \text{ s} - 0 \text{ s})$$

$$V_{\text{Im pacto}} = -96.6 \text{ ft/s}$$

*La..velocidad.es.negativa.porque.*

*va..vayanda*

**Calculo de la Altura del Edificio  $Y_{\text{Edificio}}$**

$$V_y^2 = V_{0y}^2 - 2g(y_f - y_o)$$

$$V_y^2 = 0 \text{ ft/s} - 2g(0 \text{ ft} - y_o)$$

$$V_y^2 = -2g(-y_o) \Rightarrow$$

$$V_y^2 = 2gy_o$$

$$V_y^2 = 2g(Y_{\text{Edificio}} + 24.87 \text{ ft})$$

$$(-96.6 \text{ ft/s})^2 = 2\left(32.2 \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}\right)(y_{\text{Edif}} + 24.8 \text{ ft})$$

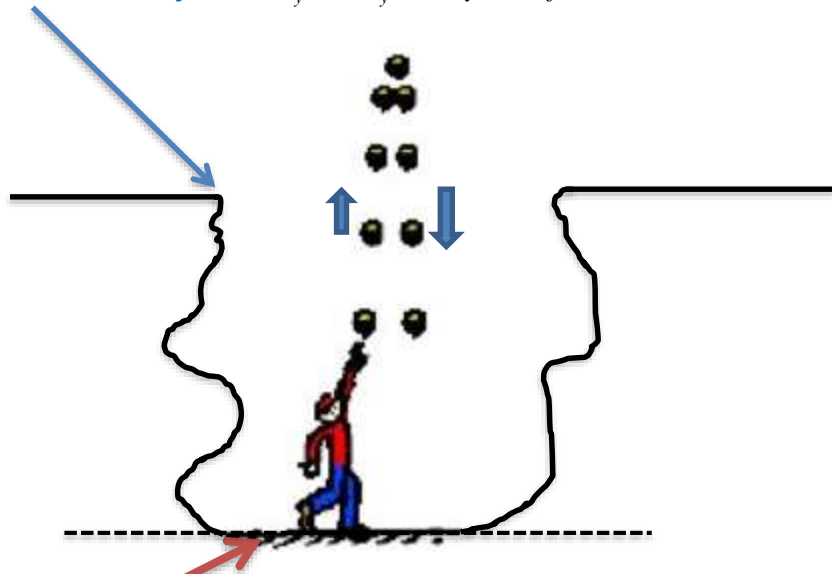
$$\text{Despejando....} y_{\text{Edif}} = 120.0 \text{ ft}$$

### Ejercicio 3 Mayoral 25

Una persona se encuentra en el fondo de un pozo de 88 ft de profundidad con respecto al piso; lanza una piedra desde este punto con una velocidad de 240 ft/s. Calcular: **(No considerar la altura de la persona y la piedra es lanzada prácticamente desde el fondo del Pozo)**

- Velocidad y el tiempo que tarda la piedra en alcanzar el borde del pozo.
- El tiempo que tarda la piedra en alcanzar la altura máxima
- El valor de la altura máxima

**Nivel o borde del pozo condiciones finales**  $V_y = ?..t_y = ?...y = 88 \text{ ft}$



**Piso del pozo como referencia o condiciones iniciales**  $V_0 = 240 \text{ ft/s}..t_0 = 0 \text{ s}...y_0 = 0 \text{ ft}$

### *Cálculo de velocidad a nivel pozo*

**Se van a tener dos velocidades de cruce; la primera cuando sube y la segunda cuando baja la roca.**

a)

$$V_y^2 = V_{oy}^2 - 2g(y_f - y_o)$$

$$V_y^2 = (240 \text{ ft/s})^2 - 2(32.2 \text{ ft/s}^2)(88 \text{ ft} - 0 \text{ ft})$$

$$V_y^2 = 519328 \frac{\text{ft}^2}{\text{s}^2}$$

$$V_y = \pm \sqrt{519328 \text{ ft}^2 / \text{s}^2}$$

$$V_{y1} = 227.88 \text{ ft/s (sube)} \uparrow$$

$$V_{y2} = -227.88 \text{ ft/s (baja)} \downarrow$$

*Cruza el nivel del pozo dos veces*

### *Cálculo de los dos tiempos cuando piedra cruza el nivel del pozo*

*Cálculo Velocidad cruce*

$$V_y = V_{oy} - g(t_f - t_o)$$

*Despejando  $t_f$*

$$(t_f - t_o) = \frac{V_y - V_{oy}}{-g}$$

*como  $t_o = 0 \text{ s}$*

*cuando sube el cuerpo  $V_y = 227.88 \text{ ft/s}$*

$$t_{subida} = \frac{227.88 \text{ ft/s} - 240 \text{ ft/s}}{-32.2 \text{ ft/s}^2}$$

$$t_{subida} = 0.376 \text{ s}$$

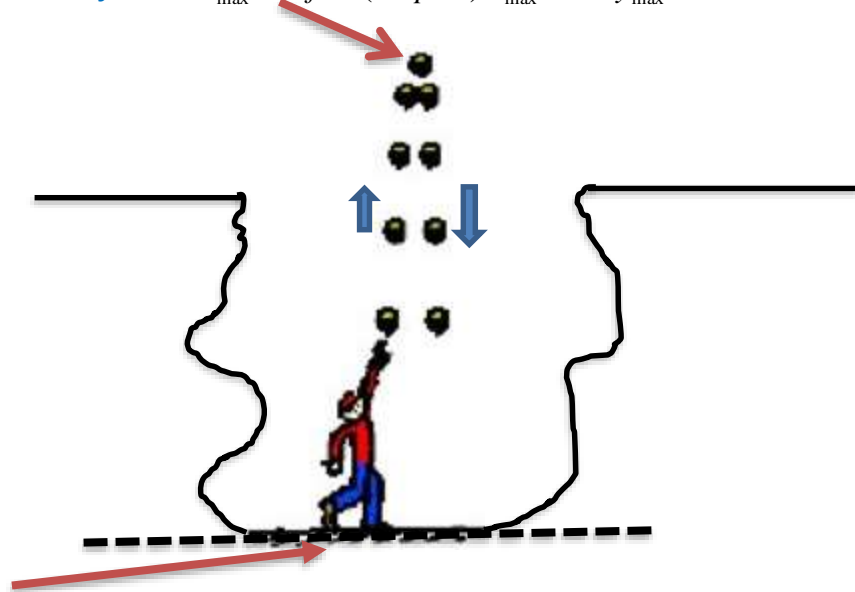
*cuando va de bajada  $V_y = -227.88 \text{ ft/s}$*

$$t_{bajada} = \frac{-227.88 \text{ ft/s} - 240 \text{ ft/s}}{-32.2 \text{ ft/s}^2}$$

$$t_{bajada} = 14.53 \text{ s}$$

b) Cuando llega al punto más alto las condiciones finales cambian , es decir, el inicio es el mismo el piso del pozo, pero en el punto máximo o altura máxima, la velocidad es cero, por lo tanto realizando estas consideraciones, tenemos que:

**Nivel del pozo condiciones finales**  $V_{\max} = 0 \text{ ft/s (cuspide)} \cdot t_{\max} = ? \dots y_{\max} = ?$



**Piso del pozo como referencia o condiciones iniciales**  $V_{0y} = 240 \text{ ft/s} \cdot t_0 = 0 \text{ s} \dots y_0 = 0 \text{ ft}$

b)

$$V_y^2 = V_{oy}^2 - 2g(y_f - y_o)$$

como  $V_{\max} = 0 \text{ ft/s} \dots y_{\max}$

y también  $y_0 = 0 \text{ ft}$

$$H = y_{\max} = \frac{V_{\max}^2 - V_{oy}^2}{-2g} + y_o$$

$$H = y_{\max} = \frac{(0 \text{ ft/s})^2 - (240 \text{ ft/s})^2}{-2(32.2 \text{ ft/s}^2)} + (0 \text{ ft})$$

$$H = y_{\max} = 894.40 \text{ ft.}$$

Esta es la altura medida desde el fondo del pozo hasta el punto máximo o cuspide

c)

Cálculo tiempo de altura max  $Y_{\max} = H$

$$V_{\max} = V_{oy} - g(t_{\max} - t_0)$$

$$0 \text{ ft/s} = 240 \text{ ft/s} - 32.2 \text{ ft/s}^2(t_{\max} - 0 \text{ s})$$

Despejando

$$32.2 \text{ ft/s}^2(t_{\max}) = 240 \text{ ft/s}$$

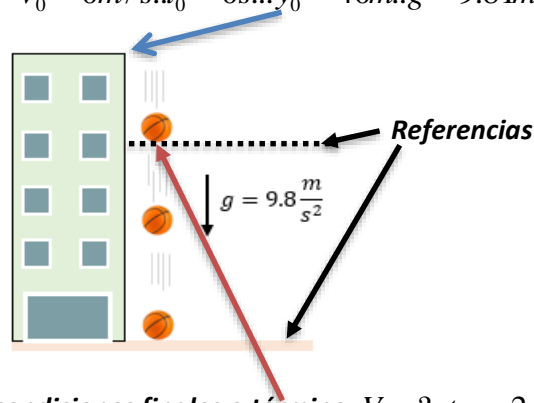
$$t_{\max} = \frac{(240 \text{ ft/s})}{(32.2 \text{ ft/s}^2)} \Rightarrow t_{\max} = 7.453 \text{ s}$$

#### Ejercicio 4 6-8 tippens

Una pelota de hule se deja caer del reposo desde una altura de 40m como se muestra en la figura. Encontrar:

- La velocidad a los 2 segundos
- La velocidad con que impacta en el suelo y el tiempo que tarda en caer.

Condiciones iniciales o de arranque  $V_0 = 0\text{ m/s} \dots t_0 = 0\text{ s} \dots y_0 = 40\text{ m} \dots g = 9.81\text{ m/s}^2$



Referencia a las condiciones de 2s condiciones finales o término  $V = ? \dots t_{2s} = 2\text{ s} \dots y = ?$

Calculando la velocidad a los 2s

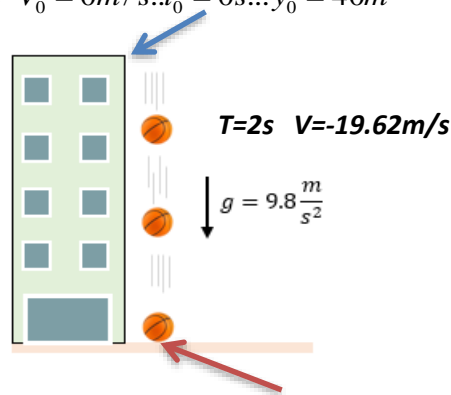
$$-g = \frac{V_y - V_{oy}}{t_f - t_0} \Rightarrow V_y = V_{oy} - g(t_f - t_0)$$

$$V_y = 0\text{ m/s} - 9.81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (2\text{ s} - 0\text{ s})$$

$$V_y = -19.62\text{ m/s} \dots \text{va bajando} \downarrow$$

Calculando posición con respecto al piso y condiciones de arranque en punto indicado

Condiciones iniciales o de arranque  $V_0 = 0\text{ m/s} \dots t_0 = 0\text{ s} \dots y_0 = 40\text{ m}$



Referencia el piso Condiciones finales o termino  $V = ? \dots t = ? \dots y = 0\text{ m}$

**b) Primero calculamos tiempo de caída**

$$y = y_0 + V_{0y}(t_f - t_0) - g \frac{1}{2}(t - t_0)^2$$

$$0m = 40m + (0m/s)(t_f - 0m/s) - \frac{9.81m/s^2}{2}(t_f - 0m/s)^2$$

$$0 = 40m - 4.905(t_f)^2$$

$$4.905(t_f)^2 = 40m$$

$$t_f^2 = \frac{40m}{4.905m/s^2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{40m}{4.905m/s^2}}$$

$$t_f = 2.855s$$

**Posteriormente calculamos la velocidad de impacto en el suelo**

$$-g = \frac{V_y - V_{0y}}{t_f - t_0} \Rightarrow V_y = V_{0y} - g(t_f - t_0)$$

$$V_y = 0m/s - 9.81 \frac{m}{s^2}(2.855s - 0s)$$

$$V_y = -28.014m/s..va.bajando \downarrow$$

**Realizar los siguientes ejercicios y comprobar que las respuestas propuestas son correctas.**

**Ejercicio 5** Tippens pp147 **Para entregar como Actividad 4 3er Parcial**

**6.24.-Un proyectil se lanza verticalmente hacia arriba y regresa a su posición original en 5s. Considerar al piso como nivel de referencia.**

**a) ¿Cuál es el tiempo de subida y de bajada? Respuesta:**  $t_{subida} = 2.5s..t_{bajada} = 2.5s$

**b) ¿Cuál es su velocidad inicial? Respuesta:**  $V_0 = 24.52m/s$

**c) ¿Cuál es la altura máxima? Respuesta:**  $Y = 30.66m$

**6.25.-Una flecha se dispara verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 80 ft/s.**

**a) Calcular altura máxima Respuesta**  $Y=99.38ft$

**b) El tiempo para llegar a la altura máxima Respuesta:**  $t=2.4844s$

**c) Velocidad a la mitad de la altura máxima Respuesta:**  $56.567ft/s$

### Ejercicio 6

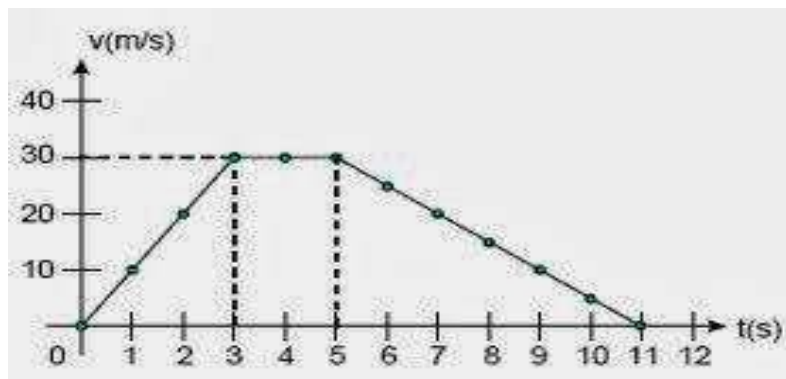
6.27.- Un martillo es arrojado verticalmente hacia arriba en dirección a un techo de 16m de altura. ¿Qué velocidad inicial se requiere para llegar a ese punto?. **Respuesta: 17.7m/s.**

¿Cuál es el tiempo que tarda en subir al techo? **Respuesta:  $t=1.806s$**

### Ejercicio para entregar MRUA

**Problema 7** (subir a Classroom como actividad 4 3er parcial para punto extra)

Obtener distancia total de la siguiente gráfica y la aceleración para cada tramo



### Respuestas

Área total bajo la curva  $= X_{total} = 195m$

(tiempo de 0 a 3)  $a_1 = 10m/s^2$  MRUA  $a(+)$

(tiempo de 3 a 5)  $a_2 = 0m/s^2$  MRU

(tiempo de 5 a 11)  $a_3 = -5m/s^2$  MRUA  $a(-)$

**Problema 8** Mayoral pp 24 del manual de trabajo

Para este ejercicio obtener distancias, velocidades y aceleración para cada tramo y al final comprobar distancia con método gráfico.