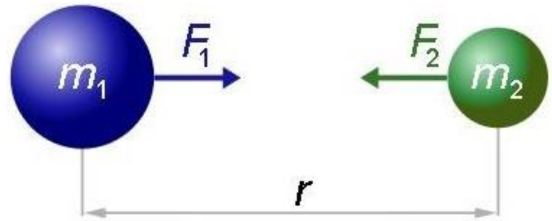
2° Parcial Gravitación

Ley de Gravitación Universal



$$F_1 = F_2 = G\frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

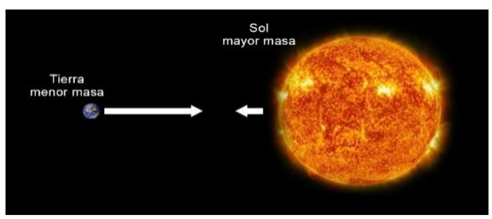
Variables

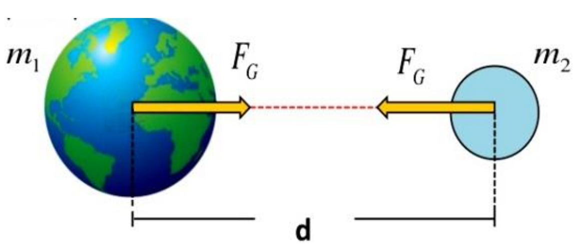
m_1 y m_2 = Masas de los cuerpos (kg)

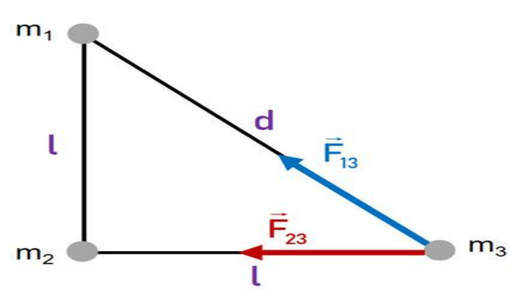
r = Distancia de separación (m)

G = Constante de Gravitación Universal $6.67 \times 10^{-11}\ Nm^2/kg^2$

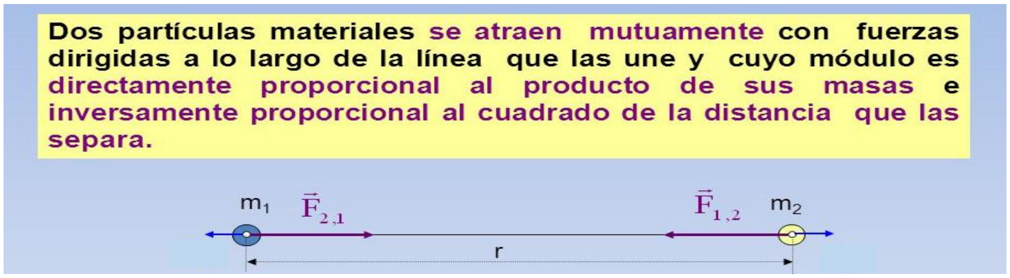
Algunos ejemplos





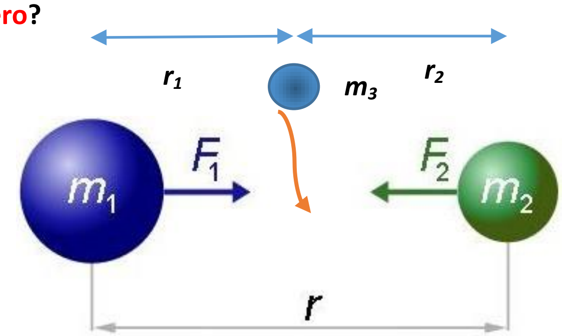


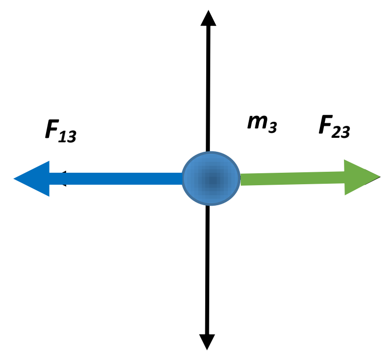
Enunciado de la ley de Gravitación Universal



Ejercicio 1 **2 del Resnick**

Dos masas una de m_1=500kg y la otra de m_2=200kg se encuentran separadas por una distancia de r=0.4m ¿En qué posición entre ellas, debe colocarse una tercera masa m_3 para que la fuerza total sobre ella sea de cero?





$$r = r_2 + r_1 ---1$$

1..con..3

$$F_{13} = G\frac{m_1 m_3}{r_1^2} --2$$

2..con..3

$$F_{23} = G\frac{m_2 m_3}{r_2^2} --3$$

$$F_{13} = F_{23}$$

$$G\frac{m_1 m_3}{r_1^2} = G\frac{m_2 m_3}{r_2^2}$$

$$\frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{r_2^2}$$

$$\frac{m_1}{r_1^2} = \frac{m_2}{(r-r_1)^2}$$

$$\frac{(r-r_1)^2}{r_1^2} = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\left(\frac{r-r_1}{r_1}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1}$$

$$\left(\frac{r-r_1}{r_1}\right) = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

$$0.4 - r_1 = r_1\sqrt{\frac{200}{500}}$$

$$0.4 - r_1 = 0.6324 r_1$$

$$0.4 = 1.6324 r_1$$

$$r_1 = \frac{0.4}{1.6324}$$

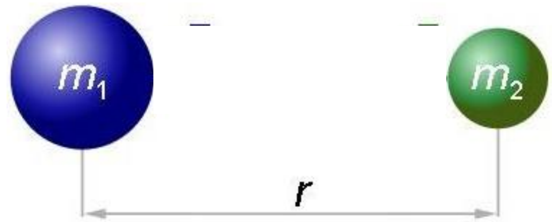
$$r_1 = 0.2450m$$

$$r_2 = r - r_1 = 0.4m - 0.2450m \Longrightarrow r_2 = 0.1550m$$

$$r = r_2 + r_1 = 0.1550m + 0.2450m = 0.4m$$

Ejercicio 2 **8 del Resnick**

Dos objetos se atraen uno a otro con una fuerza de 1x10^{-8} N cuando se encentran separados 20 cm. Si la masa total de los dos objetos es de 5kg. ¿Cuál es la masa de cada uno de ellos?



$$m_1 + m_2 = 5kg ---1$$

$$1..con..2$$

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$\frac{Fr^2}{G} = m_1 m_2$$

$$m_1 m_2 = \frac{(1x10^{-8}N)(0.2m)^2}{6.67x10^{-11}Nm^2/kg^2}$$

$$m_1 m_2 = 5.997 ---2$$

$$1..con..2$$

$$m_2 = 5 - m_1 ---1$$

$$m_1 m_2 = 5.997 ---2$$

$$m_1(5 - m_1) = 5.997$$

$$5m_1 - m_1^2 = 5.997$$

$$m_1^2 - 5m_1 + 5.997 = 0 ---3$$

Resolviendo la ecuación 3, tenemos que

$$m_1^2 - 5m_1 + 5.997 = 0 ---3$$

$$m_1 = 3 \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow m_2 = 2$$

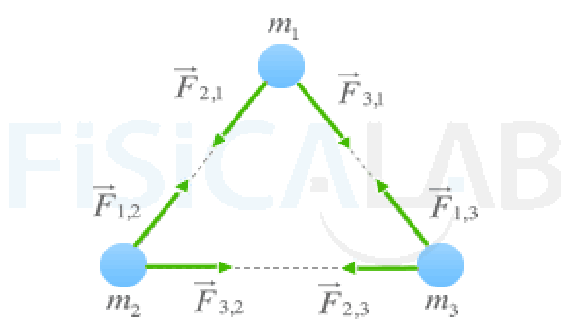
$$m_1 = 2 \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow m_2 = 3$$

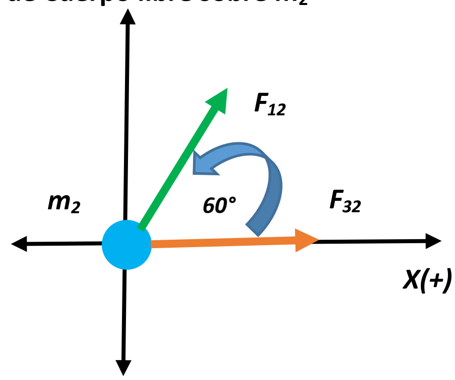
Por lo tanto existen dos posibles soluciones viables

Ejercicio 3 **3 del Resnick**

En las esquinas de un triángulo equilátero con lados de longitud igual a 0.25m, se colocan tres masas de 5Kg c/u; determinar la magnitud y dirección de la fuerza resultante de dos de las masas sobre la otra.

Diagrama de Cuerpo libre sobre m_2





Cálculo de magnitud de F_{12} y de F_{32}

$$F_{12} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$
$$F_{12} = \left(6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(5kg)(5kg)}{(0.25m)^2}$$
$$F_{12} = 2.668x10^{-8}N$$

$$F_{12} = F_{32}$$
$$F_{32} = G\frac{m_1 m_3}{r^2}$$
$$F_{32} = \left(6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(5kg)(5kg)}{(0.25m)^2}$$
$$F_{32} = 2.668x10^{-8}N$$

Suma de componentes de F_{12} y de F_{32}

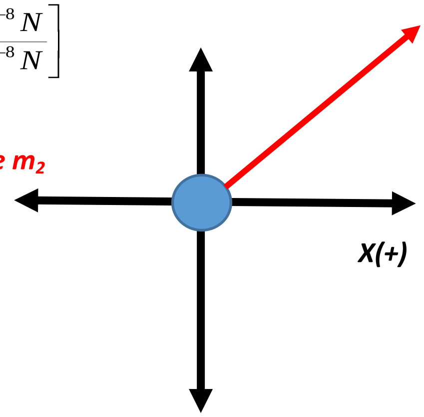
Fuerza	*Ángulo*	$F_X = \lvert F\rvert\cos\theta$	$F_Y = \lvert F\rvert sen\,\theta$
$F_{12} = 2.668x10^{-8}N$	$60°$	$F_{12X} = 1.334x10^{-8}N$	$F_{12Y} = 2.310x10^{-8}N$
$F_{32} = 2.668x10^{-8}N$	$0°$	$F_{32X} = 2.668x10^{-8}N$	$F_{32X} = 0N$
		$\Sigma F_X = 4.002x10^{-8}N$	$\Sigma F_Y = 2.310x10^{-8}N$

$$F_R = \sqrt{(\Sigma F_X)^2 + (\Sigma F_Y)^2}$$
$$F_R = \sqrt{(4.002x10^{-8}N)^2 + (2.310x10^{-8}N)^2}$$
$$F_R = 4.620x10^{-8}N$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{\Sigma F_Y}{\Sigma F_X}\right]$$
$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{2.310x10^{-8}N}{4.002x10^{-8}N}\right]$$
$$\theta = 30°$$

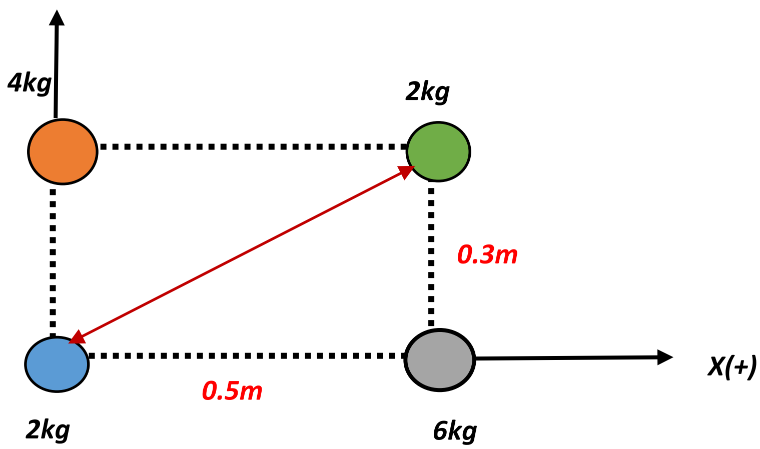
Fr=4.620x10^{-8} N con 30°

Queda en el primer cuadrante Fuerza Gravitacional Resultante sobre m_2



Ejercicio 4 ***Ejercicio de evaluación Parcial para sección A***

Se colocan 4 masas en las esquinas de un rectángulo. Determinar la magnitud y dirección de la fuerza resultante sobre la masa de 2 kg (color azul) que se encuentra en el origen. (considerar como un sistema aislado)

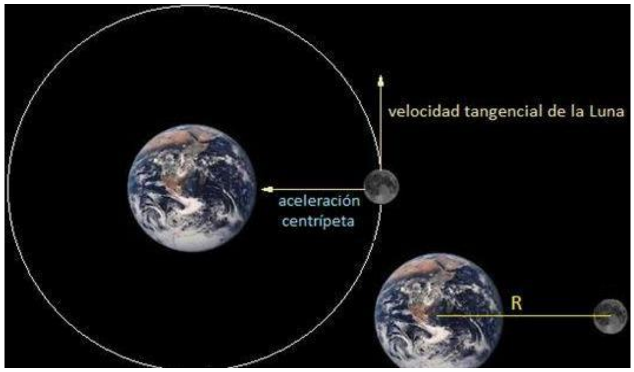


Respuestas Fr=7.4203x10⁻⁹ N y con 58.6° en 1er cuadrante

Fuerza Gravitacional y Movimiento Circular

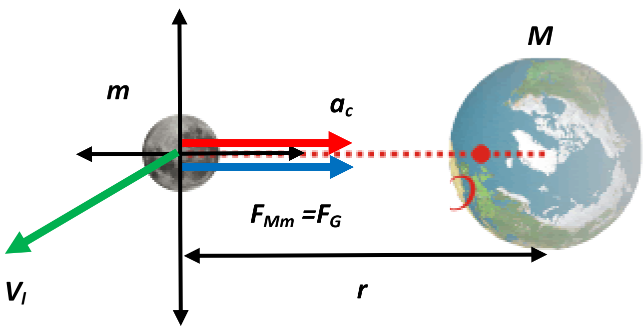
Ejercicio 5 Problema 13 del Resnick

Dado que el periodo de la luna alrededor de la tierra es de 27.32 días y que la distancia de la tierra a la luna es de $3.84x10^8$ m, estime la masa de la tierra. Suponga que la órbita es circular.



Solución

Si consideramos que la luna está girando en una órbita circular en torno a la tierra y como un sistema aislado. Tenemos que el diagrama de cuerpo libre para la luna es:



$$F_{Mm} = G\frac{Mm}{r^2} ---1$$

$$Fc = ma_c$$

$$Fc = m\frac{V^2}{r} ---2$$

$$Fc = F_{Mm}$$

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{V^2}{r}$$

$$G\frac{M}{r} = V^2 ---3$$

$$M = \frac{rV^2}{G} ---3$$

Analizando el Movimiento Circular Uniforme M.C.U.

$$V = \omega r$$

$$V = \left[\frac{2\pi}{T}\right]r$$

$$V = \frac{2\pi r}{T} ---4$$

$$4..en..3$$

$$M = \frac{r}{G}\left[\frac{2\pi r}{T}\right]^2$$

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} ---5$$

$$M = \frac{4\pi^2 (3.84x10^8 m)^3}{(6.67x10^{-11} Nm^2/kg^2)(2.3604x10^6 s)^2}$$

$$M = 6.0153x10^{24} kg$$

Ejercicio 6 ***Problema 15 del Resnick***

Io, una pequeña luna del planeta Júpiter, tiene un periodo orbital de 1.77 días y un radio orbital de 4.22x10^5 km. A partir de estos datos, determinar la masa de Júpiter.

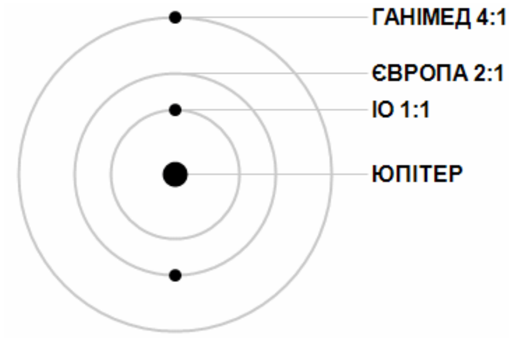
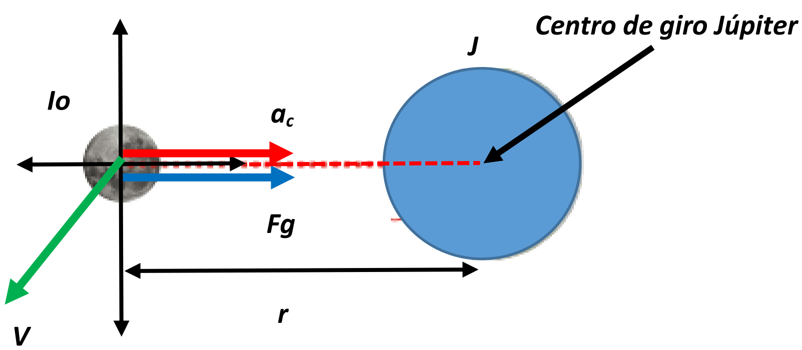


Diagrama de cuerpo libre para Io, considerando los efectos de las demás lunas o satélites despreciables

Solución

Si consideramos que la luna está girando en una órbita circular en torno a Júpiter y también como un sistema aislado. Tenemos que el diagrama de cuerpo libre para la Io es:



Realizando el mismo procedimiento que el ejercicio anterior, tenemos que:

Analizando el Movimiento Circular Uniforme M.C.U. para Io.

$$V = \omega r$$

$$V = \left[\frac{2\pi}{T}\right] r$$

$$V = \frac{2\pi r}{T} ---4$$

$$4..en..3$$

$$M = \frac{r}{G}\left[\frac{2\pi r}{T}\right]^2$$

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2} ---5$$

$$M = \frac{4\pi^2 (4.22x10^8 m)^3}{(6.67x10^{-11} Nm^2/kg^2)(152928.5s)^2}$$

$$M = 1.9019x10^{27} kg$$

Ejercicio 7 **Problema 40 del Resnick**

Un sistema de dos estrellas idénticas de $3.22x10^{30}$ kg de masa, giran en torno a su centro de masa en común, situado a una distancia de $1.12x10^{11}$ m. Calcular el periodo (T) de revolución común en años para las estrellas.

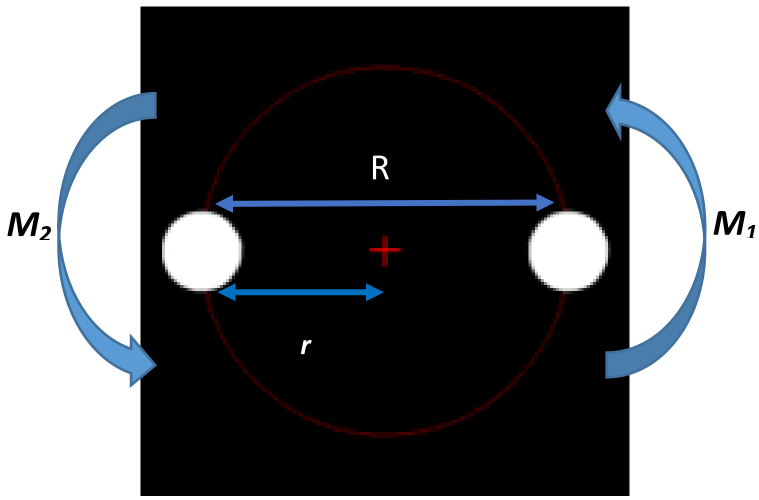
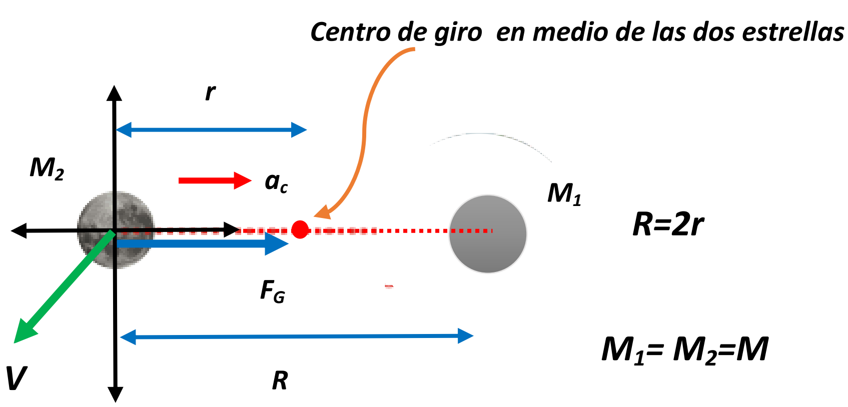


Diagrama de Cuerpo libre para M_2

Solución



Realizando el mismo procedimiento que el ejercicio anterior, tenemos que:

$$F_G = G\frac{M_1 M_2}{(R)^2}$$

$$F_G = G\frac{M^2}{(2r)^2}$$

$$F_G = G\frac{M^2}{4r^2} --1$$

$$Fc = ma_c$$

$$Fc = M_2 a_c$$

$$Fc = M\frac{V^2}{r}$$

$$F_C = \frac{M}{r}[\omega r]^2$$

$$Fc = \frac{M}{r}\left[\frac{2\pi r}{T}\right]^2$$

$$Fc = \frac{M}{r}\left[\frac{2\pi r}{T}\right]^2$$

$$Fc = \frac{M\,4\pi^2 r^2}{rT^2}$$

$$Fc = \frac{4\pi^2 Mr}{T^2} --2$$

Igualando 1 con 2 ya que Fc=F$_G$

$$G\frac{M^2}{4r^2}=\frac{4\pi^2 Mr}{T^2}---3$$

$$T^2=\frac{16\pi^2 Mr^3}{GM^2}$$

$$T^2=\frac{16\pi^2 r^3}{GM}---3$$

$$T^2=\frac{16\pi^2 r^3}{GM}$$

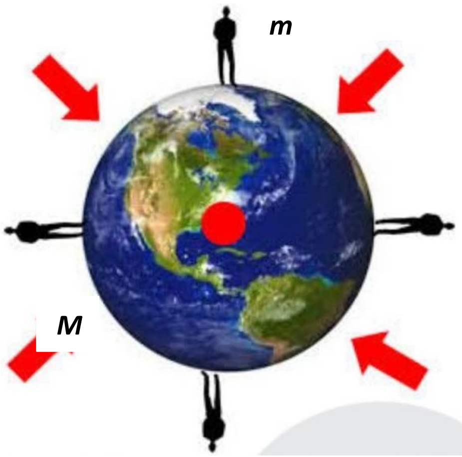
$$T=\sqrt{\frac{16\pi^2\left(1.12x10^{11}m\right)^3}{\left(6.67x10^{-11}Nm^2/kg^2\right)\left(3.22x10^{30}kg\right)}}$$

$$T=32.14008794\,x10^6\,s$$

$$T=1.019155\,años..terrestres$$

Ejercicio 8 **Cálculo de g a partir del concepto de Fuerza gravitacional**

Una persona de Masa m se encuentra sobre la superficie terrestre; encontrar una expresión matemática que permita calcular la aceleración gravitacional de la tierra "g", considerando que la masa terrestre es de aproximadamente $6x10^{24}$kg y el diámetro de la tierra es de D=12700km.



R=Radio de la tierra =6350km=6350000m

r=Radio de la persona

Como R>>r entonces tenemos que

R es el radio de referencia entre la persona (m) y la Tierra (M)

Peso de la persona ***Fuerza gravitacional (sistema aislado)***

$$w = F_G$$

$$igualando.ecuaciones$$

$$mg = G\frac{Mm}{(R)^2}$$

$$w = mg --1 \qquad F_G = G\frac{Mm}{(R)^2} ---2$$

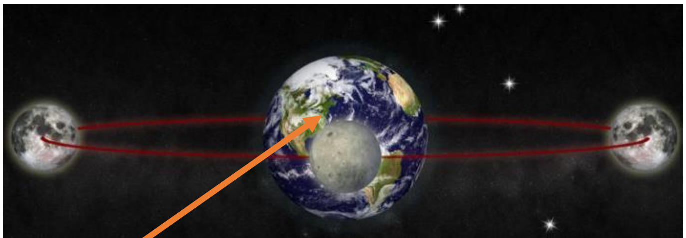
$$g = G\frac{M}{R^2} ---3$$

$$g = \frac{(6.67x10^{-11} Nm^2/kg^2)(6x10^{24} kg)}{(6350x10^3 m)^2}$$

$$g = 9.925\frac{m}{s^2} \approx 9.81 m/s^2$$

Cálculo de la velocidad tangencial o lineal de un cuerpo celeste

Encontrar una expresión matemática que permita calcular la velocidad tangencial o lineal de la luna en torno a la tierra



Centro de giro la tierra

Fuerza gravitacional entre tierra y la luna

$$F_G = G\frac{M_{Tierra}m_{Luna}}{R^2} ----1$$

Fuerza centrípeta para la luna

$$F_C = \frac{m_{Luna}V_{Luna}^2}{R} ----2$$

Considerando que la $F_G = F_C$ ***, tenemos que :***

$$G\frac{M_{Tierra}m_{Luna}}{R^2} = \frac{m_{Luna}V_{Luna}^2}{R}$$

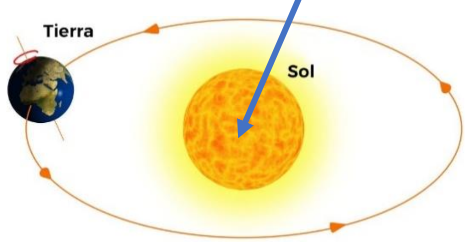
$$V_{Luna}^2 = \frac{GM_{Tierra}}{R}$$

$$V_{Luna} = \sqrt{\frac{GM_{Tierra}}{R}}$$

$$R = Separación..entre..la..tierra..y..la..luna$$

Si extrapolamos para cualquier cuerpo celeste, por ejemplo, si queremos saber la velocidad de la tierra en torno al sol:

Centro de giro el sol



$$V_{Tierra} = \sqrt{\frac{GM_{Sol}}{R}}$$

$$R = Separación..entre..la..tierra..y..el..sol$$

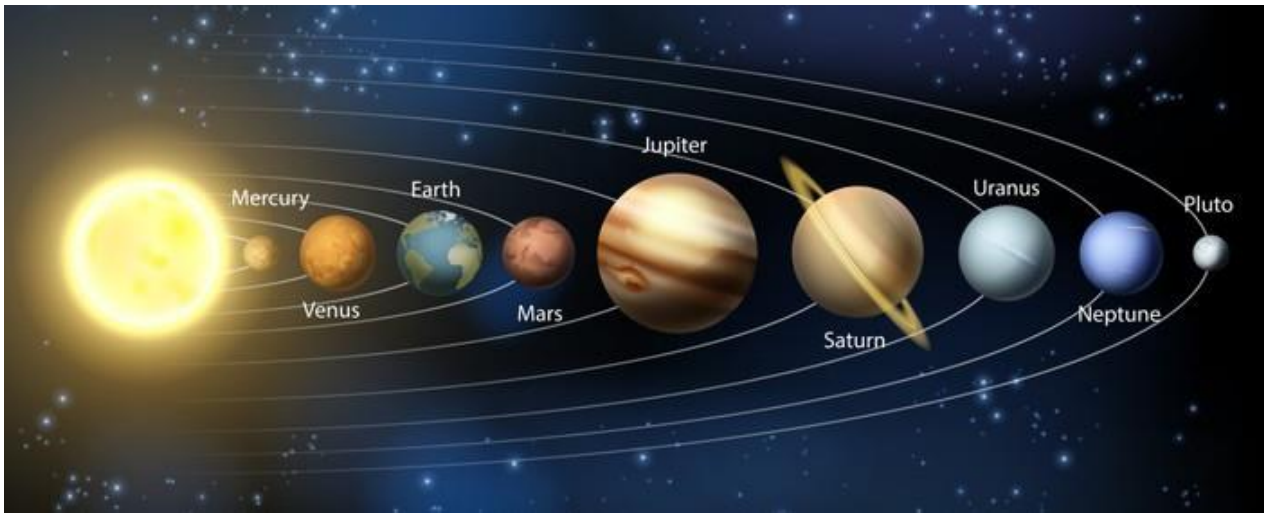
Ejercicio 9 ***Problema de Internet***

El radio del Sol es de 696 000 km y su masa vale $1.99 \cdot 10^{30}$ kg.

a) Halla el valor de la gravedad en la superficie solar. (1 punto)

b) Si el radio de la órbita de Neptuno alrededor del Sol es 30 veces mayor que el de la órbita terrestre, ¿cuál es el periodo orbital de Neptuno, en años? (1 punto)

Considerar M_{sol}=2x10^{30} kg y Radio Orbital de la Tierra= 150x10^{9} m



Solución

$a)$

$$g = G\frac{M_{Sol}}{(R_{Sol})^2}$$

$$g = 6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{Kg^2}\left(\frac{1.99x10^{30}Kg}{\left(696x10^6 m\right)^2}\right)$$

$$g = 274 m/s^2$$

$b)$

$$V_{Neptuno} = \sqrt{\frac{GM_{Sol}}{R_{Neptuno}}}$$

$$V_{Neptuno} = \sqrt{\frac{6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\left(2x10^{30}kg\right)}{30\left(150x10^9 m\right)}}$$

$$V_{Neptuno} = 5444 m/s$$

$b)$

$$V_{Neptuno} = \omega \bullet R_{Neptuno}$$

$$V_{Neptuno} = \left[\frac{2\pi}{T_{Neptuno}}\right] R_{Neptuno}$$

$$T_{Neptuno} = \left[\frac{2\pi R_{Neptuno}}{V_{Neptuno}}\right]$$

$$T_{Neptuno} = \left[\frac{2\pi 30\left(150x10^{9}m\right)}{5444m/s}\right]$$

$$T_{Neptuno} = 5.19368x10^{9}años$$

$b)..En..años$

$$T_{Neptuno} = 5.19368x10^{9}años\left(\frac{1hr}{3600s}\right)\left(\frac{1día}{24hr}\right)\left(\frac{1año}{365días}\right)$$

$$T_{Neptuno} = 164.69años \approx 165años$$

Resumen de Movimiento de Cuerpos celestes

Si un cuerpo celeste de masa "m", gira en torno a otro cuerpo de masa "M" y de radio de separación "r" entre ambos.

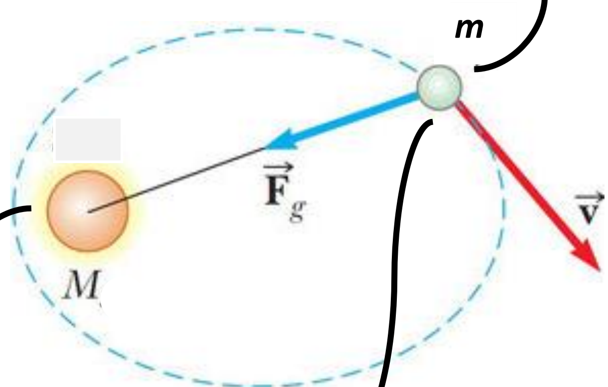
$$g_{Planeta} = g_{Local}$$

$$g_p = G\frac{m}{R^2}$$

$$m = Masa..del..planeta..[Kg]$$

$$R = Radio..del..planeta..m..[m]$$

$$G = 6.67x10^{-11}\left[\frac{Nm^2}{Kg^2}\right]$$



$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{GT^2}$$

$$M = Masa..de..cuerpo..celeste..[kg]$$

$$r = Separación..entre..M..y..m..[m]$$

$$T = Periodo..o..tiempo..orbital..de..m..[s]$$

$$G = 6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{Kg^2}$$

$$V_m = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

$$V_m = Velocidad..de..m..[m/s]$$

$$r = Separación..entre..M..y..m..[m]$$

$$M = Masa..del..Cuerpo..central..M..[Kg]$$

$$G = 6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{Kg^2}$$

Ejercicio 10 Ejemplo 7.8 Wilson Buffa

Suponga que dos masas m_1=2.5 kg y m_2=3.5 kg, están conectadas por cordeles ligeros y están en movimiento circular uniforme sobre una superficie horizontal sin fricción, como se ilustra en a figura donde r_1=1m y r_2=1.3m. Las fuerzas que actúan sobre las masas son T_1=4.5N y T_2=2.9 N, las tensiones en los cordeles, respectivamente. Calcular:

- ***a)*** ***La magnitud de la aceleración***
- ***b)*** ***La rapidez tangencial de c/u de las masas***

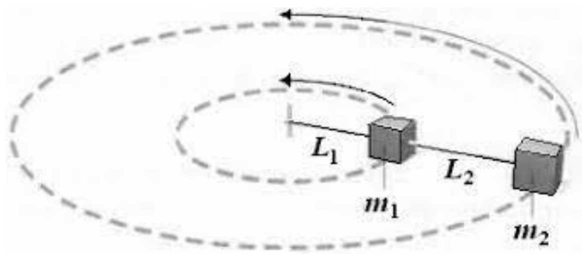
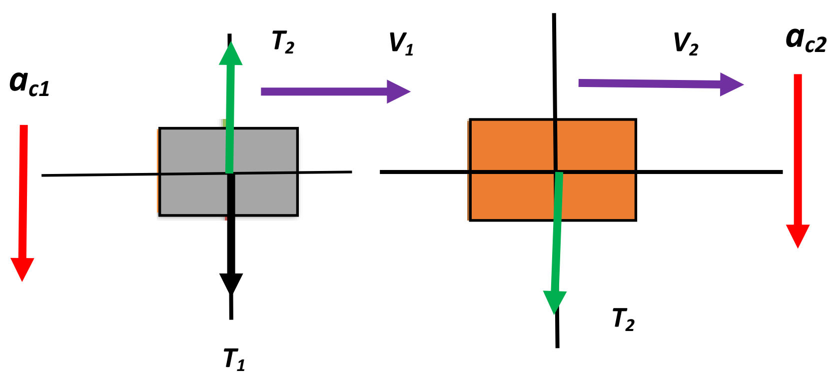


Diagrama de cuerpo libre para m_1 y m_2



Para masa m_1

$$\Sigma F_y = ma_c$$
$$T_2 - T_1 = -m_1 a_{c1}$$
$$a_{c1} = \frac{T_2 - T_1}{-m_1}$$
$$a_{c1} = \frac{2.9N - 4.5N}{-2.5kg}$$
$$a_{c1} = 0.64 m/s^2$$

$$a_{c1} = \frac{V_1^2}{R_1}$$
$$V_1^2 = (a_{C1})(R_1)$$
$$V_1 = \sqrt{\left(0.64\frac{m}{s^2}\right)(1m)}$$
$$V_1 = 0.8\frac{m}{s}$$

Para masa m_2

$$\Sigma F_y = ma_c$$
$$-T_2 = -m_1 a_{c1}$$
$$a_{c2} = \frac{-T_2}{-m_2}$$
$$a_{c2} = \frac{-2.9N}{-3.5kg}$$
$$a_{c2} = 0.828 m/s^2$$

$$a_{c2} = \frac{V_2^2}{R_2}$$
$$V_2^2 = (a_{C2})(R_{21})$$
$$V_1 = \sqrt{\left(0.828\frac{m}{s^2}\right)(1.3m)}$$
$$V_1 = 1.037\frac{m}{s}$$

Ejercicio 11 Resnick ejercicio 9

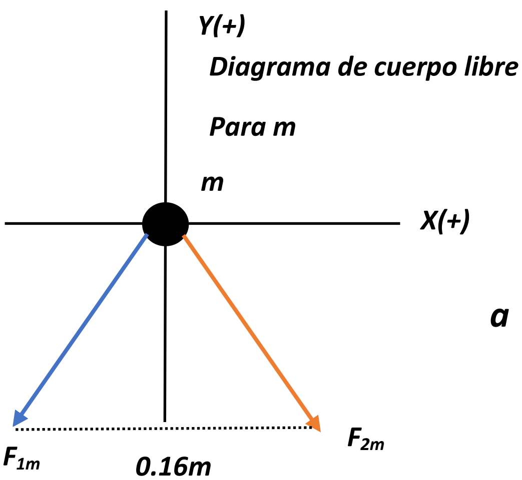
Una estrella de neutrones típica puede tener una masa igual a la del Sol, pero de un radio de 10km únicamente. ¿Cuál es la aceleración gravitacional en la superficie de esta estrella? Considerar que la masa del sol es de $1.98x10^{30}$ kg.

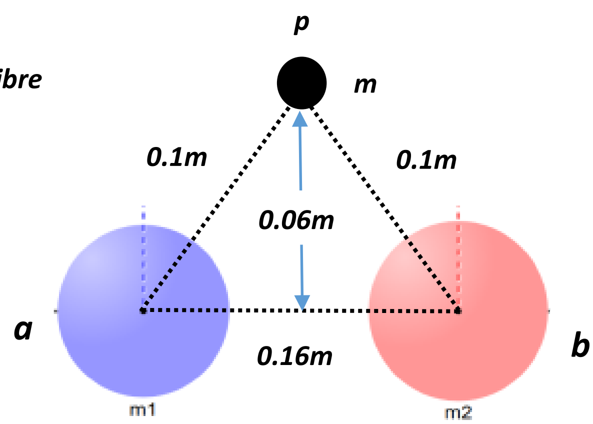
Respuesta:** $g_{Estrella\ de\ Neutrones}$ **=$1.3206x10^{12}$ m/s^2

Ejercicio 12   Sears Semansky 12.13

Dos esferas uniformes m_1 y m_2 poseen una masa de 0.260 kg c/u; están fijas en los puntos a y b. Calcule la magnitud y dirección de la fuerza gravitacional y la aceleración inicial de una esfera uniforme de masa m=0.010 kg que se suelta desde el reposo en el punto p; suponiendo que es un sistema aislado y que solo actúan sobre "m" las fuerzas gravitacionales de las otras dos esferas m_1 y m_2.   Respuestas F_G =$2.08x10^{-11}$ N   a=$2.08x10^{-9}$ m/s^2

Sears 12.13





Ejercicio 13 ***Internet***

Calcular Magnitud, dirección y sentido de la fuerza gravitacional sobre la masa de 2 kg; reporta en sentido antihorario de las manecillas del reloj.

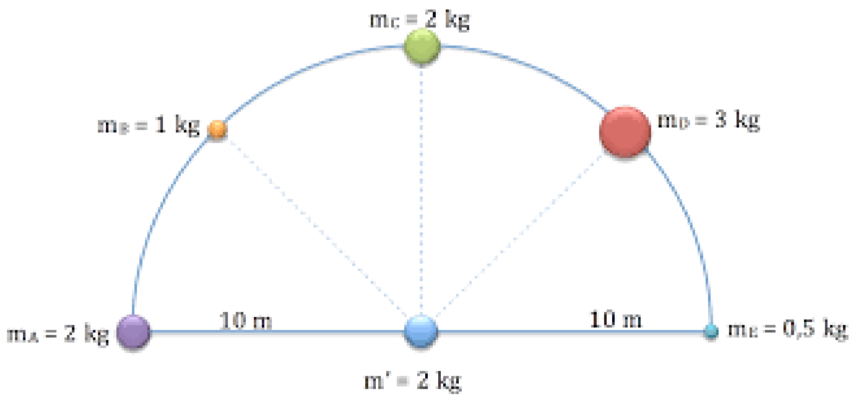
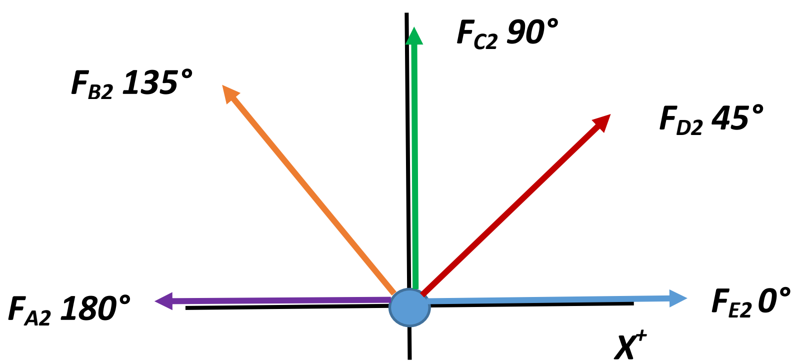


Diagrama de Cuerpo libre para m=2kg



Cálculo de las magnitudes de las Fuerzas ejercidas sobre la m=2Kg.

$$F_{E2} = 6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\left[\frac{(2kg)(0.5kg)}{(10m)^2}\right] = 6.67x10^{-13}N = 0.667x10^{-12}N$$

$$F_{D2} = 6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\left[\frac{(2kg)(3kg)}{(10m)^2}\right] = 4.0x10^{-12}N$$

$$F_{C2} = 6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\left[\frac{(2kg)(2kg)}{(10m)^2}\right] = 2.668x10^{-12}N$$

$$F_{B2} = 6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\left[\frac{(2kg)(1kg)}{(10m)^2}\right] = 1.334x10^{-12}N$$

$$F_{A2} = 6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\left[\frac{(2kg)(2kg)}{(10m)^2}\right] = 2.668x10^{-12}N$$

Cálculo de las componentes de las fuerzas gravitacionales

Fuerza	***Sentido antihorario***	F_X	F_Y
$F_{E2} = 0.667x10^{-12} N$	$\theta = 0°$	$0.667x10^{-12} N$	**0**
$F_{D2} = 4.0x10^{-12} N$	$\theta = 45°$	$2.8284x10^{-12} N$	$2.8284x10^{-12} N$
$F_{C2} = 2.668x10^{-12} N$	$\theta = 90°$	**0**	$2.668x10^{-12} N$
$F_{B2} = 1.33x10^{-12} N$	$\theta = 135°$	$-0.9404x10^{-12} N$	$0.9404x10^{-12} N$
$F_{A2} = 2.668x10^{-12} N$	$\theta = 180°$	$-2.668x10^{-12} N$	**0**
		$\sum F_X = -0.113x10^{-12} N$	$\sum F_Y = 6.4368x10^{-12} N$

Vector fuerza resultante expresado en componentes unitarios

$$F_G = 1.768x10^{-12} Ni + 6.4368x10^{-12} Nj$$

Cálculo de la magnitud y sentido

$$F = \sqrt{\left(\sum F_X\right)^2 + \left(\sum F_Y\right)^2}$$

$$|F_G| = \sqrt{\left(-0.113x10^{-12} N\right)^2 + \left(6.4368x10^{-12} N\right)^2}$$

$$|F_G| = \sqrt{41.4451x10^{-24} N^2}$$

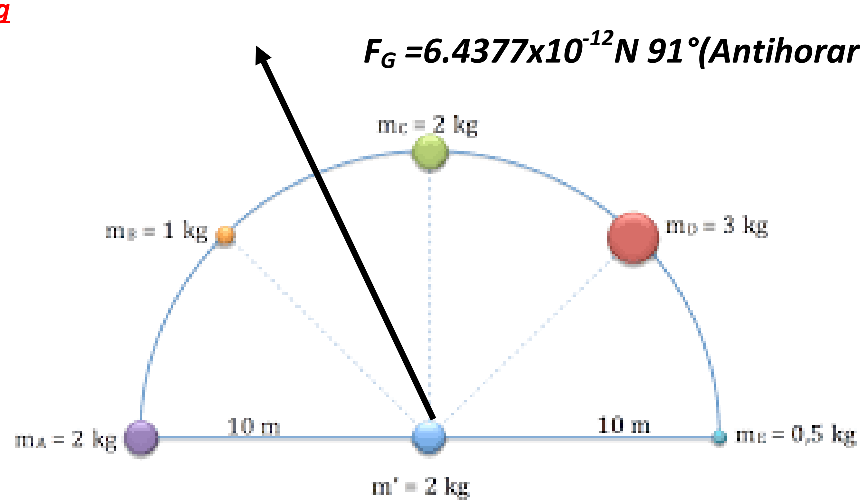
$$|F_G| = 6.4377x10^{-12} N$$

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{6.4368x10^{-12} N}{-0.113x10^{-12} N}\right)$$

$$\theta = -89°(2°..cuadrante)$$

$$\theta_{X(+)} = 91°$$

La fuerza resultante sustituye a las 5 iniciales y esta fuerza es la que se ejerce en su totalidad sobre m=2 kg



Ejercicio 14 Resnick 6ª edición capítulo 14 ejercicio 9P

Calcular la fuerza neta sobre la masa central m_5 =250 Kg considerar que:

$m_1 = 200kg, m_2 = 500kg, m_3 = 300kg, m_4 = 600kg$

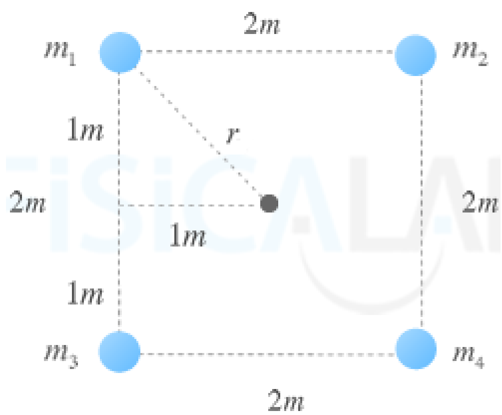
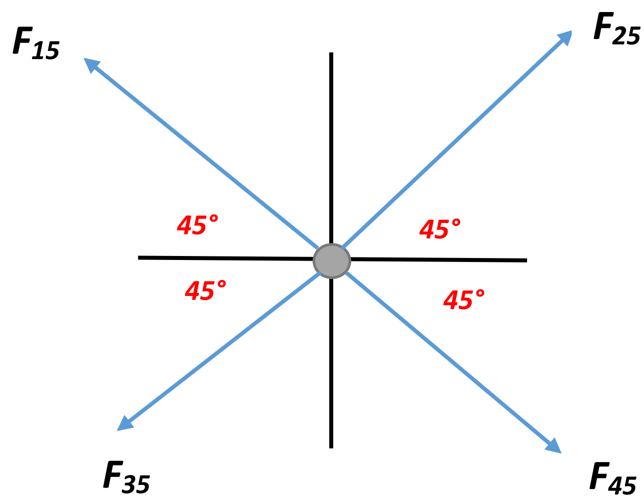


Diagrama de cuerpo libre para m_5



Calculo de r

$$r = \sqrt{(1m)^2 + (1m)^2}$$
$$r = \sqrt{2}m$$

Cálculo de las magnitudes de las fuerzas

$$F_{25} = G\frac{m_5 m_2}{r^2}$$
$$F_{25} = \left(6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(250kg)(500kg)}{(\sqrt{2}m)^2}$$
$$F_{25} = 4.168x10^{-6}N$$

$$F_{15} = G\frac{m_1 m_5}{r^2}$$
$$F_{15} = \left(6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(250kg)(200kg)}{(\sqrt{2}m)^2}$$
$$F_{15} = 1.667x10^{-6}N$$

$$F_{35} = G\frac{m_3 m_5}{r^2}$$
$$F_{35} = \left(6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(250kg)(300kg)}{(\sqrt{2}m)^2}$$
$$F_{35} = 2.501x10^{-6}N$$

$$F_{45} = G\frac{m_4 m_5}{r^2}$$
$$F_{45} = \left(6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(250kg)(600kg)}{(\sqrt{2}m)^2}$$
$$F_{45} = 5.002x10^{-6}N$$

Cálculo de la fuerza Resultante a partir de componentes de cada fuerza

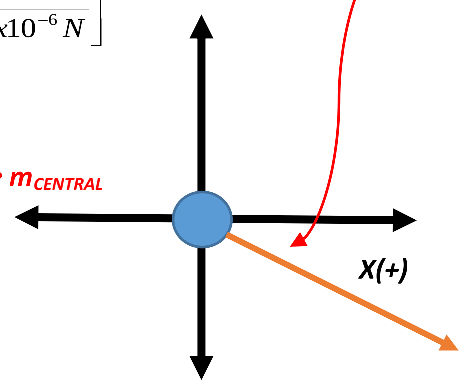
Suma de componentes de F_{12} y de F_{32}

Fuerza	*Angulo en sentido antihorario*	$F_X = \lvert F \rvert \cos\theta$	$F_Y = \lvert F \rvert sen\,\theta$
$F_{25} = 4.168x10^{-6}\,N$	45°	$F_{25X} = 2.9472x10^{-6}\,N$	$F_{25Y} = 2.9472x10^{-6}\,N$
$F_{15} = 1.667x10^{-6}\,N$	135°	$F_{15X} = -1.178x10^{-6}\,N$	$F_{15Y} = 1.178x10^{-6}\,N$
$F_{35} = 2.501x10^{-6}\,N$	225°	$F_{35X} = -1.768x10^{-6}\,N$	$F_{35Y} = -1.768x10^{-6}\,N$
$F_{45} = 5.002x10^{-6}\,N$	315°	$F_{45X} = 3.536x10^{-6}\,N$	$F_{45Y} = -3.536x10^{-6}\,N$
		$\Sigma F_X = 3.5372x10^{-6}\,N$	$\Sigma F_Y = -1.1788x10^{-6}\,N$
		Cae resultante en 4°	***cuadrante***

$$F_R = \sqrt{(\Sigma F_X)^2 + (\Sigma F_Y)^2}$$
$$F_R = \sqrt{(3.5372x10^{-6}\,N)^2 + (-1.1788x10^{-6}\,N)^2}$$
$$F_R = 3.72845x10^{-6}\,N$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{\Sigma F_Y}{\Sigma F_X}\right]$$
$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{1.178x10^{-6}\,N}{3.537x10^{-6}\,N}\right]$$
$$\theta = 18.42°$$

Fr=3.728x10^{-6} N con 288.42°



Queda en el cuarto cuadrante Fuerza Gravitacional Resultante sobre m$_{CENTRAL}$

Ejercicio 15 Resnick 6ª edición capítulo 14 ejercicio 9P

Calcular la fuerza gravitacional sobre la masa m_4, considerando que el sistema es aislado.
(Ejercicio para entregar)

Considerar que $m_1 = 200kg, m_2 = 500kg, m_3 = 300kg, m_4 = 600kg$

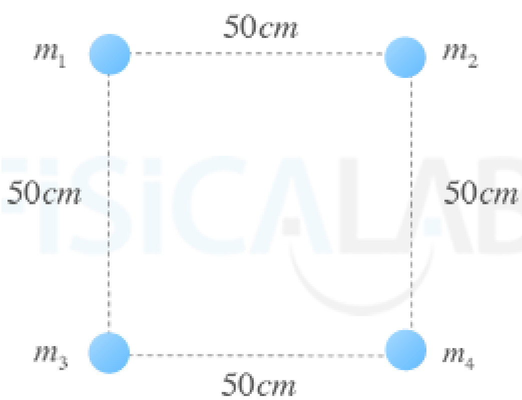
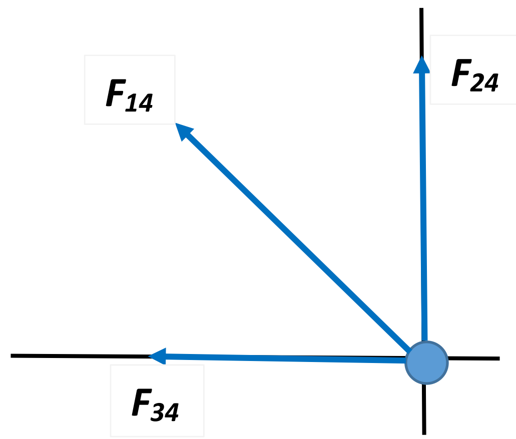


Diagrama de cuerpo libre sobre m_4



Cálculo de la magnitud de las fuerzas

$$F_{24} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$F_{24} = \left(6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(600kg)(500kg)}{(0.5m)^2}$$

$$F_2 = 8.004x10^{-5}N$$

$$Cálculo..de..r..para..F_{14}$$

$$r = \sqrt{(0.5m)^2 + (0.5m)^2}$$

$$r = 0.7071m$$

$$F_{34} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$F_{34} = \left(6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(600kg)(300kg)}{(0.5m)^2}$$

$$F_{34} = 4.802x10^{-5}N$$

$$F_{14} = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$

$$F_{14} = \left(6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{(600kg)(200kg)}{(0.7071m)^2}$$

$$F_{14} = 1.334x10^{-5}N$$

Cálculo de la fuerza Resultante a partir de componentes de cada fuerza

Suma de componentes de F_{12} y de F_{32}

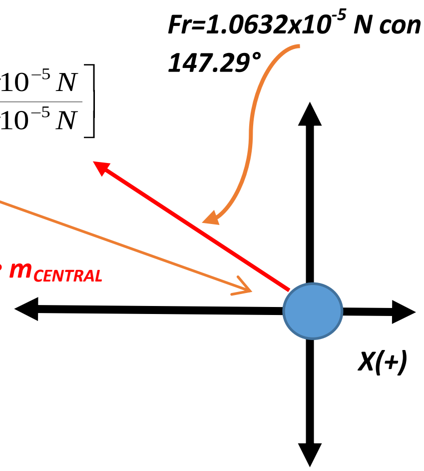
Fuerza	***Angulo en sentido antihorario***	$F_X = \|F\|\cos\theta$	$F_Y = \|F\| sen\theta$
$F_{24} = 8.004x10^{-5}N$	90°	$F_{24X} = 0N$	$F_{24Y} = 8.004x10^{-5}N$
$F_{14} = 1.334x10^{-5}N$	135°	$F_{14X} = -0.9432x10^{-5}N$	$F_{14Y} = 0.9432x10^{-5}N$
$F_{34} = 4.802x10^{-5}N$	180°	$F_{34X} = -4.802x10^{-5}N$	$F_{34Y} = 0N$
		$\Sigma F_X = -5.745x10^{-5}N$	$\Sigma F_Y = 8.9472x10^{-5}N$
		Cae resultante en 2°	***cuadrante***

Cálculo de la magnitud y dirección

$$F_R = \sqrt{(\Sigma F_X)^2 + (\Sigma F_Y)^2}$$
$$F_R = \sqrt{\left(-5.745x10^{-5}\,N\right)^2 + \left(8.9472x10^{-5}\,N\right)^2}$$
$$F_R = 1.0632x10^{-4}\,N$$

$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{\Sigma F_Y}{\Sigma F_X}\right]$$
$$\theta = \tan^{-1}\left[\frac{8.947x10^{-5}\,N}{5.745x10^{-5}\,N}\right]$$
$$\theta = 57.29°$$

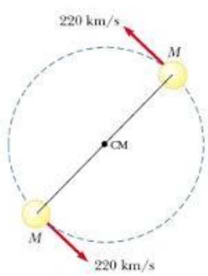
Queda en el cuarto cuadrante Fuerza Gravitacional Resultante sobre $m_{CENTRAL}$

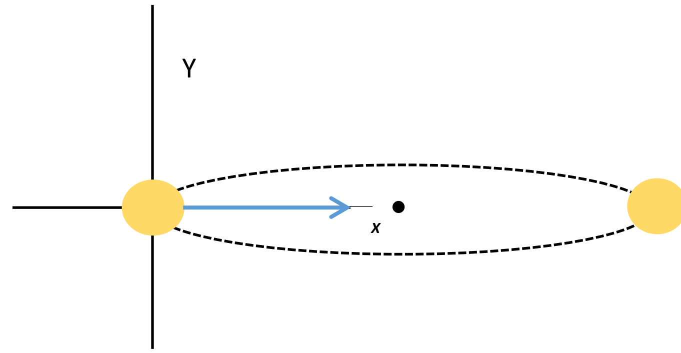


Ejercicio 16 ***Serway 11***

El sistema binario de Plaskett consta de dos estrellas que giran con órbitas circulares alrededor del centro de gravedad, que se encuentra en medio de ellas. Esto significa que las masas de las dos estrellas son iguales. Si la velocidad de cada estrella es de 220km/s y el periodo orbital de cada una es de 14.4 días, encuentre la masa de cada estrella.

Diagrama de cuerpo libre para una M





Análisis para M desde M.C.U.

$$Fc = ma_c$$
$$Fc = M\ a_c$$
$$Fc = M\frac{v^2}{r}$$
$$F_C = \frac{M}{r}[\omega r]^2$$
$$Fc = \frac{M}{r}\left[\frac{2\pi r}{T}\right]^2$$
$$Fc = \frac{M}{r}\left[\frac{4\pi^2 r^2}{T^2}\right]$$
$$Fc = \frac{4\pi^2 Mr}{T^2} ---1$$

Análisis desde fuerza Gravitacional

$$F_G = G\frac{m_1 m_2}{r^2}$$
$$F_G = G\frac{MM}{(2r)^2}$$
$$F_G = G\frac{M^2}{4r^2} ---2$$
$$Igualando..1..con..2$$
$$\frac{4\pi^2 Mr}{T^2} = G\frac{M^2}{4r^2}$$
$$M = \frac{16\pi^2 r^3}{GT^2} ---3$$

Cálculo de M a partir de T y r

$$T = 14días\left(\frac{24hrs}{1día}\right)\left(\frac{3600s}{1hr}\right) = 1.21x10^{6}s$$

$$v = 220\frac{km}{s}\left(\frac{1000m}{1km}\right) = 2.2x10^{5}\frac{m}{s}$$

$$v = \omega r \Rightarrow\Rightarrow r = \frac{v}{\omega} = \frac{v}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)}$$

$$r = \frac{vT}{2\pi} = \left(\frac{2.2x10^{5}m/s}{2\pi}\right)\left(1.21x10^{6}s\right)$$

$$r = 4.2366x10^{10}m$$

Cálculo de M

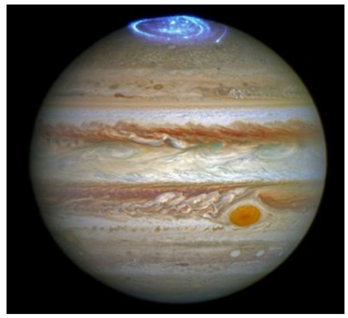
$$M = \frac{16\pi^{2}r^{3}}{GT^{2}} --- 3$$

$$M = \frac{16\pi^{2}\left(4.23x10^{10}m\right)^{3}}{6.67x10^{-11}\frac{Nm^{2}}{kg^{2}}\left(1.21x10^{6}s\right)^{2}}$$

$$M = 1.223x10^{32}kg$$

Ejercicio 17 ***Serway 9***

Júpiter tiene una densidad promedio de 1.34x10³ kg/m³ y un diámetro promedio de 1.436x10⁶ km. ¿Cuál es la aceleración debida a la gravedad en la superficie?.



Utilizando la ecuación deducida en el ejercicio 8 para el cálculo de g local, tenemos que:

$$g = G\frac{M}{R^2}$$
$$g = aceleración..de..Júpiter$$
$$M = masa..de..Júpiter$$
$$R = Radio..de..Júpiter$$

Considerando a Júpiter como una esfera y partiendo del concepto de densidad, tenemos que:

$$\rho = densidad = \frac{Masa}{Volúmen}$$
$$\rho = \frac{M}{V} \Rightarrow\Rightarrow M = \rho V ---1$$
$$como$$
$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 ---2$$
$$2..en..1$$
$$M = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)---3$$

$$M = \rho\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)---3$$
$$M = \left(1.34x10^3\frac{kg}{m^3}\right)\left(\frac{4}{3}\pi\left(0.718x10^8 m\right)^3\right)$$
$$M = 2.0776x10^{27}kg$$
$$masa..de..Júpiter$$

Calculando "g" local de Júpiter

$$g = G\frac{M}{R^2}$$
$$g = \left(6.67x10^{-11}\frac{Nm^2}{kg^2}\right)\frac{\left(2.0776x10^{27}kg\right)}{\left(0.718x10^8 m\right)^2}$$
$$g_{júpiter} = 26.88 m/s^2$$

Ejercicio 17 Resnick 3 Ejercicio de examen

A que distancia de la tierra debe colocarse un satélite espacial, a lo largo de la línea recta dirigida hacia el sol, de modo que la atracción gravitatoria del sol, equilibre el de la tierra.

$M_{sol}=1.99x10^{30}$ kg $M_{tierra}=5.98x10^{24}$ kg y $R=150x10^{9}$ m (Distancia entre el sol y la tierra)

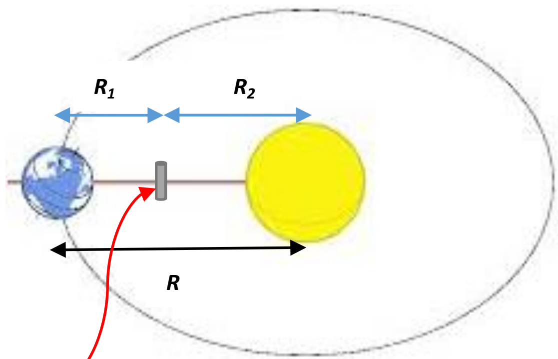
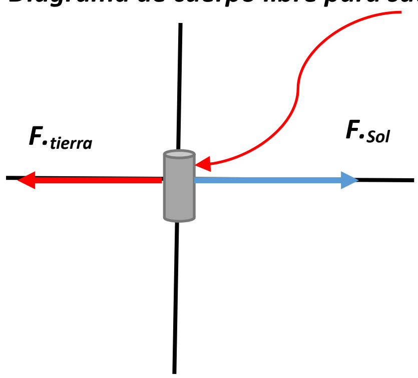


Diagrama de cuerpo libre para satélite



Igualar ecuaciones

$$F_{Tierra} = F_{sol}$$
$$G\frac{M_{Tierra}M_{Satelite}}{R_1^2} = G\frac{M_{Sol}M_{Satelite}}{R_2^2} ---1$$

Desarrollo de ecuación 1

$$F_{Tierra} = F_{sol}$$
$$G\frac{M_{Tierra}M_{Satelite}}{R_1^2} = G\frac{M_{Sol}M_{Satelite}}{R_2^2} ---1$$
$$\frac{M_{Tierra}}{R_1^2} = \frac{M_{Sol}}{R_2^2}$$
$$\frac{R_2^2}{R_1^2} = \frac{M_{Sol}}{M_{Tierra}}$$
$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = \frac{M_{Sol}}{M_{Tierra}}$$

$$\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \sqrt{\left(\frac{M_{Sol}}{M_{Tierra}}\right)}$$
$$R_2 = R_1\sqrt{\left(\frac{1.99x10^{30}kg}{5.98x10^{24}kg}\right)}$$
$$R_2 = 576.8673 R_1 ----1$$
$$Como$$
$$R_1 + R_2 = 150x10^{9} ---2$$

Resolviendo 1 en 2

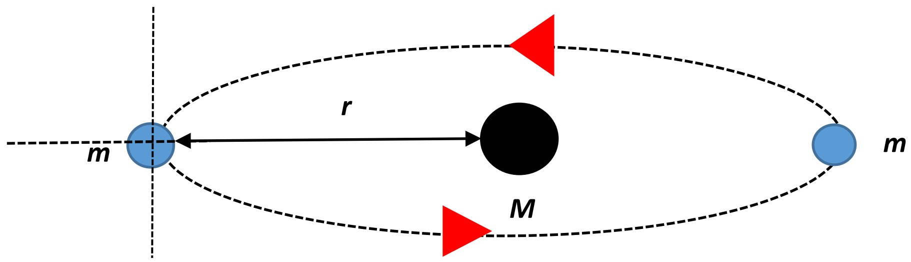
$$R_1 + (576.8673 R_1) = 150 x 10^9 \; --- 2$$
$$577.867 R_1 = 150 x 10^9$$
$$R_1 = \frac{150 x 10^9}{577.867}$$
$$R_1 = 259.575 x 10^6 m$$

$en..1$

$$R_2 = 576.867 R_1$$
$$R_2 = 1.4974 x 10^{11} m$$

Ejercicio 18 Resnick 61

Cierto sistema de estrellas triples consta de dos estrellas cada una de masa "m", que giran en torno a una estrella de masa "M" en la misma órbita circular. Las dos estrellas están situadas en los extremos opuestos de un diámetro de la orbita circular, véase la figura. En cuentre una expresión que permita encontrar el periodo de giro, considerando que el radio de la órbita es "r".



Desde el punto de vista circular para "m"

$$F_C = ma_c$$

$$F_C = m\left(\frac{v^2}{r}\right)---1$$

$$como..v = \omega r ---2$$

$$y....\omega = \frac{2\pi}{T}---3$$

$$3..en..2$$

$$v = \left(\frac{2\pi}{T}\right)r---4$$

$$4..en..1$$

$$F_C = \frac{m}{r}\left(\frac{2\pi}{T}r\right)^2$$

$$Fc = \frac{4\pi^2 rm}{T^2}----5$$

desde el punto de vista gravitacional

$$F_G = F_m + F_M$$

$$F_G = G\frac{mm}{(2r)^2} + G\frac{mM}{(r)^2}$$

$$F_G = G\frac{mm}{4r^2} + G\frac{mM}{r^2}$$

$$F_G = \frac{G}{r^2}\left(\frac{mm}{4} + \frac{mM}{1}\right)$$

$$F_G = \frac{G}{r^2}\left(\frac{m^2 + 4mM}{4}\right)---6$$

$$F_G = \frac{Gm}{r^2}\left(\frac{m+4M}{4}\right)$$

Igualando 5 con 6

$$Fc = F_G$$

$$\frac{4\pi rm}{T^2} = \frac{Gm}{r^2}\left(\frac{m+4M}{4}\right)$$

$$T^2 = \frac{16\pi^2 r^3}{G(m+4M)}$$

$$T = \sqrt{\frac{16\pi^2 r^3}{G(m+4M)}}$$

$$T = \frac{4\pi r^{3/2}}{\sqrt{G(m+4M)}}$$

Trabajo de una Fuerza Constante

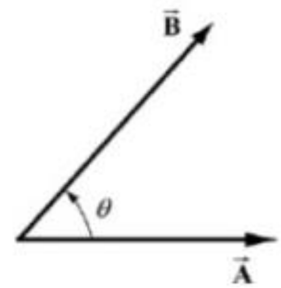
Producto Punto o Producto Escalar entre Vectores

El producto escalar de dos vectores cualesquiera** $\vec{A}.y.\vec{B}$ **da como resultado una cantidad de** tipo escalar **y es igual al producto de las magnitudes de los dos vectores y el coseno del ángulo** θ **entre ellos. (**pudiendo ser ángulo mayor o ángulo menor**)

Existen dos expresiones para poder evaluar el producto punto

a) ***Si conocemos las magnitudes de los vectores*** $\vec{A}.y.\vec{B}$ ***y el ángulo*** θ ***entre ellos, ya sea el ángulo menor o mayor.*** $\vec{A}\bullet\vec{B} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta ....1$

$$\vec{\mathbf{A}}\cdot\vec{\mathbf{B}} = AB\cos\theta$$

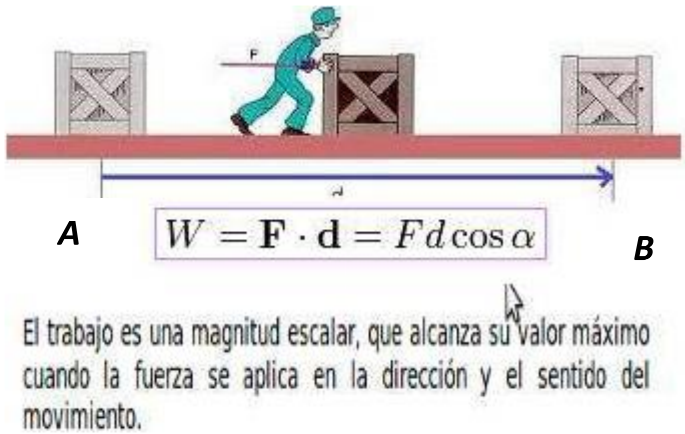


b) ***Si los vectores los tenemos expresados en sus componentes unitarios***

$$\vec{A} = Ax_i + Ay_j + Az_k.......y.......\vec{B} = Bx_i + By_j + Bz_k$$

$$\vec{A}\bullet\vec{B} = (AxBx + AyBy + AzBz)..............2$$

Análogamente para trabajo (W) realizado <u>**por una fuerza constante**</u>



Variables de la expresión de Trabajo (W)

$$W_{neto} = \left|\vec{F}_{neta}\right|\left|\vec{S}\right| \cos\theta........1$$

$$W_{neto} = Trabajo \Rightarrow [Nm] = [Joule] = [J]$$

$$\left|\vec{F}_{neta}\right| = Newton \Rightarrow [N]$$

$$\left|\vec{S}\right| = \left[\vec{d}\,\right] = Desplazamiento \Rightarrow [m]$$

$$\alpha = \theta = ángulo...mayor...o...menor...entre...F...y...d$$